



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Topología digital

Helena Nina del Río Ares

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Topología digital

Helena Nina del Río Ares

Julio 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Geometría y topología.
Título: Topología digital.
Breve descripción del contenido
El objetivo de este TFG es dar una introducción al campo de la topología digital. Este tema de investigación surgió en relación con el procesamiento de imágenes. También es importante en muchas de las aplicaciones de inteligencia artificial que se ocupan de estructuras espaciales. En este TFG, se estudiará un modelo simple pero representativo del plano euclidiano, llamado plano digital y cómo introducir topología interesantes (aplicables) en el conjunto de píxeles de una imagen digital.
Recomendaciones
Tener cursadas las materias de Topología de Espacios Euclidianos, Topología General y Topología de Superficies.

Índice general

Resumen	VII
Introducción	IX
0.1. Introducción	IX
1. Preliminares	1
1.1. Preliminares	1
1.1.1. Espacios Topológicos	1
1.1.2. Continuidad	4
1.1.3. Espacios metrizablees y axioma de separación de Hausdorff	6
1.1.4. Topología producto y topología cociente	7
1.1.5. Compacidad y conexidad	8
2. Plano digital de Khalimsky	11
2.1. Plano digital de Khalimsky	11
2.1.1. La recta digital de Khalimsky	11
2.1.2. Construcción del plano digital de Khalimsky	14
2.1.3. Conexidad por caminos del plano digital de Khalimsky	17
3. Teorema de la curva de Jordan	19
3.1. Teorema de la curva de Jordan	19
3.1.1. Teorema de la Curva de Jordan	19
3.1.2. Teorema de la Curva de Jordan en el plano digital	28
3.1.3. Diferencias entre el Teorema de la curva Jordan clásico y digital	37
4. Almacenamiento de imágenes digitales	41
Bibliografía	45

Resumen

Las imágenes que representan el mundo que conocemos, hablando en términos de topología, son espacios conexos y continuos. Dada una imagen, ¿cómo se podría obtener una discretización de la misma y al mismo tiempo preservar su estructura continua y conexa para mantener las relaciones topológicas de la imagen original?.

En este Trabajo de Fin de Grado veremos que el plano digital de Khalimsky nos proporciona un modelo efectivo para este proceso. Es por esto por lo que se le dedicará una atención especial a intentar comprender cómo son los elementos que conforman este espacio y qué propiedades tiene.

Abstract

The images that represent the world we know, in terms of topology, are continuous, connected spaces. Given an image, how could one obtain a discretization of it and at the same time preserve its continuous and connected structure in order to maintain the topological relations of the original image? In this Final Degree Project we will see that the Khalimsky digital plane provides us with an effective model for this process. This is why special attention will be devoted to trying to understand what the elements that make up this space are like and what properties it has.

Introducción

0.1. Introducción

Hoy en día las imágenes digitales han cobrado una gran relevancia en nuestras vidas, ya que constituyen una fuente de información visual muy poderosa. Están presentes, desde en la pantalla de la calculadora, hasta en las ilustraciones de un libro.

En este trabajo estudiaremos los aspectos topológicos de una imagen digital, que será representada como un conjunto de píxeles en el plano (ver Figuras 4.1 y 4.2). Estos aspectos serán cruciales en el procesamiento de imágenes, disciplina que se ocupa de la creación, el almacenamiento, la manipulación y la presentación de imágenes digitales. En el libro [1] se plantean unos posibles problemas que pueden surgir en el procesamiento de imágenes que involucran conceptos topológicos :

- Al crear una imagen digital, ¿Cómo se puede garantizar que las relaciones espaciales entre los elementos reales se representen correctamente en la representación digital de los mismos?
- Al almacenar una imagen digital, ¿Existen características de la estructura de la imagen que permitan un método más eficiente que el de almacenar información sobre cada píxel individual?
- Al transformar digitalmente una imagen, ¿Cómo se pueden preservar los aspectos topológicos de la misma?

Se mostrarán resultados topológicos que sugieren un proceso de almacenamiento eficaz para las imágenes digitales, entre ellos el Teorema de la Curva de Jordan digital, que enunciaremos y demostraremos el Capítulo 3.

Los primeros resultados y avances obtenidos en la materia de topología digital son del siglo XX y se los debemos a *Azriel Rosenfeld(1931-2004)*. En su artículo [9] introduce el modelo inicial de lo que más adelante llamaremos el plano digital. Es importante recalcar que en su trabajo, no dota al conjunto discreto de píxeles de una topología, si no lo que hace es

definir sobre él conceptos análogos a los que definimos en espacios topológicos.

Por ejemplo, los conceptos de 4-adyacencia y 8-adyacencia en las imágenes digitales, las definiciones de 4 (8)-arcos, 4 (8)-curvas fueron útiles en las imágenes digitales para obtener muchos resultados importantes. Usaremos el concepto de 4-adyacencia en el Capítulo 4 donde se muestra un proceso de almacenamiento para imágenes digitales usando propiedades topológicas. Sin embargo su aplicación es limitada debido a su naturaleza no topológica. No se pueden utilizar para espacios digitales de mayor dimensión.

Más adelante, en 1977, *Efim Khalimsky* introduce un espacio topológico localmente finito que es utilizado para el análisis de las imágenes digitales [5] y será lo que estudiaremos con detalle en este trabajo. La topología de Khalimsky, está definida sobre \mathbb{Z} y sus abiertos básicos son:

$$\{\{2n + 1\} | n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{2n - 1, 2n, 2n + 1\} | n \in \mathbb{Z}\}$$

Si consideramos el producto de n copias de este espacio tenemos el espacio \mathbb{Z}^n (dotado de la topología producto), a este espacio producto se le conoce como n -espacio de Khalimsky. Estaremos interesados en el caso $n = 2$ (plano de Khalimsky).

En su trabajo, Khalimsky adapta los conceptos topológicos básicos como la conexidad, así como resultados importantes como el del Teorema de la curva de Jordan al espacio de Khalimsky. En la Sección 2.1.1. del Capítulo 2 nos ocuparemos de definir con detalle la topología de Khalimsky sobre \mathbb{Z} , a este espacio se le denominará recta de Khalimsky, más adelante, en la Sección 2.1.2., consideraremos el Plano Digital de Khalimsky como el espacio resultante de hacer al producto de dos copias de la recta de Khalimsky simplemente utilizando la definición de topología producto.

En el Capítulo 3 enunciaremos y demostraremos el Teorema de la Curva de Jordan clásico y el Teorema de la curva de Jordan de Khalimsky.

Por otra lado *Vladimir Kovalevsky* (2006) desarrolla independientemente una teoría similar desde un punto de vista más práctico. En su artículo [6] muestra un nuevo conjunto de axiomas de topología digital. Estos axiomas definen una clase de espacios topológicos localmente finitos. Una propiedad importante de los espacios localmente finitos que satisfacen los axiomas es que la relación de vecindad es antisimétrica y transitiva.

Aunque es interesante su mención, sus resultados no serán estudiados en este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Preliminares

En este apartado se pretende introducir algunos conceptos básicos y esenciales de la Topología General, así como de otros aspectos del trabajo para facilitar la comprensión del lector.

1.1.1. Espacios Topológicos

Dado un conjunto X , se puede construir un nuevo conjunto $\mathcal{P}(X)$ denominado partes de X que está formado por todos los subconjuntos de X .

Definición 1.1. Una topología τ en un conjunto X es una colección de partes de X que verifica:

- $X \in \tau$.
- $\emptyset \in \tau$.
- Si $U_\alpha \in \tau \forall \alpha \in A$ entonces $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$.
- Si U y V pertenecen a τ entonces $U \cap V$ también.

A la dupla (X, τ) se le llama espacio topológico. A los conjuntos de la topología se le llaman conjuntos abiertos.

Ejemplo 1.2. Un ejemplo de topología que cabe mencionar, ya que se harán múltiples referencias a ella a lo largo del trabajo, es la topología discreta, que viene definida por la colección $\mathcal{P}(X)$ de todos los subconjuntos de X , es decir, cualquier subconjunto de X es un abierto. Se suele denotar por τ_D . Un conjunto dotado de la topología discreta se dice que es un espacio topológico discreto.

Ejemplo 1.3. Otro ejemplo recurrente es la topología usual de \mathbb{R} , que se denota por τ_u y viene definida por la colección:

$$\tau_u = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{R} \mid U \text{ puede escribirse como unión de intervalos abiertos de } \mathbb{R}\}$$

Definición 1.4. Sea X un espacio topológico y A un subconjunto de X . Se dice que $x \in A$ es un punto interior de A si $\exists U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq A$. Al conjunto de todos los puntos interiores de A se le denomina interior de A . De manera equivalente se define el interior de A como el mayor abierto de X contenido en A .

Definición 1.5. Dado un espacio topológico (X, τ) , se le llaman conjuntos cerrados del espacio topológico a los complementarios de los abiertos.

Definición 1.6. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subset X$ un subconjunto de X . Diremos que $x \in X$ es adherente a A si para cada entorno abierto de x , U_x , se verifica $U_x \cap A \neq \emptyset$. Se define la adherencia de A en X (se denota por \bar{A}) como el conjunto de puntos adherentes de A . De manera equivalente se define la adherencia de A como el menor cerrado de X que contiene a A .

Definición 1.7. Dado un espacio topológico (X, τ) y S un subconjunto de X , se define la frontera de S , ∂S , como la intersección de la clausura de S con la clausura del complementario de S .

Definición 1.8. Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subconjunto de X . Se le llama topología relativa de A en (X, τ) a la colección $\tau_{|A} = \{U \cap A \mid U \in \tau\}$. El espacio topológico $(A, \tau_{|A})$ se dice subespacio de (X, τ) .

Definición 1.9. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia $\mathcal{B} \subset \tau$ se dice que es una base para τ si cada abierto, es decir cada elemento de τ , se puede escribir como una unión de elementos de \mathcal{B} .

Proposición 1.10. Sea $\mathcal{B} \subset \tau$, las siguientes propiedades son equivalentes:

- \mathcal{B} es una base de τ .
- Para cada $U \in \tau$ y cada $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

Fijada una base \mathcal{B} , a sus elementos se le llaman abiertos básicos.

Proposición 1.11. Sea X un conjunto y $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ una colección de subconjuntos de un conjunto X . La colección

$$\tau(\mathcal{B}) = \{U \subseteq X \mid U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha, B_\alpha \in \mathcal{B}\} \cup \{\emptyset\}$$

es una topología sobre X si y sólo si:

- $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.
- Si $x \in B_1 \cap B_2$, donde $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Además, en este caso \mathcal{B} es base de la topología $\tau(\mathcal{B})$ y diremos que $\tau(\mathcal{B})$ es la topología generada por la base \mathcal{B} .

Definición 1.12. Sea X un conjunto y $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ una colección de subconjuntos de X que verifica:

- Para cada $x \in X$, existe al menos un elemento básico que contiene a x .
- Si $x \in B_1 \cap B_2$ siendo B_1 y B_2 elementos básicos, entonces existe un elemento básicos B_3 de forma que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Diremos que \mathcal{B} es una base de topología en X .

Ejemplo 1.13. Pongamos el ejemplo de la recta digital de Khalimksy que estudiaremos con más detalle en la Sección 2.1.1. del Capítulo 2.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, se define:

$$B(n) = \begin{cases} \{n\} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \{n-1, n, n+1\} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

La colección $\mathcal{B} = \{B(n) | n \in \mathbb{Z}\}$ verifica las dos condiciones de la proposición 1.9. por lo tanto es una base de la topología sobre \mathbb{Z} . La topología generada por \mathcal{B} sobre \mathbb{Z} se denomina topología de la recta digital de Khalimsky y a \mathbb{Z} dotado de la anterior topología se le denomina recta digital de khalimsky.

Demostración.

La primera condición se cumple trivialmente ya que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $n \in B(n)$, siendo $B(n) \in \mathcal{B}$.

Ahora para probar que se cumple la segunda condición veamos cuándo se intersecan dos abiertos básicos. Consideremos $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ dos puntos impares y $n_1 \neq n_2$. Entonces $B(n_1) \cap B(n_2) = \{n_1\} \cap \{n_2\} = \emptyset$.

Sean ahora $n \in \mathbb{Z}$ un punto impar y consideremos el punto $n+1 \in \mathbb{Z}$ que será par. Entonces se verifica $B(n) \cap B(n+1) = \{n\} \cap \{n, n+1, n+2\} = \{n\}$. Luego, siguiendo la notación de la proposición 1.9. tomando $B_3 = B(n)$ y $B_1 = B(n) = \{n\}$ y $B_2 = B(n+1) = \{n, n+1, n+2\}$, se verifica $n \in B_3 = B_1 \cap B_2$. Esto se verifica si escogemos cualesquiera dos puntos consecutivos en \mathbb{Z} .

Ahora si escogemos dos números pares consecutivos $m, m+2 \in \mathbb{Z}$ (por ejemplo el 2 y el 4), tenemos que $B(m) \cap B(m+2) = \{m-1, m, m+1\} \cap \{m+1, m+2, m+3\} = \{m+1\}$.

Como m es par, $m+1$ es impar luego, siguiendo la notación de la proposición 1.9. tomando $B_3 = B(m+1) = \{m+1\}$ y $B_1 = B(m) = \{m-1, m, m+1\}$ y $B_2 = B(m+2) = \{m+1, m+2, m+3\}$, se verifica $m+1 \in B_3 = B_1 \cap B_2$.

En el resto de los casos la intersección de dos abiertos básicos será siempre el vacío. Por lo que damos por finalizada la demostración. \square

Definición 1.14. Dados un espacio topológico (X, τ) y un punto $x \in X$, se dice que $A \subset X$ es un entorno de x si $\exists U \in \tau$ tal que $x \in U \subset A$.

Definición 1.15. Dados un espacio topológico (X, τ) y un punto $x \in X$, un abierto $U \in \tau$ que contiene al punto x , se dice un entorno abierto de x .

Sea X un espacio topológico y $x \in X$ denotaremos, respetando la notación que se sigue en [5], por $N(x)$ la intersección de todos los entornos de x . Los espacios que verifican que $N(x)$ es siempre un entorno de x fueron introducidos y estudiados por *Aleksandrov (1937)*. Hacemos notar que $x \in \{\bar{y}\}$ si y sólo si $y \in N(x)$.

1.1.2. Continuidad

Definición 1.16. Dados dos espacios topológicos (X, τ_X) y (Y, τ_Y) diremos que una aplicación $f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua si la imagen inversa de todo elemento de τ_Y es un elemento de τ_X .

Proposición 1.17. Sean $f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ y $g: (Y, \tau_Y) \rightarrow (Z, \tau_Z)$ dos aplicaciones continuas. Entonces la composición $g \circ f: (X, \tau_X) \rightarrow (Z, \tau_Z)$ es continua.

Proposición 1.18. Sean $f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación entre dos espacios topológicos. Entonces son equivalentes:

- f es continua.
- La imagen inversa de cualquier cerrado en la topología de Y es un cerrado en la topología de X .
- Si $\mathcal{B} \subseteq \tau_Y$ es una base para la topología τ_Y de Y , entonces $\forall B \in \mathcal{B}$ se verifica que $f^{-1}(B) \in \tau_X$.

Lema 1.19 (Del pegado). Sea (X, τ_X) un espacio topológico y sean A y B dos subconjuntos cerrados (ó abiertos) de X tal que $A \cup B = X$. Si $f: A \rightarrow Y$ continua, $g: B \rightarrow Y$ continua y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$. Entonces $h: X \rightarrow Y$ definida de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

es continua.

Este lema es muy útil, lo usaremos en una parte de la demostración del Teorema de la Curva de Jordan clásico. De manera más general, podemos definir la función combinada de la siguiente manera:

Definición 1.20. Sean X e Y conjuntos, $\{A_i, i \in I\}$ un recubrimiento de X con índices en un conjunto I , $\{f_i : A_i \rightarrow Y, i \in I\}$ una familia de aplicaciones tales que

$f_i|_{A_i \cap A_j} = f_j|_{A_i \cap A_j}$ para todo par de índices $i, j \in I$, definimos una nueva aplicación

$f : X \rightarrow Y$ de la siguiente manera:

$f(x) = f_i(x)$ si $x \in A_i$. Esta función se denomina aplicación combinada de la familia $\{f_i\}$.

Lema 1.21. *La función combinada de una familia de aplicaciones continuas tales que sus dominios formen un recubrimiento abierto de un espacio X es una aplicación continua. La aplicación combinada de una familia de aplicaciones continuas tales que sus dominios forman una cobertura cerrada y finita de un espacio X es una aplicación continua.*

Definición 1.22. Sea X un espacio topológico y A un subespacio de X , la aplicación $r : X \rightarrow A$ es una retracción si $r \circ i = id_A$. Diremos que A es un retracto de X .

Homeomorfismos

Definición 1.23. Dados dos espacios topológicos (X, τ_X) e (Y, τ_Y) , una aplicación biyectiva $f : X \rightarrow Y$ se dice que es un homeomorfismo si es continua y su inversa también es continua.

Dos espacios topológicos son homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos.

Definición 1.24. Una propiedad topológica o invariante topológica es una propiedad de un espacio topológico que es invariante bajo un homeomorfismo.

Definición 1.25. Un embebimiento es una aplicación $f : X \rightarrow Y$ tal que la aplicación que determina con dominio X y rango $f(X)$, como subespacio de Y , es un homeomorfismo.

A continuación en el libro [1], se enuncian las siguientes definiciones que serán esenciales para enunciar y demostrar el Teorema de la curva de Jordan.

Definición 1.26. Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $f : [-1, 1] \rightarrow X$ es un embebimiento, la imagen de f se dice que es un arco en X , y si $f : S^1 \rightarrow X$ es un embebimiento, a la imagen de f se le llama curva simple cerrada en X (ver Figura 1.1).

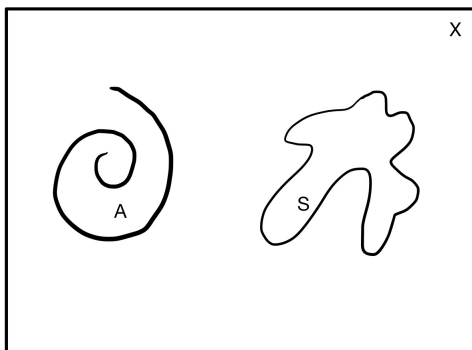


Figura 1.1: A es un arco en X y S es una curva cerrada simple en X

1.1.3. Espacios metrizablees y axioma de separación de Hausdorff

Definición 1.27. Una métrica en un conjunto M es una aplicación d con valores reales $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que:

- $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0$ si $x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$, $x, y \in M$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $x, y, z \in M$

El par (M, d) se denomina espacio métrico.

Definición 1.28. Se dice que el espacio topológico (X, τ) es un espacio metrizable si su topología se puede definir a partir de una métrica.

Teorema 1.29 (Teorema de Extensión de Tietze para espacios Metrizablees). *Sea A subconjunto cerrado de un espacio metrizable X . Toda aplicación continua $f: A \rightarrow [-1, 1]$ puede ser extendida a X .*

Definición 1.30. Un espacio topológico (X, τ) se dice que es Hausdorff si, para cada par de puntos $x, y \in X$ existen dos conjuntos abiertos disjuntos U y V con $x \in U$ e $y \in V$.

Ejemplo 1.31. La recta digital no es un espacio Hausdorff.

Demostración.

Consideremos por ejemplo los puntos $3, 2 \in \mathbb{Z}$. El menor abierto (básico) que contiene a 2 es $B(2) = \{1, 2, 3\}$, es decir, cualquier abierto que contenga al 2 contiene a $B(2)$ y como $3 \in B(2)$, contiene al 3, por lo que no se cumple la definición ya que no existen dos abiertos disjuntos que contengan al 2 y al 3 respectivamente. \square

1.1.4. Topología producto y topología cociente

En este apartado se muestra cómo se pueden construir espacios topológicos a partir de los ya conocidos. Veremos de manera muy breve el espacio producto y el espacio cociente.

Definición 1.32. Dados dos espacios topológicos (X, τ_X) e (Y, τ_Y) , se define la topología producto $\tau_X \times \tau_Y$ sobre el conjunto producto $X \times Y$ como aquella generada por la base:

$$\mathcal{B} = \{U \times V \subseteq X \times Y \mid U \in \tau_X, V \in \tau_Y\} \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$$

Además el conjunto $X \times Y$ dotado de dicha topología se dirá el espacio producto de los espacios (X, τ_X) e (Y, τ_Y) .

Lema 1.33. Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dos espacios topológicos. Supongamos que \mathcal{B}_X y \mathcal{B}_Y bases de las topologías τ_X y τ_Y respectivamente. Entonces la colección:

$$\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 \subseteq X \times Y \mid B_1 \in \mathcal{B}_X \subseteq \tau_X, B_2 \in \mathcal{B}_Y \subseteq \tau_Y\}$$

es una base para la topología producto $\tau_X \times \tau_Y$ definida sobre $X \times Y$.

Ejemplo 1.34. Definiremos el plano digital como el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dotado de la topología producto $\tau_{digital} \times \tau_{digital}$.

Pasaremos ahora a definir la topología cociente, para ello se deben conocer conceptos básicos de teoría de conjuntos.

Definición 1.35. Sea X un conjunto y R una relación de equivalencia definida sobre X . Llamaremos conjunto cociente, que denotaremos por X/R , al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia (diferentes) de X . Llamaremos aplicación cociente a la aplicación sobreyectiva $p: X \rightarrow X/R$ que lleva cada elemento $x \in X$ en su clase $[x] \in X/R$.

Definición 1.36. Dados un espacio topológico (X, τ) , R una relación de equivalencia definida sobre X y $p: X \rightarrow X/R$ la aplicación cociente. Se le llama espacio cociente de X por R al espacio topológico $(X/R, \tau_p)$ donde τ_p se define:

$$\tau_p = \{V \subseteq X/R \mid p^{-1}(V) \in \tau\}$$

Es la topología cociente.

1.1.5. Compacidad y conexidad

Definición 1.37. Un espacio topológico es compacto si toda cobertura de X admite una subcobertura finita.

Proposición 1.38. *La imagen de un compacto por una aplicación continua es un conjunto compacto.*

Teorema 1.39 (Generalización del Teorema de Weierstrass). *Sea (X, τ) un espacio topológico y $K \subset X$ un conjunto compacto. Si $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces existen $x_1, x_2 \in K$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para cualquier $x \in K$.*

Definición 1.40. Sea X un espacio topológico. Una separación de X es un par U, V de abiertos no triviales (distintos del total o del vacío) de X tal que $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = X$. El espacio X se dice que es conexo si no existe una separación de X .

A continuación recogemos de [5] las siguientes definiciones relevantes:

Definición 1.41. Dos puntos x e y de un espacio topológico (X, τ) se dicen adyacentes si $x \neq y$, el conjunto $\{x, y\}$ es conexo. Hacemos notar que el conjunto $\{x, y\}$ es conexo si y sólo si $x \in N(y)$ ó $y \in N(x)$.

Dos puntos x, z son 2-adyacentes si $x \neq z$; x y z no son adyacentes y existe un tercer punto $y \in Y$ tal que x e y son adyacentes, e y y z también lo son.

A continuación definimos la siguiente relación de equivalencia:

Sea X un espacio topológico:

$x \sim y$ si existe un subconjunto conexo de X conteniendo a x y a y .

Ver que es una relación de equivalencia es inmediato. Claramente se verifica $x \sim x$ ya que $\{x\}$ es conexo, es simétrica y si x e y pertenecen a un conjunto conexo A e y y z están en otro conjunto conexo B , el conjunto $A \cup B$ es conexo y contiene a x y a z .

Definición 1.42. Las clases de equivalencia por la relación anterior se llaman componentes conexas de X . La componente conexa que contiene al punto $x \in X$ se denota $C(x)$.

Teorema 1.43. *La componente conexa $C(x)$ de un punto $x \in X$ es el mayor subconjunto conexo de X que contiene a x . Un espacio topológico es la unión (disjunta) de sus componentes.*

Corolario 1.44. *Las componentes conexas de un espacio topológico X son conjuntos cerrados en X .*

Definición 1.45. Un espacio topológico se dice que es totalmente desconexo si los únicos subconjuntos conexos están formados por conjuntos unitarios. Equivalentemente, todas las componentes conexas son conjuntos unitarios.

Definición 1.46. Un camino en un espacio topológico arbitrario X es una aplicación continua $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$. Diremos que, α es un camino entre dos puntos de $x, y \in X$ si, $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$.

Definición 1.47. Un espacio topológico es conexo por caminos si, para cada par de puntos, existe un camino entre ellos y contenido en dicho conjunto.

Proposición 1.48. *La imagen por una aplicación continua de un espacio conexo por caminos es conexo por caminos. En particular, un espacio cociente de un espacio topológico conexo por caminos es conexo por caminos.*

Proposición 1.49. *Todo espacio conexo es conexo por caminos.*

Corolario 1.50. *La conexidad por caminos es una propiedad topológica.*

Definición 1.51. Dos caminos f y f' , que aplican en el intervalo I en X , se dice que son homotópicos por caminos si tienen el mismo punto inicial de x_0 y el mismo punto final x_1 , y si existe una aplicación continua $F: I \times I \rightarrow X$ tal que::

$$F(s, 0) = f(s), F(s, 1) = f'(s), F(0, t) = x_0 \text{ y } F(1, t) = x_1,$$

Para cada $s \in I$ y para cada $t \in I$. La aplicación F recibe el nombre de homotopía de caminos entre f y f' .

Definición 1.52. Si f es un camino en X de x_0 a x_1 , y g es un camino en X de x_1 a x_2 definimos el producto de $f * g$ de f y g como el camino h , dado por:

$$h = \begin{cases} f(2s) \text{ para } s \in [0, 1/2] \\ g(2s - 1) \text{ para } s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Definición 1.53. Sea X un espacio topológico y x_0 un punto de X . Un camino en X comienza y acaba en x_0 se llama lazo basado en x_0 . El conjunto de las clases de homotopía de caminos asociadas a los laos basados en x_0 , con la operación producto de caminos $*$ se denomina grupo fundamental de X relativo al punto base x_0 . Se denota por $\pi_1(X, x_0)$.

Las demostraciones de los enunciados expuestos en esta sección se pueden encontrar en los libros [7] ó [8].

Capítulo 2

Plano digital de Khalimsky

2.1. Plano digital de Khalimsky

2.1.1. La recta digital de Khalimsky

Introduciremos en primer lugar la recta digital de Khalimsky como el conjunto \mathbb{Z} dotado de la topología de Khalimsky, ya que más adelante definiremos el plano digital de Khalimsky como el espacio producto de dos rectas de Khalimsky.

La topología de la recta digital de Khalimsky es aquella generada por la siguiente base topológica sobre \mathbb{Z} : $\mathcal{B} = \{B(n) | n \in \mathbb{Z}\}$, donde

$$B(n) = \begin{cases} \{n\} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \{n-1, n, n+1\} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Vimos en el Ejemplo 1.13. que efectivamente \mathcal{B} verifica las condiciones de la proposición 1.10. por lo que es una base de la topología sobre \mathbb{Z} (ver Figura 2.1).

Estudiamos ahora la recta digital de Khalimsky como una discretización de la recta real \mathbb{R} . Esta idea es fundamental en el procesamiento de imágenes digitales.

La recta de Khalimsky es un espacio cociente de la recta real (\mathbb{R}, τ_u) , hay varias formas de probarlo. En [5], Khalimsky define la siguiente aplicación $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ para expresar esta idea. Queremos definir $f(x)$ de forma que sea el entero más cercano a x . El problema surge cuando $x = n + \frac{1}{2}$. Comencemos explicando como surge la topología de Khalimsky.

Consideremos la aplicación cociente $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ que identifica a cada $x \in \mathbb{R}$ con el entero más cercano. El problema surge cuando x es de la forma $x = n + 1/2, n \in \mathbb{Z}$. En este caso se tienen dos opciones, podemos definir $f(n + 1/2) = n$ ó $f(n + 1/2) = n + 1$. La topología de Khalimsky surge de la elección de identificar los puntos de la forma $n + 1/2$ con el entero



Figura 2.1: Abierto básicos de la recta digital de Khalimsky

par más cercano. De esta forma, el intervalo cerrado $[-1/2, 1/2]$ se identifica con el punto 0, luego $\{0\}$ será un conjunto cerrado en la topología de Khalimsky.

De otra manera, en el libro [1] se define la aplicación cociente p que viene dada por :

$$p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \longmapsto p(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ n & \text{si } x \in (n-1, n+1) \text{ y } n \in \mathbb{Z} \text{ impar} \end{cases}$$

Recordamos que en \mathbb{Z} estamos considerando la topología cociente, es decir, consideramos $\tau_p = \{U \subset \mathbb{Z} | p^{-1}(U) \text{ es un abierto en } \mathbb{R}\}$.

Por lo tanto, si n es un entero impar, $p^{-1}(\{n\}) = (n-1, n+1)$ que es un abierto en \mathbb{R} con la topología usual, luego si n es impar, $\{n\}$ es un abierto en \mathbb{Z} .

Por otro lado, si n es un entero par, tenemos que $\{n\}$ no es un abierto ya que $p^{-1}(\{n\})$ no es un abierto en \mathbb{R} . En el conjunto cociente el menor abierto que contiene un número par entero n es el conjunto $\{n-1, n, n+1\}$.

Definición 2.1. Un círculo digital de Khalimsky es un espacio cociente $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ de la recta de Khalimsky para $m \geq 4$ (ver Figura 2.2.).

Definición 2.2. Un intervalo digital de Khalimsky es un intervalo $[a, b] \cap \mathbb{Z}$ dotado de la topología de Khalimsky.

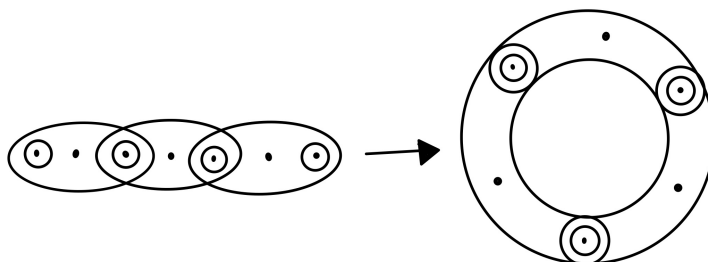


Figura 2.2: círculo digital de Khalimsky

La recta digital de Khalimsky modela una imagen digital unidimensional. Supongamos que tenemos una línea infinita de píxeles. Cada píxel tendrá asociado un número entero impar y además, como acabamos de ver, a cada número entero impar le corresponde un abierto básico de la forma $B(n) = \{n\}$. Por lo tanto, cada píxel será un abierto en la recta digital de Khalimsky. Por otro lado tenemos una estructura que refleja la adyacencia entre píxeles consecutivos. Cada número entero n par toma el papel de la frontera de los píxeles $n - 1$ y $n + 1$.

En resumen, podemos interpretar la recta digital de Khalimsky como una colección de píxeles, que serán conjuntos abiertos que se corresponden con los números impares, y los puntos cerrados, que son los números pares.

Para facilitar la comprensión de lo que se acaba de explicar añadiremos un dibujo (ver Figura 2.3.). En esta figura tenemos una biyección entre los píxeles, que aparecen representados en la parte inferior mediante cuadrados, y los puntos abiertos de la recta digital de Khalimsky. En la parte superior está dibujada un trozo de la recta digital de Khalimsky con sus abiertos básicos.

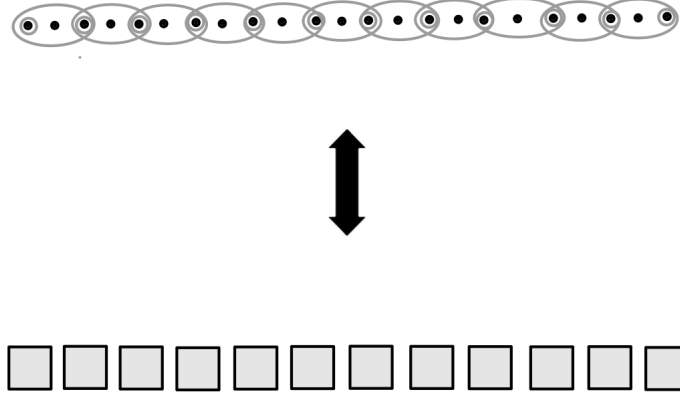


Figura 2.3: La recta digital de Khalimsky modela la línea de píxeles

2.1.2. Construcción del plano digital de Khalimsky

Definición 2.3. El plano de Khalimsky digital se define como el espacio producto de dos rectas digitales de Khalimsky.

Veamos cómo son sus abiertos básicos. Consideremos $p = (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

- Si n par y m es par entonces tendremos un abierto básico:

$$\{n-1, n, n+1\} \times \{m-1, m, m+1\} = \{(n-1, m-1), (n-1, m), (n-1, m+1), (n, m), (n, m-1), (n, m+1), (n+1, m), (n+1, m), (n+1, m+1)\}$$
- Si n impar y m par: $\{n\} \times \{m-1, m, m+1\} = \{(n, m-1), (n, m), (n, m+1)\}$
- Si n impar y m impar: $\{n\} \times \{m\} = \{(n, m)\}$
- Si n par y m impar: $\{n-1, n, n+1\} \times \{m\} = \{(n-1, m), (n, m), (n+1, m)\}$

Luego los abiertos básicos de la topología son:

$$B(n, m) = \begin{cases} \{(n-1, m-1), (n-1, m), (n-1, m+1), (n, m), (n, m-1), (n, m+1), \\ (n+1, m), (n+1, m), (n+1, m+1)\} \text{ si } n \text{ par y } m \text{ par,} \\ \{(n, m-1), (n, m), (n, m+1)\} \text{ si } n \text{ impar y } m \text{ par,} \\ \{(n, m)\} \text{ si } n \text{ impar y } m \text{ impar,} \\ \{(n-1, m), (n, m), (n+1, m)\} \text{ si } n \text{ par y } m \text{ impar.} \end{cases}$$

\mathbb{Z}^2 dotado de la topología generada por la base $\mathcal{B} = \{B(n, m) : (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$, es a lo que se le denomina plano digital de Khalimsky.

Observamos que, si n y m son impares, el conjunto unitario $\{(n, m)\}$ es un abierto, y a los puntos (n, m) se denominan puntos abiertos.

A los conjuntos unitarios $\{(n, m)\}$ con n y m par se denominan puntos cerrados y el menor abierto que los contiene es el conjunto formado por sus 8 puntos adyacentes, es decir:

Dado un punto cerrado $p = (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$B(p) = \{(n-1, m-1), (n-1, m), (n-1, m+1), (n, m), (n, m-1), (n, m+1), (n+1, m-1), (n+1, m), (n+1, m+1)\}.$$

Podemos expresarlo de la siguiente manera: $(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que: $\max(|n-k|, |m-l|) \leq 1$. Los puntos cuyas coordenadas son las dos impares, o las dos pares, los llamaremos puntos puros.

Si n par y m impar o viceversa diremos que (n, m) es un punto mixto y el menor abierto que los contiene es el conjunto formado por sus dos puntos adyacentes, verticalmente en el caso de que n sea impar o horizontalmente, en el caso de que m sea impar.

Para facilitar la comprensión y visualización de estos conceptos denotaremos los puntos mixtos con un rombo, los puntos cerrados con un círculo negro y los puntos abiertos con un círculo blanco (ver Figura 2.4).

Los puntos abiertos serán los píxeles de la imagen digital, mientras que los puntos mixtos y los puntos cerrados constituyen una estructura invisible que nos proporciona la conexidad. Desarrollaremos con más detalle esta idea en el Capítulo 4.

De la misma manera que en la recta digital, podemos obtener el plano digital como un espacio cociente, es decir lo podemos ver como una discretización del plano \mathbb{R}^2 mediante

2.1.3. Conexidad por caminos del plano digital de Khalimsky

Veremos que, efectivamente el plano digital de Khalimsky es conexo por caminos y cómo se definen los mismos.

Como \mathbb{R}^2 es conexo por caminos y q continua y sobreyectiva tenemos que, el espacio cociente \mathbb{Z}^2 es conexo por caminos, por lo tanto, para cada par de puntos en el plano digital podemos definir un camino $\alpha_{x_1, x_2}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}^2$ que describa una ruta entre dichos puntos moviéndose de forma vertical y horizontal. Dicho camino será en realidad un conjunto de puntos adyacentes en \mathbb{Z}^2 :

Lo más cómodo para probar esto es trabajar con el plano digital como un espacio cociente. Comencemos probando la conexidad por caminos en la recta digital para poder después extrapolar las conclusiones al plano digital.

Es claro que, dados dos puntos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$ la aplicación $\alpha_{x_1, x_2}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha_{x_1, x_2}(t) = (1-t)x_1 + tx_2 \quad \forall t \in [0, 1]$$

es continua y $\alpha_{x_1, x_2}(0) = x_1$ y $\alpha_{x_1, x_2}(1) = x_2$.

De esta forma, pasando al cociente $p(\alpha_{x_1, x_2}(t)) = \{n_1, n_1 + 1, \dots, n_2 - 1, n_2\}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ donde $p(x_1) = n_1, p(x_2) = n_2$, es un camino en \mathbb{Z} de n_1 a n_2 y está formado por todos los enteros comprendidos entre ellos. La continuidad se deduce directamente ya que es composición de aplicaciones continuas.

Khalimsky, Kopperman y Meyer en [5] definen un camino en cualquier espacio dotado de la topología de Khalimsky de la siguiente manera:

Definición 2.5. Sea X un espacio topológico. Un camino de Khalimsky en X es la imagen mediante una aplicación continua de un intervalo de Khalimsky .

Observamos que esta definición coincide con la que acabamos de obtener mediante composición de aplicaciones estudiando la recta digital de Khalimsky como un espacio cociente:

$$\{n_1, n_1 + 1, \dots, n_2 - 1, n_2\} = [n_1, n_2] \cap \mathbb{Z}$$

Veamos como podríamos definir ahora un camino en el plano digital usando las definiciones anteriores y adaptándolas adecuadamente. Nos desplazaremos de manera horizontal y vertical por los puntos del plano digital de la siguiente manera:

Consideremos dos puntos $(n_1, m), (n_2, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con $n_1 \neq n_2$ y la composición de aplicaciones $q \circ \tilde{f}: [0, 1] \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ que lleva $t \in [0, 1]$ en $\tilde{f}(t) = (\alpha_{x_1, x_2}(t), m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y pasa al cociente de la siguiente manera $q(\tilde{f}(t)) = \{(n_1, m), (n_1 + 1, m), \dots, (n_2 - 1, m), (n_2, m)\}$ que es un camino entre (n_1, m) y (n_2, m) que contiene a el conjunto de todos los puntos contenidos entre ellos (en la recta horizontal). La continuidad es inmediata ya que \tilde{f} y q

son continuas.

De manera análoga podríamos definir un camino que una dos puntos desplazándonos verticalmente fijando la primera coordenada:

Sean $(n, m_1), (n, m_2) \in \mathbb{Z}$ con $m_1 \neq m_2$ y la composición de aplicaciones $q \circ \bar{f}: [0, 1] \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ que lleva $t \in [0, 1]$ en $\bar{f}(t) = (n, \alpha_{x_1, x_2}(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y pasa al cociente de la siguiente manera $q(\bar{f}(t)) = \{(n, m_1), (n, m_1 + 1), \dots, (n, m_2 - 1), (n, m_2)\}$.

La continuidad es inmediata de nuevo ya que \bar{f} y q son continuas.

Además de la misma manera que en la recta digital de Khalimsky, podemos escribir:

$$[n_1, n_2] \cap \mathbb{Z} \times \{m\} = \{(n_1, m), (n_1 + 1, m), \dots, (n_2 - 1, m), (n_2, m)\}$$

$$\{n\} \times [m_1, m_2] \cap \mathbb{Z} = \{(n, m_1), (n, m_1 + 1), \dots, (n, m_2 - 1), (n, m_2)\}.$$

Capítulo 3

Teorema de la curva de Jordan

3.1. Teorema de la curva de Jordan

El objetivo de este apartado es introducir el Teorema de la Curva de Jordan clásico y extenderlo al plano digital.

3.1.1. Teorema de la Curva de Jordan

En 1887, *Camille Jordan* publica en su libro *Cours d'analyse*[3] la primera demostración de uno de los problemas más importantes de la geometría, el Teorema de la curva de Jordan: Toda curva cerrada separa al plano en dos componentes conexas (una de ellas acotada mientras que la otra no), y cada una de ellas tiene a dicha curva como frontera. Sin embargo la prueba de Jordan resultó no ser correcta. Fue en 1905, cuando *Oswald Veblen* (1880 - 1960), matemático estadounidense, logra realizar con éxito la demostración. Seguiremos la demostración que aparece en el libro *Introduction to Topology Pure and Applied* [1]. Pero antes enunciaremos algunos resultados previos.

Hacemos notar que en este trabajo prescindiremos de herramientas de Topología Algebraica, como los grupos de homología simplicial o singular, ya que trabajaremos tan sólo con dos dimensiones. Para dimensiones superiores es indispensable el uso de las mismas.

Teorema 3.1 (Teorema de la No-Retracción Para Dos Dimensiones). *No existe una retracción del disco D en la circunferencia S^1 .*

Demostración.

Podemos hacer la demostración fácilmente usando el grupo fundamental.

Supongamos que $r: D \rightarrow S^1$ retracción del disco en S^1 , por definición,

$r \circ i: S^1 \rightarrow D \rightarrow S^1$ es la identidad en S^1 luego se tendría que verificar:

$(r \circ i)_* = r_* \circ i_*: \pi(S^1, p) \rightarrow \pi(D, p) \rightarrow \pi(S^1, p)$ es la identidad sobre $\pi(S^1, p) = \mathbb{Z}$ pero

$\pi(D, p) = \{0\}$ sólo tiene un elemento. Luego no puede existir ninguna retracción del disco en en S^1 . \square

Teorema 3.2 (Teorema del Punto Fijo de Brouwer para dos dimensiones). *Toda función continua $f: D \rightarrow D$ del disco en sí mismo tiene un punto fijo.*

El teorema del punto fijo es consecuencia del teorema de no retracción.

En el libro [1] realizan la demostración probando directamente la siguiente equivalencia:

Teorema 3.3. *El disco D como subespacio de \mathbb{R}^2 , tiene la propiedad del punto fijo si y sólo si no existe una retracción de D en S^1 .*

Demostración.

Supongamos que existe una retracción $r: D \rightarrow S^1$. Consideramos la aplicación $q: S^1 \rightarrow D$, tal que $q(x) = -x$ siendo x un vector en el plano. La composición $q \circ r: D \rightarrow D$ es continua (composición de continuas) y no tiene ningún punto fijo. Luego si existe una retracción del disco D en la circunferencia S^1 , D no tiene la propiedad del punto fijo.

Por otro lado, supongamos que, la aplicación continua $f: D \rightarrow D$ no tiene punto fijo y veamos que entonces, existe una retracción $r: D \rightarrow S^1$.

Consideremos el vector en \mathbb{R} con origen en $f(x)$, pasa por x e interseca a S^1 en $r(x)$.

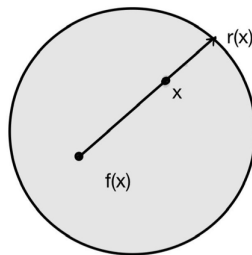


Figura 3.1: vector con origen en $f(x)$, pasa por x e interseca a S^1 en $r(x)$

Nótese que está bien definido ya que, por hipótesis, f no tiene puntos fijos.

Claramente r es la aplicación $r: D \rightarrow S^1$ y $r(x) = x$ para todo $x \in S^1$. Si probamos que r es continua ya tendríamos que r es una retracción.

Supongamos que U es un abierto en S^1 y $x \in r^{-1}(U)$. Para demostrar que $r^{-1}(U)$ es un abierto en D , veremos que existe un entorno abierto V de x tal que $r(V) \subset U$. Es fácil ver que se pueden encontrar O_1 y O_2 dos bolas abiertas centradas en $f(x)$ y x respectivamente, tal que, todo vector con origen en O_1 y pasando por O_2 interseca S^1 en U . Como f es continua, podemos encontrar un conjunto abierto V , que contenga a x y contenido en O_2 , tal que $f(V) \subset O_1$. Para todo $v \in V$, el vector de origen $f(v)$ pasando por v interseca S^1 en U . Por lo tanto $r(v) \in U$, luego r es continua.

Luego, de suponer que D no tiene la propiedad del punto fijo, hemos probamos que en-

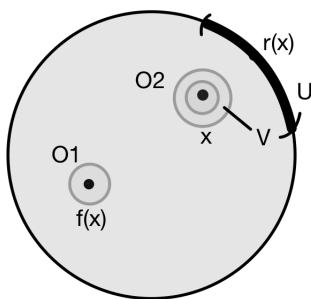


Figura 3.2: Existe un conjunto abierto V tal que $x \in V$ y $f(V) \subset U$

tonces existe una retracción de D en S^1 . \square

Teorema 3.4. *Sea D el disco en \mathbb{R}^2 y $A \subset D$ un arco en D . Entonces A es un retracto de D .*

Demostración.

Por la definición de arco existe un embebimiento $f: [0, 1] \rightarrow D$ en A . El intervalo $[0, 1]$ es compacto, luego A también lo será, lo que implica que A es un cerrado en D que es un espacio Hausdorff. El Teorema de extensión de Tietze nos garantiza que la función $f^{-1}: A \rightarrow [0, 1]$ tiene una extensión continua $g: D \rightarrow [0, 1]$. La función $f \circ g: D \rightarrow A$ es una retracción de D en A . Claramente es continua por ser composición de aplicaciones continuas y además $i \circ (f \circ g) = id_A$. \square

En el resultado siguiente, para simplificar la escritura denotaremos al rectángulo $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Nótese que definiremos los camino con dominio $[-1, 1]$ en vez de $[0, 1]$. Esto no supone ningún problema ya que ambos intervalos son homeomorfos.

Teorema 3.5. Sean $u, v: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1] \times [-1, 1]$ caminos en R tal que $u(-1) = (-1, 0)$, $u(1) = (1, 0)$, $v(0) = (0, -1)$ y $v(1) = (0, 1)$. Existen $s, t \in [-1, 1]$ tal que $u(s) = v(t)$.

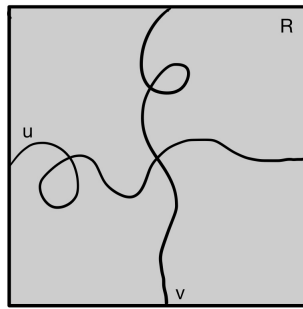


Figura 3.3: u y v se cruzan en R

Demostración.

Supongamos que $u(s) \neq v(t) \forall t, s \in [-1, 1]$. Expresando u y v en términos de sus coordenadas: $u(s) = (u_1(s), u_2(s))$ y $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$. Para cada $s, t \in [-1, 1]$ definimos:

$$M(s, t) = \max\{|u_1(s) - v_1(t)|, |u_2(s) - v_2(t)|\}$$

Hacemos notar que $M(s, t) > 0$ para todo $s, t \in [-1, 1]$. A continuación definimos $F: R \rightarrow R$ de manera que:

$$F(s, t) = \left(\frac{v_1(t) - u_1(s)}{M(s, t)}, \frac{u_2(s) - v_2(t)}{M(s, t)} \right)$$

La función F es continua y el rectángulo R es homeomorfo al disco en el plano, luego por el teorema del punto fijo de Brouwer, F tiene un punto fijo $(s^*, t^*) \in R$. Obsérvese que, para cada $s, t \in [-1, 1]$ se tiene que verificar:

$$\left| \frac{v_1(t) - u_1(s)}{M(s, t)} \right| = 1 \text{ o bien } \left| \frac{u_2(s) - v_2(t)}{M(s, t)} \right| = 1$$

Por lo tanto, la imagen de F es un subconjunto de la frontera de R que denotaremos $B = \partial R$. Esto implica que $(s^*, t^*) \in B$, luego $s^* = -1, s^* = 1, t^* = -1$ o $t^* = 1$. Cada una de estas igualdades lleva a una contradicción. Supongamos que $s^* = -1$, entonces

$$\frac{v_1(t^*) - u_1(s^*)}{M(s^*, t^*)} = -1$$

pero $(u_1(s^*), u_2(t^*)) = u(s^*) = u(-1) = (-1, 0)$, luego $u_1(s^*) = -1$ de donde se sigue que

$$\frac{v_1(t^*) - u_1(s^*)}{M(s^*, t^*)} \geq 0$$

Que claramente contradice a la anterior igualdad, luego, tal y como se quería demostrar, existen $s, t \in [-1, 1]$ de manera que $u(s) = v(t)$. \square

Teorema 3.6. *Sea U un conjunto abierto del plano. U es conexo si y sólo si es conexo por caminos.*

Teorema 3.7. *Sea U un conjunto abierto del plano. Las componentes conexas de U son conjuntos abiertos del plano.*

Demostración.

Sea U un conjunto abierto, U se puede escribir como la unión disjunta de sus componentes conexas que será por lo tanto, un abierto en el plano, de donde deducimos directamente que las componentes conexas de U son abiertos del plano.

Teorema 3.8. *Sea D el disco en el plano. Si $f: D \rightarrow D$ es continua y $f(x) = x \forall x \in S^1$, f es sobreyectiva.*

Demostración.

Si f no es sobreyectiva, entonces existiría una retracción de D en S^1 , lo cual es una contradicción ya que, como f tiene la propiedad del punto fijo, en virtud del Teorema 3.3. no puede existir una retracción del disco en S^1 . \square

Llegados a este punto, estamos en condiciones de demostrar el Teorema de la Curva de Jordan:

Teorema 3.9 (Teorema de la curva de Jordan). *Toda curva simple cerrada S en \mathbb{R}^2 , separa al plano en dos componentes conexas, una de las cuales está acotada mientras que la otra no. Cada una de ellas tiene a S como frontera.*

Definición 3.10. Dada una curva simple cerrada S en el plano, a la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - S$ se le llamará el interior de S y a la componente no acotada se le llamará exterior de la curva S .

Demostración.

La demostración que seguiremos en el libro [1] está dividida en tres partes.

En primer lugar se probará que el conjunto $\mathbb{R}^2 - S$ no es conexo. Es decir que existe una separación no trivial de $\mathbb{R}^2 - S$.

Consideremos la aplicación $d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ que define una distancia entre dos puntos de la curva S en la métrica euclidia del plano. El dominio de d es compacto y d es bien sabido que es una aplicación continua por lo que se verifica que existen $s_1, s_2 \in S$ tal que $d(s_1, s_2) \geq d(x, y)$ para todo $x, y \in S$.

Sea J el segmento que une los puntos s_1 y s_2 y P_1, P_2 las líneas perpendiculares a J que contienen a s_1 y a s_2 respectivamente. Es fácil ver que s_1 y s_2 son los únicos puntos de S en $P_1 \cup P_2$ y además, todos los demás puntos de S se encuentran comprendidos entre P_1 y P_2 .

Ahora, como S es compacto, está acotado y existen dos rectas J_1 y J_2 paralelas, equidistantes a J tal que $S - \{s_1, s_2\}$ está contenido en el interior del rectángulo R' limitado por P_1, P_2, J_1 y J_2 .

Podemos obtener un homeomorfismo h del plano en sí mismo, que lleva a R' en $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$ y $h(s_1) = (-1, 0)$, $h(s_2) = (1, 0)$.

Con esto tenemos que S se encuentra comprendida en el rectángulo R y además lo interseca únicamente en los puntos $s_1 = (-1, 0)$ y $s_2 = (1, 0)$.

S forma dos arcos en R , uno comprendido entre s_1 y s_2 y el otro entre s_2 y s_1 . Los denotaremos S' y S'' respectivamente. Consideremos el segmento de recta que une los puntos $a = (0, -1)$ y $b = (0, 1)$ que denotaremos por L . Por el Teorema 3.5. podemos afirmar que L interseca a S' y a S'' . Si nos movemos de a a b a través de L podemos asumir sin pérdida de generalidad que L intersecará primero a S' y luego a S'' .

Sea a' el primer punto de corte entre L y S' (moviéndose de nuevo a través de L de a a b), y b' el último punto de corte. L interseca a S'' entre b' y b . Supongamos que no es así, entonces podríamos tomar un camino, $aLa'S'b'Lb$ que va de los puntos a y a' a través de L , luego de a' a b' a través de S' y, finalmente, de b' a b a lo largo de L . Este camino iría de a a b en R sin intersecar a S'' y esto es imposible por el Teorema 3.5. luego necesariamente L interseca a S'' entre b' y b .

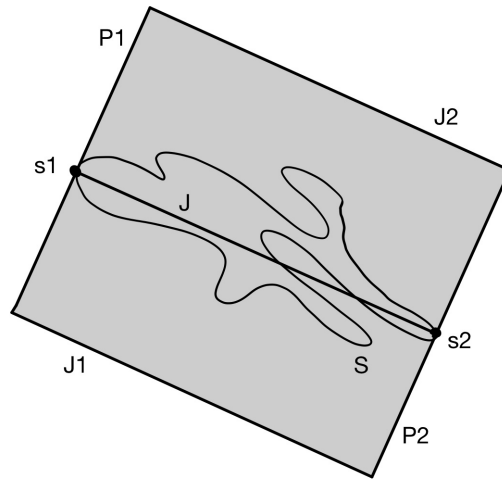


Figura 3.4: La curva cerrada simple S contenida en el rectángulo limitado por P_1 , P_2 , L_1 y L_2

Ahora, si nos movemos de b' a b a través de L , denotaremos por a'' el primer punto de corte de S'' y b'' el último. Consideremos el punto que se encuentra a medio camino entre b' y a'' en L , que lo denotaremos con la letra c . Hacemos notar que, por construcción c no está en S' ni en S'' , luego c está en el complementario de S .

Sea U la componente de $\mathbb{R}^2 - S$ que contiene a c . Veamos que U está acotado:

Supongamos que no lo está. Por los teoremas... U es conexo por caminos luego podemos escoger un camino P del punto c a cualquier punto en el exterior del rectángulo R . Denotaremos por p' al primer punto de P que interseca con R . El punto p' estará en la parte superior o inferior del rectángulo R .

Supongamos que está en la parte inferior y sea Q el camino en la frontera de R de a a p' . El camino $aQp'PcLb$ va de la parte inferior de R a la superior sin intersecar a S' , lo cual, como vimos anteriormente es una contradicción con el Teorema 3.5.

De la misma manera, supongamos que p' está en la parte superior de R . Sea Q' el camino en la frontera de R que une p' y b . El camino $aLp'S'b'LcPp'Q'b$ va de la parte inferior de R a la superior sin intersecar a S'' , que es también una contradicción con el Teorema 3.5.

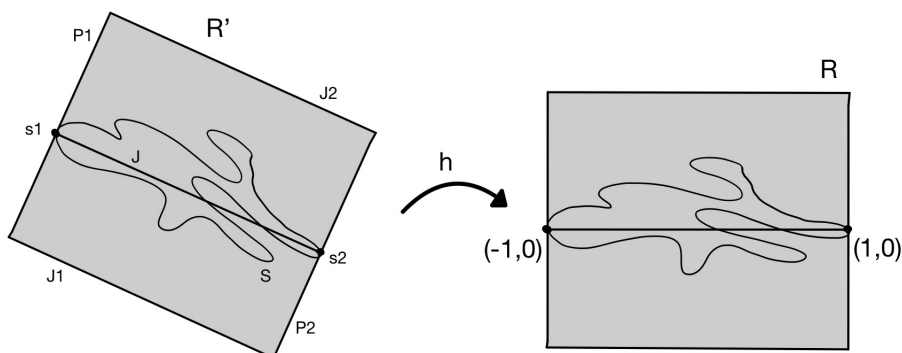


Figura 3.5: Homeomorfismo h entre R' y R

Llegamos a la conclusión por lo tanto de que U está acotado.

Como S es un subconjunto acotado del plano, $\mathbb{R}^2 - S$ tiene una componente no acotada. Entonces $\mathbb{R}^2 - S$ tiene, por lo menos dos componentes, una acotada y la otra no, esto implica que $\mathbb{R}^2 - S$ no es conexo.

En el siguiente apartado de la demostración se prueba que S es la frontera de cada una de las componentes de $\mathbb{R}^2 - S$.

Para empezar, recalamos que el Teorema 3.7. implica que, cada componente de $\mathbb{R}^2 - S$ es un abierto. Sea V una de sus componentes, como todas las demás componentes son conjuntos abiertos, implica que $V \cup S$ es un cerrado, luego $Cl(V) \subset V \cup S$. Por otro lado, por ser V abierto se verifica $Int(V) = V$, entonces $Cl(V) - Int(V) \subset S$ implicando que $\partial V \subset S$. Por lo tanto la frontera de cada componente de $\mathbb{R}^2 - S$ es un subconjunto de S , pero necesitamos más. Necesitamos probar que la frontera de cada componente es precisamente S .

Supongamos que V es una componente de $\mathbb{R}^2 - S$ tal que $\partial V \neq S$. Entonces ∂V es un conjunto cerrado de S de manera que existe un arco A en S conteniendo a ∂V . V puede

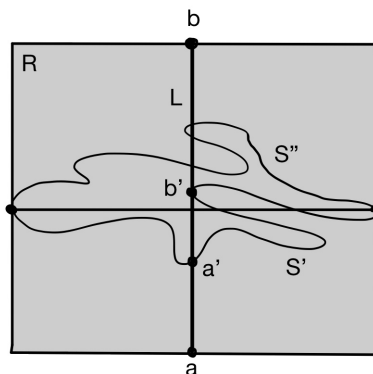


Figura 3.6: Recorriendo L de a a b , los puntos a' y b' son la primera y la última intersección respectivamente con S'

estar o no acotada. Consideraremos ambos casos.

Supongamos que V está acotada y B una bola cerrada en el plano de manera que $V \cup S \subset B$. El teorema 3.4. nos asegura la existencia de una retracción $r: B \rightarrow A$. Definimos $f: B \rightarrow B$:

$$f = \begin{cases} r(x) & \text{si } x \in Cl(V) \\ x & \text{si } x \in B - V \end{cases}$$

$Cl(V)$ y $B - V$ son cerrados de B . Además $Cl(V) \cap (B - V) \subset A$ y $r(x) = x$ para todo $x \in A$. El Lema del pegado nos asegura la continuidad de f . Si restringimos f a el borde de B , $f|_{\partial B} = id$ y por el Teorema 3.8. f es sobreyectiva. Finalmente por construcción de f se sigue que $V \cap Im f = \emptyset$ que es una contradicción.

Supongamos a continuación que V no está acotado. Sea B una bola cerrada en plano que contiene a la curva cerrada S y todas la componentes acotadas de $\mathbb{R}^2 - S$. En el primer apartado de la demostración se probó que $\mathbb{R}^2 - S$ tiene al menos una componente acotada que denotamos por U . Ahora, en virtud del Teorema 3.4. existe una retracción $r: B \rightarrow A$. Esto nos permite definir la función g como sigue:

$$g = \begin{cases} x & \text{si } x \in Cl(V) \cap B \\ r(x) & \text{si } x \in B - V \end{cases}$$

La función g es continua y $g|_{\partial B} = id$. El Teorema 3.8. implica que g es sobreyectiva, pero por como está definida g ningún punto de U está en la imagen de g . Luego llegamos de nuevo a una contradicción.

De esto se puede deducir que S es la frontera de cada componente de $\mathbb{R}^2 - S$.

Llegados a este punto, sólo resta probar que $\mathbb{R}^2 - S$ tiene dos componentes.

Consideramos U , la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - S$ cuya existencia aseguramos en el primer apartado de la demostración. Supongamos que existe otra componente W acotada. Consideremos el arco A en \mathbb{R} dado por $aLa'S'b'La''S''b''Lb$. Dicho arco va desde la base inferior hasta la base superior de R y es disjunta con W .

Observamos que los puntos $s_1 = (-1, 0)$ y $s_2 = (1, 0)$ no están en A . Como A es un cerrado, existen dos bolas abiertas B_1 y B_2 en el plano, centradas en s_1 y s_2 respectivamente y tal ninguna de las dos tienen puntos en común con A . De la segunda parte de la demostración deducimos que s_1 y s_2 están en la frontera de W . Por lo tanto existen $w_1 \in B_1 \cap W$ y $w_2 \in B_2 \cap W$. Llamemos M al camino en B_1 de s_1 a w_1 , M' al camino en W de w_1 a w_2 y M'' al camino en B_2 de w_2 a s_2 . El camino $s_1Mw_1M'w_2M''s_2$ es un camino en \mathbb{R} que va de s_1 a s_2 y no interseca a A . Con lo que tenemos una contradicción con el Teorema 3.5. y así podemos afirmar que $\mathbb{R}^2 - S$ tiene una única componente acotada. \square

3.1.2. Teorema de la Curva de Jordan en el plano digital

En esta sección se presentará el Teorema de la Curva de Jordan en el plano digital, también denominado el Teorema de la curva de Jordan digital de *Efim Khalimsky*.

Una demostración de dicho Teorema fue publicada en 1990 por *Khalimsky, Kopperman y Meyer* haciendo referencias a otras pruebas anteriores realizadas por Khalimsky (E. D. Halimskiĭ) [1970, 1977]. En este trabajo seguiremos una de las demostración que se presentan en [5]. Se hará por inducción sobre el número de puntos en la curva digital simple cerrada, o como le llaman en [5], una curva de Jordan de Khalimsky. La idea de la prueba es la siguiente:

Para las curvas de Jordan más pequeñas (que tienen cuatro u ocho puntos) el teorema se puede demostrar por inducción. Dado cualquier otra curva de Jordan J , construimos una curva de Jordan J' que tenga una longitud euclidiana más corta y que su complementario tenga tantas componentes como el complementario de J . Como las posibles longitudes euclidianas forman un conjunto discreto, este procedimiento conducirá a una de las curvas de Jordan más pequeñas, para las que el teorema ya está establecido. La construcción de J'

puede describirse intuitivamente como siguiente: atacar a J donde su curvatura es máxima y acortarla allí.

Definición 3.11. Una curva de Jordan de Khalimsky es un conjunto homeomorfo a un círculo digital de Khalimsky.

Los círculos digitales de Khalimsky están definidos para enteros pares $n \geq 4$. Se obtienen a partir de “pegar” los extremos del subespacio $\{1, \dots, n + 1\}$ de la recta digital de Khalimsky. Veamos la Figura 3.7:

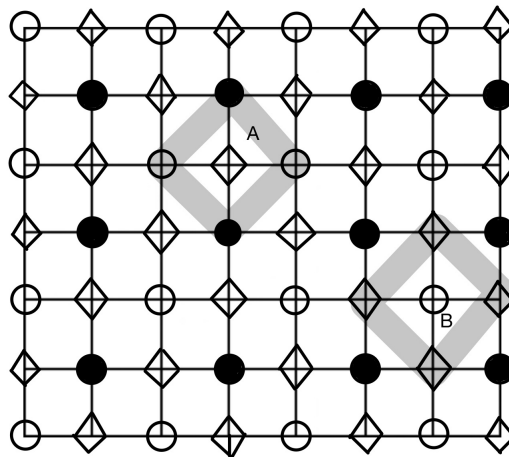


Figura 3.7: A es una curva de Jordan de Khalimsky mientras que B no lo es.

En ocasiones, la componente interior de una curva de Jordan de Khalimsky puede estar formada por muy pocos puntos, por lo que en [5] se impone una condición a mayores:

Definición 3.12. Sea J una curva de Jordan de Khalimsky es un espacio topológico (X, τ) . Diremos que J es estricta si todo punto en J es 2-adyacente con exactamente dos puntos en J .

Observamos que si $x, z \in J$ son 2-adyacentes, entonces el intermediario y , requerido por la definición, no necesita pertenecer a J . Por lo tanto, el concepto de curva de Jordan estricta no es intrínseco.

Un conjunto constituido por tres elementos adyacentes entre ellos $\{x, y, z\}$, puede ser un camino de Khalimsky pero nunca un arco de Khalimsky. Esto se sigue del hecho de que,

en un intervalo de Khalimsky $[a, b]$, los puntos extremos a y b tan sólo serían adyacentes si $b = a + 1$.

A continuación en [5] se introduce la siguiente definición:

Definición 3.13. Se dirá que un conjunto formado por tres elementos $\{x, y, z\}$ en un espacio topológico es un triángulo prohibido si todos los puntos son adyacentes entre ellos.

La ausencia de triángulos prohibidos es, por tanto, una condición necesaria para los arcos de Khalimsky y, en consecuencia, para las curvas de Khalimsky Jordan, y suele ser fácil de comprobar.

Diferentes topologías pueden inducir la misma estructura de adyacencia. Sin embargo, cuando la estructura de adyacencia es la de un círculo de Khalimsky, la topología del espacio debe ser también la de un círculo de Khalimsky. Más concretamente, se tiene el siguiente resultado [5].

Teorema 3.14. *Sea J un subconjunto de un espacio topológico X , las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *J es una curva de Jordan de Khalimsky.*
2. *J tiene, por lo menos cuatro puntos y para cada $a \in J$, $J - \{a\}$ es homeomorfo a un intervalo de Khalimsky.*
3. *J es finito, conexo, tiene cardinal al menos 4 y cada uno de sus elementos tiene exactamente dos puntos adyacentes.*
4. *J tiene la estructura adyacente de un círculo de Khalimsky, es decir, $J = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ para algún entero par $m \geq 4$ y para cada $j = 1, \dots, m$, x_{j-1} y x_{j+1} (y ningún otro punto del conjunto) son adyacentes a x_j .*
Se sobreentiende que trabajamos módulo m , es decir $x_{m+1} = x_1$.

Demostración.

Supongamos que J es una curva de Jordan de Khalimsky, entonces para cada $a \in J$, $J - \{a\}$ es homeomorfo a un círculo de Khalimsky menos un punto, es decir, es homeomorfo a un intervalo de Khalimsky. Consecuentemente, supongamos que se cumple (2), y consideremos $J - \{a\}$ y $J - \{b\}$ para dos puntos $a, b \in J$ no adyacentes. Existen dos homeomorfismos de $J - \{a\}$ y $J - \{b\}$ en un círculo de Khalimsky \mathbb{Z}_m . Mediante rotaciones del círculo podemos hacer que las dos aplicaciones coincidan en $J - \{a, b\}$. Por lo tanto definen un homeomorfismo local de J en \mathbb{Z}_m , luego se verifica (1).

Que (1) implica (3) y (4) es inmediato.

Supongamos ahora que se verifica (3). Sea x_1 un punto arbitrario y x_2 su adyacente, y análogamente, escogiendo x_{j+1} después de x_j siendo x_{j+1} adyacente a x_j pero distinto de x_1, \dots, x_{j-1} que ya escogimos. Repitiendo este proceso llegará un punto en el que ya habremos escogido todos los puntos, es decir, estamos en la situación que escogemos x_m y sus dos puntos adyacentes será, x_{m-1} y el punto que escogimos que denotaremos por x_k . A priori k podría ser cualquier $1, 2, \dots, m-2$, sin embargo, la única opción posible es que $k = 1$ ya que, de la otra manera, tendríamos que x_k tiene tres puntos adyacentes, contradiciendo (3).

Resta probar que m es par. El hecho de que x_j y x_{j+1} sean adyacentes implica que $x_j \in N(x_{j+1})$ ó $x_{j+1} \in N(x_j)$. Si $x_j \in N(x_{j+1})$, entonces no se puede dar $x_{j+1} \in N(x_{j+2})$, ya que implicaría que $x_j \in N(x_{j+2})$, entonces x_{j+2} tendría tres elementos adyacentes, x_j, x_{j+1} y x_{j+3} . Entonces $x_j \in N(x_{j+1})$ se verifica sólo para j de una determinada paridad. Como esto es cierto módulo m , m debe de ser par. Esto prueba (4). (4) implica (3) ya que (4) simplemente es una versión más detallada de (3).

Veamos que (4) implica (1). Supongamos que se verifica (4), $N(x)$ nunca puede tener más de tres elementos, un cuarto elemento significaría que x tendría al menos tres puntos adyacentes. Luego $N(x_j) \subset \{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}$. Considerando los tres puntos x_{j-1}, x_j, x_{j+1} , hacemos notar que $x_{j-1} \in N(x_j)$ ó $x_j \in N(x_{j-1})$, y que $x_j \in N(x_{j+1})$ ó $x_{j+1} \in N(x_j)$. Estas alternativas no pueden ser escogidas a voluntad, vimos anteriormente que $x_{j-1} \in N(x_j)$ implica que $x_j \notin N(x_{j+1})$. Consideremos el caso $x_{j-1} \in N(x_j)$, entonces $x_{j+1} \in N(x_j)$, luego $N(x_j) \supset \{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}$. Por otro lado sabemos que $N(x_j)$ tiene al menos tres elementos. Luego concluimos que $N(x_j) = \{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}$. Usando la misma argumentación tenemos que $N(x_{j+2}) = \{x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}\}$. Luego $N(x_{x_{j+1}}) = \{x_{j+1}\}$ y queda probado que X es un círculo de Khalimsky donde los puntos con índices de la misma paridad que j , la intersección de todos sus entornos está formada por tres puntos y los puntos con otra paridad son abiertos.

Si $x_j \in N(x_{j-1})$ se demuestra de manera análoga desplazando los índices un paso. \square

Se deduce de (3) que dos curvas de Jordan de Khalimsky nunca pueden contenerse la una a la otra. Más concretamente, si J y K son curvas de Jordan de Khalimsky y $J \subset K$, entonces $J = K$.

Un punto en una curva de Jordan de Khalimsky J formada por, al menos seis puntos, tiene por lo menos dos puntos 2-adyacentes, usando la misma notación que en (4) x_{j-2} y x_{j+2} son 2-adyacentes con x_j y $x_{j-2} \neq x_{j+2}$ cuando $m > 4$. Luego tenemos que x_{j+1} y x_{j-1} sirven de intermediarios, pero existen más.

Cuando una curva de Jordan no es estricta y $m > 4$ y sea x_j un punto cualquiera de la

curva, x_j tiene, al menos, un punto 2-adyacente a parte de x_{j-2} y x_{j+2} , que lo denotaremos por x_k . Entonces un intermedio b tal que x_j y b son adyacentes y b y x_k son adyacentes no pueden pertenecer a J .

Supongamos que ahora que (X, d) es un espacio métrico. Como todo arco de Khalimsky Γ , es homeomorfo a $[0, m-1] \cap \mathbb{Z}$ o a $[1, m] \cap \mathbb{Z}$ para algún m , se puede indexar como $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, donde los índices están determinado de forma única salvo inversiones.

Definición 3.15. Se define la longitud de un arco Γ como :

$$L(\Gamma) = \sum_{j=1}^{m-1} d(x_{j+1}, x_j)$$

De manera similar, una curva de Jordan de Khalimsky se puede indexar como $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, donde los índices están determinados de forma única salvo inversiones y permutaciones circulares, su longitud puede ser definida de la siguiente manera:

$$L(J) = \sum_{j=1}^m d(x_{j+1}, x_j)$$

De cara a introducir el Teorema de la Curva Digital de Jordan, en [5] se proponen las siguientes normas en \mathbb{R}^2 para medir distancias en \mathbb{Z}^2 :

$$\|x\|_p = \|(x_1, x_2)\|_p = \begin{cases} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p} & \text{si } x \in \mathbb{R}^2, 1 \leq p < +\infty \\ \max(|x_1|, |x_2|) & \text{si } x \in \mathbb{R}^2, p = \infty \end{cases}$$

Una vez llegados a este punto, empezamos a trabajar en el plano de Khalimsky. Se enunciarán y se demostrarán siguiendo [5] los siguientes resultados previos al Teorema de la curva de Jordan digital de Khalimsky.

Teorema 3.16. *Sea J un subconjunto del plano digital de Khalimsky, las condiciones 1,2,3 y 4 del Teorema 3.14. son equivalentes a la siguiente:*

5. $J = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}\}$ para algún $m \geq 4$ par y para todo j , sólo $x^{(j-1)}$ y $x^{(j+1)}$ son adyacentes a $x^{(j)}$, además, todo camino que consiste en tres puntos consecutivos: $\{x^{(j-1)}, x^{(j)}, x^{(j+1)}\}$ “gira” en $x^{(j)}$ 45° ó 90° ó continua sin “girar” si $x^{(j)}$ es puro. Si $x^{(j)}$ es un punto mixto entonces el camino se desplaza entre los puntos horizontalmente sin “girar”.

Se está usando la expresión informal “girar 45° ” etc. refiriéndonos a ángulos en el plano Euclidiano. Consideramos que el plano digital de Khalimsky es un subconjunto de este (ver Figura 3.8).

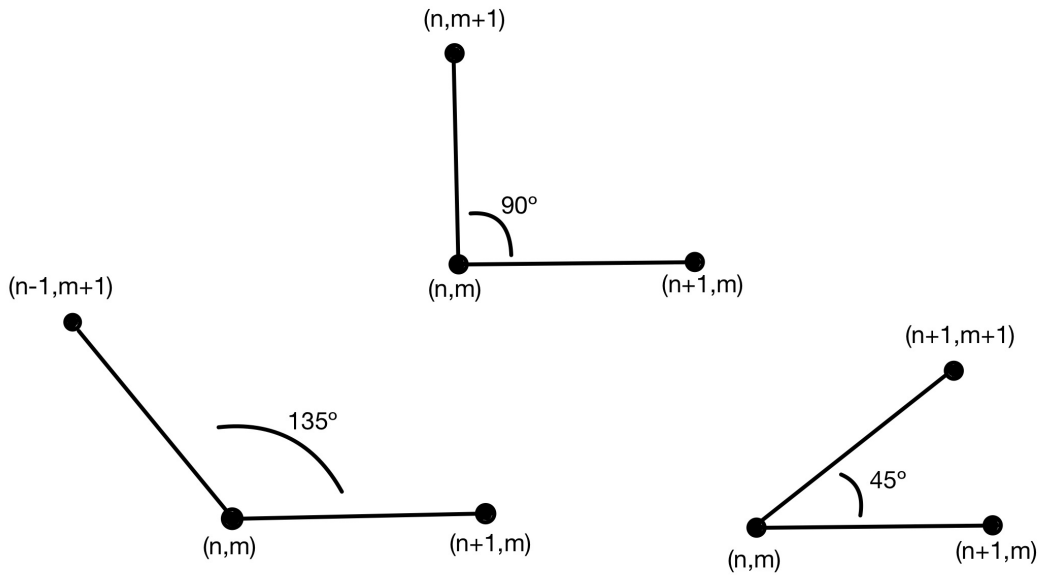


Figura 3.8: Ángulos en el plano Euclidiano, considerando que el plano digital de Khalimsky es un subconjunto de este.

Demostración.

Supongamos que se cumple (4), observamos que J no puede girar en un punto mixto y no puede girar 135° en un punto puro ya que de esta manera obtendríamos un triángulo prohibido. Luego (4) implica (5). Por otro lado observamos que (5) implica (4). \square

Para demostrar el Teorema de la curva digital de Jordan usaremos la métrica Euclidiana : $d(x, y) = \|x - y\|_2$.

Hacemos notar que la curva de Jordan más pequeña en \mathbb{Z}^2 viene dada por:

$$J_4 = \{(0, 0), (1, -1), (2, 0), (1, 1)\}.$$

Consideramos todas las traslaciones de J_4 por un vector $c \in \mathbb{Z}^2$ con $c_1 + c_2$ par. A estas curvas las llamaremos curvas de Jordan de tipo J_4 (ver Figura 3.9).

Ahora consideremos la curva de Jordan formada por 8 puntos $J_8 = \{x \in \mathbb{Z}^2; \|x\|_\infty = 1\} = U_\infty - \{(0, 0)\}$, a esta curva y a todas sus traslaciones mediante el vector $c \in \mathbb{Z}^2$ con $c_1 + c_2$ par, les llamaremos curvas de tipo J_8 (ver Figura 3.10).

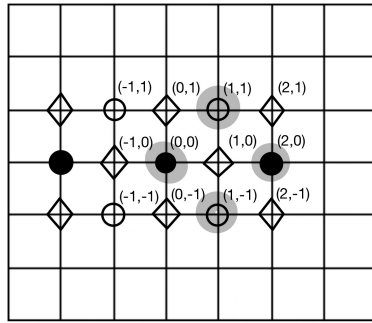


Figura 3.9: J_4

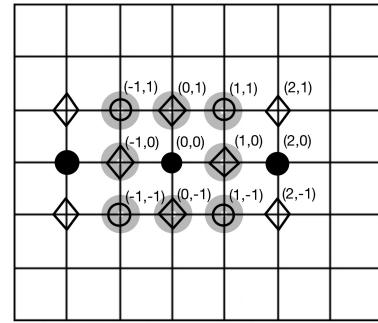


Figura 3.10: J_8

Sea $T = \{(1, 1), (0, 0), (1, -1)\}$, llamaremos triángulo extraíble a T , rotaciones de T de 90° , 180° y 270° y a las traslaciones de estos conjuntos mediante vectores $c \in \mathbb{Z}^2$ con $c_1 + c_2$ par (ver Figura 3.11).

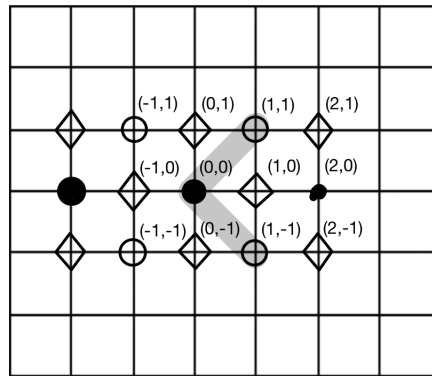


Figura 3.11: Triángulo extraíble

La eliminación de triángulos extraíbles es una forma conveniente de reducir curvas de Jordan como veremos en el siguiente lema:

Lema 3.17. *Sea J una curva de Jordan en el plano de Khalimsky y supongamos que $T \subset J$, siendo T el conjunto definido anteriormente. Definimos $J' = (J - \{(0, 0)\}) \cup \{(1, 0)\}$*

entonces $J = J_4$ o bien J' es una curva de Jordan que verifica que $CJ' = \mathbb{Z}^2 - J'$ y $CJ = \mathbb{Z}^2 - J$ tienen el mismo número de componentes y $L(J') = L(J) - 2\sqrt{2} + 2$.

Demostración.

Supongamos que $(2, 0) \in J$, entonces $J \supset J_4$ y se da la igualdad $J = J_4$.

Supongamos ahora que $(2, 0) \notin J$. J' es una curva de Jordan donde el nuevo punto $(1, 0)$ juega el mismo papel que el punto $(0, 0)$ en J . Por lo tanto J' también es homeomorfa a un círculo de Khalimsky.

Finalmente tenemos que comprobar que el número de componentes en CJ' es el mismo que en CJ . Se deduce directamente ya que los puntos $(1, 0)$ y $(2, 0)$ pertenecen a la misma componente de CJ y $(0, 0)$ y $(-1, 0)$ pertenecen a la misma componente de CJ' . El cálculo de la longitud es inmediato. \square

Teorema 3.18. (*Teorema de la Curva de Jordan de Khalimsky*) Consideremos \mathbb{Z}^2 dotado de la topología de Khalimsky. Sea J una curva de Jordan de Khalimsky en \mathbb{Z}^2 , el complementario $CJ = \mathbb{Z}^2 - J$ tiene exactamente dos componentes.

La demostración que seguiremos es la presentada en [5].

Demostración.

El complementario de J_4 consiste en $A = \{(1, 0)\}$ y el conjunto B formado por todos los puntos $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ con $|x_1 - 1| + |x_2| > 1$. Es inmediato comprobar que ambos conjuntos son conexos. A y B son conjuntos cerrados y abiertos en CJ_4 luego son componentes de CJ_4 . Para las curvas de tipo J_8 el argumento es similar. Luego el Teorema se cumple para las curvas de Jordan de tipo J_4 y J_8 .

Supongamos que J no es de tipo J_4 ni J_8 y probemos que entonces existe una curva J' que verifica $L(J') < L(J)$ y CJ y CJ' tienen exactamente el mismo número de componentes.

Hacemos notar, que después de un número finito de pasos vamos a llegar a una situación en la que no existe tal curva con esas propiedades, lo que en realidad significa que tenemos una curva de tipo J_8 o de tipo J_4 . Veamos cómo es la construcción de J' :

En vista del Lema 3.16., podemos suponer que J no contiene triángulos extraíbles. Definimos:

$$a_2 = \inf\{x_2; x \in J\}.$$

Se verifica $x_2 \geq a_2$ para cada $x \in J$ y se da la igualdad para al menos un x . Consideremos ahora el siguiente intervalo horizontal en \mathbb{Z}^2 :

$$H = \{(x_1, a_2)\} + \{(0, 0), (1, 0), \dots, (p, 0)\}$$

que sea un intervalo maximal con respecto a la inclusión y esté formado por puntos de J con la ordenada igual a a_2 . El hecho de que sea maximal implica que los puntos $(x_1 - 1, a_2)$ y $(x_1 + p + 1, a_2)$ no pertenecen a J . Luego p tiene que ser par y $p \neq 0$ ya que de lo contrario J contendría un triángulo extraíble contradiciendo lo que se supuso al principio. Por lo tanto H contiene por lo menos tres puntos. Además, el hecho de que $(x_1 - 1, a_2)$ no pertenece a J , implica que o bien $(x_1 - 1, a_2 + 1)$ ó $(x_1, a_2 + 1)$ pertenecen a J por construcción. Ahora, cuando nos movemos hacia la izquierda desde (x_1, a_2) , la curva debe girar hacia arriba 45° o 90° , no puede ir hacia abajo. De manera similar, la curva gira hacia arriba 45° o 90° cuando nos movemos hacia la derecha desde el último punto de H , $(x_1 + p, a_2)$.

Ahora consideremos el conjunto \mathcal{I} formado por todos los intervalos horizontales maximales I en J que verifican que la curva J gira hacia arriba en los puntos terminales de I . El que exista H prueba que $\mathcal{I} \neq \emptyset$. Ahora, sea $K \in \mathcal{I}$ uno de longitud mínima,

$$K = \{y\} + \{(0, 0), (1, 0), \dots, (q, 0)\}$$

formado por $q + 1$ puntos con q par verificando $q \geq 2$. Supondremos que K también es el intervalo de menor longitud entre todos los intervalos que se pueden obtener rotando 90° , 180° ó 270° intervalos de \mathcal{I} .

Para simplificar notación vamos a asumir que $y = (0, 0)$ entonces,

$$K = \{(0, 0), (1, 0), \dots, (q, 0)\} = [(0, 0), (q, 0)] \cap \mathbb{Z}^2$$

Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. Supongamos que J gira 45° en los puntos extremos de K , lo que significaría que $(-1, 1)$ y $(q + 1, 1)$ pertenecen a J . En este caso definimos:

$$J' = (J - K) \cup (K + (0, 1))$$

Hacemos notar que $K + (0, 1)$ no tiene puntos en común con J , ya que de lo contrario algún punto de K tendría tres puntos adyacentes. Es más $[K + (0, 2)] \cap J = \emptyset$, si no lo fuera J contendría a un triángulo extraíble o existiría un subintervalo de $K + (0, 2)$, K' , contenido en J y de forma que J gira hacia arriba en sus puntos extremos, lo cual implicaría que $K' \in \mathcal{I}$. Este intervalo tiene que tener menos de $q + 1$ puntos, ya que $(0, 2)$ y $(q, 2)$ no pertenecen a J , si no existiría un triángulo extraíble en J . Por otra parte no existe un intervalo de menor longitud ya que, por hipótesis, K es el intervalo de menor longitud de \mathcal{I} . Nos queda comprobar que en efecto J' es una curva de Jordan. Los puntos de $K + (0, 1)$ juegan el mismo papel (topológico) en J' que los puntos de K en J . El número de componentes de J' es el mismo que el de J .

Caso 2. J gira hacia arriba 90° en un punto extremo de K. Suponiendo que $(0, 1) \in J$ el caso $(q, 1) \in J$ será simétrico. Entonces también se verifica que $(0, 2) \in J$. Consideremos los siguientes subcasos:

Caso 2.1. $(2, 2) \notin J$, suprimiremos los puntos $(0, 1), (0, 0), (1, 0)$ y añadiremos el punto $(1, 1)$. Con esto conseguimos acortar su longitud en $4 - 2\sqrt{2}$, recordamos $L(J) = L(J')$. Como $(1, 1)$ y $(2, 2)$ pertenecen a la misma componente de CJ y $(0, 1), (0, 0), (1, 0)$ y $(-1, 0)$ pertenecen a la misma componente que CJ' , el número de componentes en los respectivos espacios complementarios es el mismo.

Caso 2.2. $(2, 2) \in J$. Consideraremos cuatro subcasos:

Caso 2.2.1.1. $(2, 1) \in J, (1, 2) \in J$. Entonces J contiene una curva de Jordan del tipo J_8 , en concreto $J \supset (1, 1) + J_8$, luego $J = (1, 1) + J_8$.

Caso 2.2.1.2. $(2, 1) \in J, (1, 2) \notin J$ si eliminamos los puntos $(0, 1), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (2, 1)$ y añadimos el punto $(1, 2)$. La curva J' tiene 4 puntos menos, podemos comprobar que J' tiene todas las propiedades que estábamos buscando.

Caso 2.2.2.1. $(2, 1) \notin J, (1, 2) \in J$. Si giramos 90° estamos en el caso anterior.

Caso 2.2.2.2. $(2, 1) \notin J, (1, 2) \notin J$ Veamos que este caso no puede darse ya que hemos escogido q de forma que sea el más pequeño posible.

Para ver esto definimos $I' = \{(2, 2), (3, 2), \dots, (q', 2)\} \subset J$ siendo q' lo más grande posible. Si J gira hacia arriba en $(q', 2)$ entonces I' pertenece a \mathcal{I} con $q' < q$, lo que contradice la definición de K y q. Por otra parte, si J gira hacia abajo en $(q', 2)$, entonces existe un intervalo vertical que consiste en tres puntos que pertenecerá a \mathcal{I} si lo rotamos 90° , contradiciendo la definición de \mathcal{I} . \square

3.1.3. Diferencias entre el Teorema de la curva Jordan clásico y digital

La diferencia fundamental entre el Teorema de la Curva de Jordan clásico y su versión digital es que en la versión clásica, una curva simple cerrada en el plano estándar es automáticamente la frontera de cada componente de su complementario tal y como vimos. Sin embargo, en el plano digital esto ocurre si y sólo si la curva digital cerrada simple es un conjunto cerrado.

Teorema 3.19. *Sea una curva de Jordan de Khalimsky. J es un conjunto cerrado del plano de Khalimsky si y sólo si no contiene puntos abiertos.*

Demostración.

Sea J una curva de Jordan de Khalimsky, entonces J es homeomorfa a un círculo de

Khalimsky.

Supongamos J es de tipo J_8 y contiene puntos abiertos.

J es cerrada si y sólo si su complementario es abierto.

Ejemplo. La curva del tipo J_8 , $J = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (1, 2), (0, 2), (0, 1)\}$ es un conjunto cerrado.

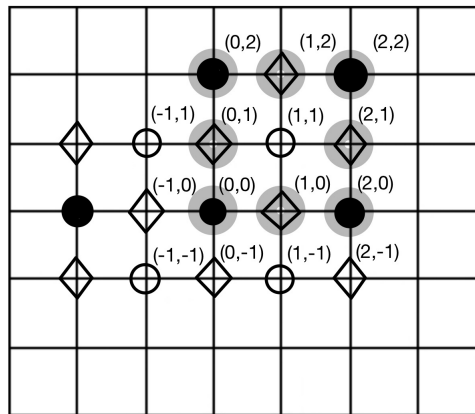


Figura 3.12: Curva de Jordan de Khalimsky conjunto cerrado

Definición 3.20. Un subconjunto A del plano digital está acotado si existe $M \in \mathbb{Z}_+$ (donde \mathbb{Z}_+ denota el conjunto de número enteros positivos) tal que $|m| \leq M$ para todo $(m, n) \in A$.

Equivalentemente, un subconjunto A del plano digital está acotado si está contenido en un cuadrado centrado en $(0, 0)$ en el plano digital.

Teorema 3.21. Si J es una curva de Jordan de Khalimsky, una de las componentes de su complementario estará acotada mientras que la otra no lo estará.

Demostración.

Sea J una curva de Jordan de Khalimsky. J está formada por un número finito de puntos por lo tanto es un subconjunto acotado del plano digital. Esto implica que al menos una de sus componentes de su complementario tendrá que estar acotada. Sea $M \in \mathbb{Z}_+$ verificando $|m| \leq M$ y $|n| \leq M$ para todo $(m, n) \in A$, y sean B y B^* los conjuntos definidos de la

siguiente manera:

$$B = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid |m| \leq M \text{ y } |n| \leq M\}; \quad B^* = \mathbb{Z}^2 - B.$$

B^* es un conjunto conexo y $J \cap B^* = \emptyset$. De donde deducimos ue B^* está contenida en una de las componentes del complementario de J . Luego B contiene la otra componente del complementario de J y por definición B está acotado. \square

Capítulo 4

Almacenamiento de imágenes digitales

Supongamos que tenemos una imagen digital, representada como un conjunto de píxeles en el plano (ver Figura 4.2.).

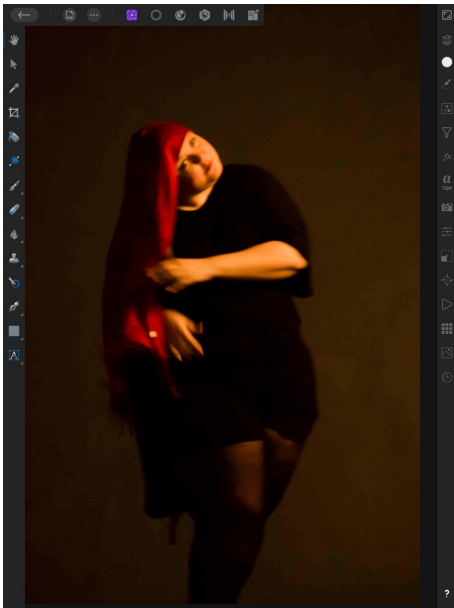


Figura 4.1: Fotografía digital

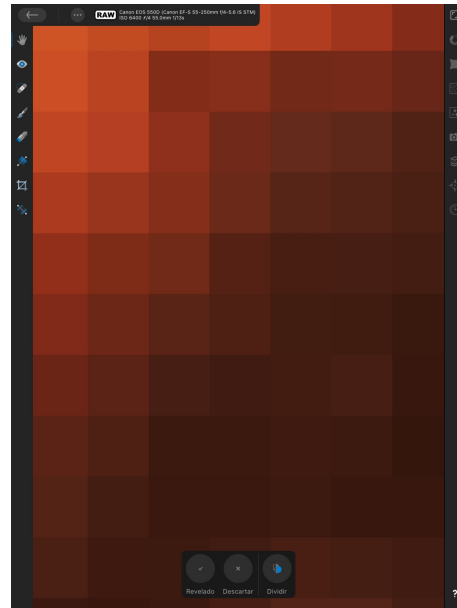


Figura 4.2: Píxeles de la fotografía digital

Definición 4.1. Al subespacio del plano digital formado por todos los puntos abiertos se le llama pantalla visible y se denotará por \mathbb{V} .

En nuestro modelo de procesamiento de imágenes digitales, la pantalla visible se co-

responde con lo que realmente vemos en una imagen digital.

\mathbb{V} es un conjunto denso y abierto del plano digital y su topología como subconjunto del plano digital es la discreta. La inclusión de los puntos cerrados y mixtos proporciona una estructura invisible que conecta los píxeles y permite el uso de conceptos y resultados topológicos para estudiar y modelar propiedades de las imágenes digitales.

Consideremos de nuevo el problema de almacenamiento de una imagen digital. En la Figura 12 observamos conjuntos del plano digital que “encierran” matrices de píxeles en \mathbb{V} 1×1 , 2×2 , 3×3 . Los conjuntos que rodean estas matrices de píxeles están formados por 8, 16 y 24 puntos respectivamente. En general se puede probar que una matriz de píxeles $n \times n$ de puntos abiertos puede ser “encerrada” por un conjunto formado por $8n$ puntos del plano digital. Por lo tanto si queremos almacenar una imagen digital que consista por ejemplo en una zona azul cuadrada de tamaño 1000×1000 píxeles, podemos almacenar la localización de cada uno de los píxeles (son 1000000 de píxeles) o podemos almacenar la localización de los 8000 puntos circundantes en el plano digital, indicando que los que están en el interior en la pantalla visibles son azules.

Asociada a esta imagen se define una partición \mathcal{P} de la pantalla visible \mathbb{V} en el plano digital. Cada elemento de la partición corresponde a una región de la imagen donde todos los puntos tienen el mismo color.

Lo que queremos es, como mencionamos anteriormente, ver si es posible almacenar la imagen como una colección de conjuntos que rodean las regiones de la imagen que mencionamos anteriormente. Nos damos cuenta de que lo que queremos es ver si existe una colección de curvas de Jordan simples cerradas que determinen los conjuntos de la partición \mathcal{P} .

La topología en \mathbb{V} es la discreta por lo que \mathbb{V} es un espacio totalmente desconexo. Para llegar a formular el resultado que estamos buscando usaremos los resultados del trabajo de *Azriel Rosenfeld* [9], este introduce las siguientes definiciones de adyacencia para el espacio \mathbb{V} .

Definición 4.2. ■ Sea $p = (n, m)$ un punto del espacio \mathbb{V} . Los puntos $(n - 2, m)$, $(n + 2, m)$, $(n, m + 2)$ son 4-adyacentes a p .

- Un conjunto C en la pantalla visible se dice que 4-conexo si para cada par de puntos $p, q \in C$ existe una secuencia de puntos en C $p = p_1, p_2, \dots, p_n$ tal que p_{i+1} es 4-adyacente a p_i para todo $i = 1, \dots, n - 1$.

Dado un punto de la pantalla visible, los puntos que son 4-adyacentes a dicho punto son los cuatro puntos de \mathbb{V} pegados a él horizontal y verticalmente.

La siguiente definición describe el proceso por el que una imagen en la pantalla visible se transforma en una colección de curvas e Jordan cerradas n el plano digital.

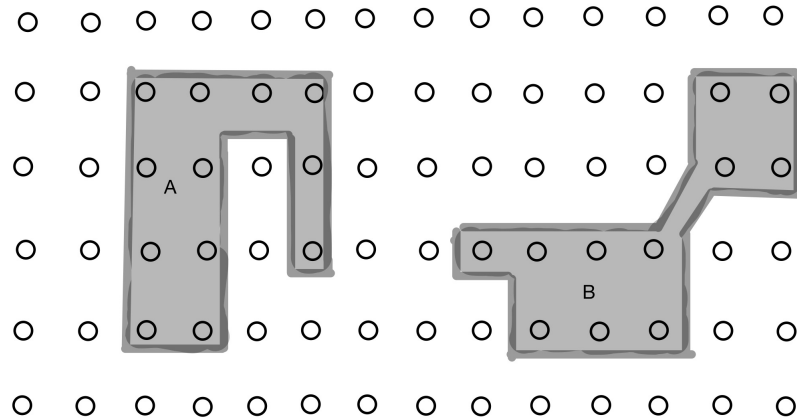


Figura 4.3: El conjunto A es 4-conexo y el B no

Definición 4.3. Sea \mathcal{P} una partición de la pantalla visible formada por subconjuntos 4-conexos de manera que tan sólo uno de ellos no está acotado. Al subconjunto del plano digital definido de la siguiente manera:

$$S_p = \bigcup_{D \in \mathcal{P}} \partial(Cl(D))$$

se le llama dibujo determinado por \mathcal{P} .

Considerando la partición de la definición anterior \mathcal{P} , el dibujo determinado por \mathcal{P} es una colección S_p de conjuntos obtenidos al eliminar la frontera de la clausura de cada conjunto de la partición. Se puede demostrar que S_p es la unión de curvas digitales simples cerradas en $\mathbb{Z}^2 - \mathbb{V}$, el complementario de la pantalla visible en el plano digital. Es decir podemos interpretar el dibujo determinado por \mathcal{P} como una colección de conjuntos circundantes. El siguiente Teorema que aparece enunciado en [1] prueba que la partición \mathcal{P} puede ser recubierta con dibujos determinados por ella.

Teorema 4.4. *Sea \mathcal{P} una partición de la pantalla visible de conjuntos 4-conexos, siendo al menos alguno de esos conjuntos no acotado. Sea S_p el dibujo determinado por \mathcal{P} . Entonces*

la colección \mathcal{P}^* de subconjuntos de \mathbb{V} dada por:

$$\mathcal{P}^* = \{C \cap \mathbb{V} : C \text{ es una componente de } \mathbb{Z}^2 - S_p\}$$

es una partición de la pantalla visible y además se verifica $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$.

Hacemos notar que en el Teorema 6.1. es necesario asumir que los elementos de \mathcal{P} son 4-conexos para que las particiones \mathcal{P} y \mathcal{P}^* coincidan. Por ejemplo, si el conjunto B de la Figura 12 es un elemento de la partición \mathcal{P} , entonces las dos componentes 4-conexas de B serán conjuntos separados en \mathcal{P}^* .

En conclusión, teniendo todo esto en cuenta podemos obtener el siguiente proceso para almacenar y recuperar una imagen digital:

- Consideremos una imagen digital y definamos una partición en la pantalla visible \mathbb{V} , donde a cada conjunto de la partición se le hace corresponder una región de dicha imagen digital con un determinado color fijado.
- Para almacenar la imagen, se define el dibujo determinado por la partición. (También se puede almacenar la información del color de la imagen indicando qué lado (exterior o interior) de cada curva digital simple cerrada en el dibujo determinado por la partición contiene qué color.)
- Recuperar la partición cogiendo la intersección de la pantalla visible con cada componente del complementario del dibujo determinado por la partición en el plano digital.

Las imágenes que representan el mundo que conocemos, hablando en términos de topología, son espacios conexos y continuos, por lo que realmente el reto de digitalizar requiere de medios para discretizar dichas imágenes en versiones digitales y al mismo tiempo preservar su estructura conexa para mantener las relaciones topológicas de la imagen original. El plano digital nos proporciona un modelo efectivo para este proceso ya que está constituido por la pantalla visible, que es un subespacio totalmente desconexo, abierto y denso como vimos anteriormente y que junto con los puntos cerrados y mixtos usamos para la representación de las imágenes. Los puntos cerrados y los puntos mixtos constituyen la estructura invisible que nos proporciona la conexidad.

Bibliografía

- [1] Adams, C. y Franzosa, R. (2009). *Introduction to Topology Pure and Applied*, Pearson Prentice Hall.
- [2] García, F. y Luz, M.(1998). *El Teorema de la Curva de Jordan*, Divulgaciones Matemáticas.
- [3] Jordan, C.(1893). *Cours d'Analyse*, Gauthier-Villars et fils.
- [4] Khalimsky, E.(1987). *Topological structures in computer science*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 25-40.
- [5] Kiselman, C.O.(2000). *Digital Jordan Curve Theorems*. Uppsala University, Department of Mathematics, 46-56.
- [6] Kovalevsky, V.(2010). *Axiomatic Digital Topology*, Department of Computer Science University of Applied Sciences Berlin, Journal of Mathematical Imaging and Vision .
- [7] Masa, X.M.(1999). *Topología Xeral. Introducción aos Espacios Euclidianos, Métricos e Topolóxicos*. Universidade de Santiago de Compostela.
- [8] Munkres, J. (2001). *Topología*. Pearson Prentice Hall.
- [9] Rosenfeld, A.(1979). *Digital Topology*, The American Mathematical Monthly , 621-630.

