USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Algunhas funcións patolóxicas en análise

Carlos Martínez García

07-2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Algunhas funcións patolóxicas en análise

Carlos Martínez García

07-2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: análise matemático.
Título: Algunhas funcións patolóxicas en análise.
Breve descrición do contido
Neste traballo presentaranse algunhas funcións de variable real, cuxo comportamento pode escapar á intuición. Partindo da coñecida función de Thomae que é continua nos irracionais e descontinua nos racionais, analizaranse distintas propiedades acerca da continuidade e diferenciabilidade de funcións dunha variable real. Ademais, presentaranse exemplos de funcións continuas e non derivables en ningún punto, funcións continuas e estrictamente crecentes con derivada nula en case todo punto, curvas que cobren todo o espazo, etc.
Recomendacións
Outras observacións

Índice

Resumo

O obxetivo deste traballo é estudar certas propiedades patolóxicas que poderían ter certas funcións, e comprobar se existen tales funcións que as teñan ou non. Entre outras cousas, comprobarase que existen funcións continuas nos irracionais e discontinuas nos racionais, funcións continuas en todo punto e non diferenciables en ningún punto, funcións diferenciables en todo o seu dominio pero non monótonas en ningún intervalo do dominio ou funcións continuas e sobrexectivas de imaxe $[0,1]^2$ e dominio $[0,1]$.

Abstract

The aim of this document is to study certain pathologic properties in some functions and to try to find out whether there exists functions with those properties or not. Among other things, we will prove that there are continuous functions on the irrational numbers and discontinuous on the rationals, non-differentiable continuous functions in every point of their domain, differentiable functions on every point that are not monotonous or continuous surjective functions with image $[0,1]^2$ and domain $[0,1]$.

Introdución

Falaremos de funcións patolóxicas para referirnos a aquelas funcións de variable real que posúen certas propiedades que non son moi comúns ou esperables, dentro das ramas das matemáticas, este traballo se sitúa claramente no análise matemático, máis en concreto dentro do análise funcional, xa que nel centraremos no estudo e nalgún caso na construción destas funcións patolóxicas.

En canto ás ferramentas empregadas neste TFG, para as representacións gráficas cuxa proveniencia non está indicada utilizouse o programa Maple, dentro da bibliografía temos 7 libros/artigos, os cales abarcan practicamente tódolos resultados vistos.

Comezaremos coa función de Thomae, estudaremos a súa continuidade e a súa diferenciabilidade, e gracias a isto poderemos obter algunhas conclusións bastante relevantes, como por exemplo que non existen funcións continúas tan só no conxunto dos números racionais e que en cambio, a propia función de Thomae é continua tan só nos irracionais.

Dedicaremos un capítulo enteiro ás funcións monótonas, as cales ademais de ter moitas particularidades, son de moita importancia dentro do tema que estamos a tratar. Por exemplo, construiremos unha función continua pero non monótona en ningún intervalo de $\mathbb{R}$, algo que intuitivamente parece bastante complicado, o exemplo que utilizaremos está no libro [1] e a súa construción será bastante longa, xa que teremos que ver 6 lemas previos ata conseguilo.

Ademais dedicaremos unha sección deste capítulo ás funcións de variación limitada e veremos, que están directamente relacionadas coas funcións monótonas, en concreto, podemos escribir unha función de variación limitada como diferencia de dúas monótonas. Tamén estudaremos como exemplos algúns dos exercicios propostos no libro [1] da bibliografía, os cales axudarán a afianzar os contidos vistos ao longo do capítulo.

No terceiro capítulo veremos dous exemplos diferentes de funcións continuas en todo punto e non diferenciables en ningún punto, mentres que no último veremos dos exemplos de funcións continuas e sobrexectivas de $[0,1]$ a $[0,1]^2$. O primeiro deles está extraído do libro [1] e ten a particularidade de que realmente durante a demostración non estamos demostrando directamente que a nosa función non é diferenciable, senón que veremos que non é aproximadamente diferenciable, e veremos durante o capítulo que a unha función diferenciable ten que ser tamén aproximadamente diferenciable. O segundo exemplo está extraído do libro [3] e consiste basicamente na construción dunha serie funcional non diferenciable e continua en todo punto.

En canto ao último capítulo, comezaremos comprobando que existen bixeccións entre $[0,1]$ e $[0,1]^2$ pero non existen bixeccións continuas. O que si existen son funcións continuas e sobrexectivas entre $[0,1]$ e $[0,1]^2$, veremos dous exemplos, o primeiro é a coñecida como curva de Peano, a cal construíremos como límite dunha sucesión de funcións continuas, este exemplo se atopa no libro [5] da bibliografía. Mentres que o segundo encontrase no libro [2] da bibliografía, e a súa construción faise mediante series funcionais.

O traballo tamén conta con dous apéndices, un dedicado ao Conxunto de Cantor e outro dedicado a resultados sobre series funcionais, o primeiro contén información que concirne ao capítulo 2 e algunha a maiores, sobre propiedades interesantes do Conxunto de Cantor e sobre a función de Cantor, que tamén ten aspectos propios dunha función patolóxica. O segundo dos apéndices contén a información necesaria sobre series funcionais, que utilizaremos nos capítulos 3 e 4, os resultados non se demostrarán neste apéndice aínda que a súa proba é moi sinxela.

Como vemos, a estrutura dos capítulos non é moi homoxénea, aínda que si que é certo que os capítulos 3 e 4 son moi similares. A gran maioría de resultados presentes neste TFG teñen unha proba bastante sinxela, cun coñecemento básico, a maior dificultade probablemente resida no contido de series funcionais que se atopa nos capítulos 3 e 4, para o cal é recomendable ler o capítulo 9 do libro [2] da bibliografía. Probablemente o libro máis seguido neste traballo sexa [1], xa que podemos atopar contidos presentes nel en cada un dos tres últimos capítulos do traballo, non obstante, tamén hai casos nos que se inclúen resultados dese libro demostrados dunha forma alternativa un pouco máis sinxela. En canto ao primeiro capítulo, exceptuando un par de resultados o resto baséase no artigo [6].

En definitiva, este traballo consistirá no estudo e análise de funcións patolóxicas e certos aspectos moi curiosos das mesmas.

Capítulo 1

Función de Thomae.

Neste capítulo estudaremos principalmente a Función de Thomae e algunhas das súas propiedades máis destacables, como por exemplo o feito de que é discontinua nos racionais e continua nos irracionais ou o feito de que non é diferenciable en ningún punto de $\mathbb{R}$. A maioría dos contidos que revisaremos atópanse no artigo [6] da bibliografía.

En primeiro lugar introduciremos a función de Dirichlet, que é a seguinte:

$$D(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Esta función ten varias particularidades, sendo as máis notables que non é continua en ningún punto do seu dominio. Tamén que non é Riemann integrable e non obstante si é Lebesgue integrable (o valor da integral de Lebesgue é 0 para esta función).

Como modificación desta función Thomae definiu a seguinte función real de variable real:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1/n & \text{se } x = m/n, \text{ onde } mcd(m,n) = 1, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Veremos agora unha proposición sobre a continuidade da función de Thomae.

Proposición 1.1. *A función de Thomae é continua nos irracionais e discontinua nos racionais.*

Demostración. Ver que é discontinua nos racionais é moi sinxelo, sexa $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ un racional irredutible calquera, por ser $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ denso en $\mathbb{R}$ existe unha sucesión $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de irracionais converxente a

$\frac{p}{q}$. Non obstante para calquera $n \in \mathbb{N}$, $T(a_n) = 0 \neq \frac{1}{q} = T(p/q)$, logo $\lim\limits_{n\to\infty} T(a_n) = 0 \neq T(p/q)$, co que concluímos que T non é continua en $\mathbb{Q}$.

Vexamos agora que T non é continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Para facelo verémolo só para os irracionais positivos (sendo a comprobación para os negativos análoga), tomemos entón un irracional positivo x_1 e sexa $\varepsilon \in (0,1)$, tomemos agora un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Agora intentaremos atopar un intervalo aberto, que denotaremos por I, con centro x_0 e que non teña ningún racional da forma:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ ....,\ \frac{N-1}{N}.$$

Supoñamos que existe o intervalo I e sexa $x \in I$. Se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entón $T(x) = T(x_1) = 0$. Se $x \in \mathbb{Q}$, podemos escribilo como $x = \frac{p}{q}$, así, $T(x) = \frac{1}{q}$. Entón $x \notin \{\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ ....,\ \frac{N-1}{N}\}_{N\in\mathbb{N}}$, polo que temos $q > N$, o cal nos leva a que

$$|T(x) - T(x_1)| = |T(x)| = \frac{1}{q} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Con isto probamos a continuidade de T en x_1, para finalizar, temos agora que construír I. O procedemento será o seguinte, comezamos escollendo un $\delta_1 > 0$ de modo que o intervalo $(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$ non conteña ningún número natural. A continuación seleccionamos outro $\delta_2 > 0$ de forma que o intervalo aberto $(x_1 - \delta_2, x_1 + \delta_2)$ non conteña ningún racional da forma $\frac{m}{2}$ con m e 2 coprimos. Así, para cada $k \in \{1, 2, ..., N\}$ tomamos un $\delta_k > 0$ de forma que o intervalo aberto $(x_1 - \delta_k, x_1 + \delta_k)$ non conteña ningún racional da forma $\frac{m}{k}$ con m e k coprimos. Se definimos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_N\}$, resulta que o intervalo $I = (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ non contén ningún racional dos anteriormente mencionados e polo tanto concluímos a demostración. $\square$

Gracias a este resultado podemos probar outro relacionado coa existencia de funcións continuas tan só nos racionais.

Teorema 1.2. *Non existe ningunha función f que sexa continua tan só en $\mathbb{Q}$.*

Demostración. Supoñamos que existe unha función unicamente continua nos racionais, que denotaremos por f, tomemos un racional $x_0 \in (0,1)$. Como f é continua en x_0 existe un $\delta > 0$ tal que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (0,1)$ e,

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}.$$

Escollemos agora a_1 e b_1 de modo que $[a_1, b_1] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Entón, para todo $x, y \in [a_1, b_1]$ temos que:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(y) - f(x_0)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

tomamos agora un irracional y_0 en (a_1, b_1), e de forma análoga que fixemos con f en x_0, pola continuidade da función de Thomae nos irracionais temos que existe $[a_2, b_2] \subset (a_1, b_1)$ tal que, para todo $x, y \in [a_2, b_2]$,

$$|T(x) - T(y)| < 1.$$

Continuamos entón construíndo, de forma análoga un intervalo $[a_3, b_3] \subset (a_2, b_2)$ no que para $x, y \in [a_3, b_3]$ se cumpra

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2} \qquad |T(x) - T(y)| < \frac{1}{2}.$$

Repetindo este proceso infinitamente obtemos unha sucesión de intervalos $\{[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}\}$ cumprindo:
1)$(0, 1) \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ..... \supset [a_n, b_n] \supset ...,$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0,$
3)$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2^{n-2}}, \quad |T(x) - T(y)| < \frac{1}{2^{n-2}}$, se $x, y \in [a_n, b_n]$.

Logo polo teorema dos intervalos encaixados, temos que existe un $c \in (0, 1)$ tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}.$$

E teríamos que tanto f como T son continuas en c, o cal implicaría que c fose racional e irracional ao mesmo tempo, isto é claramente unha contradición e polo tanto concluímos a demostración. $\square$

Xa sabemos que a función de Thomae é discontinua nos racionais, polo tanto tampouco será diferenciable en $\mathbb{Q}$, nos queda agora comprobar se o é ou non no conxunto dos irracionais.

Proposición 1.3. *A función de Thomae non é diferenciable en ningún punto.*

Demostración. Sexa $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sexa $n \in \mathbb{N}$, claramente existe $j_n \in \mathbb{Z}$ tal que $|j_n - na| \in [0, 1)$, é dicir, $|j_n/n - a| \in [0, 1/n)$.

Por definición da función de Thomae, $j_n/n \in \mathbb{Q}$ o cal implica que $T(j_n/n) \geq 1/n$. Co cal:

$$|T(j_n/n) - T(a)|/|j_n/n - a| = |T(j_n/n)|/|j_n/n - a| \geq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como sabemos, $|j_n/n - a| \in [0, 1/n)$, polo tanto $j_n/n \to a$ cando $n \to \infty$, entón por esta aproximación racional chegamos a que a derivada non pode ser 0, non obstante se utilizásemos unha sucesión de números irracionais chegaríamos a que a derivada, de existir, valería 0, isto débese a que a imaxe de calquera irracional mediante T vale 0. Co cal chegamos a que T non é diferenciable en ningún punto de $\mathbb{R}$, xa que nos racionais non é continua. $\square$

Definición 1.4. Sexa $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de números reais que tende a 0. Definimos así a función de Thomae modificada con respecto a $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ como:

$$T_{(a_i)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ a_n & \text{se } x = m/n, \text{ onde } mcd(m,n) = 1, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Posto que $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$, $T_{(a_i)}$ é continua en $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Veremos agora unha proposición directamente relacionada coa diferenciabilidade de calquera destas funcións de Thomae modificadas.

Proposición 1.5. *Sexa f unha función en $\mathbb{R}$ que é positiva nos racionais e 0 nos irracionais. Entón existe un subconxunto non numerable e denso dos irracionais no que f non é diferenciable.*

Demostración. Sexa $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ unha enumeración dos racionais. Definiremos recursivamente unha sucesión de racionais converxente, sexa $x_1 \in \mathbb{Q}$ e sexa $I_1 = [x_1 - f(x_1)/2, x_1 + f(x_1)/2]$, temos pois que se $x \in I_1$:

$$f(x_1) \geq |x_1 - x|.$$

Agora, a partir de I_n e x_n podemos definir I_{n+1} e x_{n+1} recursivamente e impoñendo as seguintes condicións:

1) $I_{n+1} \subset I_n$;

2) $|I_{n+1}| < \frac{1}{n}$, sendo $|I_{n+1}|$ a lonxitude do intervalo;

3) $x_{n+1} \in \mathbb{Q} \cap I_{n+1}$ e para $x \in I_{n+1}$

$$f(x_{n+1}) \geq |x_{n+1} - x|.$$

4) $r_i \notin I_{n+1}$ para $i \in \{1, ..., n\}$.

Por 2) temos entón unha sucesión de intervalos con lonxitude converxente a 0, se temos en conta isto e a propiedade 1), é claro que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$, temos tamén por 3) que $x_i \to a$.

Ademais $a \notin \mathbb{Q}$, xa que de non ser certo isto, existiría algún $p \in \mathbb{N}$ tal que $a = r_p$ e iso nos levaría por 4), a que $a \notin I_{p+1}$. Con respecto a diferenciabilidade de f en a, de existir a derivada, por aproximación irracional debería valer 0. Non obstante, tendo en conta que $a \in I_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\frac{|f(x_i) - f(a)|}{|x_i - a|} = \frac{|f(x_i)}{|} |x_i - a| \geq 1.$$

Co que chegamos a que f non é diferenciable en a. Sexa A o conxunto de todos os puntos de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ que podemos obter da mesma forma que a. Supoñamos que A é numerable e sexa $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ unha enumeración de A. Podemos facer o mesmo proceso outra vez engadindo a condición de que $c_i \notin I_{n+1}$ para $i \in \{1, 2, ..., n\}$, chegamos a un punto, $a' \notin A$, no cal f non é diferenciable, co cal chegamos a unha contradición. $\square$

Proposición 1.6. *Sexa $\{a_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un subconxunto numerable dos irracionais. Existe unha función que é positiva nos racionais, 0 nos irracionais e diferenciable no conxunto $\{a_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Demostración. Para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos $g_i(n) = \text{mín}\{|\frac{m}{n} - a_i| : mcd(m, n) = 1\}$ e $g(n) = \text{mín}_{i \leq n}\{g_i(n)\}$. Definimos a función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ g(n)^2 & \text{se } x = m/n, \text{ onde } mcd(m, n) = 1, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Fixamos agora $i \in \mathbb{N}$, para m e n coprimos con $n \geq i$, temos:

$$\frac{|f(m/n) - f(a_i)|}{|m/n - a_i|} = \frac{|g(n)^2|}{|m/n - a_i|} \leq \frac{g(n)^2}{g_i(n)} \leq \frac{g_i(n)^2}{g_i(n)} = g_i(n).$$

Como $g_i(n) \to 0$ cando n tende a infinito chegamos a que f é diferenciable en $\{a_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\square$

Capítulo 2

Funcións monótonas.

Neste capítulo centrarémonos nas funcións monótonas con imaxe en $\mathbb{R}$. Veremos algúns resultados bastante xerais e outros máis complexos, como por exemplo a existencia de funcións diferenciables en todo punto pero non monótonas en calquera intervalo do seu dominio. Tamén comprobaremos o feito de que unha función monótona é diferenciable en case todo punto do seu dominio.

Comezremos recordando que a función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será unha función crecente (estritamente crecente) se cumpre a seguinte propiedade para calesquera $x \in A$ e $y \in A$:

$$x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \ (x > y \Rightarrow f(x) > f(y)).$$

Analogamente podemos definir as funcións (estritamente) decrecentes. Unha función será monótona se é crecente ou decrecente. Sexa $x \in \mathbb{R}$, usaremos a seguinte notación para os límites laterais superiores e inferiores de calquera función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x^+) = \lim_{\substack{y \to x \\ y > x \\ y \in A}} f(x), \qquad f(x^-) = \lim_{\substack{y \to x \\ y < x \\ y \in A}} f(x).$$

Comezaremos vendo unha proposición sobre a existencia dos límites laterais nas funcións monótonas.

Proposición 2.1. *Sexa $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ unha función monótona. Se $a \in A$ é un punto illado, entón f ten límites laterais en a. Ademais,*

$$f(a^-) \leq f(a^+) \text{ se } f \text{ é crecente,}$$

$$f(a^+) \leq f(a^-) \text{ se } f \text{ é decrecente.}$$

Demostración. Estudaremos o caso no que f é crecente, pois o caso no que f é decrecente é totalmente análogo. Sexa $a \in \mathbb{R}$, veremos que existe límite lateral pola esquerda en a.

Definimos $\alpha = \sup\{f(x) : x \in A \cap (-\infty, a)\}$ e sexa $\varepsilon > 0$, como f é crecente e α un supremo é claro que $\alpha \neq -\infty$. Definimos $\beta = \alpha - \varepsilon$ se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta = 1/\varepsilon$ se $\alpha = \infty$. Logo, é claro que $\beta < \alpha$, pola definición de α como supremo, existe entón algún $r \in A \cap (-\infty, a)$ tal que $f(r) > \beta$. Podemos escoller $\delta > 0$ tal que $r \notin B(a, \delta)$. Así,

$$x \in A \cap B(a, \delta) \cap (-\infty, a) \Rightarrow \beta \leq f(r) \leq f(x) \leq \alpha.$$

E en ambos casos ($\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\alpha = \infty$), por como definimos β chegamos a que $f(x^-) = \alpha$. Analogamente, utilizando un ínfimo neste caso, teriamos que $f(x^+) = \alpha'$. Con $\alpha' \neq \infty$, entón:

$$-\infty \neq \alpha = \sup\{f(x) : x \in A \cap (-\infty, a)\} \leq \inf\{f(x) : x \in A \cap (a, \infty)\} = \alpha' \neq \infty.$$

O caso de f decrecente é idéntico. □

Utilizaremos agora a proposición anterior como ferramenta para demostrar o seguinte resultado.

Teorema 2.2. *O conxunto de discontinuidades dunha función monótona é, como moito, numerable.*

Demostración. Sexa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unha función monótona. Por ser f monótona sabemos que en todo punto do dominio da función existen os límites laterais e son finitos. Podemos supoñer sen perda de xeneralidade que f é monótona crecente. Consideremos o conxunto

$$E := \{x \in \mathbb{R} : f(x^-) < f(x^+)\},$$

claramente, con demostrar que é numerable remataríamos a demostración.

Sexa $x \in E$, entón existe un racional, $r(x) \in \mathbb{Q}$, tal que $f(x^-) < r(x) < f(x^+)$. Sexan $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$, entón $r(x_1) < f(x_1^+) \leq f(x_2^-) < r(x_2)$, co que chegamos a que $r(x_1) \neq r(x_2)$. Visto isto, é claro que podemos establecer unha bixección entre E e un subconxunto de $\mathbb{Q}$ mediante a aplicación r, e polo tanto, E é numerable. □

Para ver un exemplo básico de función monótona faremos o exercicio 2 do capítulo 2 do libro [1], que é o seguinte:

Exemplo 2.3. Sexa $E = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconxunto numerable de $\mathbb{R}$ e sexa $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ unha familia numerable de números reais estritamente positivos, tales que:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} r_n < +\infty.$$

Definiremos a función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{n \in N(x)} r_n,$$

onde $N(x) = \{n \in \mathbb{N} : e_n < x\}$. Debemos probar que:

(a) f é monótona crecente;

(b) f é continua en todo punto de $\mathbb{R} \setminus E$;

(c) Para calquera $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$f(e_n^+) - f(e_n^-) = r_n.$$

Solución 2.4. (a) Sexan $x, y \in \mathbb{R}, y < x$. Tendo en conta a definición de $N(a)$ para a $\in \mathbb{R}$, temos que $N(y) \subset N(x)$, e polo tanto:

$$f(x) - f(y) = \sum_{n \in N(x)} r_n - \sum_{n \in N(y)} r_n \geq 0.$$

Co que queda demostrado que a función é crecente.
(b) No caso de que E sexa finito a proba é bastante sinxela así que nos limitaremos ao caso infinito numerable. Vexamos primeiro que f non é continua nos puntos de E. Sexa $e_k \in E$, logo para todo $h > 0$

$$N(e_k) \subset N(e_k + h) \text{ e ademais } k \in N(e_k + h) \text{ e } k \notin N(e_k).$$

Entón:

$$\lim_{h \to 0^+} |f(e_k + h) - f(e_k)| \geq r_k > 0.$$

Co que concluímos que f non é continua nos puntos de E.

Vexamos agora a continuidade dos puntos de $\mathbb{R} \setminus E$. Sexa $n \in \mathbb{N}$ e $X_n = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, tomemos $t_0 \in \mathbb{R} \setminus E$, como X_n é un conxunto finito, existe $\delta_n > 0$ tal que $X_n \cap (t_0 - \delta_n, t_0 + \delta_n) = \emptyset$. Logo se $t \in (t_0 - \delta_n, t_0 + \delta_n)$,

$$|f(t) - f(t_0)| \leq \sum_{k \in (N(t) \setminus X_n)} r_k.$$

Temos que,

$$\sum_{k \in N(t)} r_k = \sum_{k \in (X_n) \cap N(t)} r_k + \sum_{k \in (N(t) \setminus X_n)} r_k$$

pero,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k \in (X_n) \cap N(t)} r_k = \sum_{k \in N(t)} r_k$$

logo,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in(N(t)\setminus X_n)} r_k = 0.$$

Finalmente, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k\in(N(t)\setminus X_n)} r_k < \varepsilon$. Entón podemos tomar $\delta > 0$ tal que $x_k \notin (t_0-\delta, t_0+\delta)$ para todo $k \in \{1, 2, ..., n\}$. E polo tanto, se $t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$

$$|f(t) - f(t_0)| \leq \sum_{k\in(N(t)\setminus X_n)} r_k < \varepsilon.$$

(c) Sexa $n \in \mathbb{N}$, e sexa $e_n \in E$. Sexan $k \in \mathbb{N}$ e $X_k = \{e_1, e_2, ..., e_k\}\setminus\{e_n\}$, como X_k é un conxunto finito, existe $\delta_k > 0$ tal que $X_k \cap (e_n - \delta_k, e_n + \delta_k) = \emptyset$. Logo se $t \in (e_n - \delta_k, e_n + \delta_k)$,

$$|f(t) - f(e_n^-)| \leq \sum_{i\in(N(t)\setminus X_k)} r_i.$$

Procedendo de maneira similar ao apartado b) e tendo en conta que neste caso para todo $k \in \mathbb{N}$ temos que $e_n \notin X_k$, chegamos a que, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $k' \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i\in(N(t)\setminus X_{k'})} r_i < \varepsilon + r_n$. Logo existe $\delta > 0$ tal que $x_k \notin (e_n - \delta, e_n + \delta)$ para calquera $k \in \{1, 2, ..., k'\} \setminus \{n\}$. E polo tanto, se $x \in (e_n - \delta, e_n + \delta)$:

$$|f(t) - f(e_n^-)| \leq \sum_{i\in(N(t)\setminus X_{k'})} r_i < \varepsilon + r_n.$$

Como f é crecente, pola Proposición 2.1, $|f(e_n^+) - f(e_n^-)| = f(e_n^+) - f(e_n^-)$. E finalmente probamos $f(e_n^+) - f(e_n^-) = r_n$. Co que rematamos o exercicio.

2.1. Monotonía e diferenciabilidade.

Demostraremos agora un resultado que relaciona a diferenciabilidade coa monotonía. Veremos primeiro tres lemas previos, e a partir de agora denotaremos por λ á medida de Lebesgue.

Lema 2.5. *Sexa $E \subset (a, b) \subset \mathbb{R}$ un conxunto medible que non é de medida nula. Se $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é un conxunto de intervalos abertos que cubre E, entón existe $\varepsilon > 0$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} |J_i| \geq \varepsilon$, denotando $|J_i|$ a lonxitude de J_i.*

Demostración. A proba é moi sinxela, de non ser certo, teríamos que sendo $\varepsilon > 0$ arbitrario:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |J_i| \leq \varepsilon.$$

Por tanto $\sum_{i=1}^{\infty} |J_i| = 0$, o cal nos leva a que E é de medida nula, que é falso. □

Lema 2.6. *Sexa $E \subset (a,b) \subset \mathbb{R}$ un conxunto medible (con respecto a λ) que non é de medida nula. Se T é unha colección de intervalos abertos de $[a,b]$ que cubre E, entón existe un subconxunto $\{I_1, I_2, ..., I_N\} \subset T$ tal que $\sum_{i=1}^{N} |I_i| > \frac{\varepsilon}{3}$, sendo ε o mesmo descrito no Lema 2.5.*

Demostración. Como $\bigcup_{I \in T} I$ é unión de intervalos abertos é un intervalo aberto, entón podemos escribir $\cup_{I \in T} I = \cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ onde $\{(a_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é unha sucesión disxunta de intervalos abertos.

Como E é medible e $\lambda(E) > 0$, existe ε tal que $0 < \varepsilon < \lambda(E)$, logo,

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) \Rightarrow \lambda(\cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - a_n > \varepsilon.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $(a_n, b_n) \subset \mathbb{R}$ podemos escoller a_n' e b_n' tal que $a_n' < b_n'$ e $[a_n', b_n'] \subset (a_n, b_n)$, entón existirá $c \in \mathbb{R}$ tal que $c > 1$ e $b_n' - a_n' = \frac{b_n - a_n}{c}$. E polo tanto $\lambda(\cup_{n=1}^{\infty}(a_n', b_n')) = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n' - a_n') > \varepsilon/c$. Sexa $n \in \mathbb{N}^*$, para cada $x \in [a_n', b_n']$ existe un $I_n \in E$ tal que $x \in I_n$, logo $A := \{J_x : x \in [a_n', b_n']\}$ é un recubrimento de $[a_n', b_n']$, que é compacto. Temos entón que A ten un subrecubrimento finito $\{J_{x_1}, J_{x_2}, ..., J_{x_t}\}$ tal que $[a_n', b_n'] \subset \bigcup_{k=1}^{t} J_k$.

Podemos asumir que cada intervalo J_{x_l} do subrecubrimento ten, como mínimo, un punto y_l que non pertence á unión dos resto. Podemos asumir tamén que $y_1 < y_2 < ... < y_t$. Temos entón que $\{J_{x_1}, J_{x_3}, ...\}$ e $\{J_{x_2}, J_{x_4}, ...\}$ son conxuntos de intervalos disxuntos, isto é claro xa que para cada n, entre $J_{x_{n-2}}$ e J_{x_n} teriamos un y_{n-1} que sería maior que o extremo superior de $J_{x_{n-2}}$ e menor que o inferior de J_{x_n}. Temos logo que

$$\sum_{k=1}^{\lfloor t/2 \rfloor} |J_{x_{2k-1}}| \geq (\sum_{k=1}^{t} |J_{x_k}|)/2 \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{\lfloor t/2 \rfloor} |J_{x_{2k}}| \geq (\sum_{k=1}^{t} |J_{x_k}|)/2.$$

Independentemente do caso, para cada n temos unha subcolección E_n de E tal que,

$$\sum_{I \in E_n} |I| \geq (\sum_{k=1}^{t} |J_{x_k}|)/2 \geq \frac{b_n' - a_n'}{2}.$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I \in E_n} |I| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n' - a_n'}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2c}.$$

Polo tanto sendo $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ unha unión numerable de subcoleccións disxuntas de E que cumpre $\sum_{I \in A} |I| \geq \frac{\varepsilon}{2c}$, con $c > 1$, como c depende do tamaño dos intervalos escollidos, podemos asumir que $c < 3/2$, existirá logo un $N \in \mathbb{N}$ tal que, sendo $A = \{I_1, I_2, ..., I_N\}$, $\sum_{k=1}^{N} |I_k| \geq \varepsilon/3$. $\square$

Lema 2.7. *Sexan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ unha partición de $[a, b]$, S un subconxunto non baleiro de $\{1, 2, ..., n\}$ e $A > 0$. Se $f(a) \leq f(b)$ e*

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} < -A,$$

para cada $k \in S$, temos que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| > |f(b) - f(a)| + AL,$$

onde $L = \sum_{k \in S} x_k - x_{k-1}$.

Demostración. Por hipótese $f(a) \leq f(b)$, logo

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| = f(b) - f(a) &= \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ &= \sum_{k \in S} (f(x_k) - f(x_{k-1})) + \sum_{k \notin S} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ &< -A \sum_{k \in S} (x_k - x_{k-1}) + \sum_{k \notin S} (f(x_k) - f(x_{k-1})). \end{aligned}$$

Co cal queda vista a desigualdade que queríamos. □

Definición 2.8. Diremos que unha propiedade cúmprese para case todo punto se o conxunto de puntos onde non se cumpre é de medida nula con respecto á medida de Lebesgue (λ).

Unha vez vistos estes resultados previos, xa estamos en posición de demostrar o seguinte resultado:

Teorema 2.9. *Sexa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ unha función monótona. Entón f é diferenciable en case todo punto de $[a, b]$.*

Demostración. Sabemos polo Teorema 2.2 que f é continua salvo nun conxunto numerable de puntos. Polo tanto nos chega con probar que o conxunto

$$A := \{x \in (a, b) : f \text{ é continua en } x \text{ e } \overline{D}f(x) > \underline{D}f(x)\},$$

onde

$$\overline{D}f(x) := \lim_{y \to x} \sup \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad \text{e} \quad \underline{D}f(x) := \lim_{y \to x} \inf \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

é de medida nula.

Podemos comprobar que A é a unión numerable dos conxuntos

$$E_{r,s} = \{x \in (a, b) : f \text{ é continua en } x \text{ e } \overline{D}f(x) > r > s > \underline{D}f(x)\},$$

con $r, s \in \mathbb{Q}$.

Co que chega con comprobar que $E_{r,s}$ ten medida nula para r, s arbitrarios. O veremos por redución ao absurdo, supoñamos que para certos $r', s' \in \mathbb{R}$, o conxunto $E := E_{r',s'}$ non ten medida nula. Sexan $C = \frac{r'-s'}{2}$, $V = \frac{r'+s'}{2}$ e $g(x) = f(x) - Vx$. Posto que por ser f crecente $\underline{D}f(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$, e $r', s' > \underline{D}f(x)$, temos logo que C e V son positivos, ademais,

$$E = \{x \in (a, b) : g \text{ é continua en } x \text{ e } \overline{D}g(x) > C \text{ e } -C > \underline{D}g(x)\}.$$

Temos ademais que para unha partición calquera $P := \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ de $[a, b]$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1}) - V(x_k - x_{k-1})| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |V(x_k - x_{k-1})| \\
&= f(b) - f(a) + V(b - a).
\end{aligned}$$

Sexa $M = \text{ínf}\{T \in \mathbb{R} : T > \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})|$, para algunha partición, $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}\}$. Sexa $\varepsilon > 0$ o descrito no Lema 2.5, para o conxunto E. Posto que $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ por ser M un ínfimo, existe unha partición $P' = \{x'_0, x'_1, x'_2, ..., x'_n\}$ para a cal:

$$\sum_{k=1}^{n} |g(x'_k) - g(x'_{k-1})| < M - \frac{C\varepsilon}{4}. \tag{2.1}$$

Sexa $x \in E \setminus P'$, entón existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E \cap (x'_{k-1}, x'_k)$. Como g é continua en x e $\overline{D}g(x) > C$ e $-C > \underline{D}g(x)$, podemos tomar a_x e b_x tales que $a_x < x < b_x$ e $(a_x, b_x) \subset (x'_{k-1}, x'_k)$, temos tamén que ou ben $g(x'_k) \geq g(x'_{k-1})$ e $\frac{g(x'_k)-g(x'_{k-1})}{x'_k - x'_{k-1}} > C$ ou ben $g(x'_k) \leq g(x'_{k-1})$ e $\frac{g(x'_k)-g(x'_{k-1})}{x'_k - x'_{k-1}} < -C$. Logo $H := \{(a_x, b_x) : x \in E \setminus P'\}$ é un conxunto de subintervalos abertos que cubre $E \setminus P'$. Polo Lema 2.6 existe un subconxunto $\{I_1, I_2, ..., I_N\}$ de H tal que

$$\sum_{i=1}^{N} |I_i| > \frac{\varepsilon}{3} > \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.2}$$

Sexa agora $Y = \{y_0, y_1, ..., y_q\}$ unha partición de $[a, b]$ definida polos puntos de P' e os extremos dos intervalos $I_1, I_2, ..., I_N$. Definindo $D_k := \{i \in \mathbb{N} : [y_{i-1}, y_i] \subset [x'_{k-1}, x'_k]\}$, aplicando o Lema 2.7 obtemos

$$\sum_{i \in D_k} |g(y_i) - g(y_{i-1})| > |g(x'_k) - g(x'_{k-1})| + CL_k, \tag{2.3}$$

onde L_k é a suma da lonxitude dos intervalos de entre $I_1, I_2, ..., I_N$ contidos en $[x'_{k-1}, x'_k]$. Utilizando (2.3) na primeira desigualdade e (2.1) e (2.2) na segunda chegamos a que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{q} |g(y_k) - g(y_{k-1})| &> \sum_{k=1}^{n} |g(x'_k) - g(x'_{k-1})| + C \sum_{k=1}^{N} |I_k| \\ &> M - \frac{C\varepsilon}{4} + \frac{C\varepsilon}{4} = M.\end{aligned}$$

Co que chegamos a unha contradición coa definición de M. Queda probado entón que

$$A := \{x \in (a,b) : f \text{ é continua en } x \text{ e } \overline{D}f(x) > \underline{D}f(x)\}$$

ten medida nula. Sabemos logo que para $x \in [a,b] \setminus A$, $\overline{D}f(x) = \underline{D}f(x)$, o que nos queda por ver agora é que $Df(x) = \overline{D}f(x) = \underline{D}f(x)$ é finita. Como f é crecente $\underline{D}f(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$ chega con probar que $\underline{D}f(x) \leq \infty$ para case todo $x \in (a,b)$. Para conseguilo temos que ver que

$$B := \{x \in (a,b) : \underline{D}f(x) = \infty\}$$

é de medida nula. Supoñamos que B non ten medida nula. Sexa $S > 0$ un número real arbitrariamente grande, e sexa ε definido como no Lema 2.5. Si $x \in B$, logo $\overline{D}f(x) > S$ e existen a_x e b_x tales que $a_x < x < b_x$, $(a_x, b_x) \subset (a,b)$, e

$$\frac{f(b_x) - f(a_x)}{b_x - a_x} > S.$$

Entón $R := \{(a_x, b_x) : x \in B\}$ cubre B e polo Lema 2.6 contén un subconxunto $\{I_1, I_2, ..., I_N\}$ tal que $\sum_{k=1}^{N} |I_k| > \frac{\varepsilon}{3}$. Para cada k sexa $I_k = (a_k, b_k)$, como f é crecente,

$$f(b) - f(a) \geq \sum_{k=1}^{N} (f(b_k) - f(a_k)) > \sum_{k=1}^{N} S(b_k - a_k) > \frac{S\varepsilon}{3}.$$

Como $\varepsilon > 0$ e S é arbitrariamente grande, chegamos a unha contradición co feito de que $f(b) - f(a)$ debería de ser finito. E con isto remataría a demostración. $\square$

Veremos agora unha serie de resultados que nos axudarán a construír unha función estritamente crecente, continua, e de derivada 0 en case todo punto.

Teorema 2.10. *Sexa $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ unha sucesión de funcións crecentes con dominio en $[a,b]$, que ademais cumpren:*

a) Para cada $x \in [a,b]$ e cada natural n, temos $F_n(x) \geq 0$;

b) Para cada $x \in [a,b]$, temos

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} F_n(x) < \infty.$$

Logo, para case todo $x \in [a,b]$, temos a igualdade

$$F'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} F_n'(x).$$

Demostración. Para $x \in [a,b]$ no que as derivadas $F'(x), F_0'(x), F_1'(x), \cdots, F_n'(x)$ existan, temos:

$$F'(x) \geq F_0'(x) + F_1'(x) + \cdots + F_n'(x) + \cdots$$

Ademais en virtude do Teorema 2.9, a serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} F_n'$ é converxente en case todo punto de $[a,b]$. Utilizaremos agora a notación

$$S_n(x) := \sum_{m=1}^{n} F_m(x)$$

e, para cada natural k, tomamos un índice $n(k)$ tal que

$$F(b) - S_{n(k)}(b) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Posto que F_n é crecente para calquera $n \in \mathbb{N}$ e para cada $x \in [a,b]$

$$F(x) - S_{n(k)}(x) \leq \frac{1}{2^k},$$

temos entón que,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} F(x) - S_{n(k)}(x)$$

converxe uniformemente en case todo punto de $[a,b]$. Así pois,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} (F(x) - S_{n(k)}(x))'$$

tamén converxe uniformemente en case todo punto de $[a,b]$ de aí deducimos que para case todo punto de $[a,b]$,

$$\lim_{k\to\infty} (F(x) - S_{n(k)}(x))' = 0.$$

Como consecuencia disto temos que, para case todo $x \in [a,b]$,

$$F'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} F_n'(x),$$

co que concluimos a demostración. $\square$

Agora intentaremos construír unha función continua de $\mathbb{R}$ a $[0,1]$, estritamente crecente e con derivada 0 en case todo punto, para facelo necesitaremos algunha información sobre o conxunto de Cantor, a cal podemos atopar no apéndice dedicado a este conxunto.

Sendo C_n, para cada $m \in \mathbb{N}$, o definido no apéndice 1. Comezaremos defininido a función só en $\mathbb{R} \setminus C_2$ da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1/2 & \text{se } x \in (1/3, 2/3), \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Supoñamos agora que para $n \in \mathbb{N}$ xa temos definida a nosa función f en $\mathbb{R} \setminus C_n$, entón teríamos que f non estaría definida nun conxunto $\{[a_i, b_i] : 1 \leq i \leq 2^{n-1}\}$. Para construír a función f en $\mathbb{R} \setminus C_{n+1}$ definiremos $f(x) = \frac{f(a_i^-)+f(b_i^+)}{2}$ se $x \in [\frac{2a_i+b_i}{3}, \frac{a_i+2b_i}{3}]$. Continuando este proceso chegamos a que f estará ben definida en $\mathbb{R} \setminus C$, sendo C o conxunto de Cantor. Tal e como está definida f está claro que é continua e crecente no seu dominio, pódese comprobar que f se pode estender a unha función continua e crecente en todo $\mathbb{R}$, ademais temos que $f'(x) = 0$ en $\mathbb{R} \setminus C$, así que a derivada sería 0 en case todo punto.

Sexan p e q dous puntos de $\mathbb{R}$ tales que $p < q$. Como f non é constante, existen algúns puntos x e y de $\mathbb{R}$ tales que $f(x) < f(y)$. Claramente $x < y$ e existe unha homotecia h en $\mathbb{R}^2$ tal que $h((x,0)) = (p,0)$ e $h((y,0)) = (q,0)$. Sexa $f^*(x) = h_2(y, f(y))$, onde $x = h_1(y, f(y))$. Entón, como h é unha homotecia temos que f^* tamén é unha función crecente, con derivada nula en case todo $\mathbb{R}$, e ademais $f^*(p) < f^*(q)$.

Teorema 2.11. *Existe unha función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumpre as 3 condicións seguintes:*

1) g é continua e estritamente crecente;

2) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq g(x) \leq 1$;

3) A derivada de g é cero en case todo punto.

Demostración. Sexa $\{(p_n, q_n) : n \in \mathbb{N}\}$ a familia numerable de todos os racionais, de forma que $p_n < q_n$. Tendo en conta o explicado anteriormente, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe unha función $g_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ tal que:

a) g_n é continua e crecente;

b) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$;

c) Verifícase desigualdade $g_n(p_n) < g_n(q_n)$;

d) A derivada de g_n se anula en case todo punto.

Seguimos de b) que a serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ é uniformemente converxente. Definimos entón $g(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$, que é continua e crecente por a). Evidentemente, a imaxe de g está contida en $[0,1]$. Ademais por c), tamén temos que $g(p_n) < g(q_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, do cal concluímos que g é unha función estritamente crecente.

Finalmente, tendo en conta d) e aplicando o Teorema 2.10, concluímos que a derivada de g é cero en case todo punto de $\mathbb{R}$. Co cal queda probado o Teorema. □

2.2. Funcións de variación limitada.

Esta sección tratará as funcións de variación limitada, as cales podemos definir da seguinte forma:

Definición 2.12. Sexa f unha función definida no intervalo $[a,b]$. Se existe un número positivo M tal que para calquera partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a,b]$:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M,$$

diremos que f é de variación limitada en $[a,b]$.

Veremos agora algúns resultados básicos sobre este tipo de funcións, primeiro introduciremos a definición de función Liptschitziana e un resultado que relaciona directamente este tipo de funcións coas de variación limitada.

Definición 2.13. Diremos que unha función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é Lipschitziana, se existe $K > 0$, un número real positivo, tal que para todo $x, y \in A$,

$$|f(x) - f(y)| < K|x - y|.$$

E chamaremos ao número K constante de Lipschitz.

Lema 2.14. *Se unha función f é lipschitziana en $[a,b]$, entón é de variación limitada.*

Demostración. Dada unha partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, temos o seguinte:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} K|x_i - x_{i-1}| = K(b-a),$$

sendo K a constante de Lipschitz. Queda visto así que f é de variación limitada. □

Agora relacionaremos as funcións monótonas coas de variación limitada.

Lema 2.15. *Se unha función f é monótona en $[a, b]$, entón é de variación limitada.*

Demostración. Supoñamos que f é crecente, xa que o caso de que fose decrecente é análogo. Claramente dada unha partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, temos que dado $i \in \mathbb{N}$ calquera, $f(x_i) - f(x_{i-1}) \geq 0$. Entón:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) = f(b) - f(a).$$

E claramente $f(b) - f(a)$ pódese limitar por un número real. Co cal f é de variación limitada. □

Lema 2.16. *Sexan f e g dúas funcións de variación limitada en $[a, b]$. Entón, tanto a súa suma como a súa diferencia son tamén funcións de variación limitada.*

Demostración. Veremos soamente a diferencia, xa que a proba da suma é análoga. Sexa $h = f - g$ (non hai que comprobar $g - f$ xa que as funcións son arbitrarias). Dada unha partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |h(x_i) - h(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - g(x_i) - f(x_{i-1}) + g(x_{i-1})| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |g(x_{i-1}) - g(x_i)| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})|.
\end{aligned}$$

Como g e f son funcións de variación limitada existen M e M' que limitan ambos sumatorios e polo tanto podemos dar a demostración por rematada. □

No que queda desta sección, probaremos que toda función de variación limitada pode expresarse como diferencia de dúas funcións crecentes, para facelo teremos que ver algúns resultados previos e a seguinte definición.

Definición 2.17. Sexa f unha función de variación limitada, definimos a súa variación total $V_f(a, b)$ no intervalo $[a, b]$ como:

$$V_f(a, b) = \sup\{\sum_{k=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|, \text{ onde } P = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \text{ é unha partición de } [a, b]\}.$$

Lema 2.18. *Supoñamos que f e g son dúas funcións de variación limitada en $[a,b]$. Entón tamén o son a súa suma, a súa diferencia e o seu produto. Ademais temos:*

$$V_{f+g} \leq V_f + V_g \quad e \quad V_{f\cdot g} \leq AV_f + BV_g,$$

onde $A = \sup\{|g(x)| : x \in [a,b]\}$, $B = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$.

Demostración. Primeiro de todo, é importante ter en conta que A e B son finitos, xa que de non selo A por exemplo, existiría algún $t \in [a,b]$ tal que $|g(t)| = \infty$, pero entón sería moi fácil chegar á conclusión de que g non é de variación limitada.

Sexa $h(x) = f(x) + g(x)$,

$$|h(x_k) - h(x_{k-1})| = |f(x_k) + g(x_k) - f(x_{k-1}) - g(x_{k-1})| \leq |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |g(x_k) - g(x_{k-1})|.$$

Sexa agora $h(x) = f(x)g(x)$ dada unha partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a,b]$ temos:

$$\begin{aligned}|h(x_k) - h(x_{k-1})| &= |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1}))| \\ &= |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_k) + f(x_{k-1})g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \\ &\leq A|f(x_k) - f(x_{k-1})| + B|g(x_k) - g(x_{k-1})|.\end{aligned}$$

Co que claramente quedan probadas ambas desigualdades que buscábamos. □

Lema 2.19. *Sexa f de variación limitada en $[a,b]$, e supoñamos que $c \in (a,b)$. Entón f é de variación limitada en $[a,c]$ e $[c,b]$ e se ten:*

$$V_f(a,b) = V_f(a,c) + V_f(c,b).$$

Demostración. Probaremos en primeiro lugar que f é de variación limitada en $[a,c]$ e $[c,b]$. Sexa $P_1 = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ unha partición de $[a,c]$ e sexa $P_2 = \{y_0, y_1, ..., y_l\}$ unha partición de $[c,b]$. Entón $P_0 = P_1 \cup P_2$ é unha partición de $[a,b]$. Renomearemos os elementos de P_0 como $\{z_0, z_1, ..., z_m\}$. Temos pois:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{l} |f(y_k) - f(y_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{m} |f(z_k) - f(z_{k-1})| \leq V_f(a,b).$$

Co cal tanto $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ como $\sum_{k=1}^{l} |f(y_k) - f(y_{k-1})|$ están limitados por $V_f(a,b)$, así pois, f é de variación limitada en $[a,c]$ e $[c,b]$. E ademais tendo en conta que o supremo da suma é maior ou igual ca a suma dos supremos, temos que:

$$V_f(a,c) + V_f(c,b) \leq V_f(a,b).$$

Por outra banda, sendo agora $P' = \{x'_0, x'_1, ..., x'_t\}$ unha partición de $[a, b]$ sexa $P'_0 = P' \cup \{c\}$ se $c \in [x'_k, x'_{k-1}]$, entón temos:

$$|f(x'_k) - f(x'_{k-1})| \leq |f(x'_k) - c| + |c - f(x'_{k-1})|,$$

podemos escribir $P'_0 = P'_1 \cup P'_2$ sendo $P'_1 = \{x'_0, x'_1, ..., x'_{m-1}, c\}$ e $P'_2 = \{c, ..., x'_t\}$, tendo así unha partición de $[a, c]$ e $[c, b]$ respectivamente, así

$$\sum_{k=1}^{t} |f(x'_k) - f(x'_{k_1})| \leq \sum_{k=1}^{m-1} |f(x'_k) - f(x'_{k_1})| + |f(c) - f(x'_{m-1})| + |f(x'_{m+1}) - f(c)|$$
$$+ \sum_{k=m+2}^{t} |f(x'_k) - f(x'_{k_1})| \leq V_f(a, c) + V_f(c, b),$$

logo,

$$V_f(a, b) \leq V_f(a, c) + V_f(c, b).$$

Co que rematamos a demostración, xa que temos as desigualdades nos dous sentidos. □

Agora xa nos atopamos en posición de demostrar o que queríamos.

Teorema 2.20. *Sexa f definida en $[a, b]$, f é de variación limitada se e só se pode expresarse como diferencia de funcións crecentes.*

Demostración. (⇒) Se f é de variación limitada en $[a, b]$. Sexan $a \leq x < y \leq b$, Definimos $V(t) := V_f(a, t)$. Así, utilizando o Lema 2.19:

$$V(y) - V(x) = V_f(a, y) - V_f(a, x) = V_f(a, x) + V_f(x, y) - V_f(a, x) = V_f(x, y) \geq 0.$$

De modo que V é crecente, sexa agora $D = V - f$, entón se $a \leq x < y \leq b$:

$$D(y) - D(x) = V(y) - V(x) - f(y) + f(x) = V_f(x, y) - f(y) + f(x) \geq 0.$$

Sendo a última desigualdade consecuencia directa da defínción de V_f. Entón temos que $f = V - D$ é diferencia de dúas funcións crecentes
(⇐)

Esta implicación é consecuencia directa do Lema 2.15 e do 2.16. □

Veremos agora o exercicio número 3 do capítulo 2 do libro [1], para o cal aplicaremos o teorema que acabamos de ver.

Exemplo 2.21. Busca un exemplo dunha función continua:

$$g : [a, b] \to \mathbb{R}$$

que non poda ser representada da forma:

$$g = g_1 + g_2,$$

onde g_1 e g_2 son funcións monótonas con imaxe en $\mathbb{R}$ e dominio $[a, b]$.

Solución 2.22. O exemplo que utilizaremos será a función: $f : [0, 1] \to [0, 1]$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ x \cdot \operatorname{sen}(1/x) & x > 0. \end{cases}$$

Claramente trátase dunha función continua, xa que é produto de funcións continuas en $(0, 1]$ e é doado comprobar (empregando a regra de l'Hôpital, por exemplo) que $\operatorname{lím}_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Agora demostraremos que f non é unha función de variación limitada. Veremos en primeiro lugar que f restrinxida ao intervalo $[0, 2/\pi]$ non é de variación limitada.

Tomando a partición $P = \{0, 1/(n \cdot \pi + \pi/2), 1/((n-1) \cdot \pi + \pi/2), ..., 2/\pi\}$ con $n \in \mathbb{N}$, é claro que terá $n + 1$ termos, podemos escribir cada x_i da partición (exceptuando o 0) como: $x_i = 1/[(n - i + 1)\pi + \pi/2]$. Entón temos que:

$$\operatorname{sen}(1/x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } n - i + 1 \text{ par}, \\ -1 & \text{se } n - i + 1 \text{ impar}. \end{cases}$$

Polo tanto:

$$f(x_i) = \begin{cases} x_i & \text{se } n - i + 1 \text{ par}, \\ -x_i & \text{se } n - i + 1 \text{ par}. \end{cases}$$

Así, para todo $i \in \mathbb{N}$ temos que

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| = |x_i + x_{i-1}| = x_i + x_{i-1}.$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{i-1} \geq \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n - i + 1) \cdot \pi + \pi/2} \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot \pi + \pi/2}. \end{aligned}$$

Chegamos entón a que f restrinxida a $[0, 2/\pi]$ non pode ser de variación limitada, xa que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i \cdot \pi + \pi/2}$ é unha serie diverxente. Claramente f tampouco pode ser de variación limitada en $[0, 1]$ (basta con tomar a partición anterior engadindo o 1 como último termo).

Así, é claro que f non pode ser suma de dúas funcións monótonas, xa que de suceder iso, tamén se podería expresar como resta de dúas funcións crecentes, o que polo en conta o Teorema 2.20 nos levaría a unha contradición.

2.3. Funcións diferenciables en todo punto e non monótonas en ningún intervalo do seu dominio.

Nesta sección veremos que existen funcións de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ diferenciables en todo punto e que non obstante non son monótonas en ningún intervalo de $\mathbb{R}$, o exemplo que veremos atopase no libro [1] da bibliografía. Para a súa construcción necesitaremos algúns resultados previos.

Lema 2.23. *Sexan s e r dous números reais estritamente positivos. Temos que se cumpre o seguinte:*

1) Para r>s:

$$\frac{r-s}{r^2-s^2} < \frac{2}{r}.$$

2) Se $r > 1$ e $s > 1$, temos:

$$\frac{r+s-2}{r^2+s^2-2} < \frac{2}{s}.$$

Demostración. Para probar 1):

$$\frac{r-s}{r^2-s^2} = \frac{r-s}{(r-s)\cdot(r+s)} = \frac{1}{r+s} < \frac{1}{r} < \frac{2}{r}.$$

Para probar 2):

$$\frac{r+s-2}{r^2+s^2-2} < \frac{2}{s} \Leftrightarrow sr + s^2 - 2s < 2r^2 + 2s^2 - 4 \Leftrightarrow 2r^2 + s^2 - sr + 2s - 4 > 0.$$

Logo,

$$2r^2+s^2-sr+2s+1 > 5 \Leftrightarrow (r-s)^2+r^2+sr+2s+1 > 5 \Leftrightarrow (r-s)^2+r^2+(r-1)(s-1)+r+3s > 5.$$

E a última desigualdade é claramente certa para $r, s > 1$. □

Lema 2.24. *Sexa $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$\varphi(x) = (1+|x|)^{-1/2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Entón, sendo $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, temos:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)dx < 4 \cdot \text{mín}\{\varphi(a), \varphi(b)\}.$$

Demostración. Supoñamos sen perda de xeneralidade que $a < b$. Diferenciemos 3 casos:
1) $0 \leq a < b$. Para este caso utilizaremos o punto 1 do Lema 2.23.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)dx = \frac{1}{(1+b)-(1+a)}\int_a^b (1+x)^{-1/2}dx$$

$$= \frac{2\sqrt{1+b}-2\sqrt{1+a}}{(1+b)-(1+a)} < \frac{4}{\sqrt{1+b}} = 4 \cdot \text{mín}\{\varphi(a), \varphi(b)\}.$$

2) $a < b \leq 0$. Este caso é completamente análogo ao primeiro.
3) $a < 0 < b$. Neste caso utilizaremos o punto 2 do Lema 2.23.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)dx = \frac{1}{(1+b)+(1-a)-2}\int_a^b (1+|x|)^{-1/2}dx$$

$$= \frac{1}{(1+b)+(1-a)-2} \cdot \frac{x \cdot (2\sqrt{1+|x|}-2)}{|x|}\Big|_a^b = \frac{2\sqrt{1+b}-2+2\sqrt{1-a}-2}{(1+b)+(1-a)-2}$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{1+b}+\sqrt{1-a}-2}{(1+b)+(1-a)-2} < \frac{4}{\text{mín}\{\sqrt{1-a}, \sqrt{1+b}\}} = 4 \cdot \text{mín}\{\varphi(a), \varphi(b)\}.$$

Co que queda demostrada a desigualdade. □

Lema 2.25. *Sexa $n \in \mathbb{N}$ e $\psi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como:*

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi(d_k(x-t_k)) \ \forall x \in \mathbb{R},$$

onde φ é a mesma función definida no Lema 2.24, $c_k, d_k, t_k \in \mathbb{R}$ e $c_k, d_k > 0$ para calquera $k \in \mathbb{N}$. Entón

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \psi_n(x)dx < 4 \cdot min\{\psi_n(a), \psi_n(b)\}$$

para $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq b$.

Demostración. Por definición de $\psi_n(x)$ temos:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \psi_n(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi(d_k(x-t_k))dx,$$

utilizando o o cambio de variable $y = d_k(x - t_k)$ temos:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \sum_{k=1}^n c_k\varphi(d_k(x-t_k))dx = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{d_k(b-t)-d_k(a-t)}\int_{d_k(a-t)}^{d_k(b-t)} \varphi(x)dx,$$

utilizamos agora o Lema 2.24,

$$\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{d_k(b-t)-d_k(a-t)}\int_{d_k(a-t)}^{d_k(b-t)} \varphi(x)dx < \sum_{k=1}^n c_k\cdot 4\cdot \text{mín}\{\varphi(d_k(b-t_k)),\varphi(d_k(a-t_k))\},$$

e tendo en conta o feito de que o sumatorio dos mínimos é menor que o mínimo dos sumatorios,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n c_k\cdot 4\cdot \text{mín}\{\varphi(d_k(b-t_k)),\varphi(d_k(a-t_k))\} &= \sum_{k=1}^n 4\cdot \text{mín}\{c_k\varphi(d_k(b-t_k)),c_k\varphi(d_k(a-t_k))\}\\ &\leq 4\cdot \text{mín}\{\sum_{k=1}^n c_k\varphi(d_k(b-t_k)),\sum_{k=1}^n c_k\varphi(d_k(a-t_k))\}\\ &= 4\cdot \text{mín}\{\psi_n(a),\psi_n(b)\}.\end{aligned}$$

Co cal concluímos a demostración do Lema. □

Lema 2.26. *Sexa $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de funcións definidas como no Lema 2.25. Para $x\in\mathbb{R}$ e $n\geq 1$, definimos*

$$\beta_n(x) = \int_0^x \psi_n(z)dz.$$

E supoñamos que para algún $a\in\mathbb{R}$ a serie $\sum_{n=1}^\infty \psi_n(a)$ é converxente. É dicir, existe $s\in\mathbb{R}$ tal que $\sum_{n=1}^\infty \psi_n(a) = s$. Logo temos:

1) A serie $F(x) = \sum_{n=1}^\infty \beta_n(x)$ converxe uniformemente en todo intervalo limitado de $\mathbb{R}$.

2) A función F é diferenciable en a e $F'(a) = s$.

Demostración. Tomamos en primeiro lugar $b\in\mathbb{R}$ tal que $b\geq|a|$, sendo $n\geq 1$ e $x\in[-b,b]$. Temos:

$$|\beta_n(x)| = \left|\int_0^a \psi_n(z)dz + \int_a^x \psi_n(z)dz\right| \leq \left|\int_0^a \psi_n(z)dz\right| + \left|\int_a^x \psi_n(z)dz\right|.$$

Utilizando o Lema 2.25 temos que

$$|\beta_n(x)| \leq 4\psi_n(a)|a| + 4\psi_n(a)|x-a| \leq 4b\psi_n(a) + 8b\psi_n(a) = 12\psi_n(a).$$

Con esto queda probada a converxencia uniforme de $\beta_n(x)$ en $[-b,b]$, xa que por hipótese sabiamos que a serie $\sum_{n=1}^\infty \psi_n(a)$ é converxente. Tomemos agora un $\varepsilon > 0$, por hipótese $\sum_{n=1}^\infty \psi_n(a)$

é converxente, logo existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$10 \sum_{n=k}^{\infty} \psi_n(a) < \varepsilon.$$

Como as funcións $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son continuas en todo punto de $\mathbb{R}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| (1/h) \int_a^{a+h} \psi_n(z)dz - \psi_n(a) \right| < \frac{\varepsilon}{2k},$$

onde $0 < |h| < \delta$, $1 \leq n \leq k$. E utilizando o Lema 2.25 teriamos:

$$\begin{aligned}
|(F(a+h) - F(a))/h - s| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} ((1/h) \int_a^{a+h} \psi_n(z)dz - \psi_n(a)) \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{k} \left| (1/h) \int_a^{a+h} \psi_n(z)dz - \psi_n(a) \right| \\
&+ \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| (1/h) \int_a^{a+h} \psi_n(z)dz - \psi_n(a) \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} 4 \cdot \text{mín}\{\psi_n(a), \psi_n(a+h)\} \right| + \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \psi_n(a) \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 5 \sum_{n=k+1}^{\infty} \psi_n(a) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Queda así probado que $F'(a) = s$ e polo tanto finalizamos a demostración. □

Lema 2.27. *Sexa $n \in \mathbb{N}$, sexan $I_1, I_2, ..., I_n$ intervalos de $\mathbb{R}$ disxuntos dous a dous e dado $1 \leq k \leq n$ sexa t_k o punto medio de I_k. Sexan os números reais $\varepsilon, y_1, y_2, ..., y_n > 0$.*

Entón existe unha función ψ como a do Lema 2.25, tal que para todo $1 \leq k \leq n$, cúmprese o seguinte:

1) $\psi(t_k) > y_k$;

2) $\psi(x) < y_k + \varepsilon \quad \forall x \in I_k$;

3) $\psi(x) < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus (I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n)$.

Demostración. Sexa $c_k = y_k + \frac{\varepsilon}{2}$, para $1 \leq k \leq n$, definimos,

$$\varphi_k(x) = c_k \varphi(d_k(x - t_k)) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

onde $\varphi(d_k(x - t_k)) = \frac{1}{\sqrt{1+|d_k(x-t_k)|}}$. Podemos escoller d_k suficientemente grande como para que se cumpra:

$$\varphi_k(x) < \frac{\varepsilon}{2n} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus I_k. \tag{2.4}$$

Finalmente, sexa $\psi = \varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n$. É claro que, por ser $\varphi_m(x) > 0$ para calesquera $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ temos:

$$\psi(t_k) = \varphi_1(t_k) + \varphi_2(t_k) + ... + \varphi_k(t_k) + ... + \varphi_n(t_k) \geq \varphi_k(t_k) = c_k = y_k + \frac{\varepsilon}{2} > y_k.$$

Co que queda probado 1). Vexamos que 2) é certo. Temos que

$$\max_{x\in\mathbb{R}} \varphi_k(x) = \varphi_k(t_k) = \frac{c_k}{\sqrt{1 + |d_k(t_k - t_k)|}} = c_k, \quad 1 \leq k \leq n. \tag{2.5}$$

Se $x \in I_k$, utilizando (2.4) e (2.5) na desigualdade:

$$\psi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + ... + \varphi_k(x) + ... + \varphi_n(x) < \frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2n} + ... + \varphi_k(t_k) + ... + \frac{\varepsilon}{2n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + c_k.$$

Co que queda probado 2). Finalmente, se $x \in \mathbb{R} \setminus (I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n)$, utilizando (2.4):

$$\psi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + ... + \varphi_n(x) < \frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2n} + ... + \frac{\varepsilon}{2n} < \varepsilon,$$

co que probamos 3) e concluímos a demostración. □

Lema 2.28. *Sexan $\{t_k : k \in \mathbb{N}^*\}$ e $\{r_k : k \in \mathbb{N}^*\}$ dous conxuntos numerables de números reais. Entón, existe $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumpre:*

1) F é diferenciable en todo $\mathbb{R}$.

2) $F'(x) \in (0, 1]$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3) $F'(t_k) = 1$ para cada $k \in \mathbb{N}^*$.

4) $F'(r_k) < 1$ para cada $k \in \mathbb{N}^*$.

Demostración. Consideremos a sucesión de funcións $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que xa definimos no Lema 2.25, definimos agora:

$$f_n := \sum_{k=1}^{n} \psi_n.$$

Intentaremos comprobar que se cumpren as seguintes condicións,

1) Para $n \in \mathbb{N}^*$ e $1 \leq k \leq n$,

$$f_n(t_k) > 1 - \frac{1}{n};$$

2) para $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$f_n(x) < 1 - \frac{1}{n+1};$$

3) para $n \in \mathbb{N}^*$ e $1 \leq k \leq n$,

$$\psi_n(r_k) < \frac{1}{2n \cdot 2^n}.$$

En primeiro lugar, tomamos un intervalo I_1 con punto medio t_1 e tomamos $r_1 \in \mathbb{R}$ tal que $r_1 \notin I_1$, aplicamos o Lema 2.27 con $\varepsilon = \frac{1}{4} = y_1$.

Obtemos así ψ_1 e entón $f_1 = \psi_1$, co que, e se cumpren as 3 condicións anteriores para $n = 1$. Supoñamos que para un natural $n > 1$, xa definimos as funcións, $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}$, cumprindo as 3 condicións. Podemos escoller intervalos disxuntos $I_1, I_2, ..., I_n$ de forma que:

a) t_k sexa o punto medio de I_k para cada $1 \leq k \leq n$,

b) $I_k \cap \{r_1, r_2, ..., r_n\} = \emptyset$ para cada $1 \leq k \leq n$,

c) Para cada $1 \leq k \leq n$, $x \in I_k$, teñamos a desigualdade:

$$f_{n-1}(x) < f_{n-1}(t_k) + \delta,$$

con $\delta = 1/(n(n+1)) - 1/(2n2^n)$. Aplicamos agora o Lema 2.27 con $\varepsilon = 1/(2n2^n)$ e $y_k = 1 - \frac{1}{n} - f_{n-1}(t_k)$, con $1 \leq k \leq n$, obtendo a función ψ_n, que cumpre $\psi_n(r_k) < \varepsilon = 1/(2n2^n)$ para cada $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Cumpríndose así a condición (3). Ademais, para $1 \leq k \leq n$:

$$f_n(t_k) = f_{n-1}(t_k) + \psi_n(t_k) > f_{n-1}(t_k) + y_k > 1 - \frac{1}{n}.$$

Co que queda probado (1), finalmente, para probar (2), tomemos $x \in \mathbb{R}$, se para algún $k \in \{1, 2, ..., n\}$, $x \in I_k$,

$$\begin{aligned} f_n(x) = f_{n-1}(x) + \psi_n(x) < f_{n-1}(x) + \varepsilon + \delta + y_k &= 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2n2^n} + \frac{1}{2n2^n} \\ &= 1 - \frac{n}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

No caso de que $x \notin I_k$ para ningún $k \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + \psi_n(x) < 1 - \frac{1}{n} + \varepsilon < 1 - \frac{1}{n+1}.$$

En ambos casos verifícase (2). Procedendo de esta forma podemos construír $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Sexa

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k = \lim_{n \to \infty} f_n,$$

e sexa, para $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) := \int_0^x f(z)dz.$$

Polo Lema 2.26, temos que $F'(x) = f(x)$, tamén temos que, para $x \in \mathbb{R}$, utilizando (2) e (3):

$$f_n(x) < 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0 < F'(x) = f(x) \leq 1,$$

e dado $k \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(t_k) > 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow F'(t_k) = f(t_k) \geq 1,$$

co cal $F'(t_k) = 1$.

Sexa agora, $1 \leq k \leq n$, por (3):

$$F'(r_k) = f_{n-1}(r_k) + \sum_{k=n}^{\infty} \psi_k < 1 - \frac{1}{n} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2k \cdot 2^k}.$$

Con ver que $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2k \cdot 2^k} \leq \frac{1}{2n}$ xa rematariamos, posto que nese caso teriamos

$$F'(r_k) < 1 - \frac{1}{n} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2k \cdot 2^k} \leq 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2n} < 1,$$

co que remataría a demostración.

Vexamos que é certo, para calquera $k \geq n$, temos que $\frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2n}$, logo

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2k2^k} \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2n} \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - 1) = \frac{1}{2n}.$$

Co cal concluímos a demostración. $\square$

Teorema 2.29. *Existe unha función $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que,*

(1) H é diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}$;

(2) H' está limitada en $\mathbb{R}$;

(3) H non é monótona en ningún intervalo de $\mathbb{R}$.

Demostración. Sexan $T := \{t_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ e $R := \{r_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ dous conxuntos numerables, disxuntos e densos de $\mathbb{R}$. Usando o resultado do Lema 2.28, sexan $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dous funcións diferenciables en todo punto que cumpren:

(a) $G'(x) \in (0,1]$ e $F'(x) \in (0,1]$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

(b) $F'(t_n) = 1$ e $F'(r_n) < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$;

(c) $G'(r_n) = 1$ e $G'(t_n) < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Sexa agora $H = F - G$, logo $H'(t_n) > 0$, $H'(r_n) < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Posto que os conxuntos T e R son densos en $\mathbb{R}$, chegamos a que H non pode ser monótona en ningún intervalo de $\mathbb{R}$. Tamén é claro que $-1 \leq H'(x) \leq 1$. Co que comprobamos que H' é limitada, e queda así probado o Teorema. $\square$

Capítulo 3

Funcións continuas en todo punto e non diferenciables en ningún punto.

3.1. Funcións aproximadamente diferenciables

Nesta sección veremos dous exemplos de funcións continuas en $\mathbb{R}$ e que pola contra non son diferenciables en ningún punto de $\mathbb{R}$. En primeiro lugar veremos unha serie de resultados previos que nos axudarán máis adiante. Para facelo primeiro introduciremos a seguinte definición.

Definición 3.1. Diremos que unha función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é aproximadamente diferenciable no punto $x \in \mathbb{R}$ se existe un conxunto X que sexa Lebesgue-medible (denotaremos por λ a medida de Lebesgue) para o cal:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\lambda(X \bigcap [x-h, x+h])}{2h} = 1.$$

E ademais existe o seguinte límite:

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in X}} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

E denotaremos ese límite por $f'_{ap}(x)$.

É claro que unha función diferenciable será aproximadamente diferenciable, non obstante, non son conceptos equivalentes, xa que por exemplo a función de Dirichlet, que vimos no capítulo 1,

$$D(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

non é continua e polo tanto non é diferenciable. Por outra banda, se tomamos $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, temos que

$$\lambda((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \bigcap [x-h, x+h]) = 2h - \lambda(\mathbb{Q} \bigcap [x-h, x+h]) = 2h,$$

logo,

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\lambda((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \bigcap [x-h, x+h])}{2h} = 1,$$

e para calquera $X \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} \frac{D(x) - D(y)}{x - y} = 0.$$

Deducimos deste exemplo tamén que unha función aproximadamente diferenciable non ten por que ser continua. De aquí en adiante, veremos o exemplo dunha función continua que non é diferenciable, claramente, chega con probar que a nosa función é continua e non aproximadamente diferenciable. Para facelo veremos dous resultados previos que utilizaremos como ferramenta.

Lema 3.2. *Sexa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sexa $x \in \mathbb{R}$ e supoñamos que f é aproximadamente diferenciable en x. Entón para calquera número real $M_1 > f'_{ap}(x)$, temos:*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\lambda(\{y \in [x-h, x+h] \setminus \{x\} : (f(x) - f(y))/(x-y) \geq M_1\})}{2h} = 0.$$

Analogamente, para calquera número real $M_2 < f'_{ap}(x)$:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\lambda(\{y \in [x-h, x+h] \setminus \{x\} : (f(x) - f(y))/(x-y) \leq M_2\})}{2h} = 0.$$

Demostración. Veremos a demostración para o primeiro caso, xa que o outro é completamente análogo. Por definición de aproximadamente diferenciable sabemos que existe un conxunto X, tal que $x \in X$, e cumpre que:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\lambda(X \bigcap [x-h, x+h])}{2h} = 1, \tag{3.1}$$

e ademais:

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in X}} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'_{ap}(x). \tag{3.2}$$

Fixamos agora un $\varepsilon > 0$, tal que:

$$f'_{ap}(x) + \varepsilon < M_1.$$

Entón por (3.2) existe un número real $\mu > 0$ tal que, para calquera $h \in \mathbb{R}$, cumprindo $0 < h < \mu$, temos:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq f'_{ap}(x) + \varepsilon \qquad \forall y \in X \bigcap [x-h, x+h] \setminus \{x\}. \tag{3.3}$$

Por (3.1) temos que, para $\mu > 0$ suficientemente pequeno:

$$\frac{\lambda(X \bigcap [x-h, x+h])}{2h} \geq 1 - \varepsilon \qquad \forall\ h < \mu. \tag{3.4}$$

Co que, utilizando (3.4) e a continuación (3.3), obtemos a relación:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\geq 1 - \frac{\lambda(X \bigcap [x-h, x+h])}{2h} \\
&= 1 - (1 - \frac{\lambda(y \in [x-h, x+h] : y \notin X)}{2h} \\
&\geq \frac{\lambda(y \in [x-h, x+h] \setminus \{x\} : (f(x) - f(y))/(x-y) \geq M_1)}{2h}.
\end{aligned}$$

Co cal podemos concluír a demostración do lema. □

Lema 3.3. *Sexa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unha función, sexa x un punto de $\mathbb{R}$ e supoñamos que, para cada $M > 0$, se cumpre:*

$$\liminf_{h \to 0^+} \frac{\lambda(\{y \in [x-h, x+h] \setminus \{x\} : |f(y) - f(x)|/|y-x| \geq M\})}{2h} > 0.$$

Entón f non é aproximadamente diferenciable en x.

Demostración. A demostración deste lema omitirase, xa que obtense como consecuencia directa do lema previo. □

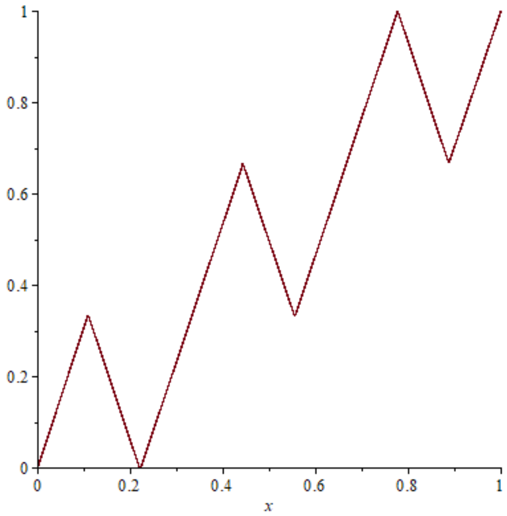
3.2. Función continua e non aproximadamente diferenciable

Unha vez vistos estes resultados podemos comezar coa construción dunha función continua e non diferenciable en todo $\mathbb{R}$. En primeiro lugar definiremos a función $f_1 : [0,1] \to [0,1]$ do seguinte xeito:

$$f_1(0) = 0,\ f_1(1/9) = 1/3,\ f_1(2/9) = 0,\ f_1(1/3) = 1/3,\ f_1(4/9) = 2/3,$$

$$f_1(5/9) = 1/3,\ f_1(2/3) = 2/3,\ f_1(7/9) = 1,\ f_1(8/9) = 2/3,\ f_1(1) = 1.$$

E nos intervalos $\left[\frac{k}{9}, \frac{k+1}{9}\right]$ a función será un segmento entre a imaxe dos dous extremos, a cal xa coñecemos. Teriamos entón que a súa gráfica sería a seguinte:



Definiremos agora as funcións $g_1 : [0,9] \to [0,3]$ e $g_2 : [0,9] \to [0,3]$ como:

$$g_1(x) = 3f_1(x/9) \ \text{ e } \ g_2(x) = 3 - g_1(x).$$

Sabemos que g_1 é continua (f_1 o é), e polo tanto g_2 tamén é continua. Definiremos agora f_{n+1} para $n \in \mathbb{N}$ por recurrencia, é dicir, asumindo que temos xa a función f_n ben definida e que cumpre:

(1) f_n é continua.

(2) A imaxe de f_n evaluada en cada intervalo $[k/9^n, (k+1)/9^n]$ con $k \in \{0, 1, ..., 9^n - 1\}$ é un segmento da forma $[j/3^n, (j+1)/3^n]$.

Podemos proceder así xa que sabemos que para f_1 é certo. Ademais nos chegaría con definir f_{n+1} nun intervalo calquera da forma $[k/9^n, (k+1)/9^n]$ con $k \in \{0, 1, ..., 9^n - 1\}$. Diferenciemos dous casos:

1. Se f_n é crecente en $[k/9^n, (k+1)/9^n]$, con $k \in \{0, 1, ..., 9^n - 1\}$. Tomaremos os seguintes conxuntos de puntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(0,0), (0,3), (9,3), (9,0)\},$$

$$\{(k/9^n, f_n(k/9^n)), (k/9^n, f_n((k+1)/9^n)), ((k+1)/9^n, f_n((k+1)/9^n)), ((k+1)/9^n, f_n((k)/9^n))\}.$$

Claramente son os vértices de dous rectángulos e por tanto existe unha única transformación afín $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que:

$$\begin{aligned}
h(0,0) &= (k/9^n, f_n(k/9^n)),\\
h(0,3) &= (k/9^n, f_n((k+1)/9^n)),\\
h(9,3) &= ((k+1)/9^n, f_n((k+1)/9^n)),\\
h(9,0) &= ((k+1)/9^n, f_n(k/9^n)).
\end{aligned}$$

Definiremos $h_1(x, y)$ e $h_2(x, y)$ da seguinte forma: $h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$. No intervalo $[k/9^n, (k+1)/9^n]$ igualaremos a gráfica de $f_{n+1}(x)$ á da imaxe da gráfica de $g_1(x)$ mediante h, é dicir:

$$f_{n+1}(x) := h_2(y, g_1(y)), \text{ onde } x = h_1(y, g_1(y)), \text{ con } y \in [0, 9] \text{ e } x \in [k/9^n, (k+1)/9^n].$$

Xa que h e g_1 son continuas, f_{n+1} é continua $\forall n \in \mathbb{N}$ no intervalo $[k/9^n, (k+1)/9^n]$.

2. Se f_n é decrecente en $[k/9^n, (k+1)/9^n]$, con $k \in \{0, 1, ..., 9^n - 1\}$. Tomaremos os seguintes conxuntos de puntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(0, 0), (0, 3), (9, 3), (9, 0)\},$$

$$\{(k/9^n, f_n((k+1)/9^n)), (k/9^n, f_n(k/9^n)), ((k+1)/9^n, f_n(k/9^n), ((k+1)/9^n, f_n((k+1)/9^n)\}.$$

Os dous conxuntos seguen a ser os vértices de dous rectángulos por tanto existe unha única transformación afín $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que:

$$\begin{aligned}
t(0, 0) &= (k/9^n, f_n((k+1)/9^n), \\
t(0, 3) &= (k/9^n, f_n(k/9^n)), \\
t(9, 3) &= ((k+1)/9^n, f_n(k/9^n)), \\
t(9, 0) &= ((k+1)/9^n, f_n((k+1)/9^n)).
\end{aligned}$$

Analogamente ao caso 1, igualando outra vez a gráfica de $f_{n+1}(x)$ á da imaxe da gráfica de $g_2(x)$ mediante t, f_{n+1} tamén sería continua $\forall n \in \mathbb{N}$ no intervalo $[k/9^n, (k+1)/9^n]$. Tal e como está construída a sucesión de funcións $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, é claro que todas son continuas en $[0, 1]$ e ademais para cada intervalo $[k/9^n, (k+1)/9^n]$, a imaxe de f_n é un segmento con extremos nos puntos $j/3^n$ e $(j+1)/3^n$ para algún $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con $j \in \{0, 1, ..., 3^{n+1} - 1\}$.

A partir de agora utilizaremos a notación:

$$[u, v] := [k/9^n, (k+1)/9^n],$$

con $k \in \{0, 1, ..., 9^n - 1\}$.

É importante ter en conta que, asumindo que f_n no intervalo $[k/9^n, (k+1)/9^n]$ é crecente temos que:

$$\begin{aligned}
&f_{n+1}(k/9^n) = h_2(0, g_1(0)) = f_n(k/9^n), \\
&f_{n+1}((2u+v)/3) = h_2(3, g_1(3)) = h_2(3, 3 \cdot f_1(1/3)) = h_2(3, 1) = f_n((2u+v)/3), \\
&f_{n+1}((2v+u)/3) = h_2(6, g_1(6)) = h_2(6, 3 \cdot f_1(2/3)) = h_2(6, 2) = f_n((2v+u)/3), \\
&f_{n+1}((k+1)/9^n) = h_2(9, g_1(9)) = h_2(9, 3 \cdot f_1(1)) = h_2(9, 3) = f_n((k+1)/9^n).
\end{aligned}$$

Logo, pola continuidade das funcións de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e por ser crecentes, chegamos a que:

$$\begin{aligned}
&f_{n+1}([u,(2u+v)/3]) = f_n([u,(2u+v)/3]),\\
&f_{n+1}([(2u+v)/3,(2v+u)/3]) = f_n([(2u+v)/3,(2v+u)/3]),\\
&f_{n+1}([(2v+u)/3,v]) = f_n([(2v+u)/3,v]).
\end{aligned}$$

Analogamente se demostrarían as mesmas igualdades se f_n no intervalo $[k/9^n,(k+1)/9^n]$ fose decrecente.

Ademais tal e como está construída a sucesión de funcións, é claro que:

$$|f_{n+1}(x)-f_n(x)| \leq |f_n((k+1)/9^n)-f_n(k/9^n)| = |(j+1)/3^n - j/3^n| = \frac{1}{3^n},\ \forall x \in \left[\frac{k}{9},\frac{k+1}{9}\right].$$

Tendo todo isto en conta, polo criterio de Cauchy para a converxencia uniforme chegamos á conclusión de que a sucesión converxe uniformemente a unha función $f:[0,1]\to[0,1]$, a cal é continua, e, como veremos agora, non é diferenciable en ningún punto do intervalo $[0,1]$.

Por comodidade denotaremos $[u,v] := [k/9^n,(k+1)/9^n]$, $[p,q] := [j/3^n,(j+1)/3^n]$. Sexa $x\in[0,1]$, claramente existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $x\in[k/9^n,(k+1)/9^n]$. E existirá algún $j\in\mathbb{N}$ tal que:

$$f_n(x)\in[p,q].$$

Sabemos polo dito anteriormente que, para $m>n$:

$$f_m(x)\in[p,q].$$

Polo que $f(x)$ tamén estaría en $[p,q]$. Podemos asumir sen perda de xeneralidade que f_n é crecente no intervalo $[p,q]$.

Supoñamos primeiro que $f(x)\leq(p+q)/2$. Para cada $y\in[(2v+u)/3,v]$, temos:

$$f(y)\in[(2q+p)/3,q],$$

co cal chegamos a:

$$\begin{aligned}
\frac{f(y)-f(x)}{y-x} &\geq \frac{(2q+p)/3-(p+q)/2}{v-u} = \frac{(1/6)(q-p)}{v-u}\\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{(j+1)/3^n - j/3^n}{((k+1)/9^n - k/9^n} = \frac{3^n}{6}.
\end{aligned}$$

Supoñamos agora o caso contrario, é dicir, $f(x)\geq\frac{p+q}{2}$. Para cada $y\in[u,\frac{2v+u}{3}]$, temos:

$$f(y)\in[p,(2q+p)/3].$$

Temos pois que:
$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq \frac{(p+q)/2-(2q+p)/3}{v-u} = \frac{3^n}{6}.$$

Entón, limitando pola lonxitude dos intervalos $[u,(2v+u)/3]$ e $[(2v+u)/3,v]$,

$$\begin{aligned}
&\lambda(\{y \in [(x-1)/9^n,(x+1)/9^n] \setminus \{x\} : |f(y)-f(x)|/|y-x| \geq 3^n/6\}) \\
&\geq \text{mín}\{(2v+u)/3-u, v-(2v+u)/3\} \\
&= v-(2v+u)/3 = (k+1)/9^n-(3k+2)/(3\cdot 9^n) = 1/(3\cdot 9^n).
\end{aligned}$$

É dicir:

$$\begin{aligned}
&\lambda(\{y \in [(x-1)/9^n,(x+1)/9^n] \setminus \{x\} : |f(y)-f(x)|/|y-x| \geq 3^n/6\}) \\
&\geq 1/6\lambda([(x-1)/9^n,(x+1)/9^n]).
\end{aligned}$$

Da última desigualdade podemos concluír, gracias ao Lema 3.3, que f non é aproximadamente diferenciable en x, e por tanto tampouco é diferenciable.

Xa temos unha función continua de $[0,1]$ a $[0,1]$ que non é diferenciable en ningún punto, de forma análoga pódese construír unha función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que sexa continua e non sexa diferenciable en ningún punto de $\mathbb{R}$.

3.3. Outro exemplo de función continua e non diferenciable en cada punto de $\mathbb{R}$.

Veremos agora o segundo dos exemplos o cal se atopa no libro [3] da bibliografía, nesta construcción non necesitaremos utilizar o concepto de aproximadamente diferenciable. Sexa $\phi^*: [-2,2] \to [0,2]$, definida como $\phi^*(x)=|x|$. Claramente $\phi^*(-2)=\phi^*(2)$, logo podemos estender ϕ^* a todo $\mathbb{R}$ como unha función de período 4 da seguinte forma:

$$\phi(x) = \phi^*(x-4t), \text{ con } t \in \mathbb{Z} \text{ e } (x-4t) \in [-2,2].$$

É importante ter en conta que se entre $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ non hai ningún enteiro par entón:

$$|\phi(x)-\phi(y)| = \phi(x)-\phi(y).$$

Sexa $m \in \mathbb{N}$, definimos agora $f_n(x) = 4^{-n}\phi(4^n x)$. A función ϕ é continua, logo para cada n, f_n é composición de funcións continuas e polo tanto continua. Sexa

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Para calquera $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \leq 2 \cdot 4^{-n}$, se segue polo M-test de Weiestrass e polo resultado que relaciona continuidade coa converxencia uniforme (ambos no apéndice) que f é continua en todo $\mathbb{R}$. Temos que ver agora que f non é derivable en ningún punto. Sexa $a \in \mathbb{R}$ fixo e arbitrario.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, escollamos $e_k \in \{1, -1\}$ de forma que non haxa ningún número enteiro par no intervalo (aberto) entre $4^k a$ e $4^k a + e_k$. Se $n \leq k$ é outro natural, tampouco habería ningún enteiro no intervalo (aberto) entre $4^n a$ e $4^n a + 4^{n-k} e_k$, xa que de habelo, denotariámolo por r e entón teríamos que $4^{k-n} \cdot r$ sería par e ademais (asumindo $e_k = 1$, o outro caso é análogo),

$$4^n a \cdot 4^{k-n} < 4^{k-n} \cdot r < (4^n a + 4^{n-k} e_k) \cdot 4^{k-n},$$

o cal é unha contradición co feito de que o intervalo entre $4^k a$ e $4^k a + e_k$ non contén ningún enteiro par.

Temos ademais que se $1 \leq n \leq k$:

$$\begin{aligned} |f_n(a + 4^{-k} e_k) - f_n(a)| &= 4^{-n} |\phi(4^n a + 4^{n-k} e_k) - \phi(4^n a)| \\ &= 4^{-n} \phi(4^n a + 4^{n-k} e_k) - 4^{-n} \phi(4^n a) = 4^{-k}. \end{aligned}$$

Por outra banda, se $1 \leq k < n$ e tendo en conta que ϕ ten período 4, é claro que $f_n(a + 4^{-k} e_k) = f_n(a)$.

Finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{f(a + 4^{-k} e_k) - f(a)}{4^{-k} e_k} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(a + 4^{-k} e_k) - f_n(a)}{4^{-k} e_k} \\ &= \sum_{n=1}^{k} \frac{f_n(a + 4^{-k} e_k) - f_n(a)}{4^{-k} e_k} \\ &= \sum_{n=1}^{k} \frac{4^{-k}}{4^{-k} e_k} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{e_k} = \sum_{n=1}^{k} e_k. \end{aligned}$$

Polo tanto concluímos, xa que claramente $\sum_{n=1}^{k} e_k$ é par se k é par e impar se k é impar. Co cal o límite

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f(a + 4^{-k} e_k) - f(a)}{4^{-k} e_k},$$

non existe, é dicir, a derivada non existe en a. Como a é arbitrario, queda demostrado o que queríamos, é dicir, temos unha función continua en todo o seu dominio e non diferenciable en todo punto.

Capítulo 4

Funcións continuas e sobrexectivas de $[0,1]$ a $[0,1]^2$.

Comezaremos este capítulo vendo dous resultados de bastante interese e que nos aportarán algo de contexto para ver a importancia dos dous exemplos de curvas continuas e sobrexectivas de $[0,1]$ a $[0,1]^2$ que estudiaremos posteriormente.

Proposición 4.1. *Existe unha bixección entre* $[0,1]$ *e* $[0,1]^2$.

Demostración. Sexa $x \in [0,1]$, podemos escribir $x = 0.x_1x_2x_3...$ con $x_i \in \{0,1,...,9\}$ para calquera $i \in \mathbb{N}$, estando o 1 representado por infinitos 9. Agora consideramos $f : [0,1] \to [0,1]^2$ definida como segue:

$$f(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot 10^{-i}) = (\sum_{i=1}^{\infty} x_{2i-1} \cdot 10^{-i}, \sum_{i=1}^{\infty} x_{2i} \cdot 10^{-i}).$$

Claramente a aplicación é sobrexectiva e inxectiva co cal rematamos a demostración. $\square$

Proposición 4.2. *Non existe unha bixección continua entre* $[0,1]$ *e* $[0,1]^2$.

Demostración. Supoñamos que existe unha bixección continua $f : [0,1] \to [0,1]^2$. Entón probaremos que a inversa f^{-1} é continua, e en tal caso teríamos un homemorfismo. Sexa $C \subset [0,1]$ un conxunto pechado, tamén será compacto xa que obviamente é limitado. Agora, por ser f bixectiva $(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$, e $f(C)$ é a imaxe dun compacto, e polo tanto tamén é compacto, e por ser compacto é pechado. Temos entón que a imaxe dun pechado mediante $(f^{-1})^{-1}$ tamén é pechada. Co cal é fácil chegar a conclusión de que a imaxe dun aberto mediante $(f^{-1})^{-1}$ será tamén un aberto. Polo tanto f^{-1} sería continua.

Agora, podemos considerar a función $g : [0, 1]^2 \setminus \{p\} \to [0, 1] \setminus \{q\}$ tal que $g(x) = f^{-1}(x)$ para todo $x \in [0, 1]^2 \setminus \{p\}$, para algún $p \in (0, 1)^2$ e $q \in (0, 1)$. Polo que vimos antes g é unha bixeccion continua entre $[0, 1]^2 \setminus \{p\}$ e $[0, 1] \setminus \{q\}$. Chegamos entón a unha contradición, xa que $[0, 1]^2 \setminus \{p\}$ é conexo mentres que $[0, 1] \setminus \{q\}$ é disconexo. Polo tanto concluímos que tal bixección continua f non pode existir. □

4.1. A curva de Peano

Veremos agora o exemplo orixinal de Peano, o cal é unha curva continua e sobrexectiva de dominio $[0, 1]$ e imaxe $[0, 1]^2$, o podemos atopar no libro [5] da bibliografía. Primeiro veremos un teorema que nos axudará coa construción desta curva.

Teorema 4.3. *Sexa $\{f_n\}$ unha sucesión de funcións con rango $[0, 1]$ e imaxe $[0, 1]^k$, $k \in \mathbb{N}$ tales que para $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n > N$ temos que $\sup_{x\in[0,1]} ||f_n(x) - f_m(x)|| < \varepsilon$. Entón $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe para calquera $x \in [0, 1]$ e é unha función continua.*

Demostración. A existencia de $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ é obvia xa que baixo as hipóteses do teorema $\{f_n\}_{\{n\in\mathbb{N}\}}$ é unha sucesión de Cauchy na recta real, e polo tanto converxente pola completitude de $\mathbb{R}$. Vexamos agora a continuidade de f. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e calesquera $x, y \in [0, 1]$,

$$||f(x) - f(y)|| \leq ||f(x) - f_n(x)|| + ||f_n(x) - f_n(y)|| + ||f_n(y) - f(y)||.$$

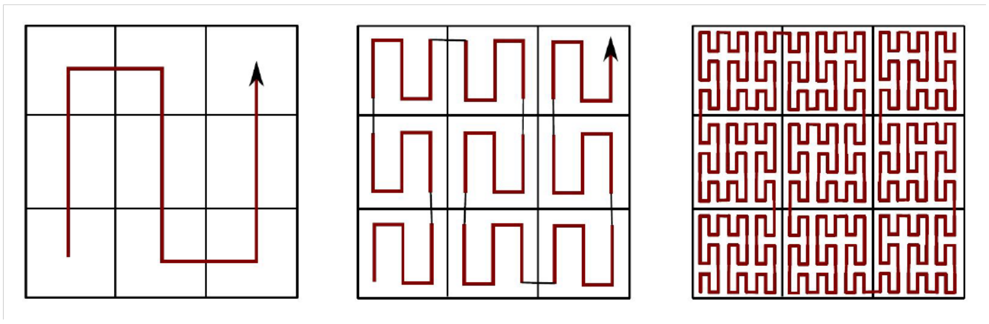
Agora ben, sexan $\varepsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, como $f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t) \Rightarrow$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ entón $||f_n(t) - f(t)|| < \frac{\varepsilon}{3}$.

E pola continuidade das funcións da sucesión $\{f_n\}$, temos que existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que se $|x-y| < \delta$ entón $||f_N(x) - f_N(y)|| < \frac{\varepsilon}{3}$. Co cal:

$$||f(x) - f(y)|| \leq ||f(x) - f_N(x)|| + ||f_N(x) - f_N(y)|| + ||f_N(y) - f(y)|| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Co que concluímos a demostración. □

A curva de Peano é o límite dunha sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de curvas de $[0, 1]$ a $[0, 1]^2$, esta sucesión comprendese bastante ben visualmente, por iso resulta moi interesante a seguinte gráfica, a cal se atopa no artigo [7] da bibliografía.



Na imaxe podemos ver representadas as funcións f_0, f_1 e f_2. Para a construción de cada f_n dividiremos $[0,1]$ en 9^n intervalos da mesma lonxitude e $[0,1]^2$ en 9^n cadrados do mesmo tamaño.

A cada cadrado asignaráselle un intervalo ao que enviar a súa imaxe. Na imaxe podemos ver que para obter f_1 dividimos cada cadrado en 9 novos cadrados, e "copiamos" a imaxe de f_0 en cada un deles, e así sucesivamente.

Lema 4.4. *A sucesión $\{f_n\}$ descrita anteriormente é uniformemente converxente.*

Demostración. Sexan $n, m \in \mathbb{N}$, supoñamos sen perda de xeneralidade, $n > m$. Para $x \in [0,1]$ as imaxes de $f_n(x)$ a $f_m(x)$ teñen que estar ambas nalgún dos 9^m cadrados. A diagonal dun cadrado é $\sqrt{2} \cdot l$ sendo l o valor do seu lado. O lado dos cadrados definidos para f_m vale 3^{-m}. Entón:

$$\sup_{x\in[0,1]} ||f_n(x) - f_m(x)|| < \sqrt{2} \cdot 3^{-m},$$

co que chegamos a que a sucesión é uniformemente converxente. □

Definición 4.5 (Función de Peano)**.** A función $f : [0,1] \to [0,1]^2$, definida como:

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in [0,1],$$

denomínase función de Peano.

Gracias ao Teorema 4.3 e o Lema 4.4, sabemos que existe, está ben definida en todo $[0,1]$ e é continua. O último que nos quedaría por comprobar é que a imaxe da función de Peano é todo $[0,1]^2$.

Proposición 4.6. *A función de Peano é sobrexectiva.*

Demostración. A función f_m pasa polo centro dos 9^m cadrados definidos nesa iteración. Por tanto cada punto de $[0,1]^2$ está como máximo a unha distancia de $\sqrt{2}/2 \cdot 3^{-m}$ dun punto da imaxe de f_m. Isto quere dicir que, para a función f a distancia de calquera punto de $[0,1]^2$ a un punto da imaxe de f é menor que $\sqrt{2}/2 \cdot 3^{-n}$ para calquera $n \in \mathbb{N}$. Co cal todos os puntos de $[0,1]^2$ están na clausura da imaxe de f.

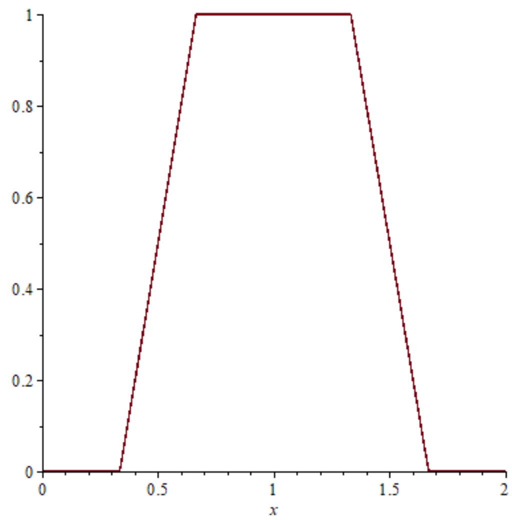
Por ser f continua e $[0,1]$ compacto temos que $f([0,1])$ será compacto tamén, e polo tanto pechado. Entón, como $f([0,1])$ é pechado, temos que$f([0,1]) = \overline{f([0,1])} = [0,1]^2$. $\square$

4.2. A curva de Schoenberg

Veremos agora outro exemplo diferente dunha curva que tamén ten como imaxe todo o cadrado unidade dado por I.J. Schoenberg no ano 1938. Podemos atopar a construcción desta curva nos libros [2] e [5] da bibliografía. En primeiro lugar definiremos a función ϕ^* no intervalo $[0,2]$ da seguinte forma:

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1/3] \cap [5/3,2], \\ 3x-1 & \text{se } x \in [1/3,2/3], \\ 1 & \text{se } x \in [2/3,4/3], \\ 5-3x & \text{se } x \in [4/3,5/3]. \end{cases}$$

Gráficamente se vería da seguinte forma:



Como $\phi^*(0) = \phi^*(2)$, podemos estender ϕ^* a todo $\mathbb{R}$ mediante:

$$\phi(x) = \phi^*(x-2t), \text{ con } t \in \mathbb{Z} \text{ e } (x-2t) \in [0,2],$$

obtendo unha función de período 2. Definimos agora as funcións f_1 e f_2 da seguinte forma:

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(3^{2n-2}x)}{2^n}, \quad f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(3^{2n-1}x)}{2^n}.$$

Vendo esta definición claramente se $|\phi(x)| \leq 1$ teríamos que $|f_1(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ e $|f_2(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Polo tanto para calquera $x \in \mathbb{R}$ f_1 e f_2 están ben definidas, xa que son series que converxen absolutamente, e ademais, como ϕ é unha función continua, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que se $|x - y| < \delta$:

$$|f_1(x) - f_1(y)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(3^{2n-2}x) - \phi(3^{2n-2}y)}{2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\phi(3^{2n-2}x) - \phi(3^{2n-2}y)|}{2^n} < \varepsilon.$$

Chegamos entón a que f_1, e analogamente f_2, son continuas. Sexa $f : [0,1] \to [0,1]^2$, definida como $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Temos que comprobar que a imaxe de f cubre todo o cadrado unidade. En primeiro lugar temos que $f([0,1]) \subset [0,1]^2$, xa que

$$|f_1(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^0} = 1.$$

E analogamente $|f_2(x)| \leq 1$. Sexa agora $(a, b) \in [0,1]^2$. Para ver a outra inclusión, podemos expresar a e b en sistema binario da forma $a = (0.a_1a_2a_3...)_2$ e $b = (0.b_1b_2b_3...)_2$, onde $a_n, b_n \in \{0,1\}$. E teríamos que

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \qquad \text{e} \qquad b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}.$$

Sexa agora:

$$c = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}, \text{ sendo } c_n = a_n \text{ se } n \in (2\mathbb{N}) - 1 \text{ e } c_n = b_n \text{ se } n \in 2\mathbb{N}.$$

Temos que $0 \leq c \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 2 \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} - 1) = 2 \cdot (3/2 - 1) = 1$. Logo c está no dominio de f, veremos agora que $f_1(c) = a$ e $f_2(c) = b$. Dado $k \in \mathbb{N}$,

$$3^k c = 2\sum_{n=1}^{k} c_n/3^{n-k} + 2\sum_{n=k+1}^{\infty} c_n/3^{n-k} = 2 \cdot (3^{k-1} + 3^{k-2} + ... + 1) + 2\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-k}}.$$

É claro que $2(3^{k-1} + 3^{k-2} + ... + 1)$ é par, e como ϕ ten período 2, chegamos a que $\phi(3^k c) = \phi(2\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{c_n}{3^{n-k}}) = \phi(2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n+k}}{3^n})$.

Se $c_{k+1} = 0$ temos que $0 \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n+k}}{3^n} \leq 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 2 \cdot (3/2 - 1 - 1/3) = 1/3$. E polo tanto,

$$\phi(2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n+k}}{3^n}) = 0 = c_{k+1},$$

se pola contra $c_{k+1} = 1$ temos que $2/3 \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} c_{n+k}/3^n \leq 1$, e entón

$$\phi(2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n+k}}{3^n}) = 1 = c_{k+1}.$$

En ambos casos chegamos a que $\phi(3^k c) = \phi(2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n+k}}{3^n}) = c_{k+1}$.

Finalmente temos que $\phi(3^{2n-2}c) = c_{2n-1}$ e $\phi(3^{2n-1}c) = c_{2n}$, e polo tanto $f_1(c) = a$ e $f_2(c) = b$, co cal $f(c) = (a,b)$, como queriamos probar. Chegamos entón a que f é continua e sobrexectiva, é dicir, recubre o cadrado unidade.

Anexo A

Conxunto de Cantor.

Definición A.1 (Conxunto de Cantor)**.** O conxunto de Cantor (C) defínese como o conxunto límite da sucesión C_n, onde:

$$C_1 = [0,1],$$

$$C_2 = [0,1/3] \cup [2/3,1],$$

$$\dots \dots$$

$$C_m = [0,1/3^m] \cup [2/3^m, 3/3^m] \cup [6/3^m, 7/3^m] \cup [8/3^m, 9/3^m] \cup \dots$$

$$\dots \cup [(3^m-3)/3^m, (3^m-2)/3^m] \cup [(3^m-1)/3^m, 1].$$

É dicir, podemos escribir $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

Veremos agora algunhas das propiedades máis características deste conxunto.

1) O conxunto de Cantor é medible, e en concreto de medida nula.

   Claramente é medible xa que é unha intersección numerable de conxuntos medibles. Ademais,

   $$C \subset C_m,\ \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda(C_m) \geq \lambda(C),\ \forall m \in \mathbb{N}$$

   e $\lambda(C_m) = 2^m \cdot (1/3^m) = (2/3)^m$, xa que a lonxitude dos intervalos para C_m é $1/3^m$ e o número deles é 2^m. Co cal C é necesariamente de medida nula.

2) Pola construción dos conxuntos C_m é fácil ver que son complementarios da unión de conxuntos abertos. Polo tanto o conxunto de Cantor é pechado na recta real, tamén podemos concluír que é compacto, xa que é un conxunto limitado.

3) Esta propiedade verémola como teorema debido á complexidade da súa proba.

Teorema A.2. *$x \in C$ se, é só se, existe unha sucesión $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ con $a_m \in \{0,2\}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, tal que:*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}.$$

Demostración. $(\Rightarrow)$
O comprobaremos por redución ao absurdo. Sexa $y \in [0,1]$, y ten unha representación ternaria da seguinte forma, $y = (0.a_1a_2a_3...)_3$, con $a_n \in \{0,1,2\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. E teriamos que $y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$.
Sexa agora $x \in C$, $C \subset [0,1]$ así que x ten unha representación ternaria da forma descrita previamente. Sexa $C^* = \{x \in [0,1] : x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i},\ a_i \in \{0,2\}\}$.

Supoñamos que $x \notin C^*$. É dicir, $a_n = 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Podemos escribir:

$$x = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^m} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \text{ onde } a_i \in \{0,2\}\ \forall i < m.$$

É importante ter en conta que ten que existir $k > m$ tal que $a_k \neq 0$, xa que de non ser así teríamos:

$$x = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{a_i}{3^i} + 1/3^m = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{a_i}{3^i} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \in C^*.$$

Tamén ten que darse que exista $k > m$ tal que $e_k \neq 2$, posto que se non:

$$x = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^m} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{2}{3^m}.$$

Polo que existen $a_{k_1} \neq 0$ e $a_{k_2} \neq 2$ con $k_1, k_2 > m$. Co cal:

$$0 < \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} < \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3^m}.$$

Entón:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^m} < x &= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^m} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \\ &< \sum_{i=1}^{m-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{3^m} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{2}{3^m}. \end{aligned}$$

Pero, pola construción dos $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é claro que $x \notin C_m$, co cal, $x \notin C$. E con isto chegamos a unha contradición.

($\Leftarrow$)
Sexa $C^* = \{x \in [0,1] : x = \sum_{i=1}^{\infty} e_i/3^i,\ e_i \in \{0,2\}\}$.
Sexa agora $y = \sum_{i=1}^{\infty} c_i/3^i$, $c_i \in \{0,2\}$, claramente $y \in C^*$. Tomemos agora $n \in \mathbb{N}$, consideremos a suma $s_n = \sum_{i=1}^{n} c_i/3^i$. É claro que $s_n \in C, \forall n \in \mathbb{N}$, xa que s_n vai ser o extremo superior ou inferior dun dos intervalos que compoñen a C_n, e tal e como se construíron os C_m (dividindo cada intervalo $[a,b] \in C_{m-1}$ en tres: $\{[a,(a+b)/3],((a+b)/3, 2(a+b)/3), [2(a+b)/3, b]\}$ e quitando o intervalo aberto), é obvio que os extremos dos intervalos de C_n van a estar en C_k $\forall k \in \mathbb{N}$. Polo tanto temos que necesariamente $s_n \in C$. E como: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i} = y$. E C é un conxunto pechado chegamos a que $y \in C$, e chegamos así a que $C^* \subset C$. $\square$

4) O conxunto de Cantor non é numerable.

Definiremos en primeiro lugar unha aplicación que nos axudará a demostralo.

Definición A.3 (Función de Cantor)**.** Consideremos a aplicación $\varphi : C \to [0,1]$, da forma:

$$\varphi\,(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_n/2}{2^i}.$$

Polo visto en 3), calquera $x \in C$ pódese escribir da forma $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i/3^i$, polo tanto a función está ben definida en todo C. Denominaremos a φ función de Cantor.

Lema A.4. *A función de Cantor é sobrexectiva.*

Demostración. Sexa $y \in [0,1]$, y pódese escribir de forma binaria, é dicir $y = (0.b_1b_2b_3...)_2$, $x = (0{,}2b_12b_22b_3...)_3 \in C$ e ademais $\varphi(x) = y$. $\square$

Con isto queda claro que C non é numerable, xa que de selo existiría unha aplicación sobrexectiva $\beta : \mathbb{N} \to C$, e como $\varphi : C \to [0,1]$ tamén é sobrexectiva, a composición $\varphi \circ \beta : \mathbb{N} \to [0,1]$ tamén o sería, o cal é imposible xa que $[0,1]$ non é numerable.

5) $C + C = [0,2]$, esta propiedade está proposta como exercicio do libro [1].

En primeiro lugar, $C \subset [0,1]$ o que implica que $C + C \subset [0,2]$. Sexa agora $x' \in [0,2]$, $x' \in C + C$ se, e só se, $x := x'/2 \in C/2 + C/2$. Consideremos a representación de x en base ternaria, $x = (0.x_1x_2x_3...)_3$ con $x_k \in \{0,1,2\}$.

Podemos tomar $a, b \in C/2$, da forma $a = (0.a_1a_2a_3...)_3$, $b = (0.b_1b_2b_3...)_3$ e $a_k, b_k \in \{0,1\}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ e tales que $a_k + b_k = x_k$, é dicir se $x_k = 0$, $a_k = 0 = b_k$, se $x_k = 1$ $a_k = 0$ e $b_k = 1$ (ou viceversa), e se $x_k = 2$ $a_k = 1 = b_k$.

Anexo B

Series funcionais.

Neste anexo omitiremos as demostracións xa que son bastantes simples, de todas formas, as 3 atópanse no capítulo 9 do libro [2].

Definición B.1 (Converxencia uniforme). Unha sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funcións definidas nun mesmo conxunto $E \subset \mathbb{R}$ converxe uniformemente en $C \subset E$ á función $f : C \to \mathbb{R}$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_\varepsilon$ e $x \in C$, entón:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Teorema B.2 (Condición de Cauchy para a converxencia uniforme). *A sucesión funcional $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, converxe uniformemente en $C \subset \mathbb{R}$, se e só se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que se $p, q \geq N_\varepsilon$, entón,*

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in C.$$

Teorema B.3 (Continuidade e converxencia uniforme). *Sexa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de funcións que converxe uniformemente en $C \subset E$ á función $f : C \to \mathbb{R}$. Se para todo $n \in \mathbb{N}$ f_n é continua en $x \in C$, f tamén será continua en $x \in C$.*

Teorema B.4 (M-test de Weiestrass). *Sexa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de funcións en $E \subset \mathbb{R}$ tal que:*
(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $M_n \geq 0$ de modo que:

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in E.$$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ é converxente en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Entón a serie funcional $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ é uniformemente converxente en $E \subset \mathbb{R}$.

Bibliografía

[1] A.B. Kharazishvili ,[1 ed.](2000),*Strange functions in real analysis*, Chapman and Hall/CRC, New York.

[2] Tom M. Apostol ,[2 ed.](1974),*Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, Massachusetts.

[3] Karl R. Stromberg ,[1 ed.](1981),*An Introduction to Classical Real Analysis*, Ams Chelsea Publishing, Belmont, California.

[4] M. W. Botsko, (2003) *An Elementary Proof of Lebesgue's Differentiation Theorem*, The American Mathematical Monthly.

[5] Hans Sagan, [1 ed.] (1994), *Space-Filling Curves*, Springer-Verlag.

[6] K. Beanland, J. W. Roberts e C. Stevenson, (2009), *Modifications of Thomae Function and Differentiability*, American Mathematical Monthly.

[7] Kim, Dong Ryul, (2016), *Existence of Space-Filling Curve in Euclidean Space.* https://mathsci.kaist.ac.kr/˜kdryul/files/talks/Existence%20of%20Space-Filling%20Curves%20in%20Euclidean%20Space.pdf