

FORMA DE JORDAN REAL. CLASIFICACIÓN DE TRANSFORMACIONES ORTOGONALES

PAULA FERNÁNDEZ OTERO Y MARÍA JESÚS VALE GONSALVES

1. Introducción

Karl Weierstrass (1815-1897) en 1858 determina las clases de semejanza de todas las matrices complejas. Dos años más tarde, Camille Jordan (1838-1922) en su obra “Traité des substitutions” introduce las formas canónicas que hoy en día llevan su nombre para matrices sobre un cuerpo finito y presenta un proceso para reducir matrices a su forma canónica, muy parecido al actual.

En este trabajo se prueba que si K es un cuerpo y $A \in M_n(K)$ es una matriz cuyo polinomio característico tiene sus n raíces en K , entonces A es semejante a una matriz de Jordan. Como caso particular se obtiene el teorema de diagonalización de matrices que afirma que una matriz cuadrada $n \times n$ es diagonalizable si, y solo si, su polinomio característico tiene sus n raíces en K y la multiplicidad de cada raíz coincide con la dimensión del subespacio propio asociado a ese autovalor. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz cuyo polinomio característico no tiene todas sus raíces reales, se prueba que A es semejante a una matriz denominada forma de Jordan real de A que coincide con la forma de Jordan de A si todos los autovalores de A son reales. Para probar este resultado se introduce el concepto de complejificación de un espacio vectorial real V y de un endomorfismo de V y se estudian las propiedades de los autovalores y autovectores del endomorfismo complejificado. Se demuestra además, que el complejificado de un espacio vectorial euclídeo es un espacio vectorial hermitico y que la complejificada de una transformación ortogonal es una transformación unitaria. Teniendo en cuenta que toda transformación unitaria es diagonalizable y que se puede encontrar una base ortonormal del espacio formada por vectores propios de la transformación, se calcula la forma de Jordan real de una transformación ortogonal y se obtiene el teorema de clasificación de transformaciones ortogonales. Como consecuencia, se describen las transformaciones ortogonales en espacios vectoriales euclídeos de dimensiones 2, 3 y 4.

2. Forma de Jordan

Sea K un cuerpo y V un espacio vectorial sobre K de dimensión $n \geq 1$. Sea $M_n(K)$ el conjunto de matrices $n \times n$ sobre K .

Definición 2.1. Sea V un espacio vectorial sobre K . Una *combinación lineal* de los elementos $v_1, \dots, v_r \in V$ es una suma

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i, \quad \lambda_i \in K, \quad i = 1, \dots, r.$$

Si S es un subconjunto finito de V , se llama *subespacio generado* por S , y se denota por $\langle S \rangle$, al conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de S .

Un subconjunto ordenado $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V es una *base* de V si el conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera V ; en particular, los vectores v_1, \dots, v_n son linealmente independientes.

Si S es un subconjunto de V , entonces $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S .

Definición 2.2. Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ bases de un espacio vectorial V y sea

$$v'_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j, \quad a_{ji} \in K, \quad i = 1, \dots, n.$$

La matriz

$$\text{id}_{B'B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \in M_n(K)$$

se llama *matriz de cambio de base* de B' a B .

Definición 2.3. Un endomorfismo f de V es una aplicación lineal $f: V \rightarrow V$.

Denotaremos por $\text{End}_K(V)$ el conjunto de endomorfismos de V .

Definición 2.4. Sea V un espacio vectorial sobre K , $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Si f es un endomorfismo de V y

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j, \quad a_{ji} \in K, \quad i = 1, \dots, n,$$

la matriz

$$f_B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \in M_n(K)$$

se llama *matriz asociada a f respecto a la base B* .

Definición 2.5. Se dice que las matrices $A, B \in M_n(K)$ son *semejantes* si existe una matriz regular $P \in M_n(K)$ tal que $P^{-1}AP = B$.

La relación “ser semejantes” en el conjunto de matrices $n \times n$ sobre K es una relación de equivalencia.

Ejemplo 2.6. Si $f: V \rightarrow V$ es una aplicación lineal y B y B' son bases de V , entonces las matrices f_B y $f_{B'}$ son semejantes. En efecto, $f_{B'} = \text{id}_{BB'} f_B \text{id}_{B'B}$.

Definición 2.7. Sea f un endomorfismo de V . Se dice que un escalar $\lambda \in K$ es un *autovalor* o *valor propio* de f si existe un vector $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $f(v) = \lambda v$. Un vector $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $f(v) = \lambda v$ se llama *autovector* o *vector propio* de f asociado a λ .

Definición 2.8. Se llama *polinomio característico* de A al polinomio $P_A(X) = \det(A - XI)$.

Proposición 2.9. *Matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.*

Demostración. Si $A, B \in M_n(K)$ son semejantes, entonces existe una matriz regular $P \in M_n(K)$ tal que $P^{-1}AP = B$. Se tiene

$$\begin{aligned} P_B(X) &= \det(B - XI) = \det(P^{-1}AP - XI) = \det(P^{-1}AP - XP^{-1}IP) \\ &= \det(P^{-1}AP - P^{-1}(XI)P) = \det(P^{-1}(A - XI)P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(A - XI) \det(P) = \det(A - XI) = P_A(X). \quad \square \end{aligned}$$

Definición 2.10. Si f es un endomorfismo de V , se llama *polinomio característico* de f al polinomio $P_f(X) = P_{f_B}(X)$, siendo f_B la matriz asociada a f respecto a una base B de V .

Observación 2.11. El polinomio característico de f no depende de la base de V considerada. En efecto, si B y B' son bases de V , entonces las matrices f_B y $f_{B'}$ son semejantes. Por la proposición 2.9, $P_{f_B}(X) = P_{f_{B'}}(X)$.

Proposición 2.12. *Si f es un endomorfismo de V , entonces λ es un autovalor de f si, y solo si, λ es una raíz del polinomio característico de f .*

Demostración. Si λ es un autovalor de f existe $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $f(v) = \lambda v$, es decir $(f - \lambda \text{id})(v) = 0$. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. Se tiene

$$\lambda \text{ autovalor de } f \iff (f_B - \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff P_{f_B}(\lambda) = \det(f_B - \lambda I) = 0. \quad \square$$

Definición 2.13. Se dice que la matriz $A \in M_n(K)$ es *diagonalizable* si es semejante a una matriz diagonal, es decir si existe una matriz regular $P \in M_n(K)$ tal que

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Se dice que un endomorfismo f de un espacio vectorial V es *diagonalizable* si existe una base B de V tal que la matriz f_B asociada a f respecto a B es una matriz diagonal, equivalentemente, si existe una base de V formada por vectores propios de f .

Definición 2.14. Se llama *bloque elemental de Jordan de orden r asociado al escalar $\lambda \in K$* a la siguiente matriz triangular superior:

$$J_\lambda^r = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.15.

$$J_\lambda^1 = (\lambda), \quad J_\lambda^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_\lambda^3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Definición 2.16. Una *matriz de Jordan* J es una matriz triangular superior de la forma:

$$\begin{pmatrix} J_{\lambda_1}^{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2}^{r_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_s}^{r_s} \end{pmatrix},$$

donde las matrices $J_{\lambda_i}^{r_i}$ son bloques elementales de Jordan de orden r_i , para $i = 1, \dots, s$. Si f es un endomorfismo de V y B es una base de V respecto a la cual la matriz asociada a f es una matriz de Jordan J , se dice que B es una *base de Jordan para f* y que J es una *forma de Jordan para f* .

Lema 2.17. Sea f un endomorfismo de V . La aplicación $\Phi_f: K[X] \rightarrow \text{End}_K(V)$ dada por

$$\Phi_f(a_m X^m + \dots + a_0) = a_m f^m + \dots + a_0 1_V,$$

es un homomorfismo de K -álgebras, es decir, es una aplicación lineal y verifica que $\Phi_f(q(X)h(X)) = \Phi_f(q(X)) \circ \Phi_f(h(X))$, para cualesquiera $q(X), h(X) \in K[X]$. Denotaremos $\Phi_f(q(X))$ por $q(f)$.

Demostración. La demostración es inmediata. □

Obsérvese que de la conmutatividad del producto de polinomios de $K[X]$ se deduce que dos endomorfismos de la imagen de Φ_f siempre conmutan, es decir

$$q(f) \circ h(f) = h(f) \circ q(f).$$

Lema 2.18. Sea f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f .

(1) Se tiene la siguiente cadena creciente de subespacios de V :

$$\{0\} \subset \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V) \subset \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^2 \subset \dots \subset \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^j \subset \dots$$

(2) Existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^m$, para todo $m > q$.

Demostración. (2) Dado que V tiene dimensión finita, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q+1}$. Veamos que $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^m$, para todo $m > q$. Pongamos $m = q + r$, $r \geq 1$. Razonemos por inducción sobre r . Para $r = 1$ el resultado es cierto. Supongamos el resultado cierto para $r - 1 \geq 1$ y veamos que es cierto para r . Si $v \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q+r}$, entonces $(f - \lambda \text{id}_V)^{q+r}(v) = 0$, de donde se sigue que $(f - \lambda \text{id}_V)^{q+r-1}(f - \lambda \text{id}_V)(v) = 0$, es decir $(f - \lambda \text{id}_V)(v) \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q+r-1}$. Por hipótesis de inducción, $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q+r-1} = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$. Así, $v \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q+1} = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$. \square

Lema 2.19. Sea f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f . Sea q el menor entero positivo tal que $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^m$, para todo $m > q$. Consideremos la cadena creciente de subespacios de V

$$\{0\} \subsetneq \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V) \subsetneq \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^2 \subsetneq \dots \subsetneq \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q.$$

Sea F_i , $2 \leq i \leq q$, un subespacio suplementario de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{i-1}$ en $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^i$,

$$\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^i = F_i \oplus \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{i-1}$$

y sea $B_i = \{v_1, \dots, v_r\}$, una base de F_i . Se tiene

(1) El conjunto

$$(f - \lambda \text{id}_V)(B_i) = \{(f - \lambda \text{id}_V)(v_1), \dots, (f - \lambda \text{id}_V)(v_r)\} \subset \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{i-1}$$

es linealmente independiente.

(2) $\langle (f - \lambda \text{id}_V)(B_i) \rangle \cap \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{i-2} = \{0\}$, para $3 \leq i \leq q$.

Demostración. (1) Supongamos que

$$\sum_{j=1}^r a_j (f - \lambda \text{id}_V)(v_j) = 0, \quad a_j \in K, \quad j = 1, \dots, r,$$

equivalentemente,

$$(f - \lambda \text{id}_V) \left(\sum_{j=1}^r a_j v_j \right) = 0.$$

Entonces, para $i \geq 2$

$$\sum_{j=1}^r a_j v_j \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V) \cap F_i \subset \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{i-1} \cap F_i = \{0\},$$

y por lo tanto $a_j = 0$ para $j = 1, \dots, r$.

(2) Sea

$$v = \sum_{j=1}^r a_j (f - \lambda \text{id}_V)(v_j) \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{i-2}.$$

Se tiene

$$(f - \lambda \text{id}_V)^{i-2} \left(\sum_{j=1}^r a_j (f - \lambda \text{id}_V)(v_j) \right) = 0.$$

Así,

$$\sum_{j=1}^r a_j v_j \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{i-1} \cap F_i = \{0\},$$

de donde se sigue que $a_j = 0$, para $j = 1, \dots, r$, y por tanto $v = 0$. \square

Definición 2.20. Sean U_1, \dots, U_s subespacios de V . Se dice que la suma $U_1 + \dots + U_s$ es *directa* y se denota por $U_1 \oplus \dots \oplus U_s$ si verifica

$$U_i \cap \left(\sum_{j \neq i} U_j \right) = \{0\}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Lema 2.21. Sean U_1, \dots, U_s subespacios de V tales que $U_1 + \dots + U_s = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$. Si B_i es una base de U_i , $i = 1, \dots, s$, entonces $\bigcup_{i=1}^s B_i$ es una base de $U_1 + \dots + U_s$.

Demostración. Pongamos $B_i = \{v_{i1}, \dots, v_{ir_i}\}$, $i = 1, \dots, s$. El conjunto $\bigcup_{i=1}^s B_i$ es un conjunto de generadores de $U_1 + \dots + U_s$. Veamos que es linealmente independiente. Pongamos,

$$\sum_{j=1}^{r_1} a_{1j} v_{1j} + \dots + \sum_{j=1}^{r_s} a_{sj} v_{sj} = 0.$$

luego

$$\sum_{j=1}^{r_i} a_{ij} v_{ij} \in U_i \cap \left(\sum_{j \neq i} U_j \right), \quad i = 1, \dots, s.$$

Puesto que la suma es directa

$$\sum_{j=1}^{r_i} a_{ij} v_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, s,$$

y por ser B_i , $i = 1, \dots, s$, linealmente independiente,

$$a_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, r_i.$$

Así, $a_{ij} = 0$, para todo $j = 1, \dots, r_i$, $i = 1, \dots, s$. \square

Lema 2.22. Sea f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f . Se tiene

$$f(\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^r) \subset \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^r, \quad r \geq 1.$$

Demostración. (1) Si $v \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^r$, entonces $(f - \lambda \text{id}_V)^r f(v) = f(f - \lambda \text{id}_V)^r(v) = 0$. \square

Sea q el menor entero positivo tal que $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^m$, para todo $m > q$. Denotaremos por f_λ el endomorfismo restricción de f a $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$

$$\begin{aligned} f_\lambda: \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q &\longrightarrow \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q \\ v &\longmapsto f(v) \end{aligned}$$

Teorema 2.23. Sea f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f . Sea q el menor entero positivo tal que $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^m$, para todo $m > q$. Existe una base B_λ de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$ tal que la matriz asociada a f_λ respecto a B_λ es una matriz de Jordan.

Demostración. Consideremos la cadena de subespacios de V

$$\{0\} \subsetneq \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V) \subsetneq \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^2 \subsetneq \dots \subsetneq \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q.$$

Sea F_q un subespacio suplementario de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q-1}$ en $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$ y sea $B_q = \{v_{q1}, \dots, v_{qm_q}\}$ una base de F_q . Pongamos $g = f - \lambda \text{id}_V$. Por el lema 2.19, el conjunto $g(B_q)$ es un subconjunto de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q-1}$

linealmente independiente y $\langle g(B_q) \rangle \cap \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q-2} = 0$. Completamos $g(B_q)$ a una base B_{q-1} de un subespacio F_{q-1} suplementario de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q-2}$ en $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q-1}$. Se tiene

$$B_{q-1} = \{v_{q-1,1}, \dots, v_{q-1, m_{q-1}}\}, \quad g(v_{q,i}) = v_{q-1,i}, \quad i = 1, \dots, m_q.$$

Siguiendo así, sucesivamente se obtiene una base $B_2 = \{v_{2,1}, \dots, v_{2, m_2}\}$ de un subespacio F_2 , suplementario de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)$ en $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^2$, y completando $g(B_2)$ obtenemos una base B_1 de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)$ tal que

$$B_1 = \{v_{1,1}, \dots, v_{1, m_1}\}, \quad g(v_{2,i}) = v_{1,i}, \quad i = 1, \dots, m_2.$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q &= \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q-1} \oplus F_q = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q-2} \oplus F_{q-1} \oplus F_q \\ &= \dots = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V) \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_q. \end{aligned}$$

Por el lema 2.21, los $m_1 + \dots + m_q$ vectores así construidos forman una base de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$. El cuadro 1.1 esquematiza la construcción de esta base de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$.

B_p	v_{p1}	\dots	$v_{p m_p}$																
B_{p-1}	$g(v_{p1})$	\dots	$g(v_{p m_p})$	v_{p-1, m_p+1}	\dots	v_{p-1, m_p-1}													
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots													
B_2	$g^{p-2}(v_{p1})$	\dots	$g^{p-2}(v_{p m_p})$	$g^{p-3}(v_{p-1, m_p+1})$	\dots	$g^{p-3}(v_{p-1, m_p-1})$	\dots	v_{2, m_3+1}	\dots	v_{2, m_2}									
B_1	$g^{p-1}(v_{p1})$	\dots	$g^{p-1}(v_{p m_p})$	$g^{p-2}(v_{p-1, m_p+1})$	\dots	$g^{p-2}(v_{p-1, m_p-1})$	\dots	$g(v_{2, m_3+1})$	\dots	$g(v_{2, m_2})$	v_{1, m_2+1}	\dots	v_{1, m_1}						

Cuadro 1: Base de $\text{Nuc}(f - \lambda 1_V)^p$

Escribiendo estos vectores por columnas y empezando por la última fila del cuadro 1.1 obtenemos la siguiente base de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$:

$$\begin{aligned} B_\lambda = & \{g^{q-1}(v_{q1}), \dots, g(v_{q1}), v_{q1}\} \cup \dots \cup \{g^{q-1}(v_{q m_q}), \dots, g(v_{q m_q}), v_{q m_q}\} \\ & \cup \{g^{q-2}(v_{q-1, m_q+1}), \dots, v_{q-1, m_q+1}\} \cup \dots \cup \{g^{q-2}(v_{q-1, m_q-1}), \dots, v_{q-1, m_q-1}\} \cup \dots \\ & \cup \{v_{1, m_2+1}, \dots, v_{1, m_1}\}. \end{aligned}$$

Denotemos por J_λ la matriz asociada a f_λ respecto a B_λ . Las m_q primeras columnas del cuadro 1.1 dan cada una un bloque elemental de Jordan de orden q . En efecto, para $j = 1, \dots, m_q$, se tiene

$$\begin{aligned} f(g^{q-1}(v_{qj})) &= (f - \lambda \text{id}_V)(g^{q-1}(v_{qj})) + \lambda g^{q-1}(v_{qj}) = \lambda g^{q-1}(v_{qj}), \\ f(g^{q-2}(v_{qj})) &= (f - \lambda \text{id}_V)(g^{q-2}(v_{qj})) + \lambda g^{q-2}(v_{qj}) = g^{q-1}(v_{qj}) + \lambda g^{q-2}(v_{qj}), \\ & \vdots \\ f(v_{qj}) &= (f - \lambda \text{id}_V)(v_{qj}) + \lambda v_{qj} = g(v_{qj}) + \lambda v_{qj}. \end{aligned}$$

Escribiendo estos vectores por columnas y empezando por la última fila del cuadro 1.1 obtenemos la siguiente base de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$:

$$\begin{aligned} B_\lambda = & \{g^{q-1}(v_{q1}), \dots, g(v_{q1}), v_{q1}\} \cup \dots \cup \{g^{q-1}(v_{q m_q}), \dots, g(v_{q m_q}), v_{q m_q}\} \\ & \cup \{g^{q-2}(v_{q-1, m_q+1}), \dots, v_{q-1, m_q+1}\} \cup \dots \cup \{g^{q-2}(v_{q-1, m_q-1}), \dots, v_{q-1, m_q-1}\} \cup \dots \\ & \cup \{v_{1, m_2+1}, \dots, v_{1, m_1}\}. \end{aligned}$$

Denotemos por J_λ la matriz asociada a f_λ respecto a B_λ . Las m_q primeras columnas del cuadro 1.1 dan cada una un bloque elemental de Jordan de orden q . En efecto, para $j = 1, \dots, m_q$, se tiene

$$\begin{aligned} f(g^{q-1}(v_{qj})) &= (f - \lambda \text{id}_V)(g^{q-1}(v_{qj})) + \lambda g^{q-1}(v_{qj}) = \lambda g^{q-1}(v_{qj}), \\ f(g^{q-2}(v_{qj})) &= (f - \lambda \text{id}_V)(g^{q-2}(v_{qj})) + \lambda g^{q-2}(v_{qj}) = g^{q-1}(v_{qj}) + \lambda g^{q-2}(v_{qj}), \\ &\vdots \\ f(v_{qj}) &= (f - \lambda \text{id}_V)(v_{qj}) + \lambda v_{qj} = g(v_{qj}) + \lambda v_{qj}. \end{aligned}$$

Por tanto hay m_q bloques elementales de Jordan de orden q asociados a λ colocados en la diagonal de J_λ . Análogamente, dado que cada una de las siguientes $m_{q-1} - m_q$ columnas define un bloque elemental de Jordan de orden $q - 1$, tenemos $m_{q-1} - m_q$ bloques elementales de Jordan de orden $q - 1$ en la diagonal de J_λ . Siguiendo este proceso llegamos a las $m_1 - m_2$ últimas columnas del cuadro 1.1 que proporcionan $m_1 - m_2$ bloques elementales de Jordan de orden 1 en la diagonal de J_λ .

La matriz J_λ es una matriz de Jordan y $\dim \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V) = m_1$ es el número total de bloques elementales de Jordan que hay en J_λ . \square

Definición 2.24. Sea f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f . Se dice que λ es un *autovalor de multiplicidad r* si λ es una raíz de $P_f(X)$ de multiplicidad r .

Proposición 2.25. Sea f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f de multiplicidad r . Si q es el menor entero positivo tal que $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^m$, para todo $m > q$, entonces $\dim \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = r$.

Demostración. Se tiene

$$P_f(X) = (-1)^n c(X) (X - \lambda)^r, \quad c(\lambda) \neq 0.$$

Supongamos que $\dim \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = s$. Queremos probar que $s = r$. Si $B' = \{v_1, \dots, v_s\}$ es una base de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$ y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V , entonces

$$f_B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} & a_{1s+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} & a_{ss+1} & \dots & a_{sn} \\ 0 & \dots & 0 & a_{s+1s+1} & \dots & a_{s+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{ns+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (f\lambda)_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

Pongamos $B'' = \{v_{s+1}, \dots, v_n\}$, $L = \langle B'' \rangle$ y consideremos el endomorfismo $h: L \rightarrow L$ cuya matriz asociada respecto a la base B'' es la matriz

$$h_{B''} = \begin{pmatrix} a_{s+1s+1} & \dots & a_{s+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ns+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Por la demostración del teorema 2.23, $P_{f_\lambda}(X) = (-1)^s (X - \lambda)^s$. Luego

$$P_f(X) = \det(f_B - XI) = P_{f_\lambda}(X) P_h(X) = (-1)^s (X - \lambda)^s P_h(X).$$

Veamos que $P_h(\lambda) \neq 0$. Supongamos que $P_h(\lambda) = 0$, es decir, que λ es un autovalor de h . Existe un vector

$$v = \sum_{j=s+1}^n \mu_j v_j \in L, \quad v \neq 0,$$

tal que $h(v) = \lambda v$. Se tiene

$$\begin{aligned}
(f - \lambda \text{id}_V)(v) &= f(v) - \lambda v = f(v) - h(v) = \\
&= \sum_{j=s+1}^n \mu_j f(v_j) - \sum_{j=s+1}^n \mu_j h(v_j) \\
&= \sum_{j=s+1}^n \mu_j \left(\sum_{k=1}^n a_{kj} v_k \right) - \sum_{j=s+1}^n \mu_j \left(\sum_{k=s+1}^n a_{kj} v_k \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=s+1}^n \mu_j a_{kj} \right) v_k - \sum_{k=s+1}^n \left(\sum_{j=s+1}^n \mu_j a_{kj} \right) v_k \\
&= \sum_{k=1}^s \left(\sum_{j=s+1}^n \mu_j a_{kj} \right) v_k \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q.
\end{aligned}$$

Así, $v \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q+1} = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$. Por tanto $v \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q \cap L = \{0\}$, lo cual es una contradicción. \square

Corolario 2.26. *Sea f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f de multiplicidad r . Se tiene que $\dim \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^r = r$.*

Demostración. Sea q el menor entero positivo tal que $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^m$, para todo $m > q$. Dado que $\dim \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = r$, se tiene que $q \leq r$ y por tanto $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^r = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$. \square

Teorema 2.27. (Teorema de Cayley-Hamilton[2], [5]) *Sea $A \in M_n(K)$, y sea $P_A(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$ su polinomio característico. Se tiene que $P_A(A) \equiv (-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_0 I = 0$.*

Corolario 2.28. *Sea f un endomorfismo de V y sea $P_f(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$ su polinomio característico. Se tiene que $P_f(f) = (-1)^n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \dots + a_0 \text{id}_V = 0$.*

Demostración. Se sigue del lema 2.17. \square

Lema 2.29. ([4, Lema 6.7.2]) *Sea f un endomorfismo de V . Si $p_1(X), \dots, p_s(X) \in K[X]$ son tales que m.c.d. $(p_j(X), p_k(X)) = 1$, para $j \neq k$, entonces*

$$\text{Nuc } p_j(f) \cap \left(\sum_{k \neq j} \text{Nuc } p_k(f) \right) = \{0\}, \quad j = 1, \dots, s.$$

Demostración. Se tiene

$$\sum_{k \neq j} \text{Nuc } p_k(f) \subset \text{Nuc} \left(\prod_{k \neq j} p_k(f) \right). \quad (1)$$

Dado que los polinomios $p_j(X)$ y $\prod_{k \neq j} p_k(X)$ son primos entre sí, por el teorema de Bezout, existen polinomios $a(X), b(X) \in K[X]$ tales que

$$a(X) p_j(X) + b(X) \prod_{k \neq j} p_k(X) = 1.$$

Por tanto

$$a(f) p_j(f) + b(f) \prod_{k \neq j} p_k(f) = \text{id}_V.$$

Si $v \in \text{Nuc } p_j(f) \cap \text{Nuc} \left(\prod_{k \neq j} p_k(f) \right)$, entonces

$$v = a(f) p_j(f)(v) + b(f) \prod_{k \neq j} p_k(f)(v) = 0 + 0 = 0.$$

Luego $\text{Nuc } p_j(f) \cap \text{Nuc} \left(\prod_{k \neq j} p_k(f) \right) = \{0\}$ y el resultado se sigue de (1). \square

Proposición 2.30. Sea f un endomorfismo de V . Si $P_f(X) = p_1(X) \dots p_s(X)$ y m.c.d. $(p_i(X), p_j(X)) = 1$, para $i \neq j$, entonces

$$V = \text{Nuc } p_1(f) \oplus \dots \oplus \text{Nuc } p_s(f).$$

Demostración. Si $g_i(X) = p_1(X) \dots p_{i-1}(X) p_{i+1}(X) \dots p_s(X)$, para $i = 1, \dots, s$, entonces

$$\text{m.c.d.}(g_1(X), \dots, g_s(X)) = 1,$$

y por el teorema de Bezout existen polinomios $h_i(X) \in K[X]$, para $i = 1, \dots, s$, tales que

$$\sum_{i=1}^s g_i(X) h_i(X) = 1.$$

Por el lema 2.17 se tiene

$$\sum_{i=1}^s g_i(f) \circ h_i(f) = \text{id}_V,$$

equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^s (g_i(f) \circ h_i(f))(v) = v, \text{ para todo } v \in V.$$

Por el teorema de Cayley-Hamilton se tiene que $P_f(f) = p_i(f) \circ g_i(f) = 0$, para $i = 1, \dots, s$. Por tanto, $p_i(f) \circ g_i(f) \circ h_i(f) = 0$, para $i = 1, \dots, s$ y así, $(g_i(f) \circ h_i(f))(v) \in \text{Nuc } p_i(f)$, para todo $v \in V$ y para $i = 1, \dots, s$. Así,

$$V = \text{Nuc } p_1(f) + \dots + \text{Nuc } p_s(f).$$

La suma es directa por el lema 2.29. □

Proposición 2.31. Sea f un endomorfismo de V y $P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_s)^{r_s}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$. Se tiene

$$V = \text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V)^{r_1} \oplus \dots \oplus \text{Nuc}(f - \lambda_s \text{id}_V)^{r_s}.$$

Demostración. El resultado se sigue de la proposición anterior. □

Teorema 2.32. (Teorema de Jordan) Sea f un endomorfismo de V . Si

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_s)^{r_s},$$

donde $\lambda_i \neq \lambda_j$, para todo $i \neq j$, entonces existe una base B_J de V tal que la matriz asociada a f respecto a B_J es una matriz de Jordan.

Demostración. Sea q_i el menor entero positivo tal que $\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i} = \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^m$, para todo $m > q_i$. Por la demostración del corolario 2.26, $\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{r_i} = \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}$. Sea B_{λ_i} una base de Jordan para el endomorfismo $f_{\lambda_i} : \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i} \rightarrow \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}$ y J_{λ_i} la matriz asociada a f_{λ_i} respecto a B_{λ_i} . Pongamos

$$B_J = \bigcup_{i=1}^s B_{\lambda_i}.$$

Por el lema 2.21 y la proposición 2.31, B_J es una base de V . La matriz asociada a f respecto a B_J es la matriz

$$f_{B_J} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_s} \end{pmatrix},$$

que es una matriz de Jordan. □

Corolario 2.33. Si A es una matriz de $M_n(K)$ y el polinomio característico de A es de la forma

$$P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_s)^{r_s}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \text{ si } i \neq j,$$

entonces A es semejante a una matriz de Jordan J .

Demostración. Sea $f: K^n \rightarrow K^n$ el endomorfismo cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A . Dado que $P_f(X) = P_A(X)$, por el teorema de Jordan existe una base de K^n tal que la matriz asociada a f respecto a esta base es una matriz de Jordan J . Así, A y J son matrices semejantes. \square

Definición 2.34. En las condiciones del corolario anterior la matriz J se dice que es una *forma de Jordan* de A . Obsérvese que la matriz J es única salvo el orden de los bloques elementales de Jordan.

Teorema 2.35. (Teorema de diagonalización) Si f un endomorfismo de V , son equivalentes:

- (1) f es diagonalizable.
- (2) f verifica las siguientes condiciones:
 - (a) $P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_s)^{r_s}$, donde $\lambda_i \in K$, para $i = 1, \dots, s$, y $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$.
 - (b) $\dim \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V) = r_i$, para $i = 1, \dots, s$.
- (3) Existen $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$ tales que

$$V = \text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V) \oplus \dots \oplus \text{Nuc}(f - \lambda_s \text{id}_V).$$

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Si f es diagonalizable, entonces existe una base B de V tal que f_B es una matriz diagonal. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ son los elementos de la diagonal principal de f_B y $\lambda_i \neq \lambda_j$, para todo $i \neq j$, entonces

$$P_f(X) = P_{f_B}(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_s)^{r_s}.$$

Además,

$$\dim \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V) = n - \text{rango}(f_B - \lambda_i I) = n - (n - r_i) = r_i, \quad i = 1, \dots, s.$$

(2) \Rightarrow (3) Se sigue de la proposición 2.31 y del corolario 2.26.

(3) \Rightarrow (1) Si B_i es una base de $\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)$, para $i = 1, \dots, s$, entonces $B = \bigcup_{i=1}^s B_{\lambda_i}$ es una base de V formada por vectores propios de f . \square

Corolario 2.36. La matriz $A \in M_n(K)$ es diagonalizable si, y solo si, verifica las siguientes condiciones:

- (1) $P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_s)^{r_s}$, donde $\lambda_i \in K$, para $i = 1, \dots, s$, y $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$.
- (2) Si $f: K^n \rightarrow K^n$ es la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A , entonces $\dim \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_{K^n}) = r_i$, para $i = 1, \dots, s$.

Ejemplo 2.37. Consideremos la matriz real

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_{A_1}(X) = X^3(X - 2)$. Si $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es la aplicación \mathbb{R} -lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A_1 , entonces

$$\text{Nuc}(f) = \langle (1, -1, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 1, 0, -1) \rangle, \quad \text{Nuc}(f - 2 \mathbb{1}_{\mathbb{R}^4}) = \langle (1, 0, 0, 1) \rangle.$$

Por el teorema de diagonalización, A_1 es diagonalizable. Una base de Jordan para f es

$$\{(1, -1, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 1, 0, -1), (1, 0, 0, 1)\}.$$

Si tomamos

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

la matriz J_1 es la forma de Jordan para A_1 se tiene $P_1^{-1}A_1P_1 = J_1$.

Ejemplo 2.38. Consideremos la matriz real

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_{A_2}(X) = (X - 2)^4$.

Si $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es la aplicación \mathbb{R} -lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A_2 , entonces

$$\text{Nuc}(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4}) = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 1, -2, 1) \rangle,$$

Puesto que $\dim \text{Nuc}(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4}) = 2$, una forma de Jordan para A_2 tiene dos bloques elementales de Jordan y como $(A_2 - 2I)^2 = 0$, los dos bloques elementales de Jordan son de orden 2. Vamos a construir una base de Jordan para f . Se tiene la cadena de subespacios

$$\{0\} \subsetneq \text{Nuc}(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4}) \subsetneq \text{Nuc}(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})^2 = \mathbb{R}^4.$$

Una base de un subespacio F_2 suplementario de $\text{Nuc}(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})$ en \mathbb{R}^4 es $B_2 = \{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$. Se tiene

$$(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})(0, 0, 1, 0) = (1, 0, 2, -1), \quad (f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})(0, 0, 0, 1) = (2, -1, 6, -3).$$

Una base de $\text{Nuc}(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})$ es $B_1 = \{(1, 0, 2, -1), (2, -1, 6, -3)\}$. Una base de Jordan para f es

$$\{(1, 0, 2, -1), (0, 0, 1, 0), (2, -1, 6, -3), (0, 0, 0, 1)\}.$$

Si tomamos

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

la matriz J_2 es una forma de Jordan para A_2 y se tiene $P_2^{-1}A_2P_2 = J_2$.

Ejemplo 2.39. Consideremos la matriz real

$$A_3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_{A_3}(X) = (-4 - X)^4$. Si $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es la aplicación \mathbb{R} -lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A_3 , entonces

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Nuc}(f + 4 \text{id}_{\mathbb{R}^4}) = 4 - \text{rango}(A_3 + 4I) = 4 - \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2.$$

Por tanto, una forma de Jordan de A_3 tiene dos bloques elementales de Jordan. Se tiene

$$(A_3 + 4I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_3 + 4I)^3 = 0.$$

Entonces una forma de Jordan de A_3 tiene un bloque elemental de Jordan de orden 3 y un bloque elemental de Jordan de orden 1. Vamos a construir una base de Jordan para f . Se tiene la cadena de subespacios

$$\{0\} \subsetneq \text{Nuc}(f + 4\text{id}_{\mathbb{R}^4}) \subsetneq \text{Nuc}(f + 4\text{id}_{\mathbb{R}^4})^2 \subsetneq \text{Nuc}(f + 4\text{id}_{\mathbb{R}^4})^3 = \mathbb{R}^4.$$

donde

$$\text{Nuc}(f + 4\text{id}_{\mathbb{R}^4}) = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle, \quad \text{Nuc}(f + 4\text{id}_{\mathbb{R}^4})^2 = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle$$

Una base de un subespacio F_3 suplementario de $\text{Nuc}(f + 4\text{id}_{\mathbb{R}^4})^2$ en \mathbb{R}^4 es $B_3 = \{(0, 0, 0, 1)\}$. Dado que $(f + 4\text{id}_{\mathbb{R}^4})(0, 0, 0, 1) = (-5, -5, 9, 0)$, una base de un subespacio F_2 suplementario de $\text{Nuc}(f + 4\text{id}_{\mathbb{R}^4})$ en $\text{Nuc}(f + 4\text{id}_{\mathbb{R}^4})^2$, es $B_2 = \{(-5, -5, 9, 0)\}$. Una base de $\text{Nuc}(f + 4\text{id}_{\mathbb{R}^4})$ es $B_1 = \{(36, 36, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$, donde $(36, 36, 0, 0) = (f + 4\text{id}_{\mathbb{R}^4})^2(0, 0, 0, 1)$. Una base de Jordan para f es

$$\{(36, 36, 0, 0), (-5, -5, 9, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0)\}.$$

Si tomamos

$$P_3 = \begin{pmatrix} 36 & -5 & 0 & 0 \\ 36 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

la matriz J_3 es una forma de Jordan para A_3 y se tiene que $P_3^{-1}A_3P_3 = J_3$.

Ejemplo 2.40. Consideremos la matriz compleja

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_{A_4}(X) = (X^2 + 1)^2 = (X - i)^2(X + i)^2$. Si $f: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ es la aplicación \mathbb{C} -lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A_4 , entonces

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Nuc}(f - i\text{id}_{\mathbb{C}^4}) = 4 - \text{rango}(A_4 - iI) = 4 - \text{rango} \begin{pmatrix} -i & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 - i & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 - i \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1,$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Nuc}(f + i\text{id}_{\mathbb{C}^4}) = 4 - \text{rango}(A_4 + iI) = 4 - \text{rango} \begin{pmatrix} i & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 + i & 0 & 1 \\ 1 & 1 & i & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 + i \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

Por tanto, una forma de Jordan de A_4 tiene un bloque elemental de Jordan de orden 2 asociado al autovalor i y un bloque elemental de Jordan de orden 2 asociado al autovalor $-i$. Se tiene

$$\text{Nuc}(f - i\text{id}_{\mathbb{C}^4}) = \langle (i, 0, 1, 0) \rangle, \quad \text{Nuc}(f + i\text{id}_{\mathbb{C}^4}) = \langle (-i, 0, 1, 0) \rangle.$$

Consideremos las cadenas de subespacios

$$\begin{aligned} \{0\} \subsetneq \text{Nuc}(f - i \text{id}_{\mathbb{C}^4}) \subsetneq \text{Nuc}(f - i \text{id}_{\mathbb{C}^4})^2 = \text{Nuc}(f - i \text{id}_{\mathbb{C}^4})^3, \\ \{0\} \subsetneq \text{Nuc}(f + i \text{id}_{\mathbb{C}^4}) \subsetneq \text{Nuc}(f + i \text{id}_{\mathbb{C}^4})^2 = \text{Nuc}(f + i \text{id}_{\mathbb{C}^4})^3. \end{aligned}$$

Dado que

$$(A - iI)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 - 2i & 2i & 1 \\ 0 & -2 + 2i & 0 & -2i \\ -2i & -2i & -2 & 1 \\ 0 & 4i & -2 & -2 - 2i \end{pmatrix}, \quad (A + iI)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 + 2i & -2i & 1 \\ 0 & -2 - 2i & 0 & 2i \\ 2i & 2i & -2 & 1 \\ 0 & -4i & -2 & -2 + 2i \end{pmatrix},$$

se tiene

$$\text{Nuc}(f - i \text{id}_{\mathbb{C}^4})^2 = \langle (i, 0, 1, 0), (0, 1 + i, 1, 2i) \rangle, \quad \text{Nuc}(f + i \text{id}_{\mathbb{C}^4})^2 = \langle (-i, 0, 1, 0), (0, 1 - i, 1, -2i) \rangle.$$

Una base de un subespacio F_2 suplementario de $\text{Nuc}(f - i \text{id}_{\mathbb{R}^4})$ en $\text{Nuc}(f - i \text{id}_{\mathbb{C}^4})^2$ es $B_2 = \{(0, 1 + i, 1, 2i)\}$ y $(f - i \text{id}_{\mathbb{C}^4})(0, 1 + i, 1, 2i) = (i, 0, 1, 0)$. Una base de un subespacio F'_2 suplementario de $\text{Nuc}(f + i \text{id}_{\mathbb{R}^4})$ en $\text{Nuc}(f + i \text{id}_{\mathbb{C}^4})^2$ es $B'_2 = \{(0, 1 - i, 1, -2i)\}$ y $(f + i \text{id}_{\mathbb{C}^4})(0, 1 - i, 1, -2i) = (-i, 0, 1, 0)$. Una base de Jordan para f es

$$\{(i, 0, 1, 0), (0, 1 + i, 1, 2i), (-i, 0, 1, 0), (0, 1 - i, 1, -2i)\}.$$

Si tomamos

$$P_4 = \begin{pmatrix} i & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 + i & 0 & 1 - i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2i & 0 & -2i \end{pmatrix}, \quad J_4 = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix},$$

la matriz J_4 es una forma de Jordan de A_4 y se tiene $P_4^{-1}A_4P_4 = J_4$.

3. Forma de Jordan real

Sea V un espacio vectorial real de dimensión $n \geq 1$. La *complejificación* de V es el espacio vectorial complejo $V_{\mathbb{C}} = V \times V$ con las siguientes operaciones

$$\begin{aligned} (u, v) + (u', v') &= (u + u', v + v'), \\ (a + bi)(u, v) &= (au - bv, av + bu), \quad a + bi \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

El subespacio real $V \times \{0\}$ de $V_{\mathbb{C}}$ es isomorfo a V y la aplicación $\varphi: V \rightarrow V_{\mathbb{C}}$, $\varphi(v) = (v, 0)$, se llama *encaje estándar* de V en $V_{\mathbb{C}}$. Denotaremos los elementos $(v, 0)$ por v . Dado que

$$(u, v) = (u, 0) + (0, v) = (u, 0) + i(v, 0),$$

cada elemento (u, v) de $V_{\mathbb{C}}$ se denotará por $u + iv$.

Si $\mu = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$, denotaremos por $\bar{\mu}$ su complejo conjugado $\alpha - \beta i$. Si $w = u + iv \in \mathbb{C}$, denotaremos por \bar{w} a $u - iv$. Se tiene que $\overline{w + w'} = \bar{w} + \bar{w}'$, $\overline{\mu w} = \bar{\mu} \bar{w}$, para todo $w, w' \in V_{\mathbb{C}}$ y $\mu \in \mathbb{C}$. Si $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, denotaremos por \bar{A} la matriz (\bar{a}_{ij}) .

Ejemplo 3.1. Las complejificaciones de \mathbb{R}^n , $M_n(\mathbb{R})$ o $\mathbb{R}[X]$ son isomorfismos a \mathbb{C}^n , $M_n(\mathbb{C})$ o $\mathbb{C}[X]$ por el isomorfismo que lleva cada par (v_1, v_2) de $(\mathbb{R}^n)_{\mathbb{C}}$, $M_n(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$, o $\mathbb{R}[X]_{\mathbb{C}}$ a $v_1 + v_2 i$ en \mathbb{C}^n , $M_n(\mathbb{C})$, o $\mathbb{C}[X]$, respectivamente. Identificaremos $(\mathbb{R}^n)_{\mathbb{C}}$, $M_n(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ o $\mathbb{R}[X]_{\mathbb{C}}$ con \mathbb{C}^n , $M_n(\mathbb{C})$ o $\mathbb{C}[X]$, respectivamente.

Lema 3.2. *Sea V un espacio vectorial real. Si $\{v_1, \dots, v_r\}$ es un conjunto de vectores de V linealmente independiente (resp. conjunto de generadores, base), entonces $\{v_1, \dots, v_r\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente (resp. conjunto de generadores, base) del espacio vectorial complejo $V_{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Veamos que si $\{v_1, \dots, v_r\}$ es un conjunto de vectores de V linealmente independiente, entonces $\{v_1, \dots, v_r\}$ es un conjunto de vectores de $V_{\mathbb{C}}$ linealmente independiente. Pongamos

$$\sum_{j=1}^r (a_j + b_j i) v_j = 0, \quad a_j + b_j i \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, r,$$

equivalentemente,

$$\sum_{j=1}^r (a_j v_j + i b_j v_j) = 0.$$

Se tiene

$$\sum_{j=1}^r a_j v_j = 0, \quad \sum_{j=1}^r b_j v_j = 0.$$

Así, $a_j = 0$ y $b_j = 0$, para $j = 1, \dots, r$.

Supongamos ahora que $\{v_1, \dots, v_r\}$ genera V . Dado $u + iv \in V_{\mathbb{C}}$, pongamos

$$u = \sum_{j=1}^r a_j v_j, \quad v = \sum_{j=1}^r b_j v_j,$$

y así,

$$u + iv = \sum_{j=1}^r (a_j + b_j i) v_j. \quad \square$$

Obsérvese que $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$.

Si f es un endomorfismo de V denotaremos por $f_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ la aplicación dada por

$$f_{\mathbb{C}}(u + iv) = f(u) + if(v).$$

Proposición 3.3. *Sea f un endomorfismo de V . Se tiene*

- (1) *La aplicación $f_{\mathbb{C}}$ es un endomorfismo de $V_{\mathbb{C}}$ y la restricción de $f_{\mathbb{C}}$ a V es la aplicación f .*
- (2) *Las matrices asociadas a f y a $f_{\mathbb{C}}$ respecto a cualquier base de V son iguales.*
- (3) *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de $f_{\mathbb{C}}$, entonces λ es un autovalor de f .*
- (4) *Sea $\mu = \alpha + \beta i \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ un autovalor de $f_{\mathbb{C}}$. Se tiene*
 - (a) *$\bar{\mu} = \alpha - \beta i$ es autovalor de $f_{\mathbb{C}}$.*
 - (b) *$u + iv \in \text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \mu \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^j$ si, y solo si, $u - iv \in \text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \bar{\mu} \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^j$.*
 - (c) *El conjunto $B = \{u_1 + iv_1, \dots, u_m + iv_m\}$ es base de $\text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \lambda \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^j$ si, y sólo si, $\bar{B} = \{u_1 - iv_1, \dots, u_m - iv_m\}$ es base de $\text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^j$.*
 - (d) *Sea $E = \{w_1, \dots, w_s\} \subset V_{\mathbb{C}}$ un conjunto de vectores \mathbb{C} -linealmente independientes y $\bar{E} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_s\}$. Si la matriz asociada a la restricción de $f_{\mathbb{C}}$ a $\langle E \rangle$ en la base E es el bloque elemental de Jordan J_{μ}^s , entonces la matriz asociada a la restricción de $f_{\mathbb{C}}$ a $\langle \bar{E} \rangle$ en la base \bar{E} es $J_{\bar{\mu}}^s$.*

Demostración. (1) La aplicación $f_{\mathbb{C}}$ es \mathbb{C} -lineal. En efecto,

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{C}}((u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2)) &= f_{\mathbb{C}}(u_1 + u_2 + i(v_1 + v_2)) \\ &= f(u_1 + u_2) + if(v_1 + v_2) \\ &= f(u_1) + if(v_1) + f(u_2) + if(v_2) \\ &= f_{\mathbb{C}}(u_1 + iv_1) + f_{\mathbb{C}}(u_2 + iv_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{\mathbb{C}}((a+bi)(u+iv)) &= f_{\mathbb{C}}(au - bv + i(av + bu)) \\
&= f(au - bv) + if(av + bu) \\
&= (a+bi)(f(u) + if(v)) = (a+bi)f_{\mathbb{C}}(u+iv),
\end{aligned}$$

y además, $f_{\mathbb{C}}(v) = f(v) + if(0) = f(v)$.

(2) Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ la matriz asociada a f respecto a B . Se tiene

$$f_{\mathbb{C}}(v_j) = f(v_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj}v_k, \quad j = 1, \dots, n.$$

(3) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de $f_{\mathbb{C}}$ y $u + iv$ es un vector propio de $f_{\mathbb{C}}$ asociado a λ , se tiene

$$f_{\mathbb{C}}(u + iv) = \lambda(u + iv) \iff f(u) + if(v) = \lambda u + i\lambda v,$$

o equivalentemente, $f(u) = \lambda u$, $f(v) = \lambda v$. Dado que $u + iv \neq 0$, λ es un autovalor de f .

(4) (a) Por (2), $P_{f_{\mathbb{C}}}(X) = P_f(X) \in \mathbb{R}[X]$ y por tanto dado que μ es una raíz de $P_f(X)$, $\bar{\mu}$ es una raíz de $P_f(X)$.

(4) (b) Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $u + iv \in V_{\mathbb{C}}$. Si

$$u = \sum_{j=1}^n a_j v_j, \quad v = \sum_{j=1}^n b_j v_j,$$

entonces

$$u + iv = \sum_{j=1}^n (a_j + b_j i) v_j, \quad u - iv = \sum_{j=1}^n (a_j - b_j i) v_j.$$

Se tiene

$$(f_B - \mu I)^j \begin{pmatrix} a_1 + b_1 i \\ \vdots \\ a_n + b_n i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff (f_B - \bar{\mu} I)^j \begin{pmatrix} a_1 - b_1 i \\ \vdots \\ a_n - b_n i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

puesto que $f_B = (f_{\mathbb{C}})_B \in M_n(\mathbb{R})$. Así, $u + iv \in \text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \lambda \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^j$ si, y solo si, $u - iv \in \text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^j$.

(4) (c) Supongamos que $B = \{u_1 + iv_1, \dots, u_m + iv_m\}$ es una base de $\text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \lambda \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^j$. Veamos que los vectores de \bar{B} son \mathbb{C} -linealmente independientes. Pongamos

$$\sum_{j=1}^m (a_j + b_j i)(u_j - iv_j) = 0.$$

Se tiene

$$\sum_{j=1}^m (a_j - b_j i)(u_j + iv_j) = 0,$$

y por ser los vectores de B linealmente independiente, $a_j - b_j i = 0$, para $j = 1, \dots, m$. Así $a_j + b_j i = 0$, para $j = 1, \dots, m$. Veamos que \bar{B} genera $\text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^j$. En efecto, si $u + iv \in \text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^j$, entonces $u - iv \in \text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \lambda \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^j$ y por tanto existen $a_j + b_j i \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, m$, tales que

$$u - iv = \sum_{j=1}^m (a_j + b_j i)(u_j + iv_j),$$

de donde se sigue que

$$u + iv = \sum_{j=1}^m (a_j - b_j i)(u_j - iv_j).$$

Demostración. (1) La columna $E = \{u_1 + iv_1, \dots, u_s + iv_s\}$ define un bloque elemental de Jordan de orden s en la matriz de Jordan de $f_{\mathbb{C}}$ y por tanto

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{C}}(u_1 + iv_1) &= (\alpha + \beta i)(u_1 + iv_1), \\ f_{\mathbb{C}}(u_j + iv_j) &= (\alpha + \beta i)(u_j + iv_j) + (u_{j-1} + iv_{j-1}), \end{aligned}$$

para $j = 2, \dots, s$.

Pongamos $\overline{E} = \{u_1 - iv_1, \dots, u_s - iv_s\}$. Por la proposición 3.3 (4), se tiene que $\alpha - \beta i$ es un autovalor de $f_{\mathbb{C}}$ y además

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{C}}(u_1 - iv_1) &= (\alpha - \beta i)(u_1 - iv_1), \\ f_{\mathbb{C}}(u_j - iv_j) &= (\alpha - \beta i)(u_j - iv_j) + (u_{j-1} - iv_{j-1}), \end{aligned}$$

para $j = 2, \dots, s$. Se tiene

$$\begin{aligned} u_j &= \frac{1}{2}((u_j + iv_j) + (u_j - iv_j)), \\ v_j &= \frac{1}{2i}((u_j + iv_j) - (u_j - iv_j)). \end{aligned} \tag{2}$$

Veamos que los vectores $u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s \in V$ son \mathbb{R} -linealmente independientes. Pongamos

$$\sum_{j=1}^s a_j u_j + \sum_{j=1}^s b_j v_j = 0, \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo las expresiones (2) de u_j y v_j , obtenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^s \frac{a_j}{2} ((u_j + iv_j) + (u_j - iv_j)) + \sum_{j=1}^s \frac{b_j}{2i} ((u_j + iv_j) - (u_j - iv_j)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \left((a_j + \frac{b_j}{i})(u_j + iv_j) + (a_j - \frac{b_j}{i})(u_j - iv_j) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s ((a_j - b_j i)(u_j + iv_j) + (a_j + b_j i)(u_j - iv_j)) = 0. \end{aligned}$$

Dado que $E \subset \text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \mu \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^s$ y $\overline{E} \subset \text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \overline{\mu} \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^s$ y que por el lema 2.29,

$$\text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \mu \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^s \cap \text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \overline{\mu} \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^s = \{0\},$$

se tiene que $E \cup \overline{E}$ es un conjunto de vectores \mathbb{C} -linealmente independientes. Así, $a_j - b_j i = 0$ para $j = 1, \dots, s$, de donde se deduce que $a_j = b_j = 0$ para $j = 1, \dots, s$.

(2) Puesto que $f_{\mathbb{C}}(u_1 + iv_1) = \mu(u_1 + iv_1)$,

$$f(v_1) = \alpha v_1 + \beta u_1, \quad f(u_1) = -\beta v_1 + \alpha u_1,$$

y como $f_{\mathbb{C}}(u_j + iv_j) = \mu(u_j + iv_j) + u_{j-1} + iv_{j-1}$, para $j = 2, \dots, s$, entonces

$$f(v_j) = \alpha v_j + \beta u_j + v_{j-1}, \quad f(u_j) = -\beta v_j + \alpha u_j + u_{j-1}. \quad \square$$

Teorema 3.7. (Teorema de Jordan real) *Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y sea f un endomorfismo de V . Existe una base de Jordan real para f .*

Demostración. ([4, Teorema 6.9.2]) El polinomio característico de f puede escribirse de la forma

$$P_f(X) = (-1)^n \prod_{j=1}^{m_1} (X - \lambda_j)^{r_j} \prod_{j=1}^{m_2} (X - \mu_j)^{t_j}, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, \mu_j \in \mathbb{C} - \mathbb{R},$$

con $\lambda_j \neq \lambda_k$ y $\mu_j \neq \mu_k$, si $j \neq k$. Dado que $P_f(X) \in \mathbb{R}[X]$ y $\mu_j = \alpha_j + \beta_j i$ es una raíz de $P_f(X)$ entonces $\overline{\mu_j} = \alpha_j - \beta_j i$ es una raíz de $P_f(X)$. Pongamos $q_j(X) = (X - \mu_j)(X - \overline{\mu_j}) \in \mathbb{R}[X]$. Se tiene

$$P_f(X) = (-1)^n \prod_{j=1}^{m_1} (X - \lambda_j)^{r_j} \prod_{j=1}^{n_1} q_j(X)^{t_j}. \quad (3)$$

Por la proposición 2.30 se tiene

$$V = \left(\bigoplus_{j=1}^{m_1} \text{Nuc}(f - \lambda_j \text{id}_V)^{r_j} \right) \bigoplus \left(\bigoplus_{j=1}^{n_1} \text{Nuc} q_j(f)^{t_j} \right). \quad (4)$$

Por el corolario 2.26, $\dim_{\mathbb{R}} \text{Nuc}(f - \lambda_j \text{id}_V)^{r_j} = r_j$, para $j = 1, \dots, m_1$ y $\dim_{\mathbb{C}} \text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \mu_j \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{t_j} = t_j$; además si $B_{\mu_j} = \{u_{1j} + iv_{1j}, \dots, u_{t_j j} + iv_{t_j j}\}$ es una base de Jordan del endomorfismo $(f_{\mathbb{C}})_{\mu_j}$ restricción de $f_{\mathbb{C}}$ a $\text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \mu_j \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{t_j}$, razonando como en la proposición 3.6, el conjunto $B_{\mu_j, \overline{\mu_j}} = \{v_{1j}, u_{1j}, \dots, v_{t_j j}, u_{t_j j}\}$ es un conjunto de vectores de V linealmente independiente y $B_{\mu_j, \overline{\mu_j}}$ es una base de Jordan real del endomorfismo restricción de f a $\langle B_{\mu_j, \overline{\mu_j}} \rangle$. Veamos que $B_{\mu_j, \overline{\mu_j}} \subset \text{Nuc} q_j(f)^{t_j}$. En efecto,

$$\begin{aligned} q_j(f)^{t_j}(u_{kj}) &= \frac{1}{2} [q_j(f_{\mathbb{C}})^{t_j}(u_{kj} + iv_{kj}) + q_j(f_{\mathbb{C}})^{t_j}(u_{kj} - iv_{kj})] \\ &= \frac{1}{2} [(f_{\mathbb{C}} - \overline{\mu_j} \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{t_j} (f_{\mathbb{C}} - \mu_j \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{t_j} (u_{kj} + iv_{kj}) \\ &\quad + (f_{\mathbb{C}} - \mu_j \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{t_j} (f_{\mathbb{C}} - \overline{\mu_j} \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{t_j} (u_{kj} - iv_{kj})] = 0, \end{aligned}$$

para $k = 1, \dots, t_j$, puesto que $u_{kj} + iv_{kj} \in \text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \mu_j \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{t_j}$ y $u_{kj} - iv_{kj} \in \text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \overline{\mu_j} \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{t_j}$. Análogamente se prueba que $q_j(f)^{t_j}(v_{kj}) = 0$, para $k = 1, \dots, t_j$. Por tanto

$$2t_j \leq \dim \text{Nuc} q_j(f)^{t_j}. \quad (5)$$

Veamos que $B_{\mu_j, \overline{\mu_j}}$ es una base de $\text{Nuc} q_j(f)^{t_j}$, para $j = 1, \dots, n_1$. Por (3) y (4), se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m_1} r_j + \sum_{j=1}^{n_1} 2t_j &= \text{grad } P_f(X) = \dim V = \sum_{j=1}^{m_1} \dim \text{Nuc}(f - \lambda_j \text{id}_V)^{r_j} + \sum_{j=1}^{n_1} \dim \text{Nuc} q_j(f)^{t_j} \\ &= \sum_{j=1}^{m_1} r_j + \sum_{j=1}^{n_1} \dim \text{Nuc} q_j(f)^{t_j}. \end{aligned}$$

y utilizando (5) deducimos que $\dim \text{Nuc} q_j(f)^{t_j} = 2t_j$. Por tanto, $B_{\mu_j, \overline{\mu_j}}$ es una base de $\text{Nuc} q_j(f)^{t_j}$, para $j = 1, \dots, n_1$. Si B_{λ_j} una base de Jordan para f_{λ_j} para $i = 1, \dots, m_1$, una base de Jordan real para f es la base $B_{\lambda_1} \cup \dots \cup B_{\lambda_{m_1}} \cup B_{\mu_1, \overline{\mu_1}} \cup \dots \cup B_{\mu_{n_1}, \overline{\mu_{n_1}}}$. \square

Corolario 3.8. *Dada una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ existe una matriz de Jordan real J y una matriz regular $P \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A = P^{-1}JP$.*

Ejemplo 3.9. Consideremos la matriz real

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_{M_1}(X) = -X^3 + 6X^2 - 15X + 14 = (X - 2)(X - (2 + \sqrt{3}i))(X - (2 - \sqrt{3}i))$.

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación \mathbb{R} -lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es M_1 y $f_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ la aplicación \mathbb{C} -lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es M_1 . Se tiene

$$\text{Nuc}(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle (1, -1, 1) \rangle, \quad \text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - (2 + \sqrt{3}i) \text{id}_{\mathbb{C}^3}) = \langle (1, -\sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i) \rangle.$$

Si tomamos

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix},$$

la matriz J_1 es una forma de Jordan real de M_1 y se tiene $P_1^{-1}M_1P_1 = J_1$.

Ejemplo 3.10. Consideremos la matriz real

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_{M_2}(X) = (X^2 + 1)^2 = (X - i)^2(X + i)^2$. Si $f: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ es la aplicación \mathbb{C} -lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es M_2 , entonces

$$\text{Nuc}(f - i \text{id}_{\mathbb{C}^4}) = \langle (i, 0, 1, 0) \rangle, \quad \text{Nuc}(f - i \text{id}_{\mathbb{C}^4})^2 = \langle (i, 0, 1, 0), (0, 1 + i, 1, 2i) \rangle.$$

Dado que

$$(0, 1 + i, 1, 2i) \in \text{Nuc}(f - i \text{id}_{\mathbb{R}^4})^2 - \text{Nuc}(f - i \text{id}_{\mathbb{C}^4}), \quad (f - i \text{id}_{\mathbb{C}^4})(0, 1 + i, 1, 2i) = (i, 0, 1, 0) \in \text{Nuc}(f - i \text{id}_{\mathbb{C}^4}),$$

una base de Jordan para $(f_{\mathbb{C}})_i$ es

$$\{(i, 0, 1, 0), (0, 1 + i, 1, 2i)\}.$$

Si tomamos

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

la matriz J_2 es una forma de Jordan real de M_2 y se tiene $P_2^{-1}M_2P_2 = J_2$.

Ejemplo 3.11. Consideremos la matriz real

$$M_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & -2 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_{M_3}(X) = (X - 3)(X - (-2 + i))(X - (-2 - i))(X - (1 + 4i))(X - (1 - 4i))$. Sea $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ la aplicación \mathbb{R} -lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es M_3 y sea $f_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^5$ la aplicación \mathbb{C} -lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es M_3 . Se tiene

$$\begin{aligned} \text{Nuc}(f - 3 \text{id}_{\mathbb{R}^5}) &= \langle (1, 0, 0, 1, 1) \rangle, & \text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - (-2 + i) \text{id}_{\mathbb{C}^5}) &= \langle (-i, -i, -1, 0, 0) \rangle, \\ \text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - (1 + 4i) \text{id}_{\mathbb{C}^5}) &= \langle (0, -i, i, 1, 0) \rangle. \end{aligned}$$

Poniendo

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

la matriz J_3 es una forma de Jordan real de M_3 y se tiene $P_3^{-1}M_3P_3 = J_3$.

Ejemplo 3.12. Consideremos la matriz real

$$M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se tiene $P_{M_4}(X) = -(X-2)^3(X^2+2X+10) = -(X-2)^3(X-(-1+3i))(X-(-1-3i))$. Sea $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ la aplicación \mathbb{R} -lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es M_4 y sea $f_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^5$ la aplicación \mathbb{C} -lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es M_4 . Se tiene

$$\text{Nuc}(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^5}) = \langle (1, 0, 0, 0, 0) \rangle, \quad \text{Nuc}(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^5})^2 = \langle (1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, -1, 1, 1) \rangle,$$

$$\text{Nuc}(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^5})^3 = \langle (1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1) \rangle, \quad \text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - (-1 + 3i) \text{id}_{\mathbb{C}^5}) = \langle (-1, 1 - i, 0, 0, 1) \rangle.$$

Dado que $(0, 0, -1, 0, 0) \in \text{Nuc}(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^5})^3 - \text{Nuc}(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^5})^2$,

$$(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^5})(0, 0, -1, 0, 0) = (0, 0, -1, 1, 1) \in \text{Nuc}(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^5})^2 - \text{Nuc}(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^5}),$$

$$(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^5})(0, 0, -1, 1, 1) = (1, 0, 0, 0, 0) \in \text{Nuc}(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^5}).$$

Poniendo

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

la matriz J_4 es una forma de Jordan real de M_4 y se tiene $P_4^{-1}M_4P_4 = J_4$.

4. Espacios vectoriales euclídeos. Espacios vectoriales hermíticos

Definición 4.1. Sea V un espacio vectorial real. Un *producto escalar* en V es una aplicación $\sigma: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica

- (1) $\sigma(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 \sigma(v_1, w) + \lambda_2 \sigma(v_2, w)$, para todo $v_1, v_2, w \in V$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,
- (2) $\sigma(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 \sigma(v, w_1) + \lambda_2 \sigma(v, w_2)$, para todo $v, w_1, w_2 \in V$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,
- (3) $\sigma(v, w) = \sigma(w, v)$, para todo $v, w \in V$,
- (4) $\sigma(v, v) \geq 0$, para todo $v \in V$,
- (5) $\sigma(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0$.

Denotaremos $\sigma(u, v)$ por $u \cdot v$ y $v \cdot v$ por v^2 .

Un *espacio vectorial euclídeo* es un espacio vectorial real con un producto escalar.

Definición 4.2. Sea V un espacio vectorial complejo. Un *producto hermítico* en V es una aplicación $\sigma: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ que verifica

- (1) $\sigma(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 \sigma(v_1, w) + \lambda_2 \sigma(v_2, w)$, para todo $v_1, v_2, w \in V$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$,
- (2) $\sigma(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \bar{\lambda}_1 \sigma(v, w_1) + \bar{\lambda}_2 \sigma(v, w_2)$, para todo $v, w_1, w_2 \in V$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$,
- (3) $\sigma(v, w) = \overline{\sigma(w, v)}$, para todo $v, w \in V$,
- (4) $\sigma(v, v) \geq 0$, para todo $v \in V$,

$$(5) \quad \sigma(v, v) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0.$$

Denotaremos $\sigma(u, v)$ por $u \cdot v$ y $v \cdot v$ por v^2 .

Un *espacio vectorial hermítico* es un espacio vectorial complejo con un producto hermítico.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ denotaremos por $|\lambda|$ el módulo de λ , es decir el número real $\sqrt{\lambda\bar{\lambda}}$.

Definición 4.3. Sean V y V' espacios vectoriales euclídeos (resp. hermíticos). Una aplicación $f: V \rightarrow V'$ se dice que es una *isometría de espacios vectoriales euclídeos* (resp. *hermíticos*) si es un isomorfismo de espacios vectoriales reales (resp. complejos) y verifica

$$f(v) \cdot f(w) = v \cdot w, \quad v, w \in V$$

Si $V' = V$, entonces se dice que f es una *transformación ortogonal* (resp. *unitaria*) de V .

Ejemplos 4.4. (1) La aplicación $\sigma: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\sigma((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

es un producto escalar en \mathbb{R}^n que llamaremos *producto escalar usual*. Así, \mathbb{R}^n con el producto escalar usual es un espacio vectorial euclídeo.

(2) La aplicación $\sigma: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$\sigma((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n,$$

es un producto hermítico en \mathbb{C}^n que llamaremos *producto hermítico usual*. Así, \mathbb{C}^n con el producto hermítico usual es un espacio vectorial hermítico.

Proposición 4.5. Sea V un espacio vectorial euclídeo y $V_{\mathbb{C}}$ su complejificado. El espacio vectorial complejo $V_{\mathbb{C}}$ es un espacio vectorial hermítico con el siguiente producto hermítico:

$$(u + iv) \cdot (u' + iv') = u \cdot u' + v \cdot v' + (v \cdot u' - u \cdot v')i, \quad u + iv, u' + iv' \in V_{\mathbb{C}}$$

Demostración. Es fácil probar que se verifican las condiciones (1), (2) y (3) de la definición de producto hermítico. Veamos (4) y (5):

$$(u + iv) \cdot (u + iv) = u^2 + v^2 + (v \cdot u - u \cdot v)i = u^2 + v^2 \geq 0,$$

para todo $u + iv \in V_{\mathbb{C}}$. Además, $u^2 + v^2 = 0$, si y sólo si, $u^2 = 0$ y $v^2 = 0$, y por ser V un espacio vectorial euclídeo se tiene $u = 0$ y $v = 0$. \square

Las dos siguientes proposiciones se prueban fácilmente.

Proposición 4.6. Todo subespacio de un espacio vectorial euclídeo (resp. hermítico) es un espacio vectorial euclídeo (resp. hermítico), con el producto escalar (resp. hermítico) inducido.

Proposición 4.7. Si consideramos en \mathbb{R}^n y en \mathbb{C}^n el producto escalar usual y el producto hermítico usual, respectivamente, la aplicación $\psi: \mathbb{R}_{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $\psi((\alpha_1, \dots, \alpha_n) + i(\beta_1, \dots, \beta_n)) = (\alpha_1 + \beta_1 i, \dots, \alpha_n + \beta_n i)$ es una isometría de espacios vectoriales hermíticos.

Definición 4.8. Sea V un espacio vectorial euclídeo (resp. hermítico). Se dice que los vectores u y v son *ortogonales* si $u \cdot v = 0$.

Definición 4.9. Sea V un espacio vectorial euclídeo (resp. hermítico) y v un vector de V . Se llama *norma* o *longitud* del vector v , y se denota por $\|v\|$ al número real

$$\|v\| = \sqrt{v^2}$$

Se dice que un vector v es *unitario* si $\|v\| = 1$.

Definición 4.10. Sea V un espacio vectorial euclídeo (resp. hermitico). Se dice que la base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V es *ortogonal* si $v_i \cdot v_j = 0$, para todo $i \neq j$. Se dice que la base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es *ortonormal*, si es ortogonal y los vectores $v_i, i = 1, \dots, n$, son unitarios.

Ejemplo 4.11. La base canónica es una base ortonormal de \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n) con el producto escalar (resp. hermitico) usual.

Proposición 4.12. Sea V un espacio vectorial euclídeo (resp. hermitico). Si $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ es un conjunto de vectores no nulos de V ortogonales dos a dos, es decir tales que $v_i \cdot v_j = 0$ si $i \neq j$, entonces S es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Demostración. Se tiene

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \right) \cdot v_j = 0, \quad j = 1, \dots, r \Rightarrow \lambda_j (v_j \cdot v_j) = 0, \quad j = 1, \dots, r \Rightarrow \lambda_j = 0, \quad j = 1, \dots, r. \quad \square$$

El método de ortogonalización de Gram-Schmidt permite construir una base ortogonal de un espacio vectorial euclídeo V a partir de una base cualquiera de V ; este proceso se puede aplicar también a los espacios vectoriales hermiticos, tal como se prueba en el siguiente lema.

Lema 4.13. (Método de ortogonalización de Gram-Schmidt) Sea V un espacio vectorial euclídeo (resp. hermitico). Si u_1, \dots, u_r son vectores linealmente independientes, entonces los vectores que se obtienen de la forma:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 \\ v_3 &= u_3 - \frac{u_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{u_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 \\ &\vdots \\ v_r &= u_r - \frac{u_r \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{u_r \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 - \dots - \frac{u_r \cdot v_{r-1}}{v_{r-1} \cdot v_{r-1}} v_{r-1} \end{aligned}$$

son linealmente independientes, ortogonales dos a dos y verifican

$$\langle v_1, \dots, v_j \rangle = \langle u_1, \dots, u_j \rangle, \quad j = 1, \dots, r.$$

Demostración. Razonaremos por inducción sobre el número r de vectores linealmente independientes. Para $r = 1$ es trivial. Supongamos $r \geq 2$ y que el resultado es cierto para $r - 1$. Sean u_1, \dots, u_r vectores linealmente independientes. Por hipótesis de inducción, los vectores

$$v_j = u_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{u_j \cdot v_i}{v_i \cdot v_i} v_i, \quad j = 1, \dots, r - 1,$$

son linealmente independientes, ortogonales dos a dos y verifican

$$\langle v_1, \dots, v_j \rangle = \langle u_1, \dots, u_j \rangle, \quad j = 1, \dots, r - 1.$$

Pongamos

$$v_r = u_r - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{u_r \cdot v_i}{v_i \cdot v_i} v_i.$$

Se tiene que $v_r \neq 0$ y además

$$v_r \cdot v_j = u_r \cdot v_j - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{u_r \cdot v_i}{v_i \cdot v_i} v_i \cdot v_j = u_r \cdot v_j - \frac{u_r \cdot v_j}{v_j \cdot v_j} v_j \cdot v_j = 0, \quad j = 1, \dots, r - 1.$$

Por la proposición 4.12, los vectores v_1, \dots, v_r son linealmente independientes y $v_1, \dots, v_r \in \langle u_1, \dots, u_r \rangle$, luego $\langle v_1, \dots, v_r \rangle = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$. \square

Teorema 4.14. *Todo espacio vectorial euclídeo (resp. hermítico) (V, σ) de dimensión finita tiene una base ortonormal.*

Demostración. Si $\dim V = n$, aplicando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a una base cualquiera $\{u_1, \dots, u_n\}$ de V , se obtiene una base ortogonal $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V . Poniendo

$$w_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}, \quad i = 1, \dots, n,$$

se obtiene que la base $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ es una base ortonormal de V . □

Definición 4.15. Sea V un espacio vectorial euclídeo (resp. hermítico) de dimensión finita y sea U un subespacio de V . El subespacio

$$U^\perp = \{v \in V \mid \sigma(u, v) = 0, \forall u \in U\}$$

se llama *complemento ortogonal* de U .

Definición 4.16. Sea (V, σ) un espacio vectorial euclídeo (resp. hermítico). Se dice que el subespacio U es *ortogonal* al subespacio W si $u \cdot w = 0$, para todo $u \in U$ y para todo $w \in W$.

Definición 4.17. Sea V un espacio vectorial euclídeo (resp. hermítico) y sean U_1, \dots, U_r subespacios de V . Se dice que la suma $U_1 + \dots + U_r$ es una *suma ortogonal* y se denota por $U_1 \perp \dots \perp U_r$, si verifica

- (1) $U_1 + \dots + U_r = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$,
- (2) U_i es ortogonal a U_j para todo $i \neq j$.

Proposición 4.18. *Sea V un espacio vectorial euclídeo (resp. hermítico) de dimensión finita y sea U un subespacio de V . Entonces $V = U \perp U^\perp$.*

Demostración. Veamos que $V = U \oplus U^\perp$. Sea $B' = \{v_1, \dots, v_r\}$ una base ortonormal de U . Completamos B' hasta obtener una base B'' de V y le aplicamos a B'' el método de ortogonalización de Gram-Schmidt. Obtenemos la base ortogonal $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V . Se tiene que $v_j \in U^\perp$, para $j = r + 1, \dots, n$. Por tanto, si $v \in V$,

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_r v_r + x_{r+1} v_{r+1} + \dots + x_n v_n \in U + U^\perp.$$

Además, si $v \in U \cap U^\perp$, entonces $v^2 = 0$ y por tanto $v = 0$. □

5. Transformaciones ortogonales. Transformaciones unitarias

Proposición 5.1. *Sea V un espacio vectorial euclídeo (resp. hermítico) de dimensión finita. Se tiene que $f: V \rightarrow V$ es una transformación ortogonal (resp. unitaria) si, y sólo si, f es una aplicación \mathbb{R} -lineal (resp. \mathbb{C} -lineal) que verifica*

$$f(v) \cdot f(w) = v \cdot w, \quad v, w \in V.$$

Demostración. Veamos que si f es una aplicación lineal que verifica la condición anterior entonces es inyectiva. Sea $v \in V$ tal que $f(v) = 0$. Se tiene

$$0 = f(v) \cdot f(v) = v^2,$$

y entonces $v = 0$. □

Proposición 5.2. *Sea V un espacio vectorial euclídeo y sea $V_{\mathbb{C}}$ su complejificado. Si $f: V \rightarrow V$ es una transformación ortogonal, entonces la aplicación $f_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$, $f_{\mathbb{C}}(u + iv) = f(u) + if(v)$, es una transformación unitaria.*

Demostración. La aplicación $f_{\mathbb{C}}$ es \mathbb{C} -lineal y verifica

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{C}}(u + iv) \cdot f_{\mathbb{C}}(u' + iv') &= (f(u) + if(v)) \cdot (f(u') + if(v')) \\ &= f(u) \cdot f(u') + f(v) \cdot f(v') \\ &\quad + i(f(v) \cdot f(u') - f(u) \cdot f(v')) \\ &= (u \cdot u' + v \cdot v') + i(v \cdot u' - u \cdot v') \\ &= (u + iv) \cdot (u' + iv') \end{aligned}$$

Es inmediato que $f_{\mathbb{C}}$ es inyectiva por serlo f . □

Definición 5.3. Si $A = (a_{jk}) \in M_n(\mathbb{R})$, se dice que A es una *matriz ortogonal* si $A^{-1} = A^t$. Si $A = (a_{jk}) \in M_n(\mathbb{C})$, se dice que A es una *matriz unitaria* si $A^{-1} = \bar{A}^t$, siendo $\bar{A} = (\bar{a}_{jk})$.

Teorema 5.4. (1) *Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita. Una aplicación \mathbb{R} -lineal $f: V \rightarrow V$ es una transformación ortogonal si, y sólo si, la matriz asociada a f en una base ortonormal es ortogonal.*

(2) *Sea V un espacio vectorial hermitico de dimensión finita. Una aplicación \mathbb{C} -lineal $f: V \rightarrow V$ es una transformación unitaria si, y sólo si, la matriz asociada a f en una base ortonormal es unitaria.*

Demostración. Veamos (2). Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V . La aplicación f es una transformación unitaria si, y sólo si, $f(v_i) \cdot f(v_j) = v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$ con $i, j = \{1, \dots, n\}$. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz asociada a la aplicación f respecto a la base B , es decir

$$f(v_i) = \sum_{k=1}^n a_{ki} v_k, \quad i = 1, \dots, n.$$

Se tiene

$$f(v_i) \cdot f(v_j) = \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} v_k \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^n a_{lj} v_l \right) = \sum_{k,l=1}^n a_{ki} \bar{a}_{lj} v_k \cdot v_l = \sum_{k=1}^n a_{ki} \cdot \bar{a}_{kj}.$$

Entonces, $f(v_i) \cdot f(v_j) = v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$ si, y sólo si, $A^t \cdot \bar{A} = I$, es decir, $A^{-1} = \bar{A}^t$.

De forma análoga se prueba (1). □

Definición 5.5. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K y sea $f: V \rightarrow V$ una aplicación lineal. Se llama *determinante* de f , y se denota por $\det(f)$, al determinante de la matriz asociada a f en una base B de V , es decir

$$\det(f) = \det(f_B).$$

Obsérvese que por el ejemplo 2.6, $\det(f)$ no depende de la base considerada en V .

Proposición 5.6. *Si f es una transformación ortogonal de V , entonces el determinante de f es 1 o -1 .*

Demostración. Sea B una base ortonormal de V . Por el teorema anterior, f_B es una matriz ortogonal. Así,

$$f_B^t f_B = I,$$

y por tanto, $(\det f)^2 = (\det f_B)^2 = 1$. □

Definición 5.7. Sea f una transformación ortogonal de V . Se dice que f es un *giro* o una *rotación* si $\det f = 1$. Se dice que f es una *reflexión* si $\det f = -1$.

Si V es un espacio euclídeo de dimensión finita denotaremos por $\mathcal{O}(V)$ el conjunto de las transformaciones ortogonales de V , por $\mathcal{O}^+(V)$ el conjunto de los giros de V y por $\mathcal{O}^-(V)$ el conjunto de las reflexiones de V . Los conjuntos $\mathcal{O}(V)$ y $\mathcal{O}^+(V)$ son grupos con la operación composición.

Teorema 5.16. (Teorema espectral para transformaciones unitarias) *Sea V un espacio vectorial hermítico y f una transformación unitaria de V . Existe una base ortonormal de V tal que la matriz asociada a f respecto a esa base es una matriz diagonal.*

Demostración. Razonaremos por inducción sobre la dimensión n de V . Si $n = 1$, el teorema es cierto. Supongamos que $n > 1$ y sea λ_1 un autovalor de f . Si $\text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V) = V$, entonces $f = \lambda_1 \text{id}_V$ y la matriz asociada a f respecto a cualquier base de V es diagonal. Si $\text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V) \neq V$, entonces $1 \leq \dim \text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V)^\perp < n$. Por el lema 5.15,

$$f(\text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V)^\perp) = \text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V)^\perp.$$

Pongamos

$$f_2 = f|_{\text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V)^\perp}.$$

Dado que la aplicación f_2 es unitaria, por hipótesis de inducción existe una base ortonormal B_2 de $\text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V)^\perp$ tal que la matriz asociada a f_2 respecto a B_2 es una matriz diagonal. Si B_1 es una base ortonormal de $\text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V)$ y $f_1 = f|_{\text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V)}$, entonces

$$(f_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad (f_2)_{B_2} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_r \end{pmatrix}.$$

Dado que $V = \text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V) \perp \text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V)^\perp$, la base $B_1 \cup B_2$ es una base ortonormal de V respecto a la cual la matriz asociada a f es diagonal. \square

Corolario 5.17. *Sea V un espacio vectorial hermítico y f una transformación unitaria de V . Si*

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_s)^{r_s}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad \text{si } i \neq j,$$

entonces

$$V = \text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V) \perp \dots \perp \text{Nuc}(f - \lambda_s \text{id}_V).$$

Demostración. Dado que f es diagonalizable, por el teorema 2.35

$$V = \text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V) \bigoplus \dots \bigoplus \text{Nuc}(f - \lambda_s \text{id}_V). \quad (6)$$

Sea B es una base ortonormal de vectores propios de V . La suma de subespacios (6) es ortogonal porque, para $i = 1, \dots, s$, el subespacio $\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)$ tiene una base ortonormal B_i tal que $B_i \subset B$. \square

Observación 5.18. Si f es una transformación unitaria de V , para encontrar una base ortonormal de V respecto a la cual la matriz asociada a f sea diagonal, calculamos una base ortonormal de cada uno de los subespacios propios asociados a sus autovalores; la unión de todas esas bases da una base ortonormal de V respecto a la cual la matriz asociada a f es diagonal.

Corolario 5.19. *Toda matriz unitaria es diagonalizable.*

Demostración. Sea $A \in M_n(\mathbb{C}^n)$ una matriz unitaria y sea f el endomorfismo de \mathbb{C}^n cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A . Dado que f es una transformación unitaria, existe una base ortonormal B de \mathbb{C}^n tal que la matriz f_B es diagonal. Dado que las matrices A y f_B son congruentes, A es diagonalizable. \square

Corolario 5.20. *Sea V un espacio vectorial euclídeo y sea $V_{\mathbb{C}}$ su complejificado. Sea f una transformación ortogonal de V tal que*

$$P_f(X) = (-1)^n (X - 1)^r (X + 1)^s \prod_{j=1}^{n_1} (X - \mu_j)^{t_j} \prod_{j=1}^{n_1} (X - \bar{\mu}_j)^{t_j},$$

y entonces $(f_{\mathbb{C}} - \mu_j \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})(v) \in \text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \overline{\mu_j} \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{t_j} = \text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \overline{\mu_j} \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})$. Por tanto

$$q_j(f)(v) = (f_{\mathbb{C}} - \overline{\mu_j} \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})(f_{\mathbb{C}} - \mu_j \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})(v) = 0.$$

Se tiene

$$V = \text{Nuc}(f - \text{id}_V) \oplus \text{Nuc}(f + \text{id}_V) \oplus \text{Nuc } q_1(f) \oplus \dots \oplus \text{Nuc } q_{n_1}(f),$$

donde

$$\dim \text{Nuc}(f - \text{id}_V) = r, \quad \dim \text{Nuc}(f + \text{id}_V) = s, \quad \dim \text{Nuc } q_j(f) = 2t_j, \quad j = 1, \dots, n_1.$$

Sea B_1 una base de $\text{Nuc}(f - \text{id}_V)$, B_{-1} una base de $\text{Nuc}(f + \text{id}_V)$. Si $B_{\mu_j} = \{u_{1j} + iv_{1j}, \dots, u_{t_j j} + iv_{t_j j}\}$ es una base de $\text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \mu_j \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})$, para $j = 1, \dots, n_1$, por el teorema 3.7, $B_{\mu_j, \overline{\mu_j}} = \{v_{1j}, u_{1j}, \dots, v_{t_j j}, u_{t_j j}\}$ es base de Jordan real para $f|_{\text{Nuc } q_j(f)}$, para $j = 1, \dots, n_1$. La matriz asociada a f respecto a la base

$$B = B_1 \cup B_{-1} \cup B_{\mu_1, \overline{\mu_1}} \cup \dots \cup B_{\mu_{n_1}, \overline{\mu_{n_1}}}$$

es la matriz de Jordan (7). □

Proposición 6.2. *Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión $n \geq 1$ y sea f una transformación ortogonal de V . Sea*

$$P_f(X) = (-1)^n (X - 1)^r (X + 1)^s \prod_{j=1}^{n_1} (X - \mu_j)^{t_j} \prod_{j=1}^{n_1} (X - \overline{\mu_j})^{t_j},$$

donde $\mu_j \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, con $\mu_j \neq \mu_k$, si $j \neq k$. Se tiene

$$V = \text{Nuc}(f - \text{id}_V) \perp \text{Nuc}(f + \text{id}_V) \perp \text{Nuc } q_1(f) \perp \dots \perp \text{Nuc } q_{n_1}(f),$$

Demostración. Por la proposición anterior

$$V = \text{Nuc}(f - \text{id}_V) \oplus \text{Nuc}(f + \text{id}_V) \oplus \text{Nuc } q_1(f) \oplus \dots \oplus \text{Nuc } q_{n_1}(f).$$

Sea $B_{\mu_j} = \{u_{1j} + iv_{1j}, \dots, u_{t_j j} + iv_{t_j j}\}$ una base del subespacio $\text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \mu_j \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})$ y $B_{\overline{\mu_j}} = \{u_{1j} - iv_{1j}, \dots, u_{t_j j} - iv_{t_j j}\}$ la correspondiente base del subespacio $\text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \overline{\mu_j} \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})$, para $j = 1, \dots, n_1$. El conjunto

$$B_{\mu_j, \overline{\mu_j}} = \{v_{1j}, u_{1j}, \dots, v_{t_j j}, u_{t_j j}\},$$

es una base de $\text{Nuc } q_j(f)$, para $j = 1, \dots, n_1$.

El subespacio $\text{Nuc}(f - \text{id}_V)$ es ortogonal al subespacio $\text{Nuc}(f + \text{id}_V)$, puesto que el subespacios $\text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})$ es ortogonal al subespacio $\text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} + \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})$.

Veamos que el subespacio $\text{Nuc}(f - \text{id}_V)$ es ortogonal al subespacio $\text{Nuc } q_j(f)$, para $j = 1, \dots, n_1$. Por ser el subespacio $\text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})$ ortogonal al subespacio $\text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \mu_j \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})$, si $v \in \text{Nuc}(f - \text{id}_V)$ y $u_{hj} + iv_{hj} \in \text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \mu_j \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})$, entonces $v \cdot (u_{hj} + iv_{hj}) = 0$, para $h = 1, \dots, t_j$ y $j = 1, \dots, n_1$, luego $v \cdot u_{kj} = 0$ y $v \cdot v_{kj} = 0$, para $k = 1, \dots, t_j$ y $j = 1, \dots, n_1$. De forma análoga se prueba que el subespacio $\text{Nuc}(f + \text{id}_V)$ es ortogonal al subespacio $\text{Nuc } q_j(f)$, para $j = 1, \dots, n_1$.

Finalmente probemos que el subespacio $\text{Nuc } q_j(f)$ es ortogonal al subespacio $\text{Nuc } q_k(f)$, para $j \neq k$. Dado que para $j \neq k$ el subespacio $\text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \mu_j \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})$ ortogonal a los subespacios $\text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \mu_k \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})$ y $\text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \overline{\mu_k} \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})$, se tiene

$$(u_{hj} + iv_{hj}) \cdot (u_{lk} + iv_{lk}) = 0, \quad (u_{hj} + iv_{hj}) \cdot (u_{lk} - iv_{lk}) = 0, \quad j \neq k.$$

Así,

$$u_{hj} \cdot u_{lk} = 0, \quad v_{hj} \cdot v_{lk} = 0, \quad u_{hj} \cdot v_{lk} = 0, \quad v_{hj} \cdot u_{lk} = 0$$

para todo $j \neq k$. □

Teorema 6.3. Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión $n \geq 1$ y sea f una transformación ortogonal de V . Sea

$$P_f(X) = (-1)^n (X-1)^r (X+1)^s \prod_{j=1}^{n_1} (X-\mu_j)^{t_j} \prod_{j=1}^{n_1} (X-\bar{\mu}_j)^{t_j},$$

donde $\mu_j = \alpha_j + \beta_j i \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, con $\mu_j \neq \mu_k$, si $j \neq k$ y $|\mu_j| = \alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1$, para $j = 1, \dots, n_1$. Existe una base ortonormal de V tal que la matriz asociada a f respecto a esta base es la matriz de Jordan real (7).

Demostración. Por la proposición anterior

$$V = \text{Nuc}(f - \text{id}_V) \perp \text{Nuc}(f + \text{id}_V) \perp \text{Nuc } q_1(f) \perp \dots \perp \text{Nuc } q_{n_1}(f).$$

Sea $B_{\mu_j} = \{u_{1j} + iv_{1j}, \dots, u_{t_j j} + iv_{t_j j}\}$ una base ortogonal del espacio $\text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \mu_j \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})$, para $j = 1, \dots, n_1$. Probemos que el conjunto $B_{\mu_j, \bar{\mu}_j} = \{v_{1j}, u_{1j}, \dots, v_{t_j j}, u_{t_j j}\}$ es una base ortogonal de $\text{Nuc } q_j(f)$. Se tiene

$$(u_{hj} + iv_{hj}) \cdot (u_{lj} + iv_{lj}) = 0, \quad h \neq l, \quad h, l = 1, \dots, t_j.$$

Equivalentemente,

$$u_{hj} \cdot u_{lj} + v_{hj} \cdot v_{lj} = 0, \quad -u_{hj} \cdot v_{lj} + v_{hj} \cdot u_{lj} = 0, \quad h \neq l, \quad h, l = 1, \dots, t_j. \quad (8)$$

Dado que conjunto $B_{\bar{\mu}_j} = \{u_{1j} - iv_{1j}, \dots, u_{t_j j} - iv_{t_j j}\}$ es una base ortogonal de $\text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \bar{\mu}_j \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})$ y que el subespacio $\text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \mu_j \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})$ es ortogonal al subespacio $\text{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \bar{\mu}_j \text{id}_{V_{\mathbb{C}}})$, se tiene

$$(u_{hj} + iv_{hj}) \cdot (u_{lj} - iv_{lj}) = 0, \quad h, l = 1, \dots, t_j$$

Equivalentemente,

$$u_{hj} \cdot u_{lj} - v_{hj} \cdot v_{lj} = 0, \quad u_{hj} \cdot v_{lj} + v_{hj} \cdot u_{lj} = 0, \quad (9)$$

para $h \neq l$ y $u_{hj} \cdot v_{hj} = 0$ y $\|u_{hj}\| = \|v_{hj}\|$, para $h = 1, \dots, t_j$. De las identidades (8) y (9) se sigue

$$u_{hj} \cdot v_{hj} = 0, \quad u_{hj} \cdot u_{lj} = 0, \quad v_{hj} \cdot v_{lj} = 0, \quad u_{hj} \cdot v_{lj} = 0, \quad h, l = 1, \dots, t_j,$$

y $\|u_{hj}\| = \|v_{hj}\|$, para $h = 1, \dots, t_j$.

Pongamos

$$u'_{hj} = \frac{u_{hj}}{\|u_{hj}\|}, \quad v'_{hj} = \frac{v_{hj}}{\|v_{hj}\|},$$

para $h = 1, \dots, t_j$. Por el teorema 3.7 el conjunto $B_{\mu_j, \bar{\mu}_j}$ es una base de Jordan real para $f|_{\text{Nuc } q_j(f)}$. Dado que además $B_{\mu_j, \bar{\mu}_j}$ es una base ortogonal de $\text{Nuc } q_j(f)$ y que $\|u_{hj}\| = \|v_{hj}\|$, para $h = 1, \dots, t_j$, la base

$$B'_{\mu_j, \bar{\mu}_j} = \{v'_{1j}, u'_{1j}, \dots, v'_{t_j j}, u'_{t_j j}\}$$

es ortonormal y es una base de Jordan real para $f|_{\text{Nuc } q_j(f)}$. En efecto,

$$(f|_{\text{Nuc } q_j(f)})_{B'_{\mu_j, \bar{\mu}_j}} = (f|_{\text{Nuc } q_j(f)})_{B_{\mu_j, \bar{\mu}_j}} = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j & & & 0 \\ \beta_j & \alpha_j & & & \\ & & t_j & \ddots & \\ & & & & \alpha_j & -\beta_j \\ 0 & & & & \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$

Si B_1 es una base ortonormal de $\text{Nuc}(f - \text{id}_V)$ y B_{-1} es una base ortonormal de $\text{Nuc}(f + \text{id}_V)$, entonces

$$B = B_1 \cup B_{-1} \cup B'_{\mu_1, \bar{\mu}_1} \cup \dots \cup B'_{\mu_{n_1}, \bar{\mu}_{n_1}}$$

es una base ortonormal de V tal que la matriz asociada a f respecto a B es la matriz (3.1). \square

Corolario 6.4. Sea V un plano vectorial euclídeo y f una transformación ortogonal de V . Existe una base ortonormal de V tal que la matriz asociada a f respecto a esa base es una de las dos siguientes matrices

$$(i) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (ii) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

donde $a^2 + b^2 = 1$.

Observación 6.5. En el caso (i) f es un giro; si además V es un plano vectorial euclídeo orientado ([1],[6]) y la matriz (i) es la matriz asociada a f respecto a una base ortonormal de orientación positiva, se dice que es f es el giro de ángulo α , siendo α un número real, $0 \leq \alpha < 2\pi$, tal que $\cos \alpha = a$ y $\sin \alpha = b$. Si la matriz asociada a f respecto a una base ortonormal es la matriz (ii) del corolario anterior, entonces f es la simetría respecto a la recta vectorial $\text{Nuc}(f - \text{id}_V)$.

Corolario 6.6. Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 y f una transformación ortogonal de V . Existe una base ortonormal $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de V tal que la matriz asociada a f respecto a B es una de las siguientes matrices

$$(i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \quad (ii) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

donde $a^2 + b^2 = 1$.

Observación 6.7. En el caso (i) f es un giro. Si $a = 1$, entonces $f = \text{id}_V$. Si $a = -1$, entonces se dice que f es el giro de eje $\langle v_1 \rangle = \text{Nuc}(f - \text{id}_V)$ y ángulo π . Si $a \neq \pm 1$, entonces $f = \text{id}_{\langle v_1 \rangle} \perp G$, donde G es el giro cuya matriz asociada respecto a la base $\{v_2, v_3\}$ de $\text{Nuc}(f - \text{id}_V)^\perp$ es

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

y se dice que f es un giro de eje $\text{Nuc}(f - \text{id}_V)$. En la práctica cuando V está orientado ([1],[6]), se llama *giro de eje orientado* $\langle w \rangle$ y *ángulo* α a la aplicación $f = \text{id}_{\langle w \rangle} \perp G_\alpha$, donde G_α es el giro de ángulo α en el plano $\langle w \rangle^\perp$ orientado por una base $\{u, v\}$ tal que la base $\{u, v, w\}$ es de orientación positiva.

En el caso (ii) f es una reflexión. Si $a = -1$, entonces f es la simetría central $-\text{id}_V$. Si $a = 1$, entonces f es la simetría respecto al plano $\langle v_2, v_3 \rangle$, Si $a \neq \pm 1$, entonces f es la composición de la simetría respecto al plano $\langle v_2, v_3 \rangle = \text{Nuc}(f + \text{id}_V)^\perp$ y el giro $f = \text{id}_{\langle v_1 \rangle} \perp G$, siendo G el giro del plano $\langle v_2, v_3 \rangle = \text{Nuc}(f + \text{id}_V)^\perp$ cuya matriz asociada en la base $\{v_2, v_3\}$ es

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Definición 6.8. Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión 4. Se dice que una transformación ortogonal f de V es un *giro simple* si existe un subespacio U de dimensión 2 tal que $f(u) = u$ para todo $u \in U$ y $f|_{U^\perp} \in \mathcal{O}^+(U^\perp) - \{\text{id}_{U^\perp}\}$, es decir

$$f = 1_U \perp G, \quad G \in \mathcal{O}^+(U^\perp), \quad G \neq \text{id}_{U^\perp}.$$

Se dice que una transformación ortogonal f de V es un *giro doble* si existe un subespacio U de dimensión 2 y existen giros $G \in \mathcal{O}^+(U)$, $G \neq \text{id}_U$, $G' \in \mathcal{O}^+(U^\perp)$, $G' \neq \text{id}_{U^\perp}$, tales que $f = G \perp G'$.

Corolario 6.9. Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión 4 y $f: V \rightarrow V$ una transformación ortogonal. Existe una base ortonormal $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de V tal que la matriz asociada a f respecto a B es una de las siguientes matrices

$$(i) \begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix}, \quad (ii) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

donde $a^2 + b^2 = 1$ y $c^2 + d^2 = 1$.

Observación 6.10. En el caso (i), f es un giro. Se tiene que $f = G_1 \perp G_2$, siendo G_1 y G_2 los giros en los planos $\langle v_1, v_2 \rangle$ y $\langle v_3, v_4 \rangle$, respectivamente, cuyas matrices asociadas en las bases $B_1 = \{v_1, v_2\}$ y $B_2 = \{v_3, v_4\}$ son

$$(G_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (G_2)_{B_2} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}.$$

Si $G_1 = \text{id}_U$ y $G_2 \neq \text{id}_{U^\perp}$ o $G_1 \neq \text{id}_U$ y $G_2 = \text{id}_{U^\perp}$, entonces f es un giro simple. Si $G_1 \neq \text{id}_U$ y $G_2 \neq \text{id}_{U^\perp}$, entonces f es un giro doble. Teniendo en cuenta que

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix},$$

se tiene que f es la composición de dos giros simples

$$f = (G_1 \perp \text{id}_{\langle v_3, v_4 \rangle}) \circ (\text{id}_{\langle v_1, v_2 \rangle} \perp G_2).$$

En el caso (ii), f es una reflexión. Si $a = -1$, entonces f es la simetría respecto al subespacio $\langle v_1 \rangle$. Si $a = 1$, entonces f es la simetría respecto al hiperplano vectorial $\langle v_1, v_3, v_4 \rangle$. Si $a \neq \pm 1$, teniendo en cuenta que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix},$$

se tiene que f es la composición de la simetría respecto al hiperplano al $\langle v_1, v_3, v_4 \rangle = \text{Nuc}(f + \text{id}_V)^\perp$ y el giro simple $\text{id}_{\langle v_1, v_2 \rangle} \perp G$,

$$f = S_{\langle v_1, v_2, v_3 \rangle} \circ (\text{id}_{\langle v_1, v_2 \rangle} \perp G),$$

siendo G el giro en el plano vectorial $\langle v_3, v_4 \rangle$ cuya matriz asociada en la base $\{v_3, v_4\}$ es

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 6.11. Consideremos la transformación ortogonal f_1 de \mathbb{R}^3 cuya matriz asociada respecto a la base canónica es

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que la matriz A_1 es ortogonal y que $\det f_1 = \det A_1 = 1$, f_1 es un giro. El polinomio característico de f_1 es

$$P_{f_1}(X) = -X^3 + X^2 - X + 1,$$

y sus raíces son:

$$1, \quad i, \quad -i.$$

Sea $(f_1)_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ la aplicación \mathbb{C} -lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A_1 . Se tiene

$$\begin{aligned} \text{Nuc}(f_1 - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) &= \langle (1, 1, 0) \rangle \\ \text{Nuc}((f_1)_{\mathbb{C}} - i \text{id}_{\mathbb{C}^3}) &= \langle (1, -1, \sqrt{2}i) \rangle \end{aligned}$$

El conjunto

$$\{(1, 1, 0), (0, 0, \sqrt{2}), (1, -1, 0)\}$$

es una base ortogonal de Jordan real para f_1 . Una base ortonormal de Jordan real para f_1 es

$$B_1 = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), (0, 0, 1), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \right\}$$

La forma de Jordan real de f_1 respecto a B_1 es

$$(f_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene

$$f_1 = \text{id}_{\langle(1,1,0)\rangle} \perp G_1,$$

donde G_1 es el giro en el plano $\langle(1, 1, 0)\rangle^\perp$ cuya matriz asociada respecto a la base $B'_1 = \{(0, 0, 1), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)\}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que \mathbb{R}^3 se considera orientado por la base canónica, f_1 es un giro de eje $\langle(1, 1, 0)\rangle$ y ángulo $\pi/2$ o $3\pi/2$ dependiendo de la orientación considerada en el eje de giro $\langle(1, 1, 0)\rangle$.

Ejemplo 6.12. Consideremos la transformación ortogonal f_2 de \mathbb{R}^3 cuya matriz asociada respecto a la base canónica es

$$A_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Dado que la matriz A_2 es ortogonal y que $\det f_2 = -1$, f_2 es una reflexión. El polinomio característico de f_2 es

$$P_{f_2}(X) = -X^3 + X^2 + X - 1 = -(X - 1)^2(X + 1).$$

Se tiene

$$\text{Nuc}(f_2 - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle(1, 0, -1), (2, 1, 2)\rangle$$

$$\text{Nuc}(f_2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle(-1, 4, -1)\rangle.$$

El conjunto

$$B_2 = \left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{4\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6} \right) \right\}$$

es una base ortonormal de Jordan para f_2 . La forma de Jordan de f_2 respecto a B_2 es

$$(f_2)_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que f_2 es la simetría respecto al plano vectorial $\text{Nuc}(f_2 - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle(1, 0, -1), (2, 1, 2)\rangle$.

Ejemplo 6.13. Consideremos la transformación ortogonal f_3 de \mathbb{R}^4 cuya matriz asociada respecto a la base canónica es

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz A_3 es ortogonal y dado que $\det f_3 = -1$, f_3 es una reflexión. El polinomio característico de f_3 es

$$P_{f_3}(X) = (-1 - X)(-X^3 + 1) = (-1 - X)(1 - X)(-X^2 - X - 1),$$

y sus raíces son

$$1, -1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Sea $(f_3)_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ la aplicación \mathbb{C} -lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A_3 . Se tiene

$$\text{Nuc}(f_3 - \text{id}_{\mathbb{R}^4}) = \langle (0, 1, -1, -1) \rangle$$

$$\text{Nuc}(f_3 + \text{id}_{\mathbb{R}^4}) = \langle (1, 0, 0, 0) \rangle$$

$$\text{Nuc}((f_3)_{\mathbb{C}} - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)\text{id}_{\mathbb{C}^4}) = \langle (0, 1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) \rangle$$

El conjunto

$$\{(0, 1, -1, -1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}), (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\},$$

es una base ortogonal de Jordan real para f_3 . Pongamos

$$v_1 = (0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}), v_2 = (1, 0, 0, 0), v_3 = (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}), v_4 = (0, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6})\}$$

El conjunto $B_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base ortonormal de Jordan real para f_3 . La forma de Jordan real de f_3 respecto a B_3 es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La aplicación f_3 es la composición de la simetría respecto al hiperplano $\langle v_1, v_3, v_4 \rangle$ y el giro simple $\text{id}_{\langle v_1, v_2 \rangle} \perp G_3$, donde G_3 es el giro en el plano $\langle v_3, v_4 \rangle$ cuya matriz asociada respecto a la base $\{v_3, v_4\}$ es

$$(G_3)_{\{v_3, v_4\}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 6.14. Consideremos la transformación ortogonal f_4 de \mathbb{R}^4 cuya matriz asociada en la base canónica es

$$A_4 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Dado que la matriz A_4 es ortogonal y que $\det A_4 = 1$, f_4 es un giro. El polinomio característico de f_4 es

$$P_{f_4}(X) = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)^2 = (X - (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i))^2 (X - (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i))^2.$$

Identificamos $(\mathbb{R}^4)_{\mathbb{C}}$ con \mathbb{C}^4 . Sea $(f_4)_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ la aplicación \mathbb{C} -lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A_4 . Se tiene

$$\mathbb{C}^4 = \text{Nuc}\left((f_4)_{\mathbb{C}} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \text{id}_{\mathbb{C}^4}\right) \perp \text{Nuc}\left((f_4)_{\mathbb{C}} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \text{id}_{\mathbb{C}^4}\right),$$

donde

$$\text{Nuc}\left((f_4)_{\mathbb{C}} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \text{id}_{\mathbb{C}^4}\right) = \langle (1, 0, -i, 0), (0, 1, 0, i) \rangle,$$

Pongamos

$$v_1 = (0, 0, -1, 0), \quad v_2 = (1, 0, 0, 0), \quad v_3 = (0, 0, 0, 1), \quad v_4 = (0, 1, 0, 0).$$

El conjunto $B_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base ortonormal de Jordan real para f_4 . La forma de Jordan de f_4 respecto a B_4 es

$$(f_4)_{B_4} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

Se tiene que f_4 es un giro doble

$$f_4 = G \perp G',$$

donde G y G' son los giros en los planos $\langle v_1, v_2 \rangle$ y $\langle v_3, v_4 \rangle$, respectivamente, cuyas matrices asociadas en las bases $\{v_1, v_2\}$ y $\{v_3, v_4\}$ son

$$G_{\{v_1, v_2\}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad G'_{\{v_3, v_4\}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

f_4 es la composición de dos giros simples, el giro $G \perp \text{id}_{\langle v_3, v_4 \rangle}$ y el giro $\text{id}_{\langle v_1, v_2 \rangle} \perp G'$.

Bibliografía

- [1] Burgos Román, J. de, *Álgebra lineal*. MacGraw-Hill/Interamericana de España, Madrid, 1993.
- [2] Birkhoff, G. and Mac Lane, S., *A survey of modern algebra*. Vicens-Vives, Barcelona, 1963.
- [3] Godement, R., *Cours d'algèbre*. Herman, Paris, 1966.
- [4] Hernández Rodríguez, E., Vázquez Gallo, M. J., Zurro Moro, M. A., *Álgebra lineal y geometría*. Pearson, Madrid, 2012.
- [5] Vale Gonsalves M. J. *Estructura de una aplicación lineal*. <http://hdl.handle.net/10347/27024>, AC-Materiais didácticos, 2021.
- [6] Vale Gonsalves M. J. *Notas de geometría afín y euclídea*. <http://hdl.handle.net/10347/27414>, AC-Materiais didácticos, 2022.