
**Análisis variacional y numérico de problemas de
contacto en viscoelasticidad con memoria larga**

Ángel Daniel Rodríguez Arós

Memoria de Tesis Doctoral del Programa de Doctorado del Departamento de
Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de Compostela.

Esta Tesis Doctoral fue presentada por Don Ángel Daniel Rodríguez Arós en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidade de Santiago de Compostela para la obtención del grado de Doctor en ciencias Matemáticas, con mención honorífica de Doctor Europeo.

Fue dirigida por el Profesor Doctor Don Juan Manuel Viaño Rey, del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidade de Santiago de Compostela y por el Profesor Doctor Don Mircea Sofonea, del Laboratoire de Théorie des Systèmes, de la Université de Perpignan (Francia).

La defensa pública de la tesis tuvo lugar el día 18 de marzo de 2005 ante el Tribunal constituido por:

PRESIDENTE:

Dr. Ingeniero D. Eugenio Oñate de Navarra, CIMNE, Universitat Politècnica de Catalunya.

VOCALES:

Dr. D. Marius Cocou, Laboratoire de mécanique et d'acoustique, CNRS (Francia).

Dra. Dña. Isabel Maria Narra de Figueiredo, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra (Portugal).

Dr. D. Carlos Moreno González, Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Cálculo Numérico, UNED.

SECRETARIA:

Dra. Dña. Margarita Burguera González, Departamento de Matemática Aplicada, Universidade de Santiago de Compostela.

Obtuvo la calificación de **Sobresaliente cum Laudum**.

Marzo, 2005.

Análisis variacional y numérico de problemas de contacto en viscoelasticidad con memoria larga

Memoria de Tesis Doctoral en el marco del Programa de Doctorado “Métodos numéricos en E.D.P. Aplicacións na enxeñería” del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidade de Santiago de Compostela.

Santiago de Compostela, 22 de Noviembre de 2004.

El doctorando,

Ángel D. Rodríguez Arós

Vº Bº

Co-director de la Tesis Doctoral,

Fdo.: Mircea Sofonea
Professeur de Mathématiques Appliquées
Laboratoire de Mathématique
et Physique des Systèmes (MEPS)
Université de Perpignan, Francia

Vº Bº

Co-director de la Tesis Doctoral,

Fdo.: Juan M. Viaño Rey
Catedrático de Matemática Aplicada
Departamento de Matemática Aplicada
Universidade de Santiago de Compostela

Agradecimientos

En este momento tan especial de mi vida académica, la presentación del trabajo de tesis doctoral, quiero acordarme de las personas que más me han ayudado en estos años de dedicación y esfuerzo. Quiero, al mencionar aquí sus nombres, reconocerles el mérito de haberme soportado en los momentos difíciles y agradecerles la comprensión, el cariño y el apoyo con el que me han ayudado a continuar adelante.

En primer lugar quiero y debo agradecer el papel que han desempeñado en este trabajo los directores del mismo, cuya calidad humana y científica he tenido el placer y privilegio de disfrutar. A Mircea Sofonea le debo no sólo haberme dedicado parte de su extraordinario talento matemático y de su “savoir faire” sin los que este trabajo no sería el mismo, sino también su entusiasta actitud y contagiosa determinación. Aún más reconocimiento, si ello es posible, le debo a Juan Viaño, verdadero motor y dinamizador del grupo de investigación, que ha sabido dirigirme hasta buen puerto pese a las múltiples y altas responsabilidades que le competen en los últimos tiempos. Nunca agradeceré suficiente su confianza en mí desde el primer día, lo que me llena de orgullo y satisfacción, pero también de responsabilidad y compromiso.

Mi más destacado agradecimiento es para mis padres, Ángeles y Juan, por su confianza y amor para conmigo y sobretodo, por el ambiente de cultura, res-

ponsabilidad y dedicación al trabajo del que me han rodeado desde el comienzo y que, sin duda, tiene mucho que ver con que hoy esté escribiendo estas líneas. Les agradezco también haberme dado unos hermanos tan extraordinarios. Muchas gracias Víctor, Iván y Iago, por ser exactamente lo que deseo que unos hermanos sean. Mención especial le debo al primero, primer compañero de juegos y amigo, cuyos vastos conocimientos informáticos me han servido de constante ayuda en los últimos tiempos.

Hay dos personas muy especiales para mí que han compartido muchas de las penurias y alegrías que, inevitablemente, transporto del folio y la pantalla a la vida privada. Es por esto que agradezco eternamente a Marga y Teresa haberlas compartido conmigo y ayudarme a relativizar las unas y aumentar las otras.

Muchos amigos merecen todo mi reconocimiento. Quiero destacar entre ellos a tres compañeros de promoción, con cuya amistad espero poder seguir contando siempre. Gracias por todo Carlos, David y Elías. No puedo olvidarme tampoco de Arantza, de radiante sonrisa, de Tomás, auténtico salvavidas informático, o de Ana, Bego, Jose Antonio, Trini y los chicos y chicas del café de media mañana y media tarde. No menos reconocimiento debo a los que han sido mis compañeros de despacho durante más tiempo, José Ramón y Marco.

Agradezco finalmente a todos los miembros del Departamento de Matemática Aplicada su atención para conmigo todos estos años y el magnífico entorno de trabajo que constituyen. Este mismo reconocimiento se lo debo a los miembros del Laboratoire de Théorie des Systèmes por su calurosa acogida y ayuda en los meses de estancia en Perpignan, y en especial a Thierry-Vincent.

Santiago de Compostela, Noviembre de 2004.

A mis padres,
Ángeles y Juan.

«Ut tensio, sic vis»

Robert Hooke (1635-1703)

«Il libro della natura è scritto in linguaggio matematico»

Galileo Galilei (1564-1642)

«You will never finish a work. The day will come when you must leave it»

Akira Kurosawa (1910-1998)

Prólogo

En el estudio variacional de diversos problemas de contacto para sólidos viscoelásticos de memoria larga surgen de forma natural dos tipos de inecuaciones variacionales evolutivas caracterizadas por la presencia de un término integral de tipo Volterra. En esta memoria desarrollamos en un marco abstracto el análisis matemático y numérico de tales inecuaciones y aplicamos los resultados obtenidos a una variada gama de situaciones de contacto con y sin rozamiento en viscoelasticidad con memoria larga.

Este trabajo ha sido realizado en el marco de la acción integrada Francia-España HF2001-0036. Además, es parte del proyecto “Contacto de materiales viscoplásticos y viscoelásticos: formulación matemática y análisis numérico” del Ministerio de Ciencia y Tecnología (referencia BFM2003-05357) y del proyecto “New Materials, Adaptive Systems and their Nonlinearities; Modelling Control and Numerical Simulation”, que forma parte del programa de la U.E. “Improving the Human Research Potential and the Socio-Economic Knowledge Base” (Contrato nº HPRN-CT-2002-00284).

Índice general

Notaciones	1
Introducción	3
Parte I: Inecuaciones variacionales de Volterra en espacios de Hilbert	13
Capítulo 1: Algunos resultados de análisis variacional y numérico	15
1.1. Espacios de funciones con valores vectoriales	16
1.2. Inecuaciones variacionales en espacios de Hilbert	20
1.3. Otros resultados preliminares	25
1.4. Aproximación de tipo Ritz-Galerkin	28
1.5. Discretización de la variable temporal	31
1.6. Aproximación totalmente discreta	36
Capítulo 2: Inecuaciones variacionales con término integral de Volterra	41
2.1. El problema abstracto	41
2.2. Dependencia respecto al término integral	44
2.3. Aproximación semidiscreta	46
2.4. Aproximación totalmente discreta	49

Capítulo 3: Inecuaciones variacionales integro-diferenciales de Volterra	57
3.1. El problema abstracto	57
3.2. Dependencia de la solución respecto al término integral	64
3.3. Aproximación semidiscreta	67
3.4. Aproximación totalmente discreta	71
Notas bibliográficas a la Parte I	83
Parte II: Aplicación al contacto en viscoelasticidad con memoria larga	85
Capítulo 4: Espacios funcionales y elementos finitos	87
4.1. Espacios funcionales en mecánica de sólidos	87
4.2. Método de elementos finitos	93
Capítulo 5: Introducción al contacto y a la viscoelasticidad con memoria larga	101
5.1. Algunos fenómenos de contacto	102
5.2. Cinemática y dinámica de un medio continuo	103
5.3. Ley de comportamiento viscoelástico de memoria larga	105
5.4. Condiciones de contorno	114
Capítulo 6: Problema de contacto con condiciones de Signorini	123
6.1. Formulación mecánica y variacional del problema	124
6.2. Existencia y unicidad de solución	127
6.3. Propiedades de la solución	135
6.4. Aproximación numérica del problema	142
6.5. Resultados numéricos	152
6.6. Formulación en tensiones	164

Capítulo 7: Problema de contacto con respuesta normal	169
7.1. Formulación mecánica y variacional del problema	170
7.2. Existencia y unicidad de solución	172
7.3. Un resultado de convergencia	174
7.4. Aproximación numérica del problema	180
7.5. Resultados numéricos	188
Capítulo 8: Problema de contacto unilateral entre dos cuerpos	197
8.1. Formulación mecánica y variacional del problema	198
8.2. Existencia y unicidad de solución	202
8.3. Discretización y aproximación numérica del problema	203
8.4. Resultados numéricos	211
Capítulo 9: Problema de contacto bilateral con rozamiento de Tresca	217
9.1. Formulación mecánica y variacional del problema	218
9.2. Existencia y unicidad de solución	221
9.3. Un resultado de convergencia	223
9.4. Aproximación numérica del problema	226
9.5. Resultados numéricos	237
9.6. Formulación en tensiones	241
Capítulo 10: Algunos problemas de contacto con rozamiento	257
10.1. Contacto bilateral con rozamiento viscoelástico	258
10.2. Contacto viscoelástico con rozamiento de Tresca	262
10.3. Contacto viscoelástico con rozamiento viscoelástico	265
10.4. Contacto con respuesta normal amortiguada y rozamiento de Tresca	268
10.5. Contacto con respuesta normal amortiguada y rozamiento viscoso	271
10.6. El problema de Signorini en velocidades	274

Notas bibliográficas a la Parte II	279
Conclusiones y perspectivas	283
Bibliografía	287

NOTACIONES

Si Ω es un dominio acotado de \mathbb{R}^d ($d = 1, 2, 3$), se denota:

$\bar{\Omega}$, adherencia o clausura de Ω ,

$\Gamma = \partial\Omega$, frontera de Ω ,

Γ_i ($i = 1, 2, 3$), partes disjuntas de Γ ,

$med(\Gamma_1)$, medida de Lebesgue $(d - 1)$ -dimensional de Γ_1 ,

$C^m(\bar{\Omega})$, espacio de funciones reales continuamente diferenciables en $\bar{\Omega}$ hasta las derivadas de orden m , estas incluidas,

$$H = [L^2(\Omega)]^d,$$

$$H_1 = [H^1(\Omega)]^d,$$

$$H_\Gamma = [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^d,$$

ν , vector normal unitario exterior definido c.p.d. en Γ ,

ε , operador de deformación,

Div , operador de divergencia,

$$Q = \{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) : \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega), 1 \leq i, j \leq d\},$$

$$Q_1 = \{\boldsymbol{\sigma} \in Q : \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in H\},$$

$$\mathbf{L}^\infty(\Omega) = [L^\infty(\Omega)]^{d^4}.$$

Si X es un espacio normado y $[0, T]$ es un intervalo de \mathbb{R} , se tiene:

$\|\cdot\|_X$, norma en X ,

$(\cdot, \cdot)_X$, si X es un espacio pre-hilbertiano, producto interior,

$\mathcal{L}(X)$, espacio de funciones lineales continuas de X en X ,

$C([0, T]; X)$, espacio de funciones continuas de $[0, T]$ en X ,

$L^\infty(0, T; X)$, espacio de funciones medibles definidas en $(0, T)$ con imagen en X y esencialmente acotadas,

$$[X]^d = \{\mathbf{x} = (x_i) : x_i \in X, 1 \leq i \leq d\},$$

$$[X]_s^{d \times d} = \{\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) : \tau_{ij} = \tau_{ji} \in X, 1 \leq i, j \leq d\},$$

X^h , subespacio de X de dimensión finita,

\mathcal{P}_{X^h} , operador de proyección ortogonal sobre X^h .

Para el análisis variacional de problemas de contacto definimos:

V , espacio de Hilbert para los desplazamientos,

U_{ad} , convexo cerrado no vacío de desplazamientos admisibles,

$\Sigma_{ad}(t)$, convexo cerrado no vacío de tensiones admisibles en el instante t ,

Σ_0 , convexo cerrado no vacío de tensiones admisibles auxiliar.

Para el análisis numérico de problemas de contacto definimos:

V^h , subespacio de V de dimensión finita,

U_{ad}^h , convexo cerrado no vacío de desplazamientos admisibles discreto,

Q^h , subespacio de Q de dimensión finita,

I , operador identidad,

$\mathcal{P}_{Q^h} : Q \rightarrow Q^h$, proyección ortogonal de Q sobre Q^h ,

\mathcal{T}^h , triangulación de $\bar{\Omega}$, que suponemos poliédrico en \mathbb{R}^d y compatible con la partición de Γ ,

T^h , elemento finito arbitrario de \mathcal{T}^h ,

$P_l(T^h)$, espacio de polinomios de grado menor o igual a l definidos sobre T^h ,

Π^h , operador de interpolación global sobre V^h ,

$\Pi_{\Gamma_3}^h$, operador de interpolación lineal a trozos en Γ_3 .

Otras definiciones:

\mathbf{I}_d , tensor identidad d -dimensional,

\mathbb{S}_d , conjunto de matrices cuadradas de orden d simétricas,

\dot{f} , \ddot{f} , primera y segunda derivada temporal de f ,

c , constante positiva,

$c(p_1, \dots, p_n)$, constante positiva en función de los valores de p_1, \dots, p_n , $n \geq 1$,

c.t.p., casi todo punto, esto es, salvo un conjunto de medida nula,

c.p.d., casi por doquier, esto es, salvo en conjunto de medida nula.

Introducción

Los fenómenos de contacto involucrando cuerpos deformables abundan en los procesos industriales, como por ejemplo en el sector automovilístico, el siderúrgico o el de la construcción, pero también en la vida cotidiana. Los ejemplos de ello son numerosos y variados, como se advierte simplemente con citar el contacto de las pastillas de freno con la rueda, de los neumáticos con la carretera o del alambre con los “brackets” dentales en ortodoncia. En todos estos casos, el rozamiento es uno de los fenómenos tribológicos más importantes asociados al contacto. Por esta razón existe una extensa literatura dedicada al estudio de las distintas formas de contacto y rozamiento para una amplia variedad de materiales. Con gran impulso desde los años 60, la mecánica clásica modeliza estos fenómenos fuertemente no lineales mediante inclusiones diferenciales y aborda su estudio con argumentos de la teoría de operadores maximales monótonos, lo que conduce a formulaciones en base a inecuaciones variacionales. Los problemas sin rozamiento constituyen una primera aproximación en el estudio de problemas más realistas que sí lo tengan en cuenta. Detalles sobre la modelización y el análisis variacional y numérico de los problemas de contacto con y sin rozamiento se encuentran, por ejemplo, en [38, 46, 52, 61, 76, 86].

Por otra parte, la investigación en mecánica de sólidos deformables se ha visto enriquecida en las últimas décadas con la superación de los clásicos modelos en

elasticidad, que habían sido estudiados en gran detalle a lo largo del siglo XX. Su incapacidad para describir fenómenos reales como, por ejemplo, el endurecimiento, la relajación, las deformaciones irreversibles o el envejecimiento ha hecho necesario el estudio de modelos más complejos que nos permitan afrontar y dar cumplida respuesta a estas dificultades. Consultar, por ejemplo, [19, 20, 38, 50, 58, 88] para el estudio de modelos en viscoelasticidad o viscoplasticidad.

El presente trabajo pretende aportar una contribución en este campo, realizando el análisis matemático y numérico de varios problemas de contacto para una clase concreta de materiales, los viscoelásticos de memoria larga. La principal característica de estos materiales, desde el punto de vista mecánico, es que la evolución de tensiones y deformaciones no depende solamente de lo que esté sucediendo “ahora” en el material, sino que depende también (en mayor o menor medida) de lo que le ha sucedido “antes”, esto es, de su historia o memoria. En la naturaleza, diversos tipos de polímeros, gomas, pastas y maderas tienen un comportamiento mecánico que se ajusta a esta descripción.

Los contenidos que se presentan son el resultado del estudio de diversos problemas de contacto en viscoelasticidad con memoria larga, con y sin rozamiento y en su mayor parte están publicados o pendientes de publicación en [67, 68, 71, 72, 80, 81, 82]. Las formulaciones variacionales que se obtienen pueden englobarse en dos clases de inecuaciones variacionales evolutivas diferentes. El primer tipo, que hemos denominado “inecuaciones variacionales con término integral de tipo Volterra” está asociado a los problemas de contacto sin rozamiento. El segundo tipo, que hemos denominado “inecuaciones variacionales integro-diferenciales de Volterra”, a problemas de contacto con rozamiento, mayormente.

Por tanto, el objetivo de este trabajo es doble. Por una parte, se estudian la

existencia y unicidad de solución, las propiedades y la aproximación numérica de dos clases de inecuaciones variacionales evolutivas, pero al mismo tiempo, estos resultados teóricos son aplicados al análisis variacional y numérico de una variada gama de problemas de contacto con y sin rozamiento para sólidos viscoelásticos de memoria larga.

El texto se presenta estructurado en dos partes. La Parte I está dedicada al estudio de dichas inecuaciones variacionales evolutivas en un marco abstracto. Los resultados generales así obtenidos son aplicados en la Parte II a varios problemas de contacto. Un tercer tipo de inecuaciones variacionales evolutivas de tipo Volterra se estudia en la Sección 9.6, si bien en este caso limitamos su estudio al contexto de un problema de contacto concreto. Ambas partes comienzan con capítulos en que se repasan conceptos y resultados fundamentales para el trabajo posterior. De esta forma, la Parte I consta de un capítulo dedicado al análisis variacional abstracto en espacios de Banach, mientras que la Parte II comienza con dos capítulos en que se repasan aspectos básicos de los espacios funcionales utilizados en mecánica de sólidos y se dan los primeros pasos en la formulación mecánica de los problemas de contacto que nos interesan.

Esta distribución de los contenidos de la memoria facilita, a nuestro entender, el acceso directo tanto a los resultados puramente teóricos relativos a inecuaciones variacionales evolutivas con término integral de Volterra (Parte I), como a los resultados relativos al contacto con y sin rozamiento en viscoelasticidad con memoria larga (Parte II), según los intereses del lector sean unos u otros.

En general, para cada problema de contacto, la intención ha sido la de partir del modelo mecánico para cubrir en sus aspectos teóricos y prácticos el estudio de la existencia y unicidad de solución débil, su aproximación numérica, el análisis del error, y eventualmente la implementación en ordenador de un algoritmo que permita realizar simulaciones numéricas. La notación empleada

para identificar cada tipo de problema pretende ser coherente con esta idea base. De esta manera, en cada capítulo o sección se denota por P, PV, PV^h y PV^{hk} al problema de contacto en su forma diferencial, en su forma variacional, al problema aproximado con discretización espacial y al problema aproximado con discretización espacial y temporal, respectivamente.

Se han utilizado ciertas convenciones tipográficas. Así, las magnitudes tensoriales y vectoriales se escriben en negrita, los índices repetidos denotan suma y el índice tras una coma denota derivación respecto a la variable espacial correspondiente a ese índice.

Cada una de las dos partes está estructurada en varios capítulos y estos, a su vez, en secciones. La numeración de todos los capítulos es, no obstante, consecutiva. Las expresiones matemáticas (ecuaciones e inecuaciones) están numeradas por capítulo, sección y orden de aparición. De esta forma, (7.2.6) hace referencia a la sexta expresión numerada de la segunda sección del séptimo capítulo. Los teoremas, lemas, corolarios y observaciones están numerados consecutivamente, dentro de cada sección, por su orden de aparición. Las figuras se numeran también por orden de aparición en cada sección, pero de forma independiente. Cada una de las dos partes se finaliza con un apartado con notas relativas a las referencias bibliográficas utilizadas por el autor o directamente relacionadas con los temas que se tratan.

Dos ejemplos paradigmáticos de contacto con y sin rozamiento. Para el lector interesado en realizar una lectura secuencial de este trabajo, motivamos el estudio teórico de las inecuaciones variacionales evolutivas de Volterra que se realiza en la Parte I con dos ejemplos concretos de aplicación a un problema de contacto sin rozamiento y otro con rozamiento. No obstante, dado que las definiciones y resultados matemáticos que nos permiten realizar una exposición rigurosa de la formulación mecánica de un problema de contacto no

se introducen hasta el Capítulo 4, no podremos entrar en detalles aquí.

Contacto unilateral sin rozamiento. Supongamos que un cuerpo sólido deformable está bajo la influencia de campos de fuerzas externas que actúan bien sobre una parte de su superficie bien sobre la totalidad de su volumen. Además, el cuerpo está fijado en una parte de su superficie y en otra parte está en contacto (o puede llegar a estarlo) con un obstáculo no deformable, que recibe el nombre de *fundación rígida*. El contacto es de tal forma que, de producirse, origina en cada punto de la interfaz de contacto una reacción, por parte de la fundación rígida no penetrable, sobre el sólido deformable en la dirección opuesta a la normal, pero esta es inexistente en la dirección tangencial (ausencia de rozamiento). Como consecuencia, no hay esfuerzos tangenciales en la zona de contacto. Además, el cuerpo puede separarse de la fundación (contacto unilateral). Este tipo de contacto se denomina *unilateral sin rozamiento*. Esta situación la podemos observar gráficamente en la Figura I.1 (con las notaciones introducidas en el Capítulo 5).

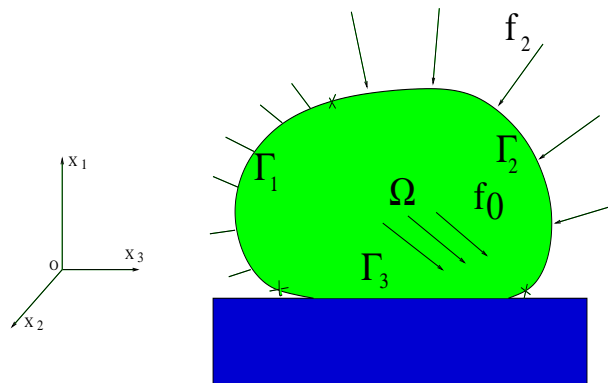


Figura I.1: Contacto unilateral sin rozamiento.

Esta situación física se modeliza matemáticamente por medio de un problema de contorno que exponemos a continuación.

PROBLEMA P : Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ y el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma} : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}_d$ tales que, para todo $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(t) &= \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds \quad \text{en } \Omega, \\ \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t) &= \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_1, \\ \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} &= \mathbf{f}_2(t) \quad \text{en } \Gamma_2, \\ \sigma_\nu(t)u_\nu(t) &= 0; \quad u_\nu(t) \leq 0; \quad \sigma_\nu(t) \leq 0; \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_3.\end{aligned}$$

Explicamos ahora someramente el significado físico de las expresiones que componen el problema P recordando que serán tratadas con mayor detalle en las secciones 5.2, 5.3 y 5.4. La primera expresión en P es la ley de comportamiento de los materiales viscoelásticos de memoria larga. El término integral es el que modeliza el efecto de la memoria. La segunda expresión es la ecuación del equilibrio, que gobierna el proceso de deformación en un problema cuasi-estático. Las expresiones tercera y cuarta son las condiciones de contorno de desplazamientos-tracciones, que traducen la fijación y el efecto de las fuerzas externas superficiales. Finalmente, las expresiones de la última fila en P representan las condiciones de contacto, llamadas *de Signorini*. Por tanto, el cuerpo deformable puede entrar en contacto, a lo largo de Γ_3 , con un obstáculo del que se puede separar pero que no se deja penetrar y que reacciona al contacto con una presión, *a priori* no conocida, en la dirección opuesta al vector normal exterior $\boldsymbol{\nu}$.

Tras diversas operaciones estándar sobre el problema P se obtiene una formulación variacional, que exponemos a continuación.

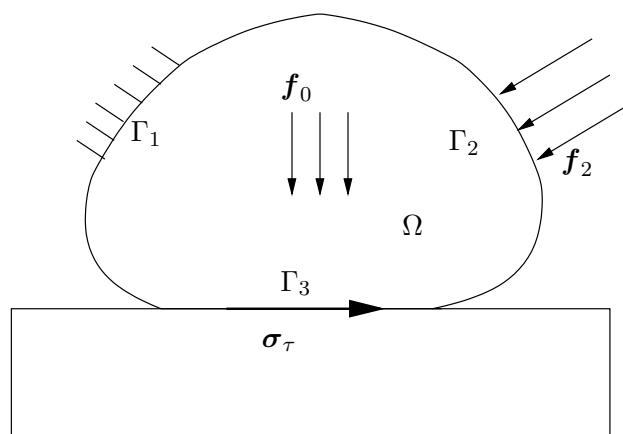


Figura I.2: Contacto bilateral con rozamiento.

PROBLEMA *PV*: Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ tal que

$$\mathbf{u}(t) \in U_{ad}, \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)))_Q \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \\ + \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}) \right)_Q,$$

para todo $\mathbf{v} \in U_{ad}$ y todo $t \in [0, T]$.

Observamos que *PV* es básicamente una inecuación variacional evolutiva establecida sobre un espacio de Hilbert V cuya función incógnita debe pertenecer para cada $t \in [0, T]$ a un subconjunto U_{ad} . La principal característica de este problema es la presencia del término integral, lo que la hace pertenecer a una familia de inecuaciones variacionales evolutivas susceptible de ser estudiada en un contexto más general. A ello dedicamos el Capítulo 2.

Contacto bilateral con rozamiento. Supongamos la misma situación del cuerpo sólido deformable que puede entrar en contacto con una fundación rígida. Si el contacto es de tal forma que permite que el cuerpo se deslice tangencialmente sobre la fundación rígida, pero que no pueda separarse de ella, estamos en un caso de *contacto bilateral*. Finalmente, el mencionado deslizamiento tangencial sólo puede ocurrir cuando las tensiones tangenciales originadas por el proceso

de deformación del cuerpo sobre la zona en contacto alcanzan un cierto umbral llamado *umbral de rozamiento*, que depende de las características reológicas de los materiales involucrados (i.e., el cuerpo deformable, la fundación rígida y un eventual lubricante en la interfaz). Una vez alcanzado dicho umbral, no puede ser superado y determina la velocidad con que se producen los deslizamientos tangenciales. Cuando el umbral de rozamiento es fijo y conocido a priori, estas condiciones sobre tensiones y deslizamientos tangenciales se conocen como *ley de Tresca* para el rozamiento. Esta situación física la podemos observar gráficamente en la Figura I.2 (con las notaciones introducidas en el Capítulo 5) y se modeliza matemáticamente por medio de un problema de contorno que exponemos a continuación.

PROBLEMA *P*: Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ y el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma} : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}_d$ tales que, para todo $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) &= \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds && \text{en } \Omega, \\ \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t) &= \mathbf{0} && \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{0} && \text{en } \Gamma_1, \\ \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} &= \mathbf{f}_2(t) && \text{en } \Gamma_2, \\ \left\{ \begin{array}{l} u_\nu(t) = 0, \quad |\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)| \leq g, \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)| < g \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) = \mathbf{0}, \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)| = g \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = -\lambda \dot{\mathbf{u}}_\tau(t), \end{array} \right. &&& \text{en } \Gamma_3, \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0 && \text{en } \Omega. \end{aligned}$$

Al igual que en el caso anterior, explicamos brevemente el significado físico de las expresiones que componen el problema *P* que recordamos serán tratadas con mayor detalle en las secciones 5.2, 5.3 y 5.4. Las cuatro primeras ecuaciones son ya conocidas. La primera expresión en la quinta fila representa la condición de contacto bilateral, que impide desplazamientos en la dirección de

la normal $\boldsymbol{\nu}$ en la zona de contacto, por lo que este se mantiene durante todo el tiempo de observación. El resto de expresiones de este grupo constituyen la ley de rozamiento de Tresca, donde $g \geq 0$ denota el umbral de rozamiento. Finalmente, la última condición representa los desplazamientos iniciales \boldsymbol{u}_0 , que son conocidos.

Una formulación variacional del problema P es la siguiente.

PROBLEMA PV : *Hallar el campo de desplazamientos $\boldsymbol{u} : [0, T] \rightarrow V$ tal que*

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t)))_Q + j(\boldsymbol{v}) - j(\dot{\boldsymbol{u}}(t)) \\ & + \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t)) \right)_Q \\ & \geq (\boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t))_V \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, \text{ p.c.t. } t \in (0, T), \\ & \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0. \end{aligned}$$

Observamos que PV consiste en una inecuación variacional evolutiva establecida sobre un espacio de Hilbert V y expresada en términos de la derivada temporal de su función incógnita y de un determinado funcional j , junto con una condición inicial dada. Una de las principales características de este problema es, además de la intervención del término integral de Volterra, la presencia de derivadas temporales de la función incógnita y de un dato inicial. El problema PV pertenece a una familia de inecuaciones variacionales evolutivas susceptible de ser estudiada en un contexto más general. A ello dedicamos el Capítulo 3.

Parte I

Inecuaciones variacionales de Volterra en espacios de Hilbert

Estudiamos en esta parte dos tipos de inecuaciones variacionales evolutivas caracterizadas por la presencia de un término integral de tipo Volterra. En el Capítulo 1 repasamos algunos resultados generales de inecuaciones variacionales en espacios de Banach. En el Capítulo 2 se estudia el primer tipo de inecuaciones y en el Capítulo 3 el segundo. El estudio se refiere fundamentalmente a la existencia y unicidad de solución y su aproximación numérica, además de propiedades adicionales tales como la dependencia de la solución respecto del término integral.

Capítulo 1

Algunos resultados de análisis variacional y numérico

En este capítulo recordamos algunos resultados de análisis funcional y numérico que serán necesarios para el estudio de los dos tipos de inecuaciones variacionales evolutivas en espacios de Hilbert en que estamos interesados. Consisten principalmente en algunos resultados de inecuaciones variacionales elípticas y de evolución y otros elementos de análisis funcional que nos serán de gran ayuda, como el Teorema del punto fijo de Banach, la existencia de subsucesiones convergentes en la topología débil o desigualdades notables como la de Gronwall. Además, introducimos los espacios de funciones con valores vectoriales $C([0, T]; X)$ y $W^{k,p}(0, T; X)$, donde $[0, T] \subset \mathbb{R}$ y X es un espacio de Banach, que serán de gran utilidad para describir el comportamiento evolutivo de las soluciones. En lo tocante al análisis numérico, se recuerdan resultados de aproximación de Ritz-Galerkin y otros de integración numérica.

1.1. Espacios de funciones con valores vectoriales

Dado un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$, definimos $C([0, T]; X)$ como el espacio de las funciones continuas definidas en $[0, T] \subset \mathbb{R}$ con valores en X . El espacio $C([0, T]; X)$ es de Banach con la norma del máximo, esto es, dada una función $f \in C([0, T]; X)$, se tiene

$$\|f\|_{C([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X.$$

Dado un subconjunto $X_0 \subset X$, utilizaremos la notación $C([0, T]; X_0)$ para referirnos a las funciones $f \in C([0, T]; X)$ tales que $f(t) \in X_0$ para todo $t \in [0, T]$.

Por otra parte, una función $f : [0, T] \rightarrow X$ se dice *fuertemente derivable* en $t_0 \in (0, T)$ si existe un elemento $\frac{df}{dt}(t_0) \in X$ llamado *derivada fuerte* de f en t_0 , tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (f(t_0 + h) - f(t_0)) - \frac{df}{dt}(t_0) \right\|_X = 0.$$

Una función $f : [0, T] \rightarrow X$ se dice *medible* si existe un subconjunto $E \subset [0, T]$ de medida nula y una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones constantes a trozos $f_n : [0, T] \rightarrow X$ tal que $\|f_n(t) - f(t)\|_X \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, para todo $t \in [0, T] \setminus E$.

Además, se dice que $f : [0, T] \rightarrow X$ es *integrable* si existe una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones constantes a trozos $f_n : [0, T] \rightarrow X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|f_n(t) - f(t)\|_X dt = 0.$$

En ese caso, se define la integral sobre cualquier intervalo $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ por

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} f_n(t) dt.$$

Teorema 1.1.1. (de Bochner). *Una función $f : [0, T] \rightarrow X$ medible es integrable si y solamente si la aplicación $t \mapsto \|f(t)\|_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ es integrable.*

Además,

$$\left\| \int_0^T f(t) dt \right\|_X \leq \int_0^T \|f(t)\|_X dt.$$

Sea p , $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ es el conjunto de las clases de funciones medibles $f : (0, T) \rightarrow X$, tales que la aplicación $t \rightarrow \|f(t)\|_X$ pertenece a $L^p(0, T)$. Se verifica que $L^p(0, T; X)$ es un espacio vectorial normado con la norma

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf \left\{ c > 0 \mid \|f(t)\|_X \leq c, \text{ para c.t.p. } t \in (0, T) \right\} \quad \text{si } p = \infty.$$

Por otra parte, tenemos los siguientes resultados.

Teorema 1.1.2. (1) $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, es un espacio de Banach.

(2) Si X es un espacio de Hilbert con el producto escalar $(\cdot, \cdot)_X$, entonces $L^2(0, T; X)$ es también un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt \quad \forall u, v \in L^2(0, T; X).$$

(3) $L^r(0, T; X) \subseteq L^q(0, T; X)$, con inyección continua, $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

(4) Si X es un espacio de Hilbert, entonces

$$L^p(0, T; X)' = L^q(0, T; X), \quad \text{si } 1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0, T; X)' = L^\infty(0, T; X)$$

donde $L^p(0, T; X)'$ representa el dual del espacio $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Sean $u, w \in L^1(0, T; X)$. La función w se llama la *derivada generalizada de u sobre $(0, T)$ de orden n* si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t)w(t)dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, T),$$

siendo $C_c^\infty(0, T)$ el espacio de funciones reales infinitamente derivables, con el soporte compacto en $(0, T)$. Denotamos $w = \dot{u}$ para $n = 1$ y $w = u^{(n)}$ para $n \geq 2$.

Sea $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(0, T; X)$ es el espacio de las funciones $u : [0, T] \rightarrow X$ tales que $u \in L^p(0, T; X)$ y $\dot{u} \in L^p(0, T; X)$. $W^{1,p}(0, T; X)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)}^p = \|u\|_{L^p(0,T;X)}^p + \|\dot{u}\|_{L^p(0,T;X)}^p,$$

para $p < \infty$ y

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(0,T;X)} = \|u\|_{L^\infty(0,T;X)} + \|\dot{u}\|_{L^\infty(0,T;X)}.$$

Una función $f : [0, T] \rightarrow X$ se dice *absolutamente continua* si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para toda sucesión de intervalos disjuntos (a_j, b_j) , $j \in I$, contenidos en $[0, T]$ y tales que $\sum_{j \in I} (b_j - a_j) < \delta$, se verifica

$$\sum_{j \in I} \|f(b_j) - f(a_j)\|_X \leq \varepsilon.$$

Además, se dice que $f : [0, T] \rightarrow X$ es *lipschitziana* (o de Lipschitz) si se verifica que existe una constante positiva L_f tal que

$$\|f(t_1) - f(t_2)\|_X \leq L_f |t_1 - t_2| \quad \text{para todo } t_1, t_2 \in [0, T].$$

A continuación recordamos algunos resultados que relacionan las funciones absolutamente continuas y de Lipschitz con las funciones de $W^{1,p}(0, T; X)$.

Teorema 1.1.3. *Sea $1 \leq p \leq \infty$, X un espacio de Banach reflexivo y sea $u \in L^p(0, T; X)$. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

(1) $u \in W^{1,p}(0, T; X)$.

(2) u admite un representante absolutamente continuo fuertemente derivable en casi todo $t \in (0, T)$, verificándose que la función $t \mapsto \frac{du}{dt}(t)$ es de $L^p(0, T; X)$.

(3) Existe $u_0 \in X$ y $g \in L^p(0, T; X)$, tales que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

De la demostración del teorema precedente se deduce que, si X es un espacio reflexivo, entonces toda función $u \in W^{1,p}(0, T; X)$ es fuertemente derivable c.p.d. en $(0, T)$ y $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ c.p.d. en $(0, T)$. Por otra parte, $W^{1,1}(0, T; X)$ se identifica con el conjunto de las funciones $u : [0, T] \rightarrow X$ absolutamente continuas y $W^{1,\infty}(0, T; X)$ con el conjunto de las funciones de Lipschitz.

Denotamos por $W^{k,p}(0, T; X)$, $k \geq 2$, al espacio de las funciones $u \in L^p(0, T; X)$ tales que existen k funciones $g_1, \dots, g_k \in L^p(0, T; X)$ tales que

$$\int_0^T u(t)\varphi^{(j)}(t)dt = (-1)^j \int_0^T g_j(t)\varphi(t), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, T), \quad \forall j = 1, 2, \dots, k,$$

donde $\varphi^{(j)}$ designa la derivada de orden j de φ . Podemos entonces considerar las derivadas sucesivas $\dot{u} = g_1$, $u^{(2)} = g_2$, ..., $u^{(k)} = g_k$. El espacio $W^{k,p}(0, T; X)$ es un espacio de Banach dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)}^p = \|u\|_{L^p(0,T;X)}^p + \sum_{\alpha=1}^k \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(0,T;X)}^p,$$

para $p < \infty$ y el cambio usual para $p = \infty$. Disponemos del siguiente resultado de densidad.

Teorema 1.1.4. *Sea X un espacio de Banach o un subconjunto cerrado de un espacio de Banach. Entonces, si X_0 es denso en X , se verifica que $C([0, T]; X_0)$ es denso en $C([0, T]; X)$.*

1.2. Inecuaciones variacionales en espacios de Hilbert

En la demostración de los resultados de existencia y unicidad de solución utilizaremos resultados de inecuaciones variacionales elípticas. Empezaremos esta sección con un resultado general y deduciremos como corolarios aquellos que realmente vamos a utilizar. Salvo mención expresa, X representa un espacio de Hilbert real con producto interior $(\cdot, \cdot)_X$ y norma $\|\cdot\|_X$.

Recordamos ahora algunas definiciones básicas. Sea $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Decimos que una función $j : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ es *propia* cuando $j(v) > -\infty$ para todo $v \in X$ y es no vacío su *dominio efectivo* $D(j) = \{u \in X \mid j(u) < \infty\}$. Decimos que es *semicontinua inferiormente (s.c.i.)* en $u \in X$ cuando se verifica

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} j(u_n) \geq j(u)$$

para toda sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ convergente hacia u . Además, se dice que j es *semicontinua inferiormente* cuando es semicontinua inferiormente en todo elemento de X . Finalmente, decimos que j es positivamente homogénea cuando $j(\lambda v) = \lambda j(v)$ para todo $\lambda \geq 0$ y todo $v \in X$.

Dado un subconjunto $K \subset X$ se define la *función indicatriz de K* por

$$I_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K, \\ +\infty & \text{si } x \in X \setminus K. \end{cases}$$

Nótese que se verifican las siguientes propiedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} K \neq \emptyset \Leftrightarrow I_K \text{ es propia,} \\ K \text{ es cerrado} \Leftrightarrow I_K \text{ es s.c.i.,} \\ K \text{ es convexo} \Leftrightarrow I_K \text{ es convexa.} \end{array} \right.$$

Consideramos ahora un operador $A : X \rightarrow X$, un subconjunto no vacío $K \subset X$ y un funcional propio $j : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Entonces, una *inecuación variacional de*

primera especie es un problema de la forma siguiente: dada $f \in X$, hallar u tal que

$$(1.2.1) \quad u \in K, \quad (Au, v - u)_X \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K.$$

Una *inecuación variacional de segunda especie* es un problema de la forma siguiente: dada $f \in X$, hallar u tal que

$$(1.2.2) \quad u \in X, \quad (Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X.$$

Nótese que tomando $j = I_K$, función indicatriz del conjunto K , se obtiene la expresión (1.2.1) como caso particular de (1.2.2). Con vistas a demostrar resultados de existencia y unicidad de solución para estos problemas, hacemos las siguientes hipótesis:

$$(1.2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} A : X \rightarrow X \text{ es un operador fuertemente monótono} \\ \text{y lipschitziano en } X, \text{ i.e.} \\ \text{(a) existe } m > 0 \text{ tal que} \\ \quad (Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X, \\ \text{(b) existe } M > 0 \text{ tal que} \\ \quad \|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \end{array} \right.$$

$$(1.2.4) \quad j : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ es propio, convexo y s.c.i.}$$

En estas condiciones, tenemos el siguiente resultado de existencia y unicidad de solución para las inecuaciones variacionales de segunda especie.

Teorema 1.2.1. *Sea X un espacio de Hilbert. Bajo las hipótesis (1.2.3) y (1.2.4), se verifica que para todo $f \in X$, la inecuación variacional (1.2.2) tiene una única solución. Aún más, la solución es Lipschitz dependiente respecto a f . Esto es, dados f_1 y f_2 , sean u_1 y u_2 las soluciones respectivas de (1.2.2).*

Entonces,

$$\|u_1 - u_2\|_X \leq \frac{1}{m} \|f_1 - f_2\|_X.$$

Aplicamos este resultado al caso de las inecuaciones variacionales de primera especie.

Corolario 1.2.2. *Sea X un espacio de Hilbert y $K \subset X$ un subconjunto cerrado, convexo y no vacío. Si se verifica (1.2.3), entonces para cada $f \in X$, existe una única solución de (1.2.1). Aún más, la solución es Lipschitz dependiente respecto a f .*

En el caso particular $j \equiv 0$ obtenemos el siguiente resultado de teoría de operadores monótonos.

Corolario 1.2.3. *Sea X un espacio de Hilbert y $A : X \rightarrow X$ un operador fuertemente monótono y lipschitziano. Entonces, para cualquier $f \in X$ la ecuación $Au = f$ tienen una única solución $u \in X$, que además es Lipschitz dependiente respecto a f .*

También estamos interesados en el caso en que el operador A es lineal y está dado por el teorema de representación de Riesz. Sea una aplicación bilineal $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, X -elíptica y continua, esto es, existe un $\alpha > 0$ tal que $a(u, u) \geq \alpha \|u\|_X^2$ para todo $u \in X$ y existe un $M > 0$ tal que $a(u, v) \leq M \|u\|_X \|v\|_X$ para todo $u, v \in X$. Entonces, aplicando el teorema de representación de Riesz, podemos definir A como sigue:

$$(1.2.5) \quad (Au, v)_X = a(u, v) \quad \forall u, v \in X.$$

Nótese que la continuidad de a nos da la acotación de A y, por ser lineal, se deduce que también es lipschitziano. Aún más, dada la elipticidad de a , el

operador A es fuertemente monótono.

El siguiente resultado será utilizado en el Teorema 3.4.1 y el Teorema 7.3.1, por ejemplo.

Corolario 1.2.4. *Sea X un espacio de Hilbert. Si $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación bilineal, continua y X -elíptica, $j : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ es propia, convexa y s.c.i. en X y $\ell : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función lineal y continua, entonces existe una única solución a la inecuación variacional de segunda especie*

$$(1.2.6) \quad u \in X, \quad a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq \ell(v - u) \quad \forall v \in X.$$

Demostración. La demostración se reduce a aplicar el Teorema 1.2.1 para $A : X \rightarrow X$ definido por (1.2.5) y $f \in X$ tal que $(f, v)_X = \ell(v)$ para todo $v \in X$, cuya existencia está garantizada por el teorema de representación de Riesz. \square

El siguiente resultado será utilizado en las demostraciones de los teoremas de existencia de solución del Capítulo 2.

Corolario 1.2.5. *Sea X un espacio de Hilbert. Si $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación bilineal, continua y X -elíptica, $K \subset X$ un subconjunto convexo, cerrado y no vacío y $\ell : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función lineal y continua, entonces existe una única solución a la inecuación variacional de primera especie*

$$(1.2.7) \quad u \in K, \quad a(u, v - u) \geq \ell(v - u) \quad \forall v \in K.$$

Demostración. Se demuestra con los mismos argumentos que el Corolario 1.2.4, utilizando el Corolario 1.2.2 en lugar del Teorema 1.2.1. \square

Nos será útil en el Capítulo 9 formular las inecuaciones variacionales de segunda especie como problemas de minimización. El siguiente teorema (ver, por

ejemplo, [33, pág. 6]) nos proporciona un resultado en este sentido.

Teorema 1.2.6. *Sean $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación bilineal, continua, X -elíptica y simétrica, $\ell : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal y continuo y $j : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ un funcional propio, convexo y s.c.i. en X . Sea $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) + j(v) - \ell(v)$. Entonces el problema de minimización que consiste en hallar $u \in X$ tal que*

$$(1.2.8) \quad J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in X,$$

tiene una solución única caracterizada por

$$u \in X, \quad a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq \ell(v - u) \quad \forall v \in X.$$

A continuación, presentamos un resultado de existencia y unicidad de solución para inecuaciones variacionales evolutivas, demostrado en [9] y que será utilizado en el Capítulo 3 de esta memoria.

Teorema 1.2.7. *Sea X un espacio de Hilbert real y sea $j : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ una función propia, s.c.i. y convexa. Sean, además, $f \in W^{1,2}(0, T; X)$ y $u_0 \in X$ tal que*

$$\sup_{v \in D(j)} \{(f(0), v)_X - (u_0, v)_X - j(v)\} < +\infty.$$

Entonces existe un único $u \in W^{1,2}(0, T; X)$ que verifica

$$u(0) = u_0, \quad (u(t), v - \dot{u}(t))_X + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X,$$

c.p.d. en $(0, T)$ y para todo $v \in X$.

Finalmente, dado que formularemos algunas desigualdades variacionales en términos de inclusiones subdiferenciales, recordamos aquí algunas definiciones relevantes. Así pues, dado un espacio de Hilbert X y una función $j : X \rightarrow$

$(-\infty, +\infty]$ se dice que esta es *subdiferenciable* en $u \in X$ si $j(u) < +\infty$ y existe un $G(u) \in X$ (llamado *subgradiente* de j en u) tal que

$$j(v) \geq j(u) + (G(u), v - u)_X \quad \forall v \in X.$$

Al conjunto de los subgradietes de j en $u \in X$ se lo denomina *subdiferencial* de j en u y se lo denota por $\partial j(u)$. La desigualdad anterior se expresa, por tanto, de la siguiente forma equivalente

$$G(u) \in \partial j(u).$$

Una función j subdiferenciable para todo $u \in X$ permite considerar a su subdiferencial como un operador multívoco definido en X y que toma valores en X .

1.3. Otros resultados preliminares

Comenzamos esta sección con dos resultados relativos a la semicontinuidad inferior con la topología débil en un espacio de Banach X . Continuamos con un lema de Gronwall y finalizamos con dos resultados de punto fijo.

Una propiedad notable de la topología débil es que si X es reflexivo, todo conjunto acotado contiene una sucesión convergente. La convergencia en la topología débil la denotamos con el símbolo “ \rightharpoonup ”.

Lema 1.3.1. *Sea X un espacio de Banach y sea $\phi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ una función convexa y s.c.i con la topología fuerte. Entonces ϕ es s.c.i. con la topología débil. En particular, si $\{x_n\}_{n>0} \subset X$ es tal que $x_n \rightharpoonup x$ en X , se tiene*

$$\phi(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n).$$

Lema 1.3.2. *Sea X un espacio de Banach y sea $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación bilineal, simétrica, continua y X -elíptica. Entonces, dada una sucesión $\{x_n\}_{n>0}$ que converge en la topología débil a $x \in X$, se verifica*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a(x_n, x_n) \geq a(x, x).$$

El siguiente resultado se conoce como *Lema de Gronwall* y lo utilizamos en varias ocasiones para obtener acotaciones, tanto analíticas (ver pág. 139) como numéricas (ver pág. 48).

Lema 1.3.3. (Gronwall). *Sean $u, g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $T > 0$, dos funciones continuas, verificándose para cada $t \in [0, T]$ que*

$$u(t) \leq c \int_0^t u(s) ds + g(t).$$

Entonces se concluye que

$$u(t) \leq g(t) + c \int_0^t g(s) e^{c(t-s)} ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Además, si g es no decreciente,

$$u(t) \leq g(t) e^{ct} \quad \forall t \in [0, T].$$

A continuación enunciamos el teorema del punto fijo de Banach, que será utilizado con frecuencia en esta tesis para obtener resultados de existencia y unicidad de solución para las formulaciones variacionales de los problemas de contacto.

Teorema 1.3.4. (de Banach de punto fijo). *Sea K un subconjunto cerrado y no vacío de un espacio de Banach X . Sea $T : K \rightarrow K$ una aplicación contractiva con constante de contractividad $\alpha \in [0, 1)$, i.e.,*

$$\|T(u) - T(v)\| \leq \alpha \|u - v\| \quad \forall u, v \in K.$$

Entonces existe un único $u \in K$ tal que $u = T(u)$. Además, para $u_0 \in K$ arbitrario, la sucesión definida por $u_{n+1} = T(u_n)$, $n \geq 0$, es convergente a u y se verifica la estimación de error

$$\|u_n - u\|_X \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|u_0 - u_1\|_X.$$

Dado un operador T , definimos sus potencias de forma recursiva por $T^m = T(T^{m-1})$ para $m \geq 2$. A continuación enunciamos y demostramos un corolario que nos será de gran utilidad con posterioridad:

Corolario 1.3.5. *Sea K un subconjunto cerrado y no vacío de un espacio de Banach X . Sea $T : K \rightarrow K$ una aplicación tal que existe un $m \in \mathbb{N}$ para el que T^m es una contracción. Entonces, T tiene un único punto fijo en $u \in K$ y la sucesión definida por $u_{n+1} = T(u_n)$, $n \geq 0$ converge a u para cualquier $u_0 \in K$.*

Demostración. Por el Teorema 1.3.4, la aplicación T^m tiene un único punto fijo $u \in K$. Dado que $T^m(u) = u$, obtenemos $T^m(T(u)) = T(u)$. Entonces, $T(u) \in K$ también es punto fijo de T^m . Dado que T^m sólo puede tener un punto fijo, concluimos que $T(u) = u$, i.e. u es también punto fijo de T . La unicidad del punto fijo de T se deduce de que es único para T^m . Por otra parte, dado $u_0 \in K$ y definiendo $u_j = T(u_{j-1})$, $j = 1, \dots, m-1$, la sucesión

$$\{u_{mn+j}\}_{n \geq 0} = \{(T^m)^n(u_j)\}_{n \geq 0}$$

converge a u para cualquier $j = 0, 1, \dots, m-1$. Como consecuencia, la sucesión $\{u_n\}_{n \geq 0}$ converge a u . \square

1.4. Aproximación de tipo Ritz-Galerkin

La idea básica que subyace en una estrategia de tipo Ritz-Galerkin en espacios de Hilbert de dimensión infinita es la de aproximar sus elementos con sucesiones de elementos de subespacios de dimensión finita creciente. En ocasiones, para demostrar resultados de convergencia, necesitaremos algunas hipótesis más fuertes, como se muestra en lo que sigue.

Sean X e Y espacios de Hilbert y $X_0 \subset X$ un subconjunto convexo cerrado y no vacío de X . Sean, por otra parte, $X^h \subset X$ e $Y^h \subset Y$ ($h \rightarrow 0$) familias de subespacios de dimensión finita y $X_0^h \subseteq X_0 \cap X^h$.

Teorema 1.4.1. *Sea X^h un subespacio del espacio de Hilbert X . Sea $A : X \rightarrow X$ un operador simétrico y elíptico, lo que implica que existen $\alpha > 0$ y $M > 0$ tales que $(Av, v)_X \geq \alpha \|v\|_X^2$ y $\|Av\|_X \leq M \|v\|_X$ para todo $v \in X$. Dado un elemento $v \in X$ existe un único elemento $\mathcal{P}_{X^h}^A v$ tal que*

$$\mathcal{P}_{X^h}^A v \in X^h, \quad \|\mathcal{P}_{X^h}^A v - v\|_A = \inf_{w^h \in X^h} \|v - w^h\|_A,$$

siendo $\|\cdot\|_A$ la norma dada por $\|v\|_A^2 = (Av, v)_X$ para todo $v \in X$. Este elemento $\mathcal{P}_{X^h}^A v$ satisface

$$(\mathcal{P}_{X^h}^A v - v, Aw^h)_X = 0 \quad \forall w^h \in X^h.$$

Recíprocamente, si un elemento $v^h \in X^h$ satisface

$$(v^h - v, Aw^h)_X = 0 \quad \forall w^h \in X^h,$$

entonces $\mathcal{P}_{X^h}^A v = v^h$. El operador $\mathcal{P}_{X^h}^A : X \rightarrow X^h$ definido de esta forma es tal que

$$\|\mathcal{P}_{X^h}^A v\|_A \leq \|v\|_A,$$

o también $\|\mathcal{P}_{X^h}^A v\|_X \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \|v\|_X$.

Observación 1.4.2. En el teorema anterior, si A es el operador identidad, $A = I$, denotamos al operador de proyección por \mathcal{P}_{X^h} . Una versión más general del teorema de proyección se puede consultar en [17, Teorema 8.1-1], por ejemplo.

Supongamos que se verifican las siguientes propiedades.

$$(1.4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Existe un subespacio } \mathcal{U} \subset X, \text{ una constante } \alpha > 0 \text{ y} \\ \text{una función } c : \mathcal{U} \cap X_0 \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ tales que :} \\ (a) \mathcal{U} \cap X_0 \text{ es denso en } X_0; \\ (b) \text{ Para todo } v \in \mathcal{U} \cap X_0 \text{ se verifica} \\ \quad \inf_{v^h \in X_0^h} \|v^h - v\|_V \leq c(v) h^\alpha; \\ (c) \text{ Si } v \in C([0, T]; \mathcal{U} \cap X_0), \text{ entonces la función} \\ \quad \tilde{c} : t \in [0, T] \mapsto c(v(t)) \in \mathbb{R}_+ \text{ es tal que } \tilde{c} \in C([0, T]; \mathbb{R}_+). \end{array} \right.$$

$$(1.4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Existe un subespacio } \mathcal{Y} \subset Y, \text{ una constante } \alpha' > 0 \text{ y} \\ \text{una función } d : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ tales que} \\ (a) \mathcal{Y} \text{ es denso en } Y; \\ (b) \text{ Para todo } \tau \in \mathcal{Y} \text{ se verifica} \\ \quad \inf_{\tau^h \in Y^h} \|\tau^h - \tau\|_Y \leq d(\tau) h^{\alpha'}; \\ (c) \text{ Si } \tau \in C([0, T]; \mathcal{Y}), \text{ entonces la función} \\ \quad \tilde{d} : t \in [0, T] \mapsto d(\tau(t)) \in \mathbb{R}_+ \text{ es tal que } \tilde{d} \in C([0, T]; \mathbb{R}_+). \end{array} \right.$$

En estas condiciones podemos establecer el siguiente resultado de convergencia.

Teorema 1.4.3. Sea $(u, \sigma) \in C([0, T]; X_0 \times Y)$ y $\{(u^h, \sigma^h)\}_{h>0} \subset$

$C([0, T]; X_0^h \times Y^h)$ una familia dada tal que

$$(1.4.3) \quad \begin{aligned} & \|u - u^h\|_{C([0, T]; X)} + \|\sigma - \sigma^h\|_{C([0, T]; Y)} \\ & \leq c \max_{t \in [0, T]} \{g(\inf_{v^h \in X_0^h} \|u(t) - v^h\|_X)\} + \|(I - \mathcal{P}_{Y^h})\sigma\|_{C([0, T]; Y)}, \end{aligned}$$

donde la función g es tal que verifica

$$(1.4.4) \quad g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ es no decreciente, } g(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow 0^+.$$

Entonces, en las hipótesis (1.4.1) y (1.4.2) se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{\|u - u^h\|_{C([0, T]; X)} + \|\sigma - \sigma^h\|_{C([0, T]; Y)}\} = 0.$$

Demostración. Para cada $\epsilon > 0$, existen $v_\epsilon \in C([0, T]; \mathcal{U} \cap X_0)$ y $\tau_\epsilon \in C([0, T]; \mathcal{Y})$ tales que

$$(1.4.5) \quad \|u - v_\epsilon\|_{C([0, T]; X)} < \epsilon, \quad \|\sigma - \tau_\epsilon\|_{C([0, T]; Y)} < \epsilon.$$

Entonces utilizando (1.4.1), (1.4.2), (1.4.5) y la contractividad del operador de proyección \mathcal{P}_{Y^h} tenemos, para todo $t \in [0, T]$, las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned} \inf_{v^h \in X_0^h} \|u(t) - v^h\|_X & \leq \|u(t) - v_\epsilon(t)\|_X + \inf_{v^h \in X_0^h} \|v_\epsilon(t) - v^h\|_X \\ & \leq \epsilon + c(v_\epsilon(t))h^\alpha \leq \epsilon + \|c(v_\epsilon)\|_{C([0, T]; \mathbb{R})}h^\alpha, \\ \|(I - \mathcal{P}_{Y^h})\sigma(t)\|_Y & \leq \|\sigma(t) - \tau_\epsilon(t)\|_Y + \|\tau_\epsilon(t) - \mathcal{P}_{Y^h}\tau_\epsilon(t)\|_Y \\ & + \|\mathcal{P}_{Y^h}\tau_\epsilon(t) - \mathcal{P}_{Y^h}\sigma(t)\|_Y \leq 2\epsilon + c(\tau_\epsilon(t))h^{\alpha'} \leq 2\epsilon + \|c(\tau_\epsilon)\|_{C([0, T]; \mathbb{R})}h^{\alpha'}. \end{aligned}$$

Dado $\delta > 2\epsilon$ arbitrario, y tomando

$$h \leq \min\left\{\left(\frac{\delta - \epsilon}{\|c(v_\epsilon)\|_{C([0, T]; \mathbb{R})}}\right)^{1/\alpha}, \left(\frac{\delta - 2\epsilon}{\|c(\tau_\epsilon)\|_{C([0, T]; \mathbb{R})}}\right)^{1/\alpha'}\right\},$$

se tiene

$$\inf_{v^h \in X_0^h} \|u(t) - v^h\|_X \leq \delta, \quad \|(I - \mathcal{P}_{Y^h})\sigma(t)\|_Y \leq \delta \quad \forall t \in [0, T].$$

Por otra parte, de (1.4.4) deducimos que para todo $\zeta > 0$, existe $\delta_0 > 0$, tal que $g(r) < \zeta$ para todo $r \in (0, \delta_0]$. Dado que ϵ y por tanto δ son arbitrariamente pequeños podemos tomar $\delta \leq \delta_0$ y entonces,

$$g\left(\inf_{v^h \in X_0^h} \|u(t) - v^h\|_X\right) \leq \zeta \quad \forall t \in [0, T].$$

A partir de (1.4.3) se tiene

$$\|\sigma - \sigma^h\|_{C([0, T]; Y)} + \|u - u^h\|_{C([0, T]; X)} \leq c\zeta + \delta,$$

y se deduce la convergencia por ser δ y ζ arbitrariamente pequeños. \square

Disponemos del siguiente corolario. Su demostración es un caso particular de la anterior.

Corolario 1.4.4. *Sea $u \in C([0, T]; X_0)$ y $\{u^h\}_{h>0} \subset C([0, T]; X_0^h)$ una familia dada tal que*

$$\|u - u^h\|_{C([0, T]; X)} \leq c \max_{t \in [0, T]} \left\{ g\left(\inf_{v^h \in X_0^h} \|u(t) - v^h\|_X\right) \right\},$$

donde la función g verifica (1.4.4). Entonces, bajo la hipótesis (1.4.1) se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \|u - u^h\|_{C([0, T]; X)} \right\} = 0.$$

1.5. Discretización de la variable temporal

Las inecuaciones variacionales que nos interesan en esta memoria son evolutivas, por lo que para obtener un problema totalmente discretizado que aproxime la solución, se requiere la discretización de aquellos términos que dependan de la variable temporal. En nuestro caso, estamos interesados en aproximar un término de la forma

$$(1.5.1) \quad \int_0^t B(t-s)w(s)ds, \quad t \in [0, T],$$

donde $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(X))$ y $w \in C([0, T]; X)$, siendo X un espacio de Banach y $\mathcal{L}(X)$ el espacio de funciones lineales continuas definidas en X con valores en X . Para ello, consideramos primeramente una partición del intervalo temporal $[0, T]$:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_{N-1} < t_N = T.$$

Definimos los pasos $k_n = t_n - t_{n-1}$, $1 \leq n \leq N$ y sea $k = \max_{1 \leq n \leq N} k_n$. De forma general, denotamos $w_j = w(t_j)$ y en concreto, para cada instante t_n , con $1 \leq n \leq N$, definimos $B^{n,j} = B(t_n - t_j)$, donde $0 \leq j \leq n$. Nótese que $B^{n,n} = B_0$ y que un índice n o j repetido no denota suma. Además el índice j no toma por defecto valores enteros entre 1 y d , como en otras secciones. Aproximamos la expresión (1.5.1) para $t = t_n$ mediante la fórmula de cuadratura

$$(1.5.2) \quad \int_0^{t_n} B(t_n - s)w(s)ds \simeq \sum_{j=0}^n \alpha_j^n B^{n,j} w_j, \quad 1 \leq n \leq N.$$

Para cada instante t_n , $1 \leq n \leq N$, las constantes $\alpha_j^n \geq 0$, $0 \leq j \leq n$, son los pesos de una fórmula de cuadratura de $n + 1$ puntos en $[0, t_n]$. En la práctica se usará la fórmula de trapecios compuesta, que es exacta para funciones continuas y afines a trozos en $[0, t_n]$, donde los subintervalos son $[t_j, t_{j+1}]$, i.e.

$$(1.5.3) \quad \alpha_0^n = \frac{1}{2}(t_1 - t_0), \quad \alpha_n^n = \frac{1}{2}(t_n - t_{n-1}), \quad \alpha_j^n = \frac{1}{2}(t_{j+1} - t_{j-1}),$$

donde $1 \leq j \leq n - 1$. Como consecuencia, se verifica

$$(1.5.4) \quad \alpha_n^n \leq k/2.$$

Es posible utilizar otra fórmula de cuadratura, siempre que los nodos sean t_0, \dots, t_n y se verifique (1.5.4). Al aproximar el valor de la integral como en (1.5.2), se comete el error numérico dado por

$$(1.5.5) \quad I_n = \left\| \int_0^{t_n} B(t_n - s)w(s)ds - \sum_{j=0}^n \alpha_j^n B^{n,j} w_j \right\|_X, \quad 1 \leq n \leq N,$$

siendo por conveniencia en la notación $I_0 = 0$. Como es natural, se requiere que I_n sea tal que

$$(1.5.6) \quad \lim_{k \rightarrow 0} I_n = 0, \quad 1 \leq n \leq N.$$

Dicha condición se verifica utilizando la fórmula de trapecios compuesta.

Teorema 1.5.1. Sean $w \in C([0, T]; X)$ y $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(X))$. El error numérico I_n cometido por la fórmula de cuadratura de trapecios compuesta, definida por (1.5.3), verifica (1.5.6). Además, si w y B son funciones de Lipschitz, se tiene

$$(1.5.7) \quad I_n \leq ck(\|w\|_{C([0, T]; X)} + \|B\|_{C([0, T]; \mathcal{L}(X))}), \quad 0 \leq n \leq N.$$

Demostración. Dado que $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(X))$ y $w \in C([0, T]; X)$ concluimos que, para un n dado, la función $\phi_n : [0, t_n] \rightarrow X$ definida por $\phi_n(s) = B(t_n - s)w(s)$ es de $C([0, t_n]; X)$. En consecuencia, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\tilde{k} > 0$ tal que si $k \leq \tilde{k}$ entonces

$$\|B(t_n - s)w(s) - B^{n,j}w_j\|_X \leq \frac{\varepsilon}{t_n}$$

para todo $s \in [t_j, t_{j+1}]$ y $0 \leq j < n$. Entonces, utilizando (1.5.3), tenemos

$$\begin{aligned} I_n &= \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} B(t_n - s)w(s)ds - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} k_{j+1} (B^{n,j}w_j + B^{n,j+1}w_{j+1}) \right\|_X \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|B(t_n - s)w(s) - B^{n,j}w_j\|_X ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|B(t_n - s)w(s) - B^{n,j+1}w_{j+1}\|_X ds \right\} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

y en consecuencia se verifica (1.5.6). Por otra parte, sumando y restando adecuadamente en la expresión anterior, tenemos

$$I_n \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} k \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\frac{\|B(t_n - s) - B^{n,j+1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|w(s)\|_X}{t_{j+1} - s} + \frac{\|B^{n,j+1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|w(s) - w_{j+1}\|_X}{t_{j+1} - s} + \frac{\|B(t_n - s) - B^{n,j}\|_{\mathcal{L}(X)} \|w(s)\|_X}{s - t_j} + \frac{\|B^{n,j}\|_{\mathcal{L}(X)} \|w(s) - w_j\|_X}{s - t_j} \right) ds,$$

por lo que, si w y B son funciones de Lipschitz en $[0, T]$, se verifica (1.5.7). \square

El siguiente resultado nos proporciona una estimación del error de orden $\mathcal{O}(k^2)$ en la integración numérica pero, en contraprestación, requiere una mayor regularidad de las funciones involucradas.

Teorema 1.5.2. *Supongamos que X es un espacio de Banach reflexivo. Sean $w \in W^{2,\infty}(0, T; X)$ y $B \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{L}(X))$. Además, suponemos que B y \dot{B} son funciones de Lipschitz en $[0, T]$. El error numérico I_n cometido por la fórmula de cuadratura de trapecios compuesta, definida por (1.5.3), verifica que*

$$I_n \leq ck^2,$$

donde c depende de w, B y T .

Demostración. Explicitando la expresión de los polinomios de interpolación de Lagrange que intervienen en la fórmula de trapecios compuesta, sabemos que

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j^n B^{n,j} w_j = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{B^{n,j} w_j (t_{j+1} - s) + B^{n,j+1} w_{j+1} (s - t_j)}{k_{j+1}} ds.$$

Por tanto,

$$(1.5.8) \quad I_n \leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left\| B(t_n - s)w(s) - \frac{B^{n,j}w_j(t_{j+1} - s) + B^{n,j+1}w_{j+1}(s - t_j)}{k_{j+1}} \right\|_X ds.$$

Por otra parte, se tiene

$$\frac{d}{ds} \{B(t_n - s)w(s)\} = -\dot{B}(t_n - s)w(s) + B(t_n - s)\dot{w}(s)$$

y para cada j , $0 \leq j \leq n - 1$ existen $\xi_j, \tilde{\xi}_j \in (t_j, t_{j+1})$ tales que, para todo $s \in [t_j, t_{j+1}]$,

$$\begin{aligned} (t_{j+1} - s)B(t_n - s)w(s) &= B^{n,j}w_j(t_{j+1} - s) \\ &\quad + (B(t_n - \xi_j)\dot{w}(\xi_j) - \dot{B}(t_n - \xi_j)w(\xi_j))(t_{j+1} - s)(s - t_j), \\ (s - t_j)B(t_n - s)w(s) &= B^{n,j+1}w_{j+1}(s - t_j) \\ &\quad - (B(t_n - \tilde{\xi}_j)\dot{w}(\tilde{\xi}_j) - \dot{B}(t_n - \tilde{\xi}_j)w(\tilde{\xi}_j))(t_{j+1} - s)(s - t_j). \end{aligned}$$

Sumando las dos expresiones anteriores, tenemos

$$(1.5.9) \quad \begin{aligned} B(t_n - s)w(s) &= \frac{B^{n,j}w_j(t_{j+1} - s) + B^{n,j+1}w_{j+1}(s - t_j)}{k_{j+1}} \\ &\quad + \frac{(\dot{B}(t_n - \tilde{\xi}_j)w(\tilde{\xi}_j) - B(t_n - \tilde{\xi}_j)\dot{w}(\tilde{\xi}_j))(t_{j+1} - s)(s - t_j)}{k_{j+1}} \\ &\quad + \frac{(B(t_n - \xi_j)\dot{w}(\xi_j) - \dot{B}(t_n - \xi_j)w(\xi_j))(t_{j+1} - s)(s - t_j)}{k_{j+1}}. \end{aligned}$$

Sustituyendo (1.5.9) en (1.5.8) y dado que $\max\{|s - t_{j+1}|, |s - t_j|\} \leq k_{j+1}$,

obtenemos

$$\begin{aligned} I_n &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} k_{j+1} \|B(t_n - \tilde{\xi}_j)\dot{w}(\tilde{\xi}_j) - \dot{B}(t_n - \tilde{\xi}_j)w(\tilde{\xi}_j) \\ &\quad + \dot{B}(t_n - \xi_j)w(\xi_j) - B(t_n - \xi_j)\dot{w}(\xi_j)\|_X ds. \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que las funciones B, \dot{B}, w y \dot{w} son de Lipschitz en $[0, T]$, sumando y restando los términos adecuados, se tiene

$$I_n \leq c \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} k_{j+1}^2 \leq ck^2,$$

donde c es una constante positiva que depende de B, \dot{B}, w, \dot{w} y T . \square

1.6. Aproximación totalmente discreta

Estudiaremos un resultado de convergencia basado en los argumentos de densidad de la Sección 1.1 y un lema que es una versión discreta del Lema de Gronwall, que será utilizado para la obtención de una estimación de error en la aproximación numérica totalmente discreta (ver pág. 54).

Sean X e Y espacios de Hilbert y $X_0 \subset X$ un subconjunto convexo cerrado y no vacío de X . Sean, por otra parte, $X^h \subset X$ e $Y^h \subset Y$ ($h \rightarrow 0$) familias de subespacios de dimensión finita y para cada $h > 0$ sea $X_0^h \subseteq X_0 \cap X^h$.

Si se verifican las hipótesis (1.4.1) y (1.4.2) podemos plantear el siguiente resultado de convergencia.

Teorema 1.6.1. *Sea $(u, \sigma) \in C([0, T]; X_0 \times Y)$ y $(\{u_n^{hk}\}_{n=0}^N, \{\sigma_n^{hk}\}_{n=0}^N) \subset X_0^h \times Y^h$ una familia dada ($h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$), tal que*

$$(1.6.1) \quad \begin{aligned} & \max_{0 \leq n \leq N} \{ \|u_n - u_n^{hk}\|_X + \|\sigma_n - \sigma_n^{hk}\|_Y \} \\ & \leq c g \left(\max_{0 \leq n \leq N} \left\{ \inf_{v^h \in X_0^h} \|u_n - v^h\|_X \right\} \right) + c \max_{0 \leq n \leq N} \{ I_n + \|I - \mathcal{P}_{Y^h} \sigma_n\|_Y \}, \end{aligned}$$

donde c es una constante no negativa, I_n es una expresión de la forma (1.5.5) y la función g verifica (1.4.4). Entonces, en las hipótesis (1.4.1), (1.4.2) y (1.5.6), se tiene

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} \left\{ \max_{0 \leq n \leq N} \{ \|u_n - u_n^{hk}\|_X + \|\sigma_n - \sigma_n^{hk}\|_Y \} \right\} = 0.$$

Demostración. Para cada $\epsilon > 0$ y para cada $n, 0 \leq n \leq N$, existen $v_{n, \epsilon} \in$

$\mathcal{U} \cap X_0$ y $\tau_{n,\epsilon} \in \mathcal{Y}$ tales que

$$(1.6.2) \quad \|u_n - v_{n,\epsilon}\|_X \leq \epsilon, \quad \|\sigma_n - \tau_{n,\epsilon}\|_Y \leq \epsilon.$$

Entonces, utilizando (1.4.1), (1.4.2) y (1.6.2) tenemos

$$\begin{aligned} \inf_{v^h \in X_0^h} \|u_n - v^h\|_X &\leq \|u_n - v_{n,\epsilon}\|_X + \inf_{v^h \in X_0^h} \|v_{n,\epsilon} - v^h\|_X \\ &\leq \epsilon + c(v_{n,\epsilon})h^\alpha \leq \epsilon + \max_{0 \leq n \leq N} \{c(v_{n,\epsilon})\}h^\alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(I - \mathcal{P}_{Y^h})\sigma_n\|_Y &\leq \|\sigma_n - \tau_{n,\epsilon}\|_Y + \|\tau_{n,\epsilon} - \mathcal{P}_{Y^h}\tau_{n,\epsilon}\|_Y + \|\mathcal{P}_{Y^h}\tau_{n,\epsilon} - \mathcal{P}_{Y^h}\sigma_n\|_Y \\ &\leq 2\epsilon + c(\tau_{n,\epsilon})h^{\alpha'} \leq 2\epsilon + \max_{0 \leq n \leq N} \{c(\tau_{n,\epsilon})\}h^{\alpha'}. \end{aligned}$$

En consecuencia, dado $\delta > 2\epsilon$ arbitrario, tomando

$$h \leq \min \left\{ \left(\frac{\delta - \epsilon}{\max_{0 \leq n \leq N} \{c(v_{n,\epsilon})\}} \right)^{1/\alpha}, \left(\frac{\delta - 2\epsilon}{\max_{0 \leq n \leq N} \{c(\tau_{n,\epsilon})\}} \right)^{1/\alpha'} \right\},$$

se verifica

$$\max_{0 \leq n \leq N} \left\{ \inf_{v^h \in X_0^h} \|u_n - v^h\|_X \right\} \leq \delta, \quad \max_{0 \leq n \leq N} \left\{ \|(I - \mathcal{P}_{Y^h})\sigma_n\|_Y \right\} \leq \delta.$$

Por otra parte, de (1.4.4) deducimos que para todo $\zeta > 0$, existe $\delta_0 > 0$, tal que $g(r) < \zeta$ para todo $r \in (0, \delta_0]$. Dado que ϵ y por tanto δ son arbitrariamente pequeños podemos tomar $\delta \leq \delta_0$ y entonces,

$$g \left(\max_{0 \leq n \leq N} \left\{ \inf_{v^h \in X_0^h} \|u_n - v^h\|_X \right\} \right) \leq \zeta.$$

Por otra parte, de (1.5.6) concluimos que para k suficientemente pequeño,

$$\max_{0 \leq n \leq N} I_n \leq \delta.$$

Por tanto, en estas condiciones, a partir de (1.6.1) se tiene

$$\max_{0 \leq n \leq N} \left\{ \|\sigma_n - \sigma_n^{hk}\|_Q + \|u_n - u_n^{hk}\|_X \right\} \leq c(\zeta + 2\delta).$$

y se deduce la convergencia por ser δ y ζ arbitrariamente pequeños. \square

Disponemos del siguiente corolario. La demostración es un caso particular de la anterior.

Corolario 1.6.2. *Sea $u \in C([0, T]; X_0)$ y $\{u_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset X_0^h$ una familia dada ($h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$) tales que*

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq n \leq N} \{\|u_n - u_n^{hk}\|_X\} \\ & \leq c g \left(\max_{0 \leq n \leq N} \left\{ \inf_{v^h \in X_0^h} \|u_n - v^h\|_X \right\} \right) + c \max_{0 \leq n \leq N} I_n, \end{aligned}$$

donde c es una constante no negativa, I_n es una expresión de la forma (1.5.5) y la función g verifica (1.4.4). Entonces, en las hipótesis (1.4.1), y (1.5.6), se tiene

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} \left\{ \max_{0 \leq n \leq N} \{\|u_n - u_n^{hk}\|_X\} \right\} = 0.$$

Finalizamos con una versión discreta del Lema de Gronwall.

Lema 1.6.3. *Sean $\{e_n\}_{n=0}^N, \{g_n\}_{n=0}^N$ y $\{\alpha_n\}_{n=0}^N$ sucesiones de números reales no negativos verificando*

$$(1.6.3) \quad e_0 \leq c g_0,$$

$$(1.6.4) \quad e_n \leq c g_n + c \sum_{j=0}^n \alpha_j e_j, \quad 1 \leq n \leq N,$$

donde c es una constante positiva independiente de N . Entonces, si además

$$(1.6.5) \quad c \alpha_n \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq n \leq N,$$

se concluye que

$$\max_{0 \leq n \leq N} e_n \leq d_N \max_{0 \leq n \leq N} g_n,$$

siendo $d_N = c(1 + c T_N e^{2c T_N})$ y $T_N = \sum_{n=0}^N \alpha_n$.

Demostración. Para todo i , $0 \leq i \leq N$, definimos $E_i = \sum_{j=0}^i \alpha_j e_j$. Consideramos n , $1 \leq n \leq N$ y tenemos que

$$E_n - E_{n-1} = \alpha_n e_n \leq c\alpha_n g_n + c\alpha_n E_n.$$

Por tanto, se verifica

$$E_n(1 - c\alpha_n) \leq E_{n-1} + c\alpha_n g_n.$$

Definimos ahora $z_i = \prod_{j=0}^i (1 - c\alpha_j)$ para todo i , $0 \leq i \leq N$, multiplicamos la desigualdad anterior por z_{n-1} y se tiene

$$z_n E_n \leq z_{n-1} E_{n-1} + z_{n-1} c\alpha_n g_n.$$

Aplicando sucesivamente esta desigualdad, llegamos a que

$$(1.6.6) \quad z_n E_n \leq z_0 E_0 + c \sum_{j=1}^n z_{j-1} \alpha_j g_j.$$

Por otra parte, de la propiedad (1.6.5) y del análisis de las funciones reales de variable real e^x y e^{2x} en el entorno de $x = 0$, se deduce que

$$e^{-2\alpha_j c} \leq 1 - \alpha_j c \leq e^{-\alpha_j c} \leq 1, \quad 0 \leq j \leq N.$$

Por tanto, para todo i , $0 \leq i \leq N$, se verifica

$$(1.6.7) \quad e^{-2c \sum_{j=0}^i \alpha_j} \leq z_i \leq 1.$$

A partir de (1.6.3), (1.6.6) y (1.6.7) concluimos que

$$E_n \leq c e^{2c \sum_{j=0}^n \alpha_j} \sum_{j=0}^n \alpha_j g_j.$$

Por tanto, de la definición de E_n y (1.6.4), se concluye que

$$e_n \leq c g_n + c E_n \leq c g_n + c^2 e^{2c \sum_{j=0}^n \alpha_j} \sum_{j=0}^n \alpha_j g_j,$$

de donde se concluye la demostración del lema tomando máximos. \square

Capítulo 2

Inecuaciones variacionales con término integral de Volterra

En este capítulo introducimos la clase de inecuaciones variacionales evolutivas con término integral de tipo Volterra y estudiamos la existencia y unicidad de solución y sus propiedades. A continuación se plantean y estudian un esquema semidiscreto y un esquema totalmente discretizado para la aproximación numérica de la solución. En ambos casos se presentan resultados de existencia y unicidad de la solución discreta y de convergencia y estimación del error.

2.1. El problema abstracto

Sea X un espacio de Hilbert real dotado del producto interior $(\cdot, \cdot)_X$ y la norma correspondiente $\|\cdot\|_X$. Dados un subconjunto $X_0 \subset X$, un intervalo temporal $[0, T]$, $T > 0$, una aplicación $f : [0, T] \rightarrow X$ y los operadores $A : X \rightarrow X$ y $B : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(X)$ planteamos el siguiente problema, que denominaremos problema P_A o *problema abstracto* indistintamente.

PROBLEMA P_A : Hallar $u : [0, T] \rightarrow X$ tal que

$$(2.1.1) \quad u(t) \in X_0, \quad (Au(t), v - u(t))_X + \left(\int_0^t B(t-s)u(s)ds, v - u(t) \right)_X \\ \geq (f(t), v - u(t))_X \quad \forall v \in X_0, \quad t \in [0, T].$$

En el estudio del problema P_A suponemos las siguientes hipótesis:

$$(2.1.2) \quad X_0 \text{ es un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de } X,$$

A es un operador fuertemente monótono y lipschitziano, esto es

$$(2.1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) existe } m > 0 \text{ tal que} \\ \quad (Av - Aw, v - w)_X \geq m\|v - w\|_X^2 \quad \forall v, w \in X, \\ \text{(b) existe } L > 0 \text{ tal que} \\ \quad \|Av - Aw\|_X \leq L\|v - w\|_X \quad \forall v, w \in X, \end{array} \right.$$

$$(2.1.4) \quad B \in C([0, T]; \mathcal{L}(X)),$$

$$(2.1.5) \quad f \in C([0, T]; X).$$

A continuación desarrollamos el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.1.1. *En las hipótesis (2.1.2)–(2.1.5) existe una única solución del problema P_A tal que $u \in C([0, T]; X)$.*

Demostración. Utilizaremos argumentos de punto fijo y de inecuaciones variacionales. El resultado será establecido en varias etapas.

Sea $\eta \in C([0, T]; X)$ arbitrario y consideremos el problema auxiliar siguiente:

PROBLEMA P_A^η : Hallar $u_\eta : [0, T] \rightarrow X$ tal que

$$(2.1.6) \quad u_\eta(t) \in X_0, \quad (Au_\eta(t), v - u_\eta(t))_X + (\eta(t), v - u_\eta(t))_X \\ \geq (f(t), v - u_\eta(t))_X, \quad \forall v \in X_0, \quad t \in [0, T].$$

Para cada $t \in [0, T]$, estamos en condiciones de aplicar el Corolario 1.2.2, por lo que existe un único $u_\eta(t) \in X_0$ solución de (2.1.6). Además, la solución es Lipschitz dependiente de los datos, esto es, dados $t_1, t_2 \in [0, T]$ se tiene

$$(2.1.7) \quad \|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\|_X \leq \frac{1}{m} (\|f(t_1) - f(t_2)\|_X + \|\eta(t_1) - \eta(t_2)\|_X).$$

Por tanto, dado que $f, \eta \in C([0, T]; X)$, deducimos que $u_\eta \in C([0, T]; X)$.

Consideramos ahora el operador $\Lambda : C([0, T]; X) \rightarrow C([0, T]; X)$ definido por

$$(2.1.8) \quad \Lambda\eta(t) = \int_0^t B(t-s)u_\eta(s) ds, \quad \forall \eta \in C([0, T]; X), \quad t \in [0, T],$$

donde u_η es la solución de P_A^η . De (2.1.4) y la continuidad de u_η se obtiene que Λ está bien definido, dado que $\Lambda\eta \in C([0, T]; X)$. Aún más, probaremos que Λ tiene un único punto fijo $\eta^* \in C([0, T]; X)$. En efecto, sean $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T]; X)$ arbitrarios y sea $t \in [0, T]$. Utilizando (2.1.8) concluimos

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_X \leq \int_0^t \|B(t-s)\|_{\mathcal{L}(X)} \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_X ds,$$

y, recordando (2.1.4), se sigue que

$$(2.1.9) \quad \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_X \leq c \int_0^t \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_X ds,$$

donde c depende del operador B . Tomando ahora en (2.1.6) $v = u_{\eta_1}(t)$ y $\eta = \eta_2$ primero y $v = u_{\eta_2}(t)$ y $\eta = \eta_1$ después, sumando las expresiones así obtenidas y aplicando la fuerte monotonía de A , tenemos

$$(2.1.10) \quad \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_X \leq \frac{1}{m} \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_X, \quad \forall s \in [0, T].$$

Combinando (2.1.9) y (2.1.10) se tiene

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_X \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_X ds.$$

Reiterando esta desigualdad n veces, tenemos

$$\|\Lambda^n \eta_1(t) - \Lambda^n \eta_2(t)\|_X \leq c^n \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_X ds \cdot ds_{n-1} \cdot \dots \cdot ds_1.$$

de donde se deduce

$$\|\Lambda^n \eta_1 - \Lambda^n \eta_2\|_{C([0,T];X)} \leq \frac{c^n T^n}{n!} \|\eta_1 - \eta_2\|_{C([0,T];X)}.$$

Por tanto, para n suficientemente grande, $\frac{c^n T^n}{n!} < 1$ y, en consecuencia, Λ^n es una contracción en $C([0,T];X)$. Por tanto, existe un único $\eta^* \in C([0,T];X)$ tal que $\Lambda^n \eta^* = \eta^*$, y η^* es también el único punto fijo de Λ , tal y como se deduce del Corolario 1.3.5.

Estamos ya en condiciones de demostrar el teorema. En efecto, sea $\eta^* \in C([0,T];X)$ el punto fijo de Λ y sea u_{η^*} la función definida por (2.1.6) para $\eta = \eta^*$. Es claro que u_{η^*} es una solución del problema P_A con regularidad $u_{\eta^*} \in C([0,T];X)$.

La unicidad es consecuencia de la del punto fijo del operador Λ , aunque también puede demostrarse operando en (2.1.1). En efecto, sean $u_1, u_2 \in C([0,T];X)$ dos soluciones de P_A . Tomando en (2.1.1) $v = u_1(t)$ y $u = u_2$ primero y $v = u_2(t)$ y $u = u_1$ después, se tiene que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_X \leq c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Aplicando el Lema de Gronwall (ver Lema 1.3.3) para el caso no trivial ($t \in (0, T]$) concluimos que $u_1(t) = u_2(t)$ para todo $t \in [0, T]$. \square

2.2. Dependencia respecto al término integral

Dado $\theta > 0$, consideramos una función $B_\theta : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(X)$ verificando

$$(2.2.1) \quad B_\theta \in C([0, T]; \mathcal{L}(X)),$$

y plantemos el siguiente problema:

PROBLEMA $(P_A)_\theta$: Hallar $u_\theta : [0, T] \rightarrow X$ tal que

$$(2.2.2) \quad u_\theta(t) \in X_0, \quad (Au_\theta(t), v - u_\theta(t))_X + \left(\int_0^t B_\theta(t-s)u_\theta(s)ds, v - u_\theta(t) \right)_X \\ \geq (f(t), v - u_\theta(t))_X, \quad \forall v \in X_0, \quad t \in [0, T].$$

Del Teorema 2.1.1 se deduce la existencia y unicidad de solución para el problema $(P_A)_\theta$:

Teorema 2.2.1. *En las hipótesis (2.1.2), (2.1.3), (2.1.5) y (2.2.1), existe una única solución $u_\theta \in C([0, T]; X)$ del problema $(P_A)_\theta$.*

Tenemos el siguiente resultado de convergencia:

Teorema 2.2.2. *Suponemos las hipótesis del Teorema 2.1.1 y del Teorema 2.2.1 y además*

$$(2.2.3) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \|B_\theta - B\|_{C([0, T]; \mathcal{L}(X))} = 0.$$

Entonces, cuando $\theta \rightarrow 0$, la solución del problema $(P_A)_\theta$ converge a la solución del problema P_A , esto es

$$(2.2.4) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \|u_\theta - u\|_{C([0, T]; X)} = 0.$$

Demostración. Sea $t \in [0, T]$. Tomamos $v = u(t)$ en (2.2.2) y $v = u_\theta(t)$ en (2.1.1). Posteriormente, sumamos las expresiones así obtenidas y nos queda

$$(Au_\theta(t) - Au(t), u_\theta(t) - u(t))_X \\ \leq \left(\int_0^t (B_\theta(t-s)u_\theta(s) - B(t-s)u(s))ds, u(t) - u_\theta(t) \right)_X.$$

Aplicando (2.1.3) y la desigualdad de Cauchy-Schwartz en la expresión anterior, tenemos

$$(2.2.5) \quad \|u_\theta(t) - u(t)\|_X \leq c \int_0^t \|B_\theta(t-s)u_\theta(s) - B(t-s)u(s)\|_X ds.$$

Por otra parte, se tiene

$$\begin{aligned}
& \|B_\theta(t-s)u_\theta(s) - B(t-s)u(s)\|_X \\
& \leq \|B_\theta(t-s)(u_\theta(s) - u(s))\|_X + \|B_\theta(t-s)u(s) - B(t-s)u(s)\|_X \\
& \leq c \left(\|B_\theta(t-s)\|_{\mathcal{L}(X)} \|u_\theta(s) - u(s)\|_X + \|B_\theta(t-s) - B(t-s)\|_{\mathcal{L}(X)} \|u(s)\|_X \right) \\
& \leq c \left(\|B_\theta\|_{C([0,T];\mathcal{L}(X))} \|u_\theta(s) - u(s)\|_X + \|B_\theta - B\|_{C([0,T];\mathcal{L}(X))} \|u(s)\|_X \right),
\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad anterior en (2.2.5), se tiene

$$\begin{aligned}
(2.2.6) \quad \|u_\theta(t) - u(t)\|_X & \leq c \left(\|B_\theta\|_{C([0,T];\mathcal{L}(X))} \int_0^t \|u_\theta(s) - u(s)\|_X ds \right. \\
& \quad \left. + \|B_\theta - B\|_{C([0,T];\mathcal{L}(X))} \int_0^t \|u(s)\|_X ds \right).
\end{aligned}$$

Por otra parte, de la convergencia de B_θ hacia B deducimos que para θ suficientemente próximo a 0 existe una constante c arbitrariamente pequeña tal que

$$(2.2.7) \quad \|B_\theta\|_{C([0,T];\mathcal{L}(X))} \leq c + \|B\|_{C([0,T];\mathcal{L}(X))}.$$

Utilizando (2.2.7) en (2.2.6) concluimos

$$\|u_\theta(t) - u(t)\|_X \leq c \left(\int_0^t \|u_\theta(s) - u(s)\|_X ds + \|B_\theta - B\|_{C([0,T];\mathcal{L}(X))} \right),$$

donde c depende de u y B . Finalmente, utilizando el lema de Gronwall, se tiene

$$(2.2.8) \quad \|u_\theta(t) - u(t)\|_X \leq c \|B_\theta - B\|_{C([0,T];\mathcal{L}(X))},$$

para todo $t \in [0, T]$ y (2.2.4) se concluye a partir de (2.2.8) y la condición (2.2.3). \square

2.3. Aproximación semidiscreta

En esta sección asumimos que se verifican las condiciones del Teorema 2.1.1, por lo que el problema P_A tiene una única solución $u \in C([0, T]; X)$. Con-

sideramos una familia de subespacios $X^h \subset X$, ($h \rightarrow 0$), de dimensión finita, que en las aplicaciones será un espacio de elementos finitos. Sea además $X_0^h \subseteq X_0 \cap X^h$ un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de X^h . Entonces, un esquema semidiscreto para la aproximación de la solución del problema P_A puede formularse como sigue:

PROBLEMA P_A^h : Hallar $u^h : [0, T] \rightarrow X^h$ tal que

$$(2.3.1) \quad u^h(t) \in X_0^h, \quad (Au^h(t) + \int_0^t B(t-s)u^h(s)ds, v^h - u^h(t))_X \\ \geq (f(t), v^h - u^h(t))_X \quad \forall v^h \in X_0^h, \quad t \in [0, T].$$

Utilizando los mismos argumentos del Teorema 2.1.1, concluimos que el problema P_A^h tiene una única solución $u^h \in C([0, T]; X^h)$:

Teorema 2.3.1. Si $X_0^h \subset X^h$ es un subconjunto convexo, cerrado y no vacío, en las hipótesis (2.1.3)–(2.1.5) existe una única solución $u^h \in C([0, T]; X^h)$ del problema P_A^h .

Nuestro interés consiste ahora en el estudio del error cometido en la aproximación, esto es, $\|u - u^h\|_{C([0, T], X)}$.

Teorema 2.3.2. Suponemos las hipótesis del Teorema 2.3.1. Sean $u \in C([0, T]; X)$ y $u^h \in C([0, T]; X^h)$ las soluciones de los problemas P_A y P_A^h , respectivamente. Entonces, para todo $t \in [0, T]$, se verifica la desigualdad

$$(2.3.2) \quad \|u - u^h\|_{C([0, T]; X)} \leq c \max_{t \in [0, T]} \left\{ \inf_{v^h \in X_0^h} \{ \|v^h - u(t)\|_X + R(t; u, v^h)^{\frac{1}{2}} \} \right\},$$

donde c es una constante positiva que depende de A y B , y

$$R(t; u, v^h) = (Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds - f(t), v^h - u(t))_X.$$

Demostración. Sea $t \in [0, T]$. Tomamos $v = u^h(t)$ en (2.1.1) y sumamos el resultado a (2.3.1). Tras algunas operaciones tenemos

$$\begin{aligned} (Au(t) - Au^h(t), u(t) - u^h(t))_X &\leq (Au^h(t) - Au(t), v^h - u(t))_X \\ &+ \left(\int_0^t B(t-s)(u(s) - u^h(s))ds, u^h(t) - v^h \right)_X + (Au(t), v^h - u(t))_X \\ &+ \left(\int_0^t B(t-s)u(s)ds, v^h - u(t) \right)_X - (f(t), v^h - u(t))_X, \end{aligned}$$

para todo $v^h \in X_0^h$. Usando ahora (2.1.3), (2.1.4) y (2.1.5) en la desigualdad precedente, tenemos

$$\begin{aligned} (2.3.3) \quad \|u(t) - u^h(t)\|_X^2 &\leq c(A, B) (\|v^h - u(t)\|_X \|u(t) - u^h(t)\|_X \\ &+ R(t; u, v^h) + \|v^h - u^h(t)\|_X \int_0^t \|u(s) - u^h(s)\|_X ds), \end{aligned}$$

para todo $v^h \in X_0^h$, donde

$$(2.3.4) \quad R(t; u, v^h) = (Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds - f(t), v^h - u(t))_X,$$

que es positivo, como se deduce de (2.1.1). Además, utilizando que $ab \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta}$ para todo $\delta > 0$, de (2.3.3) deducimos

$$\begin{aligned} (2.3.5) \quad \|u(t) - u^h(t)\|_X &\leq c(A, B) (\|v^h - u(t)\|_X \\ &+ \int_0^t \|u(s) - u^h(s)\|_X ds + R(t; u, v^h)^{\frac{1}{2}}), \quad \forall v^h \in X_0^h. \end{aligned}$$

Utilizando el Lema de Gronwall, concluimos a partir de (2.3.5) el resultado deseado. □

La desigualdad (2.3.2) es la base para el análisis del error en la aproximación semidiscreta de todos los problemas de contacto que encuadraremos en el marco del problema P_A en los capítulos 6–8.

Corolario 2.3.3. *Sea X^h ($h \rightarrow 0$) una familia de subespacios de X de dimensión finita y para cada $h > 0$ sea $X_0^h \subseteq X^h \cap X_0$ un subconjunto convexo*

cerrado y no vacío de X^h . En las condiciones del Teorema 2.3.2 se verifica

$$\|u - u^h\|_{C([0,T];X)} \leq c \max_{t \in [0,T]} \left\{ \inf_{v^h \in X_0^h} \{ \|v^h - u(t)\|_X + \|v^h - u(t)\|_X^{\frac{1}{2}} \} \right\}.$$

Si además se verifica (1.4.1), se tiene

$$(2.3.6) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \{ \|u^h - u\|_{C([0,T];X)} \} = 0.$$

Demostración. Basta tener en cuenta (2.3.2) y que

$$(2.3.7) \quad R(t; u, v^h) \leq c(A, B, f, u) \|v^h - u(t)\|_X.$$

Observamos entonces que para $g(r) = r + r^{\frac{1}{2}}$ estamos en las condiciones del Corolario 1.4.4, de donde se obtiene (2.3.6). \square

2.4. Aproximación totalmente discreta

En esta sección suponemos, como en la anterior, que se verifican las condiciones del Teorema 2.1.1, por lo que el problema P_A tiene una única solución $u \in C([0, T]; X)$. Además de las consideraciones respecto a X^h y X_0^h de la sección precedente, nos situamos en las condiciones generales referidas a la discretización de la variable temporal de la Sección 1.5.

Por razones que serán puestas de manifiesto posteriormente, imponemos la restricción

$$(2.4.1) \quad k < \frac{2m}{\|B_0\|_{\mathcal{L}(X)}},$$

donde B_0 denota el operador $B(0) \in \mathcal{L}(X)$ y $m > 0$ es la constante de (2.1.3). Recordamos que, en el contexto de los problemas totalmente discretizados, los índices n y j no denotan suma por defecto. Consideramos el siguiente esquema

totalmente discretizado, donde $u_n^{hk} \in X_0^h$ es la aproximación del elemento $u(t_n) \in X_0$.

PROBLEMA P_A^{hk} : Hallar $\{u_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset X_0^h$, tal que, para todo $v^h \in X_0^h$

$$(2.4.2) \quad (Au_0^{hk}, v^h - u_0^{hk})_X \geq (f_0, v^h - u_0^{hk})_X,$$

$$(2.4.3) \quad (Au_n^{hk}, v^h - u_n^{hk})_X + \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j^n B^{n,j} u_j^{hk}, v^h - u_n^{hk} \right)_X \\ \geq (f_n, v^h - u_n^{hk})_X, \quad n = 1, \dots, N.$$

Los pesos $\alpha_j^n \geq 0$, $0 \leq j \leq n$, de la fórmula de cuadratura son en la práctica los de la fórmula de trapecios compuesta, dados por (1.5.3). Se puede usar otra fórmula de cuadratura, pero en cualquier caso, se debe verificar que los nodos sean t_0, \dots, t_n y se debe satisfacer la condición (1.5.4). Al aproximar con la fórmula de cuadratura el término de memoria, se comete el error numérico siguiente:

$$(2.4.4) \quad I_n = \left\| \int_0^{t_n} B(t_n - s)u(s)ds - \sum_{j=0}^n \alpha_j^n B^{n,j} u_j \right\|_X, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

que es de la forma (1.5.5). Entonces, por el Teorema 1.5.1, se concluye que utilizando la fórmula de trapecios compuesta,

$$(2.4.5) \quad \lim_{k \rightarrow 0} I_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Además, si $u : [0, T] \rightarrow X$ y $B : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(X)$ son funciones de Lipschitz, se tiene

$$(2.4.6) \quad I_n \leq ck(\|u\|_{C([0,T];X)} + \|B\|_{C([0,T];\mathcal{L}(X))}).$$

Por conveniencia en la notación, tomamos $I_0 = 0$. Estudiamos a continuación la existencia y unicidad de la solución del problema P_A^{hk} .

Teorema 2.4.1. *Bajo las hipótesis (1.5.4), (2.1.2)–(2.1.5) y (2.4.1) existe una única solución $\{u_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset X_0^h$ del problema P_A^{hk} .*

Demostración. Procedemos por inducción. Para $n = 0$ podemos aplicar el Corolario 1.2.2 para concluir que existe un único $u_0^{hk} \in X_0^h$ satisfaciendo (2.4.2). Suponemos la existencia y unicidad de $u_j^{hk} \in X_0^h$ verificando (2.4.3) para todo j , $1 \leq j < n$, y probamos lo propio para el paso n -ésimo. Si $\alpha_n^n = 0$ aplicamos de nuevo el Corolario 1.2.2. En caso contrario, el procedimiento está basado en argumentos de punto fijo. Dado $\eta^h \in X^h$ arbitrario, planteamos el problema auxiliar siguiente.

PROBLEMA $(P_A^{hk})_{\eta^h}$: Hallar $u_{\eta^h}^{hk} \in X^h$ tal que

$$(2.4.7) \quad u_{\eta^h}^{hk} \in X_0^h, \quad (Au_{\eta^h}^{hk}, v^h - u_{\eta^h}^{hk})_X \geq \left(-\sum_{j=0}^{n-1} B^{n,j} \alpha_j^n u_j^{hk}, v^h - u_{\eta^h}^{hk}\right)_X \\ + (f_n, v^h - u_{\eta^h}^{hk})_X - (\eta^h, v^h - u_{\eta^h}^{hk})_X, \quad \forall v^h \in X_0^h.$$

Estamos de nuevo en condiciones de aplicar el Corolario 1.2.2, por lo que existe un único $u_{\eta^h}^{hk} \in X_0^h$ verificando (2.4.7). Consideramos el operador $\Lambda^{hk} : X^h \rightarrow X^h$ definido por

$$\Lambda^{hk} \eta^h = \alpha_n^n \mathcal{P}_{X^h}(B_0 u_{\eta^h}^{hk}).$$

Probamos fácilmente que Λ^{hk} es contractivo. En efecto, dados $\eta_1^h, \eta_2^h \in X^h$, y teniendo en cuenta las propiedades del operador de proyección ortogonal, tenemos

$$\|\Lambda^{hk} \eta_1^h - \Lambda^{hk} \eta_2^h\|_X \leq \alpha_n^n \|B_0\|_{\mathcal{L}(X)} \|u_{\eta_1^h}^{hk} - u_{\eta_2^h}^{hk}\|_X.$$

Tras algunas operaciones en (2.4.7) con $v^h = u_{\eta_1^h}^{hk}$ para $\eta^h = \eta_2^h$ y con $v^h = u_{\eta_2^h}^{hk}$ para $\eta^h = \eta_1^h$, y utilizando (1.5.4), concluimos de la desigualdad previa que

$$\|\Lambda^{hk} \eta_1^h - \Lambda^{hk} \eta_2^h\|_X \leq \frac{k \|B_0\|_{\mathcal{L}(X)}}{2m} \|\eta_1^h - \eta_2^h\|_X.$$

Entonces, por (2.4.1) obtenemos que Λ^{hk} es contractivo y, como consecuencia, tiene un único punto fijo, que denotamos por η^* . Es inmediato que el elemento

$u_{\eta^*}^{hk}$, que representa la solución al problema $(P_A^{hk})_{\eta^h}$ para $\eta^h = \eta^*$, es una solución de (2.4.3), dado que

$$(\eta^*, w^h)_X = (\alpha_n^n \mathcal{P}_{X^h}(B_0 u_{\eta^*}^{hk}), w^h)_X = (\alpha_n^n B_0 u_{\eta^*}^{hk}, w^h)_X \quad \forall w^h \in X^h.$$

La unicidad viene dada por la del punto fijo del operador Λ^{hk} . □

Ahora estamos interesados en el estudio del error cometido, esto es, en la acotación de $\|u_n - u_n^{hk}\|_X$ para todo $n, 0 \leq n \leq N$.

Teorema 2.4.2. *Suponemos las hipótesis del Teorema 2.4.1. Sean $u \in C([0, T]; X)$ y $\{u_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset X_0^h$ las soluciones de los problemas P_A y P_A^{hk} , respectivamente. Entonces, si $\alpha_j^n = \mathcal{O}(k)$ para todo $0 \leq j \leq n, 0 \leq n \leq N$, para k suficientemente pequeño se verifica la desigualdad*

$$(2.4.8) \quad \max_{0 \leq n \leq N} \|u_n - u_n^{hk}\|_X \leq c_N \max_{0 \leq n \leq N} \left\{ I_n + \|v^h - u_n\|_X + R(t_n; u, v^h)^{\frac{1}{2}} \right\},$$

para todo $v^h \in X_0^h$, donde $c_N = c(1 + cT_N e^{2cT_N})$, $T_N = \sum_{j=0}^N \max_{j \leq n \leq N} \alpha_j^n$, c es una constante positiva que depende de A y B y

$$R(t_n; u, v^h) = (Au_n + \int_0^{t_n} B(t_n - s)u(s)ds - f_n, v^h - u_n)_X, \quad 0 \leq n \leq N.$$

Demostración. Tomando $v = u_0^{hk}$ en (2.1.1) con $t = 0$ y utilizando (2.4.2), obtenemos

$$\begin{aligned} (Au_0 - Au_0^{hk}, u_0 - u_0^{hk})_X &\leq (Au_0^{hk} - Au_0, v^h - u_0)_X \\ &\quad + (Au_0 - f_0, v^h - u_0)_X. \end{aligned}$$

Utilizando ahora (2.1.3), tenemos

$$m \|u_0 - u_0^{hk}\|_X^2 \leq L \|u_0 - u_0^{hk}\|_X \|v^h - u_0\|_X + (Au_0 - f_0, v^h - u_0)_X,$$

para todo $v^h \in X_0^h$. De la desigualdad anterior se concluye

$$(2.4.9) \quad \|u_0 - u_0^{hk}\|_X \leq c (\|v^h - u_0\|_X + R(t_0; u, v^h)) \quad \forall v^h \in X_0^h,$$

donde c depende de A y $R(t_0; u, v^h) = (Au_0 - f_0, v^h - u_0)_X$ es positivo, como se deduce de (2.1.1). Tomamos ahora $v = u_n^{hk}$ en (2.1.1) para $t = t_n$ y $1 \leq n \leq N$. Utilizando (2.4.3), se tiene

$$(2.4.10) \quad \begin{aligned} (Au_n - Au_n^{hk}, u_n - u_n^{hk})_X &\leq (Au_n - Au_n^{hk}, u_n - v^h)_X \\ &+ \left(\int_0^{t_n} B(t_n - s)u(s)ds - \sum_{j=0}^n \alpha_j^n B^{n,j}u_j, u_n^{hk} - v^h \right)_X \\ &+ \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j^n B^{n,j}(u_j^{hk} - u_j), v^h - u_n^{hk} \right)_X + R(t_n; u, v^h), \end{aligned}$$

para todo $v^h \in X_0^h$, donde

$$R(t_n; u, v^h) = (Au_n + \int_0^{t_n} B(t_n - s)u(s)ds - f_n, v^h - u_n)_X,$$

es positivo, según se desprende de (2.1.1). Utilizando la desigualdad $ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{4\delta}b^2$ para $\delta > 0$ y las propiedades de los operadores A y B , se obtiene, tras algunos cálculos en (2.4.10) que

$$\begin{aligned} m\|u_n - u_n^{hk}\|_X^2 &\leq \delta\|u_n - u_n^{hk}\|_X^2 \\ &+ c\left(\|u_n - v^h\|_X^2 + I_n^2 + \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j^n \|u_j - u_j^{hk}\|_X\right)^2 + R(t_n; u, v^h)\right). \end{aligned}$$

En consecuencia, es inmediato que

$$(2.4.11) \quad \begin{aligned} \|u_n - u_n^{hk}\|_X &\leq c\left(I_n + \|v^h - u_n\|_X + \sum_{j=0}^n \alpha_j^n \|u_j - u_j^{hk}\|_X \right. \\ &\left. + R(t_n; u, v^h)^{\frac{1}{2}}\right), \end{aligned}$$

para todo $v^h \in X_0^h$. Definimos además

$$\begin{aligned} e_n &= \|u_n - u_n^{hk}\|_X, \quad 0 \leq n \leq N, \\ g_n &= I_n + \|v^h - u_n\|_X + R(t_n; u, v^h)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq n \leq N, \\ \alpha_j &= \max_{1 \leq n \leq N} \alpha_j^n, \quad 1 \leq j \leq N, \quad \alpha_0 = \max_{1 \leq n \leq N} \alpha_0^n. \end{aligned}$$

De (2.4.9) y (2.4.11) concluimos

$$\left. \begin{aligned} e_0 &\leq cg_0, \\ e_n &\leq c\left(g_n + \sum_{j=0}^n \alpha_j e_j\right), \quad 1 \leq n \leq N. \end{aligned} \right\}$$

Dado que $\alpha_n = \mathcal{O}(k)$ para todo n , $0 \leq n \leq N$ y podemos tomar k suficientemente pequeño, utilizamos el Lema 1.6.3 para concluir que

$$(2.4.12) \quad \max_{0 \leq n \leq N} e_n \leq c_N \max_{0 \leq n \leq N} g_n,$$

donde $c_N = c(1 + cT_N e^{2cT_N})$ y $T_N = \sum_{n=0}^N \alpha_n$. □

Corolario 2.4.3. *Suponemos las condiciones del Teorema 2.4.2. Se tiene que*

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|u_n - u_n^{hk}\|_X \leq c_N \max_{0 \leq n \leq N} \left\{ I_n + \|v^h - u_n\|_X + \|v^h - u_n\|_X^{\frac{1}{2}} \right\},$$

para todo $v^h \in X_0^h$, donde $c_N = c(1 + cT_N e^{2cT_N})$, $T_N = \sum_{j=0}^N \max_{j \leq n \leq N} \alpha_j^n$ y c es una constante positiva que depende de A, B, u y f .

Demostración. Basta tener en cuenta en la demostración del teorema que

$$(2.4.13) \quad R(t_n; u, v^h) \leq c(A, B, u, f) \|v^h - u_n\|_X.$$

□

Observación 2.4.4. *Nótese que los coeficientes de la fórmula de cuadratura de trapecios compuesta (ver (1.5.3)) están en las condiciones exigidas en el teorema anterior, pues, utilizando la notación del teorema,*

$$\alpha_0 = \frac{k_1}{2}, \quad \alpha_n = \frac{1}{2}(k_n + k_{n+1}) \quad \forall n, \quad 1 \leq n < N, \quad \alpha_N = \frac{k_N}{2}.$$

Además, la constante c_N no depende en ese caso de N , pues en un intervalo de integración $[0, T]$, se verifica que $T_N = T$ y entonces $c_N = c(1 + cT e^{2cT})$.

El siguiente resultado establece la convergencia de la solución del problema totalmente discreto P_A^{hk} a la del problema continuo P_A .

Corolario 2.4.5. *Suponemos las condiciones del Teorema 2.4.2 y que la discretización temporal se realiza con la fórmula de los trapecios compuesta. Se tiene que*

$$(2.4.14) \quad \max_{0 \leq n \leq N} \|u_n - u_n^{hk}\|_X \leq c \max_{0 \leq n \leq N} \left\{ I_n + \|v^h - u_n\|_X + \|v^h - u_n\|_X^{\frac{1}{2}} \right\},$$

para todo $v^h \in X_0^h$. Si además se verifica la condición (1.4.1), entonces

$$(2.4.15) \quad \lim_{h,k \rightarrow 0} \left\{ \max_{0 \leq n \leq N} \|u_n - u_n^{hk}\|_X \right\} = 0.$$

Demostración. La desigualdad (2.4.14) es consecuencia de aplicar la cota (2.4.13) en la desigualdad (2.4.8) y la Observación 2.4.4. Observamos que tomando $g(r) = r + r^{\frac{1}{2}}$ estamos en las condiciones del Corolario 1.6.2, de donde se obtiene (2.4.15). \square

Capítulo 3

Inecuaciones variacionales integro-diferenciales de Volterra

Introducimos la clase de inecuaciones variacionales evolutivas integro-diferenciales de Volterra, caracterizadas por la presencia de un término integral de Volterra y de la derivada de la función incógnita. Se estudia la existencia y unicidad de solución y sus propiedades, como por ejemplo la dependencia de la solución respecto del término integral. También se estudia la aproximación numérica mediante un esquema semidiscreto y otro totalmente discretizado. En ambos casos se prueba la existencia y unicidad de solución, se establece la convergencia de la solución discreta y se obtienen estimaciones del error de discretización.

3.1. El problema abstracto

Sea $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espacio de Hilbert real. Denotamos la norma asociada por $\|\cdot\|_X$. Sea $u_0 \in X$. Consideramos los operadores $A : X \rightarrow X$ y $B : [0, T] \rightarrow$

$\mathcal{L}(X)$ y las funciones $f : [0, T] \rightarrow X$ y $j : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ tal que $j \not\equiv +\infty$ y planteamos el siguiente problema variacional con valor inicial, que denominaremos indistintamente *problema abstracto* o problema P_A .

PROBLEMA P_A : Hallar $u : [0, T] \rightarrow X$ tal que

$$(3.1.1) \quad (Au(t), v - \dot{u}(t))_X + \left(\int_0^t B(t-s)u(s)ds, v - \dot{u}(t) \right)_X + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X \quad \forall v \in X, \quad \text{c.p.d. en } (0, T),$$

$$(3.1.2) \quad u(0) = u_0.$$

Utilizando la definición de subdiferencial de j , denotada por ∂j , observamos que la desigualdad (3.1.1) equivale a la inclusión subdiferencial siguiente

$$Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds + \partial j(\dot{u}(t)) \ni f(t) \quad \text{c.p.d. en } (0, T).$$

Dado que este tipo de inclusiones involucran un término integral de tipo Volterra y la derivada de la función incógnita u aparece como argumento del operador multívoco ∂j , nos referimos a los problemas que se ajustan al marco del problema P_A como *desigualdades integro-diferenciales de tipo Volterra*.

Para el estudio de la existencia y unicidad de solución de P_A suponemos en toda la sección que se verifican las siguientes hipótesis.

A es un operador simétrico (y por tanto lineal y continuo) y definido positivo en X , esto es

$$(3.1.3) \quad \begin{cases} \text{(a) } (Au, v)_X = (u, Av)_X \quad \forall u, v \in X, \\ \text{(b) existe } m > 0 \text{ tal que } (Av, v)_X \geq m\|v\|_X^2 \quad \forall v \in X, \end{cases}$$

$$(3.1.4) \quad B \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{L}(X)),$$

$$(3.1.5) \quad j : X \rightarrow (-\infty, +\infty] \text{ es propia, convexa y s.c.i.,}$$

$$(3.1.6) \quad f \in W^{1,2}(0, T; X),$$

$$(3.1.7) \quad u_0 \in X,$$

$$(3.1.8) \quad \sup_{v \in D(j)} \{(f(0), v)_X - (Au_0, v)_X - j(v)\} < +\infty,$$

siendo $D(j)$ el dominio efectivo de j . El principal resultado de esta sección es el Teorema 3.1.3 que establece, bajo las hipótesis (3.1.3)–(3.1.8), la existencia y unicidad de solución para el problema P_A . Desarrollamos a continuación algunos resultados previos. Consideramos el conjunto

$$(3.1.9) \quad \mathcal{W} = \{ \eta \in W^{1,2}(0, T; X) \mid \eta(0) = 0 \},$$

y sustituyendo en (3.1.1) el término integral por un elemento arbitrario $\eta \in \mathcal{W}$ podemos plantear el siguiente problema auxiliar.

PROBLEMA P_A^η : Hallar $u_\eta : [0, T] \rightarrow X$ tal que

$$(3.1.10) \quad \begin{aligned} (Au_\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t))_X + (\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t))_X + j(v) - j(\dot{u}_\eta(t)) \\ \geq (f(t), v - \dot{u}_\eta(t))_X \quad \forall v \in X, \quad \text{c.p.d. en } (0, T), \end{aligned}$$

$$(3.1.11) \quad u_\eta(0) = u_0.$$

Teorema 3.1.1. *Para todo $\eta \in \mathcal{W}$ existe un único $u_\eta \in W^{1,2}(0, T; X)$ solución del problema P_A^η .*

Demostración. La condición (3.1.3) implica que el operador A es lineal, continuo y definido positivo. En consecuencia, denotando

$$(3.1.12) \quad (u, v)_A = (Au, v)_X \quad \forall u, v \in X,$$

se sigue que $(\cdot, \cdot)_A$ es un producto interior en X y la norma asociada, que denotamos por $\|\cdot\|_A$, es topológicamente equivalente a $\|\cdot\|_X$ en X . Concluimos

por tanto que $(X, (\cdot, \cdot)_A)$ es un espacio de Hilbert real. Sea $f_\eta : [0, T] \rightarrow X$ la función definida por

$$(3.1.13) \quad (f_\eta(t), v)_A = (f(t), v)_X - (\eta(t), v)_X \quad \forall v \in X, t \in [0, T].$$

Por la regularidad de $\eta \in \mathcal{W}$ y (3.1.6), se verifica

$$(3.1.14) \quad f_\eta \in W^{1,2}(0, T; X).$$

Además, por (3.1.9) y (3.1.12), se tiene

$$(f_\eta(0), v)_A - (u_0, v)_A - j(v) = (f(0), v)_X - (Au_0, v)_X - j(v) \quad \forall v \in X$$

y como consecuencia de (3.1.8) concluimos

$$(3.1.15) \quad \sup_{v \in D(j)} \{(f_\eta(0), v)_A - (u_0, v)_A - j(v)\} < +\infty.$$

Entonces, por (3.1.5), (3.1.7), (3.1.14) y (3.1.15) estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1.2.7 sobre el espacio de Hilbert $(X, (\cdot, \cdot)_A)$ para concluir que existe un único $u_\eta \in W^{1,2}(0, T; X)$ tal que $u_\eta(0) = u_0$ y

$$\begin{aligned} & (u_\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t))_A + j(v) - j(\dot{u}_\eta(t)) \\ & \geq (f_\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t))_A \quad \forall v \in X, \quad \text{c.p.d. en } (0, T). \end{aligned}$$

Por tanto, tomando en consideración (3.1.12) y (3.1.13) obtenemos que u_η es la única solución del problema P_A^η . \square

Definimos ahora el operador $\Lambda : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ tal que

$$(3.1.16) \quad \Lambda\eta(t) = \int_0^t B(t-s)u_\eta(s) ds, \quad \forall \eta \in \mathcal{W}, \quad t \in [0, T],$$

donde u_η es la solución del problema P_A^η .

A partir de (3.1.4) se prueba sin dificultad que dado que $\eta \in \mathcal{W}$ entonces $\Lambda\eta \in \mathcal{W}$, por lo que el operador Λ está bien definido. Además, para cada $\eta \in \mathcal{W}$, se tiene

$$(3.1.17) \quad \left(\frac{d}{dt}\Lambda\eta\right)(t) = B(0)u_\eta(t) + \int_0^t \dot{B}(t-s)u_\eta(s) ds \quad \text{c.p.d. en } (0, T).$$

Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.1.2. *El operador Λ tiene un único punto fijo $\eta^* \in \mathcal{W}$, esto es $\Lambda\eta^* = \eta^*$.*

Demostración. Dados $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{W}$ arbitrarios, sean $u_{\eta_1}, u_{\eta_2} \in W^{1,2}(0, T; X)$ las soluciones correspondientes del problema P_A^η dadas por el Teorema 3.1.1. Usando (3.1.16) y (3.1.4) se sigue que

$$(3.1.18) \quad \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_X^2 \leq c \int_0^t \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_X^2 ds \quad \forall t \in [0, T],$$

donde c depende de B . Por otra parte, de (3.1.17) deducimos que

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{d}{dt} \Lambda\eta_1 \right)(t) - \left(\frac{d}{dt} \Lambda\eta_2 \right)(t) \right\|_X &\leq \|B(0)\|_{\mathcal{L}(X)} \|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_X \\ &+ \int_0^t \|\dot{B}(t-s)\|_{\mathcal{L}(X)} \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_X ds \\ &\leq c \left(\|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_X + \left(\int_0^t \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_X^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad \text{c.p.d. en } (0, T), \end{aligned}$$

lo que implica que

$$(3.1.19) \quad \left\| \left(\frac{d}{dt} \Lambda\eta_1 \right)(t) - \left(\frac{d}{dt} \Lambda\eta_2 \right)(t) \right\|_X^2 \leq c \left(\|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_X^2 + \int_0^t \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_X^2 ds \right) \quad \text{c.p.d. en } (0, T).$$

Por otra parte, de (3.1.10) se tiene que

$$(Au_{\eta_1}, v - \dot{u}_{\eta_1})_X + (\eta_1, v - \dot{u}_{\eta_1})_X + j(v) - j(\dot{u}_{\eta_1}) \geq (f, v - \dot{u}_{\eta_1})_X,$$

$$(Au_{\eta_2}, v - \dot{u}_{\eta_2})_X + (\eta_2, v - \dot{u}_{\eta_2})_X + j(v) - j(\dot{u}_{\eta_2}) \geq (f, v - \dot{u}_{\eta_2})_X,$$

para todo $v \in X$, c.p.d. en $(0, T)$. Tomamos $v = \dot{u}_{\eta_2}$ en la primera desigualdad, $v = \dot{u}_{\eta_1}$ en la segunda, sumamos las dos expresiones resultantes y hacemos uso de (3.1.3) para concluir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A(u_{\eta_1} - u_{\eta_2}), u_{\eta_1} - u_{\eta_2})_X \leq -(\eta_1 - \eta_2, \dot{u}_{\eta_1} - \dot{u}_{\eta_2})_X \quad \text{c.p.d. en } (0, T).$$

Sea $t \in [0, T]$. Integrando la desigualdad precedente entre 0 y t y utilizando (3.1.11) se tiene

$$\frac{1}{2} (A(u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)), u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t))_X \leq -(\eta_1(t) - \eta_2(t), u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t))_X \\ + \int_0^t (\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s), u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s))_X ds.$$

Se sigue de (3.1.3) que

$$c \|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_X^2 \leq \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_X \|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_X \\ + \int_0^t \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_X \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_X ds$$

y, utilizando la desigualdad $ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{4\delta} b^2$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, se tiene

$$(3.1.20) \quad \|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_X^2 \leq c \left(\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_X^2 \\ + \int_0^t \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_X^2 ds + \int_0^t \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_X^2 ds \right).$$

Ahora, dado que

$$\eta_1(t) - \eta_2(t) = \int_0^t (\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)) ds,$$

deducimos

$$\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_X^2 \leq c \int_0^t \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_X^2 ds.$$

Sustituyendo esta desigualdad en (3.1.20) obtenemos

$$\|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_X^2 \leq c \left(\int_0^t \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_X^2 ds + \int_0^t \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_X^2 ds \right).$$

Aplicando ahora el Lema de Gronwall, se tiene

$$(3.1.21) \quad \|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_X^2 \leq c \int_0^t \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_X^2 ds,$$

que implica que

$$(3.1.22) \quad \int_0^t \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_X^2 ds \leq c \int_0^t \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_X^2 ds,$$

donde c depende ahora también de T . A continuación, combinamos (3.1.18), (3.1.19), (3.1.21) y (3.1.22) y obtenemos

$$\begin{aligned} & \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_X^2 + \left\| \left(\frac{d}{dt} \Lambda\eta_1 \right)(t) - \left(\frac{d}{dt} \Lambda\eta_2 \right)(t) \right\|_X^2 \\ & \leq c \int_0^t \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_X^2 ds. \end{aligned}$$

Reiterando la última desigualdad p veces, $p \geq 2$, deducimos

$$\begin{aligned} & \|\Lambda^p \eta_1(t) - \Lambda^p \eta_2(t)\|_X^2 + \left\| \left(\frac{d}{dt} \Lambda^p \eta_1 \right)(t) - \left(\frac{d}{dt} \Lambda^p \eta_2 \right)(t) \right\|_X^2 \\ & \leq c^p \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{p-1}} \|\dot{\eta}_1(s_p) - \dot{\eta}_2(s_p)\|_X^2 ds_p \cdots ds_1, \end{aligned}$$

donde Λ^p denota la p -ésima potencia del operador Λ . Por tanto, se tiene

$$\|\Lambda^p \eta_1 - \Lambda^p \eta_2\|_{W^{1,2}(0,T;X)}^2 \leq \frac{c^p T^p}{p!} \|\eta_1 - \eta_2\|_{W^{1,2}(0,T;X)}^2.$$

Dado que $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{c^p T^p}{p!} = 0$, la desigualdad precedente implica que para p suficientemente grande, la potencia Λ^p de Λ es una contracción en \mathcal{W} . Por tanto, aplicando el Corolario 1.3.5, se sigue que existe un único $\eta^* \in \mathcal{W}$ tal que $\Lambda \eta^* = \eta^*$. \square

Ya estamos en condiciones de demostrar la existencia y unicidad de solución para el problema P_A .

Teorema 3.1.3. *En las hipótesis (3.1.3)–(3.1.8), existe una única solución $u \in W^{1,2}(0, T; X)$ del problema P_A .*

Demostración. Sea $\eta^* \in \mathcal{W}$ el punto fijo del operador Λ dado por el Teorema 3.1.2 y sea $u_{\eta^*} \in \mathcal{W}$ la solución única del problema $P_A^{\eta^*}$ para $\eta = \eta^*$ dada por el Teorema 3.1.1. Dado que $\Lambda \eta^* = \eta^*$, se sigue de (3.1.10), (3.1.11) y (3.1.16) que u_{η^*} es una solución del problema P_A , con la regularidad $u_{\eta^*} \in W^{1,2}(0, T; X)$.

La unicidad se obtiene a partir de la del punto fijo de Λ . En efecto, sea u una solución del problema P_A de regularidad $u \in W^{1,2}(0, T; X)$ y consideremos el elemento $\eta \in \mathcal{W}$ definido por

$$(3.1.23) \quad \eta(t) = \int_0^t B(t-s)u(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Por tanto se sigue que u es también solución del problema P_A^η , que es única, según se deduce del Teorema 3.1.1. Por tanto, se concluye que

$$(3.1.24) \quad u = u_\eta.$$

Además, por (3.1.16), (3.1.23) y (3.1.24) se tiene que $\Lambda\eta = \eta$, y por la unicidad del punto fijo de Λ se sigue que

$$(3.1.25) \quad \eta = \eta^*.$$

La unicidad de la solución de P_A es, por tanto, consecuencia de (3.1.24) y (3.1.25). \square

3.2. Dependencia de la solución respecto al término integral

En esta sección estudiamos la dependencia de la solución del problema P_A respecto a perturbaciones en el operador B . Para ello, suponemos que se verifican las hipótesis (3.1.3)–(3.1.8) y, para cada $\theta > 0$, sea B_θ una perturbación del operador B que satisface

$$(3.2.1) \quad B_\theta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{L}(X)).$$

Consideramos el problema siguiente:

PROBLEMA $(P_A)_\theta$. Hallar $u_\theta : [0, T] \rightarrow X$ tal que

$$(3.2.2) \quad (Au_\theta(t), v - \dot{u}_\theta(t))_X + \left(\int_0^t B_\theta(t-s)u_\theta(s)ds, v - \dot{u}_\theta(t) \right)_X \\ + j(v) - j(\dot{u}_\theta(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}_\theta(t))_X \quad \forall v \in X, \quad \text{c.p.d. en } (0, T),$$

$$(3.2.3) \quad u_\theta(0) = u_0.$$

Podemos aplicar el Teorema 3.1.3 con los cambios oportunos para demostrar que para cada $\theta > 0$, el problema $(P_A)_\theta$ tiene una única solución de regularidad $u_\theta \in W^{1,2}(0, T; X)$. Consideremos ahora la condición

$$(3.2.4) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \|B_\theta - B\|_{W^{1,2}(0, T; \mathcal{L}(X))} = 0.$$

Tenemos el siguiente resultado de convergencia.

Teorema 3.2.1. *En las hipótesis (3.1.3)–(3.1.8), (3.2.1) y (3.2.4), la solución $u_\theta \in W^{1,2}(0, T; X)$ del problema $(P_A)_\theta$ converge a la solución $u \in W^{1,2}(0, T; X)$ del problema P_A , en el espacio $C([0, T]; X)$, i.e.:*

$$(3.2.5) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \|u_\theta - u\|_{C([0, T]; X)} = 0.$$

Demostración. Sea $\theta > 0$. En lo que sigue c representa una constante positiva que puede depender de A, B, u y T pero que en todo caso es independiente de θ . Denotamos

$$(3.2.6) \quad \eta_\theta(t) = \int_0^t B_\theta(t-s)u_\theta(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(3.2.7) \quad \eta(t) = \int_0^t B(t-s)u(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Entonces, a partir de (3.2.2) y (3.1.1) se tiene

$$(Au_\theta(t), v - \dot{u}_\theta(t))_X + (\eta_\theta(t), v - \dot{u}_\theta(t))_X + j(v) - j(\dot{u}_\theta(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}_\theta(t))_X,$$

$$(Au(t), v - \dot{u}(t))_X + (\eta(t), v - \dot{u}(t))_X + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X$$

para todo $v \in X$ y casi todo $t \in (0, T)$ y, usando argumentos similares a los de la demostración de la desigualdad (3.1.21), se tiene

$$(3.2.8) \quad \|u_\theta(t) - u(t)\|_X^2 \leq c \int_0^t \|\dot{\eta}_\theta(s) - \dot{\eta}(s)\|_X^2 ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Se sigue ahora de (3.2.6) y (3.2.7) que

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_\theta(t) &= B_\theta(0)u_\theta(t) + \int_0^t \dot{B}_\theta(t-s)u_\theta(s) ds, \\ \dot{\eta}(t) &= B(0)u(t) + \int_0^t \dot{B}(t-s)u(s) ds \end{aligned}$$

c.p.d. en $(0, T)$, lo que implica

$$(3.2.9) \quad \begin{aligned} \|\dot{\eta}_\theta(t) - \dot{\eta}(t)\|_X &\leq \|B_\theta(0)\|_{\mathcal{L}(X)} \|u_\theta(t) - u(t)\|_X \\ &\quad + \|B_\theta(0) - B(0)\|_{\mathcal{L}(X)} \|u(t)\|_X \\ &\quad + \int_0^t \|\dot{B}_\theta(t-s)\|_{\mathcal{L}(X)} \|u_\theta(s) - u(s)\|_X ds \\ &\quad + \int_0^t \|\dot{B}_\theta(t-s) - \dot{B}(t-s)\|_{\mathcal{L}(X)} \|u(s)\|_X ds \end{aligned}$$

c.p.d. en $(0, T)$. Si $\theta \rightarrow 0$, se deduce de (3.2.4) que existe un $c > 0$ tal que

$$\|B_\theta\|_{C([0,T];\mathcal{L}(X))} \leq c, \quad \|\dot{B}_\theta\|_{L^2(0,T;\mathcal{L}(X))} \leq c,$$

donde c es en ambos casos una constante positiva que depende de B . Utilizando estas desigualdades en (3.2.9) y tras algunos cálculos, obtenemos

$$\begin{aligned} \|\dot{\eta}_\theta(t) - \dot{\eta}(t)\|_X^2 &\leq c \left(\|B_\theta - B\|_{W^{1,2}(0,T;\mathcal{L}(X))}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|u_\theta(t) - u(t)\|_X^2 + \int_0^t \|u_\theta(s) - u(s)\|_X^2 ds \right) \end{aligned}$$

c.p.d. en $(0, T)$, de donde se deduce que

$$(3.2.10) \quad \begin{aligned} \int_0^t \|\dot{\eta}_\theta(s) - \dot{\eta}(s)\|_X^2 ds &\leq c \left(\|B_\theta - B\|_{W^{1,2}(0,T;\mathcal{L}(X))}^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \|u_\theta(s) - u(s)\|_X^2 ds \right) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Combinamos ahora (3.2.8) y (3.2.10) para obtener

$$\|u_\theta(t) - u(t)\|_X^2 \leq c \left(\|B_\theta - B\|_{W^{1,2}(0,T;\mathcal{L}(X))}^2 + \int_0^t \|u_\theta(s) - u(s)\|_X^2 ds \right) \quad \forall t \in [0, T],$$

y, usando el Lema de Gronwall, concluimos

$$(3.2.11) \quad \|u_\theta(t) - u(t)\|_X \leq c \|B_\theta - B\|_{W^{1,2}(0,T;\mathcal{L}(X))} \quad \forall t \in [0, T].$$

Por tanto, la igualdad (3.2.5) es consecuencia directa de (3.2.4) y (3.2.11). \square

3.3. Aproximación semidiscreta

Sea $\{X^h\}_{h>0} \subset X$ una familia de subespacios de dimensión finita. Consideramos el problema abstracto siguiente:

PROBLEMA P_A^h : Hallar $u^h : [0, T] \rightarrow X^h$ tal que para todo $v^h \in X^h$

$$(3.3.1) \quad (Au^h(t), v^h - \dot{u}^h(t))_X + \left(\int_0^t B(t-s)u^h(s)ds, v^h - \dot{u}^h(t) \right)_X + j(v^h) - j(\dot{u}^h(t)) \geq (f(t), v^h - \dot{u}^h(t))_X \quad \text{c.p.d. en } (0, T),$$

$$(3.3.2) \quad u^h(0) = \mathcal{P}_{X^h}^A(u_0) = u_0^h.$$

Teorema 3.3.1. *En las hipótesis (3.1.3)–(3.1.8), existe una única solución $u^h \in W^{1,2}(0, T; X^h)$ del problema P_A^h .*

Demostración. Podemos considerar los operadores $A^h : X^h \rightarrow X^h$ y $B^h : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(X^h)$ dados por

$$A^h v^h = \mathcal{P}_{X^h}(Av^h), \quad B^h(t)v^h = \mathcal{P}_{X^h}(B(t)v^h) \quad \forall v^h \in X^h, \quad t \in [0, T],$$

y la función $f^h : [0, T] \rightarrow X^h$, donde $f^h(t) = \mathcal{P}_{X^h}(f(t))$. Los operadores A^h , B^h y la función f^h heredan las propiedades de A , B y f , respectivamente. Por otra

parte, la definición del operador de proyección asegura que la expresión (3.3.1) es equivalente a

$$(3.3.3) \quad (A^h u^h(t), v^h - \dot{u}^h(t))_X + \left(\int_0^t B^h(t-s) u^h(s) ds, v^h - \dot{u}^h(t) \right)_X \\ + j(v^h) - j(\dot{u}^h(t)) \geq (f^h(t), v^h - \dot{u}^h(t))_X \quad \text{c.p.d. en } (0, T).$$

Además, siendo $\mathcal{P}_{X^h}^A : X \rightarrow X^h$ el operador de proyección de X sobre X^h respecto de la norma inducida por el operador A , que hemos supuesto simétrico y elíptico en (3.1.3), la condición (3.3.2) puede expresarse equivalentemente de forma que

$$(A^h u_0^h, v^h)_X = (A u_0^h, v^h)_X = (A u_0, v^h)_X \quad \forall v^h \in X^h,$$

y en consecuencia sustituyendo en la hipótesis (3.1.8) se tiene que

$$\sup_{v^h \in D(j) \cap X^h} \{(f^h(0), v^h)_X - (A^h u_0^h, v^h)_X - j(v^h)\} < +\infty.$$

En consecuencia estamos en las condiciones del Teorema 3.1.3 sustituyendo X por X^h y podemos concluir que existe un único $u^h \in W^{1,2}(0, T; X^h)$ solución de P_A^h . \square

Nos interesa ahora estudiar el error cometido en la aproximación semidiscreta, esto es, $\|u - u^h\|_{C([0, T]; X)}$. Para mayor comodidad, en lo que sigue utilizaremos la notación $e : t \in [0, T] \mapsto e(t) = u^h(t) - u(t)$. Tomamos $v = \dot{u}^h(t)$ en (3.1.1) y sumamos con (3.3.1) para obtener

$$(3.3.4) \quad (A u(t), \dot{e}(t))_X + (A u^h(t), v^h(t) - \dot{u}^h(t))_X \\ + \left(\int_0^t B(t-s) u(s) ds, \dot{e}(t) \right)_X + \left(\int_0^t B(t-s) u^h(s) ds, v^h(t) - \dot{u}^h(t) \right)_X \\ + j(v^h(t)) - j(\dot{u}^h(t)) \geq (f(t), v^h(t) - \dot{u}^h(t))_X,$$

donde aquí y en lo que sigue las expresiones que involucran derivadas temporales se entienden válidas para casi todo $t \in (0, T)$ y v^h denota un elemento

arbitrario de $L^2(0, T; X^h)$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e(t)\|_A^2 &= (Ae(t), \dot{e}(t))_X \\ &= (Au^h(t), \dot{u}^h(t) - v^h(t))_X + (Au(t), v^h(t) - \dot{u}^h(t))_X \\ &\quad + (Ae(t), v^h(t) - \dot{u}(t))_X. \end{aligned}$$

Despejando el segundo término de la desigualdad (3.3.4) y sustituyéndolo en la igualdad anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} (3.3.5) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e(t)\|_A^2 &\leq (Ae(t), v^h(t) - \dot{u}(t))_X \\ &\quad + (Au(t), v^h(t) - \dot{u}(t))_X + \left(\int_0^t B(t-s)u(s)ds, \dot{e}(t) \right)_X \\ &\quad + \left(\int_0^t B(t-s)u^h(s)ds, v^h(t) - \dot{u}^h(t) \right)_X \\ &\quad + j(v^h(t)) - j(\dot{u}(t)) - (f(t), v^h(t) - \dot{u}(t))_X \\ &= (Ae(t), v^h(t) - \dot{u}(t))_X + \left(\int_0^t B(t-s)e(s)ds, v^h(t) - \dot{u}^h(t) \right)_X \\ &\quad + R(t; \dot{u}, v^h), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} R(t; \dot{u}, v^h) &= (Au(t), v^h(t) - \dot{u}(t))_X + \left(\int_0^t B(t-s)u(s)ds, v^h(t) - \dot{u}(t) \right)_X \\ &\quad + j(v^h(t)) - j(\dot{u}(t)) + (f(t), v^h(t) - \dot{u}(t))_X. \end{aligned}$$

Sumando y restando $\dot{u}(t)$ en el penúltimo término de (3.3.5) tenemos dos térmi-

nos integrales que acotamos a continuación.

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^t B(t-s)e(s)ds, -\dot{e}(t) \right)_X \\
&= -\frac{d}{dt} \left(\int_0^t B(t-s)e(s)ds, e(t) \right)_X + (B(0)e(t) + \int_0^t \dot{B}(t-s)e(s)ds, e(t))_X \\
&\leq -\frac{d}{dt} \left(\int_0^t B(t-s)e(s)ds, e(t) \right)_X + \left(\frac{1}{2} + \|B_0\|_{\mathcal{L}(X)} \right) \|e(t)\|_X^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \|\dot{B}\|_{L^2(0,T;\mathcal{L}(X))}^2 \int_0^t \|e(s)\|_X^2 ds. \\
& \left(\int_0^t B(t-s)e(s)ds, v^h(t) - \dot{u}(t) \right)_X \\
&\quad \leq \frac{1}{2} \|B\|_{L^2(0,T;\mathcal{L}(X))}^2 \int_0^t \|e(s)\|_X^2 ds + \frac{1}{2} \|v^h(t) - \dot{u}(t)\|_X^2.
\end{aligned}$$

Por tanto, de (3.3.5) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e(t)\|_A^2 &\leq c (\|e(t)\|_X^2 + \|v^h(t) - \dot{u}(t)\|_X^2 \\
&\quad - \frac{d}{dt} \left(\int_0^t B(t-s)e(s)ds, e(t) \right)_X + \int_0^t \|e(s)\|_X^2 ds + R(t; \dot{u}, v^h)),
\end{aligned}$$

donde c depende de A y B . Integrando entre 0 y t , tenemos

$$\begin{aligned}
\|e(t)\|_A^2 &\leq c (\|e(0)\|_A^2 + \int_0^t \|e(s)\|_X^2 ds \\
&\quad + \int_0^t \|v^h(s) - \dot{u}(s)\|_X^2 ds - \left(\int_0^t B(t-s)e(s)ds, e(t) \right)_X + \int_0^t R(s; \dot{u}, v^h) ds).
\end{aligned}$$

Aplicando la equivalencia entre $\|\cdot\|_A$ y $\|\cdot\|_X$ y que $ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{4\delta} b^2$ para cualquier $\delta > 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|e(t)\|_X^2 &\leq c (\|e(0)\|_X^2 + c(\delta) \int_0^t \|e(s)\|_X^2 ds \\
&\quad + \int_0^t \|v^h(s) - \dot{u}(s)\|_X^2 ds + \delta \|e(t)\|_X^2 + \int_0^t R(s; \dot{u}, v^h) ds).
\end{aligned}$$

Tomando δ suficientemente pequeño nos proporciona una expresión a la que podemos aplicar el Lema de Gronwall y obtener

$$\|e(t)\|_X^2 \leq c (\|e(0)\|_X^2 + \int_0^t \|v^h(s) - \dot{u}(s)\|_X^2 ds + \int_0^t R(s; \dot{u}, v^h) ds).$$

Nótese finalmente que si el funcional j es de Lipschitz, de la definición de $R(t; \dot{u}, v^h)$ se deduce que

$$R(t; \dot{u}, v^h) \leq c \|v^h(t) - \dot{u}(t)\|_X,$$

donde c es una constante positiva que depende de A, B, f y u . El análisis realizado lo expresamos en el siguiente resultado.

Teorema 3.3.2. *En las condiciones del Teorema 3.1.3 se obtiene la siguiente cota para el error en la aproximación de la solución del problema P_A por la solución del problema P_A^h :*

$$\begin{aligned} \|u^h - u\|_{C([0,T];X)} &\leq c \left(\|(\mathcal{P}_{X^h}^A - I)u_0\|_X \right. \\ &\quad \left. + \inf_{v^h \in L^2(0,T;X^h)} \{ \|v^h - \dot{u}\|_{L^2(0,T;X)} + \|R(\cdot; \dot{u}, v^h)\|_{L^1(0,T;X)}^{\frac{1}{2}} \} \right), \end{aligned}$$

donde c es una constante positiva que depende de A, B y T . Además, si $j : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ es de Lipschitz, tenemos

$$\begin{aligned} \|u^h - u\|_{C([0,T];X)} &\leq c \left(\|(\mathcal{P}_{X^h}^A - I)u_0\|_X \right. \\ &\quad \left. + \inf_{v^h \in L^2(0,T;X^h)} \{ \|v^h - \dot{u}\|_{L^2(0,T;X)} + \|v^h - \dot{u}\|_{L^1(0,T;X)}^{\frac{1}{2}} \} \right) \end{aligned}$$

donde ahora c es una constante positiva que depende de A, B, f, T y u .

3.4. Aproximación totalmente discreta

En primer lugar introducimos la notación siguiente. Dado un natural N y una sucesión $x = \{x_n\}_{n=0}^N \subset X$ definimos $\Delta_n x_n = x_n - x_{n-1}$ y $\delta_n x_n = \frac{1}{k_n} \Delta_n x_n$ para n , $1 \leq n \leq N$ (diferencias finitas regresivas y divididas, respectivamente). Por simplicidad definimos $\Delta_0 x_0 = x_0$. Consideramos el problema abstracto siguiente, con las notaciones habituales utilizadas en el capítulo anterior.

PROBLEMA P_A^{hk} : Hallar $u^{hk} = \{u_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset X^h$ tal que, para todo $v^h \in X^h$,

$$(3.4.1) \quad u_0^{hk} = u_0^h = \mathcal{P}_{X^h}^A(u_0),$$

$$(3.4.2) \quad (Au_n^{hk}, v^h - \delta_n u_n^{hk})_X + \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j^n B^{n,j} u_j^{hk}, v^h - \delta_n u_n^{hk} \right)_X \\ + j(v^h) - j(\delta_n u_n^{hk}) \geq (f_n, v^h - \delta_n u_n^{hk})_X, \quad n \geq 1,$$

donde $u_0 \in X$ es dado.

El siguiente resultado estudia la existencia y unicidad de solución para P_A^{hk} .

Teorema 3.4.1. Sean $A : X \rightarrow X$ un operador simétrico y elíptico, $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(X))$, $f \in C([0, T]; X)$ y $j : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ un funcional propio, convexo, s.c.i. y positivamente homogéneo, esto es

$$(3.4.3) \quad j(\lambda v) = \lambda j(v) \quad \forall \lambda \geq 0, v \in X.$$

Supongamos además que

$$(3.4.4) \quad k < \frac{2m}{\|B_0\|_{\mathcal{L}(X)}}, \quad \alpha_n^n \leq \frac{k}{2},$$

siendo $m > 0$ la constante de elipticidad de A . Entonces existe una única solución $u^{hk} = \{u_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset X^h$ del problema P_A^{hk} .

Demostración.

Dado que j es positivamente homogéneo (por ejemplo, j puede ser una seminorma en X), multiplicamos (3.4.2) por k_n y tras algunas operaciones se obtiene

$$(3.4.5) \quad (A\Delta_n u_n^{hk}, v^h - \Delta_n u_n^{hk})_X + (\alpha_n^n B_0 u_n^{hk}, v^h - \Delta_n u_n^{hk})_X \\ + j(v^h) - j(\Delta_n u_n^{hk}) \geq (\tilde{f}_n, v^h - \Delta_n u_n^{hk})_X,$$

donde

$$\tilde{f}_n = f_n - Au_{n-1}^{hk} - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j^n B^{n,j} u_j^{hk} \in X.$$

El problema de hallar $\Delta_n u_n^{hk} \in X^h$ verificando la desigualdad (3.4.5) es una variante del problema (2.4.3) cuya novedad radica en la presencia del funcional j . Para la existencia y unicidad de solución de (3.4.5), simplemente adaptamos la demostración del Teorema 2.4.1 a este caso. En efecto, suponemos conocidos u_j^{hk} , $0 \leq j < n$. Dado $\eta^h \in X^h$ arbitrario, planteamos el problema auxiliar de hallar $\varphi_{n,\eta^h}^{hk} \in X^h$ tal que

$$(3.4.6) \quad \begin{aligned} (A\varphi_{n,\eta^h}^{hk}, v^h - \varphi_{n,\eta^h}^{hk})_X + j(v^h) - j(\varphi_{n,\eta^h}^{hk}) \\ \geq (\tilde{f}_n - \eta^h, v^h - \varphi_{n,\eta^h}^{hk})_X \quad \forall v^h \in X^h. \end{aligned}$$

La desigualdad variacional anterior tiene solución única aplicando el Corolario 1.2.4. Definimos el operador $\Lambda^{hk} : X^h \rightarrow X^h$ tal que

$$(3.4.7) \quad \Lambda^{hk} \eta^h = \alpha_n^n \mathcal{P}_{X^h}(B_0(\varphi_{n,\eta^h}^{hk} + u_{n-1}^{hk})),$$

por lo que, dados $\eta_1^h, \eta_2^h \in X^h$ distintos, se tiene

$$\|\Lambda^{hk} \eta_1^h - \Lambda^{hk} \eta_2^h\|_X \leq \alpha_n^n \|B_0\|_{\mathcal{L}(X)} \|\varphi_{n,\eta_1^h}^{hk} - \varphi_{n,\eta_2^h}^{hk}\|_X.$$

Operando sobre (3.4.6) sucesivamente con $v^h = \varphi_{n,\eta_2^h}^{hk}$ para $\eta^h = \eta_1^h$ y $v^h = \varphi_{n,\eta_1^h}^{hk}$ para $\eta^h = \eta_2^h$, se tiene

$$\|\varphi_{n,\eta_1^h}^{hk} - \varphi_{n,\eta_2^h}^{hk}\|_X \leq \frac{1}{m} \|\eta_1^h - \eta_2^h\|_X.$$

Entonces, teniendo en cuenta (3.4.4), se concluye que el operador Λ^{hk} es contractivo y en consecuencia tiene un único punto fijo que denotamos por η^* . Definimos $u_n^{hk} = \varphi_{n,\eta^*}^{hk} + u_{n-1}^{hk}$, por lo que tenemos $\varphi_{n,\eta^*}^{hk} = \Delta_n u_n^{hk}$. Sustituyendo en (3.4.6) y teniendo en cuenta que

$$(\eta^*, w^h)_X = (\Lambda^{hk} \eta^*, w^h)_X = (\alpha_n^n B_0(\varphi_{n,\eta^*}^{hk} + u_{n-1}^{hk}), w^h)_X \quad \forall w^h \in X^h,$$

obtenemos que $\Delta_n u_n^{hk}$ es solución de (3.4.5). Por tanto, $u_n^{hk} = \Delta_n u_n^{hk} + u_{n-1}^{hk}$ es una solución de (3.4.2). Dado que n es arbitrario, tenemos existencia y unicidad para el problema P_A^{hk} . \square

El siguiente resultado estudia el comportamiento del error cometido al aproximar la solución de P_A con la solución de P_A^{hk} . Denotamos $e_n = u_n - u_n^{hk}$, $0 \leq n \leq N$.

Teorema 3.4.2. *Nos situamos en las hipótesis de los teoremas 3.1.3 y 3.4.1. Suponemos también que la solución del problema P_A tiene regularidad adicional $u \in W^{2,\infty}(0, T; X)$ y que $B \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{L}(X))$. Además, suponemos que B y \dot{B} son funciones de Lipschitz en $[0, T]$ y que la fórmula de integración numérica utilizada en el problema P_A^{hk} es la de trapecios compuesta. Entonces, para k suficientemente pequeño, se verifica que*

$$(3.4.8) \quad \begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N} \|e_n\|_X^2 &\leq d_N (\|e_0\|_X^2 + k^2 + Nk^3 + Nk^4 + Nk^5 \\ &\quad + Nk \max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \inf_{v^h \in X^h} \{ \|\dot{u}_n - v^h\|_X^2 + R(t_n; \dot{u}, v^h) \} \right\}), \end{aligned}$$

donde $d_N = c(1 + c(N + 1)(N^2k^3 + k))e^{2c(N+1)(N^2k^3+k)}$, c es una constante positiva que depende de A, B, u y T y

$$\begin{aligned} R(t_n; \dot{u}, v^h) &= (Au_n, v^h - \dot{u}_n)_X + \left(\int_0^{t_n} B(t_n - s)u(s)ds, v^h - \dot{u}_n \right)_X \\ &\quad + j(v^h) - j(\dot{u}_n) - (f_n, v^h - \dot{u}_n)_X. \end{aligned}$$

Demostración. Utilizaremos las mismas notaciones que en la sección anterior. Además, en lo que sigue n denota un número natural tal que $1 \leq n \leq N$ y v^h un elemento arbitrario de X^h . Consideramos $A_n = (Ae_n, \delta_n e_n)_X$ y operamos

como sigue.

$$\begin{aligned}
(3.4.9) \quad A_n &= \frac{1}{k_n}(Ae_n, e_n - e_{n-1})_X = \frac{1}{k_n}(\|e_n\|_A^2 - (Ae_n, e_{n-1})_X) \\
&\geq \frac{1}{k_n}(\|e_n\|_A^2 - \|e_n\|_A \|e_{n-1}\|_A) \geq \frac{1}{k_n}(\|e_n\|_A^2 - \frac{1}{2}(\|e_n\|_A^2 + \|e_{n-1}\|_A^2)) \\
&= \frac{1}{2k_n}(\|e_n\|_A^2 - \|e_{n-1}\|_A^2).
\end{aligned}$$

Por otra parte, podemos desarrollar A_n y obtener

$$A_n = (Au_n, \delta_n u_n - \delta_n u_n^{hk})_X - (Au_n^{hk}, \delta_n u_n - v^h)_X - (Au_n^{hk}, v^h - \delta_n u_n^{hk})_X.$$

El último término de la expresión anterior se puede despejar de (3.4.2), por lo que

$$\begin{aligned}
A_n &\leq (Au_n, \delta_n u_n - \delta_n u_n^{hk})_X - (Au_n^{hk}, \delta_n u_n - v^h)_X + j(v^h) - j(\delta_n u_n^{hk}) \\
&\quad + \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j^n B^{n,j} u_j^{hk}, v^h - \delta_n u_n^{hk} \right)_X - (f_n, v^h - \delta_n u_n^{hk})_X.
\end{aligned}$$

Por otra parte, podemos tomar $t = t_n$ y $v = \delta_n u_n^{hk}$ en (3.1.1) para obtener

$$\begin{aligned}
&(Au_n, \delta_n u_n^{hk} - \dot{u}_n)_X + \left(\int_0^{t_n} B(t_n - s)u(s)ds, \delta_n u_n^{hk} - \dot{u}_n \right)_X \\
&\quad + j(\delta_n u_n^{hk}) - j(\dot{u}_n) - (f_n, \delta_n u_n^{hk} - \dot{u}_n)_X \geq 0.
\end{aligned}$$

Sumando las dos últimas expresiones tenemos

$$\begin{aligned}
A_n &\leq (Au_n, \delta_n u_n - \dot{u}_n)_X - (Au_n^{hk}, \delta_n u_n - v^h)_X + j(v^h) - j(\dot{u}_n) \\
&\quad + \left(\int_0^{t_n} B(t_n - s)u(s)ds, \delta_n u_n^{hk} - \dot{u}_n \right)_X + \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j^n B^{n,j} u_j^{hk}, v^h - \delta_n u_n^{hk} \right)_X \\
&\quad - (f_n, v^h - \dot{u}_n)_X.
\end{aligned}$$

De forma análoga a otras secciones, definimos

$$\begin{aligned}
(3.4.10) \quad R(t_n; \dot{u}, v^h) &= (Au_n, v^h - \dot{u}_n)_X + \left(\int_0^{t_n} B(t_n - s)u(s)ds, v^h - \dot{u}_n \right)_X \\
&\quad + j(v^h) - j(\dot{u}_n) - (f_n, v^h - \dot{u}_n)_X \geq 0,
\end{aligned}$$

$$(3.4.11) \quad \tilde{I}_n = \int_0^{t_n} B(t_n - s)u(s)ds - \sum_{j=0}^n \alpha_j^n B^{n,j} u_j, \quad I_n = \|\tilde{I}_n\|_X.$$

Sumando y restando adecuadamente y teniendo en cuenta las definiciones anteriores, tenemos

$$(3.4.12) \quad A_n \leq (Ae_n, \delta_n u_n - v^h)_X + (\tilde{I}_n, \delta_n u_n^{hk} - v^h)_X \\ + \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j^n B^{n,j} e_j, \delta_n u_n^{hk} - v^h \right)_X + R(t_n; \dot{u}, v^h).$$

Por tanto, de (3.4.9) y (3.4.12) tenemos

$$\|e_n\|_A^2 \leq \|e_{n-1}\|_A^2 + 2\{k_n(Ae_n, \delta_n u_n - v^h)_X + k_n(\tilde{I}_n, \delta_n u_n^{hk} - v^h)_X \\ + k_n\left(\sum_{j=0}^n \alpha_j^n B^{n,j} e_j, \delta_n u_n^{hk} - v^h\right)_X + k_n R(t_n; \dot{u}, v^h)\}.$$

Sumando y restando $\delta_n u_n$ adecuadamente, se tiene

$$\|e_n\|_A^2 \leq \|e_{n-1}\|_A^2 + 2\{k_n(Ae_n, \delta_n u_n - v^h)_X - k_n(\tilde{I}_n, \delta_n e_n)_X \\ + k_n(\tilde{I}_n, \delta_n u_n - v^h)_X - k_n\left(\sum_{j=0}^n \alpha_j^n B^{n,j} e_j, \delta_n e_n\right)_X \\ + k_n\left(\sum_{j=0}^n \alpha_j^n B^{n,j} e_j, \delta_n u_n - v^h\right)_X + k_n R(t_n; \dot{u}, v^h)\}.$$

Procediendo por inducción a partir de la expresión anterior, se obtiene

$$(3.4.13) \quad \|e_n\|_A^2 \leq \|e_0\|_A^2 + 2\left\{ \sum_{j=1}^n k_j (Ae_j, \delta_j u_j - v^h)_X - \sum_{j=1}^n k_j (\tilde{I}_j, \delta_j e_j)_X \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^n k_j (\tilde{I}_j, \delta_j u_j - v^h)_X + \sum_{j=1}^n k_j \left(\sum_{i=0}^j \alpha_i^j B^{j,i} e_i, \delta_j u_j - v^h \right)_X \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^n k_j \left(\sum_{i=0}^j \alpha_i^j B^{j,i} e_i, \delta_j e_j \right)_X + \sum_{j=1}^n k_j R(t_j; \dot{u}, v^h) \right\}.$$

Vamos a acotar el penúltimo término de la expresión anterior. Tenemos que

$$(3.4.14) \quad \sum_{j=1}^n k_j \left(\sum_{i=0}^j \alpha_i^j B^{j,i} e_i, \delta_j e_j \right)_X = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^j \alpha_i^j B^{j,i} e_i, e_j - e_{j-1} \right)_X \\ = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^j \alpha_i^j B^{j,i} e_i - \sum_{i=0}^{j+1} \alpha_i^{j+1} B^{j+1,i} e_i, e_j \right)_X - \left(\sum_{i=0}^1 \alpha_i^1 B^{1,i} e_i, e_0 \right)_X \\ + \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i^n B^{n,i} e_i, e_n \right)_X,$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n k_j \left(\sum_{i=0}^j \alpha_i^j B^{j,i} e_i, \delta_j e_j \right)_X \\
& \leq \sum_{j=1}^{n-1} \|e_j\|_X \left\{ \left\| \sum_{i=0}^j (\alpha_i^j B^{j,i} - \alpha_i^{j+1} B^{j+1,i}) e_i \right\|_X + \alpha_{j+1}^{j+1} \|B_0 e_{j+1}\|_X \right\} \\
& \quad + c (\alpha_0^1 \|e_0\|_X^2 + \alpha_1^1 \|e_0\|_X \|e_1\|_X) + c \sum_{i=0}^n \alpha_i^n \|e_i\|_X \|e_n\|_X.
\end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned}
\|\alpha_i^j B^{j,i} - \alpha_i^{j+1} B^{j+1,i}\|_{\mathcal{L}(X)} & \leq \alpha_i^j \|B^{j,i} - B^{j+1,i}\|_{\mathcal{L}(X)} + |\alpha_i^j - \alpha_i^{j+1}| \|B^{j+1,i}\|_{\mathcal{L}(X)} \\
& \leq c (\alpha_i^j k_{j+1} + |\alpha_i^j - \alpha_i^{j+1}|),
\end{aligned}$$

y que $|\alpha_i^j - \alpha_i^{j+1}| = 0$ salvo para $i = j$, en cuyo caso vale $\frac{k_{j+1}}{2}$, tenemos,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n k_j \left(\sum_{i=0}^j \alpha_i^j B^{j,i} e_i, \delta_j e_j \right)_X \\
& \leq c \sum_{j=1}^{n-1} \|e_j\|_X \left\{ \sum_{i=0}^j \alpha_i^j k_{j+1} \|e_i\|_X + \frac{k_{j+1}}{2} (\|e_{j+1}\|_X + \|e_j\|_X) \right\} \\
& \quad + c (\alpha_0^1 \|e_0\|_X^2 + \alpha_1^1 \|e_0\|_X \|e_1\|_X) + c \sum_{j=0}^n \alpha_j^n \|e_j\|_X \|e_n\|_X.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
(3.4.15) \quad & \sum_{j=1}^n k_j \left(\sum_{i=0}^j \alpha_i^j B^{j,i} e_i, \delta_j e_j \right)_X \leq c \left(\sum_{j=1}^{n-1} k_{j+1} \sum_{i=0}^j \alpha_i^j \|e_j\|_X \|e_i\|_X \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{k_{j+1}}{2} (\|e_j\|_X^2 + \|e_j\|_X \|e_{j+1}\|_X) \right. \\
& \quad \left. + (\alpha_0^1 \|e_0\|_X^2 + \alpha_1^1 \|e_0\|_X \|e_1\|_X) + \sum_{j=0}^n \alpha_j^n \|e_j\|_X \|e_n\|_X \right),
\end{aligned}$$

donde c depende de B . Consideramos el primer sumando de la expresión an-

terior y, teniendo en cuenta que $\sum_{i=0}^j \alpha_i^j = t_j$, lo acotamos como sigue.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} k_{j+1} \sum_{i=0}^j \alpha_i^j \|e_j\|_X \|e_i\|_X &\leq \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n-1} k_{j+1} t_j \|e_j\|_X^2 + \sum_{j=1}^{n-1} k_{j+1} \sum_{i=0}^j \alpha_i^j \|e_i\|_X^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n-1} k_{j+1} t_j \|e_j\|_X^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i}^{n-1} k_{j+1} \alpha_i^j \right) \|e_i\|_X^2 + \sum_{j=1}^{n-1} k_{j+1} \alpha_0^j \|e_0\|_X^2 \right). \end{aligned}$$

Definimos $\alpha_i = \max_{1 \leq n \leq N} \alpha_i^n$ para $1 \leq i \leq N$ y $\alpha_0 = \max_{1 \leq n \leq N} \alpha_0^n$. Teniendo en cuenta que $\sum_{j=i}^{n-1} k_{j+1} = t_n - t_i \leq T$ para $0 \leq i \leq n-1$ y que $t_j \leq T$ para $0 \leq j \leq n$, se tiene

$$\sum_{j=1}^{n-1} k_{j+1} \sum_{i=0}^j \alpha_i^j \|e_j\|_X \|e_i\|_X \leq c \left(\sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j + k_{j+1}) \|e_j\|_X^2 + \alpha_0 \|e_0\|_X^2 \right).$$

Aplicando esta cota en (3.4.15) y, para j , $0 \leq j < n$, que $\|e_j\|_X \|e_n\|_X \leq \delta \|e_n\|_X^2 + \frac{1}{4\delta} \|e_j\|_X^2$ para $\delta > 0$ arbitrario, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n k_j \left(\sum_{i=0}^j \alpha_i^j B^{j,i} e_i, \delta_j e_j \right)_X &\leq c(\delta) \left[\sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j + k_{j+1}) \|e_j\|_X^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{n-1} k_{j+1} \|e_{j+1}\|_X^2 + (\alpha_0 + \alpha_1) \|e_0\|_X^2 + \alpha_1 \|e_1\|_X^2 \right] + c(\delta + \alpha_n^n) \|e_n\|_X^2 \\ &\leq c(\delta) k \sum_{j=0}^n \|e_j\|_X^2 + c\delta \|e_n\|_X^2. \end{aligned}$$

Tomando $\delta < m/c$ y aplicando en (3.4.13) la cota anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \|e_n\|_X^2 &\leq c \left\{ \|e_0\|_X^2 + k \sum_{j=0}^n \|e_j\|_X^2 + \sum_{j=1}^n k_j \|\delta_j u_j - v^h\|_X^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n k_j I_j \|\delta_j e_j\|_X + \sum_{j=1}^n k_j I_j \|\delta_j u_j - v^h\|_X \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n k_j \left\| \sum_{i=0}^j \alpha_i^j B^{j,i} e_i \right\|_X \|\delta_j u_j - v^h\|_X + \sum_{j=1}^n k_j R(t_j; \dot{u}, v^h) \right\}, \end{aligned}$$

donde c depende de A, B y T . Podemos acotar el penúltimo término como

sigue

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n k_j \left\| \sum_{i=0}^j \alpha_i^j B^{j,i} e_i \right\|_X \|\delta_j u_j - v^h\|_X \\ & \leq c k^3 n^2 \sum_{j=0}^n \|e_j\|_X^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n k_j \|\delta_j u_j - v^h\|_X^2, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n k_j \left\| \sum_{i=0}^j \alpha_i^j B^{j,i} e_i \right\|_X^2 \leq c \sum_{j=1}^n k_j \left(\sum_{i=0}^j \alpha_i^j \|e_i\|_X \right)^2 \\ & \leq c \sum_{j=1}^n k_j (j+1) \sum_{i=0}^j (\alpha_i^j)^2 \|e_i\|_X^2 \\ & = c \sum_{i=1}^n \|e_i\|_X^2 \sum_{j=i}^n \{(\alpha_i^j)^2 k_j (j+1)\} + c \|e_0\|_X^2 \sum_{j=1}^n \{(\alpha_0^j)^2 k_j (j+1)\} \\ & \leq c \sum_{i=1}^n \|e_i\|_X^2 (\alpha_i)^2 \sum_{j=i}^n k_j (j+1) + c \|e_0\|_X^2 (\alpha_0)^2 \sum_{j=1}^n k_j (j+1) \\ & \leq c \sum_{i=0}^n \|e_i\|_X^2 (\alpha_i)^2 k n^2 \leq c k^3 n^2 \sum_{j=0}^n \|e_j\|_X^2. \end{aligned}$$

Además, dado que hemos supuesto $\ddot{u} \in L^\infty(0, T; X)$, se tiene

$$\begin{aligned} & \|\delta_j u_j - \dot{u}_j\|_X \leq k_j \|\ddot{u}\|_{L^\infty(t_{j-1}, t_j; X)} \quad \forall j, \quad 1 \leq j \leq N, \\ & \sum_{j=1}^n k_j \|\delta_j u_j - \dot{u}_j\|_X^2 \leq c k^2 \|\ddot{u}\|_{L^\infty(0, t_n; X)}^2 \quad \forall n, \quad 1 \leq n \leq N. \end{aligned}$$

Utilizamos estas propiedades junto con

$$\begin{aligned} & \|\delta_j u_j - v^h\|_X \leq \|\delta_j u_j - \dot{u}_j\|_X + \|\dot{u}_j - v^h\|_X, \\ & \|\delta_j u_j - v^h\|_X^2 \leq 2(\|\delta_j u_j - \dot{u}_j\|_X^2 + \|\dot{u}_j - v^h\|_X^2), \end{aligned}$$

para obtener que

$$\begin{aligned} \|e_n\|_X^2 & \leq c (\|e_0\|_X^2 + (n^2 k^3 + k) \sum_{j=1}^n \|e_j\|_X^2 + k^2 + \sum_{j=1}^n k_j \|\dot{u}_j - v^h\|_X^2 \\ & + \sum_{j=1}^n k_j I_j \|\delta_j e_j\|_X + \sum_{j=1}^n k_j^2 I_j + \sum_{j=1}^n k_j I_j \|\dot{u}_j - v^h\|_X + \sum_{j=1}^n k_j R(t_j; \dot{u}, v^h)), \end{aligned}$$

donde c depende de A, B, u y T . Como consecuencia del Teorema 1.5.2, se obtiene en particular que $I_j \leq ck^2$ para todo j , $1 \leq j \leq N$, donde c depende de B, u y T . Entonces,

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n k_j^2 I_j &\leq nk^4, \\
 \sum_{j=1}^n k_j I_j \|\dot{u}_j - v^h\|_X &\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n k_j I_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n k_j \|\dot{u}_j - v^h\|_X^2 \\
 &\leq \frac{1}{2} nk^5 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n k_j \|\dot{u}_j - v^h\|_X^2, \\
 \sum_{j=1}^n k_j I_j \|\delta_j e_j\|_X &= \sum_{j=1}^n I_j \|e_j - e_{j-1}\|_X \leq \sum_{j=1}^n I_j \|e_j\|_X + \sum_{j=1}^n I_j \|e_{j-1}\|_X \\
 &\leq ck^2 \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|_X + \|e_0\|_X \right) \leq c \left(k \sum_{j=1}^n \|e_j\|_X^2 + nk^3 + k^2 + k^2 \|e_0\|_X^2 \right).
 \end{aligned}$$

Por tanto, definiendo

$$(3.4.16) \quad h_j = \|\dot{u}_j - v^h\|_X^2 + R(t_j; \dot{u}, v^h),$$

tenemos

$$\|e_n\|_X^2 \leq c \left(\|e_0\|_X^2 + k^2 + nk^3 + nk^4 + nk^5 + \sum_{j=1}^n k_j h_j \right) + c(n^2 k^3 + k) \sum_{j=0}^n \|e_j\|_X^2.$$

Denotando

$$g_0 = \|e_0\|_X^2, \quad g_n = \|e_0\|_X^2 + k^2 + nk^3 + nk^4 + nk^5 + \sum_{j=1}^n k_j h_j, \quad n \geq 1,$$

se deduce que $\{\|e_n\|_X^2\}_{n=0}^N, \{g_n\}_{n=0}^N$ están en las condiciones del Lema 1.6.3, con $\alpha_j = n^2 k^3 + k$ para todo j , $0 \leq j \leq N$. Por tanto, si k y N son tales que $c(N^2 k^3 + k) \leq \frac{1}{2}$, entonces

$$(3.4.17) \quad \max_{1 \leq n \leq N} \|e_n\|_X^2 \leq d_N \max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \|e_0\|_X^2 + k^2 + nk^3 + nk^4 + nk^5 + \sum_{j=1}^n k_j h_j \right\},$$

siendo

$$\begin{aligned} d_N &= c(1 + c \sum_{n=0}^N (n^2 k^3 + k) e^{2c \sum_{n=0}^N (n^2 k^3 + k)}) \\ &\leq c(1 + c(N+1)(N^2 k^3 + k) e^{2c(N+1)(N^2 k^3 + k)}). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \sum_{j=1}^n k_j h_j \right\} &\leq Nk \max_{1 \leq n \leq N} h_n \\ &\leq Nk \max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \|\dot{u}_n - v^h\|_X^2 + R(t_n; \dot{u}, v^h) \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente, se concluye de (3.4.17) que

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N} \|e_n\|_X^2 &\leq d_N \left(\|e_0\|_X^2 + k^2 + Nk^3 + Nk^4 + Nk^5 \right. \\ &\quad \left. + Nk \max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \inf_{v^h \in X^h} \left\{ \|\dot{u}_n - v^h\|_X^2 + R(t_n; \dot{u}, v^h) \right\} \right\} \right), \end{aligned}$$

con lo que concluye la demostración. \square

Corolario 3.4.3. *En las condiciones del teorema anterior, si además $j : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ es de Lipschitz, se tiene*

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N} \|e_n\|_X^2 &\leq d_N \left(\|e_0\|_X^2 + k^2 + Nk^3 + Nk^4 + Nk^5 \right. \\ &\quad \left. + Nk \max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \inf_{v^h \in X^h} \left\{ \|\dot{u}_n - v^h\|_X^2 + \|\dot{u}_n - v^h\|_X \right\} \right\} \right), \end{aligned}$$

donde $d_N = c(1 + c(N+1)(N^2 k^3 + k) e^{2c(N+1)(N^2 k^3 + k)})$ y c es una constante positiva que depende de A, B, u, f y T .

Demostración. Simplemente se rehace la demostración del teorema teniendo en cuenta que $R(t_n; \dot{u}, v^h) \leq c(A, B, u, f, T) \|\dot{u}_n - v^h\|_X$. \square

Corolario 3.4.4. *En las condiciones del teorema anterior, supongamos el caso particular en que la partición del intervalo temporal $[0, T]$ sea uniforme.*

Entonces

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N} \|e_n\|_X^2 &\leq c (\|e_0\|_X^2 + k^2 \\ &+ \max_{1 \leq n \leq N} \{ \inf_{v^h \in X^h} \{ \|\dot{u}_n - v^h\|_X^2 + R(t_n; \dot{u}, v^h) \} \}), \end{aligned}$$

siendo la constante positiva c dependiente de T pero independiente de N . Si además $j : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ es de Lipschitz, se tiene

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N} \|e_n\|_X^2 &\leq c (\|e_0\|_X^2 + k^2 \\ &+ \max_{1 \leq n \leq N} \{ \inf_{v^h \in X^h} \{ \|\dot{u}_n - v^h\|_X^2 + \|\dot{u}_n - v^h\|_X \} \}). \end{aligned}$$

Finalmente, si además de lo anterior se tiene $\lim_{h \rightarrow 0} \|e_0\|_X = 0$ y se verifica la condición (1.4.1), entonces

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} \{ \max_{0 \leq n \leq N} \|u_n - u_n^{hk}\|_X \} = 0.$$

Demostración. La demostración es trivial, dado que se verifica que $k_j = k$ para todo j , $1 \leq j \leq N$, y en consecuencia $Nk = T$. Por tanto, de (3.4.8) se concluye el resultado deseado. \square

Notas bibliográficas a la Parte I

Capítulo 1. Más detalles relativos a espacios de funciones que toman valores en espacios normados, se pueden consultar en [7, 10], entre otros. Como textos dedicados al estudio teórico y/o aplicado de las inecuaciones variacionales, pueden consultarse, por ejemplo, [11, 33, 34, 47, 57, 89]. El Teorema 1.2.7 ha sido probado en [9, pág. 117], utilizando argumentos de ecuaciones evolutivas y operadores maximales monótonos. Otra versión ha sido considerada en [36], donde la demostración se basa en un método de discretización temporal. La demostración del Lema de Gronwall puede encontrarse, por ejemplo, en [78, 83]. La demostración del teorema del punto fijo de Banach puede encontrarse, por ejemplo, en [12, 38]. Variantes del Lema 1.6.3 pueden encontrarse, por ejemplo, en [28, 38]. Las nociones y propiedades fundamentales del cálculo subdiferencial pueden verse, entre otros, en [26, 66, 89].

Capítulo 2. Los resultados de este capítulo, han sido publicados en [68], donde se formulan con mayor generalidad, al establecerse en espacios de la forma $L^p(0, T; X)$, además de en $C([0, T]; X)$.

Capítulo 3. Los resultados de las dos primeras secciones de este capítulo están admitidos para publicación en [82]. Los resultados de la última sección se aplican a la implementación práctica de un algoritmo numérico para un problema de contacto concreto en [69].

Parte II

Aplicación al contacto en viscoelasticidad con memoria larga

Esta parte está dedicada al estudio de diversos problemas de contacto con y sin rozamiento para sólidos viscoelásticos de memoria larga. Para ello se hace uso de las herramientas desarrolladas en la Parte I, dado que las formulaciones variacionales de los problemas en que estamos interesados pertenecen a alguno de los dos tipos de inecuaciones variacionales de evolución estudiados. Comenzamos con el Capítulo 4, donde se recuerdan algunos resultados relativos a los espacios funcionales utilizados en mecánica de sólidos y de aproximación numérica con elementos finitos, que tiene su continuación lógica en el Capítulo 5, donde se realiza una introducción a la formulación mecánica de los problemas de contacto que nos interesan. Los capítulos 6–8 están dedicados a tres tipos de problemas de contacto sin rozamiento, mientras que en los capítulos 9 y 10 se estudian diversos problemas con rozamiento.

Capítulo 4

Espacios funcionales y elementos finitos

En este capítulo recordamos diversos resultados de análisis funcional que serán necesarios para el análisis de las formulaciones variacionales de los diversos problemas de contacto. Se introducen algunos espacios de Sobolev y sus propiedades más relevantes para nuestro estudio, entre las que destacamos las relativas a la traza, por su evidente vinculación con las condiciones de contorno. También recordamos algunas propiedades de los espacios de elementos finitos utilizados posteriormente en la aproximación numérica.

4.1. Espacios funcionales en mecánica de sólidos

Definimos a continuación los espacios funcionales que van a ser utilizados a lo largo de los siguientes capítulos en el análisis de las formulaciones variacionales

de los problemas de contacto en que estamos interesados. También se incluyen algunos resultados fundamentales que utilizamos a menudo en este trabajo como, por ejemplo, la desigualdad de Korn o una fórmula de Green.

Denotamos por \mathbb{S}_d el espacio de tensores de segundo orden simétricos, esto es

$$\mathbb{S}_d = \{\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) : \tau_{ij} = \tau_{ji} \in \mathbb{R}\}.$$

Asímismo, “ \cdot ” y $|\cdot|$, denotan el producto interior y la norma correspondiente tanto en \mathbb{R}^d como en \mathbb{S}_d y denotamos por \mathbf{I}_d al tensor identidad en \mathbb{S}_d , de componentes δ_{ij} .

En todo lo que sigue suponemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es un abierto, conexo, acotado y de frontera $\Gamma = \partial\Omega$ de Lipschitz a trozos, por lo que el vector normal exterior unitario $\boldsymbol{\nu} = (\nu_i)$ está definido en casi todo $\mathbf{x} \in \Gamma$. La frontera está dividida en tres partes disjuntas Γ_i , $i = 1, 2, 3$, siendo $med(\Gamma_1) > 0$. Además, denotamos por $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ la adherencia de Ω .

Denotamos por $C(\bar{\Omega})$ al espacio de funciones continuas en $\bar{\Omega}$ y para $m \in \mathbb{N}$, denotamos por $C^m(\bar{\Omega})$ al espacio de funciones continuamente derivables hasta el orden m en $\bar{\Omega}$. Utilizamos también la notación usual $L^2(\Omega)$ para denotar al espacio cuyos elementos son clases de funciones coincidentes en casi todo punto de Ω , Lebesgue medibles y tales que la integral de Lebesgue de su cuadrado es finita.

Dado un espacio normado X , denotamos su norma por $\|\cdot\|_X$. Además definimos el espacio normado de operadores lineales y continuos $\mathcal{L}(X)$ y el espacio normado producto cartesiano $[X]^d = \{\mathbf{x} = (x_i) : x_i \in X\}$. En particular, sea $H = [L^2(\Omega)]^d$, espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = (u_i, v_i)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u_i v_i d\mathbf{x} \quad \text{para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H.$$

En la expresión anterior y en todo lo que sigue, salvo mención expresa, se

asumen como convenios que los índices i, j, k, l toman valores enteros comprendidos entre 1 y d . Además, todo índice repetido denota suma, todo índice tras una coma denota derivación con respecto a la variable espacial correspondiente y un punto o dos sobre una función denotan, respectivamente, la primera y la segunda derivada material respecto a la variable temporal.

Dado un natural $m > 0$, denotamos por $H^m(\Omega)$ el espacio de funciones de $L^2(\Omega)$ cuyas derivadas (en el sentido de las distribuciones) de hasta orden m , son Lebesgue medibles y con integral de Lebesgue de su cuadrado finita. En particular, $H^1(\Omega) = \{\phi \in L^2(\Omega) : \phi_{,i} \in L^2(\Omega)\}$, espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(\phi, \psi)_{H^1(\Omega)} = (\phi, \psi)_{L^2(\Omega)} + (\phi_{,i}, \psi_{,i})_{L^2(\Omega)} \quad \text{para todo } \phi, \psi \in H^1(\Omega).$$

Definimos $H_1 = [H^1(\Omega)]^d$, espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_1} = (u_i, v_i)_{H^1(\Omega)} \quad \text{para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_1.$$

Sea $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ la aplicación traza. Como es sabido, para funciones $v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, se tiene $\gamma_0 v = v|_\Gamma$. Denotamos por $H_0^1(\Omega)$ el núcleo de γ_0 y por $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \text{Im}(\gamma_0) \subset L^2(\Gamma)$ la imagen de $H^1(\Omega)$ por γ_0 . Entonces, definimos el espacio

$$H_\Gamma = [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^d \subset [L^2(\Gamma)]^d.$$

Dada una función vectorial $\mathbf{v} \in H_1$ denotamos también por \mathbf{v} su traza, elemento de H_Γ , y definimos

$$v_\nu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = v_i \nu_i, \quad \mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - v_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

Para todo $\mathbf{u} \in [C^1(\bar{\Omega})]^d$, se tiene que la traza $\mathbf{u} = \mathbf{u}|_\Gamma$ y que

$$u_\nu = \mathbf{u}|_\Gamma \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{u}_\tau = \mathbf{u}|_\Gamma - u_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

Dado un espacio normado X , definimos el subespacio de $[X]^{d \times d}$ de sus elementos simétricos como $[X]_s^{d \times d} = \{\boldsymbol{x} = (x_{ij}) : x_{ij} = x_{ji} \in X\}$. Sea, en particular

$$(4.1.1) \quad Q = [L^2(\Omega)]_s^{d \times d} = \{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) : \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\}.$$

Definimos a continuación el *operador de deformación* $\boldsymbol{\varepsilon} : H_1 \rightarrow Q$ y el *operador de divergencia* $\text{Div} : [H^1(\Omega)]^{d \times d} \rightarrow H$:

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in H_1, \quad (\text{Div } \boldsymbol{\sigma})_i = \sigma_{ij,j} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in [H^1(\Omega)]^{d \times d}.$$

Sea además $Q_1 = \{\boldsymbol{\sigma} \in Q : \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in H\}$. Ambos son espacios de Hilbert con los productos interiores respectivos:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_Q &= (\boldsymbol{\sigma}_{ij}, \boldsymbol{\tau}_{ij})_{L^2(\Omega)} \quad \text{para todo } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in Q, \\ (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{Q_1} &= (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_Q + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \text{Div } \boldsymbol{\tau})_H \quad \text{para todo } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in Q_1. \end{aligned}$$

Denotamos las normas correspondientes por $\|\cdot\|_Q$ y $\|\cdot\|_{Q_1}$. Se verifica trivialmente la inyección continua $Q_1 \subset Q$. Dada $\boldsymbol{\sigma} \in Q_1$ podemos definir sus componentes tangencial y normal. En efecto, para todo $\boldsymbol{\sigma} \in [C^1(\bar{\Omega})]_s^{d \times d}$, se tiene que $\text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in H$ y que $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma}\boldsymbol{\nu} \in [L^2(\Gamma)]^d$. Además sus componentes normal y tangencial son dadas por

$$(4.1.2) \quad \sigma_\nu = \boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma}\boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu\boldsymbol{\nu}.$$

y se tiene la siguiente *fórmula de Green*¹:

$$(4.1.3) \quad (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{v})_{[L^2(\Gamma)]^d} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v})_H \quad \text{para todo } \boldsymbol{v} \in H_1.$$

La expresión (4.1.3) nos permite definir la traza $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}$ de todo $\boldsymbol{\sigma} \in Q_1$ como elemento del espacio dual H'_Γ y sus componentes normal y tangencial como elementos de los duales $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)'$ y H'_Γ , respectivamente.

¹Nótese que para la validez de esta expresión es esencial la simetría de $\boldsymbol{\sigma}$

A continuación se define el espacio de los tensores de cuarto orden tales que cada componente está esencialmente acotada en Ω , esto es,

$$\mathbf{L}^\infty(\Omega) = \{\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{ijkl}) : \mathcal{B}_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)\}.$$

Es un espacio de Banach con la norma

$$\|\mathcal{B}\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} = \max_{0 \leq i,j,k,l \leq d} \|\mathcal{B}_{ijkl}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Definimos ahora el espacio

$$(4.1.4) \quad V = \{\mathbf{u} \in H_1 : \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ c.p.d. en } \Gamma_1\},$$

aunque en ocasiones también denotaremos por V a alguno de sus subespacios.

Dotamos a V con el producto interior

$$(4.1.5) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q, \quad \text{para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

y la norma inducida $\|\cdot\|_V = (\cdot, \cdot)_V^{\frac{1}{2}}$. Además, dado que $\text{med}(\Gamma_1) > 0$, aplicando la desigualdad de Korn, se establece que $\|\cdot\|_V$ es en V una norma topológicamente equivalente a la de H_1 y por tanto V es un espacio de Hilbert con el producto interior $(\cdot, \cdot)_V$. En particular, se tiene la cota

$$(4.1.6) \quad \|\mathbf{v}\|_{H_1} \leq c_K \|\mathbf{v}\|_V \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in V,$$

donde c_K representa una constante real positiva, que depende de Γ_1 y de Ω . En algunas formulaciones variacionales haremos uso del siguiente subconjunto de V que denominaremos *conjunto de desplazamientos admisibles*.

$$(4.1.7) \quad U_{ad} = \{\mathbf{u} \in V : u_\nu \leq 0 \text{ c.p.d. en } \Gamma_3\}.$$

Nótese que se trata de un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de V . Recordamos a continuación algunos resultados de densidad que serán de utilidad para la obtención de estimaciones de error y resultados de convergencia

en la aproximación numérica de las soluciones de las diferentes formulaciones variacionales de problemas de contacto. Es conocido que el espacio de funciones infinitamente diferenciables y de soporte compacto en Ω , que denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$, es denso en $H_0^1(\Omega)$ y que $C^\infty(\bar{\Omega})$ es denso en $H^m(\Omega)$, $m \geq 0$. En particular, se deduce que

$$(4.1.8) \quad H^1(\Omega) \text{ es denso en } L^2(\Omega).$$

Se verifican, además, los siguientes resultados (ver, por ejemplo, [38, pág. 149-151]).

Teorema 4.1.1. *Si Γ es de Lipschitz a trozos y Γ_1 es relativamente abierto en Γ , el espacio $V_0 = \{\mathbf{v} \in [C^\infty(\bar{\Omega})]^d : \mathbf{v}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}\}$ es denso en V .*

Recordamos que dado un espacio topológico X y un subconjunto $Y \subset X$, se dice $A \subset Y$ es *relativamente abierto* en Y si existe un U abierto en X tal que $A = U \cap Y$.

Teorema 4.1.2. *Sea $d = 2$ (respectivamente, $d = 3$) y supongamos que Ω es un polígono (respectivamente, un poliedro), de tal forma que $\Gamma = \cup_{i=1}^3 \bar{\Gamma}_i$, cada Γ_i es unión finita de segmentos (respectivamente, de polígonos) y para $i \neq j$ se verifica que $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$. Entonces $U_{ad} \cap [C^\infty(\bar{\Omega})]^d$ es denso en U_{ad} con la norma de V .*

Finalmente, dados $\mathbf{f}_0 : [0, T] \rightarrow H$ y $\mathbf{f}_2 : [0, T] \rightarrow [L^2(\Gamma_2)]^d$, se define, para todo $t \in [0, T]$, $\bar{F}_t : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\bar{F}_t(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}_0(t), \mathbf{v})_H + (\mathbf{f}_2(t), \mathbf{v})_{[L^2(\Gamma_2)]^d} \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in V.$$

Como se deduce fácilmente de las propiedades de la traza y de (4.1.6),

$$|\bar{F}_t(\mathbf{v})| \leq c(\|\mathbf{f}_0(t)\|_H + \|\mathbf{f}_2(t)\|_{[L^2(\Gamma_2)]^d}) \|\mathbf{v}\|_{H_1} \leq c(t) \|\mathbf{v}\|_V,$$

donde aquí y en lo sucesivo, c representa una constante positiva arbitraria y $c(p_1, \dots, p_n)$, denota una constante positiva para la que se explicita su dependencia de los parámetros p_1, \dots, p_n , $n \geq 1$. En ambos casos su valor puede cambiar de línea en línea.

Dado que \bar{F}_t es un funcional lineal y continuo, por el teorema de representación de Riesz, existe un único $\mathbf{F}(t) \in V$ tal que

$$(4.1.9) \quad (\mathbf{F}(t), \mathbf{v})_V = (\mathbf{f}_0(t), \mathbf{v})_H + (\mathbf{f}_2(t), \mathbf{v})_{[L^2(\Gamma_2)]^d} = \bar{F}_t(\mathbf{v}),$$

para todo $\mathbf{v} \in V$. Nótese que si $\mathbf{f}_0 \in C([0, T]; H)$ y $\mathbf{f}_2 \in C([0, T]; [L^2(\Gamma_2)]^d)$, entonces $\mathbf{F} \in C([0, T]; V)$.

4.2. Método de elementos finitos

Utilizaremos el método de elementos finitos con d -símplex de Lagrange de grado 1. En concreto, supondremos que $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ es poliédrico y se triangulariza con una malla compuesta por d -símplex de tipo 1, esto es, segmentos para $d = 1$, triángulos para $d = 2$ y tetraedros para $d = 3$, en los que los nodos son los vértices ($d = 2, 3$) o los extremos ($d = 1$). Denotamos por \mathcal{T}^h la triangulación o malla tipo elementos finitos y por T^h a un elemento finito arbitrario de esta. La malla se supone compatible con la partición de la frontera $\Gamma = \cup_{i=1}^3 \bar{\Gamma}_i$, esto es, para todo $T^h \in \mathcal{T}^h$ y para $i = 1, 2, 3$ se verifica que $T^h \cap \bar{\Gamma}_i$ es vacío, un vértice de T^h , un lado de T^h ($d=2$), una arista o una cara de T^h ($d=3$).

El espacio de dimensión finita que se asocia a cada T^h es el espacio de polinomios en d variables de grado total menor o igual a 1, que denotamos por $P_1(T^h)$. Denotamos por X^h el siguiente espacio de elementos finitos:

$$X^h = \{v^h \in C(\bar{\Omega}) : v^h|_{T^h} \in P_1(T^h) \text{ para todo } T^h \in \mathcal{T}^h\}.$$

Además, dado $T^h \in \mathcal{T}^h$, denotamos por $\Pi_{T^h} : C(T^h) \rightarrow P_1(T^h)$ al *operador de interpolación local*, definido por

$$(4.2.1) \quad \Pi_{T^h} v = \sum_{i=1}^{d+1} v(\mathbf{x}_i^{T^h}) \phi_i^{T^h} \quad \text{para todo } v \in C(T^h),$$

donde $\{\mathbf{x}_i^{T^h}\}_{i=1}^{d+1}$ son los vértices de T^h y $\{\phi_i^{T^h}\}_{i=1}^{d+1}$ son los polinomios de base del espacio $P_1(T^h)$. Denotamos por $\Pi^h : C(\bar{\Omega}) \rightarrow X^h \subset C(\bar{\Omega})$ el *operador de interpolación global* definido por

$$\Pi^h v|_{T^h} = \Pi_{T^h} v \quad \text{para todo } T^h \in \mathcal{T}_h \text{ y todo } v \in C(\bar{\Omega}).$$

En estas condiciones podemos establecer el siguiente resultado fundamental para la estimación del error cometido en la interpolación con elementos finitos (consultar, por ejemplo, [62, pág. 110]).

Teorema 4.2.1. *Existe una constante $c > 0$ independiente de h tal que*

$$\|v - \Pi^h v\|_{H^m(\Omega)} \leq c h^{2-m} \max_{T^h \in \mathcal{T}_h} \left\{ \frac{h_{T^h}}{\rho_{T^h}} \right\} \|v\|_{H^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^2(\Omega), \quad 0 \leq m \leq 2$$

siendo

$$h = \max_{T^h \in \mathcal{T}_h} h_{T^h}, \quad h_{T^h} = \max\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in T^h\},$$

$$\rho_{T^h} = \text{diámetro de la mayor } d - \text{esfera } S_{T^h} \text{ inscrita en } T^h.$$

Dada una familia $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ de triangulaciones se dice regular si

- Existe una constante $c > 1$ tal que

$$\frac{h_{T^h}}{\rho_{T^h}} \leq c \quad \text{para todo } T^h \in \mathcal{T}_h \text{ y todo } h > 0,$$

- el parámetro de discretización h converge a cero, $h \rightarrow 0$.

Corolario 4.2.2. *Dada una familia $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ regular de triangulaciones, existe una constante $c > 0$ independiente de h tal que*

$$\|v - \Pi^h v\|_{H^m(\Omega)} \leq c h^{2-m} \|v\|_{H^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^2(\Omega), \quad 0 \leq m \leq 2.$$

Para $d \geq 2$, la triangularización \mathcal{T}^h subdivide la parte Γ_3 de la frontera de Ω en $(d-1)$ -símplex. Esto es, $\bar{\Gamma}_3 = \cup_{j=1}^{n_C^h} C_j^h$, $n_C^h \geq 1$, siendo C_j^h un triángulo ($d=3$) o un segmento ($d=2$). Denotamos por \mathbf{x}_{ij}^h al i -ésimo nodo ($1 \leq i \leq d$) de la j -ésima cara de Γ_3 y por $\boldsymbol{\nu}_j^h$ al vector unitario y exterior a Ω normal a C_j^h . De esta forma, podemos definir el operador $\Pi_{\Gamma_3}^h$ de interpolación lineal a trozos en $\bar{\Gamma}_3$, en función del operador de interpolación local $(d-1)$ -dimensional Π_{C^h} , donde C^h es una cara o lado contenido en $\bar{\Gamma}_3$. Esto es, para cada j , $1 \leq j \leq n_C^h$ se tiene

$$(\Pi_{\Gamma_3}^h(q))|_{C_j^h} = \Pi_{C_j^h}(q|_{C_j^h}) \quad \text{para todo } q \in C^0(C_j^h),$$

donde

$$\Pi_{C_j^h}(q|_{C_j^h}) = \sum_{i=1}^d q|_{C_j^h}(\mathbf{x}_{ij}^h) \phi_{ij}^h,$$

siendo $\{\phi_{ij}^h\}_{i=1}^d$ los polinomios de base de $P_1(C_j^h)$ en $(d-1)$ variables. Del Corolario 4.2.2 se tiene que para una familia regular de triangulaciones

$$(4.2.2) \quad \|q - \Pi_{\Gamma_3}^h q\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c h^2 \sum_{j=1}^{n_C^h} \|q\|_{H^2(C_j^h)}$$

$$\text{para todo } q \in L^2(\Gamma_3), \quad q|_{C_j^h} \in H^2(C_j^h), \quad 1 \leq j \leq n_C^h.$$

En la práctica, estamos interesados en aproximar con el método de elementos finitos la dimensión espacial de un par $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in C([0, T]; V) \times C([0, T]; Q)$, solución de un determinado problema variacional PV , donde V y Q son los espacios de Hilbert de desplazamientos y tensiones, respectivamente. Para la aproximación del campo de desplazamientos, utilizaremos subespacios o subconjuntos de $[X^h]^d$, según el caso. Por ejemplo, si V está dado por (4.1.4), lo

aproximamos con el subespacio de $[X^h]^d$ dado por

$$(4.2.3) \quad V^h = \{ \mathbf{v}^h \in [X^h]^d : \mathbf{v}^h = \mathbf{0} \text{ en los nodos de } \bar{\Gamma}_1 \},$$

y el conjunto de desplazamientos admisibles U_{ad} definido en (4.1.7) con el subconjunto de V^h

$$(4.2.4) \quad U_{ad}^h = \{ \mathbf{v}^h \in V^h : \mathbf{v}^h(\mathbf{x}_{ij}^h) \cdot \boldsymbol{\nu}_j^h \leq 0, \quad 1 \leq i \leq d, \quad 1 \leq j \leq n_C^h \}.$$

Nótese que por la compatibilidad exigida a toda triangulación \mathcal{T}_h , se tiene que $V^h \subset V$ y $U_{ad}^h \subset U_{ad}$. Por otra parte, para que se verifique la condición $\boldsymbol{\varepsilon}(V^h) \subset Q^h$, esencial para garantizar que los problemas variacionales discretizados PV^h correspondientes estén bien planteados, se define Q^h como el espacio de matrices $d \times d$ simétricas cuyos elementos son funciones constantes a trozos en cada elemento $T^h \in \mathcal{T}^h$. Es decir,

$$(4.2.5) \quad Q^h = \{ \boldsymbol{\tau}^h \in Q : \boldsymbol{\tau}^h|_{T^h} \in [P_0(T^h)]_s^{d \times d}, \text{ para todo } T^h \in \mathcal{T}^h \}.$$

Dado que en las aplicaciones $d \leq 3$, se deduce del Corolario 4.2.2 y de la expresión (4.2.2) que

$$(4.2.6) \quad \|\mathbf{v} - \Pi^h \mathbf{v}\|_V \leq c \|\mathbf{v}\|_{[H^2(\Omega)]^d} h \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in [H^2(\Omega)]^d,$$

$$(4.2.7) \quad \|\mathbf{q} - \Pi_{\Gamma_3}^h \mathbf{q}\|_{[L^2(\Gamma_3)]^d} \leq c \sum_{j=1}^{n_C^h} \|\mathbf{q}\|_{[H^2(C_j^h)]^d} h^2$$

$$\text{para todo } \mathbf{q} \in [L^2(\Gamma_3)]^d, \quad \mathbf{q} \in [H^2(C_j^h)]^d, \quad 1 \leq j \leq n_C^h,$$

donde $(\Pi^h \mathbf{v})_i = \Pi^h v_i$ y $(\Pi_{\Gamma_3}^h \mathbf{q})_i = \Pi_{\Gamma_3}^h q_i$. Además, en [59] se demuestra que

$$(4.2.8) \quad \|(I - \mathcal{P}_{Q^h}) \boldsymbol{\tau}\|_Q \leq c \|\boldsymbol{\tau}\|_{[H^1(\Omega)]^{d \times d}} h \quad \text{para todo } \boldsymbol{\tau} \in [H^1(\Omega)]^{d \times d},$$

donde $I : Q \rightarrow Q$ es el operador identidad en Q y $\mathcal{P}_{Q^h} : Q \rightarrow Q^h$ es el operador lineal de proyección definido por

$$(\mathcal{P}_{Q^h} \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}^h)_Q = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}^h)_Q \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in Q, \quad \boldsymbol{\sigma}^h \in Q^h.$$

Además \mathcal{P}_{Q^h} es no expansivo, esto es,

$$(4.2.9) \quad \|\mathcal{P}_{Q^h} \boldsymbol{\sigma}\|_Q \leq \|\boldsymbol{\sigma}\|_Q \quad \text{para todo } \boldsymbol{\sigma} \in Q.$$

Por otra parte, dado $\mathbf{v} \in V$ y j , $1 \leq j \leq n_C^h$, se tiene que

$$(\Pi^h \mathbf{v})_{\nu|C_j^h} = (\Pi_{\Gamma_3}^h(v_\nu))|_{C_j^h} = \Pi_{C_j^h}(v_\nu|_{C_j^h}).$$

Por tanto, podemos considerar $(\Pi^h \mathbf{v})_{\nu|\Gamma_3} = \Pi_{\Gamma_3}^h(v_\nu)$, y en consecuencia, utilizando (4.2.2), se tiene

$$(4.2.10) \quad \begin{aligned} \inf_{\mathbf{v}^h \in V^h} \|v_\nu - v_\nu^h\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq \|v_\nu - \Pi_{\Gamma_3}^h(v_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\leq ch^2 \forall \mathbf{v} \in V \text{ tal que } v_\nu \in L^2(\Gamma_3) \text{ y } v_\nu|_{C_j^h} \in H^2(C_j^h), \quad 1 \leq j \leq n_C^h. \end{aligned}$$

De forma análoga, también se puede obtener, utilizando (4.2.7), que

$$(4.2.11) \quad \begin{aligned} \inf_{\mathbf{v}^h \in V^h} \|\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}_\tau^h\|_{[L^2(\Gamma_3)]^d} &\leq \|\mathbf{v}_\tau - \Pi_{\Gamma_3}^h(\mathbf{v}_\tau)\|_{[L^2(\Gamma_3)]^d} \\ &\leq ch^2 \forall \mathbf{v} \in V \text{ tal que } \mathbf{v}_\tau \in [L^2(\Gamma_3)]^d \text{ y } \mathbf{v}_\tau|_{C_j^h} \in [H^2(C_j^h)]^d, \quad 1 \leq j \leq n_C^h. \end{aligned}$$

Resultados de convergencia. Podremos obtener resultados de convergencia con hipótesis mucho menos restrictivas. Sean $V^h \subset V$ y $Q^h \subset Q$ ($h \rightarrow 0$), familias de subespacios de dimensión finita, que pueden venir dadas, o no, por el método de los elementos finitos. Consideramos las siguientes hipótesis.

$$(4.2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Existe un subespacio } \mathcal{U} \subset V, \text{ una constante } \alpha_1 > 0 \text{ y} \\ \text{una función } c_1 : \mathcal{U} \cap U_{ad} \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ tales que :} \\ (a) \mathcal{U} \cap U_{ad} \text{ es denso en } U_{ad}; \\ (b) \text{ Para todo } \mathbf{v} \in \mathcal{U} \cap U_{ad} \text{ se verifica} \\ \quad \inf_{\mathbf{v}^h \in U_{ad}^h} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}^h\|_V \leq c_1(\mathbf{v}) h^{\alpha_1}; \\ (c) \text{ Si } \mathbf{v} \in C([0, T]; \mathcal{U} \cap U_{ad}), \text{ entonces la función dada por} \\ \quad t \in [0, T] \mapsto c_1(\mathbf{v}(t)) \in \mathbb{R}_+ \text{ pertenece a } C([0, T]; \mathbb{R}_+). \end{array} \right.$$

$$(4.2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Existe un subespacio } \mathcal{Q} \subset Q, \text{ una constante } \alpha_2 > 0 \text{ y} \\ \text{una función } c_2 : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ tales que :} \\ (a) \mathcal{Q} \text{ es denso en } Q; \\ (b) \text{ Para todo } \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{Q} \text{ se verifica} \\ \quad \inf_{\boldsymbol{\tau}^h \in Q^h} \|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^h\|_Q \leq c_2(\boldsymbol{\tau}) h^{\alpha_2}; \\ (c) \text{ Si } \boldsymbol{\tau} \in C([0, T]; \mathcal{Q}), \text{ entonces la función dada por} \\ \quad t \in [0, T] \mapsto c_2(\boldsymbol{v}(t)) \in \mathbb{R}_+ \text{ pertenece a } C([0, T]; \mathbb{R}_+). \end{array} \right.$$

Nótese que por el Teorema 1.1.4, $C([0, T]; \mathcal{U} \cap U_{ad})$ es denso en $C([0, T]; U_{ad})$ y $C([0, T]; \mathcal{Q})$ es denso en $C([0, T]; Q)$. Por otra parte, del Teorema 4.1.2 y la estimación (4.2.6) se deduce que podemos tomar $\mathcal{U} = [C^\infty(\bar{\Omega})]^d$ (o incluso $\mathcal{U} = [H^2(\Omega)]^d$) y de (4.1.8) y la estimación (4.2.8) concluimos que podemos tomar $\mathcal{Q} = [H^1(\Omega)]_s^{d \times d}$, cuando V^h y Q^h son espacios de elementos finitos. En ese caso, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, la expresión (4.2.12) (b) se corresponde con la estimación de error (4.2.6) en la interpolación global de \boldsymbol{v} y (4.2.13) (b) se corresponde con la estimación de error (4.2.8) en la proyección de $\boldsymbol{\tau}$, mientras que las funciones c_1 y c_2 son normas en $[H^2(\Omega)]^d$ y $[H^1(\Omega)]^{d \times d}$, respectivamente.

De esta forma, dada $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in C([0, T]; V) \times C([0, T]; Q)$, solución de un problema variacional PV y $(\boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{\sigma}^h) \in C([0, T]; V^h) \times C([0, T]; Q^h)$, solución del problema semidiscreto PV^h correspondiente, nuestro objetivo será obtener una cota de la forma

$$(4.2.14) \quad \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h\|_{C([0, T]; Q)} + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^h\|_{C([0, T]; V)} \\ \leq c g \left(\inf_{\boldsymbol{v}^h \in C([0, T]; U_{ad}^h)} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}^h\|_{C([0, T]; V)} \right) + \|(I - \mathcal{P}_{Q^h}) \boldsymbol{\sigma}\|_{C([0, T]; Q)},$$

donde c es una constante no negativa y la función $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ esté en las condiciones de (1.4.4). En este caso, podremos obtener un resultado de convergencia como consecuencia directa del Teorema 1.4.3, esto es, en las hipótesis

(4.2.12), (4.2.13) y (1.4.4) tendremos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{ \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h\|_{C([0,T];Q)} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C([0,T];V)} \} = 0.$$

Análogamente, dadas $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in C([0, T]; U_{ad}) \times C([0, T]; Q)$, solución de un problema variacional PV y $(\mathbf{u}^{hk}, \boldsymbol{\sigma}^{hk}) \in (U_{ad}^h \times Q^h)^{N+1}$, solución del correspondiente problema totalmente discretizado PV^{hk} , nuestro objetivo será obtener una cota de la forma

$$(4.2.15) \quad \begin{aligned} & \max_{0 \leq n \leq N} \{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q \} \\ & \leq c g \left(\max_{0 \leq n \leq N} \left\{ \inf_{\mathbf{v}^h \in U_{ad}^h} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h\|_V \right\} \right) + c \max_{0 \leq n \leq N} \{ I_n + \|(I - \mathcal{P}_{Q^h})\boldsymbol{\sigma}_n\|_Q \}, \end{aligned}$$

donde c es una constante no negativa, I_n es una expresión de la forma (1.5.5) y la función g verifica (1.4.4). En estas condiciones tendremos convergencia, como consecuencia del Teorema 1.6.1. Esto es, en las hipótesis (1.5.6), (4.2.12), (4.2.13) y (1.4.4), se verifica

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} \left\{ \max_{0 \leq n \leq N} \{ \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \} \right\} = 0.$$

Capítulo 5

Introducción al contacto y a la viscoelasticidad con memoria larga

En este capítulo recordamos algunos conceptos de mecánica de medios continuos, incluyendo la *ecuación del equilibrio*, que rige el proceso de deformación *cuasiestático*. A continuación, describimos aspectos básicos de la *reología*, o ciencia de los materiales, como preámbulo a la introducción y análisis de la *ley de comportamiento en viscoelasticidad con memoria larga*. Cerramos el capítulo con un análisis de las diferentes condiciones de contorno en que estamos interesados, con especial atención a las *condiciones de contacto*. Dispondremos ya, de los elementos necesarios para plantear todos los problemas de contacto que estudiaremos en los capítulos restantes de esta parte.

5.1. Algunos fenómenos de contacto

Presentamos en esta sección los fenómenos de contacto que son objeto de estudio en esta tesis. Se trata del contacto entre un sólido deformable y un obstáculo, que puede ser a su vez deformable o rígido, y del contacto entre dos sólidos deformables.

Contacto unilateral entre un sólido deformable y un obstáculo. Imaginemos un cuerpo sólido deformable que está bajo la influencia de campos de fuerzas que actúan bien sobre una parte de su superficie bien sobre la totalidad de su volumen. Imaginemos además que el movimiento del cuerpo está restringido por medio de una fijación en cierta parte de su superficie y que, como consecuencia de su deformación, es susceptible de entrar en contacto (o ya lo está) con un obstáculo, que puede ser deformable o no. En el caso de que no lo sea, el obstáculo recibe el nombre de *fundación rígida* y reacciona al contacto, en cada punto, con una fuerza desconocida *a priori* cuya dirección es “hacia el cuerpo”. Si por el contrario es deformable, el grado de profundidad de la penetración en cada punto determina la fuerza con la que se produce una reacción hacia el cuerpo. En la Figura I.1 se presenta un dibujo aclaratorio, con las notaciones introducidas en las secciones 5.2 y 5.4.

Contacto unilateral entre dos sólidos deformables. La diferencia conceptual con respecto al caso anterior (en el que en sentido estricto también intervienen dos cuerpos: sólido deformable y obstáculo) es que en aquel caso, no nos ocupamos del análisis mecánico del obstáculo, más que en lo referente a su relación con el sólido deformable. En contraposición a esta idea, ahora sí nos ocupamos del estudio mecánico de los dos sólidos involucrados. Por tanto, imaginemos dos cuerpos sólidos deformables sometidos, cada uno independientemente del otro, a la influencia de campos de fuerzas actuando sobre

una parte de su superficie o sobre la totalidad de su volumen. Además, ambos están fijados en cierta parte de su superficie, lo que restringe su movimiento. Como consecuencia de la deformación que experimentan, pueden entrar en contacto entre sí, o si ya lo están, separarse. En la Figura 5.1.1 se presenta un dibujo aclaratorio, con las notaciones introducidas en la Sección 8.1.

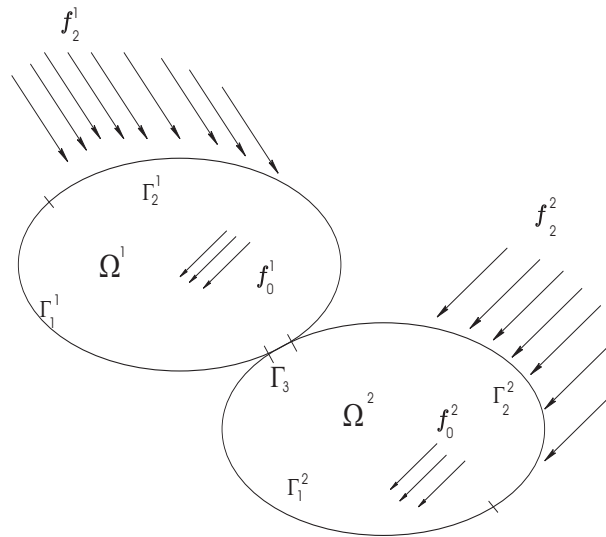


Figura 5.1.1: Contacto entre dos cuerpos.

Contacto bilateral. Es una variante de los casos anteriores en la que se supone que el proceso de deformación no implica una separación entre cuerpo y obstáculo o entre los dos cuerpos, por lo que el contacto se mantiene a lo largo de todo el tiempo de observación.

5.2. Cinemática y dinámica de un medio continuo

Estamos interesados en la modelización matemática de un proceso de deformación, para lo cual nos valemos de las herramientas que nos proporciona la

teoría de la mecánica de los medios continuos. Matemáticamente, suponemos que el sólido, en su configuración de referencia, ocupa el conjunto $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$, ($d = 1, 2, 3$ en aplicaciones), donde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es un abierto conexo (i.e. dominio) y acotado con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente regular.

Utilizando el *principio fundamental de la mecánica de medios continuos* se obtiene la *ecuación del movimiento*, expresión que rige todo proceso dinámico de deformación de un cuerpo y que exponemos a continuación:

$$(5.2.1) \quad \rho(\mathbf{x}, t)\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}_0(\mathbf{x}, t) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, T].$$

El intervalo temporal en que realizamos la observación es $[0, T]$, $T > 0$, ρ representa la densidad de masa por unidad de volumen, $\ddot{\mathbf{u}}$ es la segunda derivada material del desplazamiento $\mathbf{u} = (u_i)$ respecto del tiempo t , $\mathbf{f}_0 = (f_i^0)$ es la densidad de fuerzas volúmicas por unidad de volumen y $\text{Div } \boldsymbol{\sigma}$ es la divergencia del *tensor de tensiones de Cauchy* $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$, que en coordenadas se define por $(\text{Div } \boldsymbol{\sigma})_i = \sigma_{ij,j}$. El tensor de tensiones es, además, simétrico. Simplificamos (5.2.1) eliminando el término $\rho(\mathbf{x}, t)\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$, dado que suponemos que los efectos de la inercia son despreciables. Es por esto que decimos estar en un caso *cuasiestático*. Esta simplificación es frecuente en gran parte de trabajos. La justificación se basa en que las fuerzas y los desplazamientos impuestos varíen *poco* en el tiempo (ver, por ejemplo, [25, pág. 167]). Por tanto tenemos

$$(5.2.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}_0(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, T],$$

que se denomina *ecuación del equilibrio*. Por otra parte, definimos el *tensor de deformaciones linealizado* como la parte simétrica del gradiente del desplazamiento, que se expresa en coordenadas como sigue

$$(5.2.3) \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Su inclusión en nuestro modelo está justificada, dado que nos situamos en las hipótesis de *pequeñas deformaciones*.

En este punto disponemos de un modelo que describe la deformación de un cuerpo, pero que no ilustra el comportamiento específico de cada material concreto. Esto es un sinsentido físico y además, desde un punto de vista matemático, tenemos más incógnitas que ecuaciones. Los cálculos son sencillos, por ejemplo en el caso $d = 3$ disponemos de nueve ecuaciones escalares (tres de (5.2.2) y seis de (5.2.3)) y de quince incógnitas (las tres de los desplazamientos, las seis de las deformaciones y las seis de las tensiones). Así pues, necesitamos introducir más ecuaciones que *porten* información de *cómo* es el material que compone el cuerpo cuya deformación estamos modelizando. Estas ecuaciones, y más propiamente si dicha información puede ser expresada en una sola ecuación es la *ley constitutiva* o *ley de comportamiento*. A su estudio, centrado en el caso *viscoelástico de memoria larga*, dedicamos la Sección 5.3. Por otra parte, aún nos resta modelizar el efecto de las diferentes condiciones de contorno. A ello asignamos la Sección 5.4.

5.3. Ley de comportamiento viscoelástico de memoria larga

Una de las formas de obtener una expresión matemática para la ley constitutiva de un material consiste en llevar a cabo una serie de tests experimentales en el laboratorio que ponen de manifiesto características del material tales como su endurecimiento, envejecimiento, deformaciones residuales, daño, desgaste, etc. Brevemente, podemos decir que en los tests experimentales se obtienen valores numéricos de una serie de variables físicas $\{O_1, \dots, O_n\}$ en respuesta a los de otro grupo de variables $\{I_1, \dots, I_m\}$ artificialmente provocados. Luego, se pretende cuadrar esa información de tipo causa-efecto por medio de combinaciones lineales de funciones matemáticas adecuadas. La selección de

dichas funciones y el cálculo de los coeficientes idóneos es una tarea complicada e implica limitar el dominio de validez del modelo y la realización de tests experimentales *a posteriori* con objeto de aceptar el modelo o no.

Con carácter general, diremos que un material es *homogéneo* cuando todos sus puntos materiales tienen propiedades reológicas idénticas y que es *isótropo* cuando todas las direcciones alrededor de cada punto son materialmente equivalentes. Un material laminado, por ejemplo, es un paradigma de material no isótropo, esto es, *anisótropo*. Existe en la literatura una gran variedad de leyes de comportamiento y la mayor parte de ellas son expresiones que involucran el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$, el tensor de deformaciones linealizado $\boldsymbol{\varepsilon}$ y sus respectivas derivadas temporales.

Leyes de comportamiento en elasticidad. En su caso más general, una *ley de comportamiento en elasticidad* es de la forma

$$(5.3.1) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}).$$

Establece una relación entre tensiones y deformaciones tal que, en el caso unidimensional, la curva que relaciona ambas magnitudes es coincidente en un experimento de carga-descarga. No puede describir, sin embargo, fenómenos reales como, por ejemplo, la *relajación de los materiales*, que consiste en que al someterlos a una deformación constante $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, las tensiones que experimentan no se mantienen iguales a $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_0)$, sino que se reducen en cierta medida con el paso del tiempo. La ley constitutiva para un material elástico lineal viene dada por

$$(5.3.2) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon},$$

que expresa matemáticamente la ley de Hooke generalizada, donde $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ijkl})$ es un tensor de orden 4 denominado *tensor de elasticidad*. En la expresión anterior y en lo que sigue, entendemos que dados un tensor \mathcal{R} de orden 4 y un

tensor $\boldsymbol{\tau}$ de orden 2 arbitrarios, su producto $\mathcal{R}\boldsymbol{\tau}$ es un tensor de orden 2 que en coordenadas se define como sigue:

$$(\mathcal{R}\boldsymbol{\tau})_{ij} = \mathcal{R}_{ijkl}\tau_{kl}.$$

Dada la dependencia de $\boldsymbol{\varepsilon}$ respecto del desplazamiento \mathbf{u} , en numerosas ocasiones en que no haya lugar a confusión, como en la expresión (5.3.2), prescindiremos de la escritura explícita de \mathbf{u} , esto es, $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$. En el caso de un material elástico homogéneo e isótropo se verifica

$$\mathcal{A}_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

donde los escalares λ y μ son los *coeficientes de Lamé* y δ_{ij} es el símbolo de Kronecker. En consecuencia, la ley de comportamiento en elasticidad lineal homogénea e isótropa queda

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I}_d)\mathbf{I}_d + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon},$$

donde \mathbf{I}_d es el tensor identidad definido por $(\mathbf{I}_d)_{ij} = \delta_{ij}$.

Ley de comportamiento en viscoelasticidad con memoria larga. El estudio reológico de gran cantidad de materiales ha revelado la existencia de fenómenos como el anteriormente citado de la relajación que no modelizan las leyes de comportamiento elásticas. Las leyes de comportamiento en *viscoelasticidad* introducen en el modelo la *viscosidad* como elemento para paliar esa carencia y tienen en cuenta la tasa de variación de tensiones y deformaciones. Si en reología el comportamiento elástico se representa esquemáticamente mediante *muelles*, el comportamiento viscoso se representa mediante *amortiguadores*, como vemos en la Figura 5.3.1.

En el caso lineal unidimensional, el comportamiento de los muelles está determinado por el *módulo de Young*, que se denota por E , mediante la *ley de Hooke*, esto es, $\sigma = E\varepsilon$. El comportamiento de los amortiguadores viene dado



Figura 5.3.1: Muelles y amortiguadores.

por el *coeficiente de viscosidad*, que se denota por η , mediante la *ley de Newton*, esto es, $\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$, siendo $\dot{\varepsilon}$ la derivada temporal de ε . Ambos elementos pueden combinarse (gráficamente) en paralelo y/o en serie para dar lugar a representaciones esquemáticas de modelos más complejos. Como regla general, el alineamiento en paralelo representa que la tensión global del sistema es suma de las que corresponden individualmente a cada elemento alineado. Por su parte, el alineamiento en serie se traduce en que la deformación global del sistema es la suma de las deformaciones experimentadas individualmente por cada elemento alineado. De esta manera, los clásicos modelos de *Maxwell* y *Kelvin-Voigt* se obtienen alineando en serie el primero, y en paralelo el segundo, un muelle y un amortiguador.

Consideremos ahora el conjunto formado por un muelle de módulo de Young E_m y un amortiguador de viscosidad η alineados en serie (modelo de Maxwell) y alineados a su vez en paralelo con un muelle de módulo de Young E . En la Figura 5.3.2 vemos el esquema correspondiente. Tal modelo recibe el nombre de *ley de comportamiento en viscoelasticidad estándar* y, tal y como hemos explicado, en el caso unidimensional se corresponde con la expresión

$$(5.3.3) \quad \sigma + \frac{\eta}{E_m} \dot{\sigma} = E\varepsilon + \eta \left(\frac{E}{E_m} + 1 \right) \dot{\varepsilon}.$$

Las operaciones necesarias para la obtención de (5.3.3) son sencillas y pueden consultarse, por ejemplo, en [50].

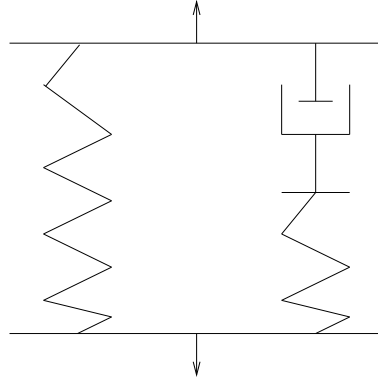


Figura 5.3.2: Viscoelasticidad estándar.

Obtendremos a continuación la *ley constitutiva de los materiales viscoelásticos de memoria larga* a partir de la ley viscoelástica estándar y generalizaremos, posteriormente, al caso d -dimensional. Para facilitar los cálculos definimos

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{\eta}{E_m}, \quad a_0 = E, \quad a_1 = \frac{E}{E_m} + 1,$$

por lo que (5.3.3) queda

$$(5.3.4) \quad A_0\sigma(t) + A_1\dot{\sigma}(t) = a_0\varepsilon(t) + a_1\dot{\varepsilon}(t),$$

En lo que sigue, suponemos que podemos aplicar transformadas de Laplace a las funciones ε , σ y sus derivadas temporales. Además, suponemos que $\sigma(0) = \varepsilon(0) = 0$. Dada una función f denotaremos \hat{f} a su transformada de Laplace. Entonces, aplicando transformadas de Laplace en (5.3.4), tenemos

$$\hat{\sigma}(s)(1 + A_1s) = \hat{\varepsilon}(s)(a_0 + a_1s),$$

que equivale a

$$\hat{\sigma}(s) = \frac{a_1}{A_1}\hat{\varepsilon}(s) - \frac{\frac{a_1}{A_1} - a_0}{1 + A_1s}\hat{\varepsilon}(s).$$

Definimos

$$\hat{b}(s) = -\frac{\frac{a_1}{A_1} - a_0}{1 + A_1s} = \frac{D}{1 + Fs}.$$

Aplicando la transformada inversa y dado que

$$\widehat{\frac{D}{F}e^{-\frac{t}{F}}} = \frac{D}{1 + Fs},$$

se tiene que

$$b(t) = -\frac{a_1 - a_0A_1}{A_1^2}e^{-\frac{t}{A_1}}.$$

Por otra parte, definimos por

$$b \star \varepsilon(t) = \int_0^t b(t-s)\varepsilon(s)ds, \quad t \geq 0,$$

la convolución de b y ε . Entonces, dado que $\hat{b}(s)\hat{\varepsilon}(s) = \widehat{b \star \varepsilon}(s)$, la expresión (5.3.4) queda

$$(5.3.5) \quad \sigma(t) = \frac{a_1}{A_1} \varepsilon(t) + \int_0^t b(t-s)\varepsilon(s)ds.$$

Sustituyendo el valor de b tenemos

$$\sigma(t) = \frac{a_1}{A_1} \varepsilon(t) - \int_0^t \frac{(a_1 - a_0A_1)}{A_1^2} e^{-\frac{s-t}{A_1}} \varepsilon(s) ds.$$

Sustituyendo los valores de a_0 , a_1 y A_1 , concluimos

$$\sigma(t) = \frac{E + E_m}{\eta} \varepsilon(t) + \int_0^t \frac{E_m}{\eta} \left(E - \frac{E + E_m}{\eta} \right) e^{-\frac{(s-t)E_m}{\eta}} \varepsilon(s) ds.$$

Podemos generalizar al caso d -dimensional la expresión (5.3.5) en la forma

$$(5.3.6) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds,$$

donde volvemos a hacer explícita la dependencia respecto a \mathbf{u} . La expresión (5.3.6) es la *ley constitutiva de los materiales viscoelásticos de memoria larga*. El comportamiento elástico viene dado por el primer término del segundo miembro, mientras que la viscosidad y la memoria vienen dados por el término integral de tipo Volterra, que en lo sucesivo llamaremos *término de memoria*, y que hace que el tensor de tensiones de cada instante dependa de todos

los estados de deformación previos. Los tensores $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ijkl})$ y $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{ijkl})$ se denominan, respectivamente, *tensor de elasticidad* y *tensor de relajación*. Observamos fácilmente que para $\mathcal{B} = \mathbf{0}$, es decir, cuando no hay memoria, la expresión (5.3.6) se convierte en (5.3.2), esto es, la ley de comportamiento de un material elástico lineal.

La expresión (5.3.6) es utilizada o mencionada en numerosas obras, ver por ejemplo [21, 25]. Existen, no obstante, referencias bibliográficas como [95] que utilizan para la viscoelasticidad con memoria larga la expresión

$$(5.3.7) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{R}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(0)) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}(s))ds.$$

La relación entre (5.3.6) y (5.3.7) es inmediata, como se ve a continuación. Trabajando en coordenadas e integrando por partes, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ijkl}(0)\varepsilon_{kl}(t) - \mathcal{R}_{ijkl}(t)\varepsilon_{kl}(0) &= \int_0^t \frac{d}{ds} \{ \mathcal{R}_{ijkl}(t-s)\varepsilon_{kl}(s) \} ds \\ &= - \int_0^t \dot{\mathcal{R}}_{ijkl}(t-s)\varepsilon_{kl}(s) ds + \int_0^t \mathcal{R}_{ijkl}(t-s)\dot{\varepsilon}_{kl}(s) ds. \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ijkl}(0)\varepsilon_{kl}(t) + \int_0^t \dot{\mathcal{R}}_{ijkl}(t-s)\varepsilon_{kl}(s) ds \\ = \mathcal{R}_{ijkl}(t)\varepsilon_{kl}(0) + \int_0^t \mathcal{R}_{ijkl}(t-s)\dot{\varepsilon}_{kl}(s) ds, \end{aligned}$$

y basta tomar $\mathcal{A} = \mathcal{R}(0)$ y $\dot{\mathcal{R}} = \mathcal{B}$. En [22] se realiza un análisis similar.

Existe, además, una formulación alternativa, en cierto modo recíproca, para la ley de comportamiento de un material viscoelástico de memoria larga (consultar, por ejemplo, [22, 58, 88]). En literatura inglesa recibe el nombre de *creep equation* y consiste en expresar el tensor de deformaciones linealizado como función del tensor de tensiones. Esto es,

$$(5.3.8) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) = \mathcal{E}\boldsymbol{\sigma}(t) + \int_0^t \mathcal{C}(t-s)\boldsymbol{\sigma}(s)ds.$$

Como se ve sin dificultad, dicha ley podemos obtenerla repitiendo el razonamiento de (5.3.4)–(5.3.5) con $a_0 = 1$ y $A_0 \neq 1$. El tensor de cuarto orden $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl})$ es el *tensor de elasticidad* y $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{ijkl})$ recibe la denominación inglesa de *creep tensor*.

Un resultado de regularidad. En los capítulos 6–10, será frecuente la situación en la que dispongamos de un resultado de existencia y unicidad de solución débil \mathbf{u} para el campo de desplazamientos, con una cierta regularidad. En estos casos, el campo de tensiones, dado por (5.3.6) hereda dicha regularidad.

Teorema 5.3.1. Sean V y Q los espacios de Hilbert reales dados por (4.1.1) y (4.1.4) y sea $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ el campo de desplazamientos solución débil de un problema de contacto P en viscoelasticidad con memoria larga. En estas condiciones, el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \rightarrow Q$ dado por (5.3.6) verifica:

(i) Si $\mathcal{A} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$, $\mathcal{B} \in C([0, T]; \mathbf{L}^\infty(\Omega))$ y $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$, entonces

$$\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q),$$

(ii) Si $\mathcal{A} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$, $\mathcal{B} \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{L}^\infty(\Omega))$ y $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$, entonces

$$\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,2}(0, T; Q).$$

Demostración.

(i) Sean $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$. Se verifica,

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}(t_1) - \boldsymbol{\sigma}(t_2)\|_Q &\leq \|\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t_1) - \mathbf{u}(t_2))\|_Q \\ &\quad + \int_0^{t_1} \|(\mathcal{B}(t_1 - s) - \mathcal{B}(t_2 - s))\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))\|_Q ds + \int_{t_1}^{t_2} \|\mathcal{B}(t_2 - s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))\|_Q ds \\ &\leq c (\|\mathbf{u}(t_1) - \mathbf{u}(t_2)\|_V + \int_0^{t_1} \|\mathcal{B}(t_1 - s) - \mathcal{B}(t_2 - s)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} ds + (t_2 - t_1)), \end{aligned}$$

siendo c una constante positiva que depende de \mathcal{A} , \mathcal{B} y \mathbf{u} . De la desigualdad

anterior se concluye fácilmente la prueba del apartado (i).

(ii) Del apartado (i) y las inyecciones continuas

$$W^{1,2}(0, T; X) \subset C([0, T]; X) \subset L^2(0, T; X),$$

para $X = V$, $X = \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ y $X = Q$ se obtiene que $\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; Q)$. Además, dado que

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{B}(0)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \dot{\mathcal{B}}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds,$$

para casi todo $t \in (0, T)$, también se deduce que

$$\|\dot{\boldsymbol{\sigma}}\|_{L^2(0, T; Q)}^2 \leq c \int_0^T (\|\mathbf{u}(t)\|_V^2 + \|\dot{\mathbf{u}}(t)\|_V^2) dt = c \|\mathbf{u}\|_{W^{1,2}(0, T; V)}^2,$$

por lo que $\dot{\boldsymbol{\sigma}} \in L^2(0, T; Q)$. Esto es, hemos probado que $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,2}(0, T; Q)$. \square

Análogamente, en numerosas ocasiones dispondremos de un resultado de existencia y unicidad de solución débil aproximada \mathbf{u}^h para el campo de desplazamientos, con una cierta regularidad. En estos casos, el campo de tensiones aproximado, dado por

$$(5.3.9) \quad \boldsymbol{\sigma}^h(t) = \mathcal{P}_{Q^h}(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h(t))) + \mathcal{P}_{Q^h}\left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h(s))ds\right),$$

también hereda dicha regularidad.

Corolario 5.3.2. Sean $V^h \subset V$ y $Q^h \subset Q$ subespacios de dimensión finita y sea $\mathbf{u}^h : [0, T] \rightarrow V^h$ el campo de desplazamientos aproximado de un problema de contacto P en viscoelasticidad con memoria larga. En estas condiciones, el campo de tensiones aproximado $\boldsymbol{\sigma}^h : [0, T] \rightarrow Q^h$ dado por (5.3.9) verifica:

(i) Si $\mathcal{A} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$, $\mathcal{B} \in C([0, T]; \mathbf{L}^\infty(\Omega))$ y $\mathbf{u} \in C([0, T]; V^h)$, entonces

$$\boldsymbol{\sigma}^h \in C([0, T]; Q^h).$$

(ii) En las condiciones de (i), se cumple la cota

$$(5.3.10) \quad \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h\|_{C([0,T];Q)} \leq \|(I - \mathcal{P}_{Q^h})\boldsymbol{\sigma}\|_{C([0,T];Q)} + c \|\mathbf{u}^h - \mathbf{u}\|_{C([0,T];V)}.$$

Demostración. Teniendo en cuenta la no expansividad del operador de proyección \mathcal{P}_{Q^h} , la demostración del apartado (i) es idéntica a la del apartado (i) del Teorema 5.3.1. Entonces, para el apartado (ii) restamos las expresiones (5.3.6) y (5.3.9) y obtenemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) - \boldsymbol{\sigma}^h(t) &= \mathcal{P}_{Q^h}(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^h(t))) \\ &+ \mathcal{P}_{Q^h}\left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}^h(s))ds\right) + (I - \mathcal{P}_{Q^h})\boldsymbol{\sigma}(t), \end{aligned}$$

de donde concluimos, haciendo uso de (4.2.9), que

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}(t) - \boldsymbol{\sigma}^h(t)\|_Q &\leq c(\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^h(t))\|_Q \\ &+ \int_0^t \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}^h(s))\|_Q ds) + \|(I - \mathcal{P}_{Q^h})\boldsymbol{\sigma}(t)\|_Q, \end{aligned}$$

de donde se obtiene (5.3.10). □

5.4. Condiciones de contorno

Recuperamos aquí la definición matemática de sólido deformable introducida en la Sección 5.2, esto es, el conjunto de sus puntos materiales (configuración de referencia) ocupa la clausura de un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ cuya frontera $\Gamma = \partial\Omega$ es suficientemente regular (por ejemplo, lipschitziana a trozos). Entonces se puede definir el vector normal exterior y unitario $\boldsymbol{\nu}$ para casi todo punto de Γ . Además, Γ está dividida en tres partes disjuntas Γ_i , $i = 1, 2, 3$, siendo $med(\Gamma_1) > 0$. Suponemos que sobre el sólido actúa una fuerza volúmica cuya función de densidad viene dada por $\mathbf{f}_0 : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, donde $T > 0$ es el tiempo hasta el que observamos la deformación, y que los efectos de la inercia son despreciables (caso cuasiestático), por lo que la ecuación del equilibrio (5.2.2) gobierna el proceso de deformación.

Condiciones de contorno de desplazamientos y tracciones.

Suponemos que el sólido está fijado en Γ_1 por lo que el vector de desplazamientos \mathbf{u} verifica

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma_1 \times [0, T].$$

Para mayor generalidad, se puede suponer que los desplazamientos impuestos en Γ_1 son no nulos. No obstante, nos limitamos al estudio de condiciones de fijación para mayor simplicidad. Por otra parte, las tracciones superficiales son conocidas. Así, sobre Γ_2 se define una función de densidad $\mathbf{f}_2 : \Gamma_2 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{en} \quad \Gamma_2 \times [0, T],$$

donde $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}$ es el *vector de tensiones de Cauchy* dado por $(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu})_i = \sigma_{ij} \nu_j$.

Condiciones de contorno de contacto y rozamiento.

Además, la parte Γ_3 de la frontera es susceptible de entrar en contacto con un obstáculo¹. El contacto puede ser unilateral o bilateral. Si es unilateral, el cuerpo puede volver a separarse del obstáculo. Si es bilateral, el contacto se mantiene durante todo el proceso de deformación. Para describir matemáticamente las condiciones de contacto, en los casos en que $d > 1$, definimos las componentes normal u_ν y tangencial \mathbf{u}_τ del desplazamiento:

$$u_\nu = u_i \nu_i, \quad \mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - u_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

También definimos la tensión normal y la tensión tangencial como sigue:

$$\sigma_\nu = \sigma_{ij} \nu_j \nu_i, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

¹Recordamos que las condiciones específicas para el caso de contacto entre dos cuerpos serán introducidas en el Capítulo 8.

En beneficio de una exposición unificada de todos los casos, para $d = 1$ interpretamos que u_ν y σ_ν designan, respectivamente, u y σ , mientras que \mathbf{u}_τ y $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ carecen de significado y obviamos las expresiones que los involucren. En sentido estricto, por *condición de contacto* entendemos una expresión que modeliza el comportamiento del cuerpo en la dirección de la normal de Γ_3 a lo largo del intervalo temporal $[0, T]$, por lo que sólo intervienen las componentes normales de desplazamientos, tensiones y sus derivadas. Por *condición de rozamiento* entendemos una expresión que modeliza el comportamiento tangencial en Γ_3 a lo largo de $[0, T]$, si bien, como veremos, ello no impide que en algunos casos intervengan también las componentes normales de desplazamientos y tensiones. Presentamos ahora las condiciones de contacto y rozamiento utilizadas en este trabajo.

Condición de contacto bilateral. Se aplica cuando el proceso de deformación del cuerpo o cuerpos involucrados no implican la pérdida del contacto durante el tiempo de observación, esto es

$$u_\nu = 0 \quad \text{en } \Gamma_3 \times [0, T].$$

Nótese que sí se admiten deslizamientos tangenciales en la superficie de contacto.

Condiciones de contacto de Signorini. En este caso, el obstáculo es una base rígida, por lo que no se deja penetrar. Matemáticamente esto se expresa como sigue:

$$(5.4.1) \quad u_\nu \leq s \quad \text{en } \Gamma_3 \times [0, T],$$

donde $s : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función que mide, en la dirección de $\boldsymbol{\nu}$, la distancia de la frontera de contacto del sólido, en su configuración de referencia, a la base rígida. Cuando $u_\nu < s$, no hay contacto y entonces la tensión normal es

nula. Es decir,

$$(5.4.2) \quad u_\nu < s \Rightarrow \sigma_\nu = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_3 \times [0, T].$$

Cuando $u_\nu = s$, hay contacto, por lo que la base rígida ejerce sobre el sólido una presión, desconocida *a priori*, en el sentido opuesto a la normal $\boldsymbol{\nu}$. Entonces,

$$(5.4.3) \quad u_\nu = s \Rightarrow \sigma_\nu < 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_3 \times [0, T].$$

Las condiciones de contacto (5.4.1)–(5.4.3) se resumen en:

$$(5.4.4) \quad u_\nu \leq s; \quad \sigma_\nu \leq 0; \quad (u_\nu - s)\sigma_\nu = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_3 \times [0, T].$$

En el estudio teórico tomamos $s = 0$ para mayor simplicidad. Esto es, en la configuración de referencia, el sólido está en contacto con el obstáculo en Γ_3 .

Condición de contacto con respuesta normal. En este caso el obstáculo se supone deformable. Como en el caso anterior, suponemos que s es una función que mide, en la dirección de la normal exterior, la distancia de la frontera de contacto Γ_3 al obstáculo. Suponemos la tensión normal σ_ν verifica

$$(5.4.5) \quad -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - s).$$

La ecuación (5.4.5) es una forma abreviada para expresar

$$-\sigma_\nu(\boldsymbol{x}) = p_\nu(\boldsymbol{x}, u_\nu(\boldsymbol{x}) - s(\boldsymbol{x})), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_3.$$

Representa la condición de contacto con *respuesta normal*, en la que $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ es la *función de respuesta normal*, que relaciona la tensión normal con el desplazamiento normal. En general, dicha función verifica que $p_\nu(\boldsymbol{x}, r) = 0$ para cualquier $\boldsymbol{x} \in \Gamma_3$ si $r \leq 0$. Cuando $u_\nu - s$ es positivo, representa la penetración de las rugosidades de la superficie del sólido deformable entre las del obstáculo. Un ejemplo usual de función de respuesta normal p_ν es el siguiente:

$$(5.4.6) \quad p_\nu(r) = c_\nu r_+^\alpha,$$

siendo c_ν una constante positiva y $\alpha \in (0, 1]$. Formalmente, la condición de contacto de Signorini se obtiene a partir de la condición de respuesta normal en el límite, cuando $c_\nu \rightarrow \infty$. Consideramos ahora otro ejemplo de función de respuesta normal, donde

$$(5.4.7) \quad p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{if } r \leq \alpha, \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha. \end{cases}$$

El coeficiente α está relacionado con el desgaste y el daño del material de la superficie de contacto y la interpretación que le corresponde en este caso a la condición (5.4.5) es que si la penetración supera el umbral marcado por α , el obstáculo cede completamente y no ofrece resistencia adicional a la penetración.

Condición de contacto con respuesta normal amortiguada. Al igual que en el caso anterior, el obstáculo se supone deformable. No obstante, en esta ocasión la tensión normal sólo depende de la velocidad del desplazamiento en la dirección de la normal. Por tanto, se supone que σ_ν verifica

$$(5.4.8) \quad -\sigma_\nu = p_\nu(\dot{u}_\nu),$$

donde $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ es la *función de respuesta normal amortiguada*, que se supone conocida. Importantes casos particulares corresponden a tomar

$$(5.4.9) \quad p_\nu(r) = kr_+ + p_0,$$

$$(5.4.10) \quad p_\nu(r) = k|r|^{q-1}r.$$

En el primer caso, se modeliza el efecto de una capa de lubricante, por ejemplo aceite, cuya presión viene dada por p_0 . Aplicando (5.4.9) en (5.4.8) observamos que, cuando no hay variación en el desplazamiento normal o el cuerpo se separa del obstáculo (velocidad normal negativa), la presión es el único agente que interviene en la aparición de tensiones normales. Por el contrario, cuando el

cuerpo se acerca o penetra en el obstáculo, también interviene la tasa de la variación del desplazamiento normal de manera proporcional al *coeficiente de amortiguación*, que viene dado por $k > 0$.

En el segundo caso, sustituyendo (5.4.10) en (5.4.8) para $k \geq 0$ y $0 < q \leq 1$, la tensión normal está en función de la potencia q -ésima de la velocidad del desplazamiento normal. Por tanto se modeliza el efecto de la viscosidad mediante un amortiguador no lineal (ver Sección 5.3). Es por esto que se dice *condición de contacto viscoso*.

Caso sin rozamiento. La *tribología* es la ciencia que se ocupa del estudio de las superficies en contacto cuando hay movimiento relativo entre ambas. El rozamiento es uno de sus principales campos. Como norma general, el rozamiento se define como la fuerza tangencial a la superficie común de dos cuerpos en contacto que se origina cuando se produce un desplazamiento relativo entre ambos. En nuestro modelo se corresponde con σ_τ . Como leyes generales se observan las siguientes:

- La magnitud de la fuerza de rozamiento es proporcional a la magnitud de la tensión en la dirección de la normal, esto es, $|\sigma_\tau|/\sigma_\nu = c$.
- La magnitud de la fuerza de rozamiento es independiente del área aparente de la zona en contacto.
- La fuerza de rozamiento es independiente de la velocidad de deslizamiento relativa, esto es, el rozamiento que se produce al iniciar el deslizamiento relativo de las dos superficies en contacto es el mismo que se necesita para mantenerlo.

No obstante, dichas leyes se manifiestan en la práctica insuficientes para describir adecuadamente los fenómenos de rozamiento, que dependen de gran can-

tividad de factores adicionales, como la presencia de lubricantes, la temperatura, las rugosidades de las superficies en contacto, el desgaste, el daño, etc. para los que no existe una teoría unificada. Digamos, finalmente, que en multitud de fenómenos de contacto las fuerzas de rozamiento se consideran despreciables (se dicen, sin rozamiento). Esto corresponde a:

$$(5.4.11) \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma_3 \times [0, T].$$

Condiciones de rozamiento de Coulomb y Tresca. Sin embargo, existen modelos que responden al menos a las leyes generales que hemos expuesto con anterioridad. Se obtienen a partir del *modelo de Coulomb generalizado*.

$$(5.4.12) \quad \left. \begin{aligned} |\boldsymbol{\sigma}_\tau| &\leq \mu p(|\sigma_\nu|), \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| < \mu p(|\sigma_\nu|) &\Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_\tau = \mathbf{0}, \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| = \mu p(|\sigma_\nu|) &\Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tal que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda \dot{\mathbf{u}}_\tau, \end{aligned} \right\}$$

donde p es una función no negativa y $\mu \geq 0$ es el *coeficiente de rozamiento*. Su producto es el *umbral de rozamiento*. Para los puntos materiales en los que se verifica la desigualdad estricta, no hay variación en la situación tangencial relativa de las superficies en contacto. Para los puntos en los que se verifica la igualdad, sí se produce una variación, que es proporcional a la fuerza de rozamiento. Dado que la frontera entre los puntos de Γ_3 que verifican una u otra condición no es conocida y varía con el tiempo, la condición de Coulomb generalizada se interpreta matemáticamente como una *condición de frontera libre*.

El problema que surge al modelizar el rozamiento con la ley de Coulomb es que involucra las tensiones normales, que matemáticamente son elementos de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (un espacio de distribuciones) y no funciones. No obstante, existen modelos que sugieren que un promedio de las tensiones normales es tribológicamente más realista, lo que justifica la regularización de las entidades matemáticas, hecha en varios trabajos ([18, 23, 38]).

En el caso particular en que p es la función identidad, obtenemos la clásica ley de Coulomb y en el caso de que $p = \kappa$ es una función constante, obtenemos la *ley de rozamiento de Tresca*. En este caso, tomando $g = \mu \kappa$ podemos reescribir el modelo anterior:

$$(5.4.13) \quad \left. \begin{aligned} |\boldsymbol{\sigma}_\tau| &\leq g, \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| < g &\Rightarrow \dot{\boldsymbol{u}}_\tau = \mathbf{0}, \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| = g &\Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tal que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda \dot{\boldsymbol{u}}_\tau. \end{aligned} \right\}$$

La principal característica de la ley de Tresca es que el umbral de rozamiento $g \geq 0$ es conocido y es constante, lo que facilita su tratamiento matemático.

Podemos combinar los modelos de Coulomb y de Tresca para modelizar una situación que responde en mayor medida a la realidad. Imaginemos dos cuerpos que entran en contacto y que se deslizan tangencialmente el uno respecto al otro. En los primeros momentos las rugosidades de uno y otro cuerpo dificultan ese deslizamiento, por lo que la tensión normal σ_ν determina en gran medida el umbral de rozamiento. Por tanto, el modelo de Coulomb describe adecuadamente la situación. No obstante, a medida que el daño y el desgaste de las superficies en contacto favorecen la desaparición de las rugosidades, la tensión normal va perdiendo influencia sobre la determinación del umbral de rozamiento, que se va estabilizando hacia un valor constante g , en cuyo caso el modelo de Tresca es más apropiado.

Ley de rozamiento viscoso. En todas las variantes de la ley de Coulomb, el rozamiento sólo se traduce en una variación del desplazamiento tangencial cuando la tensión tangencial alcanza un cierto umbral. No obstante, cuando existe una capa de lubricante entre el sólido deformable y el obstáculo, incluso las tensiones más bajas producen variaciones en el desplazamiento tangencial. La *ley de rozamiento viscoso* modeliza esta situación. Se supone, por tanto,

$$(5.4.14) \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = -p_\tau(\dot{\boldsymbol{u}}_\tau),$$

donde p_τ es una función conocida. El caso particular que nos interesa corresponde a tomar

$$(5.4.15) \quad p_\tau(\mathbf{v}) = \mu|\mathbf{v}|^{q-1}\mathbf{v}, \quad 0 < q \leq 1, \mu > 0.$$

Esto es, se modeliza la respuesta tangencial como un amortiguador de viscosidad no lineal (ver Sección 5.3), que se corresponde, por ejemplo, con el caso en que el lubricante es un fluido no-newtoniano.

Capítulo 6

Problema de contacto con condiciones de Signorini

Planteamos el sistema de E.D.P's que traduce matemáticamente, en la forma de un problema de contorno, el problema mecánico de contacto unilateral sin rozamiento con condiciones de Signorini entre un sólido viscoelástico de memoria larga y un obstáculo rígido. Se obtienen dos diferentes formulaciones variacionales y se demuestra la existencia y unicidad de solución. Además se estudian propiedades tales como la equivalencia entre ambas formulaciones variacionales, la dependencia continua de la solución respecto a los datos o la convergencia de la solución del problema en viscoelasticidad hacia la solución de un problema en elasticidad, según la memoria se reduce. Finalmente, se desarrolla el análisis numérico y se presentan resultados numéricos correspondientes a simulaciones realizadas en una, dos y tres dimensiones.

6.1. Formulación mecánica y variacional del problema

Nos situamos en las hipótesis generales descritas en el Capítulo 5 para los procesos de contacto en viscoelasticidad con memoria larga. La formulación matemática en problema de contorno que traduce el problema mecánico de contacto unilateral sin rozamiento con condiciones de Signorini entre un cuerpo viscoelástico de memoria larga y un obstáculo no penetrable se expresa como sigue:

PROBLEMA *P*: Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ y el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}_d$ tales que

$$(6.1.1) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds \quad \text{en } \Omega,$$

$$(6.1.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega,$$

$$(6.1.3) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_1,$$

$$(6.1.4) \quad \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \quad \text{en } \Gamma_2,$$

$$(6.1.5) \quad \sigma_\nu(t)u_\nu(t) = 0; \quad u_\nu(t) \leq 0; \quad \sigma_\nu(t) \leq 0; \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_3,$$

para todo $t \in [0, T]$.

Recordamos ahora el significado físico de las expresiones que componen el problema *P* y que ya fueron introducidas en las secciones 5.2, 5.3 y 5.4. La expresión (6.1.1) es la ley de comportamiento de los materiales viscoelásticos de memoria larga, introducida en (5.3.6). Recordamos que el término integral es el que modeliza el efecto de la memoria, que los tensores de cuarto orden $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ijkl})$ y $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{ijkl})$ son, respectivamente, los tensores de *elasticidad* y de *relajación* y que $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ es el tensor de deformaciones linealizado. La expresión (6.1.2) es la ecuación del equilibrio, introducida en (5.2.2), que gobierna el proceso de deformación en un problema cuasiestático. Las expresiones (6.1.3)

y (6.1.4) son las condiciones de contorno de desplazamientos-tracciones. Finalmente, (6.1.5) representa las condiciones de contacto tipo Signorini sin rozamiento obtenidas a partir de (5.4.4) y (5.4.11), en la Sección 5.4 para el caso $s = 0$. Por tanto, el cuerpo deformable se encuentra inicialmente en contacto, a lo largo de Γ_3 , con un obstáculo del que se puede separar pero que no se deja penetrar y que reacciona al contacto con una presión, *a priori* no conocida, en la dirección opuesta al vector normal exterior $\boldsymbol{\nu}$.

Se plantean a continuación dos formulaciones variacionales del problema P , que llamaremos $PV1$ y $PV2$. Son formulaciones duales en el sentido de que mientras en $PV1$ el estudio de la existencia y unicidad de solución se realiza sobre los desplazamientos \mathbf{u} y las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ se obtienen a posteriori a partir de estos, en $PV2$ el procedimiento es el contrario. Veremos que $PV1$ puede ser estudiado por medio de las herramientas desarrolladas en el Capítulo 2 y que esto no es posible para $PV2$.

Primera formulación variacional. Sea V el espacio de Hilbert real definido en (4.1.4) y sea U_{ad} el conjunto de desplazamientos admisibles definido en (4.1.7), que es un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de V . Suponemos que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ es una solución regular del problema P , de forma que $\mathbf{u}(t) \in U_{ad}$ para todo $t \in [0, T]$ y tiene sentido aplicar la fórmula de Green (4.1.3):

$$(6.1.6) \quad \begin{aligned} & (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)))_Q \\ & = (-\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_H + (\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}, \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_{[L^2(\Gamma)]^d}, \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{v} \in U_{ad}$. Además, por (6.1.3) y (6.1.4),

$$(6.1.7) \quad \begin{aligned} & (\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}, \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_{[L^2(\Gamma)]^d} \\ & = (\mathbf{f}_2(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_{[L^2(\Gamma_2)]^d} + (\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}, \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_{[L^2(\Gamma_3)]^d}. \end{aligned}$$

Por otra parte, usando (4.1.2), (6.1.5) y dado que $\mathbf{v} \in U_{ad}$ se tiene:

$$(6.1.8) \quad \begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}, \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_{[L^2(\Gamma_3)]^d} &= (\sigma_\nu(t), v_\nu - u_\nu(t))_{L^2(\Gamma_3)} \\ &= (\sigma_\nu(t), v_\nu)_{L^2(\Gamma_3)} \geq 0. \end{aligned}$$

Aplicando (6.1.2), (6.1.7) y (6.1.8) en (6.1.6) tenemos

$$(6.1.9) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)))_Q \geq (\mathbf{f}_0(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_H + (\mathbf{f}_2(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_{[L^2(\Gamma_2)]^d}.$$

Por tanto, teniendo en cuenta (4.1.9), concluimos lo siguiente:

$$(6.1.10) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)))_Q \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V,$$

para todo $\mathbf{v} \in U_{ad}$. En consecuencia, toda solución $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ regular del problema P verifica la siguiente formulación variacional:

PROBLEMA $PV1$: Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ y el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \rightarrow Q$ tales que

$$(6.1.11) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds,$$

$$(6.1.12) \quad \mathbf{u}(t) \in U_{ad}, \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)))_Q \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V,$$

para todo $\mathbf{v} \in U_{ad}$ y todo $t \in [0, T]$.

Segunda formulación variacional. Suponemos nuevamente que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ es una solución regular del problema P , de forma que $\mathbf{u}(t) \in U_{ad}$ para todo $t \in [0, T]$ y tiene sentido aplicar la fórmula de Green (4.1.3), por lo que podemos repetir el razonamiento que condujo a la formulación de $PV1$ hasta (6.1.10), donde tomamos sucesivamente $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}(t)$ (nótese que ambos pertenecen a U_{ad}) para concluir que

$$(6.1.13) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q = (\mathbf{F}(t), \mathbf{u}(t))_V.$$

Sumando (6.1.12) y (6.1.13), se tiene

$$(6.1.14) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v})_V,$$

para todo $\mathbf{v} \in U_{ad}$. Definimos el conjunto de *tensiones admisibles en el instante* $t \in [0, T]$:

$$(6.1.15) \quad \Sigma_{ad}(t) := \{\boldsymbol{\tau} \in Q : (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v})_V \text{ para todo } \mathbf{v} \in U_{ad}\}.$$

Así, por (6.1.14), se tiene $\boldsymbol{\sigma}(t) \in \Sigma_{ad}(t)$. Ahora bien, usando (6.1.13) y (6.1.15) se verifica

$$(6.1.16) \quad (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q \geq 0 \text{ para todo } \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_{ad}(t).$$

Por tanto, toda solución regular $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ del problema P verifica la siguiente formulación variacional:

PROBLEMA PV2: Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ y el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \rightarrow Q$ tales que:

$$(6.1.17) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds,$$

$$(6.1.18) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) \in \Sigma_{ad}(t), \quad (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q \geq 0,$$

para todo $\boldsymbol{\tau} \in \Sigma_{ad}(t)$ y todo $t \in [0, T]$.

6.2. Existencia y unicidad de solución

Supondremos las siguientes hipótesis a lo largo de toda la sección:

$$(6.2.1) \quad \mathcal{A} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega),$$

$$(6.2.2) \quad \mathcal{A}_{ijkl} = \mathcal{A}_{jikl} = \mathcal{A}_{klij} \quad \text{c.p.d. en } \Omega,$$

$$(6.2.3) \quad \mathcal{A}_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq \alpha\xi_{ij}\xi_{ij} \quad \text{c.p.d. en } \Omega,$$

$$(6.2.4) \quad \mathcal{B}_{ijkl}(t) = \mathcal{B}_{jikl}(t) = \mathcal{B}_{klij}(t) \quad \text{c.p.d. en } \Omega,$$

$$(6.2.5) \quad \mathcal{B} \in C([0, T]; \mathbf{L}^\infty(\Omega)),$$

$$(6.2.6) \quad \mathbf{F} \in C([0, T]; V),$$

donde $t \in [0, T]$, $\alpha > 0$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_{ij})$ es un elemento arbitrario de \mathbb{S}_d y \mathbf{F} es el vector de fuerzas, dado por (4.1.9). Una condición suficiente para que se verifique (6.2.6) es

$$(6.2.7) \quad \mathbf{f}_0 \in C([0, T]; H); \quad \mathbf{f}_2 \in C([0, T]; [L^2(\Gamma_2)]^d),$$

como se deduce de (4.1.9). Por tanto, de (6.2.1)–(6.2.3) se deduce que el tensor de elasticidad es simétrico, esencialmente acotado y elíptico. De (6.2.4)–(6.2.5) se tiene que el tensor de relajación es simétrico y, con continuidad a lo largo del tiempo de observación, es esencialmente acotado en Ω .

Existencia y unicidad de solución para PV1. Sustituyendo (6.1.11) en (6.1.12) se tiene que el problema PV1 es equivalente al siguiente:

PROBLEMA PV: Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ tal que

$$(6.2.8) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)))_Q \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V$$

para todo $\mathbf{v} \in U_{ad}$ y todo $t \in [0, T]$.

Basándonos en argumentos de la Sección 2.1 disponemos del siguiente resultado.

Teorema 6.2.1. *En las hipótesis (6.2.1)–(6.2.6) el problema PV tiene una única solución $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$.*

Demostración. Identificamos X al espacio de Hilbert V definido en (4.1.4) y hacemos lo propio entre X_0 y U_{ad} , definido en (4.1.7). Sean $A : V \rightarrow V$ y $B : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V)$ los operadores definidos como sigue para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y todo $t \in [0, T]$:

$$(6.2.9) \quad (A\mathbf{v}, \mathbf{w})_V = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_Q, \quad (B(t)\mathbf{v}, \mathbf{w})_V = (\mathcal{B}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_Q.$$

Utilizando (6.2.1)–(6.2.5) se obtiene que A y B satisfacen las condiciones (2.1.3) y (2.1.4), respectivamente. Además, $X_0 = U_{ad}$ verifica (2.1.2), esto es, es un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de $X = V$. Por otra parte, de (6.2.6) se concluye (2.1.5). Por tanto, el problema PV está en las condiciones requeridas a P_A en el Teorema 2.1.1, y podemos concluir que existe un único $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$ verificando (6.2.8). \square

Además, se obtiene que en las condiciones del Teorema 6.2.1 y por medio del Teorema 5.3.1 (i) podemos garantizar que el campo de tensiones definido a partir de la solución de PV con la ley (6.1.1) tiene regularidad $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q)$.

Como conclusión, observamos que hemos obtenido una solución débil única con regularidad $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in C([0, T]; V) \times C([0, T]; Q)$ para el problema de contacto P .

Observación 6.2.2. *En el caso particular en que \mathbf{F} viene dado por (4.1.9) y se verifica (6.2.7), podemos obtener mayor regularidad en Ω para el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$. Basta considerar para cada $t \in [0, T]$, que tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u}(t) \pm \boldsymbol{\varphi}$ en (6.2.8), siendo $\boldsymbol{\varphi} \in [D(\Omega)]^d$, y teniendo en cuenta (6.1.11), se deduce que $\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) = -\mathbf{f}_0(t)$ c.p.d. en Ω . Por lo tanto, $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q_1)$.*

Existencia y unicidad de solución para $PV2$. El Teorema 6.2.5 demuestra la existencia y unicidad de solución para el problema $PV2$. Se requieren unos resultados previos, que desarrollamos a continuación. Definimos el siguiente subconjunto de Q :

$$(6.2.10) \quad \Sigma_0 = \{\boldsymbol{\tau} \in Q : (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q \geq 0 \text{ para todo } \mathbf{v} \in U_{ad}\}.$$

Nótese que, a diferencia de $\Sigma_{ad}(t)$, el conjunto Σ_0 no depende de la variable temporal. Para cada $t \in [0, T]$ definimos

$$(6.2.11) \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{F}(t)),$$

y por tanto $\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t)\|_Q = \|\mathbf{F}(t)\|_V$. Además, por (6.2.6), se verifica

$$(6.2.12) \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \in C([0, T]; Q).$$

Por (6.1.15), (6.2.10) y (6.2.11) se obtiene trivialmente

$$(6.2.13) \quad \Sigma_{ad}(t) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \Sigma_0 \text{ para todo } t \in [0, T].$$

Por otra parte, de (6.2.1)–(6.2.3) se deduce la existencia de \mathcal{A}^{-1} , tensor de cuarto orden tal que

$$(6.2.14) \quad \mathcal{A}^{-1} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega),$$

$$(6.2.15) \quad \mathcal{A}_{ijkl}^{-1} = \mathcal{A}_{jikl}^{-1} = \mathcal{A}_{klij}^{-1} \quad \text{c.p.d. en } \Omega,$$

$$(6.2.16) \quad \mathcal{A}_{ijkl}^{-1} \xi_{kl} \xi_{ij} \geq \beta \xi_{ij} \xi_{ij} \quad \text{c.p.d. en } \Omega,$$

donde $\beta > 0$ es una constante que depende de \mathcal{A} y $\boldsymbol{\xi} = (\xi_{ij})$ es un elemento arbitrario de \mathbb{S}_d . A partir de (6.2.12)–(6.2.16) podemos expresar PV2 en la siguiente forma equivalente, donde se ha tomado $\boldsymbol{\sigma}(t) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$:

PROBLEMA PV2': Hallar $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ y $\bar{\boldsymbol{\sigma}} : [0, T] \rightarrow Q$ tales que

$$(6.2.17) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) = \mathcal{A}^{-1} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \mathcal{A}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) - \mathcal{A}^{-1} \int_0^t \mathcal{B}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds,$$

$$(6.2.18) \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \in \Sigma_0, \quad (\boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q \geq 0,$$

para todo $\boldsymbol{\tau} \in \Sigma_0$.

Sustituyendo (6.2.17) en (6.2.18) se tiene que PV2 es equivalente al siguiente problema:

PROBLEMA \overline{PV} : Hallar $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ y $\bar{\boldsymbol{\sigma}} : [0, T] \rightarrow \Sigma_0$ tales que

$$(6.2.19) \quad (\mathcal{A}^{-1} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t), \boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t))_Q \geq (-\mathcal{A}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t), \boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t))_Q \\ + (\mathcal{A}^{-1} \int_0^t \mathcal{B}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds, \boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t))_Q,$$

para todo $\boldsymbol{\tau} \in \Sigma_0$.

En este caso vemos que no podemos aplicar directamente los argumentos de la Sección 2.1, por lo que empleamos una estrategia diferente. Consideramos

$$\boldsymbol{\eta}(t) = -\mathcal{A}^{-1} \int_0^t \mathcal{B}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds,$$

y planteamos el problema auxiliar siguiente:

PROBLEMA PV2' _{η} : Dado $\boldsymbol{\eta} \in C([0, T]; Q)$, hallar $\boldsymbol{\sigma}_\eta \in C([0, T]; Q)$ tal que, para todo $t \in [0, T]$, se verifica

$$(6.2.20) \quad \boldsymbol{\sigma}_\eta(t) \in \Sigma_0, \quad (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}_\eta(t), \mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_\eta(t) + \mathcal{A}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \boldsymbol{\eta}(t))_Q \geq 0,$$

para todo $\boldsymbol{\tau} \in \Sigma_0$.

Teorema 6.2.3. *El problema PV2' _{η} tiene solución única.*

Demostración. Sea $t \in [0, T]$. Definimos $a : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ y $L_t : Q \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$a(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) = (\mathcal{A}^{-1} \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)_Q, \quad L_t(\boldsymbol{\tau}_1) = -(\mathcal{A}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \boldsymbol{\eta}(t), \boldsymbol{\tau}_1)_Q,$$

para todo $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2 \in Q$. Se prueba fácilmente que la aplicación a es bilineal, continua y Q -elíptica, como consecuencia inmediata de (6.2.14)–(6.2.16). Por la regularidad de $\boldsymbol{\eta}$, (6.2.14) y (6.2.6) se obtiene que L_t es lineal continua. Por tanto, y dado que Σ_0 es un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de Q , aplicando el Corolario 1.2.5 concluimos que existe un único $\boldsymbol{\sigma}_\eta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}_d$ verificando (6.2.20). Además la solución es Lipschitz-dependiente de los datos, por lo que dados $t_1, t_2 \in [0, T]$ arbitrarios, se concluye

$$\|\boldsymbol{\sigma}_\eta(t_2) - \boldsymbol{\sigma}_\eta(t_1)\|_Q \leq c(\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t_2) - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t_1)\|_Q + \|\boldsymbol{\eta}(t_2) - \boldsymbol{\eta}(t_1)\|_Q).$$

Entonces, por (6.2.12) y la regularidad de $\boldsymbol{\eta}$ concluimos

$$(6.2.21) \quad \boldsymbol{\sigma}_\eta \in C([0, T]; Q),$$

con lo que concluye la demostración. \square

Definimos ahora

$$(6.2.22) \quad \mathcal{W} = \{\boldsymbol{\tau} \in Q : \text{Div } \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_2 \cup \Gamma_3\}.$$

Se verifica que \mathcal{W} es el ortogonal de $\boldsymbol{\varepsilon}(V)$ en Q , como se comprueba a partir de (4.1.3) (ver [44, pág. 34] para los detalles). Además,

$$(6.2.23) \quad \Sigma_0 + \mathcal{W} \subset \Sigma_0,$$

ya que si $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \mathcal{W}$ y $\boldsymbol{\tau} \in \Sigma_0$,

$$(\tilde{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q \geq 0,$$

para todo $\boldsymbol{v} \in U_{ad}$. Para cada $t \in [0, T]$, definimos

$$(6.2.24) \quad \boldsymbol{\xi}_\eta(t) = \mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_\eta(t) + \mathcal{A}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \boldsymbol{\eta}(t).$$

Por (6.2.20) se tiene

$$(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}_\eta(t), \boldsymbol{\xi}_\eta(t))_Q \geq 0,$$

para todo $\boldsymbol{\tau} \in \Sigma_0$. Por (6.2.23), podemos tomar $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}_\eta(t) \pm \boldsymbol{\omega}$, siendo $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{W}$ arbitrario, por lo que concluimos

$$(6.2.25) \quad (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\xi}_\eta(t))_Q = 0,$$

para todo $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{W}$. Por tanto, existe un único $\boldsymbol{u}_\eta(t) \in V$ tal que $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\eta(t)) = \boldsymbol{\xi}_\eta(t)$. De (6.2.24) concluimos $\boldsymbol{\xi}_\eta \in C([0, T]; Q)$ y por tanto

$$(6.2.26) \quad \boldsymbol{u}_\eta \in C([0, T]; V).$$

Definimos ahora el operador

$$(6.2.27) \quad \Theta : C([0, T]; Q) \rightarrow C([0, T]; Q)$$

tal que

$$(6.2.28) \quad \Theta \boldsymbol{\eta}(t) = -\mathcal{A}^{-1} \int_0^t \mathcal{B}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}}(s)) ds.$$

De las propiedades de \mathcal{A}^{-1} , \mathcal{B} y $\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}}$, tenemos que Θ está bien definido, esto es, que toma valores en el espacio $C([0, T]; Q)$.

Teorema 6.2.4. *El operador Θ , definido en (6.2.27)–(6.2.28), tiene un único punto fijo $\boldsymbol{\eta}^*$, esto es, $\Theta \boldsymbol{\eta}^* = \boldsymbol{\eta}^*$.*

Demostración. Sean $\boldsymbol{\eta}_1$ y $\boldsymbol{\eta}_2 \in C([0, T]; Q)$. Para cada $t \in [0, T]$ se tiene

$$(6.2.29) \quad \|\Theta \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Theta \boldsymbol{\eta}_2(t)\|_Q \leq c \int_0^t \|\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}_1}(s) - \mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}_2}(s)\|_V ds,$$

donde c depende de \mathcal{A} y \mathcal{B} . Ahora bien, para cada $s \in [0, t]$,

$$(6.2.30) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}_1}(s) - \mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}_2}(s)\|_V &= \|\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\eta}_1}(s) - \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\eta}_2}(s)\|_Q \\ &= \|\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}_1}(s) - \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}_2}(s)) + \boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)\|_Q. \end{aligned}$$

Tomando primero $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}_1}(s)$, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_2$ y posteriormente $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}_2}(s)$, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_1$ en (6.2.20), y sumando ambas expresiones, tenemos

$$(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}_1}(s) - \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}_2}(s), \mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}_2}(s) - \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}_1}(s)) + \boldsymbol{\eta}_2(s) - \boldsymbol{\eta}_1(s))_Q \geq 0,$$

de donde obtenemos

$$(6.2.31) \quad \|\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}_1}(s) - \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}_2}(s)\|_Q \leq c \|\boldsymbol{\eta}_2(s) - \boldsymbol{\eta}_1(s)\|_Q.$$

Usando (6.2.31) en (6.2.30) tenemos

$$(6.2.32) \quad \|\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}_1}(s) - \mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}_2}(s)\|_V \leq c \|\boldsymbol{\eta}_2(s) - \boldsymbol{\eta}_1(s)\|_Q.$$

Operando a partir de (6.2.29) y usando (6.2.32) obtenemos

$$\|\Theta \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Theta \boldsymbol{\eta}_2(t)\|_Q \leq c \int_0^t \|\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)\|_Q ds.$$

Reiterando la desigualdad anterior un número suficientemente grande de veces y aplicando el Corolario 1.3.5, concluimos la existencia de un único $\boldsymbol{\eta}^* \in C([0, T]; Q)$ tal que $\Theta\boldsymbol{\eta}^*(t) = \boldsymbol{\eta}^*(t)$ para todo $t \in [0, T]$. \square

Ya estamos en condiciones de plantear el teorema de existencia y unicidad de solución del problema *PV2*.

Teorema 6.2.5. *En las hipótesis (6.2.1)–(6.2.6), el problema *PV2* tiene una única solución $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in C([0, T]; V) \times C([0, T]; Q)$.*

Demostración. Por el Teorema 6.2.4 existe un único $\boldsymbol{\eta}^* \in C([0, T]; Q)$ tal que $\Theta\boldsymbol{\eta}^* = \boldsymbol{\eta}^*$. Ahora bien, por el Teorema 6.2.3 existe un único $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}^*} \in C([0, T]; Q)$ tal que

$$(6.2.33) \quad \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}^*}(t) \in \Sigma_0, \quad (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}^*}(t), \mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}^*}(t) + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t)) + \boldsymbol{\eta}^*(t))_Q \geq 0,$$

para todo $\boldsymbol{\tau} \in \Sigma_0$ y todo $t \in [0, T]$. Además, por ser $\boldsymbol{\eta}^*$ punto fijo de Θ , se tiene

$$(6.2.34) \quad \boldsymbol{\eta}^*(t) = -\mathcal{A}^{-1} \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}^*}(s))ds.$$

Por (6.2.33) y (6.2.34), el par $(\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}^*}, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}^*})$ es solución de *PV2'* y en consecuencia, el par $(\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}^*}, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}^*} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}})$ es solución de *PV2*. Además, por (6.2.21) y (6.2.26), $\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}^*} \in C([0, T]; V)$ y $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}^*} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \in C([0, T]; Q)$.

Veamos ahora la unicidad de solución de *PV2*, que se reduce a la de *PV2'*. Sea $(\mathbf{u}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \in C([0, T]; V) \times C([0, T]; Q)$ otra solución de *PV2'*. Entonces definimos, para cada $t \in [0, T]$,

$$\boldsymbol{\eta}(t) = -\mathcal{A}^{-1} \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds.$$

Se verifica entonces, por (6.2.17)–(6.2.18) que

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \in \Sigma_0, \quad (\boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t), \mathcal{A}^{-1}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t)) + \boldsymbol{\eta}(t))_Q \geq 0,$$

para todo $\tau \in \Sigma_0$. Es decir, $\bar{\sigma}$ es solución de $PV2'_\eta$, que por el Teorema 6.2.4 es única. Por tanto se tiene

$$(6.2.35) \quad \bar{\sigma} = \sigma_\eta.$$

Además, por (6.2.24)–(6.2.26), existe $\mathbf{u}_\eta \in C([0, T]; V)$ tal que

$$(6.2.36) \quad \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)) = \mathcal{A}^{-1}((\sigma_\eta(t) + \tilde{\sigma}(t)) + \boldsymbol{\eta}(t)),$$

para cada $t \in [0, T]$. Por (6.2.35)–(6.2.36) tenemos $\varepsilon(\mathbf{u}(t)) = \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t))$, para todo $t \in [0, T]$. Entonces

$$\Theta \boldsymbol{\eta}(t) = -\mathcal{A}^{-1} \int_0^t \mathcal{B}(t-s) \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)) ds = -\mathcal{A}^{-1} \int_0^t \mathcal{B}(t-s) \varepsilon(\mathbf{u}(s)) ds = \boldsymbol{\eta}(t),$$

para todo $t \in [0, T]$. Por unicidad del punto fijo de Θ , tenemos $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$. Por tanto, $\bar{\sigma}(t) = \sigma_\eta(t) = \sigma_{\eta^*}(t)$, y en consecuencia, también

$$(6.2.37) \quad \varepsilon(\mathbf{u}(t)) = \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)) = \varepsilon(\mathbf{u}_{\eta^*}(t)),$$

para todo $t \in [0, T]$. Para probar que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\eta = \mathbf{u}_{\eta^*}$, sólo hace falta tener en cuenta (6.2.37), que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\eta = \mathbf{u}_{\eta^*} = \mathbf{0}$ en Γ_1 , y aplicar la desigualdad de Korn. \square

En consecuencia hemos demostrado que, bajo las hipótesis (6.2.1)–(6.2.6), el problema variacional $PV2$ tiene una única solución. Aún más, toda solución regular de P , si existe, es también solución de $PV2$, por lo que, dada la unicidad de esta última, sólo puede existir una solución regular de P , en estas condiciones. Por otra parte es fácil probar que toda solución suficientemente regular de $PV1$ (o $PV2$) es también solución del problema P .

6.3. Propiedades de la solución

En esta sección se completa el análisis llevado a cabo en la precedente, demostrando que los problemas $PV1$ y $PV2$ son equivalentes, que la solución del

problema $PV1$ depende de forma continua de los datos y que, cuando la memoria se reduce, la solución del problema viscoelástico converge a la solución de un problema elástico.

Un resultado de equivalencia. En la Sección 6.2 hemos estudiado dos formulaciones variacionales diferentes, $PV1$ y $PV2$, de un mismo problema mecánico P . Cabe preguntarse, pues, qué relación existe entre ambas y el siguiente teorema da respuesta a esta pregunta demostrando la equivalencia entre ambas formulaciones variacionales. Este resultado nos permitirá trabajar en las secciones restantes de este capítulo exclusivamente con la formulación variacional $PV1$. Esta elección se fundamenta en su mayor facilidad dado que, en su caso, el convexo de variables admisibles es independiente del tiempo.

Teorema 6.3.1. *En las hipótesis (6.2.1)–(6.2.6), sea $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in C([0, T]; V) \times C([0, T]; Q)$. Entonces el par $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ es solución del problema $PV1$ si y sólo si es solución del problema $PV2$.*

Demostración. Sea $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in C([0, T]; V) \times C([0, T]; Q)$ solución de $PV1$. Tomamos $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}(t)$ (ambos pertenecen a U_{ad}) en (6.1.12) y tenemos

$$(6.3.1) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q = (\mathbf{F}(t), \mathbf{u}(t))_V.$$

Sumando (6.1.12) y (6.3.1) se deduce que $\boldsymbol{\sigma}(t) \in \Sigma_{ad}(t)$. Además

$$(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q - (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q \geq 0,$$

para todo $\boldsymbol{\tau} \in \Sigma_{ad}(t)$.

Recíprocamente, sea $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in C([0, T]; V) \times C([0, T]; Q)$ solución de $PV2$. Probemos en primer lugar que $\mathbf{u}(t) \in U_{ad}$ para todo $t \in [0, T]$. Para ello, supongamos que no es así. Entonces, por ser U_{ad} convexo, cerrado y no vacío,

se tiene

$$(P(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - P(\mathbf{u}(t)))_V \geq 0 \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in U_{ad},$$

donde $P(\mathbf{u}(t))$ denota la proyección ortogonal de $\mathbf{u}(t)$ sobre U_{ad} . También se verifica

$$(P(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{u}(t), P(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{u}(t))_V > 0.$$

Entonces,

$$(P(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{u}(t), \mathbf{v})_V \geq (P(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{u}(t), P(\mathbf{u}(t)))_V > (P(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t))_V.$$

Existe entonces $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$(6.3.2) \quad (P(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{u}(t), \mathbf{v})_V > \alpha > (P(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t))_V \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in U_{ad}.$$

Tomando $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ se obtiene que $\alpha < 0$. Si existe algún $\mathbf{v} \in U_{ad}$ tal que $\alpha < (P(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{u}(t), \mathbf{v})_V < 0$ entonces tomando $\lambda \mathbf{v}$, $\lambda > 0$ tendiendo a $+\infty$, se tiene que $\alpha \leq -\infty$, lo que es imposible por (6.3.2). Por tanto:

$$(6.3.3) \quad (P(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{u}(t), \mathbf{v})_V \geq 0 \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in U_{ad}.$$

Sea ahora $\tilde{\boldsymbol{\tau}}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(P(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{u}(t))$. Tenemos, a partir de (6.3.2)

$$(6.3.4) \quad (\tilde{\boldsymbol{\tau}}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q > \alpha > (\tilde{\boldsymbol{\tau}}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q,$$

y a partir de (6.3.3) $(\tilde{\boldsymbol{\tau}}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q \geq 0$. Por tanto, $\tilde{\boldsymbol{\tau}}(t) \in \Sigma_0$ y $\tilde{\boldsymbol{\tau}}(t) + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) \in \Sigma_{ad}(t)$, donde $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \in C([0, T]; Q)$ está definido en (6.2.11). Entonces, por (6.1.18)

$$(6.3.5) \quad (\tilde{\boldsymbol{\tau}}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q \geq (\boldsymbol{\sigma}(t) - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q.$$

Por (6.3.4) y dado que $\alpha < 0$ se tiene, a partir de (6.3.5):

$$(6.3.6) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q < (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q.$$

Por otra parte, $2(\boldsymbol{\sigma}(t) - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t)) \in \Sigma_0$ y entonces, a partir de (6.1.18)

$$(6.3.7) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t) - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q \geq 0.$$

Como (6.3.7) y (6.3.6) constituyen una contradicción, concluimos que $\mathbf{u}(t) \in U_{ad}$. Veamos ahora que se verifica (6.1.12).

Dado que $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) \in \Sigma_{ad}(t)$, a partir de (6.1.18) tenemos:

$$(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q \geq (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q.$$

Por otra parte, $\boldsymbol{\sigma}(t) \in \Sigma_{ad}(t)$ y $\mathbf{u}(t) \in U_{ad}$. Entonces:

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{u}(t))_V.$$

Por tanto,

$$(6.3.8) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q = (\mathbf{F}(t), \mathbf{u}(t))_V.$$

Además

$$(6.3.9) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v})_V \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in U_{ad}.$$

Restando (6.3.8) de (6.3.9), se tiene (6.1.12). \square

Dependencia continua de la solución respecto a los datos. En las condiciones del problema mecánico P cabe preguntarse en qué medida variarán los desplazamientos \mathbf{u} y las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ que experimenta el sólido deformable, según se apliquen unas fuerzas externas $(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2)$ u otras. En el siguiente teorema demostramos que la solución de $PV1$ es Lipschitz dependiente con respecto a dichas fuerzas. Por otra parte, dado el resultado de equivalencia del Teorema 6.3.1, esta dependencia es también válida para la solución de $PV2$.

Teorema 6.3.2. *En las hipótesis (6.2.1)–(6.2.5), sean $(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\sigma}_1)$ y $(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\sigma}_2) \in C([0, T]; V) \times C([0, T]; Q)$ las soluciones al problema $PV1$ correspondientes a los datos $(\mathbf{f}_0^1, \mathbf{f}_2^1)$ y $(\mathbf{f}_0^2, \mathbf{f}_2^2) \in C([0, T]; H) \times C([0, T]; [L^2(\Gamma_2)]^d)$. Entonces existe una constante $c > 0$ dependiente de \mathcal{A} y \mathcal{B} tal que*

$$(6.3.10) \quad \begin{aligned} & \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{C([0, T]; V)} + \|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2\|_{C([0, T]; Q)} \\ & \leq c(\|\mathbf{f}_0^1 - \mathbf{f}_0^2\|_{C([0, T]; H)} + \|\mathbf{f}_2^1 - \mathbf{f}_2^2\|_{C([0, T]; [L^2(\Gamma_2)]^d)}). \end{aligned}$$

Demostración. De forma análoga a como se procede en (4.1.9), para cada $t \in [0, T]$ sean $\mathbf{F}_1(t)$ y $\mathbf{F}_2(t) \in V$ dados por el teorema de representación de Riesz y definidos por

$$(6.3.11) \quad (\mathbf{F}_i(t), \mathbf{v})_V = (\mathbf{f}_0^i(t), \mathbf{v})_H + (\mathbf{f}_2^i(t), \mathbf{v})_{[L^2(\Gamma_2)]^d},$$

para todo $\mathbf{v} \in V$ y donde $i = 1, 2$. Por otra parte, de (6.1.11), se tiene

$$(6.3.12) \quad \|\boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t)\|_Q \leq c\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V + c \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds.$$

Tomando primero $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1(t)$ y $\mathbf{u} = \mathbf{u}_2$ y posteriormente $\mathbf{v} = \mathbf{u}_2(t)$ y $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ en (6.1.11)–(6.1.12) y sumando las expresiones obtenidas, se tiene

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)))_Q &\leq (\mathbf{F}_1(t) - \mathbf{F}_2(t), \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t))_V \\ &\quad - \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)) \right)_Q. \end{aligned}$$

De donde, por las propiedades de \mathcal{A} y \mathcal{B} , obtenemos

$$(6.3.13) \quad \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V \leq c(\|\mathbf{F}_1(t) - \mathbf{F}_2(t)\|_V + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds).$$

Combinando (6.3.12) y (6.3.13) tenemos

$$(6.3.14) \quad \|\boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t)\|_Q \leq c(\|\mathbf{F}_1(t) - \mathbf{F}_2(t)\|_V + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds).$$

Sumando (6.3.13) y (6.3.14) y aplicando el Lema de Gronwall y (6.3.11) tenemos

$$(6.3.15) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V + \|\boldsymbol{\sigma}_1(t) - \boldsymbol{\sigma}_2(t)\|_Q \\ \leq c \max_{t \in [0, T]} \{ \|\mathbf{f}_0^1(t) - \mathbf{f}_0^2(t)\|_H + \|\mathbf{f}_2^1(t) - \mathbf{f}_2^2(t)\|_{[L^2(\Gamma_2)]^d} \}, \end{aligned}$$

de donde se concluye la demostración. \square

Desde el punto de vista mecánico, se deduce, por tanto, que una eventual perturbación en las fuerzas involucradas, acota linealmente a la perturbación que origina en desplazamientos y tensiones.

Un resultado de convergencia. En este apartado probamos un resultado que muestra la continuidad de la solución débil del problema de contacto P respecto a la función de memoria \mathcal{B} . Por otra parte, dado el resultado de equivalencia del Teorema 6.3.1, este resultado de continuidad es aplicable a la solución de $PV2$.

Dado $\theta > 0$, consideramos una función \mathcal{B}_θ verificando

$$(6.3.16) \quad \mathcal{B}_\theta \in C([0, T]; \mathbf{L}^\infty(\Omega)),$$

$$(6.3.17) \quad (\mathcal{B}_\theta)_{ijkl}(t) = (\mathcal{B}_\theta)_{jikl}(t) = (\mathcal{B}_\theta)_{klij}(t) \quad \text{para todo } t \in [0, T],$$

y planteamos el siguiente problema:

PROBLEMA $PV1_\theta$: Hallar un campo de desplazamientos $\mathbf{u}_\theta : [0, T] \rightarrow V$ y un campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}_\theta : [0, T] \rightarrow Q$ tales que

$$(6.3.18) \quad \boldsymbol{\sigma}_\theta(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\theta(t)) + \int_0^t \mathcal{B}_\theta(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\theta(s))ds,$$

$$(6.3.19) \quad \mathbf{u}_\theta(t) \in U_{ad}, \quad (\boldsymbol{\sigma}_\theta(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}_\theta(t)))_Q \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\theta(t))_V,$$

para todo $t \in [0, T]$ y todo $\mathbf{v} \in U_{ad}$.

El problema $(PV1)_\theta$ representa la formulación variacional $PV1$ del problema mecánico P cuando el tensor de relajación \mathcal{B} se reemplaza con el tensor \mathcal{B}_θ . El siguiente resultado es consecuencia del Teorema 6.2.1 (con los cambios oportunos) y nos garantiza existencia y unicidad de solución.

Teorema 6.3.3. *En las hipótesis (6.2.1)–(6.2.3), (6.2.6) y (6.3.16)–(6.3.17), existe solución única del problema $(PV1)_\theta$, de regularidad $(\mathbf{u}_\theta, \boldsymbol{\sigma}_\theta) \in C([0, T]; V) \times C([0, T]; Q)$.*

Tenemos entonces el siguiente resultado de convergencia:

Teorema 6.3.4. *Suponemos las hipótesis del Teorema 6.2.1 y del Teorema 6.3.3, y además*

$$(6.3.20) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \|\mathcal{B}_\theta - \mathcal{B}\|_{C([0,T];\mathbf{L}^\infty(\Omega))} = 0.$$

Entonces, la solución del problema $(PV1)_\theta$ converge a la solución del problema $PV1$ cuando $\theta \rightarrow 0$, esto es

$$(6.3.21) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \|(\mathbf{u}_\theta, \boldsymbol{\sigma}_\theta) - (\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})\|_{C([0,T];V) \times C([0,T];Q)} = 0.$$

Demostración. Sustituyendo (6.1.11) en (6.1.12), definiendo los operadores $A : V \rightarrow V$ y $B : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V)$ como en (6.2.9) y por las hipótesis (6.2.1)–(6.2.6) se tiene que el problema $PV1$ está en las condiciones del Teorema 2.1.1 para $X = V$ y $X_0 = U_{ad}$.

Por otra parte, sustituyendo (6.3.18) en (6.3.19), definiendo el operador $B_\theta : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V)$ por

$$(B_\theta(t)\mathbf{v}, \mathbf{w})_V = (\mathcal{B}_\theta(t)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_Q \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V,$$

para cada $t \in [0, T]$ y dado que se verifican las hipótesis (6.2.1)–(6.2.3), (6.2.6) y (6.3.16)–(6.3.17), se tiene que el problema $(PV1)_\theta$ está en las condiciones del Teorema 2.2.1 para $X = V$ y $X_0 = U_{ad}$. En estas condiciones, el límite en (6.3.20) implica que se verifica (2.2.3), por lo que podemos aplicar el Teorema 2.2.2 y entonces

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_\theta - \mathbf{u}\|_{C([0,T];V)} = 0.$$

Repetiendo cálculos ya conocidos, es fácil concluir que se verifica (6.3.21). \square

Desde el punto de vista mecánico, este resultado muestra que una pequeña variación en \mathcal{B} implica una pequeña variación en \mathbf{u} , esto es, el problema $PV1$ es mecánicamente estable respecto a \mathcal{B} . En concreto, cuando $\mathcal{B} = \mathbf{0}$, la condición

(6.3.20) se convierte en

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \|\mathcal{B}_\theta\|_{C([0,T];\mathbf{L}^\infty(\Omega))} = 0,$$

y el Teorema 6.3.4 tiene como corolario que el problema elástico es un caso límite del problema viscoelástico cuando la memoria se reduce. Este resultado es importante desde el punto de vista mecánico pues muestra que el caso elástico es una situación límite del caso viscoelástico y que, por tanto, constituye una buena aproximación cuando la importancia de la memoria es pequeña. En la Sección 6.5 se presentan resultados de simulaciones numéricas que corroboran este resultado teórico.

6.4. Aproximación numérica del problema

La aproximación numérica se realiza en dos etapas. Primeramente, planteamos un esquema semidiscreto $PV1^h$, en que sólo se discretiza la variable espacial como primer paso para el estudio de un esquema totalmente discretizado $PV1^{hk}$, que se realiza a continuación. Finalmente, describimos un algoritmo basado en el esquema totalmente discretizado $PV1^{hk}$ que hemos implementado en ordenador y con el que se obtienen los resultados de las simulaciones numéricas de la Sección 6.5.

Aproximación semidiscreta. Sean $Q^h \subset Q$ y $V^h \subset V$ dos espacios de Hilbert de dimensión finita que, por ejemplo, pueden ser obtenidos por medio del método de elementos finitos. Sea entonces $U_{ad}^h \subseteq V^h \cap U_{ad}$ un conjunto de desplazamientos admisibles discreto, que suponemos convexo, cerrado y no vacío en V^h . Además, suponemos que $\varepsilon(V^h) \subset Q^h$. Planteamos el siguiente problema semidiscreto:

PROBLEMA $PV1^h$: Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u}^h : [0, T] \rightarrow V^h$ y

el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}^h : [0, T] \rightarrow Q^h$ verificando para todo $t \in [0, T]$ que:

$$(6.4.1) \quad \boldsymbol{\sigma}^h(t) = \mathcal{P}_{Q^h} \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h(t)) + \mathcal{P}_{Q^h} \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h(s))ds \right),$$

$$(6.4.2) \quad \mathbf{u}^h(t) \in U_{ad}^h, \quad (\boldsymbol{\sigma}^h(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h(t)))_Q \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h(t))_V,$$

para todo $\mathbf{v}^h \in U_{ad}^h$.

Sustituyendo (6.4.1) en (6.4.2) y teniendo en cuenta que $\boldsymbol{\varepsilon}(V^h) \subset Q^h$ tenemos el siguiente problema en la incógnita \mathbf{u}^h .

PROBLEMA PV^h : Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u}^h : [0, T] \rightarrow V^h$ verificando para todo $t \in [0, T]$ que

$$(6.4.3) \quad \mathbf{u}^h(t) \in U_{ad}^h, \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h(t)))_Q \\ + \left(\int_0^t \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h(t)) \right)_Q \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h(t))_V,$$

para todo $\mathbf{v}^h \in U_{ad}^h$.

Basándonos en argumentos de la Sección 2.3 disponemos del siguiente teorema, que nos garantiza la existencia y unicidad de la solución semidiscreta y nos proporciona una cota para el error cometido en la aproximación.

Teorema 6.4.1. *En las hipótesis (6.2.1)–(6.2.6), el problema PV^h tiene solución única $\mathbf{u}^h \in C([0, T]; V^h)$ y se verifica la cota de error*

$$(6.4.4) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C([0, T]; V)} \leq c \max_{t \in [0, T]} \left\{ \inf_{\mathbf{v}^h \in U_{ad}^h} (\|\mathbf{v}^h - \mathbf{u}(t)\|_V + R(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h)^{\frac{1}{2}}) \right\},$$

donde c es una constante positiva que depende de \mathcal{A} y \mathcal{B} y

$$R(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h) = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}(t)))_Q - (\mathbf{F}(t), \mathbf{v}^h - \mathbf{u}(t))_V.$$

Demostración. Identificamos X_0^h con el conjunto de desplazamientos admisibles discreto U_{ad}^h y seguimos el mismo procedimiento que en la demostración

del Teorema 6.2.1 para demostrar que PV^h está en las condiciones requeridas al problema P_A^h en el Teorema 2.3.1. Obtenemos así la existencia y unicidad de $\mathbf{u}^h \in C([0, T]; V^h)$ verificando (6.4.3). Además, aplicando el Teorema 2.3.2 se verifica la cota (2.3.2), cuya traducción al marco del problema de contacto es (6.4.4). \square

Como consecuencia, en las condiciones del Teorema 6.4.1 y por medio del Corolario 5.3.2 (i) podemos garantizar que el campo de tensiones definido a partir de la solución de PV^h con la ley (6.4.1) tiene regularidad $\boldsymbol{\sigma}^h \in C([0, T]; Q^h)$.

Como conclusión, observamos que hemos obtenido una aproximación de la solución débil $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ para el problema de contacto P con regularidad $(\mathbf{u}^h, \boldsymbol{\sigma}^h) \in C([0, T]; V^h) \times C([0, T]; Q^h)$. Además, a partir de (6.4.4) y el apartado (ii) del Corolario 5.3.2, obtenemos la expresión siguiente:

$$(6.4.5) \quad \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h\|_{C([0, T]; Q)} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C([0, T]; V)} \leq \|(I - \mathcal{P}_{Q^h})\boldsymbol{\sigma}\|_{C([0, T]; Q)} \\ + c \max_{t \in [0, T]} \left\{ \inf_{\mathbf{v}^h \in U_{ad}^h} (\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}^h\|_V + R(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h)^{\frac{1}{2}}) \right\}.$$

El siguiente corolario hace uso de la estimación de error (6.4.5) y del Teorema 1.4.3 para demostrar la convergencia de la solución de $PV1^h$ a la de $PV1$ cuando el parámetro de discretización h tiende a 0 (lo que en la práctica implica que la dimensión de los espacios V^h y Q^h tiende a $+\infty$). La discretización se realiza con el Método de Elementos Finitos (M.E.F.) en las condiciones generales descritas en la Sección 4.2.

Corolario 6.4.2. Sean $V^h \subset V$ y $Q^h \subset Q$ ($h \rightarrow 0$), familias de subespacios de dimensión finita dados por (4.2.3) y (4.2.5), respectivamente y $U_{ad}^h \subset U_{ad}$ ($h \rightarrow 0$) una familia de subconjuntos de U_{ad} dada por (4.2.4). En las hipótesis (6.2.1)–(6.2.6), sean $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in C([0, T]; U_{ad}) \times C([0, T]; Q)$ la solución

débil del problema de contacto P y $(\mathbf{u}^h, \boldsymbol{\sigma}^h) \in C([0, T]; U_{ad}^h) \times C([0, T]; Q^h)$ su aproximación semidiscreta. Entonces, se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h\|_{C([0, T]; Q)} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C([0, T]; V)} = 0.$$

Demostración. Se comprueba fácilmente que

$$(6.4.6) \quad R(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h) \leq c \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}^h\|_V,$$

donde c depende de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbf{F}$ y \mathbf{u} . Entonces, de (6.4.5), observamos que tomando $g(r) = r^{\frac{1}{2}} + r$ se cumple la condición (4.2.14) y g verifica (1.4.4). Además, tomando $\mathcal{U} = [C^\infty(\bar{\Omega})]^d$ (o incluso $\mathcal{U} = [H^2(\Omega)]^d$) y $\mathcal{Q} = [H^1(\Omega)]_s^{d \times d}$ y teniendo en cuenta las estimaciones (4.2.6) y (4.2.8) se verifican las condiciones (4.2.12) y (4.2.13) con $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Por tanto, estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1.4.3 para $X = V, Y = Q, X_0 = U_{ad}, \mathcal{Y} = [H^1(\Omega)]_s^{d \times d}$ y $\mathcal{U} = [C^\infty(\bar{\Omega})]^d$ y concluimos el resultado deseado. \square

Corolario 6.4.3. Sean $V^h \subset V$ y $Q^h \subset Q$ ($h \rightarrow 0$), familias de subespacios de dimensión finita dados por (4.2.3) y (4.2.5), respectivamente y $U_{ad}^h \subset U_{ad}$ ($h \rightarrow 0$) la familia de subconjuntos de U_{ad} dada por (4.2.4). Bajo las hipótesis (6.2.1)–(6.2.6), sea $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ la solución débil del problema de contacto P y supongamos que se verifican las hipótesis de regularidad:

$$(6.4.7) \quad \mathbf{u} \in C([0, T]; [H^2(\Omega)]^d), \quad \boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; [H^1(\Omega)]^{d \times d}).$$

Sea, por otra parte, $(\mathbf{u}^h, \boldsymbol{\sigma}^h) \in C([0, T]; V^h) \times C([0, T]; Q^h)$ la solución al problema $PV1^h$. Entonces se tiene la estimación de error

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h\|_{C([0, T]; Q)} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C([0, T]; V)} \leq ch^{\frac{1}{2}},$$

donde c es una constante positiva que depende de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}$ y de \mathbf{F} .

Demostración. Es inmediato. Basta aplicar en (6.4.5) la cota (6.4.6), y las estimaciones (4.2.6) y (4.2.8). \square

A continuación mostramos cómo aumentando la regularidad de la solución de PV1 podemos mejorar algunos de los cálculos que proporcionan la estimación de error (6.4.5) y obtener así una cota de error numérico de orden $\mathcal{O}(h)$ para su aproximación con la solución de $PV1^h$.

Corolario 6.4.4. Sean $V^h \subset V$ y $Q^h \subset Q$ ($h \rightarrow 0$), familias de subespacios de dimensión finita dados por (4.2.3) y (4.2.5), respectivamente y $U_{ad}^h \subset U_{ad}$ ($h \rightarrow 0$) la familia de subconjuntos de U_{ad} dada por (4.2.4). Sea el vector de fuerzas \mathbf{F} dado por (4.1.9). Bajo las hipótesis (6.2.1)–(6.2.5) y (6.2.7), sea $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ la solución débil del problema de contacto P y supongamos que se verifican las hipótesis de regularidad:

$$(6.4.8) \quad \mathbf{u} \in C([0, T]; [H^2(\Omega)]^d), \quad u_\nu \in C([0, T]; H^2(\Gamma_3)),$$

$$(6.4.9) \quad \boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; [H^1(\Omega)]^{d \times d}).$$

Sea, por otra parte, $(\mathbf{u}^h, \boldsymbol{\sigma}^h) \in C([0, T]; V^h) \times C([0, T]; Q^h)$ la solución al problema $PV1^h$. Entonces se tiene la estimación de error

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h\|_{C([0, T]; Q)} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C([0, T]; V)} \leq ch,$$

donde c es una constante positiva que depende de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}$ y de \mathbf{F} .

Demostración. A partir de (6.1.12) y (6.4.9) podemos concluir

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) = -\mathbf{f}_0(t) \text{ en } H, \quad \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \text{ en } [L^2(\Gamma_2)]^d.$$

Entonces, de la definición de $R(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h)$ y teniendo en cuenta (6.1.11) se tiene

$$\begin{aligned} R(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h) &= (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{v}^h - \mathbf{u}(t))_V - (\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}(t))_{[L^2(\Gamma_2)]^d} \\ &\quad + (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}(t)))_Q = \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} (\mathbf{v}^h - \mathbf{u}(t)) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Por tanto, $R(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h) \leq c \|\boldsymbol{\sigma}(t)\|_{[H^1(\Omega)]^{d \times d}} \|u_\nu(t) - v_\nu^h\|_{L^2(\Gamma_3)}$. Partiendo de (6.4.4) y teniendo en cuenta (4.2.6) y (4.2.10) concluimos

$$(6.4.10) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C([0,T];V)} \\ \leq c \max_{t \in [0,T]} \{ \|\mathbf{u}(t)\|_{[H^2(\Omega)]^d} + \|\boldsymbol{\sigma}(t)\|_{[H^1(\Omega)]^{d \times d}}^{\frac{1}{2}} \|u_\nu(t)\|_{H^2(\Gamma_3)}^{\frac{1}{2}} \} h. \end{aligned}$$

Por otra parte, a partir de (5.3.10) y usando (4.2.8) y (6.4.10), se verifica

$$(6.4.11) \quad \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h\|_{C([0,T];Q)} \leq c \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C([0,T];V)} + \|\boldsymbol{\sigma}\|_{C([0,T];[H^1(\Omega)]^{d \times d})} h.$$

El resultado se obtiene entonces a partir de (6.4.10) y (6.4.11), siendo

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = & c \left(\|\mathbf{u}\|_{C([0,T];[H^2(\Omega)]^d)} + \|\boldsymbol{\sigma}\|_{C([0,T];[H^1(\Omega)]^{d \times d})} \right. \\ & \left. + \|u_\nu\|_{C([0,T];H^2(\Gamma_3))}^{\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{\sigma}\|_{C([0,T];[H^1(\Omega)]^{d \times d})}^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

□

Aproximación totalmente discreta. Vamos a considerar una aproximación totalmente discretizada del problema *PV1*. Para ello, nos situamos en las condiciones generales de discretización de la variable temporal descritas en la Sección 1.5. En particular, denotamos $\mathcal{B}^{n,j} = \mathcal{B}(t_n - t_j)$, donde $0 \leq j \leq n$. Nótese que $\mathcal{B}^{n,n} = \mathcal{B}_0$. Además, en esta sección, un índice n o j repetido no denota suma y el índice j no toma por defecto valores enteros entre 1 y d , como en otras secciones. Por razones que serán explicadas con posterioridad, imponemos la siguiente restricción sobre el paso de discretización temporal:

$$(6.4.12) \quad k < \frac{2\alpha}{d^2 \|\mathcal{B}_0\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}},$$

donde $\alpha > 0$ es la constante de (6.2.3). El esquema totalmente discretizado que estudiamos es el siguiente, donde $\mathbf{u}_n^{hk} \in U_{ad}^h$ es la aproximación del elemento $\mathbf{u}(t_n) \in U_{ad}$.

PROBLEMA *PV1*^{hk} : Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u}^{hk} = \{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset$

U_{ad}^h y el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}^{hk} = \{\boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset Q^h$ tales que

$$(6.4.13) \quad \boldsymbol{\sigma}_0^{hk} = \mathcal{P}_{Q^h} \mathcal{A} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0^{hk}),$$

$$(6.4.14) \quad \boldsymbol{\sigma}_n^{hk} = \mathcal{P}_{Q^h} \mathcal{A} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{hk}) + \mathcal{P}_{Q^h} \sum_{j=0}^n \alpha_j^n \mathcal{B}^{n,j} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^{hk}), \quad 1 \leq n \leq N,$$

$$(6.4.15) \quad (\boldsymbol{\sigma}_n^{hk}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n^{hk}))_Q \geq (\mathbf{F}(t_n), \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n^{hk})_V, \quad 0 \leq n \leq N,$$

para todo $\mathbf{v}^h \in U_{ad}^h$.

Los pesos $\alpha_j^n \geq 0$, $0 \leq j \leq n$ de la fórmula de cuadratura a los que nos limitamos son los de la fórmula de trapecios compuesta, dados por (1.5.3). Al aproximar con la fórmula de cuadratura el término de memoria, se comete el error numérico siguiente:

$$(6.4.16) \quad I_n = \left\| \int_0^{t_n} \mathcal{B}(t_n - s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds - \sum_{j=0}^n \alpha_j^n \mathcal{B}^{n,j} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j) \right\|_Q, \quad 1 \leq n \leq N,$$

que es de la forma (1.5.5), tomando $X = Q$, $w = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ y $B = \mathcal{B}$. Entonces, utilizando la fórmula de trapecios compuesta, por el Teorema 1.5.1 se verifica que

$$(6.4.17) \quad \lim_{k \rightarrow 0} I_n = 0, \quad 1 \leq n \leq N,$$

y además, si \mathbf{u} y \mathcal{B} son funciones de Lipschitz, se tiene

$$(6.4.18) \quad I_n \leq ck(\|\mathbf{u}\|_{C([0,T];V)} + \|\mathcal{B}\|_{C([0,T];L^\infty(\Omega))}).$$

Nos ocupamos a continuación del estudio de la existencia y unicidad de solución del problema $PV1^{hk}$. Sustituyendo (6.4.13) y (6.4.14) en (6.4.15) tenemos

PROBLEMA PV^{hk} : Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u}^{hk} = \{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset$

U_{ad}^h tal que

$$(6.4.19) \quad (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}_0^{hk}), \varepsilon(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}_0^{hk}))_Q \geq (\mathbf{F}_0, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_0^{hk})_V,$$

$$(6.4.20) \quad (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}_n^{hk}), \varepsilon(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n^{hk}))_Q + \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j^n \mathcal{B}^{n,j} \varepsilon(\mathbf{u}_j^{hk}), \varepsilon(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n^{hk}) \right)_Q \\ \geq (\mathbf{F}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n^{hk})_V,$$

para todo $\mathbf{v}^h \in U_{ad}^h$.

Basándonos en argumentos de la Sección 2.4 disponemos del siguiente teorema.

Teorema 6.4.5. *Supongamos que los datos verifican (6.2.1)–(6.2.6) y que el paso temporal k cumple (6.4.12). Entonces, el problema PV^{hk} tiene solución única $\mathbf{u}^{hk} \subset U_{ad}^h$. Para k suficientemente pequeño se verifica¹*

$$(6.4.21) \quad \max_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \\ \leq c \max_{0 \leq n \leq N} \left\{ I_n + \inf_{\mathbf{v}^h \in U_{ad}^h} \left\{ \|\mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n\|_V + R(t_n; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h)^{\frac{1}{2}} \right\} \right\},$$

donde c es una constante positiva que depende de \mathcal{A} y \mathcal{B} y

$$R(t_n; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h) = (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}_n) + \int_0^{t_n} \mathcal{B}(t_n - s) \varepsilon(\mathbf{u}(s)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n))_Q - (\mathbf{F}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n)_V.$$

Demostración. Seguimos el mismo procedimiento que en la demostración del Teorema 6.2.1, en esta ocasión para probar que PV^{hk} está en las condiciones requeridas al problema P_A^{hk} en el Teorema 2.4.1. Nótese que si se verifica (6.4.12) entonces, en particular también se verifica (2.4.1), dado que $\|B_0\|_{\mathcal{L}(V)} \leq d^2 \|B_0\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}$. Por tanto, aplicamos el Teorema 2.4.1 y demostramos la existencia y unicidad de $\mathbf{u}^{hk} = \{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset U_{ad}^h$ verificando (6.4.19)–(6.4.20). Además, aplicando el Teorema 2.4.2 se verifica la cota (2.4.8), cuya traducción al marco del problema de contacto es (6.4.21). \square

¹Dado que asumimos el uso de la fórmula de trapezios compuesta, de la Observación 2.4.4 se deduce que la constante multiplicadora no depende de N

Además, definiendo $\boldsymbol{\sigma}^{hk} = \{\boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset Q^h$ a partir de (6.4.13) y (6.4.14) y realizando algunas operaciones elementales se tiene

$$(6.4.22) \quad \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_0^{hk}\|_Q \leq c\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^{hk}\|_V + \|(I - \mathcal{P}_{Q^h})\boldsymbol{\sigma}_0\|_Q.$$

$$(6.4.23) \quad \begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q &\leq c(\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \\ &+ \sum_{j=0}^n \alpha_j^n \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j^{hk}\|_V) + I_n + \|(I - \mathcal{P}_{Q^h})\boldsymbol{\sigma}_n\|_Q. \end{aligned}$$

Finalmente, a partir de (6.4.21)–(6.4.23) obtenemos la cota siguiente.

$$(6.4.24) \quad \begin{aligned} &\max_{0 \leq n \leq N} \{\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q\} \\ &\leq c\left(\max_{0 \leq n \leq N} \{\|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h\|_V + R(t_n; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h)^{\frac{1}{2}}\}\right) \\ &+ \max_{0 \leq n \leq N} \{I_n + \|(I - \mathcal{P}_{Q^h})\boldsymbol{\sigma}_n\|_Q\}, \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{v}^h \in U_{ad}^h$.

El siguiente corolario hace uso de la estimación de error (6.4.24) y del Teorema 1.6.1 para demostrar la convergencia de la solución de $PV1^{hk}$ a la de $PV1$ cuando los parámetros de discretización h y k tienden a 0 (lo que implica que la dimensión de los espacios V^h y Q^h tiende a $+\infty$ y también N tiende a $+\infty$). La discretización de la variable espacial se realiza con el método de elementos finitos descrito en la Sección 4.2.

Corolario 6.4.6. *Sean $V^h \subset V$ y $Q^h \subset Q$ ($h \rightarrow 0$), familias de subespacios de dimensión finita dados por (4.2.3) y (4.2.5), respectivamente, y $U_{ad}^h \subset U_{ad}$ una familia de subconjuntos de U_{ad} dada por (4.2.4). En las hipótesis (6.2.1)–(6.2.6), sean $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in C([0, T]; U_{ad}) \times C([0, T]; Q)$ la solución débil del problema de contacto P y $(\mathbf{u}^{hk}, \boldsymbol{\sigma}^{hk}) \in (U_{ad}^h \times Q^h)^{N+1}$ su aproximación discreta. Entonces, se tiene*

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} \left\{ \max_{0 \leq n \leq N} \{\|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V\} \right\} = 0.$$

Demostración. Usando la cota (6.4.6) en (6.4.24) y tomando $g(r) = r^{\frac{1}{2}} + r$ se cumple la condición (4.2.15). Además g verifica (1.4.4). Por otra parte, tomando $\mathcal{U} = [C^\infty(\bar{\Omega})]^d$ (o incluso $\mathcal{U} = [H^2(\Omega)]^d$) y $\mathcal{Q} = [H^1(\Omega)]_s^{d \times d}$ y teniendo en cuenta las estimaciones (4.2.6) y (4.2.8) se verifican las condiciones (4.2.12) y (4.2.13) con $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Por tanto, estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1.6.1 para $X = V$, $Y = Q$, $X_0 = U_{ad}$, $\mathcal{Y} = [H^1(\Omega)]_s^{d \times d}$ y $\mathcal{U} = [C^\infty(\bar{\Omega})]^d$ y concluimos el resultado deseado. \square

Corolario 6.4.7. *En las hipótesis del Teorema 6.4.5, sean $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in C([0, T]; U_{ad}) \times C([0, T]; Q)$ la solución débil del problema de contacto P y $(\mathbf{u}^{hk}, \boldsymbol{\sigma}^{hk}) \in (U_{ad}^h \times Q^h)^{N+1}$ su aproximación discreta, con V^h, U_{ad}^h y Q^h dados por (4.2.3)–(4.2.5). Entonces, si se verifican las hipótesis (6.4.7) y además \mathbf{u} y \mathcal{B} son funciones de Lipschitz, se tiene la siguiente estimación de error:*

$$\max_{0 \leq n \leq N} \{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q \} \leq c(h^{\frac{1}{2}} + k),$$

donde c es una constante positiva que depende de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbf{F}, \mathbf{u}$ y $\boldsymbol{\sigma}$.

Demostración. Es inmediato. Basta aplicar en (6.4.24) la cota (6.4.6), y las estimaciones (4.2.6), (4.2.8) y (6.4.18). \square

A continuación, mostramos cómo aumentando la regularidad de la solución de $PV1$ podemos mejorar algunos de los cálculos que proporcionan la estimación de error (6.4.24) y obtener así una cota de error de orden $\mathcal{O}(h + k)$ para la aproximación con la solución de $PV1^{hk}$.

Corolario 6.4.8. *En las hipótesis del Teorema 6.4.5, sean $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in C([0, T]; U_{ad}) \times C([0, T]; Q)$ la solución débil del problema de contacto P y $(\mathbf{u}^{hk}, \boldsymbol{\sigma}^{hk}) \in (U_{ad}^h \times Q^h)^{N+1}$ su aproximación discreta, con V^h, U_{ad}^h y Q^h dados por (4.2.3)–(4.2.5). Entonces, si se verifican las hipótesis (6.4.8)–(6.4.9), el*

vector de fuerzas \mathbf{F} viene dado por (4.1.9) y cumple (6.2.7) y además \mathbf{u} y \mathcal{B} son funciones de Lipschitz, se tiene la siguiente estimación de error:

$$\max_{0 \leq n \leq N} \{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q \} \leq c(h + k),$$

donde c es una constante positiva que depende de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbf{F}, \mathbf{u}$ y $\boldsymbol{\sigma}$.

Demostración. Utilizando los mismos argumentos que en la demostración del Corolario 6.4.4, concluimos

$$R(t_n; \mathbf{u}_n, \mathbf{v}^h) = (\boldsymbol{\sigma}_n \boldsymbol{\nu}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n)_{[L^2(\Gamma_3)]^d} \leq c \|\boldsymbol{\sigma}_n\|_{[H^1(\Omega)]^{d \times d}} \|(u_n)_\nu - v_\nu^h\|_{L^2(\Gamma_3)},$$

para todo n , $0 \leq n \leq N$. Entonces, utilizando (4.2.10) se tiene

$$R(t_n; \mathbf{u}_n, \mathbf{v}^h) \leq c \|\boldsymbol{\sigma}\|_{C([0,T]; [H^1(\Omega)]^{d \times d})} \|u_\nu\|_{C([0,T]; H^2(\Gamma_3))} h^2.$$

Utilizando además (4.2.6), (4.2.8) y (6.4.18) en (6.4.24) tenemos el resultado deseado. \square

6.5. Resultados numéricos

En esta sección mostramos resultados numéricos de simulaciones realizadas con un algoritmo basado en estrategias de tipo penalización-dualidad. En concreto se han usado las ideas desarrolladas en [8, 90, 91] y el algoritmo final que hemos utilizado puede consultarse en detalle en [67]. Se pretende aproximar la solución del problema $PV1$ (pág. 126), según el esquema totalmente discretizado $PV1^{hk}$ (pág. 148). Comenzamos con un apartado dedicado a simulación unidimensional, incluyendo resultados numéricos que corroboran desde el punto de vista práctico el resultado de convergencia establecido en el Teorema 6.3.4. Posteriormente, se presentan resultados de simulaciones en dos y tres

dimensiones. Destacamos que, en todos los casos, las simulaciones corresponden a situaciones en que, en la configuración de referencia, existe una distancia $s > 0$ entre el sólido deformable y el obstáculo. Recordamos, por otra parte, que como consecuencia del resultado de equivalencia dado por el Teorema 6.3.1 todas las simulaciones se pueden considerar relativas a la aproximación de la solución del problema $PV2$ (pág. 127).

Un ejemplo unidimensional

Se observa durante T segundos el comportamiento de una barra de sección transversal de área A y de longitud L sujeta por uno de sus extremos y sometida a la acción de una fuerza distribuida f_0 en la dirección de su eje. El otro extremo se encuentra inicialmente a una distancia $s > 0$ de un cuerpo rígido que no se deja penetrar (ver Figura 6.5.1). El material del que está compuesta dicha barra es de tipo viscoelástico de memoria larga. Dado que $L \gg A$ suponemos que su línea media es representativa y en consecuencia modelizamos esta situación física con la versión unidimensional del problema P , tomando $\Omega = (0, L)$, $\Gamma_3 = \{L\}$, $\Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_1 = \{0\}$ y $s > 0$.

Dado que estamos en el caso unidimensional, $\mathcal{A} = AE$, donde E es el módulo de Young del material, que suponemos constante. Además $\varepsilon(u) = \partial u / \partial x$ y la memoria está en función de $\mathcal{B} = b$. De esta forma, el problema P se reescribe como sigue:

PROBLEMA $P1D_S$: Hallar el campo de desplazamientos $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

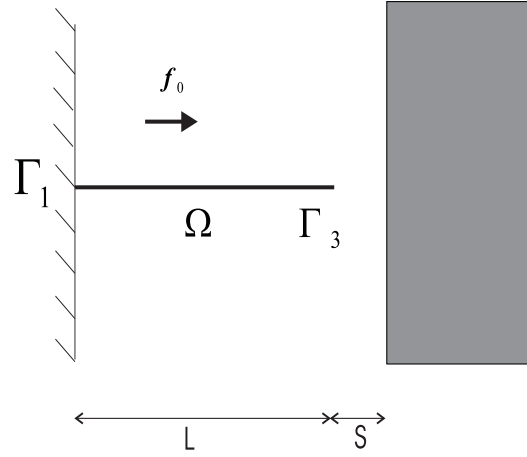


Figura 6.5.1: Problema de contacto entre una barra viscoelástica de memoria larga y un sólido rígido.

y el campo de tensiones $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$(6.5.1) \quad \sigma(x, t) = AE \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \int_0^t b(t-s) \frac{\partial u}{\partial x}(x, s) ds \quad \text{en } \Omega \times [0, T],$$

$$(6.5.2) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, t) + f_0(x, t) = 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, T],$$

$$(6.5.3) \quad u(0, t) = 0 \quad \text{en } [0, T],$$

$$(6.5.4) \quad \sigma(L, t) \leq 0; \quad u(L, t) \leq s; \quad (u(L, t) - s)\sigma(L, t) = 0 \quad \text{en } [0, T].$$

El ejemplo que exponemos a continuación es puramente académico y nos permitirá estudiar el error de los resultados numéricos con respecto a la solución analítica, que es conocida, y la convergencia, cuando decrece la memoria, a la solución del problema en elasticidad, que también es conocida. Por tanto, tomamos

$$(6.5.5) \quad L = 1 \text{ m}, \quad T = 2 \text{ seg.}, \quad s = 0.5 \text{ m}, \quad A = 1 \text{ cm}^2, \quad E = 10^4 \text{ N/m}^2,$$

$$(6.5.6) \quad f_0(x, t) = t \text{ N/m}, \quad b(x, t) = \theta \text{ N/seg.}$$

En estas condiciones, la solución exacta al problema $P1D_S$ se puede calcular hasta el instante de contacto, que denotamos t_θ . Así, si $t \leq t_\theta$, se tiene:

$$u_\theta(x, t) = \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \frac{1 - e^{-\theta t}}{\theta}, \quad \sigma_\theta(x, t) = (1-x)t,$$

y $t_\theta = \frac{1}{\theta} \log \frac{1}{1-\theta}$. El espacio en que buscamos la solución u_θ es $C([0, T]; V)$, donde

$$V = \{v \in H^1(0, L) : v(0) = 0\}.$$

La aproximación se realiza utilizando el espacio V^h , definido como

$$V^h = \{v^h \in C([0, L]) : v^h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1([x_i, x_{i+1}]), 1 \leq i \leq M-1, v^h(0) = 0\},$$

siendo $x_1 = 0 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_M = L$ la discretización del dominio de la variable espacial y $P_1([x_i, x_{i+1}])$ el espacio de polinomios de grado menor o igual a 1 en $[x_i, x_{i+1}]$.

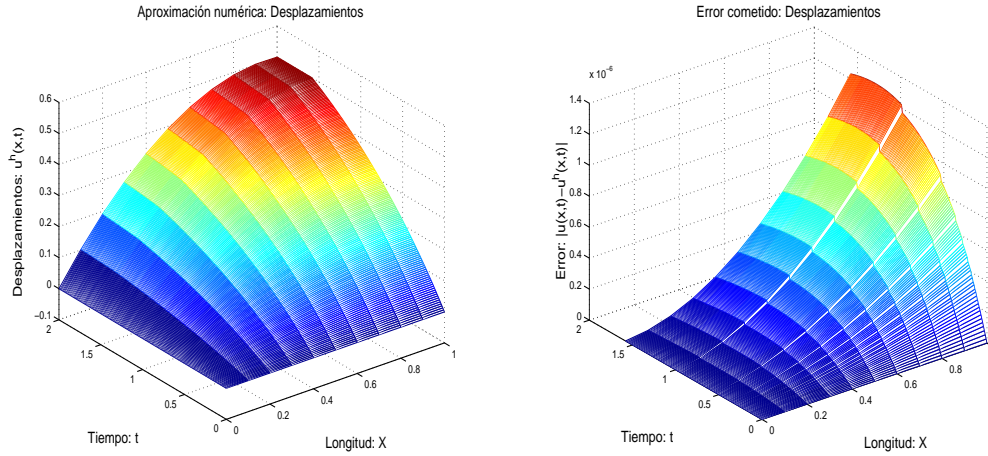


Figura 6.5.2: Problema $P1D_S$: Desplazamientos y error (hasta el instante de contacto).

En las figuras 6.5.2–6.5.3 se muestran resultados para el caso concreto $\theta = (e-1)/e \simeq 0.63$, lo que implica $t_\theta = e/(e-1) \simeq 1.58$. En concreto, en la Figura 6.5.2 se presentan los desplazamientos que experimentan 11 nodos equidistantes de una discretización de $M = 101$ nodos según evoluciona la variable temporal, así como los correspondientes errores respecto a la solución exacta hasta el instante de contacto t_θ . Por otra parte, en la Figura 6.5.3 se presenta la evolución en el tiempo de las tensiones experimentadas en cada intervalo de dicha discretización. Nótese que pese al contacto, no hay tensiones

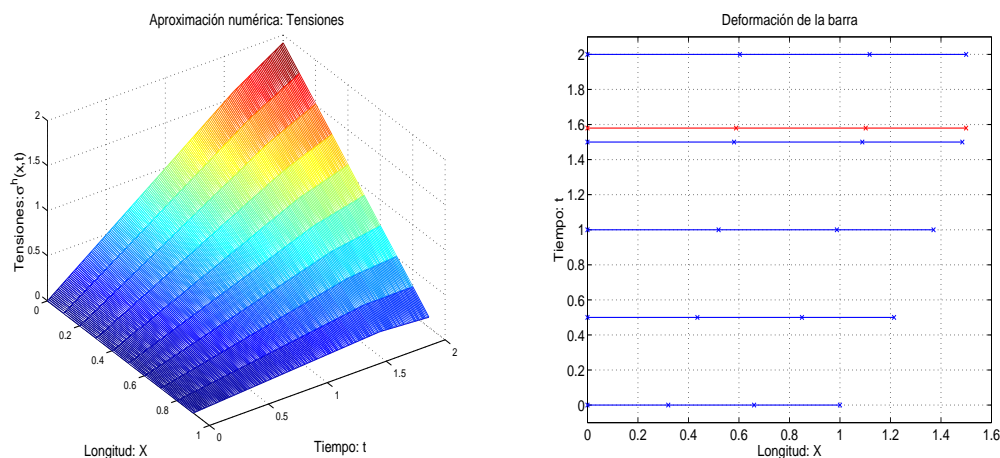


Figura 6.5.3: Problema $P1D_S$: Tensiones y evolución de la deformación.

negativas en el entorno de $x = L$ producidas por la reacción del obstáculo, pues se ven superadas por las tensiones positivas acumuladas en la memoria. Para valores más bajos de θ , esto es, cuando la memoria es menor, sí se manifiestan tensiones negativas. En la Figura 6.5.3 también se presenta un gráfico en el que se muestra la evolución de la deformación de la barra por medio de los desplazamientos experimentados por los nodos $x_1 = 0, x_{33} \simeq \frac{L}{3}, x_{66} \simeq \frac{2L}{3}$ y $x_{101} = L$.

Convergencia al caso elástico. El problema unidimensional de contacto unilateral sin rozamiento entre un sólido elástico y una fundación rígida se obtiene sustituyendo en el problema $P1D_S$ la expresión (6.5.1) por

$$\sigma(x, t) = AE \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad \text{en } \Omega \times [0, T].$$

En las condiciones (6.5.5)–(6.5.6), la solución de este problema viene dada por

$$\begin{aligned} u_e(x, t) &= \left(x - \frac{x^2}{2}\right)t, & \sigma_e(x, t) &= (1 - x)t \quad \text{en } \Omega \times [0, t_e], \\ u_e(x, t) &= -\frac{tx^2}{2} + \frac{t+1}{2}x, & \sigma_e(x, t) &= -tx + \frac{t+1}{2} \quad \text{en } \Omega \times [t_e, T], \quad T > 1. \end{aligned}$$

siendo $t_e = 1$ el instante de contacto. Es inmediato comprobar que u_θ converge

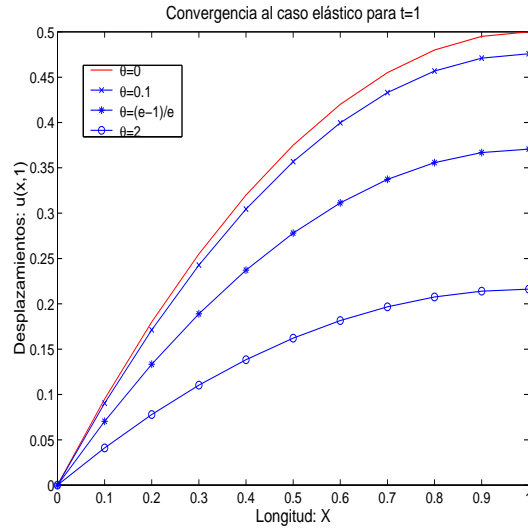


Figura 6.5.4: Problema $P1D_S$: Convergencia puntual al caso elástico en $t = 1$.

puntualmente a u_e en $\Omega \times [0, t_e]$ y t_θ tiende a t_e cuando θ tiende a 0. Ilustramos gráficamente este hecho en la Figura 6.5.4. En ella apreciamos que conforme el valor de θ disminuye, la solución aproximada del problema viscoelástico de memoria larga, converge puntualmente a la solución conocida del caso elástico (en rojo).

Un ejemplo bidimensional

Se considera un cuerpo tridimensional de sección $\Omega = (0, 1) \times (1, 2)$ y de espesor $\varepsilon \ll 1$. Suponemos una situación de carga y condiciones de contorno en las que la hipótesis de tensiones planas es admisible (véase Figura 6.5.5), en donde se supone ausencia de fuerzas volúmicas.

Se supone que el cuerpo está compuesto de un material viscoelástico de memoria larga y que como consecuencia de su deformación puede entrar en contacto con un objeto rígido cilíndrico cuya sección es un círculo que responde a la inecuación $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq 1$, por lo que inicialmente la distancia s de la fron-

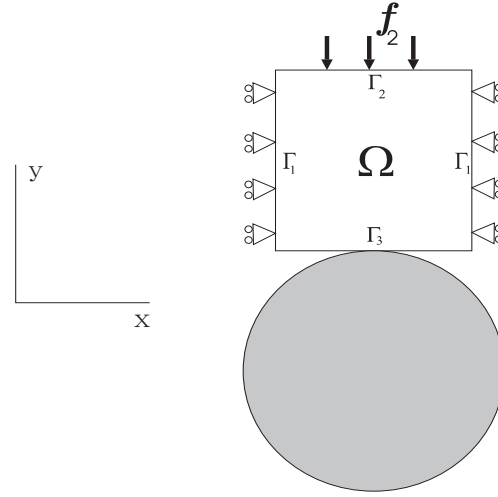


Figura 6.5.5: Problema de contacto bidimensional.

tera de contacto del material ($\Gamma_3 = (0, 1) \times \{1\}$) con dicho objeto viene dada por la ecuación

$$s^2(x, 1) = 1 - \sqrt{1 - (x - \frac{1}{2})^2}.$$

Tomamos \mathcal{A} igual al tensor de elasticidad lineal plana,

$$(6.5.7) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon})_{\alpha\beta} = \frac{E\kappa}{1 - \kappa^2}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\delta_{\alpha\beta} + \frac{E}{1 + \kappa}\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2,$$

donde los índices repetidos no denotan suma, E es el módulo de Young del material y κ es el coeficiente de Poisson. En el ejemplo concreto cuyos resultados se muestran en las figuras 6.5.6–6.5.8 se han utilizado los siguientes datos:

$$E = 10^2 \text{ N/m}^2, \quad \kappa = 0.3, \quad \mathbf{f}_0 = (0, 0) \text{ N/m}^3, \quad \mathbf{f}_2 = (0, -50) \text{ N/m}^2, \quad T = 2 \text{ seg.}$$

Además hemos considerado $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, entendiéndose que sus componentes expresan ahora cantidades medidas en $\text{N}/(\text{m}^2 \text{seg.})$. De esta condición también se deduce que el material es isótropo ($\mathcal{B}_{\alpha\beta\beta\beta} = 0, 1 \leq \alpha \neq \beta \leq 2$).

En la Figura 6.5.6 se muestran las configuraciones deformadas en los instantes inicial y final del proceso. Nótese que para $t = 0$ las fuerzas son no nulas y, en consecuencia la configuración en $t = 0$ es una configuración deformada,

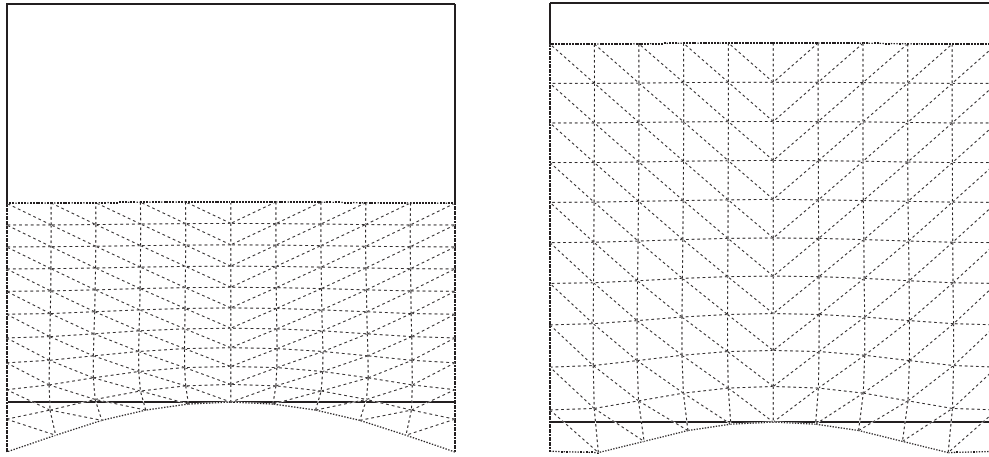


Figura 6.5.6: Problema 2D: Configuración deformada para $t = 0$ y $t = 2$. Caso isótropo.

diferente a la configuración de referencia. En la Figura 6.5.7 se presentan la distribución de tensiones en norma Von Mises y las tensiones en la dirección del eje OY (σ_{22}) para $t = 0$ mientras que en la Figura 6.5.8 se hace lo propio para $t = 2$.

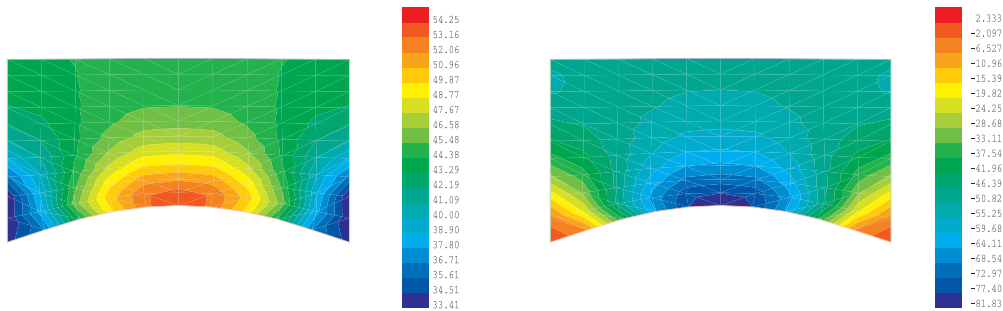


Figura 6.5.7: Problema 2D: Distribución de tensiones en norma Von Mises y tensiones en la dirección del eje OY (σ_{22}) para $t = 0$. Caso isótropo.

A continuación presentamos los resultados obtenidos para un caso anisótropo. En concreto se ha tomado $\mathcal{B}_{ijkl} = 10^2 N/(m^2 seg.)$, $1 \leq i, j, k, l \leq 2$.

En la Figura 6.5.9 se muestran la configuración deformada y la distribución de tensiones en norma Von Mises para el instante final y se aprecia la anisotropía

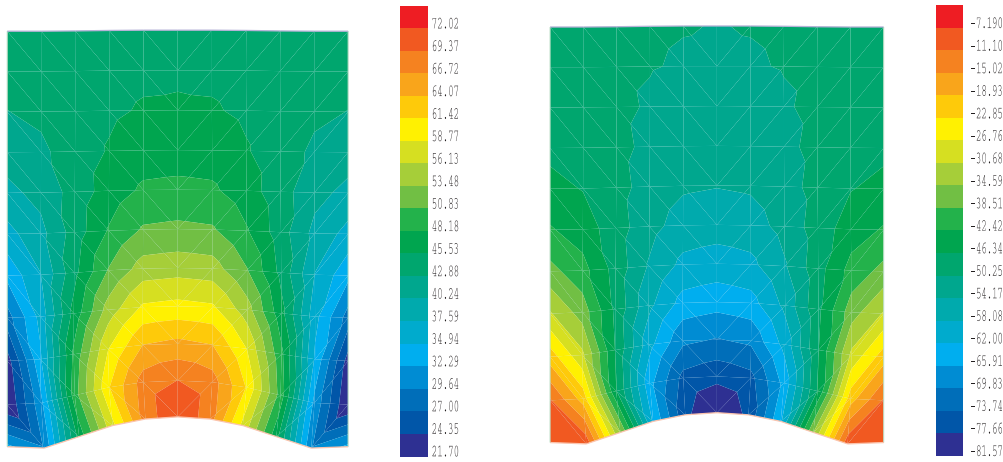


Figura 6.5.8: Problema 2D: Distribución de tensiones en norma Von Mises y tensiones en la dirección del eje OY (σ_{22}) para $t = 2$. Caso isótropo.

del material.

Un ejemplo tridimensional

Para el caso tridimensional consideramos un sólido cúbico que en su configuración de referencia ocupa el dominio $\Omega = (0, 1) \times (1, 2) \times (0, 1)$. Las caras $\{0\} \times (1, 2) \times (0, 1)$ y $\{1\} \times (1, 2) \times (0, 1)$ están fijadas de tal forma que no pueden desplazarse en la dirección del eje OX y la cara $\Gamma_3 = (0, 1) \times \{1\} \times (0, 1)$ está apoyada en un objeto rígido cilíndrico que responde a las expresiones

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq 1, \quad -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{3}{2},$$

por lo que inicialmente, la distancia s de la frontera de contacto del sólido con dicho objeto viene dada por la ecuación

$$s^2(x, 1, z) = 1 - \sqrt{1 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Además, suponemos que el cubo puede desplazarse sobre el plano $Z = 0$ pero nunca separarse de él. El sólido está compuesto de material viscoelástico de

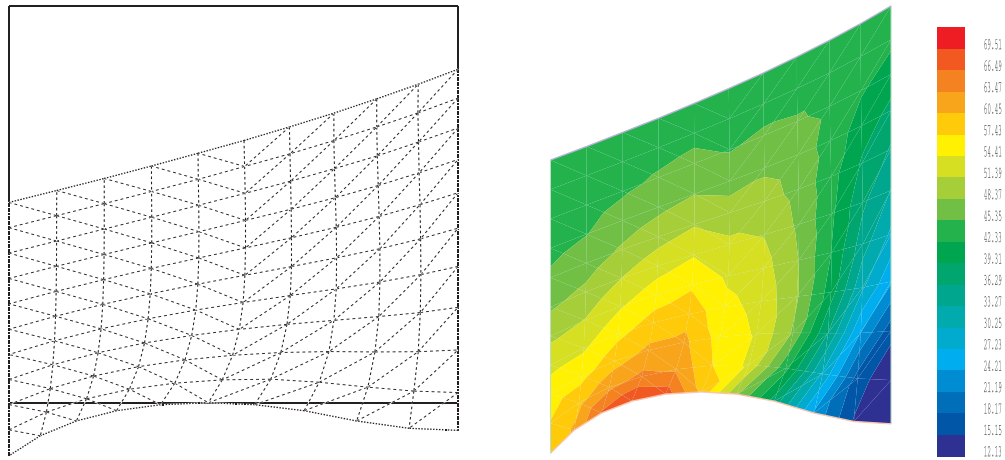


Figura 6.5.9: Problema 2D: Configuración deformada y distribución de tensiones en norma Von Mises. Caso anisótropo.

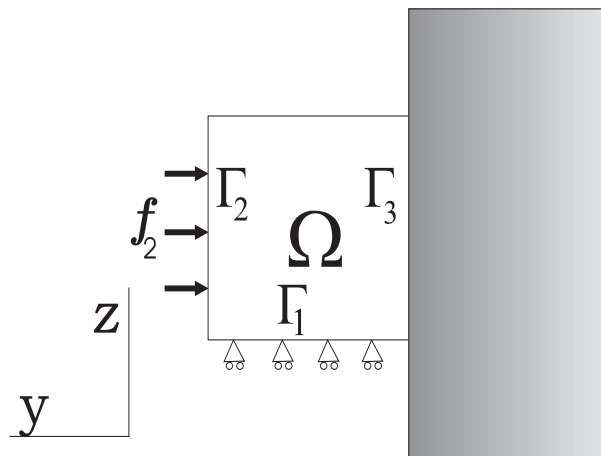


Figura 6.5.10: Problema de contacto tridimensional. Vista lateral.

memoria larga y en ausencia de fuerzas volúmicas, experimenta fuerzas de compresión constantes sobre la cara $\Gamma_2 = (0, 1) \times \{2\} \times (0, 1)$.

Estamos planteando, pues, el problema tridimensional del que deriva el caso 2D del apartado anterior. Podemos, por tanto, tomar la Figura 6.5.5 como vista cenital de la situación física planteada. En la Figura 6.5.10 apreciamos una vista lateral.

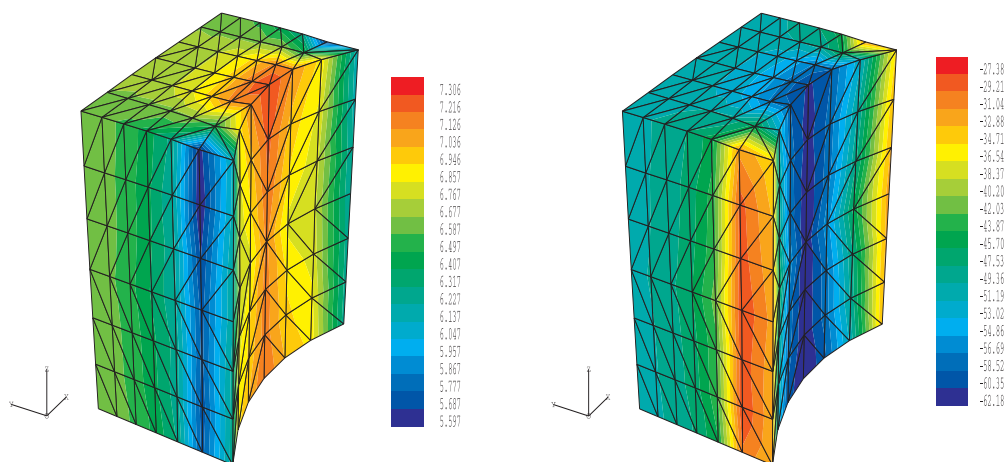


Figura 6.5.11: Problema 3D: Distribución de tensiones en norma Von Mises y tensiones en la dirección del eje OY (σ_{22}) para $t = 0$. Caso isótropo.

Tomamos \mathcal{A} igual al tensor de elasticidad lineal tridimensional,

$$(6.5.8) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon})_{ij} = \frac{E\kappa}{(1+\kappa)(1-2\kappa)} \left(\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} \right) \delta_{ij} + \frac{E}{1+\kappa} \varepsilon_{ij},$$

donde E es el módulo de Young del material y κ es el coeficiente de Poisson. En la Figura 6.5.11 y la Figura 6.5.12 se muestran la distribución de tensiones en norma Von Mises y la distribución de tensiones en la dirección del eje OY (σ_{22}) sobre la configuración deformada en los instantes $t = 0$ y $t = 1$, respectivamente. Los datos que se han utilizado son:

$$E = 10^2 \text{ N/m}^2, \quad \kappa = 0.3, \quad \mathbf{f}_0 = (0, 0, 0) \text{ N/m}^3, \\ \mathbf{f}_2 = (0, -50, 0) \text{ N/m}^2, \quad T = 1 \text{ seg.}$$

Nótese que para $t = 0$ las fuerzas son no nulas y, en consecuencia, la configuración en $t = 0$ es una configuración deformada, diferente a la configuración de referencia.

Además, se ha considerado $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, donde sus componentes se entiende que son ahora cantidades medidas en $N/(m^2 \text{ seg})$. De esta condición también se deduce que el material es isótropo.

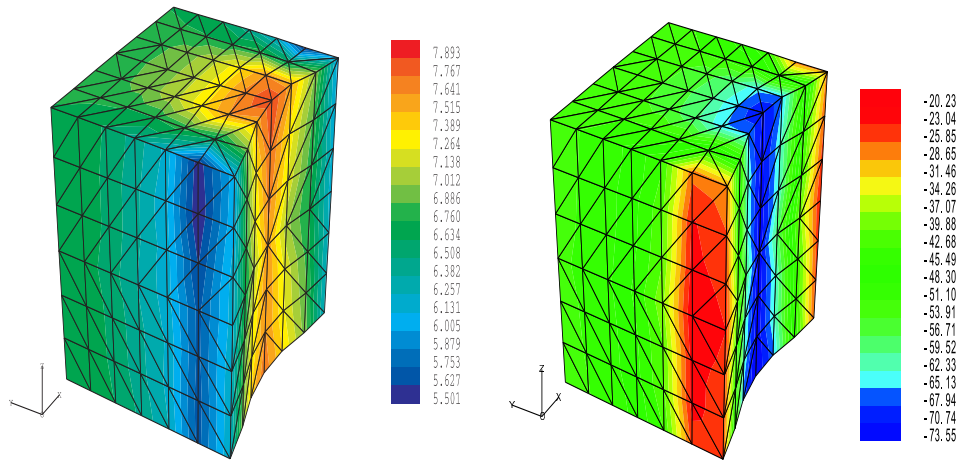


Figura 6.5.12: Problema 3D: Distribución de tensiones en norma Von Mises y tensiones en la dirección del eje OY (σ_{22}) para $t = 1$. Caso isótropo.

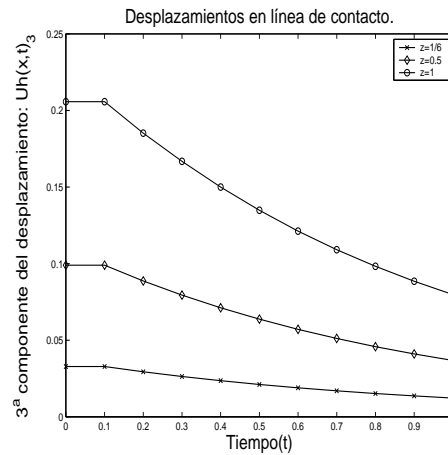


Figura 6.5.13: Problema 3D: Evolución de los desplazamientos en la línea $x = 0.5$, $y = 1$, $0 \leq z \leq 1$.

Finalmente, en la Figura 6.5.13 se muestra la tercera componente de los desplazamientos de tres puntos representativos de la línea de contacto inicial, dada por $x = 0.5$, $y = 1$, $0 \leq z \leq 1$.

6.6. Formulación en tensiones

Hasta ahora hemos estudiado la existencia, unicidad y aproximación numérica de las soluciones a formulaciones débiles del problema de contacto P (6.1.1)–(6.1.5) para materiales que responden a la ley de comportamiento (5.3.6). No obstante, como se ha visto en la Sección 5.3, existe una formulación alternativa si consideramos en su lugar la expresión (5.3.8). Omitimos aquí el planteamiento explícito del problema mecánico correspondiente (pues la diferencia con el problema P ya ha sido destacada) y procedemos directamente al planteamiento de una formulación variacional del mismo. Nótese que tenemos dos opciones, paralelamente a lo realizado en la Sección 6.1, según reemplacemos la ley de comportamiento (5.3.6) por la ley (5.3.8) en los problemas $PV1$ o $PV2$. Un estudio completo se ha realizado en [80]. Aquí, para mayor brevedad, optamos por la variante relativa a $PV2$ y en consecuencia nos limitamos al estudio del problema variacional siguiente:

PROBLEMA $PV3$: Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ y el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \rightarrow Q$ tales que:

$$(6.6.1) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) = \mathcal{E}\boldsymbol{\sigma}(t) + \int_0^t \mathcal{C}(t-s)\boldsymbol{\sigma}(s)ds,$$

$$(6.6.2) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) \in \Sigma_{ad}(t), \quad (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q \geq 0,$$

para todo $\boldsymbol{\tau} \in \Sigma_{ad}(t)$ y todo $t \in [0, T]$.

Recordemos que $\Sigma_{ad}(t)$ está definido en (6.1.15). Nótese que el problema $PV3$ coincide con el problema $PV2$, intercambiando (6.1.17) con (6.6.1) y que los desplazamientos se pueden eliminar al sustituir (6.6.1) en (6.6.2). Es por esto que el problema $PV3$ lo denominamos *formulación variacional en tensiones*.

Sustituimos ahora (6.6.1) en (6.6.2) para tener el siguiente problema variacional.

PROBLEMA PV: Hallar el campo de tensiones $\sigma : [0, T] \rightarrow Q$ tal que

$$(6.6.3) \quad \sigma(t) \in \Sigma_{ad}(t), (\mathcal{E}\sigma(t), \tau - \sigma(t))_Q \\ + \left(\int_0^t \mathcal{C}(t-s)\sigma(s)ds, \tau - \sigma(t) \right)_Q \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}(t).$$

Las hipótesis para los tensores \mathcal{E} y \mathcal{C} son las mismas propiedades de acotación y elipticidad que se requerían en secciones precedentes para \mathcal{A} y \mathcal{B} :

$$(6.6.4) \quad \mathcal{E} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega),$$

$$(6.6.5) \quad \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{klij}, \text{ c.p.d. en } \Omega,$$

$$(6.6.6) \quad \mathcal{E}_{ijkl} \xi_{kl} \xi_{ij} \geq \alpha \xi_{ij} \xi_{ij}, \text{ c.p.d. en } \Omega,$$

$$(6.6.7) \quad \mathcal{C}_{ijkl}(t) = \mathcal{C}_{jikl}(t) = \mathcal{C}_{klij}(t), \text{ c.p.d. en } \Omega,$$

$$(6.6.8) \quad \mathcal{C} \in C([0, T]; \mathbf{L}^\infty(\Omega)),$$

donde $\alpha > 0$, $t \in [0, T]$ y $\xi = (\xi_{ij})$ es un elemento arbitrario de \mathbb{S}_d .

Teorema 6.6.1. *Bajo las hipótesis (6.2.6) y (6.6.4)–(6.6.8), el problema PV tiene solución única. Además, $\sigma \in C([0, T]; Q)$.*

Demostración. Se procede en parte como para el problema PV2. Esto es, se plantea un problema equivalente con Σ_0 , definido en (6.2.10), como espacio de funciones test y a continuación utilizamos argumentos de punto fijo. Se realiza en (6.6.3) el cambio de variable $\sigma = \tilde{\sigma} + \bar{\sigma}$, con $\tilde{\sigma}$ definido en (6.2.11), y planteamos el siguiente problema variacional en tensiones:

PROBLEMA PV': Hallar $\bar{\sigma} : [0, T] \rightarrow Q$ tal que

$$(6.6.9) \quad \bar{\sigma}(t) \in \Sigma_0, (\mathcal{E}\bar{\sigma}(t), \tau - \bar{\sigma}(t))_Q + \left(\int_0^t \mathcal{C}(t-s)\bar{\sigma}(s)ds, \tau - \bar{\sigma}(t) \right)_Q \\ \geq (-\mathcal{E}\tilde{\sigma}(t) - \int_0^t \mathcal{C}(t-s)\tilde{\sigma}(s)ds, \tau - \bar{\sigma}(t))_Q,$$

para todo $\boldsymbol{\tau} \in \Sigma_0$ y todo $t \in [0, T]$.

Identificamos X al espacio de Hilbert Q , definido en (4.1.1) y hacemos lo propio entre X_0 y Σ_0 . Sean $A : Q \rightarrow Q$ y $B : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(Q)$ los operadores definidos como sigue:

$$A\boldsymbol{\tau} = \mathcal{E}\boldsymbol{\tau} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in Q, \quad B(t)\boldsymbol{\tau} = \mathcal{C}(t)\boldsymbol{\tau} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in Q, \quad t \in [0, T].$$

Sea además $f : [0, T] \rightarrow Q$ definido por

$$f(t) = -\mathcal{E}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) - \int_0^t \mathcal{C}(t-s)\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Utilizando (6.6.4)–(6.6.8) se obtiene que A y B satisfacen las condiciones (2.1.3) y (2.1.4), respectivamente. Además, $X_0 = \Sigma_0$ verifica (2.1.2), esto es, es un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de $X = Q$. Por otra parte, de (6.2.6) y (6.6.8) se concluye (2.1.5). Por tanto, el problema PV' está en las condiciones requeridas al problema P_A en el Teorema 2.1.1 y podemos concluir que existe un único $\bar{\boldsymbol{\sigma}} \in C([0, T]; Q)$ verificando (6.6.9).

Finalmente, la solución de PV' determina biunívocamente la solución $\boldsymbol{\sigma}$ del Problema PV , puesto que $\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}$. \square

Por otra parte, para cada $t \in [0, T]$, definimos

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\sigma}(t) + \int_0^t \mathcal{C}(t-s)\boldsymbol{\sigma}(s)ds,$$

por lo que es inmediato que $\boldsymbol{\xi} \in C([0, T]; Q)$. Utilizando los mismos argumentos que en (6.2.22)–(6.2.26), concluimos a partir de (6.6.2) que existe un único $\mathbf{u}(t) \in V$ tal que

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)),$$

es decir, se verifica la expresión (6.6.1). Además, dada la regularidad de $\boldsymbol{\sigma}$, concluimos que $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$. Finalmente, aplicando los mismos argumentos desarrollados en la demostración del Teorema 6.3.1 a la solución del Problema

PV , se demuestra que $\mathbf{u}(t) \in U_{ad}$ para todo $t \in [0, T]$. Esto es, hemos obtenido una solución única $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in C([0, T]; V) \times C([0, T]; Q)$ para $PV3$.

Observación 6.6.2. *Los comentarios relativos a la regularidad $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q_1)$ de la Observación 6.2.2 son válidos también en esta sección.*

Capítulo 7

Problema de contacto con respuesta normal

En este capítulo se estudia el problema de contacto entre un sólido deformable viscoelástico de memoria larga y un obstáculo deformable cuya reacción al contacto está dada por la función de respuesta normal. Planteamos el problema mecánico de contacto a partir de las consideraciones al respecto del Capítulo 5 y se estudia la existencia y unicidad de solución para una formulación variacional del mismo. También se estudia, en un caso concreto, la convergencia de dicha solución hacia la del correspondiente problema de contacto de Signorini cuando la rigidez del obstáculo aumenta. Finalizamos con el estudio de la discretización del problema y la presentación de resultados de simulaciones numéricas.

7.1. Formulación mecánica y variacional del problema

La formulación matemática del problema de contorno que traduce el problema mecánico de contacto unilateral sin rozamiento entre un cuerpo viscoelástico de memoria larga y un obstáculo deformable con respuesta normal se expresa como sigue:

PROBLEMA *P*: Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ y el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}_d$ tales que

$$(7.1.1) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds \quad \text{en } \Omega,$$

$$(7.1.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega,$$

$$(7.1.3) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_1,$$

$$(7.1.4) \quad \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \quad \text{en } \Gamma_2,$$

$$(7.1.5) \quad -\sigma_\nu(t) = p_\nu(u_\nu(t) - s), \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_3,$$

para todo $t \in [0, T]$.

Recordamos ahora el significado físico de las expresiones que componen el problema *P* y que ya fueron introducidas en las secciones 5.2, 5.3 y 5.4. La expresión (7.1.1) es la ley de comportamiento de los materiales viscoelásticos de memoria larga, introducida en (5.3.6). Recordamos que el término integral es el que modeliza el efecto de la memoria, que los tensores de cuarto orden $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ijkl})$ y $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{ijkl})$ son, respectivamente, los tensores de *elasticidad* y de *relajación* y que $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ es el tensor de deformaciones linealizado. La expresión (7.1.2) es la ecuación del equilibrio, introducida en (5.2.2), que gobierna el proceso de deformación en un problema cuasiestático. Las expresiones (7.1.3) y (7.1.4) son las condiciones de contorno de desplazamientos-tracciones. Finalmente, (7.1.5) representa la condición de contacto de tipo *respuesta normal* sin

rozamiento, obtenida a partir de (5.4.5) y (5.4.11), en la Sección 5.4. Recordamos que s representa la distancia de la superficie de contacto al obstáculo en la configuración de referencia. El contacto, de producirse, es unilateral y el obstáculo reacciona con una presión en la dirección opuesta a la normal que viene determinada por la *función de respuesta normal* p_ν .

Suponemos que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ es una solución regular del problema P , de forma que, para cada $t \in [0, T]$, tiene sentido aplicar la fórmula de Green (4.1.3):

$$(7.1.6) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q = (-\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{v})_H + (\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}, \mathbf{v})_{[L^2(\Gamma)]^d},$$

para todo $\mathbf{v} \in V$. Además, por (7.1.3), (7.1.4) y (7.1.5),

$$(7.1.7) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}, \mathbf{v})_{[L^2(\Gamma)]^d} = (\mathbf{f}_2(t), \mathbf{v})_{[L^2(\Gamma_2)]^d} - j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}),$$

donde la función $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$(7.1.8) \quad j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - s) v_\nu da, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Por tanto, planteamos la siguiente formulación variacional del problema de contacto P en términos de los desplazamientos.

PROBLEMA PV : Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ tal que

$$(7.1.9) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q + \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \right)_Q \\ + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{F}(t), \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T],$$

donde, en las aplicaciones, \mathbf{F} está definido por (4.1.9). En lo que sigue, asumimos las hipótesis (6.2.1)–(6.2.6) para \mathcal{A} , \mathcal{B} y \mathbf{F} . Además, suponemos que la función de respuesta normal $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisface

$$(7.1.10) \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Existe un } L_\nu > 0 \text{ t. q. } |p_\nu(\mathbf{x}, r_1) - p_\nu(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2|, \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.c.t. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(b) } (p_\nu(\mathbf{x}, r_1) - p_\nu(\mathbf{x}, r_2)) \cdot (r_1 - r_2) \geq 0, \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.c.t. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) La aplicación } \mathbf{x} \in \Gamma_3 \mapsto p_\nu(\mathbf{x}, r) \text{ es Lebesgue medible en } \Gamma_3 \\ \quad \text{para cada } r \in \mathbb{R}, p_\nu(\cdot, 0) \in L^2(\Gamma_3). \\ \text{(d) } p_\nu(\mathbf{x}, r) = 0 \quad \text{p.c.t. } \mathbf{x} \in \Gamma_3 \text{ y } r \leq 0. \end{array} \right.$$

Además suponemos que la función de distancia verifica

$$(7.1.11) \quad s \in L^\infty(\Gamma_3), \quad s \geq 0 \quad \text{c.p.d. en } \Gamma_3.$$

Hacemos algunos comentarios acerca de las condiciones expresadas en (7.1.10). La condición (a) implica que la función p_ν crece con la penetración a lo sumo linealmente. La condición (b) de monotonía muestra desde el punto de vista de la modelización que la reacción del obstáculo aumenta con la penetración. La condición (d), por su parte, implica que cuando no hay penetración (i.e. $u_\nu \leq s$) tampoco hay reacción del obstáculo ($\sigma_\nu = 0$) y, finalmente, las condiciones (a) y (c), junto con (7.1.11), garantizan que la función $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ está bien definida. Vemos fácilmente que todas estas condiciones se ven satisfechas por los ejemplos particulares de función de respuesta normal citados en la Sección 5.4.

7.2. Existencia y unicidad de solución

Basándonos en argumentos de la Sección 2.1 disponemos del siguiente resultado de existencia y unicidad de solución para el problema PV .

Teorema 7.2.1. *En las hipótesis (6.2.1)–(6.2.6) y (7.1.10)–(7.1.11) el problema PV tiene una única solución $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$.*

Demostración. Utilizamos el teorema de representación de Riesz para definir los operadores $A : V \rightarrow V$ y $B : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V)$ como sigue, para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y $t \in [0, T]$:

$$(7.2.1) \quad (A\mathbf{v}, \mathbf{w})_V = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_Q + j(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

$$(7.2.2) \quad (B(t)\mathbf{v}, \mathbf{w})_V = (\mathcal{B}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_Q.$$

A partir de (7.1.8), (7.1.10) y las propiedades de la aplicación de traza, tenemos que

$$(7.2.3) \quad j(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - j(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \geq 0, \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V,$$

$$(7.2.4) \quad j(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) \leq c\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V\|\mathbf{v}\|_V, \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \in V.$$

Por tanto, a partir de (6.2.1)–(6.2.5) y (7.2.1)–(7.2.4) se deduce que A y B satisfacen las condiciones (2.1.3) y (2.1.4), respectivamente. Además, por (6.2.6), se verifica (2.1.5). Por tanto, tomando $X = X_0 = V$ y $f = \mathbf{F}$ podemos aplicar el Teorema 2.1.1 y concluir que el problema PV tiene una única solución $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$. \square

Como consecuencia, en las condiciones del Teorema 7.2.1 y por medio del Teorema 5.3.1 (i) podemos garantizar que el campo de tensiones definido a partir de la solución de PV con la ley (7.1.1) tiene regularidad $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q)$. En conclusión, hemos obtenido una solución débil única con regularidad $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in C([0, T]; V) \times C([0, T]; Q)$ para el problema de contacto P .

Observación 7.2.2. *En el caso particular en que \mathbf{F} viene dado por (4.1.9) y se verifica (6.2.7), podemos obtener mayor regularidad para el campo de*

tensiones $\boldsymbol{\sigma}$. Basta considerar para cada $t \in [0, T]$, que tomando $\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}$ en (7.1.9), siendo $\boldsymbol{\varphi} \in [D(\Omega)]^d$, y teniendo en cuenta (7.1.1), se deduce que $\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) = -\mathbf{f}_0(t)$ c.p.d. en Ω . Por lo tanto, $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q_1)$.

7.3. Un resultado de convergencia

Suponemos en toda la sección que p_ν está definido por (5.4.6), donde sustituimos c_ν por $\frac{1}{\mu}$, siendo $\mu > 0$ constante. Por tanto, planteamos un caso concreto de PV en estas condiciones:

PROBLEMA PV_μ : Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u}_\mu : [0, T] \rightarrow V$ tal que

$$(7.3.1) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\mu(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q + \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\mu(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \right)_Q \\ + j(\mathbf{u}_\mu(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{F}(t), \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T],$$

donde

$$(7.3.2) \quad j(\mathbf{u}_\mu(t), \mathbf{v}) = \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_3} ((u_\mu)_\nu - s)_+^\alpha v_\nu da.$$

El resultado principal de esta sección es el Teorema 7.3.3, que establece que conforme μ tiende a cero, la solución de la formulación variacional PV_μ , que denotamos \mathbf{u}_μ para explicitar su dependencia respecto a μ , converge puntualmente a la solución de la formulación variacional en desplazamientos del problema de Signorini (ver PV (6.2.8)), que denotamos \mathbf{u} . Por tanto tomamos como función de distancia $s = 0$, por lo que en la configuración de referencia, cuerpo y obstáculo están en contacto.

Recordamos que para $\alpha \in (0, 1]$, de la convexidad de $\phi : x \in \mathbb{R} \mapsto \phi(x) =$

$\frac{1}{\alpha+1}x_+^{\alpha+1} \in \mathbb{R}_+$, tenemos

$$\frac{1}{\alpha+1}x_+^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}y_+^{\alpha+1} \geq y_+^\alpha(x-y) \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia, a partir de (7.1.8) tenemos para cada $t \in [0, T]$,

$$(7.3.3) \quad \begin{aligned} & j(\mathbf{u}_\mu(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\mu(t)) \\ &= \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_3} ((u_\mu)_\nu)_+^\alpha(t) (v_\nu - (u_\mu)_\nu(t)) \, da \leq j_\mu(\mathbf{v}) - j_\mu(\mathbf{u}_\mu(t)), \end{aligned}$$

donde hemos denotado

$$j_\mu(\mathbf{v}) = \frac{1}{(\alpha+1)\mu} \int_{\Gamma_3} (v_\nu)_+^{\alpha+1} \, da,$$

que es una función propia, convexa y continua en V . Utilizando (7.3.3) en (7.1.9) para $\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{u}_\mu(t)$ se tiene que la solución $\mathbf{u}_\mu \in C([0, T]; V)$ del problema PV_μ es también solución del siguiente problema.

PROBLEMA $\overline{PV}_{\mu,1}$: Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u}_\mu : [0, T] \rightarrow V$ tal que

$$(7.3.4) \quad \begin{aligned} & (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\mu(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}_\mu(t)))_Q + (\mathbf{z}_\mu(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}_\mu(t)))_Q \\ & + j_\mu(\mathbf{v}) - j_\mu(\mathbf{u}_\mu(t)) \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\mu(t))_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Hemos denotado

$$\mathbf{z}_\mu(t) = \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\mu(s)) \, ds.$$

Sea además

$$\mathbf{z}(t) = \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) \, ds.$$

Dado que $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$, $\mathbf{u}_\mu \in C([0, T]; V)$ y $\mathcal{B} \in C([0, T]; \mathbf{L}^\infty(\Omega))$ se tiene que

$$(7.3.5) \quad \mathbf{z} \in C([0, T]; Q), \quad \mathbf{z}_\mu \in C([0, T]; Q).$$

Planteamos el problema siguiente

PROBLEMA $\overline{PV}_{\mu,2}$: Hallar el campo de desplazamientos $\bar{\mathbf{u}}_\mu : [0, T] \rightarrow V$ tal que

$$(7.3.6) \quad (\mathcal{A}\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)), \varepsilon(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}_\mu(t)))_Q + (\mathbf{z}(t), \varepsilon(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}_\mu(t)))_Q \\ + j_\mu(\mathbf{v}) - j_\mu(\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)) \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}_\mu(t))_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T].$$

Teorema 7.3.1. *En las hipótesis (6.2.1)–(6.2.6) y (7.1.10)–(7.1.11) el problema $\overline{PV}_{\mu,2}$ tiene una única solución $\bar{\mathbf{u}}_\mu \in C([0, T]; V)$.*

Demostración. Para cada $t \in [0, T]$ estamos en las condiciones del Corolario 1.2.4, por lo que existe un único $\bar{\mathbf{u}}_\mu(t) \in V$ solución de (7.3.6). Además la solución es Lipschitz dependiente respecto a los datos. Esto es, dados $t_1, t_2 \in [0, T]$ arbitrarios se tiene

$$\|\bar{\mathbf{u}}_\mu(t_1) - \bar{\mathbf{u}}_\mu(t_2)\|_V \leq c(\|\mathbf{z}(t_1) - \mathbf{z}(t_2)\|_Q + \|\mathbf{F}(t_1) - \mathbf{F}(t_2)\|_Q).$$

Por tanto, de (6.2.6) y (7.3.5) se concluye que $\bar{\mathbf{u}}_\mu \in C([0, T]; V)$. \square

Teorema 7.3.2. *Sean $\bar{\mathbf{u}}_\mu \in C([0, T]; V)$ y $\mathbf{u} \in C([0, T]; U_{ad})$ las respectivas soluciones de los problemas $\overline{PV}_{\mu,2}$ y PV de Signorini (6.2.8). Entonces se verifica*

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \|\bar{\mathbf{u}}_\mu(t) - \mathbf{u}(t)\|_V = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Demostración. Se realiza en dos etapas. Primero demostraremos la convergencia débil en V para cada $t \in [0, T]$ y posteriormente la convergencia fuerte.

Convergencia débil en V . Sea $t \in [0, T]$. Tomando $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ en (7.3.6) queda

$$(7.3.7) \quad (\mathcal{A}\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)), \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)))_Q + j_\mu(\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)) \\ \leq (\mathbf{F}(t), \bar{\mathbf{u}}_\mu(t))_V - (\mathbf{z}(t), \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)))_Q,$$

y dado que $j_\mu \geq 0$ se obtiene la cota

$$(7.3.8) \quad \|\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)\|_V \leq c(\|\mathbf{F}(t)\|_V + \|\mathbf{z}(t)\|_Q) \leq c(\|\mathbf{F}\|_{C([0,T];V)} + \|\mathbf{z}\|_{C([0,T];Q)}).$$

Por tanto, la sucesión $\{\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)\}_{\mu>0}$ está acotada en V , por lo que existe una subsucesión, que denotamos también por $\{\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)\}_{\mu>0}$ que converge débilmente hacia un elemento $\bar{\mathbf{u}}(t) \in V$, esto es

$$\bar{\mathbf{u}}_\mu(t) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0^+} \bar{\mathbf{u}}(t).$$

Vamos a probar que $\bar{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t)$. Para ello, a partir de (7.3.7) se obtiene

$$j_\mu(\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)) \leq c(\|\mathbf{F}(t)\|_V + \|\mathbf{z}(t)\|_Q)\|\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)\|_V.$$

Utilizando (7.3.8) se verifica que existe una constante $c > 0$, que depende de \mathbf{F} , \mathbf{u} , \mathcal{A} y \mathcal{B} , tal que

$$\int_{\Gamma_3} ((\bar{u}_\mu)_\nu(t))_+^{\alpha+1} da \leq c(\alpha + 1)\mu.$$

Teniendo en cuenta la compacidad de la aplicación traza y aplicando el Lema 1.3.1 se verifica que

$$\int_{\Gamma_3} (\bar{u}_\nu(t))_+^{\alpha+1} da \leq \liminf_{\mu \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_3} ((\bar{u}_\mu)_\nu(t))_+^{\alpha+1} da \leq c(\alpha + 1) \liminf_{\mu \rightarrow 0^+} \mu = 0.$$

Por tanto deducimos que $\bar{u}_\nu(t) \leq 0$ c.p.d. en Γ_3 . Esto es, $\bar{\mathbf{u}}(t) \in U_{ad}$. Tomamos ahora el límite inferior en (7.3.6) para $\mathbf{v} \in U_{ad}$ y obtenemos

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}(t)), \varepsilon(\mathbf{v}))_Q - \liminf_{\mu \rightarrow 0} (\mathcal{A}\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)), \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)))_Q \\ & + (\mathbf{z}(t), \varepsilon(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}(t)))_Q \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}(t))_V, \quad \forall \mathbf{v} \in U_{ad}. \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando el Lema 1.3.2 concluimos que

$$(7.3.9) \quad \begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}(t)), \varepsilon(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}(t)))_Q \\ & + (\mathbf{z}(t), \varepsilon(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}(t)))_Q \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}(t))_V, \quad \forall \mathbf{v} \in U_{ad}. \end{aligned}$$

Esto es, hemos probado que $\bar{\mathbf{u}}(t) \in U_{ad}$ es solución del problema variacional de Signorini (6.2.8), y por la unicidad de solución concluimos que $\bar{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t)$. Además, la mencionada unicidad garantiza que cualquier subsucesión $\{\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)\}_{\mu>0}$ tiene también por límite a $\mathbf{u}(t)$ en la topología débil. En consecuencia la sucesión $\{\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)\}_{\mu>0}$ tiene a $\mathbf{u}(t)$ por límite débil.

Convergencia fuerte. Por la elipticidad de \mathcal{A} tenemos

$$(7.3.10) \quad \alpha \|\bar{\mathbf{u}}_\mu(t) - \mathbf{u}(t)\|_V^2 \leq (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_\mu(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_\mu(t)))_Q \\ = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_\mu(t)))_Q - (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_\mu(t)))_Q.$$

Por otra parte, tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u}(t)$ en (7.3.6), tenemos

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_\mu(t)))_Q + (\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_\mu(t)))_Q \\ + j_\mu(\mathbf{u}(t)) - j_\mu(\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)) \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_\mu(t))_V,$$

y dado que $j_\mu(\mathbf{u}(t)) = 0$ y $j_\mu \geq 0$ se tiene que

$$(7.3.11) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}_\mu(t) - \mathbf{u}(t)))_Q \leq -(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}_\mu(t) - \mathbf{u}(t)))_Q \\ + (\mathbf{F}(t), \bar{\mathbf{u}}_\mu(t) - \mathbf{u}(t))_V.$$

Sustituyendo (7.3.11) en (7.3.10) se obtiene

$$\alpha \|\bar{\mathbf{u}}_\mu(t) - \mathbf{u}(t)\|_V^2 \leq (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}_\mu(t)))_Q \\ - (\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}_\mu(t) - \mathbf{u}(t)))_Q + (\mathbf{F}(t), \bar{\mathbf{u}}_\mu(t) - \mathbf{u}(t))_V.$$

Por tanto, tomando el límite superior se concluye

$$\limsup_{\mu \rightarrow 0^+} \|\bar{\mathbf{u}}_\mu(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \leq 0,$$

esto es, la sucesión $\{\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)\}_{\mu>0}$ converge en la topología fuerte de V hacia $\mathbf{u}(t)$.

Dado que $t \in [0, T]$ es arbitrario, se concluye el resultado deseado. \square

Teorema 7.3.3. Sean $\mathbf{u}_\mu \in C([0, T]; V)$ y $\mathbf{u} \in C([0, T]; U_{ad})$ las respectivas soluciones de los problemas variacionales PV_μ y PV de Signorini (6.2.8).

Entonces se verifica que cuando $\mu > 0$ tiende a cero, \mathbf{u}_μ converge a \mathbf{u} puntualmente, esto es

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \|\mathbf{u}_\mu(t) - \mathbf{u}(t)\|_V = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Demostración. Sea $t \in [0, T]$ y sea $\{\bar{\mathbf{u}}_\mu(t)\}_{\mu > 0}$ la sucesión convergente a $\mathbf{u}(t)$ en V dada por el Teorema 7.3.2. Tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\mu(t)$ en (7.3.6) y $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}}_\mu(t)$ en (7.3.4) y sumando ambas expresiones, tenemos

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}_\mu(t) - \bar{\mathbf{u}}_\mu(t)), \varepsilon(\mathbf{u}_\mu(t) - \bar{\mathbf{u}}_\mu(t)))_Q \leq (\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_\mu(t), \varepsilon(\mathbf{u}_\mu(t) - \bar{\mathbf{u}}_\mu(t)))_Q,$$

y por tanto

$$(7.3.12) \quad \|\mathbf{u}_\mu(t) - \bar{\mathbf{u}}_\mu(t)\|_V \leq c \|\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_\mu(t)\|_Q.$$

Pero de la definición de $\mathbf{z}(t)$ y $\mathbf{z}_\mu(t)$ se obtiene que

$$(7.3.13) \quad \|\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_\mu(t)\|_Q \leq c \int_0^t \|\mathbf{u}_\mu(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds,$$

donde c depende de \mathcal{B} . Por otra parte,

$$(7.3.14) \quad \|\mathbf{u}_\mu(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \leq \|\mathbf{u}_\mu(t) - \bar{\mathbf{u}}_\mu(t)\|_V + \|\bar{\mathbf{u}}_\mu(t) - \mathbf{u}(t)\|_V,$$

por lo que utilizando (7.3.12) y (7.3.13) en (7.3.14) se concluye

$$\|\mathbf{u}_\mu(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \leq c \left(\int_0^t \|\mathbf{u}_\mu(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds + \|\bar{\mathbf{u}}_\mu(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \right).$$

Aplicando el Lema de Gronwall, se obtiene

$$\|\mathbf{u}_\mu(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \leq c \left(\int_0^t \|\bar{\mathbf{u}}_\mu(s) - \mathbf{u}(s)\|_V ds + \|\bar{\mathbf{u}}_\mu(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \right).$$

Por otra parte, de la acotación uniforme que se desprende de (7.3.8), la convergencia puntual del Teorema 7.3.2 y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, se concluye que

$$\limsup_{\mu \rightarrow 0^+} \|\mathbf{u}_\mu(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \leq 0,$$

y por tanto el límite existe y es único. Dado que $t \in [0, T]$ es arbitrario, se concluye el resultado deseado. \square

Finalmente, siguiendo los pasos de la demostración del Teorema 5.3.1 (i), es fácil concluir que la convergencia también se da en las tensiones, esto es, en las condiciones del Teorema 7.3.3, los campos de tensiones $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{S}_d$ definidos respectivamente por (6.1.1) y (7.1.1) (sustituyendo \mathbf{u} por \mathbf{u}_μ), verifican

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \|\boldsymbol{\sigma}_\mu(t) - \boldsymbol{\sigma}(t)\|_Q = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Además del interés puramente matemático, el Teorema 7.3.3 tiene como interpretación mecánica que la solución débil $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ del problema de contacto con condiciones de Signorini (6.1.1)–(6.1.5) es, para cada paso de tiempo $t \in [0, T]$, límite de una sucesión de soluciones débiles $\{(\mathbf{u}_\mu, \boldsymbol{\sigma}_\mu)\}_{\mu > 0}$ de problemas (7.1.1)–(7.1.5) de contacto con condiciones de respuesta normal, cuando esta viene dada por (5.4.6). Por tanto, cuando la rigidez del obstáculo es comparativamente grande, los problemas de respuesta normal constituyen una “aproximación” del problema de contacto con sólido rígido. Esta es la idea de base de muchos algoritmos numéricos.

7.4. Aproximación numérica del problema

Ahora nos ocupamos del estudio de la aproximación numérica de la solución del problema PV . Al igual que en el Capítulo 6 para el problema de Signorini, comenzamos planteando un esquema semidiscreto en el que sólo se discretiza la variable espacial como primer paso para un estudio más completo con un esquema totalmente discretizado. Sean $Q^h \subset Q$ y $V^h \subset V$ dos espacios de Hilbert de dimensión finita que, por ejemplo, pueden ser obtenidos por medio del método de elementos finitos. Además, suponemos que $\boldsymbol{\varepsilon}(V^h) \subset Q^h$.

Aproximación semidiscreta. Nos situamos en las hipótesis generales de la Sección 2.3.

PROBLEMA PV^h : Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V^h$

$$(7.4.1) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h))_Q + \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h) \right)_Q \\ + j(\mathbf{u}^h(t), \mathbf{v}^h) = (\mathbf{F}(t), \mathbf{v}^h)_V, \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h, \quad t \in [0, T].$$

Basándonos en argumentos de la Sección 2.3, disponemos del siguiente resultado de existencia y unicidad de solución para el problema PV^h , que además establece una cota para el error en la aproximación.

Teorema 7.4.1. *En las hipótesis (6.2.1)–(6.2.6) y (7.1.10)–(7.1.11), el problema PV^h tiene solución única $\mathbf{u}^h \in C([0, T]; V^h)$. Además se verifica*

$$(7.4.2) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C([0, T]; V)} \leq c \max_{t \in [0, T]} \left\{ \inf_{\mathbf{v}^h \in V^h} \left\{ \|\mathbf{v}^h - \mathbf{u}(t)\|_V + R(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h)^{\frac{1}{2}} \right\} \right\},$$

donde c es una constante positiva que depende de \mathcal{A} , \mathcal{B} y p_ν y

$$(7.4.3) \quad R(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h) = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}(t)))_Q \\ + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}^h - \mathbf{u}(t)) - (\mathbf{F}(t), \mathbf{v}^h - \mathbf{u}(t))_V.$$

Demostración. Procediendo como en la demostración del Teorema 7.2.1, se tiene que el problema PV^h está en las condiciones requeridas al problema P_A^h en el Teorema 2.3.1, de donde se deduce la existencia y unicidad de solución. Además, del Teorema 2.3.2 se deduce que se verifica la cota de error (2.3.2) que, traducida al contexto del problema de contacto, establece (7.4.2). \square

Por tanto, si definimos el campo de tensiones semidiscretizado $\boldsymbol{\sigma}^h : [0, T] \rightarrow \mathbb{S}_d$ como en (6.4.1) se concluye que, en las condiciones del Teorema 7.4.1 y por

medio del Corolario 5.3.2 (i), podemos garantizar que $\boldsymbol{\sigma}^h \in C([0, T]; Q^h)$. Como conclusión, hemos obtenido una aproximación de la solución débil $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ para el problema de contacto P con regularidad $(\mathbf{u}^h, \boldsymbol{\sigma}^h) \in C([0, T]; V^h) \times C([0, T]; Q^h)$.

Además, teniendo en cuenta (7.4.2) y el apartado (ii) del Corolario 5.3.2, obtenemos la expresión siguiente:

$$(7.4.4) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C([0, T]; V)} + \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h\|_{C([0, T]; Q)} \leq \|(I - \mathcal{P}_{Q^h})\boldsymbol{\sigma}\|_{C([0, T]; Q)} \\ + c \max_{t \in [0, T]} \left\{ \inf_{\mathbf{v}^h \in V^h} \left\{ \|\mathbf{v}^h - \mathbf{u}\|_{C([0, T]; V)} + R(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h)^{\frac{1}{2}} \right\} \right\}.$$

El siguiente resultado de convergencia es consecuencia directa del Teorema 1.4.3.

Corolario 7.4.2. Sean $V^h \subset V$ y $Q^h \subset Q$ ($h \rightarrow 0$), las familias de subespacios de dimensión finita dadas por (4.2.3) y (4.2.5). En las hipótesis (6.2.1)–(6.2.6) y (7.1.10)–(7.1.11), sean $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$ y $\mathbf{u}^h \in C([0, T]; V^h)$ las soluciones respectivas del problema continuo PV y el problema semidiscreto PV^h . Sean $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q)$ y $\boldsymbol{\sigma}^h \in C([0, T]; Q^h)$ los campos de tensiones correspondientes. Entonces,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C([0, T]; V)} + \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h\|_{C([0, T]; Q)} \} = 0.$$

Demostración. Se comprueba fácilmente que

$$(7.4.5) \quad R(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h) \leq c \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}^h\|_V,$$

donde c depende de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbf{F}$ y \mathbf{u} . Tomamos $X = X_0 = V$, $X_0^h = X^h = V^h$, $Y = Q$ y $Y^h = Q^h$. A partir de (7.4.4) vemos que tomando $g(r) = r^{\frac{1}{2}} + r$ se cumple la condición (4.2.14) y g verifica (1.4.4). Por el Teorema 4.1.1 (identificando V_0 con \mathcal{U}), y tomando $\mathcal{Y} = [H^1(\Omega)]_s^{d \times d}$ basta tener en consideración las expresiones (4.2.6) y (4.2.8) para comprobar que se verifican las condiciones

(4.2.12) y (4.2.13) con $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Entonces estamos en las condiciones del Teorema 1.4.3, de donde concluimos el resultado deseado. \square

Corolario 7.4.3. Sean $V^h \subset V$ y $Q^h \subset Q$ ($h \rightarrow 0$), las familias de subespacios de dimensión finita dadas por (4.2.3) y (4.2.5). En las hipótesis (6.2.1)–(6.2.6) y (7.1.10)–(7.1.11), sean $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$ la solución del problema continuo PV y $\mathbf{u}^h \in C([0, T]; V^h)$ la solución del problema semidiscreto PV^h . Sean $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q)$ y $\boldsymbol{\sigma}^h \in C([0, T]; Q^h)$ los campos de tensiones correspondientes. Supongamos la regularidad adicional

$$(7.4.6) \quad \mathbf{u} \in C([0, T]; [H^2(\Omega)]^d), \quad \boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; [H^1(\Omega)]^{d \times d})$$

Entonces se tiene la estimación de error

$$(7.4.7) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C([0, T]; V)} + \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h\|_{C([0, T]; Q)} \leq ch^{\frac{1}{2}},$$

donde c es una constante positiva que depende de \mathcal{A} , \mathcal{B} , p_ν , \mathbf{u} y $\boldsymbol{\sigma}$.

Demostración. Se reduce a aplicar en (7.4.4) la cota (7.4.5), y las estimaciones (4.2.6) y (4.2.8). \square

Corolario 7.4.4. Sean $V^h \subset V$ y $Q^h \subset Q$ ($h \rightarrow 0$), las familias de subespacios de dimensión finita dadas por (4.2.3) y (4.2.5). Sea el vector de fuerzas \mathbf{F} dado por (4.1.9). En las hipótesis (6.2.1)–(6.2.5), (6.2.7) y (7.1.10)–(7.1.11), sean $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$ la solución del problema continuo PV y $\mathbf{u}^h \in C([0, T]; V^h)$ la solución del problema semidiscreto PV^h . Sean $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q)$ y $\boldsymbol{\sigma}^h \in C([0, T]; Q^h)$ los campos de tensiones correspondientes. Supongamos la regularidad adicional (7.4.6) y

$$(7.4.8) \quad \sigma_\nu \in C([0, T]; L^2(\Gamma_3)).$$

Entonces se tiene la estimación de error

$$(7.4.9) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C([0,T];V)} + \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h\|_{C([0,T];Q)} \leq ch,$$

donde c es una constante positiva que depende de \mathcal{A} , \mathcal{B} , p_ν , \mathbf{u} y $\boldsymbol{\sigma}$.

Demostración. Sea $t \in [0, T]$. Siguiendo un procedimiento habitual se puede probar a partir de (7.1.9) que $\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) = -\mathbf{f}_0(t) \in H$. Entonces, de (7.4.3) se tiene

$$(7.4.10) \quad \begin{aligned} R(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h) &= (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}(t)))_Q \\ &\quad + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}^h - \mathbf{u}(t)) - (\mathbf{F}(t), \mathbf{v}^h - \mathbf{u}(t))_V \\ &= (\sigma_\nu(t), v_\nu^h - u_\nu(t))_{L^2(\Gamma_3)} + (p_\nu(u_\nu(t) - s), v_\nu^h - u_\nu(t))_{L^2(\Gamma_3)} = 0. \end{aligned}$$

Entonces, a partir de (7.4.2), tenemos

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C([0,T];V)} \leq c \max_{t \in [0,T]} \|\mathbf{v}^h - \mathbf{u}(t)\|_V \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h,$$

donde c es una constante positiva que depende de \mathcal{A} , \mathcal{B} y p_ν . Aplicando (4.2.6), nos permite concluir que

$$(7.4.11) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C([0,T];V)} &\leq c \max_{t \in [0,T]} \|\mathbf{u}(t) - \Pi^h \mathbf{u}(t)\|_V \\ &\leq ch \|\mathbf{u}\|_{C([0,T];[H^2(\Omega)]^d)}. \end{aligned}$$

Finalmente, el resultado (7.4.9) se deduce de (7.4.11) y de (7.4.4) utilizando (4.2.8) y (7.4.10). \square

Aproximación totalmente discreta. Siguiendo la teoría general de la Sección 2.4 proponemos la siguiente aproximación totalmente discreta del problema PV (7.1.9).

PROBLEMA PV^{hk} : Hallar la sucesión de desplazamientos $\{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$,

tal que

$$(7.4.12) \quad (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}_0^{hk}), \varepsilon(\mathbf{v}^h))_Q = (\mathbf{F}_0, \mathbf{v}^h)_V, \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h,$$

$$(7.4.13) \quad (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}_n^{hk}), \varepsilon(\mathbf{v}^h))_Q + \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j^n \mathcal{B}^{n,j} \varepsilon(\mathbf{u}_j^{hk}), \varepsilon(\mathbf{v}^h) \right)_Q \\ + j(\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{v}^h) = (\mathbf{F}_n, \mathbf{v}^h)_V, \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h, \quad n = 1, \dots, N,$$

donde los pesos $\alpha_j^n \geq 0$, $0 \leq j \leq n$ de la fórmula de cuadratura son los de la fórmula de trapecios compuesta, dados por (1.5.3).

Basándonos en argumentos de la Sección 2.4 disponemos del siguiente resultado de existencia y unicidad de solución para el problema PV^{hk} , que además establece una cota para el error en la aproximación.

Teorema 7.4.5. *En las hipótesis (6.2.1)–(6.2.6) y (7.1.10)–(7.1.11), supongamos que el paso temporal k cumple (6.4.12). Entonces el problema PV^{hk} tiene solución única $\{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$. Para k suficientemente pequeño se verifica¹*

$$(7.4.14) \quad \max_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \\ \leq c \max_{0 \leq n \leq N} \left\{ I_n + \inf_{\mathbf{v}^h \in V^h} \left\{ \|\mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n\|_V + R(t_n; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h)^{\frac{1}{2}} \right\} \right\},$$

donde c es una constante positiva que depende de \mathcal{A} y \mathcal{B} y

$$R(t_n; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h) = (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}_n) + \int_0^{t_n} \mathcal{B}(t_n - s) \varepsilon(\mathbf{u}(s)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n))_Q \\ + j(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n) - (\mathbf{F}_n, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n)_V.$$

e I_n es el error de integración numérica definido por (6.4.16).

Demostración. Nótese que si se verifica (6.4.12) entonces, en particular también se verifica (2.4.1), dado que $\|B_0\|_{\mathcal{L}(V)} \leq d^2 \|\mathcal{B}_0\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}$. Por tanto, procediendo como en la demostración del Teorema 7.2.1, el problema PV^{hk} está en

¹Dado que asumimos el uso de la fórmula de trapecios compuesta, de la Observación 2.4.4 se deduce que la constante multiplicadora no depende de N

las condiciones requeridas al problema P_A^{hk} en el Teorema 2.4.1, de donde se deduce la existencia y unicidad de solución. Además, del Teorema 2.4.2 se deduce que se verifica la cota de error (2.4.8) que, traducida al contexto del problema de contacto, establece (7.4.14). \square

Por otra parte, definiendo $\boldsymbol{\sigma}^{hk} = \{\boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset Q^h$ como en (6.4.13) y (6.4.14) y realizando algunas operaciones elementales se tienen expresiones de la forma de (6.4.22) y (6.4.23). Por tanto, junto con (7.4.14) nos proporciona la cota

$$(7.4.15) \quad \begin{aligned} & \max_{0 \leq n \leq N} \{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q \} \\ & \leq c \left(\max_{0 \leq n \leq N} \{ R(t_n; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h) \}^{\frac{1}{2}} + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h\|_V \right) \\ & \quad + \max_{0 \leq n \leq N} \{ I_n + \|(I - \mathcal{P}_{Q^h})\boldsymbol{\sigma}_n\|_Q \}, \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{v}^h \in V^h$.

El siguiente corolario hace uso de la estimación de error (7.4.15) y del Teorema 1.6.1 para demostrar la convergencia de la solución de PV^{hk} a la de PV cuando los parámetros de discretización h y k tienden a 0 en el caso de la discretización por el método de elementos finitos descrito en la Sección 4.2.

Corolario 7.4.6. Sean $V^h \subset V$ y $Q^h \subset Q$ ($h \rightarrow 0$), las familias de subespacios de dimensión finita dados por (4.2.3) y (4.2.5), respectivamente. En las hipótesis (6.2.1)–(6.2.6) y (7.1.10)–(7.1.11), sean $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$ la solución del problema continuo PV y $\mathbf{u}^{hk} = \{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$ la solución del problema totalmente discreto PV^{hk} . Sean $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q)$ y $\boldsymbol{\sigma}^{hk} = \{\boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\}_{n=0}^N$ los campos de tensiones correspondientes. Supongamos que el paso temporal k cumple (6.4.12). Entonces, se tiene

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} \left\{ \max_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q \right\} = 0.$$

Demostración. Usamos la cota (7.4.5) en (7.4.15) y tomamos $X_0 = X =$

V , $X_0^h = X^h = V^h$, $Y = Q$ y $Y^h = Q^h$. De (7.4.15), observamos que tomando $g(r) = r^{\frac{1}{2}} + r$ se cumple la condición (4.2.15) y g verifica (1.4.4). Por otra parte, por el Teorema 4.1.1, (identificando V_0 con \mathcal{U}), tomando $\mathcal{Q} = [H^1(\Omega)]_s^{d \times d}$ y teniendo en cuenta las estimaciones (4.2.6) y (4.2.8) se verifican las condiciones (4.2.12) y (4.2.13) con $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Estamos en las condiciones del Teorema 1.6.1, de donde tenemos el resultado deseado. \square

Corolario 7.4.7. Sean $V^h \subset V$ y $Q^h \subset Q$ ($h \rightarrow 0$), las familias de subespacios de dimensión finita dados por (4.2.3) y (4.2.5), respectivamente. En las hipótesis (6.2.1)–(6.2.6) y (7.1.10)–(7.1.11), sean $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$ la solución del problema continuo PV y $\mathbf{u}^{hk} = \{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$ la solución del problema totalmente discreto PV^{hk} . Sean $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q)$ y $\boldsymbol{\sigma}^{hk} = \{\boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\}_{n=0}^N$ los campos de tensiones correspondientes. Supongamos que el paso temporal k cumple (6.4.12). Supongamos también la regularidad adicional dada por (7.4.6) y que además \mathbf{u} y \mathcal{B} son funciones de Lipschitz. Entonces se tiene la estimación de error

$$\max_{0 \leq n \leq N} \{\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q\} \leq c (h^{\frac{1}{2}} + k),$$

donde c es una constante positiva que depende de \mathcal{A} , \mathcal{B} , p_ν , \mathbf{u} y $\boldsymbol{\sigma}$.

Demostración. Se reduce a aplicar en (7.4.15) la cota (7.4.5), y las estimaciones (1.5.7), (4.2.6) y (4.2.8). \square

Corolario 7.4.8. Sean $V^h \subset V$ y $Q^h \subset Q$ ($h \rightarrow 0$), las familias de subespacios de dimensión finita dados por (4.2.3) y (4.2.5), respectivamente. Sea el vector de fuerzas \mathbf{F} dado por (4.1.9). En las hipótesis (6.2.1)–(6.2.5), (6.2.7) y (7.1.10)–(7.1.11), sean $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$ la solución del problema continuo PV y $\mathbf{u}^{hk} = \{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$ la solución del problema totalmente discreto PV^{hk} . Sean $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q)$ y $\boldsymbol{\sigma}^{hk} = \{\boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\}_{n=0}^N$ los campos de tensiones corres-

pendientes. Supongamos que el paso temporal k cumple (6.4.12). Supongamos también la regularidad adicional dada por (7.4.6) y (7.4.8) y que además \mathbf{u} y \mathcal{B} son funciones de Lipschitz. Entonces se tiene la estimación de error

$$\max_{0 \leq n \leq N} \{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q \} \leq c(h+k),$$

donde c es una constante positiva que depende de \mathcal{A} , \mathcal{B} , p_ν , \mathbf{u} y $\boldsymbol{\sigma}$.

Demostración. Se procede como en (7.4.10) para tener $R(t_n; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h) = 0$ para todo n , $0 \leq n \leq N$. Entonces, aplicando (6.4.18), (4.2.6) y (4.2.8) en (7.4.15) nos permite concluir el resultado deseado.

□

7.5. Resultados numéricos

En esta sección mostramos resultados numéricos de simulaciones realizadas con un algoritmo basado en estrategias de tipo penalización-dualidad. Como se desprende de [91], el algoritmo empleado en la Sección 6.5 con ligeras modificaciones nos permite llevar a cabo las simulaciones para condiciones de contacto de tipo respuesta normal, cuando esta viene dada por una ley de la forma (5.4.6). Se pretende aproximar la solución del problema PV_μ (7.3.1)–(7.3.2), según el esquema totalmente discretizado PV^{hk} (7.4.12)–(7.4.13). Comenzamos con un apartado dedicado a simulación unidimensional, incluyendo resultados numéricos que corroboran desde el punto de vista práctico el resultado de convergencia establecido en el Teorema 7.3.3. Posteriormente, se presentan resultados de simulaciones en dos y tres dimensiones.

Un ejemplo unidimensional

Nos situamos en las mismas condiciones generales descritas para el problema unidimensional $P1D_S$ en la Sección 6.5 (ver Figura 6.5.1). Por tanto estudiamos el comportamiento mecánico de una barra de longitud L y sección transversal de área A , que está sujeta por uno de sus extremos y sometida a la acción de una fuerza distribuida f_0 en la dirección de su eje. El otro extremo se encuentra inicialmente a una distancia $s > 0$ de un cuerpo deformable que penaliza la penetración siguiendo una ley de tipo respuesta normal. El material del que está compuesta dicha barra es de tipo viscoelástico de memoria larga. Dado que $L \gg A$ suponemos que su línea media es representativa y en consecuencia modelizamos esta situación física con la versión unidimensional del problema P (7.1.1)–(7.1.5), tomando $\Omega = (0, L)$, $\Gamma_3 = \{L\}$, $\Gamma_2 = \emptyset$ y $\Gamma_1 = \{0\}$. El intervalo de observación es $[0, T]$. Dado que estamos en el caso unidimensional, $\mathcal{A} = AE$, donde E es el módulo de Young del material, que suponemos constante. Además $\varepsilon(u) = \partial u / \partial x$ y la memoria está en función de $\mathcal{B} = b$. De esta forma, el problema P se reescribe como sigue:

PROBLEMA $P1D_{RN}$: Hallar el campo de desplazamientos $u_\mu : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ y el campo de tensiones $\sigma_\mu : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$(7.5.1) \quad \frac{\partial \sigma_\mu}{\partial x}(x, t) = -f_0(x, t) \quad \text{en } \Omega \times (0, T),$$

$$(7.5.2) \quad \sigma_\mu(x, t) = AE \frac{\partial u_\mu}{\partial x}(x, t) + \int_0^t b(t-s) \frac{\partial u_\mu}{\partial x}(x, s) ds \quad \text{en } \Omega \times (0, T),$$

$$(7.5.3) \quad u_\mu(0, t) = 0 \quad \text{en } (0, T),$$

$$(7.5.4) \quad \sigma_\mu(L, t) = -\frac{1}{\mu}(u_\mu(L, t) - s)_+ \quad \text{en } (0, T), \quad \mu = \frac{1}{c_\nu}.$$

El espacio donde buscamos los desplazamientos es $C([0, T]; V)$, donde

$$V = \{v \in H^1(0, L), v(0) = 0\}$$

y su discretización viene dada por

$$V^h = \{v^h \in C([0, L]), v^h|_{(x_i, x_{i+1})} \in P_1([x_i, x_{i+1}]), 1 \leq i \leq M-1, v^h(0) = 0\},$$

siendo $x_1 = 0 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_M = L$ la discretización del dominio de la variable espacial y $P_1([x_i, x_{i+1}])$ el espacio de polinomios de grado menor o igual a 1 en $[x_i, x_{i+1}]$.

En las simulaciones que se presentan en la Figura 7.5.1 se muestran dos resultados diferentes. En la gráfica de la izquierda se representa, en escala logarítmica de base 10, la convergencia uniforme de la solución aproximada u_μ^{hk} de $P1D_{RN}$ a la solución exacta conocida u_S de $P1D_S$ cuando aumenta la rigidez del obstáculo, utilizando los siguientes datos concretos:

$$L = 1 \text{ m}, T = 2 \text{ seg.}, s = 0.25 \text{ m}, A = 1 \text{ cm}^2, E = 10^4 \text{ N/m}^2,$$

$$b(t) = 0.63 \text{ N/seg.}, f_0(x, t) = t \text{ N/m}, M = 101, k = 0.01 \text{ seg.}$$

Por tanto, las simulaciones *mejoran* los resultados teóricos, pues en aquellos sólo obteníamos convergencia puntual. Bajo los mismos datos, en la gráfica de la derecha se muestra la evolución de la penetración de la barra en el obstáculo en función de la rigidez $c_\nu = \mu^{-1}$ y de la memoria $b_\theta = \theta$. Se aprecia que con carácter general, para un mismo valor de rigidez, se obtiene mayor penetración con menor memoria, efecto este más acusado cuanto menor sea la rigidez.

Un ejemplo bidimensional

Se considera un sólido paralelepédico de sección $\Omega = (0, 1) \times (1, 2)$ y de espesor $\varepsilon \ll 1$. Suponemos que las condiciones de carga nos permiten utilizar las hipótesis de tensiones planas en el dominio Ω y que las superficies laterales del material no se desplazan en la dirección del eje OX , por lo que en $\{0\} \times (1, 2)$ y en $\{1\} \times (1, 2)$ la primera componente de los desplazamientos es nula. Además,

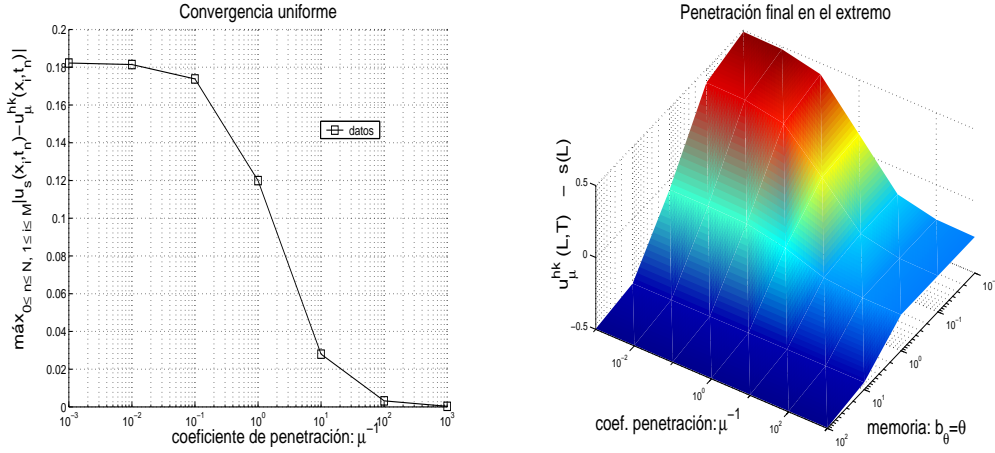


Figura 7.5.1: Convergencia uniforme y penetración.

en ausencia de fuerzas volúmicas, existe un campo de fuerzas superficiales constante en la dirección del eje OY actuando en $\Gamma_2 = (0, 1) \times \{2\}$. La diferencia con el problema bidimensional descrito en la Sección 6.5 radica en la forma y rigidez del obstáculo, que ahora es penetrable. La función de distancia viene dada por

$$s(x, 1) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 0.2 \quad \text{ó} \quad 0.8 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } 0.2 \leq x \leq 0.8. \end{cases}$$

Esto es, el obstáculo es un prisma recto de sección en forma de “T” invertida. Tomamos \mathcal{A} igual al tensor de elasticidad lineal plana, como en (6.5.7), y para la simulación numérica se toman los siguientes datos.

$$E = 10^2 \text{ N/m}^2, \quad \kappa = 0.3, \quad T = 2 \text{ seg}, \quad \mathbf{f}_2 = (0, -10^2) \text{ N/m}^2.$$

Además hemos considerado $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, entendiéndose que sus componentes expresan ahora cantidades medidas en $N/(m^2 \text{ seg})$.

En las figuras 7.5.2 y 7.5.3 se presentan los resultados de las simulaciones numéricas llevadas a cabo para dos coeficientes de penetrabilidad (denotado por μ) diferentes, siendo este sensiblemente mayor en 7.5.2 que en 7.5.3. Una

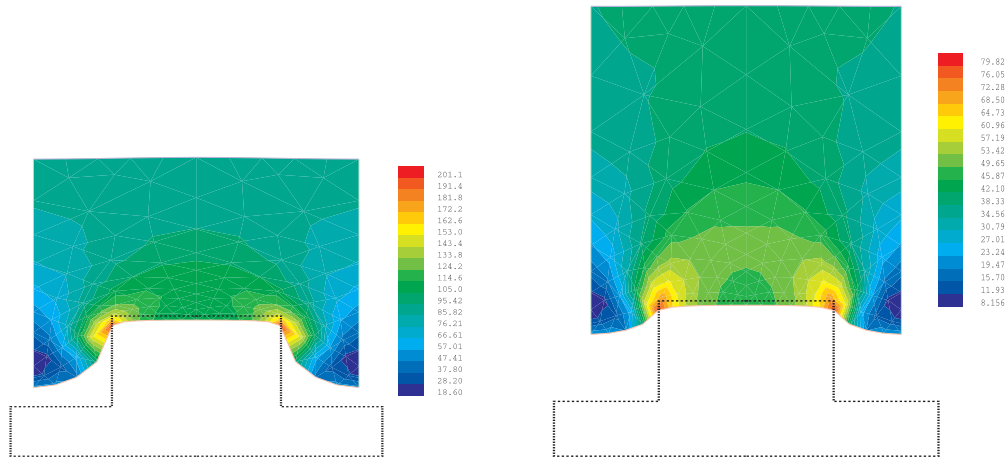


Figura 7.5.2: Problema 2D: Configuración deformada y distribución de tensiones en norma Von Mises para $t = 0$ y $t = 1$. Coef. penetrabilidad $\mu = 1 \times 10^{-2} \text{ m}^2/N$.

comparación cualitativa muestra que para un mayor coeficiente μ el cuerpo deformado ha desplazado ligeramente el obstáculo y ocupado la zona libre dejada por este.

Otro hecho que se aprecia en las figuras, gracias a las líneas discontinuas que marcan la posición original del obstáculo, es que para mayor coeficiente de penetrabilidad, toda la línea de contacto penetra ligeramente en la zona del obstáculo, cosa que no ocurre para el caso con menor coeficiente, situación mucho más próxima al caso de Signorini.

En cuanto al efecto de la memoria en las simulaciones, observamos el mismo comportamiento que en el capítulo anterior, esto es, con el paso del tiempo la memoria tiende a hacer que el sólido deformable recupere parcialmente su configuración original. Esto hecho no parece estar demasiado influenciado por el valor del coeficiente de penetrabilidad.

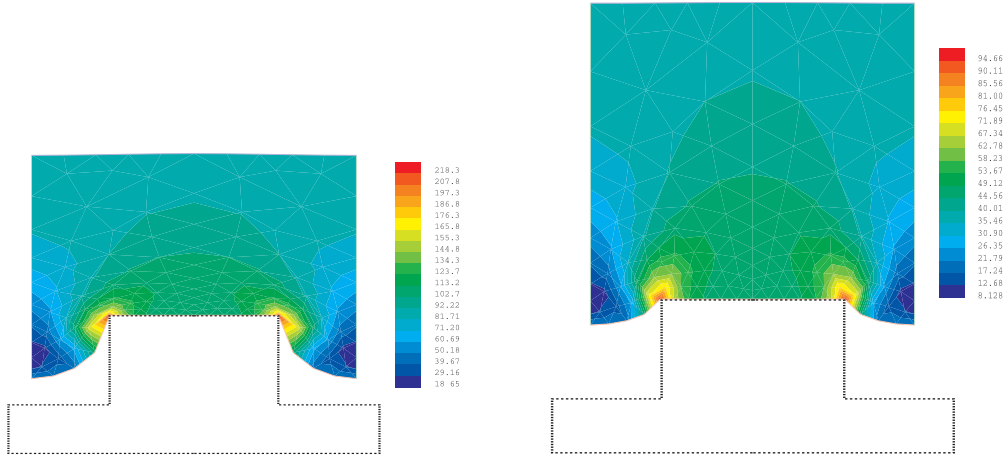


Figura 7.5.3: Problema 2D: Configuración deformada y distribución de tensiones en norma Von Mises para $t = 0$ y $t = 1$. Coef. penetrabilidad $\mu = 1 \times 10^{-10} \text{ m}^2/N$.

Un ejemplo tridimensional

Para el caso tridimensional consideramos una placa sólida de sección cuadrada que en su configuración de referencia ocupa el dominio $\Omega = (0, 1) \times (1, 2) \times (0, \frac{1}{2})$. Las caras $\{0\} \times (1, 2) \times (0, \frac{1}{2})$ y $\{1\} \times (1, 2) \times (0, \frac{1}{2})$ están fijadas de tal forma que no pueden desplazarse en la dirección del eje OX y la cara $\Gamma_3 = (0, 1) \times \{1\} \times (0, 1)$ está apoyada en un prisma recto deformable cuya sección tiene forma de “T” invertida. Inicialmente, la distancia s de la frontera de contacto del sólido con dicho objeto viene dada por la ecuación

$$s(x, 1, z) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 0.2 \text{ ó } 0.8 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } 0.2 \leq x \leq 0.8. \end{cases}$$

Además, suponemos que la placa puede desplazarse sobre el plano $Z = 0$ pero nunca separarse de él. El sólido está compuesto de material viscoelástico de memoria larga, no hay fuerzas volúmicas y experimenta fuerzas de compresión constantes sobre la cara $\Gamma_2 = (0, 1) \times \{2\} \times (0, 1)$.

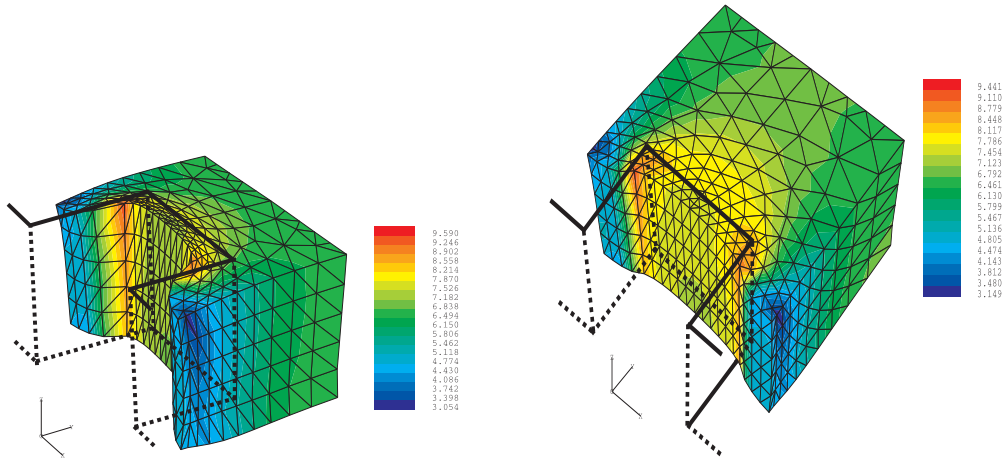


Figura 7.5.4: Problema 3D: Configuración deformada y distribución de tensiones en norma Von Mises para $t = 0$ y $t = 1$. Coef. penetrabilidad $\mu = 1 \text{ m}^2/N$.

Estamos planteando, pues, un problema tridimensional que hemos aproximado por el problema 2D del apartado anterior. Tomamos \mathcal{A} igual al tensor de elasticidad lineal tridimensional, que viene dado por (6.5.8).

En las figuras 7.5.4 y 7.5.5 presentamos los resultados numéricos de dos simulaciones, que al igual que en el apartado de simulaciones bidimensionales, se corresponden con dos valores diferentes del coeficiente de penetrabilidad μ . Los datos comunes a ambas simulaciones que se han utilizado son:

$$E = 10^2 \text{ N/m}^2, \quad \kappa = 0.3, \quad \mathbf{f}_2 = (0, -50, 0) \text{ N/m}^2, \quad T = 1 \text{ seg.}$$

Además, se ha considerado $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, donde sus componentes se entiende que son ahora cantidades medidas en $N/(m^2 \text{ seg})$. De esta condición también se deduce que el material es isótropo.

Cualitativamente, las observaciones que cabe realizar son equiparables a las simulaciones 2D. Para una mayor penetrabilidad (Figura 7.5.4) las “esquinas” de la deformada son más redondeadas en la zona de contacto que para un valor menor (Figura 7.5.5).

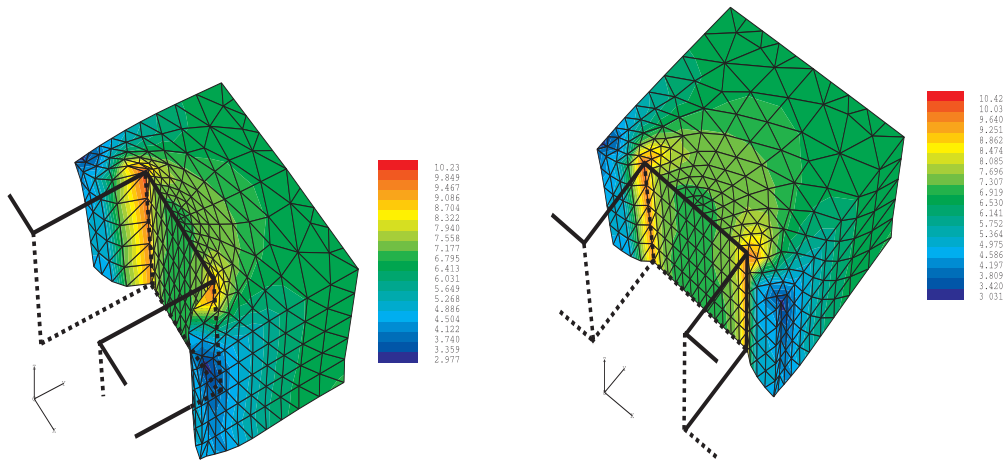


Figura 7.5.5: Problema 3D: Configuración deformada y distribución de tensiones en norma Von Mises para $t = 0$ y $t = 1$. Coef. penetrabilidad $\mu = 1 \times 10^{-10}$.

En ambas figuras hemos marcado en trazo más grueso la configuración original del obstáculo con forma de “T” invertida. Gracias a esto observamos que para mayor coeficiente de penetrabilidad, toda la superficie de contacto desplaza ligeramente el obstáculo, cosa que no ocurre para el caso con menor coeficiente. Un valor tan bajo del coeficiente μ está muy próximo al caso de Signorini, en que el obstáculo no se desplaza en absoluto.

En cuanto al efecto de la memoria en las simulaciones, observamos el mismo comportamiento que hemos destacado en otras simulaciones a valor constante de la memoria, esto es, con el paso del tiempo la memoria tiende a hacer que el sólido deformable recupere parcialmente su configuración original.

Capítulo 8

Problema de contacto unilateral entre dos cuerpos

En este capítulo se estudia el problema de contacto entre dos sólidos deformables viscoelásticos de memoria larga. El contacto, si se produce, es unilateral y sin rozamiento. Comenzamos generalizando algunas expresiones introducidas en el Capítulo 5 al caso de dos cuerpos y planteando el problema mecánico de contacto que se deriva de ellas. A continuación se estudia la existencia y unicidad de solución para una formulación variacional con ayuda de las herramientas desarrolladas en la Sección 2.1. También se realiza el estudio de la discretización del problema utilizando los resultados generales de las secciones 2.3 y 2.4. Finalizamos con la presentación de resultados de simulaciones numéricas en dos y tres dimensiones.

8.1. Formulación mecánica y variacional del problema

Consideramos dos cuerpos viscoelásticos que en su configuración de referencia ocupan la adherencia de los dominios acotados Ω^1 y Ω^2 de \mathbb{R}^d . Utilizaremos un superíndice m para denotar que la función, variable o conjunto en cuestión es relativo al dominio Ω^m , $m = 1, 2$.

Para cada dominio Ω^m , la frontera Γ^m es suficientemente regular, por ejemplo de Lipschitz a trozos, y está dividida en tres partes disjuntas $\Gamma_1^m, \Gamma_2^m, \Gamma_3^m$, siendo $med(\Gamma_1^m) > 0$. Sea $\boldsymbol{\nu}^m = (\nu_i^m)$ el vector normal, exterior y unitario definido sobre Γ^m . Al igual que en la Sección 5.2 estamos interesados en el estudio del proceso de deformación cuasiestático que se desarrolla en el intervalo temporal $[0, T]$, donde $T > 0$. Se suponen condiciones de fijación para los desplazamientos en $\Gamma_1^m \times [0, T]$. Además existen fuerzas volúmicas de densidades \mathbf{f}_0^m y tracciones superficiales de densidades \mathbf{f}_2^m que actúan sobre $\Omega^m \times [0, T]$ y $\Gamma_2^m \times [0, T]$, respectivamente.

Los cuerpos se encuentran inicialmente en contacto a lo largo de la frontera común $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2 = \Gamma_3$. El contacto es sin rozamiento y se modeliza con condiciones de no interpenetración y función de distancia $s = 0$. Utilizamos una ley de viscoelasticidad con memoria larga para describir el comportamiento mecánico del material de que se componen ambos cuerpos. En consecuencia, el problema de contacto se puede modelizar matemáticamente en forma del siguiente problema de contorno.

PROBLEMA *P*: Para cada $m = 1, 2$, hallar un campo de desplazamientos $\mathbf{u}^m = (u_i^m) : \Omega^m \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ y un campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}^m = (\sigma_{ij}^m) :$

$\Omega^m \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}_d$ tales que:

$$(8.1.1) \quad \boldsymbol{\sigma}^m(t) = \mathcal{A}^m \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^m(t)) + \int_0^t \mathcal{B}^m(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^m(s)) ds \text{ en } \Omega^m,$$

$$(8.1.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma}^m(t) + \mathbf{f}_0^m(t) = \mathbf{0} \text{ en } \Omega^m,$$

$$(8.1.3) \quad \mathbf{u}^m(t) = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_1^m,$$

$$(8.1.4) \quad \boldsymbol{\sigma}^m(t) \boldsymbol{\nu}^m = \mathbf{f}_2^m(t) \text{ en } \Gamma_2^m,$$

$$(8.1.5) \quad u_\nu^1(t) + u_\nu^2(t) \leq 0, \quad \sigma_\nu^1(t) = \sigma_\nu^2(t) \leq 0, \quad (u_\nu^1(t) + u_\nu^2(t)) \sigma_\nu^m(t) = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau^m(t) = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_3,$$

para todo $t \in [0, T]$.

La expresión (8.1.1) representa la ley de comportamiento en viscoelasticidad con memoria larga introducida en (5.3.6) en la que \mathcal{A}^m y \mathcal{B}^m son, respectivamente, los tensores de cuarto orden de elasticidad y de relajación relativos a Ω^m . Además, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^m) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^m)) = (\frac{1}{2}(u_{i,j}^m + u_{j,i}^m))$ representa el tensor de deformaciones linealizado, introducido en (5.2.3). La expresión (8.1.2) es la ecuación de equilibrio, en la que $\text{Div } \boldsymbol{\sigma}^m = (\sigma_{ij,j}^m)$ denota la divergencia del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}^m$ y fue introducida en (5.2.2) para el caso de un sólo cuerpo. Por su parte, (8.1.3) y (8.1.4) son las condiciones de contorno de desplazamientos y tracciones, respectivamente. Finalmente, las expresiones en (8.1.5) representan las condiciones de contacto de no interpenetración y sin rozamiento, donde u_ν^m , σ_ν^m y $\boldsymbol{\sigma}_\tau^m$ son, respectivamente, los desplazamientos normales, las tensiones normales y las tensiones tangenciales, dados por

$$u_\nu^m = u_i^m \nu_i^m, \quad \sigma_\nu^m = \sigma_{ij}^m \nu_i^m \nu_j^m, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^m = (\sigma_{\tau i}^m) = (\sigma_{ij}^m \nu_j^m - \sigma_\nu^m \nu_i^m).$$

Generalizamos las definiciones de algunos espacios introducidas en la Sección 4.1:

$$V^m = \{ \mathbf{v} = (v_i) \mid v_i \in H^1(\Omega^m), \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_1^m \},$$

$$Q^m = \{ \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \mid \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega^m) \},$$

que son espacios de Hilbert reales con sus productos interiores canónicos, denotados por $(\cdot, \cdot)_X$, y las normas asociadas $\|\cdot\|_X$, siendo $X = V^m$ o $X = Q^m$. Sea además

$$\mathbf{L}^\infty(\Omega^m) = \{ \mathcal{B} = (\mathcal{B}_{ijkl}) : \mathcal{B}_{ijkl} \in L^\infty(\Omega^m) \},$$

que es un espacio de Banach con la norma

$$\|\mathcal{B}\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega^m)} = \max_{0 \leq i,j,k,l \leq d} \|\mathcal{B}_{ijkl}\|_{L^\infty(\Omega^m)}.$$

Definimos, con ayuda del teorema de representación de Riesz, el vector de fuerzas $\mathbf{F}^m : [0, T] \rightarrow V^m$ dado por

$$(8.1.6) \quad (\mathbf{F}^m(t), \mathbf{v})_{V^m} = (\mathbf{f}_0^m(t), \mathbf{v})_{[L^2(\Omega^m)]^d} + (\mathbf{f}_2^m(t), \mathbf{v})_{[L^2(\Gamma_2^m)]^d},$$

para todo $\mathbf{v} \in V^m$ y todo $t \in [0, T]$. En el estudio del problema P asumimos las siguientes hipótesis:

$$(8.1.7) \quad \mathcal{A}^m \in \mathbf{L}^\infty(\Omega^m),$$

$$(8.1.8) \quad \mathcal{A}_{ijkl}^m = \mathcal{A}_{jikl}^m = \mathcal{A}_{klij}^m \quad \text{c.p.d. en } \Omega^m,$$

$$(8.1.9) \quad \mathcal{A}_{ijkl}^m \xi_{kl} \xi_{ij} \geq \alpha^m \xi_{ij} \xi_{ij} \quad \text{c.p.d. en } \Omega^m,$$

$$(8.1.10) \quad \mathcal{B}_{ijkl}^m(t) = \mathcal{B}_{jikl}^m(t) = \mathcal{B}_{klij}^m(t) \quad \text{c.p.d. en } \Omega^m, \quad t \in [0, T]$$

$$(8.1.11) \quad \mathcal{B}^m \in C([0, T]; \mathbf{L}^\infty(\Omega^m)),$$

$$(8.1.12) \quad \mathbf{F}^m \in C([0, T]; V^m),$$

donde $\alpha^m > 0$ y $\boldsymbol{\xi} = (\xi_{ij})$ es un elemento arbitrario de \mathbb{S}_d . Nótese que una condición suficiente para (8.1.12) es que se verifique

$$(8.1.13) \quad \mathbf{f}_0^m \in C([0, T]; [L^2(\Omega^m)]^d), \quad \mathbf{f}_2^m \in C([0, T]; [L^2(\Gamma_2^m)]^d).$$

Para simplificar las notaciones, definimos los espacios producto siguientes

$$V = V^1 \times V^2, \quad Q = Q^1 \times Q^2,$$

que son espacios de Hilbert con los productos escalares canónicos. También definimos el espacio

$$\mathbf{L}^\infty = \{ \mathcal{B} = (\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2) : \mathcal{B}^1 \in \mathbf{L}^\infty(\Omega^1), \mathcal{B}^2 \in \mathbf{L}^\infty(\Omega^2) \},$$

que es un espacio de Banach con la norma

$$\|\mathcal{B}\|_{\mathbf{L}^\infty} = \max\{\|\mathcal{B}^1\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega^1)}, \|\mathcal{B}^2\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega^2)}\}.$$

Además, denotamos

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{v}) &= (\varepsilon(\mathbf{v}^1), \varepsilon(\mathbf{v}^2)) \quad \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in V, \\ \mathcal{A}\boldsymbol{\tau} &= (\mathcal{A}^1\boldsymbol{\tau}^1, \mathcal{A}^2\boldsymbol{\tau}^2) \quad \forall \boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}^1, \boldsymbol{\tau}^2) \in Q, \\ \mathcal{B}(t)\boldsymbol{\tau} &= (\mathcal{B}^1(t)\boldsymbol{\tau}^1, \mathcal{B}^2(t)\boldsymbol{\tau}^2) \quad \forall \boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}^1, \boldsymbol{\tau}^2) \in Q, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Definimos el conjunto de desplazamientos admisibles $U_{ad} \subset V$ por

$$(8.1.14) \quad U_{ad} = \{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in V : v_\nu^1 + v_\nu^2 \leq 0 \text{ c.p.d. en } \Gamma_3 \}.$$

Nótese que U_{ad} es convexo, cerrado y no vacío en V . Definimos la aplicación $\mathbf{F} : [0, T] \rightarrow V$ por

$$(8.1.15) \quad (\mathbf{F}(t), \mathbf{v})_V = (\mathbf{F}^1(t), \mathbf{v}^1)_{V^1} + (\mathbf{F}^2(t), \mathbf{v}^2)_{V^2},$$

para todo $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in V$ y todo $t \in [0, T]$. Nótese que las condiciones (8.1.12) implican que

$$(8.1.16) \quad \mathbf{F} \in C([0, T]; V).$$

Supongamos ahora que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ representa una solución suficientemente regular del problema P , donde $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$ y $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2)$. Entonces, por argumentos similares a los utilizados en (6.1.6)–(6.1.10) se verifica, para cada $t \in [0, T]$,

$$(8.1.17) \quad \mathbf{u}(t) \in U_{ad}, \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \varepsilon(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)))_Q \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U_{ad}.$$

Por otra parte, con la notación introducida anteriormente, tenemos

$$(8.1.18) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Sustituimos (8.1.18) en (8.1.17) y planteamos el siguiente problema, formulación variacional en desplazamientos de P :

PROBLEMA PV : Hallar un campo de desplazamientos $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) : [0, T] \rightarrow V$ tal que

$$(8.1.19) \quad \mathbf{u}(t) \in U_{ad}, \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)))_Q \\ + \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) \right)_Q \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V,$$

para todo $\mathbf{v} \in U_{ad}$ y todo $t \in [0, T]$.

Observación 8.1.1. *Nótese que el procedimiento realizado en (6.1.13)–(6.1.16) para la obtención de una segunda formulación variacional, en tensiones, es también posible aquí, si bien se ha obviado para evitar repeticiones en la metodología.*

8.2. Existencia y unicidad de solución

El siguiente resultado hace uso de las herramientas desarrolladas en la Sección 2.1 para concluir que el problema PV tiene una única solución.

Teorema 8.2.1. *En las hipótesis (8.1.7)–(8.1.12) existe un único $\mathbf{u} \in C([0, T]; U_{ad})$ solución de PV .*

Demostración. Definimos los operadores $A : V \rightarrow V$ y $B : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V)$ por

$$(8.2.1) \quad (A\mathbf{v}, \mathbf{w})_V = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_Q, \quad (B(t)\mathbf{v}, \mathbf{w})_V = (\mathcal{B}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_Q,$$

para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y $t \in [0, T]$. Utilizando (8.1.7) y (8.1.9) se sigue que $A : V \rightarrow V$ es fuertemente monótono y de Lipschitz. Utilizando (8.1.11), se tiene que $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(V))$. Además, U_{ad} definido por (8.1.14) es un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de V . Finalmente, dado que se verifica (8.1.16), si identificamos $X = V$, $X_0 = U_{ad}$ y $f = \mathbf{F}$, el problema PV está en las condiciones requeridas al problema P_A en el Teorema 2.1.1 y podemos concluir que existe un único $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$ solución de PV . \square

Es fácil ver que, en las condiciones del Teorema 8.2.1 y adaptando el Teorema 5.3.1 (i) a las definiciones dadas en este capítulo para los espacios V y Q , podemos garantizar que el campo de tensiones definido a partir de la solución de PV con la ley (8.1.18) tiene regularidad $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q)$.

Como conclusión, observamos que hemos obtenido que bajo las hipótesis (8.1.7)–(8.1.12), el problema de contacto P tiene una solución débil única $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in C([0, T]; U_{ad}) \times C([0, T]; Q)$.

Observación 8.2.2. *Los comentarios relativos a la regularidad $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q_1)$ de la Observación 6.2.2 son válidos también en el marco funcional de este capítulo.*

8.3. Discretización y aproximación numérica del problema

Ahora nos ocupamos del estudio de la aproximación numérica de la solución del problema PV . Al igual que en capítulos anteriores, comenzamos planteando un esquema semidiscreto en el que sólo se discretiza la variable espacial como primer paso para un estudio más completo con un esquema totalmente

discretizado.

Aproximación semidiscreta. Nos situamos en las hipótesis generales de las secciones 2.3 y 4.2, esto es, utilizamos espacios de Hilbert reales de dimensión finita V^h y Q^h para aproximar las funciones de V y Q , respectivamente, con las únicas condiciones de que $V^h \subset V$, $Q^h \subset Q$ y $\varepsilon(V^h) \subset Q^h$. Sea además $U_{ad}^h \subseteq V^h \cap U_{ad}$ el conjunto de desplazamientos admisibles discreto, que suponemos convexo, cerrado y no vacío en V^h . Planteamos el siguiente esquema semidiscreto para aproximar la solución de PV :

PROBLEMA PV^h : Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u}^h : [0, T] \rightarrow V^h$ verificando para todo $t \in [0, T]$ lo siguiente:

$$(8.3.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}^h(t) \in U_{ad}^h, \quad (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}^h(t)), \varepsilon(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h(t)))_Q \\ + \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(\mathbf{u}^h(s))ds, \varepsilon(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h(t)) \right)_Q \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h(t))_V, \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{v}^h \in U_{ad}^h$.

Basándonos en argumentos de la Sección 2.3 disponemos del siguiente resultado de existencia y unicidad de solución, que además nos proporciona una cota de error en la aproximación.

Teorema 8.3.1. *En las hipótesis (8.1.7)–(8.1.12), el problema PV^h tiene solución única $\mathbf{u}^h \in C([0, T]; V^h)$ y se verifica la cota de error*

$$(8.3.2) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C([0, T]; V)} \\ \leq c \max_{t \in [0, T]} \left\{ \inf_{\mathbf{v}^h \in U_{ad}^h} \left\{ \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{C([0, T]; V)} + R(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h)^{\frac{1}{2}} \right\} \right\}, \end{aligned}$$

donde c es una constante positiva que depende de \mathcal{A} y \mathcal{B} y

$$R(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h) = (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(\mathbf{u}(s))ds, \varepsilon(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}(t)))_Q - (\mathbf{F}(t), \mathbf{v}^h - \mathbf{u}(t))_V.$$

Demostración. Procediendo como en la demostración del Teorema 8.2.1 e identificando X_0^h con el conjunto de desplazamientos admisibles discreto U_{ad}^h , el problema PV^h está en las condiciones requeridas al problema P_A^h en el Teorema 2.3.1 y podemos concluir que existe un único $\mathbf{u}^h \in C([0, T]; U_{ad}^h)$ verificando (8.3.1). Por otra parte, aplicando el Teorema 2.3.2 se verifica la cota (2.3.2), cuya traducción al marco del problema de contacto es (8.3.2). \square

Con las notaciones introducidas al comienzo de la sección definimos el campo de tensiones semidiscretizado $\boldsymbol{\sigma}^h : [0, T] \rightarrow \mathbb{S}_d \times \mathbb{S}_d$ por

$$(8.3.3) \quad \boldsymbol{\sigma}^h(t) = \mathcal{P}_{Q^h}(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h(t))) + \mathcal{P}_{Q^h}\left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h(s))ds\right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Como consecuencia, en las condiciones del Teorema 8.3.1 y por medio del Corolario 5.3.2 (i) adaptado a las definiciones de los espacios V, Q, V^h y Q^h dadas en este capítulo, podemos garantizar que el campo de tensiones definido a partir de la solución de PV^h con la ley (8.3.3) tiene regularidad $\boldsymbol{\sigma}^h \in C([0, T]; Q^h)$.

Entonces, hemos obtenido una aproximación de la solución débil $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ para el problema de contacto P con regularidad $(\mathbf{u}^h, \boldsymbol{\sigma}^h) \in C([0, T]; V^h) \times C([0, T]; Q^h)$. Además, a partir de (8.3.2) y el apartado (ii) del Corolario 5.3.2, obtenemos la expresión siguiente:

$$(8.3.4) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C([0, T]; V)} + \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h\|_{C([0, T]; Q)} \leq \|(I - \mathcal{P}_{Q^h})\boldsymbol{\sigma}\|_{C([0, T]; Q)} \\ + c \max_{t \in [0, T]} \left\{ \inf_{\mathbf{v}^h \in C([0, T]; U_{ad}^h)} \left\{ \|\mathbf{v}^h - \mathbf{u}\|_{C([0, T]; V)} + R(t; \mathbf{u}, \mathbf{v}^h)^{\frac{1}{2}} \right\} \right\}.$$

Estudiamos ahora un caso concreto en el que se utiliza el método de los elementos finitos para la discretización de la variable espacial. Suponemos que los dominios Ω^m están en las condiciones generales dadas para Ω en el Capítulo 4.

Los elementos finitos T^h son ahora triángulos para $d = 2$ y tetraedros para $d = 3$. Cada triangulación \mathcal{T}_h^m de $\bar{\Omega}^m$ induce sobre Γ_3 una triangulación θ_h^m .

Nuestra hipótesis fundamental en esta sección es que $\theta_h^1 = \theta_h^2$, esto es, los mallados de ambos cuerpos son *compatibles*, o *congruentes*, en Γ_3 . Por tanto podemos denominar al mallado de la interfaz simplemente θ_h . Al igual que en la Sección 4.2, denotamos por \mathbf{x}_{ij}^h al i -ésimo ($1 \leq i \leq d$) nodo de la cara j -ésima ($1 \leq j \leq n_C^h$) en θ_h . Además, sea $\boldsymbol{\nu}_j^{h,m}$ el vector unitario exterior a Ω^m normal a la cara C_j^h , ($1 \leq j \leq n_C^h$).

Ampliamos ahora las definiciones de la Sección 4.2 al caso de dos cuerpos.

$$\begin{aligned} X^h(\bar{\Omega}^m) &= \{v^h \in C(\bar{\Omega}^m) : v^h \in P_1(T^h) \text{ para todo } T^h \in \mathcal{T}_h^m\}, \\ V^h(\bar{\Omega}^m) &= \{\mathbf{v}^h \in [X^h(\bar{\Omega}^m)]^d, \mathbf{v}^h = \mathbf{0} \text{ en los nodos de } \bar{\Gamma}_1^m\}, \end{aligned}$$

y definimos el espacio

$$(8.3.5) \quad V^h = V^h(\bar{\Omega}^1) \times V^h(\bar{\Omega}^2).$$

Denotamos por $\Pi_h^m : C(\bar{\Omega}^m) \rightarrow X^h(\bar{\Omega}^m) \subset C(\bar{\Omega}^m)$ el *operador de interpolación global* relativo a Ω^m . Sea

$$\Pi^h : C(\bar{\Omega}^1) \times C(\bar{\Omega}^2) \rightarrow X^h(\bar{\Omega}^1) \times X^h(\bar{\Omega}^2) \subset C(\bar{\Omega}^1) \times C(\bar{\Omega}^2),$$

definido por $\Pi^h(v^1, v^2) = (\Pi_h^1 v^1, \Pi_h^2 v^2)$ para todo $\mathbf{v} = (v^1, v^2) \in C(\bar{\Omega}^1) \times C(\bar{\Omega}^2)$.

Entonces, a partir del Corolario 4.2.2 se verifica el siguiente resultado.

Teorema 8.3.2. *Dadas dos familias regulares $\{\mathcal{T}_h^m\}_{h>0}$ de particiones de d -simplex de $\bar{\Omega}^m$, $m = 1, 2$, existe una constante $c > 0$ independiente de h tal que*

$$\|\mathbf{v} - \Pi^h \mathbf{v}\|_{H^1(\Omega^1) \times H^1(\Omega^2)} \leq c h \|\mathbf{v}\|_{H^2(\Omega^1) \times H^2(\Omega^2)},$$

para todo $\mathbf{v} \in H^2(\Omega^1) \times H^2(\Omega^2)$.

Por otra parte, sea

$$(8.3.6) \quad U_{ad}^h = \{ \mathbf{v}^h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2) \in V^h : \\ \mathbf{v}_h^1(\mathbf{x}_{ij}^h) \cdot \boldsymbol{\nu}_j^{h,1} + \mathbf{v}_h^2(\mathbf{x}_{ij}^h) \cdot \boldsymbol{\nu}_j^{h,2} \leq 0, \quad 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n_C^h \}.$$

Nótese que dado que los mallados son compatibles, $U_{ad}^h \subset U_{ad}$. Para que se verifique la condición $\boldsymbol{\varepsilon}(V^h) \subset Q^h$, se define Q^h como el espacio de pares de matrices $d \times d$ simétricas cuyos elementos son funciones constantes a trozos en cada elemento $T^h \in \mathcal{T}^h = \mathcal{T}_h^1 \cup \mathcal{T}_h^2$. Es decir,

$$(8.3.7) \quad Q^h = Q^h(\Omega^1) \times Q^h(\Omega^2),$$

donde

$$Q^h(\Omega^m) = \{ \boldsymbol{\tau}^h \in Q^m : \boldsymbol{\tau}|_{T^h} \in [P_0(T^h)]_s^{d \times d}, \forall T^h \in \mathcal{T}_h^m \}.$$

El siguiente resultado es consecuencia directa de la cota (8.3.4) y el Teorema 1.4.3 y se prueba de forma similar al Corolario 6.4.2, por lo que su demostración no se repite aquí.

Corolario 8.3.3. *Sean $V^h \subset V$ y $Q^h \subset Q$ ($h \rightarrow 0$) las familias de subespacios de dimensión finita dados por (8.3.5) y (8.3.7), respectivamente y $U_{ad}^h \subset U_{ad}$ ($h \rightarrow 0$) una familia de subconjuntos de U_{ad} dada por (8.3.6). En las hipótesis (8.1.7)–(8.1.12), sean $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$ y $\mathbf{u}^h \in C([0, T]; V^h)$ las respectivas soluciones del problema continuo PV y el problema semidiscreto PV^h . Sean $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q)$ y $\boldsymbol{\sigma}^h \in C([0, T]; Q^h)$ los correspondientes campos de tensiones. Entonces, se tiene*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C([0, T]; V)} + \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h\|_{C([0, T]; Q)} \} = 0.$$

Aumentando la regularidad de la solución, se obtienen los siguientes resultados, cuya demostración no incluimos pues se deducen sin dificultad de las de los corolarios 6.4.3 y 6.4.4, respectivamente.

Corolario 8.3.4. Sean $V^h \subset V$ y $Q^h \subset Q$ ($h \rightarrow 0$) las familias de subespacios de dimensión finita dados por (8.3.5) y (8.3.7), respectivamente y $U_{ad}^h \subset U_{ad}$ ($h \rightarrow 0$) la familia de subconjuntos de U_{ad} dada por (8.3.6). En las hipótesis (8.1.7)–(8.1.12), sean $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$ la solución del problema continuo PV y $\mathbf{u}^h \in C([0, T]; V^h)$ la solución del problema semidiscreto PV^h y sean $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q)$ y $\boldsymbol{\sigma}^h \in C([0, T]; Q^h)$ los campos de tensiones correspondientes. Supongamos la regularidad adicional

$$(8.3.8) \quad \mathbf{u}^m \in C([0, T]; [H^2(\Omega^m)]^d), \quad \boldsymbol{\sigma}^m \in C([0, T]; [H^1(\Omega^m)]^{d \times d}), \quad m = 1, 2.$$

Entonces se tiene la estimación de error

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C([0, T]; V)} + \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h\|_{C([0, T]; Q)} \leq ch^{\frac{1}{2}},$$

donde c es una constante positiva que depende de \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathbf{F} , \mathbf{u} y $\boldsymbol{\sigma}$.

Corolario 8.3.5. Sean $V^h \subset V$ y $Q^h \subset Q$ ($h \rightarrow 0$) las familias de subespacios de dimensión finita dados por (8.3.5) y (8.3.7), respectivamente y $U_{ad}^h \subset U_{ad}$ ($h \rightarrow 0$) la familia de subconjuntos de U_{ad} dada por (8.3.6). Sea el vector de fuerzas \mathbf{F} dado por (8.1.6) y (8.1.15). En las hipótesis (8.1.7)–(8.1.11) y (8.1.13), sean $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$ la solución del problema continuo PV y $\mathbf{u}^h \in C([0, T]; V^h)$ la solución del problema semidiscreto PV^h y sean $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q)$ y $\boldsymbol{\sigma}^h \in C([0, T]; Q^h)$ los campos de tensiones correspondientes. Supongamos la regularidad adicional (8.3.8) y

$$(8.3.9) \quad u_v^m \in C([0, T]; H^2(\Gamma_3)), \quad m = 1, 2.$$

Entonces se tiene la estimación de error

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{C([0, T]; V)} + \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h\|_{C([0, T]; Q)} \leq ch,$$

donde c es una constante positiva que depende de \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathbf{F} , \mathbf{u} y $\boldsymbol{\sigma}$.

Aproximación totalmente discretizada. Además de las consideraciones anteriores relativas a la discretización de la variable espacial, nos situamos en las condiciones referidas a la discretización de la variable temporal de la Sección 1.5. Utilizamos la fórmula de cuadratura de trapecios compuesta, por lo que los pesos vienen dados por (1.5.3). Planteamos el siguiente esquema totalmente discretizado para aproximar la solución de PV :

PROBLEMA PV^{hk} : Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u}^{hk} = \{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset U_{ad}^h$ tal que

$$(8.3.10) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}_0^{hk}))_Q \geq (\mathbf{F}_0, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_0^{hk})_V,$$

$$(8.3.11) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n^{hk}))_Q + \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j^n \mathcal{B}^{n,j} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n^{hk}) \right)_Q \\ \geq (\mathbf{F}(t_n), \mathbf{v}^h - \mathbf{u}_n^{hk})_V, \quad 0 \leq n \leq N,$$

para todo $\mathbf{v}^h \in U_{ad}^h$.

La sucesión de tensiones aproximadas $\boldsymbol{\sigma}^{hk} = \{\boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset Q^h$ está definida por

$$(8.3.12) \quad \boldsymbol{\sigma}_0^{hk} = \mathcal{P}_{Q^h} \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0^{hk}),$$

$$(8.3.13) \quad \boldsymbol{\sigma}_n^{hk} = \mathcal{P}_{Q^h} \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{hk}) + \mathcal{P}_{Q^h} \sum_{j=0}^n \alpha_j^n \mathcal{B}^{n,j} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^{hk}), \quad 1 \leq n \leq N.$$

Basándonos en argumentos de la Sección 2.4, disponemos del siguiente resultado de existencia y unicidad de solución para PV^{hk} , cuya demostración se sigue sin dificultad a partir de la del Teorema 6.4.5 y de (6.4.24), por lo que no se incluye aquí.

Teorema 8.3.6. Sean $V^h \subset V$ y $Q^h \subset Q$ ($h \rightarrow 0$), familias de subespacios de dimensión finita tales que $\boldsymbol{\varepsilon}(V^h) \subset Q^h$. Supongamos que los datos verifican (8.1.7)–(8.1.12), que el paso temporal k cumple

$$(8.3.14) \quad k < \frac{2\alpha}{d^2 \|\mathcal{B}_0\|_{\mathbf{L}^\infty}}, \quad \alpha = \min\{\alpha^1, \alpha^2\}.$$

Entonces, el problema PV^{hk} tiene solución única $\mathbf{u}^{hk} \in U_{ad}^h$. Además, para k suficientemente pequeño se verifica la cota de error

$$(8.3.15) \quad \begin{aligned} & \max_{0 \leq n \leq N} \{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q \} \\ & \leq c \max_{0 \leq n \leq N} \{ (\|\mathbf{F}_n\|_V + \|\boldsymbol{\sigma}_n\|_Q)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h\|_V^{\frac{1}{2}} + I_n + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}^h\|_V \\ & \quad + \|(I - \mathcal{P}_{Q^h})\boldsymbol{\sigma}_n\|_Q \} \quad \forall \mathbf{v}^h \in U_{ad}^h. \end{aligned}$$

Nótese que si se verifica (8.3.14) entonces, en particular también se verifica (2.4.1), dado que $\|B_0\|_{\mathcal{L}(V)} \leq d^2 \|\mathcal{B}_0\|_{\mathbf{L}^\infty}$, donde

$$(B_0 \mathbf{v}, \mathbf{w})_V = (\mathcal{B}_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_Q \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

El siguiente corolario es consecuencia directa de la estimación de error (8.3.15) y del Teorema 1.6.1. Demuestra la convergencia de la solución de PV^{hk} a la de PV según los parámetros de discretización h y k tienden a 0. La discretización de la variable espacial se realiza con el método de elementos finitos descrito en el apartado anterior. No se incluye la demostración por ser análoga a la del Corolario 6.4.6.

Corolario 8.3.7. Sean $V^h \subset V$ y $Q^h \subset Q$ ($h \rightarrow 0$) las familias de subespacios de dimensión finita dados por (8.3.5) y 8.3.7), respectivamente, y $U_{ad}^h \subset U_{ad}$ la familia de subconjuntos de U_{ad} dada por (8.3.6). En las hipótesis (8.1.7)–(8.1.12), sean $\mathbf{u} \in C([0, T]; U_{ad})$ la solución del problema continuo PV y $\mathbf{u}^{hk} \in (U_{ad}^h)^{N+1}$ la solución del problema totalmente discretizado PV^{hk} y sean $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q)$ y $\boldsymbol{\sigma}^{hk} \in (Q^h)^{N+1}$ los campos de tensiones correspondientes. Supongamos que el paso temporal k cumple (8.3.14). Entonces, se tiene

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} \left\{ \max_{0 \leq n \leq N} \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \right\} = 0.$$

Aumentando la regularidad de la solución, se obtienen los siguientes resultados, que se demuestran de forma equivalente a los corolarios 6.4.7 y 6.4.8.

Corolario 8.3.8. *En las hipótesis del Teorema 8.3.6, sean $\mathbf{u} \in C([0, T]; U_{ad})$ la solución del problema continuo PV y $\mathbf{u}^{hk} \in (U_{ad}^h)^{N+1}$ la solución del problema totalmente discretizado PV^{hk} y sean $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q)$ y $\boldsymbol{\sigma}^{hk} \in (Q^h)^{N+1}$ los campos de tensiones correspondientes, con V^h, U_{ad}^h y Q^h ($h \rightarrow 0$) dados por (8.3.5)–(8.3.7). Supongamos que el paso temporal k cumple (8.3.14). Entonces, si se verifican las hipótesis (8.3.8) y además \mathbf{u} y \mathcal{B} son funciones de Lipschitz, se tiene la siguiente estimación de error:*

$$\max_{0 \leq n \leq N} \{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q \} \leq c(h^{\frac{1}{2}} + k),$$

donde c es una constante positiva que depende de $\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ y \mathbf{F} .

Corolario 8.3.9. *En las hipótesis del Teorema 8.3.6, sean $\mathbf{u} \in C([0, T]; U_{ad})$ la solución del problema continuo PV y $\mathbf{u}^{hk} \in (U_{ad}^h)^{N+1}$ la solución del problema totalmente discretizado PV^{hk} y sean $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q)$ y $\boldsymbol{\sigma}^{hk} \in (Q^h)^{N+1}$ los campos de tensiones correspondientes, con V^h, U_{ad}^h y Q^h ($h \rightarrow 0$) dados por (8.3.5)–(8.3.7). Supongamos que el paso temporal k cumple (8.3.14). Entonces, si se verifican las hipótesis (8.3.8)–(8.3.9), el vector de fuerzas \mathbf{F} viene dado por (8.1.6) y (8.1.15) y cumple (8.1.12) y además \mathbf{u} y \mathcal{B} son funciones de Lipschitz, se tiene la siguiente estimación de error:*

$$\max_{0 \leq n \leq N} \{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q \} \leq c(h + k),$$

donde c es una constante positiva que depende de $\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ y \mathbf{F} .

8.4. Resultados numéricos

En esta sección mostramos los resultados de algunas simulaciones numéricas en las que se estudia la evolución mecánica de dos cuerpos viscoelásticos de memoria larga en una situación de contacto unilateral. Dichas simulaciones

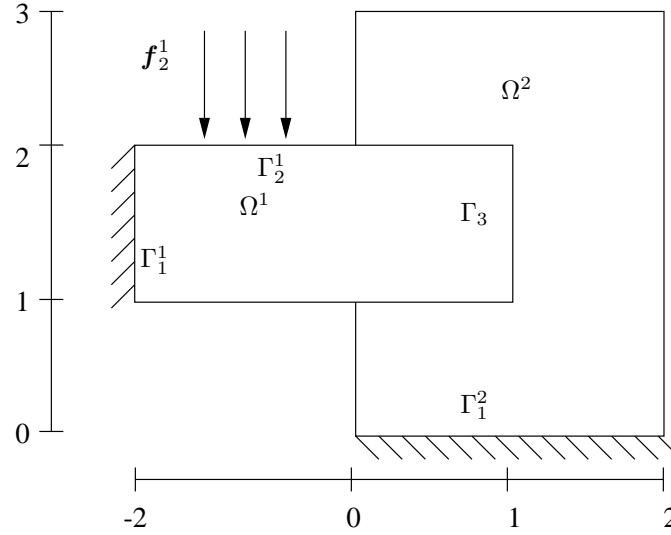


Figura 8.4.1: Problema de contacto bidimensional entre dos cuerpos.

han sido realizadas con algoritmos que combinan técnicas de tipo penalización-dualidad, el efecto acumulativo de la memoria larga y estrategias de implementación numérica para mallados compatibles e incompatibles. Para involucrar el contacto unilateral con mallados compatibles, (i.e., los mallados de los dos cuerpos inducen mallados coincidentes en la frontera de contacto), hemos hecho uso de algoritmos desarrollados por Burguera y Viaño en [13], mientras que para el contacto unilateral con mallados incompatibles (i.e., los mallados de los dos cuerpos inducen mallados no coincidentes en la frontera de contacto), hemos adaptado los programas desarrollados por Fernández-García para [28], si bien sólo son válidos para el caso bidimensional.

Se consideran dos cuerpos sólidos tridimensionales que en su configuración de referencia ocupan volúmenes prismáticos cuyas secciones apreciamos en la Figura 8.4.1 y de espesor $\varepsilon \ll 1$. Por tanto, suponemos las hipótesis de tensiones planas y consideramos el problema bidimensional en Ω^1 y Ω^2 . También suponemos ausencia de fuerzas volúmicas y que existe un campo de fuerzas superficiales constante en la dirección del eje OY actuando en $\Gamma_2^1 = (-2, 0) \times \{2\}$.

Por otra parte, los desplazamientos se suponen nulos en $\Gamma_1^1 = \{-2\} \times (1, 2)$ y en $\Gamma_1^2 = (0, 2) \times \{0\}$.

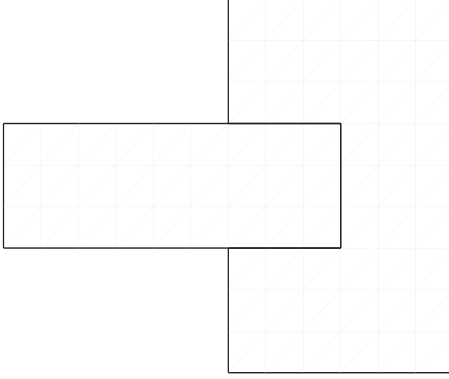


Figura 8.4.2: Mallados compatibles.

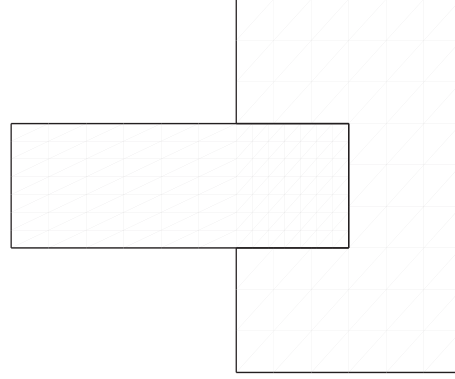


Figura 8.4.3: Mallados incompatibles.

Se supone que ambos cuerpos están compuestos de materiales viscoelásticos de memoria larga y que como consecuencia de la deformación, pueden separarse, pero en ningún caso puede producirse interpenetración. En la Figura 8.4.1 se muestra gráficamente esta situación. Vamos a presentar resultados de simulaciones empleando dos tipos de mallados diferentes. En primer lugar utilizaremos los mallados de la Figura 8.4.2 (compatibles) y posteriormente los de la Figura 8.4.3 (incompatibles).

En ambos casos tomamos \mathcal{A}^m igual al tensor de elasticidad lineal plana, que viene dado por (6.5.7) y en el ejemplo concreto cuyos resultados se muestran en las figuras 8.4.4 y 8.4.5, se han utilizado los siguientes datos:

$$E = 10^4 \text{ N/m}^2, \quad \kappa = 0.3, \quad \mathbf{f}_0 = (0, 0) \text{ N/m}^3, \quad \mathbf{f}_2^1 = (0, -10) \text{ N/m}^2, \quad T = 1 \text{ seg.}$$

Además hemos considerado $\mathcal{B}^m = \mathcal{A}^m$, entendiéndose que sus componentes expresan ahora cantidades medidas en $N/(m^2 \text{ seg.})$.

Cualitativamente, podemos destacar que al igual que en otros tests anteriores,

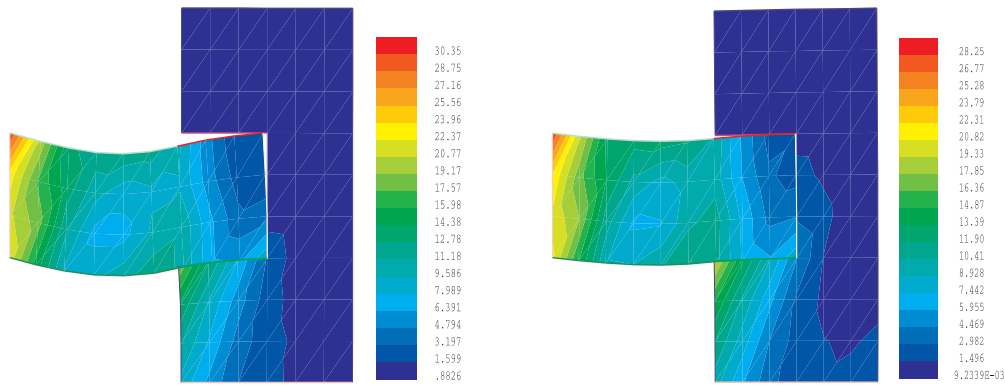


Figura 8.4.4: Problema 2D: Configuración deformada y tensiones en norma Von Mises para $t = 0$ y $t = 1$. Mallados compatibles.

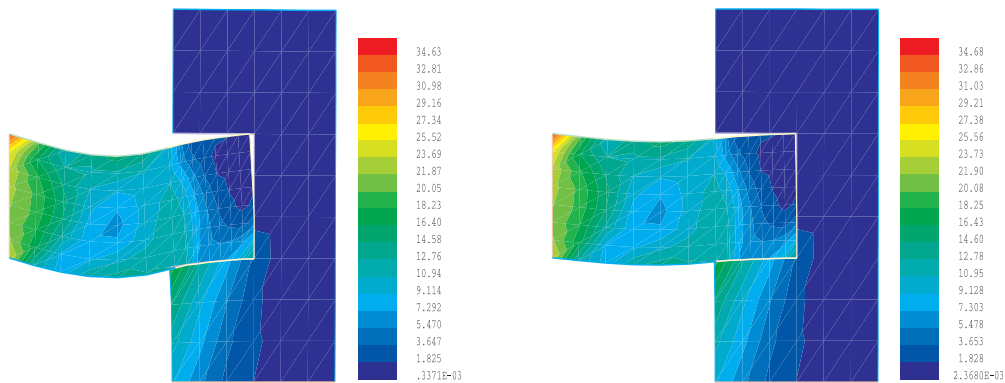


Figura 8.4.5: Problema 2D: Configuración deformada y tensiones en norma Von Mises para $t = 0$ y $t = 1$. Mallados incompatibles.

la memoria constante provoca que los dos cuerpos vayan recuperando en cierta medida su configuración original. Tampoco se aprecian diferencias relevantes entre utilizar mallados compatibles o incompatibles.

Un ejemplo tridimensional

Para el test tridimensional consideramos los cuerpos sólidos tridimensionales descritos en el apartado anterior, suponiendo ahora un espesor igual a $1.5 m$.

En consecuencia, tenemos que en este caso $\Omega^1 = (-2, 1) \times (1, 2) \times (0, \frac{3}{2})$ y $\Omega^2 = ((0, 2) \times (0, 1) \cup (1, 2) \times [1, 2] \cup (0, 2) \times (2, 3)) \times (0, \frac{3}{2})$. Las caras laterales que en configuración de referencia ocupan las adherencias de las superficies $\Gamma_{1,1}^1 = \{-2\} \times (1, 2) \times (0, \frac{3}{2})$ y $\Gamma_{1,1}^2 = (0, 2) \times \{0\} \times (0, \frac{3}{2})$ están fijadas. Además, las caras superiores e inferiores que en configuración de referencia ocupan las adherencias de las superficies $\Gamma_{1,2}^1 = (-2, 1) \times (1, 2) \times \{0\}$, $\Gamma_{1,3}^1 = (-2, 1) \times (1, 2) \times \{\frac{3}{2}\}$, $\Gamma_{1,2}^2 = ((0, 2) \times (0, 1) \cup (1, 2) \times [1, 2] \cup (0, 2) \times (2, 3)) \times \{0\}$ y $\Gamma_{1,3}^2 = ((0, 2) \times (0, 1) \cup (1, 2) \times [1, 2] \cup (0, 2) \times (2, 3)) \times \{\frac{3}{2}\}$, también están sujetas por medio de algún mecanismo de tal forma que no pueden desplazarse en la dirección del eje OZ . Finalmente, definimos $\Gamma_1^1 = \Gamma_{1,1}^1 \cup \Gamma_{1,2}^1 \cup \Gamma_{1,3}^1$ y $\Gamma_1^2 = \Gamma_{1,1}^2 \cup \Gamma_{1,2}^2 \cup \Gamma_{1,3}^2$. Esta situación se ve más claramente si consideramos la Figura 8.4.1 como vista cenital.

Se supone que ambos sólidos están compuestos de un material viscoelástico de memoria larga, que no están bajo la influencia de fuerzas volúmicas y que experimentan fuerzas de compresión constantes sobre la cara $\Gamma_2^1 = (-2, 0) \times \{2\} \times (0, \frac{3}{2})$.

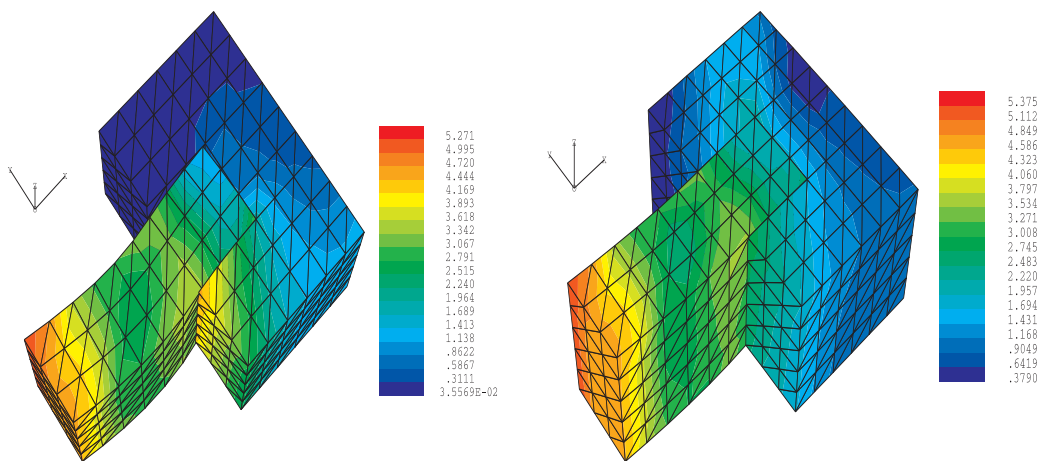


Figura 8.4.6: Problema 3D: Configuración deformada y tensiones en norma Von Mises para $t = 0$ y $t = 1$.

En el ejemplo concreto cuyos resultados se muestran en la Figura 8.4.6, tomamos \mathcal{A} igual al tensor de elasticidad lineal tridimensional, que viene dado por (6.5.8) y se han utilizado los siguientes datos:

$$E = 10^4 \text{ N/m}^2, \kappa = 0.3, \mathbf{f}_0 = (0, 0, 0) \text{ N/m}^3, \mathbf{f}_2^1 = (0, -10, 0) \text{ N/m}^2, T = 1 \text{ seg.}$$

Además hemos considerado $\mathcal{B}^m = \mathcal{A}^m$, entendiéndose que sus componentes expresan ahora cantidades medidas en $N/(m^2 \text{seg.})$. Cualitativamente, las observaciones que cabe realizar son similares a las de las simulaciones bidimensionales del apartado anterior, dado que la memoria constante provoca que los dos cuerpos vayan recuperando su configuración original.

Capítulo 9

Problema de contacto bilateral con rozamiento de Tresca

En este capítulo comenzamos el estudio de los problemas de contacto con rozamiento en viscoelasticidad con memoria larga. Nos centramos en el problema de contacto bilateral con rozamiento de Tresca para realizar un estudio más detallado, que comprende también el análisis numérico y la realización de simulaciones para el caso bidimensional. A diferencia de otros capítulos, en este se expone con mayor detalle el algoritmo numérico utilizado pues, si bien se basa en técnicas de penalización-dualidad conocidas, es novedosa su aplicación a este caso concreto con rozamiento. Finalizamos con una sección en la que se estudia el mismo problema de contacto pero con una ley constitutiva de tipo “creep”, lo que conduce al análisis de un tercer tipo de inecuaciones variacionales de Volterra.

9.1. Formulación mecánica y variacional del problema

Nos situamos en las condiciones generales descritas en el Capítulo 5 para las situaciones de contacto bilateral entre un sólido deformable y un obstáculo, por lo que no hay pérdida de contacto a lo largo del proceso de deformación durante el intervalo de observación $[0, T]$, con $T > 0$. El cuerpo ocupa en su configuración de referencia la adherencia de un dominio acotado Ω de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) cuya frontera Γ está dividida en tres partes disjuntas Γ_1, Γ_2 y Γ_3 , donde $med(\Gamma_1) > 0$. El cuerpo está fijado en Γ_1 por lo que los desplazamientos son nulos en esa parte. Tracciones superficiales de densidad \mathbf{f}_2 actúan sobre Γ_2 y fuerzas volúmicas de densidad \mathbf{f}_0 hacen lo propio sobre Ω . Suponemos que las fuerzas y tracciones varían poco a lo largo del tiempo, por lo que los efectos de la inercia son despreciables y podemos considerar un modelo cuasiestático. En Γ_3 el cuerpo está en contacto bilateral con un obstáculo no penetrable y el rozamiento se modeliza con la ley de Tresca. El material de que está compuesto el sólido deformable responde a una ley viscoelástica de memoria larga. En estas condiciones, podemos modelizar el problema mecánico de contacto en la forma del siguiente problema matemático de contorno.

PROBLEMA *P*: Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ y el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}_d$ tales que, para todo $t \in [0, T]$,

$$(9.1.1) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds \quad \text{en } \Omega ,$$

$$(9.1.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega ,$$

$$(9.1.3) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_1 ,$$

$$(9.1.4) \quad \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \quad \text{en } \Gamma_2 ,$$

$$(9.1.5) \quad \begin{cases} u_\nu(t) = 0, \quad |\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)| \leq g, \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)| < g \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) = \mathbf{0}, \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)| = g \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = -\lambda \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) \end{cases} \quad \text{en } \Gamma_3,$$

$$(9.1.6) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{en } \Omega.$$

La ecuación (9.1.1) es la ley constitutiva de los materiales viscoelásticos de memoria larga, introducida en (5.3.6). Recordamos que \mathcal{A} y $\mathcal{B}(t)$, $t \in [0, T]$, son tensores de cuarto orden denominados, tensor de elasticidad y tensor de relajación, respectivamente. La expresión (9.1.2) es la ecuación del equilibrio, obtenida en (5.2.2), que gobierna los procesos de deformación cuasiestáticos. Por su parte, las expresiones (9.1.3) y (9.1.4) son las condiciones de contorno de desplazamientos y tracciones, respectivamente.

La primera expresión en (9.1.5) representa la condición de contacto bilateral, que impide desplazamientos en la dirección de la normal $\boldsymbol{\nu}$ en la zona de contacto, por lo que este se mantiene durante todo el tiempo de observación. El resto de expresiones en (9.1.5) constituyen la ley de rozamiento de Tresca, introducida en (5.4.13). Recordamos que $g \geq 0$ es el umbral de rozamiento, esto es, la magnitud límite de la fuerza de rozamiento a partir de la que varía el deslizamiento tangencial.

Finalmente, a diferencia de los problemas de contacto estudiados en los capítulos precedentes, en este caso disponemos en (9.1.6) de una expresión que establece los desplazamientos iniciales \mathbf{u}_0 .

Nos situamos en el marco funcional general establecido en la Sección 4.1 con la salvedad del espacio V que redefinimos como sigue,

$$V = \{\mathbf{v} = (v_i) \in H_1 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_1, v_\nu = 0 \text{ en } \Gamma_3\}.$$

Es un espacio de Hilbert con el producto interior de H_1 y, además, dado que

$med(\Gamma_1) > 0$, la desigualdad de Korn nos garantiza

$$(9.1.7) \quad \|\mathbf{v}\|_{H_1} \leq c_K \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_Q \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

por lo que con el producto interior definido por

$$(9.1.8) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

el espacio V es también de Hilbert y la norma inducida es topológicamente equivalente a la de H_1 . Al igual que en (4.1.6), la constante $c_K > 0$ sólo depende de Ω y de Γ_1 .

Con ayuda del teorema de representación de Riesz, definimos $\mathbf{F}(t)$ como el elemento de V dado por

$$(9.1.9) \quad (\mathbf{F}(t), \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T].$$

Sea además $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ la función definida por

$$(9.1.10) \quad j(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} g |\mathbf{v}_\tau| \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Sea $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ una solución suficientemente regular del problema P . Dado $t \in [0, T]$, aplicamos la fórmula de Green (4.1.3) para $\mathbf{v} = \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)$ y, teniendo en cuenta (9.1.9) y (9.1.2)–(9.1.5), se obtiene

$$(9.1.11) \quad \begin{aligned} & (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)))_Q \\ & = (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V + (\boldsymbol{\sigma}_\tau(t), \mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t))_{[L^2(\Gamma_3)]^d} \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned}$$

Ahora bien, de (9.1.5) deducimos que

$$(9.1.12) \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau(t) \cdot \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) = -g|\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)|, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau(t) \cdot \mathbf{v}_\tau \geq -g|\mathbf{v}_\tau|.$$

Aplicando (9.1.12) en (9.1.11) y teniendo en cuenta (9.1.10), tenemos

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)))_Q + j(\mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V.$$

En consecuencia, sustituyendo (9.1.1) en la desigualdad anterior, obtenemos la siguiente formulación variacional del problema P .

PROBLEMA PV : Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ tal que

$$(9.1.13) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_Q + j(\mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}(t)) \\ + (\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_Q \\ \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T],$$

$$(9.1.14) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

La existencia, unicidad y propiedades de la solución para el problema PV será estudiada utilizando los argumentos desarrollados en un marco abstracto en el Capítulo 3.

9.2. Existencia y unicidad de solución

Suponemos que los tensores de elasticidad y relajación verifican

$$(9.2.1) \quad \mathcal{A} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega),$$

$$(9.2.2) \quad \mathcal{A}_{ijkl} = \mathcal{A}_{jikl} = \mathcal{A}_{klij} \quad \text{c.p.d. en } \Omega,$$

$$(9.2.3) \quad \mathcal{A}_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq \alpha\xi_{ij}\xi_{ij} \quad \text{c.p.d. en } \Omega,$$

$$(9.2.4) \quad \mathcal{B}_{ijkl}(t) = \mathcal{B}_{jikl}(t) = \mathcal{B}_{klij}(t) \quad \text{c.p.d. en } \Omega, \quad t \in [0, T],$$

$$(9.2.5) \quad \mathcal{B} \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{L}^\infty(\Omega)),$$

donde $\alpha > 0$ y $\boldsymbol{\xi} = (\xi_{ij})$ es un elemento arbitrario de \mathbb{S}_d . También suponemos que las fuerzas involucradas verifican

$$(9.2.6) \quad \mathbf{f}_0 \in W^{1,2}(0, T; [L^2(\Omega)]^d), \quad \mathbf{f}_2 \in W^{1,2}(0, T; [L^2(\Gamma_2)]^d),$$

y la función que representa el umbral de rozamiento es tal que

$$(9.2.7) \quad g \in L^\infty(\Omega), \quad g \geq 0 \quad \text{c.p.d. en } \Gamma_3.$$

Las hipótesis (9.2.6) y (9.2.7) garantizan que las integrales en (9.1.9) y (9.1.10) están bien definidas. Además, se tiene

$$(9.2.8) \quad \mathbf{F} \in W^{1,2}(0, T; V).$$

Finalmente, asumimos que el dato inicial verifica

$$(9.2.9) \quad \mathbf{u}_0 \in V,$$

$$(9.2.10) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q + j(\mathbf{v}) \geq (\mathbf{F}(0), \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Como aplicación directa del Teorema 3.1.3, tenemos el siguiente resultado de existencia y unicidad para la solución de PV .

Teorema 9.2.1. *En las hipótesis (9.2.1)–(9.2.5) y (9.2.7)–(9.2.10), el problema PV tiene una única solución, de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$.*

Demostración. Sean $A : V \rightarrow V$ y $B : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V)$ los operadores definidos por

$$(9.2.11) \quad (A\mathbf{v}, \mathbf{w})_V = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_Q, \quad (B(t)\mathbf{v}, \mathbf{w})_V = (\mathcal{B}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_Q,$$

para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y $t \in [0, T]$. Usando (9.2.1)–(9.2.5) se sigue que los operadores A y B satisfacen las condiciones (3.1.3) y (3.1.4) para $X = V$, respectivamente. Cabe destacar que de (9.2.5) y (9.2.11) se obtiene que

$$(\dot{B}(t)\mathbf{v}, \mathbf{w})_V = (\dot{\mathcal{B}}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_Q \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \quad t \in [0, T].$$

y, aún más,

$$\|B\|_{W^{1,2}(0, T; \mathcal{L}(V))} \leq c \|\mathcal{B}\|_{W^{1,2}(0, T; L_\infty(\Omega))}.$$

Además, la función definida por (9.1.10) es una seminorma continua en V y por tanto verifica las condiciones en (3.1.5). Finalmente, teniendo en cuenta

(9.2.8)–(9.2.10), comprobamos que el problema PV está en las condiciones requeridas para P_A en el Teorema 3.1.3 y así, existe una única solución de PV de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$, lo que concluye la demostración. \square

Consideramos ahora $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$, solución del problema PV y sea $\boldsymbol{\sigma}$ el campo de tensiones definido por (9.1.1). Usando (9.2.1) y (9.2.5), aplicamos el Teorema 5.3.1 (ii) para demostrar que $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,2}(0, T; Q)$. Nótese que el espacio de Hilbert V difiere ligeramente del empleado en el Teorema 5.3.1 (ii), pero no es difícil ver que sigue siendo válido, pues coinciden en lo esencial, esto es, la aplicabilidad de la desigualdad de Korn y sus consecuencias.

Por tanto, el par $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ constituye una solución débil del problema P y, aún más, en las condiciones (9.2.1)–(9.2.5) y (9.2.7)–(9.2.10), es la única solución débil de P , de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$, $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,2}(0, T; Q)$.

Observación 9.2.2. *En el caso particular en que \mathbf{F} viene dado por (9.1.9) y se verifica (9.2.6), podemos obtener mayor regularidad para el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$. Basta considerar para cada $t \in [0, T]$, que tomando $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}(t) \pm \boldsymbol{\varphi}$ en (9.1.13), siendo $\boldsymbol{\varphi} \in [\mathcal{D}(\Omega)]^d$, y teniendo en cuenta (9.1.1), se deduce que $\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) = -\mathbf{f}_0(t)$ c.p.d. en Ω . Por lo tanto, $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,2}(0, T; Q_1)$.*

9.3. Un resultado de convergencia

Estudiamos ahora la dependencia de la solución de PV con respecto a las perturbaciones del operador \mathcal{B} . Asumimos que se verifican las hipótesis (9.2.1)–(9.2.5) y (9.2.7)–(9.2.10) y, para cada $\theta > 0$ sea \mathcal{B}_θ una perturbación de \mathcal{B} que satisfice

$$(9.3.1) \quad \mathcal{B}_\theta \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{L}^\infty(\Omega)),$$

$$(9.3.2) \quad (\mathcal{B}_\theta)_{ijkl}(t) = (\mathcal{B}_\theta)_{jikl}(t) = (\mathcal{B}_\theta)_{klij}(t) \quad \text{c.p.d. en } \Omega, \quad t \in [0, T].$$

Consideramos el siguiente problema variacional.

PROBLEMA PV_θ . *Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u}_\theta : [0, T] \rightarrow V$ tal que*

$$(9.3.3) \quad \begin{aligned} & (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\theta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_\theta(t)))_Q \\ & + \left(\int_0^t \mathcal{B}_\theta(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\theta(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_\theta(t)) \right)_Q \\ & + j(\mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}_\theta(t)) \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\theta(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

$$(9.3.4) \quad \mathbf{u}_\theta(0) = \mathbf{u}_0.$$

Es inmediato comprobar que el problema PV_θ representa la formulación variacional del problema P cuando se reemplaza la ley constitutiva (9.1.1) por

$$(9.3.5) \quad \boldsymbol{\sigma}_\theta(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\theta(t)) + \int_0^t \mathcal{B}_\theta(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\theta(s))ds \quad \text{en } \Omega,$$

para cada $t \in [0, T]$. Se deduce del Teorema 9.2.1 que para cada $\theta > 0$, el problema PV_θ tiene una única solución de regularidad $\mathbf{u}_\theta \in W^{1,2}(0, T; V)$.

Supongamos además que

$$(9.3.6) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \|\mathcal{B}_\theta - \mathcal{B}\|_{W^{1,2}(0, T; \mathbf{L}^\infty(\Omega))} = 0.$$

En estas condiciones, disponemos del siguiente resultado de convergencia.

Teorema 9.3.1. *Suponemos que se verifican las condiciones del Teorema 9.2.1 y también (9.3.1), (9.3.2) y (9.3.6). Entonces, la solución $\mathbf{u}_\theta \in W^{1,2}(0, T; V)$ del problema PV_θ converge a la solución $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$ del problema PV , en el sentido de que*

$$(9.3.7) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_\theta - \mathbf{u}\|_{C([0, T]; V)} = 0.$$

Demostración. Sea $B : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V)$ el operador previamente definido en (9.2.11) y, para cada $\theta > 0$, sea $B_\theta : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V)$ el operador dado por

$$(9.3.8) \quad (B_\theta(t)\mathbf{v}, \mathbf{w})_V = (\mathcal{B}_\theta(t)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_Q \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, t \in [0, T].$$

De (9.3.1) se deduce que $B_\theta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{L}(V))$ y de (9.3.6) tenemos

$$(9.3.9) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \|B_\theta - B\|_{W^{1,2}(0, T; \mathcal{L}(V))} = 0.$$

Por tanto, (9.3.7) se obtiene como consecuencia directa del Teorema 3.2.1. \square

Sea ahora $\boldsymbol{\sigma}_\theta \in W^{1,2}(0, T; Q)$ el campo de tensiones dado por (9.3.5). Tras algunos cálculos, se sigue de (9.3.6) y (9.3.7) que

$$(9.3.10) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \|\boldsymbol{\sigma}_\theta - \boldsymbol{\sigma}\|_{C([0, T]; Q)} = 0.$$

En añadidura al interés puramente matemático, los resultados de convergencia establecidos en (9.3.7) y (9.3.10) son importantes en las aplicaciones, pues muestran que pequeñas variaciones en el tensor de relajación \mathcal{B} conducen a pequeñas variaciones en desplazamientos y tensiones, lo que, en este sentido, constituye un resultado de estabilidad. Concluimos que la solución débil del problema mecánico P depende con continuidad del operador de relajación. Aún más, tomando $\mathcal{B} = \mathbf{0}$, el problema P resulta la formulación mecánica del mismo problema de contacto para un sólido elástico. En este caso, la condición (9.3.6) resulta

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \|\mathcal{B}_\theta\|_{W^{1,2}(0, T; \mathbf{L}^\infty(\Omega))} = 0,$$

y el Teorema 9.3.1 muestra que la solución débil del problema viscoelástico converge uniformemente a la solución del problema elástico cuando la memoria tiende a cero.

9.4. Aproximación numérica del problema

Nos ocupamos directamente del estudio de una aproximación totalmente discretizada de PV . Para ello, nos situamos en las hipótesis generales descritas en la Sección 4.2. En concreto, sea Q^h dado por (4.2.5) y sea V^h el siguiente subespacio del espacio definido en (4.2.3):

$$(9.4.1) \quad V^h = \{\mathbf{v}^h \in [X^h]^d : \mathbf{v}^h = \mathbf{0} \text{ en } \bar{\Gamma}_1, \\ \mathbf{v}^h(\mathbf{x}_{ij}^h) \cdot \boldsymbol{\nu}_j^h = 0, 1 \leq j \leq n_C^h, 1 \leq i \leq d\}.$$

Finalmente, sea

$$(9.4.2) \quad E^h = \{\mathbf{q}^h \in [L^2(\Gamma_3)]^{d-1}, \mathbf{q}_{|C_j^h}^h \in [P_1(C_j^h)]^{d-1}, 1 \leq j \leq n_C^h\}.$$

También nos situamos en las hipótesis generales de la Sección 1.5 relativas a la discretización de la variable temporal. En concreto suponemos que se verifica

$$(9.4.3) \quad k < \frac{2\alpha}{d^2 \|\mathcal{B}_0\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}}, \quad \alpha_n^n \leq \frac{k}{2},$$

donde $\alpha > 0$ es la constante de (9.2.3). Planteamos el siguiente esquema totalmente discretizado para abordar la aproximación numérica de la solución al problema variacional PV .

PROBLEMA PV^{hk} : Hallar $\mathbf{u}^{hk} = \{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$ tal que, para todo $\mathbf{v}^h \in V^h$,

$$(9.4.4) \quad \mathbf{u}_0^{hk} = \mathcal{P}_{V^h}^A(\mathbf{u}_0),$$

$$(9.4.5) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \delta_n \mathbf{u}_n^{hk}))_Q + \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j^n \mathcal{B}^{n,j} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \delta_n \mathbf{u}_n^{hk}) \right)_Q \\ + j(\mathbf{v}^h) - j(\delta_n \mathbf{u}_n^{hk}) \geq (\mathbf{F}_n, \mathbf{v}^h - \delta_n \mathbf{u}_n^{hk})_V, \quad n \geq 1,$$

donde $\mathbf{u}_0 \in V$ es dado.

El siguiente teorema muestra la existencia y unicidad de solución para el problema PV^{hk} .

Teorema 9.4.1. *En las hipótesis (9.2.1)–(9.2.5), (9.2.7)–(9.2.10) y (9.4.3), el problema PV^{hk} tiene una única solución $\mathbf{u}^{hk} \subset V^h$.*

Demostración. Utilizando la notación (9.2.11) se deduce que el problema PV^{hk} (9.4.4)–(9.4.5) es un caso particular del problema P_A^{hk} (3.4.1)–(3.4.2). Utilizando los mismos argumentos del Teorema 9.2.1 se prueba que se cumplen las condiciones del Teorema 3.4.1 y se concluye que existe una única sucesión $\mathbf{u}^{hk} \subset V^h$, solución de PV^{hk} . \square

El siguiente resultado estudia el comportamiento del error cometido al aproximar la solución de PV con la solución de PV^{hk} .

Teorema 9.4.2. *Suponemos las hipótesis de los teoremas 9.2.1 y 9.4.1. Suponemos también que la solución del problema PV tiene regularidad adicional $\mathbf{u} \in W^{2,\infty}(0, T; V)$ y que $\mathcal{B} \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbf{L}^\infty(\Omega))$. Además, suponemos que \mathcal{B} y $\dot{\mathcal{B}}$ son funciones de Lipschitz en $[0, T]$ y que la fórmula de integración numérica utilizada en el problema PV^{hk} es la de trapecios compuesta. Entonces, para k suficientemente pequeño y una partición uniforme de $[0, T]$, se verifica*

$$(9.4.6) \quad \begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 &\leq c(k^2 + \|(I - \mathcal{P}_{V^h}^A)\mathbf{u}_0\|_V^2 \\ &+ \max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \inf_{\mathbf{v}^h \in V^h} \left\{ \|\dot{\mathbf{u}}_n - \mathbf{v}^h\|_V^2 + R(t_n; \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}^h) \right\} \right\}, \end{aligned}$$

donde c es una constante positiva que depende de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbf{u}$ y T y

$$\begin{aligned} R(t_n; \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}^h) &= (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}_n) + \int_0^{t_n} \mathcal{B}(t_n - s)\varepsilon(\mathbf{u}(s))ds, \varepsilon(\mathbf{v}^h - \dot{\mathbf{u}}_n))_Q \\ &+ j(\mathbf{v}^h) - j(\dot{\mathbf{u}}_n) - (\mathbf{F}_n, \mathbf{v}^h - \dot{\mathbf{u}}_n)_V. \end{aligned}$$

Demostración. Nuevamente se procede como en la demostración del Teorema 9.2.1, en esta ocasión para probar que estamos en las condiciones de aplicar

el Corolario 3.4.4. □

Podemos definir $\boldsymbol{\sigma}^{hk} = \{\boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\}_{n=0}^N$ de manera análoga a los capítulos anteriores y obtener a partir de (9.4.6) la siguiente cota:

$$(9.4.7) \quad \begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N} \{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q \} &\leq c \left(k + \|(I - \mathcal{P}_{V^h}^A)\mathbf{u}_0\|_V \right. \\ &+ \max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \inf_{\mathbf{v}^h \in V^h} \{ \|\dot{\mathbf{u}}_n - \mathbf{v}^h\|_V + R(t_n; \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}^h)^{\frac{1}{2}} \} \right\} \\ &+ \max_{0 \leq n \leq N} \{ \|(I - \mathcal{P}_{Q^h})\boldsymbol{\sigma}_n\|_Q \}. \end{aligned}$$

Corolario 9.4.3. Sean $V^h \subset V$ y $Q^h \subset Q$ ($h \rightarrow 0$) las familias de subespacios de dimensión finita dados por (9.4.1) y (4.2.5), respectivamente. Sean $\mathbf{u} \in C([0, T]; V)$ la solución del problema continuo PV y $\{\mathbf{u}^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$ la solución del problema totalmente discretizado PV^{hk} y sean $\boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; Q)$ y $\{\boldsymbol{\sigma}^{hk}\}_{n=0}^N \subset Q^h$ los campos de tensiones correspondientes. Entonces, si

$$(9.4.8) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|(I - \mathcal{P}_{V^h}^A)\mathbf{u}_0\|_V = 0,$$

se tiene

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} \left\{ \max_{0 \leq n \leq N} \{ \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V \} \right\} = 0.$$

Demostración. El funcional j es de Lipschitz en V . En efecto, aplicando las propiedades de g , la continuidad de la aplicación traza y la equivalencia de normas entre $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_{H_1}$ se tiene

$$\begin{aligned} |j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{w})| &= \int_{\Gamma_3} g(|\mathbf{v}_\tau| - |\mathbf{w}_\tau|) da \\ &\leq \|g\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \int_{\Gamma_3} |\mathbf{v}_\tau - \mathbf{w}_\tau| da \leq c \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_V \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V. \end{aligned}$$

Por tanto es inmediato que

$$(9.4.9) \quad R(t_n; \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}^h) \leq c \|\mathbf{v}^h - \dot{\mathbf{u}}_n\|_V,$$

donde c depende de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbf{F}, g$ y \mathbf{u} . Usando esta cota en (9.4.7) y tomando

$$g(r) = k + \|(I - \mathcal{P}_{V^h}^{\mathcal{A}})\mathbf{u}_0\|_V + r^{\frac{1}{2}} + r$$

se cumple la condición (4.2.15). Además, por (9.4.8) y dado que k tiende a cero, g verifica (1.4.4). Por otra parte, tomando $\mathcal{U} = [C^\infty(\bar{\Omega})]^d$ (o incluso $\mathcal{U} = [H^2(\Omega)]^d$) y $\mathcal{Q} = [H^1(\Omega)]_s^{d \times d}$ y teniendo en cuenta las estimaciones (4.2.6) y (4.2.8) se verifican las condiciones (4.2.12) y (4.2.13) con $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Por tanto, estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1.6.1 para $X = X_0 = V$, $Y = Q$, $X^h = X_0^h = V^h$, $Y^h = Q^h$, $\mathcal{Y} = [H^1(\Omega)]_s^{d \times d}$ y $\mathcal{U} = [C^\infty(\bar{\Omega})]^d$ y concluimos el resultado deseado. \square

Corolario 9.4.4. *Suponemos las condiciones del Teorema 9.4.2 y que se verifica la regularidad adicional*

$$(9.4.10) \quad \dot{\mathbf{u}} \in C([0, T]; [H^2(\Omega)]^d),$$

$$(9.4.11) \quad \mathbf{u}_0 \in [H^2(\Omega)]^d,$$

$$(9.4.12) \quad \boldsymbol{\sigma} \in C([0, T]; [H^1(\Omega)]^{d \times d}).$$

Entonces se tiene la siguiente estimación del error en la aproximación:

$$\max_{1 \leq n \leq N} \{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q \} \leq c(k + h^{\frac{1}{2}}),$$

donde c es una constante positiva que depende de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, g$ y T .

Demostración. Se deduce sin dificultad aplicando en (9.4.7) la cota (9.4.9), y las estimaciones (4.2.6) y (4.2.8). \square

Corolario 9.4.5. *Suponemos las condiciones del Teorema 9.4.2 y que se verifica la regularidad adicional (9.4.10)–(9.4.12) y*

$$(9.4.13) \quad \dot{\mathbf{u}}_\tau \in C([0, T]; [H^2(\Gamma_3)]^d).$$

Entonces se tiene la siguiente estimación del error en la aproximación:

$$\max_{1 \leq n \leq N} \{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{hk}\|_Q \} \leq c(k + h),$$

donde c es una constante positiva que depende de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, g$ y T .

Demostración. De (9.1.2) y (9.1.4) obtenemos que

$$(\mathbf{F}_n, \mathbf{v}^h - \dot{\mathbf{u}}_n)_V = (-\text{Div } \boldsymbol{\sigma}_n, \mathbf{v}^h - \dot{\mathbf{u}}_n)_H + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma}_n \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v}^h - \dot{\mathbf{u}}_n) da.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} R(t_n; \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}^h) &= (\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \dot{\mathbf{u}}_n))_Q + j(\mathbf{v}^h) - j(\dot{\mathbf{u}}_n) - (\mathbf{F}_n, \mathbf{v}^h - \dot{\mathbf{u}}_n)_V \\ &= \int_{\Gamma_3} (\boldsymbol{\sigma}_n)_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau^h - (\dot{\mathbf{u}}_n)_\tau) da + j(\mathbf{v}^h) - j(\dot{\mathbf{u}}_n) \\ &\leq \int_{\Gamma_3} (|(\boldsymbol{\sigma}_n)_\tau| + g) |\mathbf{v}_\tau^h - (\dot{\mathbf{u}}_n)_\tau| da \leq c \|\mathbf{v}_\tau^h - (\dot{\mathbf{u}}_n)_\tau\|_{[L^2(\Gamma_3)]^d}. \end{aligned}$$

Por las hipótesis en (9.4.10)–(9.4.13) podemos aplicar las estimaciones (4.2.6), (4.2.8) y (4.2.11) para obtener de (9.4.7) el resultado deseado. \square

Resolución efectiva del problema discretizado

Con vistas a obtener un algoritmo numérico que nos permita realizar simulaciones, vamos a seguir el camino que se deduce de la demostración del Teorema 3.4.1. La principal dificultad la encontramos en la resolución efectiva de la inecuación variacional de segunda especie que se deriva de (3.4.5).

Tomamos $n, 1 \leq n \leq N$ y suponemos el problema resuelto para los pasos temporales anteriores. Por tanto, el problema se escribe en la forma

$$\begin{aligned} (9.4.14) \quad & (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta_n \mathbf{u}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \Delta_n \mathbf{u}_n^{hk}))_Q + (\alpha_n^n \mathcal{B}_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \Delta_n \mathbf{u}_n^{hk}))_Q \\ & + j(\mathbf{v}^h) - j(\Delta_n \mathbf{u}_n^{hk}) \geq \langle \tilde{\mathbf{f}}_n, \mathbf{v}^h - \Delta_n \mathbf{u}_n^{hk} \rangle_{V'V}, \end{aligned}$$

donde

$$\langle \tilde{\mathbf{f}}_n, \mathbf{v} \rangle_{V'V} = (\mathbf{F}_n, \mathbf{v})_V - (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}) + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j^n \mathcal{B}^{n,j} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_j^{hk}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Siguiendo las ideas de la demostración del Teorema 3.4.1, se introduce el problema auxiliar siguiente, donde $\boldsymbol{\eta} \in Q$ es un elemento arbitrario (véase (3.4.6)):

PROBLEMA $PV_{n,\boldsymbol{\eta}}^{hk}$: Hallar $\boldsymbol{\varphi}_n^\boldsymbol{\eta} \in V^h$ tal que

$$(9.4.15) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}_n^\boldsymbol{\eta}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \boldsymbol{\varphi}_n^\boldsymbol{\eta}))_Q + j(\mathbf{v}^h) - j(\boldsymbol{\varphi}_n^\boldsymbol{\eta}) \\ \geq \langle \tilde{\mathbf{f}}_n, \mathbf{v}^h - \boldsymbol{\varphi}_n^\boldsymbol{\eta} \rangle_{V'V} - (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h - \boldsymbol{\varphi}_n^\boldsymbol{\eta}))_Q, \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h.$$

El problema $PV_{n,\boldsymbol{\eta}}^{hk}$ es una inecuación variacional de segunda especie, pues entra en el esquema

$$(9.4.16) \quad \mathbf{u}^h \in V^h, \quad (A\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h)_V + j(\mathbf{v}^h) - j(\mathbf{u}^h) \\ \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h)_V \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h,$$

donde j está dada por (9.1.10) y $A : V \rightarrow V$ y $\mathbf{f} \in V$ están definidos por

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \\ (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V = \langle \tilde{\mathbf{f}}_n, \mathbf{v} \rangle_{V'V} - (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Se demuestra fácilmente que A es un operador simétrico y elíptico. Del Teorema 1.2.1 se obtiene que el problema $PV_{n,\boldsymbol{\eta}}^{hk}$ tiene una única solución $\boldsymbol{\varphi}_n^\boldsymbol{\eta} \in V^h$.

La inecuación variacional (9.4.16) puede expresarse de forma equivalente como la siguiente inclusión subdiferencial (nótese que la subdiferencial de $j : V \rightarrow \mathbb{R}$ existe por ser j un funcional convexo, s.c.i. y propio):

$$(9.4.17) \quad A\mathbf{u}^h + \partial j(\mathbf{u}^h) \ni \mathbf{f}.$$

Por otra parte, dado que $\boldsymbol{\nu}$ está definido c.p.d. en Γ , también se definen c.p.d. en Γ los vectores $\{\boldsymbol{\tau}_1, \dots, \boldsymbol{\tau}_{d-1}\}$, de tal forma que para casi todo $\mathbf{x} \in \Gamma$, el conjunto $\{\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}_1(\mathbf{x}), \dots, \boldsymbol{\tau}_{d-1}(\mathbf{x})\}$ constituye una base ortonormal de \mathbb{R}^d . Por tanto, dado $\mathbf{v} \in H_1$, su traza $\mathbf{v} \in H_\Gamma$ verifica

$$\mathbf{v} = v_\nu \boldsymbol{\nu} + \mathbf{v}_\tau = v_\nu \boldsymbol{\nu} + \sum_{i=1}^{d-1} v_{\tau_i} \boldsymbol{\tau}_i, \quad v_{\tau_i} = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_i, \quad 1 \leq i \leq d-1.$$

Nótese que entonces,

$$\mathbf{v}_\tau = \sum_{i=1}^{d-1} v_{\tau_i} \boldsymbol{\tau}_i, \quad |\mathbf{v}_\tau|^2 = \sum_{i=1}^{d-1} v_{\tau_i}^2 \quad \text{c.p.d. en } \Gamma.$$

Sea $B^* : V \rightarrow [L^2(\Gamma_3)]^{d-1}$ el operador lineal continuo definido por

$$B^* \mathbf{v} = (v_{\tau_1}|_{\Gamma_3}, \dots, v_{\tau_{d-1}}|_{\Gamma_3}) \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Para facilitar la notación, en lo que sigue denotamos

$$(9.4.18) \quad \tilde{\mathbf{v}}_\tau = B^* \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Nótese que $|\mathbf{v}_\tau|_{\mathbb{R}^d} = |\tilde{\mathbf{v}}_\tau|_{\mathbb{R}^{d-1}}$ c.p.d. en Γ_3 . Sea además $B : [L^2(\Gamma_3)]^{d-1} \rightarrow V'$ el operador lineal dual de B^* , i.e.:

$$(9.4.19) \quad \begin{aligned} \langle B\mathbf{q}, \mathbf{v} \rangle_{V'V} &= (\mathbf{q}, B^* \mathbf{v})_{[L^2(\Gamma_3)]^{d-1}} \\ &= \int_{\Gamma_3} \mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\tau \, da \quad \forall \mathbf{q} \in [L^2(\Gamma_3)]^{d-1}, \mathbf{v} \in V. \end{aligned}$$

Por otra parte, consideramos el funcional $\tilde{j} : [L^2(\Gamma_3)]^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\tilde{j}(\mathbf{q}) = \int_{\Gamma_3} g|\mathbf{q}| \, da \quad \forall \mathbf{q} \in [L^2(\Gamma_3)]^{d-1},$$

de donde se deduce que $j = \tilde{j} \circ B^*$. Dado que \tilde{j} es una seminorma en $[L^2(\Gamma_3)]^{d-1}$, se tiene que $\text{Int}(\text{Dom} \tilde{j}) \neq \emptyset$, condición suficiente para concluir (ver, por ejemplo [26, 89]) que

$$(9.4.20) \quad \partial j(\mathbf{v}) = \partial(\tilde{j} \circ B^*)(\mathbf{v}) = B(\partial \tilde{j}(B^* \mathbf{v})) \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Tenemos el siguiente resultado.

Lema 9.4.6. Dado $\mathbf{q} \in [L^2(\Gamma_3)]^{d-1}$, se tiene que

$$(9.4.21) \quad \partial \tilde{j}(\mathbf{q}) = \mathcal{W}(\mathbf{q}),$$

siendo

$$(9.4.22) \quad \mathcal{W}(\mathbf{q}) = \left\{ \boldsymbol{\mu} \in [L^2(\Gamma_3)]^{d-1} : |\boldsymbol{\mu}| \leq g \text{ c.p.d. en } \Gamma_3^b(\mathbf{q}), \right. \\ \left. \boldsymbol{\mu} = g \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} \text{ c.p.d. en } \Gamma_3^a(\mathbf{q}) \right\},$$

y

$$\Gamma_3^a(\mathbf{q}) = \{\mathbf{x} \in \Gamma_3 : \mathbf{q}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}\}, \quad \Gamma_3^b(\mathbf{q}) = \Gamma_3 \setminus \Gamma_3^a(\mathbf{q}).$$

Demostración. En efecto, sea $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{W}(\mathbf{q})$. Entonces, para todo $\mathbf{p} \in [L^2(\Gamma_3)]^{d-1}$ se tiene

$$\begin{aligned} & \tilde{j}(\mathbf{q}) + (\boldsymbol{\mu}, \mathbf{p} - \mathbf{q})_{[L^2(\Gamma_3)]^{d-1}} \\ &= \int_{\Gamma_3^a(\mathbf{q})} g|\mathbf{q}| \, da + \int_{\Gamma_3^a(\mathbf{q})} \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{p} \, da + \int_{\Gamma_3^b(\mathbf{q})} \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{p} \, da - \int_{\Gamma_3^a(\mathbf{q})} \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{q} \, da \\ &= \int_{\Gamma_3^a(\mathbf{q})} g \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{q}|} \, da + \int_{\Gamma_3^b(\mathbf{q})} \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{p} \, da \\ &\leq \int_{\Gamma_3^a(\mathbf{q})} g|\mathbf{p}| \, da + \int_{\Gamma_3^b(\mathbf{q})} g|\mathbf{p}| \, da = \tilde{j}(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Por tanto, $\boldsymbol{\mu} \in \partial \tilde{j}(\mathbf{q})$.

Recíprocamente, sea $\boldsymbol{\mu} \in \partial \tilde{j}(\mathbf{q})$. Entonces, para todo $\mathbf{p} \in [L^2(\Gamma_3)]^{d-1}$ se tiene que

$$\tilde{j}(\mathbf{p}) \geq \tilde{j}(\mathbf{q}) + (\boldsymbol{\mu}, \mathbf{p} - \mathbf{q})_{[L^2(\Gamma_3)]^{d-1}}.$$

Por tanto,

$$(9.4.23) \quad \int_{\Gamma_3} (g|\mathbf{p}| - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{p}) \, da \geq \int_{\Gamma_3^a(\mathbf{q})} (g|\mathbf{q}| - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{q}) \, da.$$

Supongamos primeramente que existe un conjunto $A \subset \Gamma_3^b(\mathbf{q})$ de medida no nula donde $|\boldsymbol{\mu}| > g$ y tomamos

$$\mathbf{p} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{en } \Gamma_3^b(\mathbf{q}) \setminus A, \\ \boldsymbol{\mu} & \text{en } A, \\ \mathbf{q} & \text{en } \Gamma_3^a(\mathbf{q}). \end{cases}$$

Nótese que con esta definición $\mathbf{p} \in [L^2(\Gamma_3)]^{d-1}$. A partir de (9.4.23) tenemos que

$$\int_{\Gamma_3^a(\mathbf{q})} (g|\mathbf{q}| - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{q}) \, da + \int_A (g|\boldsymbol{\mu}| - |\boldsymbol{\mu}|^2) \, da \geq \int_{\Gamma_3^a(\mathbf{q})} (g|\mathbf{q}| - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{q}) \, da,$$

y en consecuencia $\int_A (g|\boldsymbol{\mu}| - |\boldsymbol{\mu}|^2) \, da \geq 0$. Pero esto contradice nuestra hipótesis de que $|\boldsymbol{\mu}| > g$ en A . Por tanto, $|\boldsymbol{\mu}| \leq g$ c.p.d. en $\Gamma_3^b(\mathbf{q})$.

Supongamos ahora que existe un conjunto $A \subset \Gamma_3^a(\mathbf{q})$ de medida no nula donde $\boldsymbol{\mu} \neq g \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$. Por tanto, a partir de (9.4.23) se tiene

$$(9.4.24) \quad \int_{\Gamma_3} (g|\mathbf{p}| - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{p}) \, da \geq \int_A (g|\mathbf{q}| - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{q}) \, da, \quad \forall \mathbf{p} \in [L^2(\Gamma_3)]^{d-1}.$$

Tomando sucesivamente en (9.4.24) $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ y

$$\mathbf{p} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{en } \Gamma_3 \setminus A, \\ 2\mathbf{q} & \text{en } A, \end{cases}$$

se tiene que

$$(9.4.25) \quad \int_A (g|\mathbf{q}| - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{q}) \, da = 0.$$

Sustituyendo esta igualdad en (9.4.24), se tiene que

$$\int_{\Gamma_3} (g|\mathbf{p}| - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{p}) \, da \geq 0 \quad \forall \mathbf{p} \in [L^2(\Gamma_3)]^{d-1}.$$

Tomando $\mathbf{p} = \boldsymbol{\mu}$ concluimos que

$$(9.4.26) \quad |\boldsymbol{\mu}| \leq g \text{ c.p.d. en } \Gamma_3.$$

Finalmente, usando (9.4.26) en (9.4.25) concluimos que necesariamente $\boldsymbol{\mu} = g \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$ en A , lo que es una contradicción con la definición de A . Por tanto $\boldsymbol{\mu} = g \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$ c.p.d. en $\Gamma_3^a(\mathbf{q})$. Concluimos entonces que $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{W}(\mathbf{q})$. \square

Aplicamos el lema anterior para probar el siguiente resultado.

Corolario 9.4.7. *Dado $\mathbf{u} \in V$ arbitrario, se tiene*

$$(9.4.27) \quad \partial j(\mathbf{u}) = B\partial\tilde{j}(\tilde{\mathbf{u}}_\tau) = B(\mathcal{W}(\tilde{\mathbf{u}}_\tau)).$$

Demostración. Basta utilizar (9.4.18), (9.4.20) y (9.4.21). \square

En lo que sigue, nos restringimos al caso más sencillo en que $d = 2$ y Γ_3 es un segmento de recta en \mathbb{R}^2 . Por tanto, $\boldsymbol{\tau}$ es constante en Γ_3 y dado $\mathbf{v} \in V$ arbitrario, existe $\lambda_v \in L^2(\Gamma_3)$ tal que $\mathbf{v}_\tau|_{\Gamma_3} = \lambda_v \boldsymbol{\tau}$ y, en consecuencia, $B^*\mathbf{v} = \lambda_v$. Sea $q \in L^2(\Gamma_3)$ arbitrario. Con un cierto abuso de notación en el que no explicitamos la dependencia de $\mathbf{x} \in \Gamma_3$, se tiene

$$\partial\tilde{j}(q) = \begin{cases} g & \text{si } q > 0, \\ [-g, g] & \text{si } q = 0, \\ -g & \text{si } q < 0. \end{cases}$$

Dado $\mu > 0$, denotamos por $J_\mu = (I + \mu\partial\tilde{j})^{-1}$ la resolvente de $\partial\tilde{j}$ (consultar, por ejemplo [10, 89]). Por tanto,

$$J_\mu(q) = \begin{cases} q - \mu g & \text{si } q > \mu g, \\ 0 & \text{si } -\mu g \leq q \leq \mu g, \\ q + \mu g & \text{si } q < -\mu g. \end{cases}$$

La aproximación Yosida de $\partial\tilde{j}$ es el operador

$$(\partial\tilde{j})_\mu = \frac{1}{\mu}(I - J_\mu).$$

Por tanto,

$$(9.4.28) \quad (\partial \tilde{j})_\mu(q) = \begin{cases} g & \text{si } q > \mu g, \\ \frac{1}{\mu}q & \text{si } -\mu g \leq q \leq \mu g, \\ -g & \text{si } q < -\mu g. \end{cases}$$

Nótese que con esta notación se tiene

$$\partial j(\mathbf{u}) = B\partial \tilde{j}(\lambda_u),$$

siendo $\lambda_u \in L^2(\Gamma_3)$ tal que $\mathbf{u}_\tau = \lambda_u \boldsymbol{\tau}$.

Utilizando (9.4.17) y (9.4.20), tenemos que el problema (9.4.16) entra en la categoría:

$$(P_h) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}^h &\in V^h, \\ \mathbf{f} &\in A\mathbf{u}^h + BHB^*\mathbf{u}^h, \end{aligned}$$

donde $H : E^h \rightarrow \mathcal{P}(E^h)$ es un operador maximal monótono, siendo E^h el espacio definido en (9.4.2) y $\mathcal{P}(E^h)$ el conjunto de las partes de E^h . Además, $B \in \mathcal{L}(E^h, V^{h'})$, $A \in \mathcal{L}(V^h, V^{h'})$ y $\mathbf{f} \in V^{h'}$. El algoritmo siguiente para la resolución de (P_h) se describe siguiendo [8, 91].

Sean $\omega > 0$ y $\rho \in [0, 1)$. Sea $H_{\frac{1}{\omega}}$ la aproximación Yosida del operador H con parámetro $\frac{1}{\omega}$. Puesto que A es V^h -elíptico, la sucesión $(\mathbf{u}^{h,r})_{r \geq 0}$ construida como se indica a continuación converge en V^h a \mathbf{u}^h solución de (P^h) :

Se parte de $q^{h,0} \in E^h$ arbitrario y se calculan las sucesiones $(q^{h,r})_{r \geq 0}$ y $(\mathbf{u}^{h,r})_{r \geq 0}$ en la forma siguiente para $r = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} A\mathbf{u}^{h,r} + \omega BB^*\mathbf{u}^{h,r} &= \mathbf{f} - Bq^{h,r}, \\ q^{h,r+\frac{1}{2}} &= 2H_{\frac{1}{\omega}}(2B^*\mathbf{u}^{h,r} + \frac{1}{\omega}q^{h,r}) - 2\omega B^*\mathbf{u}^{h,r} - q^{h,r}, \\ q^{h,r+1} &= \rho q^{h,r+\frac{1}{2}} + (1 - \rho)q^{h,r}. \end{aligned}$$

En nuestro caso, $H = \partial \tilde{j}$, por lo que, teniendo en cuenta (9.4.16), (9.4.19) y

(9.4.28) el algoritmo anterior se traduce en las siguientes operaciones:

$$(A\mathbf{u}^{h,r}, \mathbf{v}^h)_V + \omega \int_{\Gamma_3} \lambda_u^{h,r} \lambda_v^h da = (\mathbf{f}, \mathbf{v}^h)_V - \int_{\Gamma_3} q^{h,r} \lambda_v^h da \quad \forall \mathbf{v}^h \in V^h,$$

$$q^{h,r+\frac{1}{2}} = \begin{cases} 2g - 2\omega\lambda_u^{h,r} - q^{h,r} & \text{si } 2\lambda_u^{h,r} + \frac{1}{\omega}q^{h,r} > \frac{1}{\omega}g, \\ 2\omega\lambda_u^{h,r} + q^{h,r} & \text{si } -\frac{1}{\omega}g \leq 2\lambda_u^{h,r} + \frac{1}{\omega}q^{h,r} \leq \frac{1}{\omega}g, \\ -2g - 2\omega\lambda_u^{h,r} - q^{h,r} & \text{si } 2\lambda_u^{h,r} + \frac{1}{\omega}q^{h,r} < -\frac{1}{\omega}g, \end{cases}$$

$$q^{h,r+1} = \rho q^{h,r+\frac{1}{2}} + (1 - \rho)q^{h,r},$$

donde $\mathbf{u}_\tau^{h,r} = \lambda_u^{h,r} \boldsymbol{\tau}$ y $\mathbf{v}_\tau^h = \lambda_v^h \boldsymbol{\tau}$ en Γ_3 .

9.5. Resultados numéricos

En esta sección mostramos los resultados de simulaciones numéricas realizadas con el algoritmo desarrollado en la sección anterior. Se pretende aproximar la solución débil del problema P (9.1.1)–(9.1.6), según el esquema totalmente discretizado PV^{hk} (9.4.4)–(9.4.5). Como ya hemos comentado, sólo presentamos resultados de simulaciones bidimensionales.

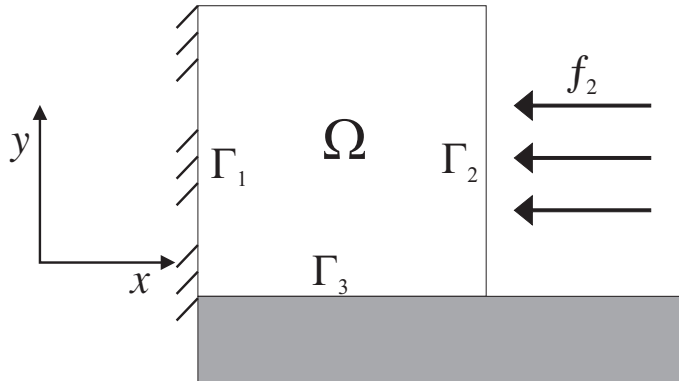


Figura 9.5.1: Problema de contacto bidimensional con rozamiento.

En concreto, se considera un cuerpo sólido tridimensional deformable de sección $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ y de espesor $\varepsilon \ll 1$. Suponemos que las condiciones de carga nos permiten utilizar las hipótesis de tensiones planas en el dominio Ω . Así, tomamos \mathcal{A} igual al tensor de elasticidad lineal plana, que viene dado por (6.5.7). El cuerpo está sujeto por un mecanismo que garantiza su fijación, de tal forma que en $\Gamma_1 = \{0\} \times (0, 1)$ los desplazamientos son nulos. Además, está parcialmente sujeto por otro mecanismo, de tal forma que en $\Gamma_3 = (0, 1) \times \{0\}$ sólo se producen deslizamientos tangenciales al ser nulos los desplazamientos en la dirección de la normal. Dicho deslizamiento tangencial está en función del rozamiento que se produzca, para el que se conoce experimentalmente el umbral g . En ausencia de fuerzas volúmicas, existe en campo de fuerzas superficiales constante en la dirección del eje OX actuando en $\Gamma_2 = \{1\} \times (0, 1)$. El periodo de observación es $[0, T]$. Esta situación física se puede observar en la Figura 9.5.1.

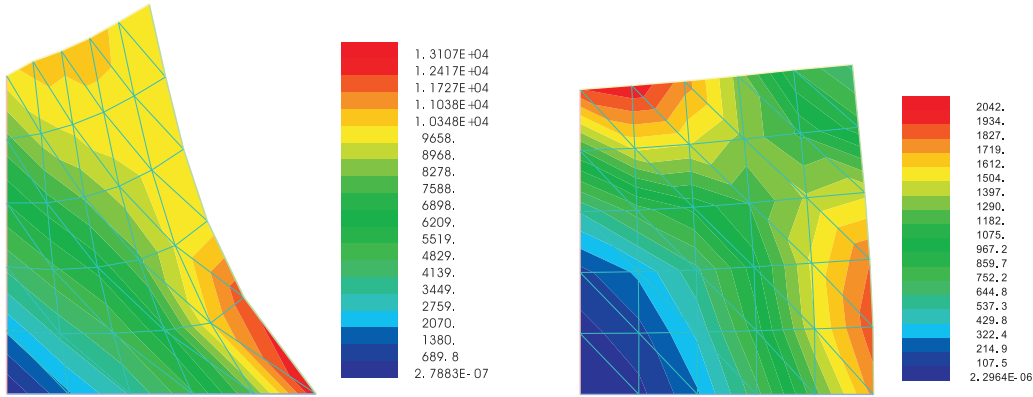


Figura 9.5.2: Configuración deformada y distribución de tensiones en norma Von Mises para $t = 1 \times 10^{-2}$ (izquierda) y $t = 0.1$ (derecha). Umbral $g = 1 \times 10^6$. Memoria constante $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Factor de deformación: 50X.

En las figuras 9.5.2–9.5.4 mostramos algunos resultados numéricos obtenidos de tres simulaciones realizadas con el software desarrollado. En los tres casos se presentan las tensiones en norma Von Mises sobre la configuración deformada

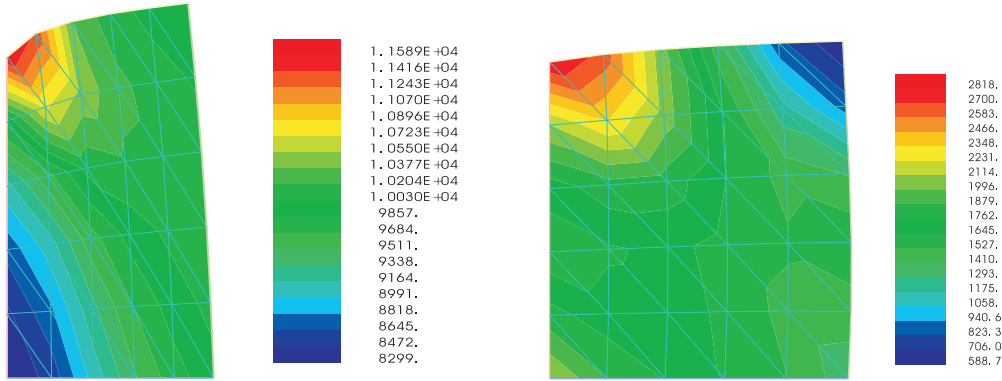


Figura 9.5.3: Configuración deformada y distribución de tensiones en norma Von Mises para $t = 1 \times 10^{-2}$ (izquierda) y $t = 0.1$ (derecha). Umbral $g = 1$. Memoria constante $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Factor de deformación: 50X.

del cuerpo en dos instantes: $t = 1 \times 10^{-2}$ *seg.* y $t = 0.1$ *seg.* Los siguientes datos son comunes a las tres experiencias numéricas:

$$E = 10^6 \text{ N/m}^2, \quad \kappa = 0.3, \quad T = 0.1 \text{ seg.}, \quad k = 1 \times 10^{-3} \text{ seg.},$$

$$\mathbf{f}_0 = (0, 0) \text{ N/m}^3, \quad \mathbf{f}_2 = (-10^3, 0) \text{ N/m}^2, \quad \mathbf{u}_0 = (0, 0) \text{ m}.$$

En las simulaciones a las que corresponden la Figura 9.5.2 y la Figura 9.5.3, hemos considerado $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, entendiéndose que sus componentes expresan ahora cantidades medidas en $\text{N}/(\text{m}^2 \text{seg.})$. En el primer caso se ha tomado un valor alto para el umbral de rozamiento ($g = 1 \times 10^6 \text{ N/m}^2$) y en el segundo caso un valor más bajo ($g = 1 \text{ N/m}^2$).

Cualitativamente, observamos en la Figura 9.5.2- izquierda, que en el instante $t = 1 \times 10^{-2}$ *seg.* los nodos situados en la zona de contacto, o próximos a ella, se desplazan mucho menos que los más alejados, como consecuencia del efecto del rozamiento. Esto también explica que las tensiones son mucho mayores en esa zona. Sin embargo, en la Figura 9.5.3- izquierda observamos que los nodos de la zona de contacto se desplazan cualitativamente sin notables diferencias con respecto a los más alejados, lo que se explica por ser el umbral de rozamiento

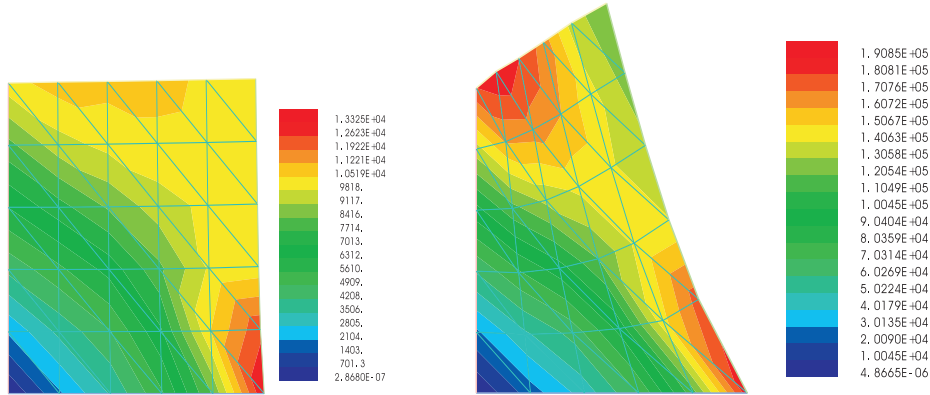


Figura 9.5.4: Configuración deformada y distribución de tensiones en norma Von Mises para $t = 1 \times 10^{-2}$ (izquierda) y $t = 0.1$ (derecha). Umbral $g = 1 \times 10^6$. Memoria constante $\mathcal{B}_{ijkl} = 1 \times 10^{-4}$. Factor de deformación: 3X.

g mucho menor. Por otra parte, tanto en la Figura 9.5.2- derecha como en la Figura 9.5.3- derecha observamos que para el instante $t = T = 0.1 \text{ seg.}$ el sólido ha recuperado parte de su configuración original por efecto de la memoria. Nótese que los efectos de la deformación están amplificados un 5000 % para que sean apreciables.

En la simulación a la que corresponde la Figura 9.5.4, se ha tomado un tensor de memoria comparativamente pequeño, con $\mathcal{B}_{ijkl} = 1 \times 10^{-4} \text{ N}/(m^2 \text{ seg.})$ para $1 \leq i, j, k, l \leq 2$, y se ha tomado un umbral de rozamiento igual al de la primera simulación. Podemos observar que en este caso, no se recupera la configuración original en el instante final, sino que el cuerpo ha seguido deformándose. Nótese que los efectos de la deformación ya son apreciables con una amplificación del 300 %.

Finalmente, en la Figura 9.5.5 se presentan los desplazamientos horizontales que experimentan dos de los nodos más significativos, (los que ocupan originalmente las esquinas superior e inferior derecha del sólido) a lo largo del tiempo de observación. Nótese que en la gráfica de la izquierda ha sido necesario mul-

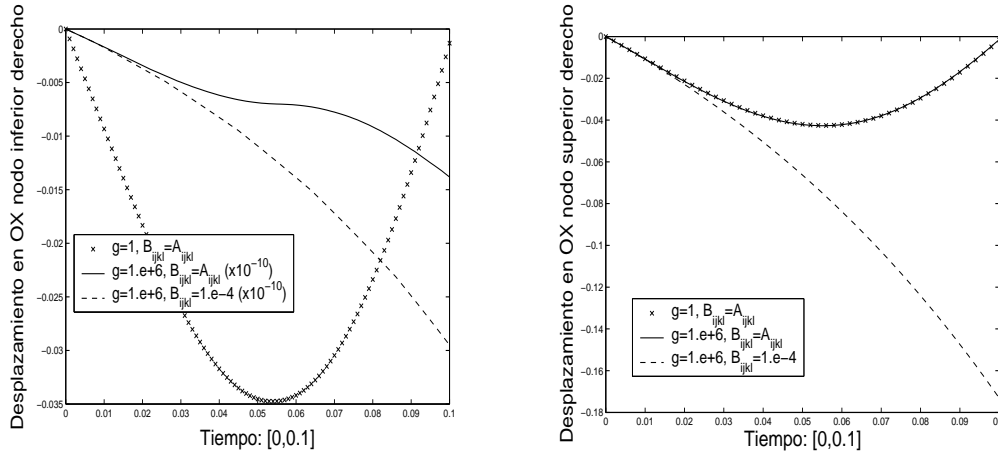


Figura 9.5.5: Desplazamientos a lo largo del tiempo en el eje OX de los nodos en las posiciones (1, 0) y (1, 1).

triplicar por 10^{10} los desplazamientos de las simulaciones con $g = 1 \times 10^6$ para poder visualizarlos, pues en la práctica, el nodo inferior derecho no se desplaza.

9.6. Formulación en tensiones

Hasta ahora hemos estudiado la existencia, unicidad y aproximación numérica de las soluciones a formulaciones débiles del problema de contacto P (9.1.1)–(9.1.6) para materiales que responden a la ley de comportamiento (5.3.6). No obstante, como se ha visto en la Sección 5.3, existe una formulación alternativa si consideramos en su lugar la expresión (5.3.8). Por tanto, el nuevo problema de contacto P se formula como sigue.

PROBLEMA P : Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ y el

campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}_d$ tales que, para todo $t \in [0, T]$,

$$(9.6.1) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) = \mathcal{E}\boldsymbol{\sigma}(t) + \int_0^t \mathcal{C}(t-s)\boldsymbol{\sigma}(s)ds, \quad \text{en } \Omega,$$

$$(9.6.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega,$$

$$(9.6.3) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_1,$$

$$(9.6.4) \quad \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \quad \text{en } \Gamma_2,$$

$$(9.6.5) \quad \begin{cases} u_\nu(t) = 0, \quad |\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)| \leq g, \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)| < g \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) = 0, \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)| = g \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = -\lambda \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) \end{cases} \quad \text{en } \Gamma_3,$$

$$(9.6.6) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{en } \Omega.$$

Repetimos los mismos argumentos que en la Sección 9.1 para concluir que si \mathbf{u} y $\boldsymbol{\sigma}$ son dos funciones regulares que satisfacen (9.6.2)–(9.6.5) entonces $\mathbf{u}(t) \in V$, $\boldsymbol{\sigma}(t) \in Q_1$, y

$$(9.6.7) \quad \begin{aligned} & (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_Q + j(\mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}(t)) \\ & \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned}$$

Tomando ahora $\mathbf{v} = 2\dot{\mathbf{u}}(t)$ y $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ en (9.6.7), ambos en V , tenemos que

$$(9.6.8) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_Q + j(\dot{\mathbf{u}}(t)) = (\mathbf{F}(t), \dot{\mathbf{u}}(t))_V.$$

Además para todo $t \in [0, T]$, definimos el conjunto de *campos de tensiones admisibles* por

$$(9.6.9) \quad \Sigma(t) = \{ \boldsymbol{\tau} \in Q \mid (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q + j(\mathbf{v}) \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V \}.$$

Sumamos (9.6.7) y (9.6.8) y usamos (9.6.9) para probar que $\boldsymbol{\sigma}(t) \in \Sigma(t)$. Aún más, de (9.6.9) y (9.6.8) obtenemos la siguiente desigualdad variacional:

$$(9.6.10) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) \in \Sigma(t), \quad (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_Q \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(t).$$

Sea \mathcal{E}^{-1} la inversa del tensor \mathcal{E}^1 , y definimos

$$(9.6.11) \quad \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathcal{E}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0).$$

Entonces, usando (9.6.1), es fácil comprobar que la condición inicial (9.6.6) es equivalente a

$$(9.6.12) \quad \boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}_0.$$

La desigualdad (9.6.7) combinada con (9.6.1) y (9.6.6) por una parte, y la desigualdad (9.6.10) combinada con (9.6.1) y (9.6.12) por otra parte, nos llevan a considerar los dos siguientes problemas variacionales.

PROBLEMA PVC1: Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ y el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \rightarrow Q_1$ tales que

$$(9.6.13) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) = \mathcal{E}\boldsymbol{\sigma}(t) + \int_0^t \mathcal{C}(t-s)\boldsymbol{\sigma}(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(9.6.14) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_Q + j(\mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}(t)) \\ \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad \text{p.c.t. } t \in (0, T),$$

$$(9.6.15) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

PROBLEMA PVC2: Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ y el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \rightarrow Q_1$ tales que

$$(9.6.16) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) = \mathcal{E}\boldsymbol{\sigma}(t) + \int_0^t \mathcal{C}(t-s)\boldsymbol{\sigma}(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(9.6.17) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) \in \Sigma(t), \quad (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_Q \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(t), \\ \text{p.c.t. } t \in (0, T),$$

$$(9.6.18) \quad \boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}_0.$$

¹La existencia de \mathcal{E}^{-1} está garantizada por la hipótesis (9.6.21), que impondremos posteriormente.

Destacamos que los problemas $PVC1$ y $PVC2$ son formalmente equivalentes al problema mecánico P (9.6.1)–(9.6.6). En efecto, si $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$ representa una solución regular de uno de los problemas variacionales $PVC1$ o $PVC2$, usando argumentos estándar (ver, por ejemplo en [25]), se sigue que $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$ satisface (9.6.1)–(9.6.6). Por tanto, podemos considerar los problemas $PVC1$ y $PVC2$ como *formulaciones variacionales* del problema mecánico (9.6.1)–(9.6.6).

Existencia y unicidad de solución

Los resultados que siguen conciernen a la existencia y unicidad de solución para los problemas $PVC1$ y $PVC2$, demostrándose también la equivalencia entre los mismos. Primeramente listamos las hipótesis que requieren, los enunciamos a continuación y los demostramos posteriormente.

Suponemos que los tensores de elasticidad y *creep* verifican que

$$(9.6.19) \quad \mathcal{E} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega),$$

$$(9.6.20) \quad \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{klij}, \text{ c.p.d. en } \Omega,$$

$$(9.6.21) \quad \mathcal{E}_{ijkl} \xi_{kl} \xi_{ij} \geq \alpha \xi_{ij} \xi_{ij}, \text{ c.p.d. en } \Omega,$$

$$(9.6.22) \quad \mathcal{C}_{ijkl}(t) = \mathcal{C}_{jikl}(t) = \mathcal{C}_{klij}(t), \text{ c.p.d. en } \Omega,$$

$$(9.6.23) \quad \mathcal{C} \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{L}^\infty(\Omega)),$$

donde $\alpha > 0$, $t \in [0, T]$ y $\boldsymbol{\xi} = (\xi_{ij})$ es un elemento arbitrario de \mathbb{S}_d . También suponemos que las fuerzas externas verifican (9.2.6) y que el umbral de rozamiento verifica (9.2.7). Finalmente, el desplazamiento inicial verifica (9.2.9) y las tensiones iniciales son tales que

$$(9.6.24) \quad \boldsymbol{\sigma}_0 \in \Sigma(0).$$

Recordamos que las condiciones (9.2.6) implican (9.2.8).

Teorema 9.6.1. *Suponemos (9.2.6)–(9.2.7), (9.2.9) y (9.6.19)–(9.6.24). En-*

tonces existe una única solución $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$ del problema *PVC1*. Aún más, la solución verifica

$$(9.6.25) \quad \mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V), \quad \boldsymbol{\sigma} \in W^{1,2}(0, T; Q_1).$$

Teorema 9.6.2. *Suponemos (9.2.6)–(9.2.7), (9.2.9) y (9.6.19)–(9.6.24). Sea $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$ un par de funciones que verifican (9.6.25). Entonces $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$ es una solución del problema variacional *PVC1* si y sólo si $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$ es una solución del problema variacional *PVC2*.*

Teorema 9.6.3. *Supongamos (9.2.6)–(9.2.7), (9.2.9) y (9.6.19)–(9.6.24). Entonces existe una única solución $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$ del problema *PVC2*. Además, la solución verifica (9.6.25).*

Los teoremas 9.6.1 y 9.6.3 establecen la existencia y unicidad de solución de los problemas variacionales *PVC1* y *PVC2*, mientras que el Teorema 9.6.2 expresa la equivalencia de dichos problemas. Podemos concluir que el problema mecánico *P* (9.6.1)–(9.6.6) tiene una única *solución débil* que es solución tanto de *PVC1* como de *PVC2*.

Destacamos que existe un acoplamiento fuerte entre la ecuación integral (9.6.13) y la desigualdad variacional evolutiva (9.6.14), por lo que el problema *PVC1* tiene una cierta dificultad matemática. Por lo contrario, el acoplamiento entre la ecuación integral (9.6.16) y la desigualdad (9.6.17) es más débil ya que, usando (9.6.16), podemos eliminar el campo de desplazamientos y obtener así una formulación variacional del problema únicamente en función de las tensiones. Por este motivo, comenzamos con la prueba del Teorema 9.6.3. Posteriormente, dado que el Teorema 9.6.1 es una consecuencia de los teoremas 9.6.2 y 9.6.3, sólo necesitamos probar el Teorema 9.6.2.

Para probar el Teorema 9.6.3 suponemos en lo que sigue que las hipótesis (9.2.6)–(9.2.7), (9.2.9) y (9.6.19)–(9.6.24) se verifican. En primer lugar, observamos que la desigualdad variacional evolutiva (9.6.17) está definida sobre el convexo $\Sigma(t)$, que es dependiente del instante temporal $t \in [0, T]$. Esto es una dificultad en el estudio del problema, que resolvemos con un cambio de variable que nos permite convertir (9.6.17) en una desigualdad variacional evolutiva ligada a un conjunto convexo fijo en el tiempo. Sea, por tanto, $\sigma_f : [0, T] \rightarrow Q$ la función dada por

$$(9.6.26) \quad \sigma_f(t) = \varepsilon(\mathbf{F}(t)) \quad \forall t \in [0, T].$$

Entonces, usando la regularidad (9.2.8) de \mathbf{F} obtenemos $\sigma_f \in W^{1,2}(0, T; Q)$. Además, dado que

$$(9.6.27) \quad (\sigma_f(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_Q = (\mathbf{F}(t), \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T],$$

se tiene de (9.1.9) que

$$\operatorname{Div} \sigma_f(t) + \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{0} \quad \forall t \in [0, T],$$

y, usando (9.2.6), tenemos que $\operatorname{Div} \sigma_f \in W^{1,2}(0, T; H)$. Concluimos que

$$(9.6.28) \quad \sigma_f \in W^{1,2}(0, T; Q_1).$$

Es fácil comprobar que

$$(9.6.29) \quad \Sigma(t) = \Sigma_0 + \{\sigma_f(t)\} \quad \forall t \in [0, T],$$

donde Σ_0 denota el conjunto convexo fijo en el tiempo, dado por

$$(9.6.30) \quad \Sigma_0 = \{ \boldsymbol{\tau} \in Q \mid (\boldsymbol{\tau}, \varepsilon(\mathbf{v}))_Q + j(\mathbf{v}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V \}.$$

Introducimos la notación

$$(9.6.31) \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_f,$$

$$(9.6.32) \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0 - \sigma_f(0),$$

y consideramos el siguiente problema variacional.

PROBLEMA *PVC2'* Hallar $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ y $\bar{\boldsymbol{\sigma}} : [0, T] \rightarrow Q_1$ tales que

$$(9.6.33) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) &= \mathcal{E}\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \mathcal{E}\boldsymbol{\sigma}_f(t) + \int_0^t \mathcal{C}(t-s)\bar{\boldsymbol{\sigma}}(s) ds \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{C}(t-s)\boldsymbol{\sigma}_f(s) ds \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

$$(9.6.34) \quad \begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \in \Sigma_0, \quad (\boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_Q \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_0, \\ \text{p.c.t. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

$$(9.6.35) \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}(0) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0.$$

Observación 9.6.4. *Nótese que la inecuación variacional evolutiva de tipo Volterra que se deriva del problema *PVC2'* al sustituir (9.6.33) en (9.6.34) es de un tipo diferente a los estudiados en los capítulos 2 y 3 y requiere un tratamiento diferenciado. En efecto, al derivar (9.6.33) se tiene*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) &= \mathcal{C}(0)(\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \boldsymbol{\sigma}_f(t)) + \int_0^t \dot{\mathcal{C}}(t-s)(\bar{\boldsymbol{\sigma}}(s) + \boldsymbol{\sigma}_f(s)) ds \\ &\quad + \mathcal{E}(\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}(t) + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_f(t)) \quad \text{p.c.t. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

Observamos que Σ_0 es un conjunto cerrado en Q , y, por la definición (9.6.32) y la hipótesis (9.6.24) sobre $\boldsymbol{\sigma}_0$, tenemos $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 \in \Sigma_0$, lo que prueba que Σ_0 es no vacío. Concluimos que $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 \in D(\psi_{\Sigma_0})$, donde ψ_{Σ_0} denota la función indicatriz del conjunto $\Sigma_0 \subset Q$. Por tanto, el problema *PVC2'* puede ser formulado equivalentemente como la siguiente inecuación variacional evolutiva:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(0) &= \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0, \quad (\mathcal{C}(0)\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t), \boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t))_Q + (\mathcal{E}\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}(t), \boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t))_Q \\ &\quad + \left(\int_0^t \dot{\mathcal{C}}(t-s)\bar{\boldsymbol{\sigma}}(s) ds, \boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \right)_Q + \psi_{\Sigma_0}(\boldsymbol{\tau}) - \psi_{\Sigma_0}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)) \\ &\geq -(\mathcal{E}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_f(t) + \mathcal{C}(0)\boldsymbol{\sigma}_f(t) + \int_0^t \dot{\mathcal{C}}(t-s)\boldsymbol{\sigma}_f(s) ds, \boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t))_Q \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in Q, \end{aligned}$$

para casi todo $t \in (0, T)$. Esta situación se puede generalizar como

$$u(0) = u_0 \in X, \quad (A\dot{u}(t) + B(0)u(t), v - u(t))_X + \left(\int_0^t \dot{B}(t-s)u(s)ds, v - u(t) \right)_X \\ + j(v) - j(u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_X \quad \forall v \in X, \text{ p.c.t. } t \in (0, T),$$

con las propiedades de los operadores $A : X \rightarrow X$ y $B : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(X)$ necesarias. Si bien este nuevo tipo de inecuaciones variacionales evolutivas de tipo Volterra es susceptible de un estudio similar al realizado en los capítulos 2 y 3, en este manuscrito hemos optado por centrarnos únicamente en su aplicación al problema de contacto bilateral con rozamiento de Tresca en su formulación de tipo creep.

Usamos (9.6.28), (9.6.29), (9.6.31) y (9.6.32) para obtener el resultado siguiente.

Teorema 9.6.5. *El par $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$ es una solución del problema PVC2 con regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$, $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,2}(0, T; Q_1)$ si y sólo si el par $\{\mathbf{u}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}\}$ es una solución del problema PVC2' con regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$, $\bar{\boldsymbol{\sigma}} \in W^{1,2}(0, T; Q_1)$.*

Retornamos pues al problema PVC2' para demostrar la existencia y unicidad de solución. Para ello, introducimos el conjunto

$$(9.6.36) \quad \mathcal{W} = \{\boldsymbol{\eta} \in W^{1,2}(0, T; Q) \mid \boldsymbol{\eta}(0) = \mathbf{0}\}.$$

Sea $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{W}$ y consideramos el siguiente problema auxiliar.

PROBLEMA *PVC2*ⁿ: Hallar $\mathbf{u}_\eta : [0, T] \rightarrow V$ y $\boldsymbol{\sigma}_\eta : [0, T] \rightarrow Q_1$ tales que

$$(9.6.37) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta(t)) = \mathcal{E}\boldsymbol{\sigma}_\eta(t) + \mathcal{E}\boldsymbol{\sigma}_f(t) + \boldsymbol{\eta}(t) \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(9.6.38) \quad \boldsymbol{\sigma}_\eta(t) \in \Sigma_0, \quad (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}_\eta(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t)))_Q \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_0, \\ \text{p.c.t. } t \in (0, T),$$

$$(9.6.39) \quad \boldsymbol{\sigma}_\eta(0) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0.$$

La existencia y unicidad de solución para *PVC2*ⁿ está basada en el siguiente resultado abstracto.

Teorema 9.6.6. *Sea $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espacio de Hilbert real y sea $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ un funcional convexo, semicontinuo inferiormente y propio. Entonces, para cada $f \in L^2(0, T; X)$ y $u_0 \in D(\varphi)$, existe una única solución $u \in W^{1,2}(0, T; X)$ del problema*

$$(9.6.40) \quad u(t) \in D(\partial\varphi) \quad \text{p.c.t. } t \in (0, T),$$

$$(9.6.41) \quad \dot{u}(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t) \quad \text{p.c.t. } t \in (0, T),$$

$$(9.6.42) \quad u(0) = u_0.$$

El teorema 9.6.6 es una versión simplificada de un resultado más general que puede consultarse en [7, p. 189] o en [11, p. 72]. Recordamos que $D(\varphi)$ y $D(\partial\varphi)$ denotan, respectivamente, el dominio efectivo de φ y el dominio del operador subdiferencial $\partial\varphi$, esto es

$$D(\varphi) = \{v \in X : \varphi(v) < +\infty\},$$

$$D(\partial\varphi) = \{v \in X : \exists f \in X : \varphi(w) - \varphi(v) \geq (f, w - v)_X \quad \forall w \in X\}.$$

Usaremos el Teorema 9.6.6 para obtener el resultado siguiente.

Teorema 9.6.7. *El problema PVC2ⁿ tiene una solución única $\{\mathbf{u}_\eta, \boldsymbol{\sigma}_\eta\}$ de regularidad*

$$(9.6.43) \quad \mathbf{u}_\eta \in W^{1,2}(0, T; V), \quad \boldsymbol{\sigma}_\eta \in W^{1,2}(0, T; Q_1).$$

Demostración. Aplicando el Teorema 9.6.6 con $X = Q$, $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_X = (\mathcal{E}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_Q$, $\varphi = \psi_{\Sigma_0}$, $f = -(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_f + \mathcal{E}^{-1}\dot{\boldsymbol{\eta}})$ obtenemos la existencia y unicidad de una función $\boldsymbol{\sigma}_\eta \in W^{1,2}(0, T; Q)$ tal que

$$(9.6.44) \quad \boldsymbol{\sigma}_\eta(t) \in \Sigma_0 \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(9.6.45) \quad (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_\eta(t), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}_\eta(t))_X + (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_f(t) + \mathcal{E}^{-1}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}_\eta(t))_X \geq 0 \\ \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_0, \text{ p.c.t. } t \in (0, T),$$

$$(9.6.46) \quad \boldsymbol{\sigma}_\eta(0) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0.$$

Nótese también que (9.6.44) implica que $\text{Div } \boldsymbol{\sigma}_\eta(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \in [0, T]$, lo que muestra que $\boldsymbol{\sigma}_\eta \in W^{1,2}(0, T; Q_1)$. Además, de (9.6.45) obtenemos

$$(9.6.47) \quad (\mathcal{E}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_\eta(t), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}_\eta(t))_Q + (\mathcal{E}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_f(t) + \dot{\boldsymbol{\eta}}(t), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}_\eta(t))_Q \geq 0 \\ \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_0, \text{ p.c.t. } t \in (0, T),$$

lo que implica

$$(9.6.48) \quad (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}_\eta(t), \boldsymbol{\varepsilon}_\eta(t))_Q \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_0, \text{ p.c.t. } t \in (0, T),$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}_\eta \in L^2(0, T; Q)$ es la función dada por

$$(9.6.49) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_\eta(t) = \mathcal{E}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_\eta(t) + \mathcal{E}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_f(t) + \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \quad \text{p.c.t. } t \in (0, T).$$

Consideramos el espacio

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{z} \in Q : \text{Div } \mathbf{z} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega, \mathbf{z}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \}.$$

Para cada $\mathbf{z} \in \mathcal{V}$, usando (9.6.44) obtenemos $\boldsymbol{\sigma}_\eta(t) \pm \mathbf{z} \in \Sigma_0, \forall t \in [0, T]$. Tomando $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}_\eta(t) \pm \mathbf{z}$ en (9.6.48), obtenemos $(\mathbf{z}, \boldsymbol{\varepsilon}_\eta)_Q = 0 \forall \mathbf{z} \in \mathcal{V}$, c.p.d.

en $(0, T)$. Dado que el complementario ortogonal en Q de \mathcal{V} es el espacio $\boldsymbol{\varepsilon}(U)$ (ver por ejemplo en [38, Teorema 7.5]) donde

$$U = \{\boldsymbol{v} \in H_1 \mid \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_1\},$$

existe $\boldsymbol{v}_\eta \in L^2(0, T; U)$ tal que

$$(9.6.50) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_\eta(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_\eta(t)) \quad \text{c.p.d. en } t \in (0, T).$$

Probaremos ahora que, en particular, $\boldsymbol{v}_\eta \in V$ c.p.d. en $(0, T)$. En efecto, combinando (9.6.48) y (9.6.50) se tiene

$$(9.6.51) \quad (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}_\eta, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_\eta))_Q \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_0, \quad \text{c.p.d. en } (0, T).$$

Sea $t \in [0, T]$ tal que

$$(9.6.52) \quad (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}_\eta(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_\eta(t)))_Q \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_0.$$

Dado que V es un subespacio cerrado de U , si $\boldsymbol{v}_\eta(t) \notin V$ entonces existe $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in Q$ tal que

$$(9.6.53) \quad (\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in V,$$

$$(9.6.54) \quad (\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_\eta(t)))_Q < 0.$$

De (9.6.53) se sigue que $\lambda \tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \Sigma_0$ para todo $\lambda \geq 0$ y por tanto, usando (9.6.52) obtenemos

$$(9.6.55) \quad \lambda (\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_\eta(t)))_Q \geq (\boldsymbol{\sigma}_\eta(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_\eta(t)))_Q \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Usando ahora (9.6.54) y pasando al límite $\lambda \rightarrow +\infty$ en (9.6.55) llegamos a una contradicción. Por tanto, el elemento $\boldsymbol{v}_\eta \in L^2(0, T; U)$ es tal que $\boldsymbol{v}_\eta \in V$ c.p.d. en $(0, T)$, i.e. $\boldsymbol{v}_\eta \in L^2(0, T; V)$. Definimos ahora

$$(9.6.56) \quad \boldsymbol{u}_\eta(t) = \int_0^t \boldsymbol{v}_\eta(s) ds + \boldsymbol{u}_0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Dado que $\mathbf{u}_0 \in V$, tenemos $\mathbf{u}_\eta \in W^{1,2}(0, T; V)$, y recordamos que $\boldsymbol{\sigma}_\eta \in W^{1,2}(0, T; Q_1)$. De (9.6.46) tomamos la condición inicial (9.6.39) y, por otra parte, de (9.6.44), (9.6.51) y (9.6.56) deducimos que la desigualdad (9.6.38) se verifica también. Ahora usamos (9.6.49), (9.6.50) y (9.6.56) para obtener

$$\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\eta) = \mathcal{E}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_\eta + \mathcal{E}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_f + \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad \text{c.p.d. en } (0, T).$$

Integrando esta igualdad, usando las condiciones iniciales $\mathbf{u}_\eta(0) = \mathbf{u}_0$, $\boldsymbol{\sigma}_\eta(0) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0$, $\boldsymbol{\eta}(0) = \mathbf{0}$ y la notación (9.6.32) y (9.6.11) obtenemos que se verifica (9.6.37). En resumen, hemos probado que el par $\{\mathbf{u}_\eta, \boldsymbol{\sigma}_\eta\}$ tiene regularidad (9.6.43) y es una solución del problema $PVC2^n$.

La unicidad se obtiene de la unicidad de la solución del problema evolutivo no lineal (9.6.44)–(9.6.46), que está garantizada por el Teorema 9.6.6. \square

Para el paso siguiente definimos el operador $\Lambda : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ como sigue:

$$(9.6.57) \quad \Lambda\boldsymbol{\eta}(t) = \int_0^t \mathcal{C}(t-s)(\boldsymbol{\sigma}_\eta(s) + \boldsymbol{\sigma}_f(s)) ds \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{W}, t \in [0, T].$$

Teniendo en cuenta la hipótesis (9.6.23) es fácil comprobar que si $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{W}$ entonces $\Lambda\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{W}$, esto es, el operador Λ está bien definido. Además, tenemos

$$(9.6.58) \quad \begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\Lambda\boldsymbol{\eta}\right)(t) &= \mathcal{C}(0)(\boldsymbol{\sigma}_\eta(t) + \boldsymbol{\sigma}_f(t)) + \int_0^t \dot{\mathcal{C}}(t-s)\boldsymbol{\sigma}_\eta(s) ds \\ &+ \int_0^t \dot{\mathcal{C}}(t-s)\boldsymbol{\sigma}_f(s) ds \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{W}, \quad \text{p.c.t. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 9.6.8. *El operador Λ tiene un único punto fijo $\boldsymbol{\eta}^* \in \mathcal{W}$.*

Demostración. Sean $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in \mathcal{W}$. Usando (9.6.57) y (9.6.23) se sigue que

$$(9.6.59) \quad \|\Lambda\boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda\boldsymbol{\eta}_2(t)\|_Q^2 \leq c \int_0^t \|\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}_1}(s) - \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}_2}(s)\|_Q^2 ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Por otra parte, de (9.6.58) deducimos que

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{d}{dt} \Lambda \boldsymbol{\eta}_1 \right) (t) - \left(\frac{d}{dt} \Lambda \boldsymbol{\eta}_2 \right) (t) \right\|_Q &\leq c \|\mathcal{C}(0)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \|\boldsymbol{\sigma}_{\eta_1}(t) - \boldsymbol{\sigma}_{\eta_2}(t)\|_Q \\ &+ c \int_0^t \|\dot{\mathcal{C}}(t-s)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \|\boldsymbol{\sigma}_{\eta_1}(s) - \boldsymbol{\sigma}_{\eta_2}(s)\|_Q ds \\ &\leq c \left(\|\boldsymbol{\sigma}_{\eta_1}(t) - \boldsymbol{\sigma}_{\eta_2}(t)\|_Q^2 + \int_0^t \|\boldsymbol{\sigma}_{\eta_1}(s) - \boldsymbol{\sigma}_{\eta_2}(s)\|_Q^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

para casi todo $t \in (0, T)$, lo que prueba que

$$(9.6.60) \quad \begin{aligned} &\left\| \left(\frac{d}{dt} \Lambda \boldsymbol{\eta}_1 \right) (t) - \left(\frac{d}{dt} \Lambda \boldsymbol{\eta}_2 \right) (t) \right\|_Q^2 \\ &\leq c \left(\|\boldsymbol{\sigma}_{\eta_1}(t) - \boldsymbol{\sigma}_{\eta_2}(t)\|_Q^2 + \int_0^t \|\boldsymbol{\sigma}_{\eta_1}(s) - \boldsymbol{\sigma}_{\eta_2}(s)\|_Q^2 ds \right). \end{aligned}$$

Por otra parte, a partir de (9.6.47) obtenemos

$$(\mathcal{E} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\eta_1} - \mathcal{E} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\eta_2}, \boldsymbol{\sigma}_{\eta_1} - \boldsymbol{\sigma}_{\eta_2})_Q \leq (\dot{\boldsymbol{\eta}}_2 - \dot{\boldsymbol{\eta}}_1, \boldsymbol{\sigma}_{\eta_1} - \boldsymbol{\sigma}_{\eta_2})_Q,$$

c.p.d. en $(0, T)$. Sea $t \in [0, T]$. Integrando la desigualdad anterior de 0 a t y usando (9.6.21) y (9.6.46) tenemos que

$$\begin{aligned} c \|\boldsymbol{\sigma}_{\eta_1}(t) - \boldsymbol{\sigma}_{\eta_2}(t)\|_Q^2 &\leq \int_0^t (\dot{\boldsymbol{\eta}}_2(s) - \dot{\boldsymbol{\eta}}_1(s), \boldsymbol{\sigma}_{\eta_1}(s) - \boldsymbol{\sigma}_{\eta_2}(s))_Q ds \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^t (\|\dot{\boldsymbol{\eta}}_1(s) - \dot{\boldsymbol{\eta}}_2(s)\|_Q^2 + \|\boldsymbol{\sigma}_{\eta_1}(s) - \boldsymbol{\sigma}_{\eta_2}(s)\|_Q^2) ds \end{aligned}$$

y, usando el lema de Gronwall,

$$(9.6.61) \quad \|\boldsymbol{\sigma}_{\eta_1}(t) - \boldsymbol{\sigma}_{\eta_2}(t)\|_Q^2 \leq c \int_0^t \|\dot{\boldsymbol{\eta}}_1(s) - \dot{\boldsymbol{\eta}}_2(s)\|_Q^2 ds.$$

Combinamos (9.6.59)–(9.6.61) junto con la desigualdad

$$\int_0^t \left(\int_0^s \|\dot{\boldsymbol{\eta}}_1(r) - \dot{\boldsymbol{\eta}}_2(r)\|_Q^2 dr \right) ds \leq c \int_0^t \|\dot{\boldsymbol{\eta}}_1(s) - \dot{\boldsymbol{\eta}}_2(s)\|_Q^2 ds$$

para obtener

$$\begin{aligned} \|\Lambda \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2(t)\|_Q^2 &+ \left\| \left(\frac{d}{dt} \Lambda \boldsymbol{\eta}_1 \right) (t) - \left(\frac{d}{dt} \Lambda \boldsymbol{\eta}_2 \right) (t) \right\|_Q^2 \\ &\leq c \int_0^t \|\dot{\boldsymbol{\eta}}_1(s) - \dot{\boldsymbol{\eta}}_2(s)\|_Q^2 ds. \end{aligned}$$

Reiterando la desigualdad anterior p veces, deducimos que

$$\begin{aligned} & \|\Lambda^p \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda^p \boldsymbol{\eta}_2(t)\|_Q^2 + \left\| \left(\frac{d}{dt} \Lambda^p \boldsymbol{\eta}_1 \right)(t) - \left(\frac{d}{dt} \Lambda^p \boldsymbol{\eta}_2 \right)(t) \right\|_Q^2 \\ & \leq c^p \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{p-1}} \|\dot{\boldsymbol{\eta}}_1(s_p) - \dot{\boldsymbol{\eta}}_2(s_p)\|_Q^2 ds_p \cdots ds_1, \end{aligned}$$

donde Λ^p denota la potencia p -ésima del operador Λ . La última desigualdad implica que

$$\|\Lambda^p \boldsymbol{\eta}_1 - \Lambda^p \boldsymbol{\eta}_2\|_{W^{1,2}(0,T;Q)}^2 \leq \frac{c^p T^p}{p!} \|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2\|_{W^{1,2}(0,T;Q)}^2,$$

lo que prueba que para p suficientemente grande, una potencia Λ^p de Λ es una contracción en \mathcal{W} . Aplicando el Corolario 1.3.5, concluimos que existe un único elemento $\boldsymbol{\eta}^* \in \mathcal{W}$ tal que $\Lambda \boldsymbol{\eta}^* = \boldsymbol{\eta}^*$. \square

Ya estamos en condiciones de demostrar el Teorema 9.6.3.

Demostración del Teorema 9.6.3.

Existencia. Sea $\boldsymbol{\eta}^* \in \mathcal{W}$ el punto fijo de Λ y sea $\{\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}^*}, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}^*}\}$ la solución del problema $PVC2^n$ para $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$. Probaremos que el par de funciones $\{\mathbf{u}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}\}$, donde $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}^*}$ y $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}^*}$ es una solución del problema $PVC2'$. Es inmediato que la condición inicial (9.6.35) es una consecuencia de (9.6.39) y la desigualdad (9.6.38) implica (9.6.34). Por otra parte, de (9.6.37) obtenemos

$$(9.6.62) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}^*}(t)) = \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}^*}(t) + \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}_f(t) + \boldsymbol{\eta}^*(t) \quad \forall t \in [0, T],$$

y, dado que $\Lambda \boldsymbol{\eta}^* = \boldsymbol{\eta}^*$, se sigue de (9.6.62) y (9.6.57) que (9.6.33) se verifica. Recordamos además que el Teorema 9.6.7 garantiza la regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$ y $\bar{\boldsymbol{\sigma}} \in W^{1,2}(0, T; Q_1)$. La existencia de solución para $PVC2$ es ahora una consecuencia del Teorema 9.6.5.

Unicidad. La unicidad de solución de $PVC2$ es una consecuencia de la unicidad del punto fijo del operador Λ definido en (9.6.57). Alternativamente, puede

ser demostrada directamente a partir de (9.6.16)–(9.6.18), usando (9.6.19)–(9.6.23) y el lema de Gronwall. \square

Demostración del Teorema 9.6.2.

Sean $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$ un par de funciones que satisfacen (9.6.25). Teniendo en cuenta la equivalencia entre las condiciones iniciales (9.6.15) y (9.6.18), sólo nos resta probar la equivalencia entre las desigualdades (9.6.14) y (9.6.17). Supongamos que $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$ satisface (9.6.14). Tomando $\mathbf{v} = 2\dot{\mathbf{u}}(t)$ y $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ en (9.6.14) obtenemos

$$(9.6.63) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_Q + j(\dot{\mathbf{u}}(t)) = (\mathbf{F}(t), \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \text{p.c.t. } t \in (0, T).$$

Se sigue de (9.6.14) y (9.6.63) que

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q + j(\mathbf{v}) \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad \text{p.c.t. } t \in (0, T),$$

y, teniendo en cuenta la regularidad de $\boldsymbol{\sigma}$ y \mathbf{F} , se sigue que la anterior desigualdad se verifica para todo $t \in [0, T]$. La desigualdad (9.6.17) se obtiene, por tanto, de la definición (9.6.9) de $\Sigma(t)$ y de (9.6.63).

Recíprocamente, supongamos que $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$ satisface (9.6.17). La subdiferenciabilidad de j en V garantiza la existencia de una función $\tilde{\boldsymbol{\tau}} : [0, T] \rightarrow Q$ tal que

$$(9.6.64) \quad \begin{aligned} & (\tilde{\boldsymbol{\tau}}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)))_Q + j(\mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}(t)) \\ & \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \text{ p.c.t. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

Tomando $\mathbf{v} = 2\dot{\mathbf{u}}(t)$ y $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ en la anterior desigualdad, obtenemos que

$$(9.6.65) \quad (\tilde{\boldsymbol{\tau}}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_Q + j(\dot{\mathbf{u}}(t)) = (\mathbf{F}(t), \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \text{p.c.t. } t \in (0, T).$$

Usando (9.6.64) y (9.6.65) deducimos que $\tilde{\boldsymbol{\tau}}(t) \in \Sigma(t)$ para casi todo $t \in (0, T)$.

Por tanto, de (9.6.17) concluimos que

$$(9.6.66) \quad (\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}))_Q \geq (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}))_Q \quad \text{c.p.d. en } (0, T),$$

y usando (9.6.65) se sigue que

$$(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{u}})_V \geq (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}))_Q + j(\dot{\mathbf{u}}) \quad \text{c.p.d. en } (0, T).$$

Además, de (9.6.9) se obtiene que

$$(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{u}})_V \leq (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}))_Q + j(\dot{\mathbf{u}}) \quad \text{c.p.d. en } (0, T).$$

Las dos últimas desigualdades implican que

$$(9.6.67) \quad (\mathbf{F}, \dot{\mathbf{u}})_V = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}))_Q + j(\dot{\mathbf{u}}) \quad \text{c.p.d. on } (0, T).$$

La inecuación (9.6.14) es, finalmente, consecuencia de la definición (9.6.9) de $\Sigma(t)$ y (9.6.67), dado que $\boldsymbol{\sigma}(t) \in \Sigma(t) \forall t \in [0, T]$ por (9.6.17). \square

Capítulo 10

Algunos problemas de contacto con rozamiento

En este capítulo se continúa el estudio de los problemas de contacto con rozamiento en viscoelasticidad con memoria larga. En esencia, aplicamos los resultados obtenidos para el problema abstracto P_A del Capítulo 3 al estudio de diversos problemas de contacto con rozamiento para materiales viscoelásticos de memoria larga. Comenzamos con el estudio del problema de contacto bilateral con rozamiento viscoelástico y a continuación se hace lo propio con otros problemas de contacto con rozamiento. En ninguno de ellos se realiza el análisis numérico. Dado que como problemas de contorno sólo se diferencian en la condición de contacto, las respectivas formulaciones mecánica y variacional seguirán denominándose P y PV , si bien en cada sección hacen referencia a problemas diferentes. En la Sección 10.6 presentamos un ejemplo que merece un comentario aparte, pues es un caso sin rozamiento. Sin embargo, la formulación variacional es también una inecuación integro-diferencial de tipo Volterra, por lo que aplicamos el mismo procedimiento en su estudio.

10.1. Contacto bilateral con rozamiento viscoelástico

Planteamiento mecánico del problema de contacto. Nos situamos en las condiciones generales descritas en el Capítulo 5 para las situaciones de contacto bilateral entre un sólido deformable viscoelástico de memoria larga y un obstáculo no penetrable. En este caso suponemos que la superficie de contacto cuenta con una capa fina de lubricante, por lo que incluso para tensiones $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ relativamente pequeñas existe deslizamiento tangencial. En estas condiciones, podemos modelizar el problema mecánico de contacto en la forma del siguiente problema matemático de contorno.

PROBLEMA *P*: Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ y el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}_d$ tales que, para todo $t \in [0, T]$ se verifican

$$(10.1.1) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds \quad \text{en } \Omega,$$

$$(10.1.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega,$$

$$(10.1.3) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_1,$$

$$(10.1.4) \quad \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \quad \text{en } \Gamma_2,$$

$$(10.1.5) \quad u_\nu = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\mu|\dot{\mathbf{u}}_\tau|^{p-1}\dot{\mathbf{u}}_\tau, \quad 0 < p \leq 1 \quad \text{en } \Gamma_3.$$

$$(10.1.6) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{en } \Omega.$$

Comentamos simplemente las condiciones expresadas en (10.1.5), pues las demás son ya conocidas de capítulos anteriores. La primera expresión en (10.1.5) representa la condición de contacto bilateral, que impide desplazamientos en la dirección de la normal $\boldsymbol{\nu}$ en la zona de contacto, por lo que este se mantiene durante todo el tiempo de observación. La segunda expresión en (10.1.5) consti-

tuye una ley de rozamiento viscoelástica de la forma (5.4.14)–(5.4.15). Recordamos que $\mu : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función positiva que representa el coeficiente de rozamiento.

Obtención de una formulación variacional. Nos situamos en el marco funcional general establecido en la Sección 4.1 con la salvedad del espacio V que, al igual que en la Sección 9.1, viene dado por

$$(10.1.7) \quad V = \{\mathbf{v} = (v_i) \in H_1 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_1, v_\nu = 0 \text{ en } \Gamma_3\}.$$

Utilizando la desigualdad de Korn probamos que con el producto interior definido por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

el espacio V es de Hilbert y la norma inducida es topológicamente equivalente a la de H_1 . Con ayuda del teorema de representación de Riesz, definimos $\mathbf{F}(t)$ como en (9.1.9), esto es,

$$(10.1.8) \quad (\mathbf{F}(t), \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T].$$

Sea además $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ la función definida por

$$(10.1.9) \quad j(\mathbf{v}) = \frac{1}{p+1} \int_{\Gamma_3} \mu |\mathbf{v}_\tau|^{p+1} da \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Supondremos que

$$(10.1.10) \quad \mu \in L^\infty(\Gamma_3), \mu \geq 0 \text{ c.p.d. en } \Gamma_3,$$

por lo que j está bien definida. Sea $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ una solución suficientemente regular del problema P . Dado $t \in [0, T]$, aplicamos la fórmula de Green (4.1.3) para $\mathbf{v} = \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)$ y, teniendo en cuenta (10.1.8) y (10.1.2)–(10.1.4), se obtiene

$$(10.1.11) \quad \begin{aligned} & (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)))_Q \\ &= (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V + (\boldsymbol{\sigma}_\tau, \mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t))_{[L^2(\Gamma_3)]^d} \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned}$$

Ahora bien, por argumentos de convexidad y (10.1.5), deducimos que

$$(10.1.12) \quad (\boldsymbol{\sigma}_\tau, \mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t))_{[L^2(\Gamma_3)]^d} = (-\mu|\dot{\mathbf{u}}_\tau|^{p-1}\dot{\mathbf{u}}_\tau, \mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t))_{[L^2(\Gamma_3)]^d} \\ \geq j(\dot{\mathbf{u}}(t)) - j(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Aplicando (10.1.12) en (10.1.11) tenemos

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)))_Q + j(\mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

En consecuencia, sustituyendo (10.1.1) en la desigualdad anterior, obtenemos la siguiente formulación variacional del problema P .

PROBLEMA PV : Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ tal que se verifican

$$(10.1.13) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_Q + j(\mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}(t)) \\ + \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) \right)_Q \\ \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T],$$

$$(10.1.14) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0,$$

donde $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ viene dada por (10.1.9).

Existencia y unicidad de solución. Es una consecuencia directa del Teorema 3.1.3.

Teorema 10.1.1. *En las hipótesis (9.2.1)–(9.2.5), (9.2.8)–(9.2.10) y (10.1.10), el problema PV tiene una única solución, de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$.*

Demostración. Sean $A : V \rightarrow V$ y $B : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V)$ los operadores definidos como en (9.2.11) para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y $t \in [0, T]$. Usando (9.2.1)–(9.2.5) se sigue que los operadores A y B satisfacen las condiciones (3.1.3) y (3.1.4),

respectivamente. Además, la función definida por (10.1.9) es propia, convexa y continua en V , esto es, satisface (3.1.5). Dado que además se verifican (9.2.8)–(9.2.10), el problema PV está en las condiciones requeridas para P_A en el Teorema 3.1.3 y en consecuencia, existe una única solución de PV de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$, lo que concluye la demostración. \square

Consideramos ahora $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$, solución del problema PV y sea $\boldsymbol{\sigma}$ el campo de tensiones definido por (10.1.1). Por razonamientos análogos a los utilizados en la Sección 9.2, se prueba fácilmente que $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,2}(0, T; Q)$. Por tanto, en las condiciones del Teorema 10.1.1, el par $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ constituye la única solución débil de P , de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$, $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,2}(0, T; Q)$.

Observación 10.1.2. *En el caso particular en que \mathbf{F} viene dado por (10.1.8) y se verifica (9.2.6), podemos obtener mayor regularidad para el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$. Basta considerar para cada $t \in [0, T]$, que tomando $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}(t) \pm \boldsymbol{\varphi}$ en (10.1.13), siendo $\boldsymbol{\varphi} \in [\mathcal{D}(\Omega)]^d$, y teniendo en cuenta (10.1.1), se deduce que $\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) = -\mathbf{f}_0(t)$ c.p.d. en Ω . Por lo tanto, $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,2}(0, T; Q_1)$. Esta observación es extensible a todas las demás secciones del capítulo.*

Dependencia de la solución de PV con respecto a las perturbaciones del operador \mathcal{B} . Asumimos que se verifican las hipótesis del Teorema 10.1.1 y, para cada $\theta > 0$ sea \mathcal{B}_θ una perturbación de \mathcal{B} que satisface (9.3.1) y (9.3.2). Consideramos el siguiente problema variacional.

PROBLEMA PV_θ . *Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u}_\theta : [0, T] \rightarrow V$ tal que se verifican (9.3.3)–(9.3.4) y $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ está dada por (10.1.9)*

Es inmediato comprobar que el problema PV_θ representa la formulación variacional del problema P cuando se reemplaza la ley constitutiva (10.1.1) por (9.3.5). En consecuencia, se deduce del Teorema 10.1.1 que para cada $\theta > 0$,

el problema PV_θ tiene una única solución de regularidad $\mathbf{u}_\theta \in W^{1,2}(0, T; V)$. Supongamos además (9.3.6). En estas condiciones, disponemos del siguiente resultado de convergencia.

Teorema 10.1.3. *Suponemos que se verifican las condiciones del Teorema 10.1.1 y además (9.3.1), (9.3.2) y (9.3.6). Entonces, la solución $\mathbf{u}_\theta \in W^{1,2}(0, T; V)$ del problema PV_θ converge a la solución $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$ del problema PV , esto es,*

$$(10.1.15) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_\theta - \mathbf{u}\|_{C([0, T]; V)} = 0.$$

Demostración. Sea $B : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V)$ el operador definido en (9.2.11) y, para cada $\theta > 0$, sea $B_\theta : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V)$ el operador dado por (9.3.8). A partir de (9.3.1) y (9.3.6) tenemos

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \|B_\theta - B\|_{W^{1,2}(0, T; \mathcal{L}(V))} = 0.$$

Por tanto, (10.1.15) se obtiene como consecuencia directa del Teorema 3.2.1. \square

Sea ahora $\boldsymbol{\sigma}_\theta \in W^{1,2}(0, T; Q)$ el campo de tensiones dado por (9.3.5). Análogamente a la Sección 9.3, tras algunos cálculos, se sigue de (10.1.15) que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \|\boldsymbol{\sigma}_\theta - \boldsymbol{\sigma}\|_{C([0, T]; Q)} = 0.$$

10.2. Contacto viscoelástico con rozamiento de Tresca

Planteamiento mecánico del problema de contacto. Nos situamos en las condiciones generales descritas en la Sección 5 relativas al problema de contacto

unilateral entre un sólido deformable y un obstáculo, también deformable. El contacto se modeliza con una ley viscoelástica para el desplazamiento en la dirección de la normal de la forma (5.4.8), (5.4.10) y con la ley de Tresca para el desplazamiento tangencial. En estas condiciones, podemos modelizar el problema mecánico de contacto en la forma del siguiente problema matemático de contorno.

PROBLEMA *P*: Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ y el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}_d$ tales que, para todo $t \in [0, T]$ se verifican (10.1.1)–(10.1.4), se cumple (10.1.6) y además

$$(10.2.1) \quad \begin{cases} -\sigma_\nu = k|\dot{u}_\nu|^{q-1}\dot{u}_\nu, & |\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq g, \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| < g \implies \dot{\mathbf{u}}_\tau = \mathbf{0}, \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| = g \implies \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda\dot{\mathbf{u}}_\tau, & \lambda \geq 0, \end{cases} \quad \text{en } \Gamma_3 \times (0, T),$$

donde $0 < q \leq 1$. La primera expresión en (10.2.1) representa la condición de contacto con respuesta normal viscosa, introducida en (5.4.10). La segunda expresión constituye la ley de Tresca, introducida en (5.4.13). La función $k : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ representa un coeficiente de resistencia ligado a las características de los materiales involucrados y $g : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ representa el umbral de rozamiento.

Obtención de una formulación variacional. Nos situamos en el marco funcional general establecido en la Sección 4.1. Recordamos que el espacio V viene dado por

$$V = \{\mathbf{v} = (v_i) \in H_1 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_1\},$$

y que utilizando la desigualdad de Korn probamos que con el producto interior definido por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

el espacio V es de Hilbert y la norma inducida es topológicamente equivalente a la de H_1 . Con ayuda del teorema de representación de Riesz, definimos $\mathbf{F}(t)$

como en (10.1.8). Por otra parte, sea $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ la función definida por

$$(10.2.2) \quad j(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \left(\frac{k}{q+1} |v_\nu|^{q+1} + g|\mathbf{v}_\tau| \right) da \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Supondremos que se verifican

$$(10.2.3) \quad g \in L^\infty(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \text{ c.p.d. en } \Gamma_3, \quad k \in L^\infty(\Gamma_3), \quad k \geq 0 \text{ c.p.d. en } \Gamma_3,$$

por lo que j está bien definida. Sea $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ una solución suficientemente regular del problema P y $t \in [0, T]$. Combinando argumentos de convexidad y las operaciones llevadas a cabo en (9.1.12) deducimos que

$$(10.2.4) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{[L^2(\Gamma_3)]^d} \geq j(\dot{\mathbf{u}}(t)) - j(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

por lo que aplicando la fórmula de Green (4.1.3) para $\mathbf{v} = \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)$ y teniendo en cuenta (10.1.8) y (10.1.1)–(10.1.4), se obtiene la siguiente formulación variacional del problema P .

PROBLEMA PV : *Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ tal que se verifican (10.1.13)–(10.1.14) y $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ viene dada por (10.2.2).*

Existencia y unicidad de solución. Es una consecuencia directa del Teorema 3.1.3, como se muestra a continuación.

Teorema 10.2.1. *En las hipótesis (9.2.1)–(9.2.5), (9.2.8)–(9.2.10) y (10.2.3), el problema PV tiene una única solución, de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$.*

Demostración. Se procede siguiendo los mismos pasos que en la demostración del Teorema 10.1.1, pues sólo varían la definición del espacio V y de la función j . En cualquier caso, dado que V es un espacio de Hilbert y j es una función propia, convexa y continua en V (esto es, satisface (3.1.5)), se prueba fácilmente que el problema PV está en las condiciones requeridas para el problema P_A

en el Teorema 3.1.3 y en consecuencia, existe una única solución de PV de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$, lo que concluye la demostración. \square

Al igual que en secciones anteriores, el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ definido por (10.1.1) se prueba fácilmente que verifica $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,2}(0, T; Q)$. Por tanto, en las condiciones del Teorema 10.2.1, el par $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ constituye la única solución débil de P , de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$, $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,2}(0, T; Q)$.

Dependencia de la solución de PV con respecto a las perturbaciones del operador \mathcal{B} . Se dispone de resultados equivalentes a los de secciones anteriores. Para cada $\theta > 0$ se plantea un problema PV_θ de la forma (9.3.3)–(9.3.4) donde \mathcal{B}_θ es una perturbación de \mathcal{B} y $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ está dada por (10.2.2). Se tiene el siguiente teorema.

Teorema 10.2.2. *Suponemos que se verifican las condiciones del Teorema 10.2.1 y además (9.3.1), (9.3.2) y (9.3.6). Entonces, la solución $\mathbf{u}_\theta \in W^{1,2}(0, T; V)$ del problema PV_θ converge a la solución $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$ del problema PV , esto es,*

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_\theta - \mathbf{u}\|_{C([0, T]; V)} = 0.$$

$$\text{Además,} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \|\boldsymbol{\sigma}_\theta - \boldsymbol{\sigma}\|_{C([0, T]; Q)} = 0,$$

donde $\boldsymbol{\sigma}_\theta$ es el campo de tensiones definido por (9.3.5).

10.3. Contacto viscoelástico con rozamiento viscoelástico

Planteamiento mecánico del problema de contacto. Nos situamos en las condiciones generales descritas en la Sección 5 relativas al problema de contacto unilateral entre un sólido deformable y un obstáculo, también deformable. El

contacto se modeliza con una ley viscosa tanto para el contacto en la dirección normal como para el rozamiento. En estas condiciones, podemos modelizar el problema mecánico de contacto en la forma del siguiente problema matemático de contorno.

PROBLEMA *P*: Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ y el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}_d$ tales que, para todo $t \in [0, T]$ se verifican (10.1.1)–(10.1.4), se cumple (10.1.6) y además

$$(10.3.1) \quad -\sigma_\nu = k|\dot{u}_\nu|^{q-1}\dot{u}_\nu, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\mu|\dot{\mathbf{u}}_\tau|^{p-1}\dot{\mathbf{u}}_\tau \quad \text{en } \Gamma_3 \times (0, T).$$

donde $0 < p, q \leq 1$. La primera expresión en (10.3.1) representa la condición de contacto con respuesta normal viscosa, introducida en (5.4.8), (5.4.10). La segunda expresión en (10.1.5) constituye la ley de rozamiento viscoelástica de la forma (5.4.14)–(5.4.15). Recordamos que $\mu : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función positiva que representa el coeficiente de rozamiento y que la función $k : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ representa un coeficiente de resistencia ligado a las características de los materiales involucrados.

Obtención de una formulación variacional. Nos situamos en el marco funcional general establecido en la Sección 4.1. Recordamos que el espacio V viene dado por

$$V = \{\mathbf{v} = (v_i) \in H_1 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_1\},$$

y que utilizando la desigualdad de Korn probamos que con el producto interior definido por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

el espacio V es de Hilbert y la norma inducida es topológicamente equivalente a la de H_1 . Con ayuda del teorema de representación de Riesz, definimos $\mathbf{F}(t)$ como en (10.1.8) para cada $t \in [0, T]$. Por otra parte, sea $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ la

función definida por

$$(10.3.2) \quad j(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \left(\frac{k}{q+1} |v_\nu|^{q+1} + \frac{\mu}{p+1} |v_\tau|^{p+1} \right) da \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Supondremos que se verifican

$$(10.3.3) \quad \mu \in L^\infty(\Gamma_3), \mu \geq 0 \text{ c.p.d. en } \Gamma_3, \quad k \in L^\infty(\Gamma_3), k \geq 0 \text{ c.p.d. en } \Gamma_3,$$

por lo que j está bien definida. Sea $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ una solución suficientemente regular del problema P y $t \in [0, T]$. Utilizando argumentos de convexidad deducimos que

$$(\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{[L^2(\Gamma_3)]^d} \geq j(\dot{\mathbf{u}}(t)) - j(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

por lo que aplicando la fórmula de Green (4.1.3) para $\mathbf{v} = \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)$ y, teniendo en cuenta (10.1.8) y (10.1.1)–(10.1.4), se obtiene la siguiente formulación variacional del problema P .

PROBLEMA PV : *Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ tal que se verifican (10.1.13)–(10.1.14) y $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ viene dada por (10.3.2).*

Existencia y unicidad de solución. Es una consecuencia directa del Teorema 3.1.3, como se muestra a continuación.

Teorema 10.3.1. *En las hipótesis (9.2.1)–(9.2.5), (9.2.8)–(9.2.10) y (10.3.3), el problema PV tiene una única solución, de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$.*

Demostración. Se prueba siguiendo los mismos pasos que en la demostración del Teorema 10.1.1, pues sólo varían la definición del espacio V y de la función j . En cualquier caso, dado que V es un espacio de Hilbert y j es una función propia, convexa y continua en V (esto es, satisface (3.1.5)), se prueba fácilmente que el problema PV está en las condiciones requeridas para el problema P_A en el Teorema 3.1.3 y en consecuencia, existe una única solución de PV de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$, lo que concluye la demostración. \square

Al igual que en secciones anteriores, el campo de tensiones σ definido por (10.1.1) se prueba fácilmente que verifica $\sigma \in W^{1,2}(0, T; Q)$. Por tanto, en las condiciones del Teorema 10.2.1, el par (\mathbf{u}, σ) constituye la única solución débil de P , de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$, $\sigma \in W^{1,2}(0, T; Q)$.

Dependencia de la solución de PV con respecto a las perturbaciones del operador \mathcal{B} . Se dispone de resultados equivalentes a los de secciones anteriores. Para cada $\theta > 0$ se plantea un problema PV_θ de la forma (9.3.3)–(9.3.4) donde \mathcal{B}_θ es una perturbación de \mathcal{B} y $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ está dada por (10.3.2). Se tiene el siguiente teorema.

Teorema 10.3.2. *Suponemos que se verifican las condiciones del Teorema 10.3.1 y además (9.3.1), (9.3.2) y (9.3.6). Entonces, la solución $\mathbf{u}_\theta \in W^{1,2}(0, T; V)$ del problema PV_θ converge a la solución $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$ del problema PV , en el sentido de que*

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_\theta - \mathbf{u}\|_{C([0, T]; V)} = 0.$$

$$\text{Además,} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \|\sigma_\theta - \sigma\|_{C([0, T]; Q)} = 0,$$

donde σ_θ es el campo de tensiones definido por (9.3.5).

10.4. Contacto con respuesta normal amortiguada y rozamiento de Tresca

Planteamiento mecánico del problema de contacto. Nos situamos en las condiciones generales descritas en la Sección 5 relativas al problema de contacto unilateral entre un sólido deformable y un obstáculo, también deformable. Además, la superficie de contacto está lubricada y se conoce la presión ejercida por el lubricante. No obstante, no se experimenta deslizamiento tangencial hasta que no se supera un cierto umbral de rozamiento. Por tanto se utiliza una

ley viscoelástica de la forma (5.4.8), (5.4.9) para modelizar el contacto y una ley de Tresca para el rozamiento. En estas condiciones, podemos modelizar el problema mecánico de contacto en la forma del siguiente problema matemático de contorno.

PROBLEMA *P*: Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ y el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}_d$ tales que, para todo $t \in [0, T]$ se verifican (10.1.1)–(10.1.4), se cumple (10.1.6) y además

$$(10.4.1) \quad \begin{cases} -\sigma_\nu = k(\dot{u}_\nu)_+ + p_0, & |\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq g, \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| < g \implies \dot{\mathbf{u}}_\tau = \mathbf{0}, \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| = g \implies \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda \dot{\mathbf{u}}_\tau, \quad \lambda \geq 0, \end{cases} \quad \text{en } \Gamma_3 \times (0, T).$$

La primera expresión en (10.4.1) representa la condición de contacto con respuesta normal viscosa amortiguada, introducida en (5.4.8), (5.4.9), por lo que la presión en el contacto σ_ν depende de la velocidad en la dirección de la normal \dot{u}_ν , pero sólo bajo compresión. La segunda expresión en (10.4.1) constituye la ley de Tresca, introducida en (5.4.13). La función $p_0 : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ representa la presión ejercida por el lubricante y $g : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ representa el umbral de rozamiento que delimita el comienzo del deslizamiento tangencial. Recordamos que r_+ denota la parte positiva de r , esto es $r_+ = \max\{0, r\}$.

Obtención de una formulación variacional. Nos situamos en el marco funcional general establecido en la Sección 4.1. Recordamos que el espacio V viene dado por

$$V = \{\mathbf{v} = (v_i) \in H_1 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_1\},$$

y que utilizando la desigualdad de Korn probamos que con el producto interior definido por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

el espacio V es de Hilbert y la norma inducida es topológicamente equivalente a la de H_1 . Con ayuda del teorema de representación de Riesz, definimos $\mathbf{F}(t)$

como en (10.1.8). Por otra parte, sea $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ la función definida por

$$(10.4.2) \quad j(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \left(\frac{k}{2} ((v_\nu)_+)^2 + p_0 v_\nu + g |\mathbf{v}_\tau| \right) da \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Supondremos que se verifican

$$(10.4.3) \quad g, k, p_0 \in L^\infty(\Gamma_3), \quad g, k, p_0 \geq 0 \text{ c.p.d. en } \Gamma_3,$$

por lo que j está bien definida. Sea $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ una solución suficientemente regular del problema P y $t \in [0, T]$. Combinando argumentos de convexidad y las operaciones llevadas a cabo en (9.1.12) deducimos que

$$(\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{[L^2(\Gamma_3)]^d} \geq j(\dot{\mathbf{u}}(t)) - j(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

por lo que aplicando la fórmula de Green (4.1.3) para $\mathbf{v} = \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)$ y, teniendo en cuenta (10.1.8) y (10.1.1)–(10.1.4), se obtiene la siguiente formulación variacional del problema P .

PROBLEMA PV : *Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ tal que se verifican (10.1.13)–(10.1.14) y $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ viene dada por (10.4.2).*

Existencia y unicidad de solución. Es una consecuencia directa del Teorema 3.1.3, como se muestra a continuación.

Teorema 10.4.1. *En las hipótesis (9.2.1)–(9.2.5), (9.2.8)–(9.2.10) y (10.4.3), el problema PV tiene una única solución, de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$.*

Demostración. Se prueba siguiendo los mismos pasos que en la demostración del Teorema 10.1.1, pues sólo varían la definición del espacio V y de la función j . Dado que V es un espacio de Hilbert y j es una función propia, convexa y continua en V (esto es, satisface (3.1.5)), se prueba fácilmente que el problema PV está en las condiciones requeridas para el problema P_A en el Teorema 3.1.3 y en consecuencia, existe una única solución de PV de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$, lo que concluye la demostración. \square

Al igual que en secciones anteriores, el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ está definido por (10.1.1) y se prueba fácilmente que verifica $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,2}(0, T; Q)$. Por tanto, en las condiciones del Teorema 10.4.1, el par $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ constituye la única solución débil de P , de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$, $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,2}(0, T; Q)$.

Dependencia de la solución de PV con respecto a las perturbaciones del operador \mathcal{B} . Se dispone de resultados equivalentes a los de secciones anteriores. Para cada $\theta > 0$ se plantea un problema PV_θ de la forma (9.3.3)–(9.3.4) donde \mathcal{B}_θ es una perturbación de \mathcal{B} y $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ está dada por (10.4.2). Se tiene el siguiente teorema.

Teorema 10.4.2. *Suponemos que se verifican las condiciones del Teorema 10.4.1 y además (9.3.1), (9.3.2) y (9.3.6). Entonces, la solución $\mathbf{u}_\theta \in W^{1,2}(0, T; V)$ del problema PV_θ converge a la solución $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$ del problema PV en el sentido de que*

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_\theta - \mathbf{u}\|_{C([0, T]; V)} = 0.$$

Además,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \|\boldsymbol{\sigma}_\theta - \boldsymbol{\sigma}\|_{C([0, T]; Q)} = 0,$$

donde $\boldsymbol{\sigma}_\theta$ es el campo de tensiones definido por (9.3.5).

10.5. Contacto con respuesta normal amortiguada y rozamiento viscoso

Planteamiento mecánico del problema de contacto. Nos situamos en las condiciones generales descritas en la Sección 5 relativas al problema de contacto unilateral entre un sólido deformable y un obstáculo, también deformable. Además, la superficie de contacto está lubricada y se conoce la presión ejercida por el lubricante. A diferencia de la sección anterior, el lubricante posibilita que no exista un umbral de rozamiento. Por tanto el contacto se modeliza

con una ley viscoelástica de la forma (5.4.8), (5.4.9) y el rozamiento con una ley viscoelástica de la forma (5.4.14), (5.4.15). En estas condiciones, podemos modelizar el problema mecánico de contacto en la forma del siguiente problema matemático de contorno.

PROBLEMA *P*: Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ y el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}_d$ tales que, para todo $t \in [0, T]$ se verifican (10.1.1)–(10.1.4), se cumple (10.1.6) y además

$$(10.5.1) \quad -\sigma_\nu = k(\dot{u}_\nu)_+ + p_0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\mu|\dot{\mathbf{u}}_\tau|^{p-1}\dot{\mathbf{u}}_\tau \quad \text{en } \Gamma_3 \times (0, T),$$

donde $0 < p \leq 1$. La primera expresión en (10.5.1) representa la condición de contacto con respuesta normal viscosa amortiguada, introducida en (5.4.8), (5.4.9), por lo que la presión en el contacto σ_ν depende de la velocidad en la dirección de la normal, pero sólo bajo compresión. Recordamos que la función $p_0 : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ representa la presión ejercida por el lubricante, $k : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ representa un coeficiente de resistencia ligado a los materiales involucrados y $\mu : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función positiva que representa el coeficiente de rozamiento.

Obtención de una formulación variacional. Nos situamos en el marco funcional general establecido en la Sección 4.1. Recordamos que el espacio V viene dado por

$$V = \{\mathbf{v} = (v_i) \in H_1 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_1\},$$

y que utilizando la desigualdad de Korn probamos que con el producto interior definido por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

el espacio V es de Hilbert y la norma inducida es topológicamente equivalente a la de H_1 . Con ayuda del teorema de representación de Riesz, definimos $\mathbf{F}(t)$ como en (10.1.8). Por otra parte, sea $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ la función definida por

$$(10.5.2) \quad j(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \left(\frac{k}{2} ((v_\nu)_+)^2 + p_0 v_\nu + \frac{\mu}{p+1} |\mathbf{v}_\tau|^{p+1} \right) da \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Supondremos que se verifican

$$(10.5.3) \quad \mu, k, p_0 \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu, k, p_0 \geq 0 \text{ c.p.d. en } \Gamma_3,$$

por lo que j está bien definida. Sea $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ una solución suficientemente regular del problema P y $t \in [0, T]$. Utilizando argumentos de convexidad deducimos que

$$(\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{[L^2(\Gamma_3)]^d} \geq j(\dot{\mathbf{u}}(t)) - j(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

por lo que aplicando la fórmula de Green (4.1.3) para $\mathbf{v} = \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)$ y, teniendo en cuenta (10.1.8) y (10.1.1)–(10.1.4), se obtiene la siguiente formulación variacional del problema P .

PROBLEMA PV : *Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ tal que se verifican (10.1.13)–(10.1.14) y $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ viene dada por (10.5.2).*

Existencia y unicidad de solución. Es una consecuencia directa del Teorema 3.1.3, como se muestra a continuación.

Teorema 10.5.1. *En las hipótesis (9.2.1)–(9.2.5), (9.2.8)–(9.2.10) y (10.5.3), el problema PV tiene una única solución, de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$.*

Demostración. Se prueba siguiendo los mismos pasos que en la demostración del Teorema 10.1.1, pues sólo varían la definición del espacio V y de la función j . Dado que V es un espacio de Hilbert y j es una función propia, convexa y continua en V (esto es, satisface (3.1.5)), se prueba fácilmente que el problema PV está en las condiciones requeridas para el problema P_A en el Teorema 3.1.3 y en consecuencia, existe una única solución de PV de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$, lo que concluye la demostración. \square

Al igual que en secciones anteriores, el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ está definido por (10.1.1) y se prueba fácilmente que verifica $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,2}(0, T; Q)$. Por tanto, en

las condiciones del Teorema 10.5.1, el par $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ constituye la única solución débil de P , de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$, $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,2}(0, T; Q)$.

Dependencia de la solución de PV con respecto a las perturbaciones del operador \mathcal{B} . Se dispone de resultados equivalentes a los de secciones anteriores. Para cada $\theta > 0$ se plantea un problema PV_θ de la forma (9.3.3)–(9.3.4) donde \mathcal{B}_θ es una perturbación de \mathcal{B} y $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ está dada por (10.5.2). Se tiene el siguiente teorema.

Teorema 10.5.2. *Suponemos que se verifican las condiciones del Teorema 10.5.1 y además (9.3.1), (9.3.2) y (9.3.6). Entonces, la solución $\mathbf{u}_\theta \in W^{1,2}(0, T; V)$ del problema PV_θ converge a la solución $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$ del problema PV en el sentido de que*

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_\theta - \mathbf{u}\|_{C([0, T]; V)} = 0.$$

$$\text{Además,} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \|\boldsymbol{\sigma}_\theta - \boldsymbol{\sigma}\|_{C([0, T]; Q)} = 0,$$

donde $\boldsymbol{\sigma}_\theta$ es el campo de tensiones definido por (9.3.5).

10.6. El problema de Signorini en velocidades

Planteamiento mecánico del problema de contacto. Nos situamos en las condiciones generales descritas en la Sección 5 relativas al problema de contacto unilateral entre un sólido deformable y un obstáculo. En esta ocasión el obstáculo es semi-rígido, en el sentido que no es deformable como consecuencia de la eventual compresión del cuerpo en contacto, pero, no obstante, en ausencia de contacto puede desplazarse en la dirección de la normal. De esta forma se puede modelizar una situación en la que la fundación rígida está situada sobre un muelle. En consecuencia, si el sólido deformable se separa de ella, el muelle propicia que la fundación rígida se desplace en la dirección de la normal

hasta una nueva posición de contacto. Por otra parte, al contrario que en todos los ejemplos anteriores de este capítulo, el contacto es sin rozamiento.

En estas condiciones, podemos modelizar el problema mecánico de contacto en la forma del siguiente problema matemático de contorno.

PROBLEMA *P*: Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ y el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}_d$ tales que, para todo $t \in [0, T]$ se verifican (10.1.1)–(10.1.4), se cumple (10.1.6) y además

$$(10.6.1) \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \dot{u}_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \dot{u}_\nu = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_3 \times [0, T].$$

La primera expresión en (10.6.1) representa que las presiones en el contacto son de compresión. La segunda expresa que el desplazamiento en la dirección de la normal es siempre decreciente (esto es, en todo momento aumenta la distancia con respecto a la posición original). La tercera expresa que sólo cuando el desplazamiento normal no varía, se producen tensiones de compresión (esto es, la fundación semi-rígida ha vuelto a una situación de contacto). Finalmente, la cuarta expresión garantiza que el contacto es sin rozamiento, al no haber tensiones tangenciales en la zona de contacto.

Obtención de una formulación variacional. Nos situamos en el marco funcional general establecido en la Sección 4.1. El espacio V viene dado por

$$V = \{\mathbf{v} = (v_i) \in H_1 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_1\}$$

y utilizando la desigualdad de Korn probamos que con el producto interior definido por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

el espacio V es de Hilbert y la norma inducida es topológicamente equivalente a la de H_1 . Definimos el conjunto de velocidades admisibles por

$$U_{ad} = \{\mathbf{v} \in V : v_\nu \leq 0 \text{ c.p.d. en } \Gamma_3\},$$

que es un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de V . Por otra parte, sea $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ la función característica de U_{ad} , esto es

$$(10.6.2) \quad j(\mathbf{v}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathbf{v} \in U_{ad}, \\ +\infty, & \text{si } \mathbf{v} \notin U_{ad}. \end{cases}$$

Con ayuda del teorema de representación de Riesz, definimos $\mathbf{F}(t)$ como en (10.1.8). Sea $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ una solución suficientemente regular del problema P y $t \in [0, T]$. De la definición de U_{ad} y de (10.6.1) se deduce que

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in U_{ad}.$$

En consecuencia, aplicando la fórmula de Green (4.1.3) para $\mathbf{v} = \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)$ y, teniendo en cuenta (10.1.8) y (10.1.2)–(10.1.4), se obtiene que

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)))_Q \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U_{ad}.$$

Tenemos la siguiente formulación variacional del problema P .

PROBLEMA PV: *Hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$ tal que se verifican (10.1.13)–(10.1.14) y $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ viene dada por (10.6.2).*

Existencia y unicidad de solución. Es una consecuencia directa del Teorema 3.1.3, como se muestra a continuación.

Nótese que en este caso $D(j) = U_{ad} \subsetneq V$ por lo que en este estudio podemos reinterpretar la hipótesis (9.2.10) como

$$(10.6.3) \quad (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q \geq (\mathbf{F}(0), \mathbf{v})_V, \quad \forall \mathbf{v} \in U_{ad}.$$

Teorema 10.6.1. *En las hipótesis (9.2.1)–(9.2.5), (9.2.8)–(9.2.9) y (10.6.3), el problema PV tiene una única solución, de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$.*

Demostración. Se demuestra siguiendo los mismos pasos que en la demostración del Teorema 10.1.1, pues sólo varían la definición del espacio V y de la función

j. Dado que V es un espacio de Hilbert y j es una función propia, convexa y continua en V (ver Sección 1.2), y por tanto satisface (3.1.5), se prueba fácilmente que el problema PV está en las condiciones requeridas para el problema P_A en el Teorema 3.1.3. En consecuencia, existe una única solución de PV de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$, lo que concluye la demostración. \square

Al igual que en secciones anteriores, el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ está definido por (10.1.1) se prueba fácilmente que verifica $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,2}(0, T; Q)$. Por tanto, en las condiciones del Teorema 10.6.1, el par $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ constituye la única solución débil de P , de regularidad $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$, $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,2}(0, T; Q)$.

Dependencia de la solución de PV con respecto a las perturbaciones del operador \mathcal{B} . Se dispone de resultados equivalentes a los de secciones anteriores. Para cada $\theta > 0$ se plantea un problema PV_θ de la forma (9.3.3)–(9.3.4) donde \mathcal{B}_θ es una perturbación de \mathcal{B} y $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ está dada por (10.6.2). Se tiene el siguiente teorema.

Teorema 10.6.2. *Suponemos que se verifican las condiciones del Teorema 10.6.1 y además (9.3.1), (9.3.2) y (9.3.6). Entonces, la solución $\mathbf{u}_\theta \in W^{1,2}(0, T; V)$ del problema PV_θ converge a la solución $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$ del problema PV en el sentido de que*

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_\theta - \mathbf{u}\|_{C([0, T]; V)} = 0.$$

Además,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \|\boldsymbol{\sigma}_\theta - \boldsymbol{\sigma}\|_{C([0, T]; Q)} = 0,$$

donde $\boldsymbol{\sigma}_\theta$ es el campo de tensiones definido por (9.3.5).

Notas bibliográficas a la Parte II

Capítulo 4. Más detalles relativos a los espacios funcionales de Sobolev pueden encontrarse en [1, 12, 51, 73] y, con una orientación más aplicada a la física matemática, en [93, 94]. Una demostración de la desigualdad de Korn puede verse, por ejemplo, en [55, pág. 79]. Más detalles sobre la teoría y aplicación del Método de los Elementos Finitos (M.E.F.) pueden encontrarse, entre otros, en [6, 15, 33, 34, 46, 84, 85, 95]. En concreto recomendamos [15] para un estudio profundo de los operadores de interpolación y las cotas de error que se obtienen. El resultado expresado en (4.2.8) se demuestra en el caso escalar en [59] y ha sido utilizado en numerosos trabajos, por ejemplo en [38].

Capítulo 5. La teoría de la mecánica de los medios continuos puede estudiarse con detalle en [24, 32, 35, 87], entre otros. El lector interesado en el estudio de las leyes constitutivas puede consultar, entre otras, las referencias [20, 50] para cuestiones relativas a la realización de tests experimentales con materiales, [16] para un estudio matemático profundo de la elasticidad tridimensional, y [19, 22, 25, 38, 44, 55, 58] para el estudio de problemas relativos a materiales que responden a leyes en elasticidad, viscoelasticidad y viscoplasticidad. El procedimiento realizado en (5.3.4)–(5.3.6) está inspirado en [25, pág. 193]. La ley constitutiva en memoria larga (5.3.6) es utilizada o mencionada en,

por ejemplo [21, 25]. Otras formulaciones alternativas las encontramos en [95] o en [22, 58, 88]. El lector interesado en un estudio de carácter general de los fenómenos de contacto puede consultar, entre otros, [45, 46, 53, 56, 60, 74]. El contacto sin rozamiento entre un sólido deformable y un obstáculo no penetrable fue introducido por primera vez por Signorini en 1933, para el caso de materiales elásticos, ver [77]. La existencia y unicidad de solución puede consultarse en [30] y su aproximación numérica en [46].

Capítulo 6. Gran parte de los contenidos de este capítulo se encuentran publicados con mayor detalle en [67]. Para consultar las referencias relativas al problema de Signorini nos remitimos a las ya expuestas para el capítulo anterior. En la demostración de la propiedad de equivalencia expresada en el Teorema 6.3.1 no se ha utilizado la ley de comportamiento. De hecho los mismos argumentos se utilizan, por ejemplo, en [38, 65] para probar la equivalencia entre soluciones a formulaciones variacionales relativas a otros problemas mecánicos diferentes de nuestro problema P . Los contenidos relativos al resultado de convergencia Teorema 6.3.4 de la Sección 6.4 han sido parcialmente publicados en [70]. Los resultados de la Sección 6.6 están incluidos y ampliados en [80].

Capítulo 7. La condición de contacto con respuesta normal fue introducida en [54]. Posteriormente, ha sido utilizada en gran número de trabajos, como por ejemplo [4, 5, 28, 29, 46, 48, 49, 63], asociada a una gran variedad de leyes de comportamiento. Los resultados de este capítulo se encuentran publicados en [71].

Capítulo 8. Los problemas de contacto con condiciones de no interpenetración ni rozamiento entre dos cuerpos linealmente elásticos han sido ampliamente estudiados en [39, 40, 41, 42]. El estudio variacional de este problema entre dos cuerpos viscoplásticos ha sido realizado en [65] y su aproximación numérica

en [38]. Algunos resultados de este capítulo han sido incluidos en [68]. Ha sido fundamental para la presentación de simulaciones numéricas el trabajo previo de otros miembros del grupo como los profesores Burguera y, especialmente, Fernández García. De hecho, remitimos a la tesis de doctoramiento de Fernández García [28] y las referencias allí incluidas para un estudio riguroso de los problemas de contacto entre dos cuerpos y la algorítmica necesaria para la implementación de los métodos numéricos.

Capítulo 9. Los resultados de existencia y unicidad de solución débil y de dependencia continua respecto del término de memoria en este capítulo pueden consultarse en [82]. La ley de Tresca puede consultarse en [25, 57], y más recientemente ha sido utilizada en [2, 3]. Los resultados relativos a la aproximación numérica pueden verse con mayor detalle en [69]. En concreto, la variante del algoritmo de penalización-dualidad de Bermúdez-Moreno y el desarrollo de la teoría que justifica su utilización, han estado inspirados por el trabajo desarrollado en [90, 91]. Los resultados de Sección 9.6 relativos a la formulación en tensiones del problema de contacto bilateral con rozamiento dado por la ley de Tresca y que da lugar a un nuevo tipo de inecuaciones variacionales evolutivas de tipo Volterra, diferente de los dos principales tratados en esta memoria, están publicados en [81].

Capítulo 10. Los contenidos de este capítulo representan una ampliación de los publicados en [82]. Un estudio profundo acerca de otros problemas de contacto con rozamiento en viscoelasticidad y viscoplasticidad se puede consultar en [38]. La primera expresión en (10.2.1) y (10.3.1) de contacto viscoelástico se emplea en [75, 79]. Finalmente, la primera expresión en (10.4.1) y (10.5.1) ha sido utilizada en [64] para modelizar el efecto de una capa fina de lubricante, por ejemplo aceite, a una presión conocida.

Conclusiones y perspectivas

En la primera parte de este trabajo se han estudiado dos tipos de inecuaciones variacionales evolutivas involucrando términos integrales de tipo Volterra. Se han obtenido resultados de existencia y unicidad de solución utilizando argumentos de operadores maximales monótonos y de punto fijo. Además se ha establecido la dependencia continua de la solución respecto a los datos, en concreto respecto a la función de memoria. El análisis numérico ha sido realizado en base a estrategias de tipo Ritz-Galerkin y de integración numérica, y se han obtenido resultados de existencia y unicidad de solución y de convergencia para esquemas semi-discretos y totalmente discretizados.

En la segunda parte de la memoria se han estudiado analítica y numéricamente varios problemas de contacto con y sin rozamiento con el nexo común de que los sólidos deformables involucrados responden a una ley constitutiva de viscoelasticidad con memoria larga. Se han establecido formulaciones fuertes y débiles de dichos problemas y para abordar la existencia, unicidad, propiedades y aproximación numérica de las soluciones, se han aplicado los resultados teóricos obtenidos en un marco abstracto en la primera parte. También se han presentado simulaciones numéricas que ponen de manifiesto visualmente aspectos teóricos relevantes como los relativos a la convergencia de la solución viscoelástica hacia la solución elástica según la memoria se reduce o

la convergencia de la solución de un problema con condiciones de contacto de respuesta normal hacia la solución de un problema con condiciones de contacto de Signorini según la rigidez del obstáculo se incrementa.

Otros trabajos siguen un esquema similar, esto es, aplicación de resultados de inecuaciones variacionales en la resolución de problemas de contacto. Podemos citar como ejemplos las tesis [28, 43] o los monográficos [38, 46], para materiales elásticos, viscoelásticos con memoria corta y viscoplásticos. La principal novedad que aportamos con respecto a estos y otros trabajos reside en la incorporación de los efectos viscoelásticos de memoria larga en los modelos mecánicos. Esto se traduce en la aparición de términos integrales de tipo Volterra en las inecuaciones variacionales, lo que a su vez propicia la utilización de unos espacios funcionales, unos operadores y unas metodologías de análisis y aproximación numérica diferentes, que dotan, a nuestro entender, de interés matemático a esta memoria.

Nos parece también destacable el hecho de haber obtenido un algoritmo para la resolución efectiva de las inecuaciones variacionales de segunda especie de la forma (9.4.16), un problema que, hasta donde alcanza nuestro conocimiento, no había sido resuelto satisfactoriamente con anterioridad.

A lo largo de este trabajo ha quedado patente que la mecánica del contacto es un campo vasto que involucra numerosos dominios de la matemática aplicada, que a *grosso modo* podemos englobar en modelización, análisis matemático, análisis numérico y programación. Pese a que el progreso en los últimos años se puede calificar de espectacular, son numerosos los problemas que siguen abiertos, en todas y cada una de las especialidades citadas anteriormente. En numerosas ocasiones, el avance en uno de los campos requiere del avance en otro(s) y lo que aún es más interesante, las dificultades solventadas en uno de ellos pueden simplificar el estudio en otro(s). Un ejemplo claro lo tenemos en

esta memoria, dado que las formulaciones débiles de los problemas de contacto han motivado el estudio de nuevos tipos de inecuaciones variacionales evolutivas en espacios de Hilbert y, a su vez, este estudio abstracto permite demostrar existencia, unicidad y propiedades de las soluciones débiles de aquellos. Esta fertilización mutua es uno de los aspectos más atractivos, hoy por hoy, de la mecánica del contacto.

En lo referente al estudio desarrollado en este trabajo, destacamos que restan muchos problemas abiertos. En primer lugar, nótese que todos los problemas son cuasiestáticos, por lo que una continuación natural sería abordar el estudio de problemas dinámicos. Aunque existe algún trabajo de otros autores en este sentido (ver [31]), no hay resultado de unicidad de solución, está restringido a un tipo concreto de ley de contacto y no tiene en cuenta el rozamiento. Tampoco tenemos constancia de que existan resultados de análisis numérico para el caso dinámico.

Otro aspecto interesante consiste en intentar un estudio asintótico, conforme $T \rightarrow \infty$, lo que imposibilita numerosas acotaciones realizadas en este trabajo.

Por otra parte, la restricción sobre la medida de la frontera de fijación es necesaria para poder utilizar la desigualdad de Korn, instrumento clásico para obtener resultados de unicidad, pero de ninguna manera infranqueable. La extensión de los resultados presentados en este trabajo al caso no coercivo (i.e. $\Gamma_1 = \emptyset$) vale, sin duda, una investigación más profunda.

Otra vía de investigación a considerar consiste en la extensión de los resultados numéricos sobre los problemas con rozamiento a todos los casos estudiados analíticamente. Actualmente, sólo la ley de Tresca se beneficia del estudio teórico (véase [69]). Además, convendría abordar la extensión de la resolución numérica al caso 3D.

Finalmente, en todos los problemas de contacto con rozamiento estudiados, la tensión normal y la tangencial están en función de potencias de la velocidad normal y tangencial. Como se ha visto, esto está directamente relacionado con la categoría de funcionales j que están involucrados en las respectivas formulaciones variacionales. Una importante extensión de los teoremas de existencia y unicidad de solución contemplaría la utilización de funcionales j más generales que dependieran a la vez de una función y su derivada y permitiría aplicaciones, por ejemplo, a problemas de contacto con respuesta normal y rozamiento (ver por ejemplo, [38, 46, 48, 63]).

Pero los fenómenos de contacto son mucho más ricos aún. Trabajos recientes incorporan los efectos térmicos, el desgaste, la adherencia y el daño en el estudio de varios modelos involucrando materiales elásticos, viscoelásticos con memoria corta y viscoplásticos (véase [76], donde un “*state of the art*” de estos problemas está hecho con detalle). No tenemos constancia de que un trabajo similar haya sido realizado para materiales viscoelásticos con memoria larga y, en consecuencia, una continuación de esta memoria podría incluirlo.

De la bibliografía consultada se desprende que el progreso en los últimos años en el estudio de modelos matemáticos del contacto es impresionante. Los investigadores en mecánica del contacto pueden felicitarse por haber abierto una brecha en su objeto de estudio, y de haber sentado los cimientos de una futura Teoría Matemática de la Mecánica del Contacto, cuyo surgimiento tenemos el placer de contemplar.

Bibliografía

- [1] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press, 1975.
- [2] A. AMASSAD, M. SHILLOR y M. SOFONEA, A quasistatic contact problem for an elastic perfectly plastic body with Tresca's friction, *Nonlinear Analysis TMA*, **35** (1999), 95–109.
- [3] A. AMASSAD y M. SOFONEA, Analysis of a quasistatic viscoplastic problem involving Tresca friction law, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **4** (1998), 55–72.
- [4] L.-E. ANDERSSON, A quasistatic frictional problem with normal compliance, *Nonlinear Analysis TMA*, **16** (1991), 347–370.
- [5] L.-E. ANDERSSON, A global existence result for a quasistatic contact problem with friction, *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, **5** (1995), 249–286.
- [6] I. BABUŠKA y A. K. AZIZ, Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method, in A.K. Aziz, ed., *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, 1972, 3–359.
- [7] V. BARBU, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Editura Academiei, Bucharest-Noordhoff, Leyden, 1976.

-
- [8] A. BERMÚDEZ y C. MORENO, Duality methods for solving variational inequalities, *Comp. and Math. with Appl.* **7** (1981), 43-58.
- [9] H. BREZIS, Problèmes unilatéraux, *J. Math. Pures et Appl.* **51** (1972), 1-168.
- [10] H. BREZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semigroups de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, 1973.
- [11] H. BREZIS, *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, Ann. Inst. Fourier, **18** (1968), 115-175.
- [12] H. BREZIS, *Annalyse fonctionelle*, Masson, París, 1983.
- [13] M. BURGUERA y J.M. VIAÑO, Numerical solving of frictionless contact problems in perfectly plastic bodies, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **121**, (1995), 303-322.
- [14] M. BURGUERA, *Análisis numérico de una clase de problemas de contacto en plasticidad perfecta*, Tesis, Depto. de Matemática Aplicada. Univ. de Santiago de Compostela, 1991.
- [15] P.G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, Studies in Mathematics and its applications, **IV**, North-Holland Publishing Company, 1978.
- [16] P.G. CIARLET, *Mathematical Elasticity, Volume I: Three Dimensional Elasticity*, Studies in Mathematics and its Applications, **20**, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [17] P.G. CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris, 1990.

-
- [18] M. COCU, Existence of solutions of Signorini problems with friction, *Int. J. Engng. Sci.* **22** (1984), 567–581.
- [19] N. CRISTESCU, *Dynamic Plasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1967.
- [20] N. CRISTESCU y I. SULICIU, *Viscoplasticity*, Martinus Nijhoff Publishers, Editura Tehnica, Bucharest, 1982.
- [21] R. DAUTRAY y J.L. LIONS, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*, Springer-Verlag, Berlin, **1**, *Physical origins and classical methods*, 1985-1993.
- [22] A.D. DROZDOV, *Finite Elasticity and Viscoelasticity: A Course in the Nonlinear Mechanics of Solids*, World Scientific Publ, Singapore, 1996.
- [23] G. DUVAUT, Loi de frottement non locale, *J. Méc. Thé. Appl.* Special issue (1982), 73–78.
- [24] G. DUVAUT, *Mécanique des milieux continus*, Dunod, París, 1998.
- [25] G. DUVAUT y J. L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, París, 1972.
- [26] I. EKELAND y R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod, París, 1973.
- [27] J.R. FERNÁNDEZ-GARCÍA, P. HILD y J.M. VIAÑO, Numerical approximation of the elastic-viscoplastic contact problem with non-matching meshes. *Numer. Math.* ,**94**, (2003), 501–522.
- [28] J.R. FERNÁNDEZ-GARCÍA, *Análisis numérico de problemas de contacto sin rozamiento en viscoplasticidad*, Tesis, Depto. de Matemática Aplicada. Univ. de Santiago de Compostela, 2002.

-
- [29] J.R. FERNÁNDEZ-GARCÍA, M.SOFONEA y J.M. VIAÑO, A frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with normal compliance. *Numer. Math.* **90** (2002), 689–719.
- [30] G. FICHERA, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. II. Problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, *Mem. Accad. Naz. Lincei, Sec. VIII, Vol. VII, Sez. I*, **5** (1964), 91–140.
- [31] I. FIGUEIREDO y L. TRABUCHO, A class of contact and friction dynamic problems in thermoelasticity and in thermoviscoelasticity, *Int. J. Engng. Sci.*, **33** No. 1 (1995), 45–66.
- [32] P. GERMAIN y P. MULLER, *Introduction à la mécanique des milieux continus*, Masson, París, 1980.
- [33] R. GLOWINSKI, *Numerical methods for nonlinear variational problems*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [34] R. GLOWINSKI, J. L. LIONS y R. TREMOLIÈRES, *Analyse numérique des inequations variationnelles*, Dunod-Bordas, París, 1976.
- [35] M. E. GURTIN, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, New York, 1981.
- [36] W. HAN y B. D. REDDY, *Plasticity : Mathematical Theory and Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [37] W. HAN y M. SOFONEA, Numerical analysis of a frictionless contact problem for Elastic-Viscoplastic materials, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **190** (2000), 179–191.
- [38] W. HAN y M. SOFONEA, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity. Studies in Advanced Mathematics*, **30**, American Mathematical Society–International Press, 2002.

-
- [39] J. HASLINGER y I. HLAVÁČEK, Contact between elastic bodies– I. Continuous problem, *Apl. Mat.* **25** (1980), 324–347.
- [40] J. HASLINGER y I. HLAVÁČEK, Contact between elastic bodies– II. Finite element analysis, *Apl. Mat.* **26** (1981), 263–290.
- [41] J. HASLINGER y I. HLAVÁČEK, Contact between elastic bodies– III. Dual finite element analysis, *Apl. Mat.* **26** (1981), 321–344.
- [42] I. HLAVÁČEK, J. HASLINGER, J. NECĀS y J. LOVÍŠEK, *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [43] T. V. HOARAU-MANTEL, *Contribution à l'étude mathématique et numérique de quelques problèmes en mécanique du contact*. Tesis, Laboratoire de Théorie des Systèmes, Univ. de Perpignan, 2003.
- [44] I.R. IONESCU y M. SOFONEA, *Functional and numerical methods in viscoplasticity*, Oxford Science Publications, 1993.
- [45] K.L. JOHNSON, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [46] N. KIKUCHI y J.T. ODEN, *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, 1988.
- [47] D. KINDERLEHRER y G. STAMPACCHIA, *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*, Academic Press, New York, 1980.
- [48] A. KLARBRING, A. MIKELIČ y M. SHILLOR, Frictional contact problems with normal compliance, *Int. J. Engng. Sci.* **26** (1988), 811–832.
- [49] A. KLARBRING, A. MIKELIČ y M. SHILLOR, A global existence result for the quasistatic frictional contact problem with normal compliance, in G.

- Del Piero and F. Maceri, eds., *Unilateral Problems in Structural Analysis*, 4, Birkhäuser, Boston, 1991, 85–111.
- [50] J. LEMAITRE y J.L. CHABOCHE, *Mecanique des materiaux solides*, Dunod, 1985.
- [51] J.-L. LIONS y E. MAGENES, *Problèmes aux limites non-homogènes I*, Dunod, Paris, 1968.
- [52] J.A.C. MARTINS & MANUEL D.P. MONTEIRO MARQUES, (Eds.), *Contact Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [53] D. MAUGIS, *Contact, Adhesion and Rupture of Elastic Solids*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2000.
- [54] J.A.C. MARTINS y J.T. ODEN, Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws, *Nonlinear Anal.* **11** (1987), 407–428.
- [55] J. NEČAS y I. HLAVÁČEK, *Mathematical Theory of Elastic and Elastico-Plastic Bodies: An Introduction*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, 1981.
- [56] J.T. ODEN y J.A.C. MARTINS, Models and computational methods for dynamic friction phenomena, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **52** (1985), 527–634.
- [57] P.D. PANAGIOTOPOULOS, *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [58] A. C. PIPKIN, *Lectures in Viscoelasticity Theory*, Applied Mathematical Sciences 7, George Allen & Unwin Ltd. London, Springer-Verlag New York, 1972.

-
- [59] A. QUARTERONI y A. VALLI, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [60] E. RABINOWICZ, *Friction and Wear of Materials*, 2nd edition, Wiley, New York, 1995.
- [61] M. RAOUS, M. JEAN y J.J. MOREAU, (Eds.), *Contact Mechanics*, Plenum Press, New York, 1995.
- [62] P. A. RAVIART y J. M. THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, 1983.
- [63] M. ROCHDI, M. SHILLOR y M. SOFONEA, Quasistatic viscoelastic contact with normal compliance and friction, *Journal of Elasticity*, **51** (1998), 105–126.
- [64] M. ROCHDI, M. SHILLOR y M. SOFONEA, A quasistatic contact problem with directional friction and damped response, *Applicable Analysis*, **68** (1998), 409–422.
- [65] M. ROCHDI y SOFONEA, On frictionless contact between tzo elastic-viscoplastic bodies, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **50** (1997), 481–496.
- [66] E.T. ROCKAFELLAR, Characterization of the subdifferentials of convex functions, *Pac. Journ. Math.*, **17** (1966), 497–510.
- [67] A. RODRÍGUEZ-ARÓS, M. SOFONEA y J.M. VIAÑO, *El problema de Signorini en viscoelasticidad con memoria larga*. Publicación do Departamento de Matemática Aplicada da Universidade de Santiago de Compostela, USC. **32** (2003).
- [68] A. RODRÍGUEZ-ARÓS, M. SOFONEA y J.M. VIAÑO, A Class of Evolutionary Variational Inequalities with Volterra-Type Term, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **14** (2004), 557–577.

-
- [69] A. RODRÍGUEZ-ARÓS, M. SOFONEA y J.M. VIAÑO, Numerical Analysis of a Frictional Contact Problem for Viscoelastic Materials with Long-term Memory. En preparación.
- [70] A. RODRÍGUEZ-ARÓS, M. SOFONEA y J.M. VIAÑO, Un resultado de convergencia para un problema viscoelástico de contacto, Actas del XVIII C.E.D. y A., Tarragona, (2003).
- [71] A. RODRÍGUEZ-ARÓS, M. SOFONEA y J.M. VIAÑO, Numerical Analysis of a Class of Evolutionary Variational Inequalities with Integral Term, en *Ann. Univ. Craiova, Math-Info.*, **30** (1), (2003).
- [72] A. RODRÍGUEZ-ARÓS, M. SOFONEA y J.M. VIAÑO, *A Signorini Frictionless Contact Problem for Viscoelastic Materials with Long-term Memory*, *Proceedings of European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications*, Springer-Verlag, Milano, 2003, 327–336.
- [73] W. RUDIN, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1973.
- [74] M. SHILLOR, Special Issue on Recent Advances in Contact Mechanics. *Mathematical and Computer Modelling*, **28** 4–8, (1998).
- [75] M. SHILLOR y M. SOFONEA, A quasistatic viscoelastic contact problem with friction, *Int. J. Engng. Sci.* **38** (2000), 1517–1533.
- [76] M. SHILLOR, M. SOFONEA y J.J. TELEGA, *Models and Analysis of Quasistatic Contact. Variational Methods*, Lecture notes in Physics, **655**, Springer, 2004.
- [77] A. SIGNORINI, Sopra alcune questioni di elastostatica, *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, (1933).
- [78] M. SOFONEA, *Problèmes mathématiques en élasticité et viscoplasticité*. Cours de DEA de Mat. Appl. Univ. Blaise Pascal, 1991.

-
- [79] M. SOFONEA y M. SHILLOR, Variational analysis of quasistatic viscoplastic contact problems with friction, *Communications in Applied Analysis* **5** (2001), 135–151.
- [80] M. SOFONEA, A. RODRÍGUEZ-ARÓS y J.M. VIAÑO, Creep formulation of the Signorini frictionless problem, *Advances in Nonlinear Variational Inequalities*, **6** (2003), 23–24.
- [81] M. SOFONEA, T. V. HOARAU-MANTEL, J.M. VIAÑO y A. RODRÍGUEZ-ARÓS, Creep formulation of a quasistatic frictional contact problem, *Advances in Nonlinear Variational Inequalities*, **7** 2 (2004), 1–27.
- [82] M. SOFONEA, A. RODRÍGUEZ-ARÓS y J.M. VIAÑO, A Class of Integro-Differential Variational Inequalities in Hilbert Spaces, aceptado para publicación en *Math. Comput. Modelling*.
- [83] J. SOTOMAYOR, *Lições de equações diferenciais ordinarias*, Publicação IMPA, 1979.
- [84] G. STRANG y G. FIX, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
- [85] B. SZABÓ y I. BABUŠKA, *Finite Element Analysis*, John Wiley, Inc., New York, 1991.
- [86] J.J. TELEGA, Variational inequalities in contact problems of mechanics, in *Contact Mechanics of Surfaces*, Z. Mróz (Ed.), Ossolineum, 1988, 51–165.
- [87] R. TEMAM y A. MIRANVILLE, *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

-
- [88] C. TRUESDELL, (Ed.), *Mechanics of Solids, Vol III : Theory of Viscoelasticity, Plasticity, Elastic Waves and Elastic Stability*, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [89] J.M. VIAÑO, *Inecuaciones variacionales. Teoría y algoritmos.*, Tesina, Depto. de Ecuaciones Funcionales. Univ. de Santiago de Compostela, (1978).
- [90] J.M. VIAÑO, Análisis de un método numérico con elementos finitos para problemas de contacto unilateral sin rozamiento en elasticidad: Formulación física y matemática de los problemas, *Rev. Internac. Méto. Numér. Cál. Diseñ. Ingr.* **1** (1985), 79-93.
- [91] J.M. VIAÑO, Análisis numérico de un método numérico con elementos finitos para problemas de contacto unilateral sin rozamiento en elasticidad: Aproximación y resolución de los problemas discretos, *Rev. Internac. Méto. Numér. Cál. Diseñ. Ingr.* **2** (1986), 63-86.
- [92] J.M. VIAÑO y M. BURGUERA, *Lecciones de métodos numéricos. 3.- Interpolación.* Tórculo Edicións, 2000.
- [93] E. ZEIDLER, *Applied Functional Analysis: Applications of Mathematical Physics*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [94] E. ZEIDLER, *Applied Functional Analysis: Main Principles and Their Applications*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [95] O.C. ZIENKIEWICZ y R.L. TAYLOR, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, London, **2 Solid Mechanics**, 1989.

Contact phenomena involving deformable bodies are very common in industrial processes, for example, in the automotive industry, metal forming or construction, but also in everyday life. Some examples of that are the contact between brake pads and wheels, tires on road, piston with skirt or orthodontic wire with brackets. In all these cases, friction is one of the most important tribological phenomena linked to contact. As a consequence, a considerable effort has been made in recent years in the study of different forms of contact and friction for a wide range of materials. Since the 60's of the 20th century, the classical mechanics modelize these phenomena, which are strongly non-linear, by using differential inclusions and analyse them by using arguments of the theory of maximal monotone operators, which leads to formulations in terms of variational inequalities. The problems without friction are a first step towards the study of more complex and realistic problems involving friction.

On the other hand, the research in solid mechanics has overcome the classical models in elasticity, which had been deeply studied. Nevertheless, they were unable to describe realistic phenomena as hardening, relaxation, permanent deformations or aging of materials. Thus, more complex models were needed to solve those difficulties.

This work intends to be a contribution in this field, performing the mathematical and numerical analysis of several contact problems for a specific kind of materials which follow a viscoelastic with long-term memory constitutive law. The main feature of these materials, from a mechanical point of view, is that the evolution of stresses and deformations does not depend just on what is happening "now" to the material, but also on what had happened "before", i.e., on their history or memory. In nature, several kinds of polymers, gums and wood have a mechanical behaviour which fit this model.

The contents in the manuscript are the result of the study of several contact problems for viscoelastic materials with long memory. Most of the main results derived are published or accepted for publication in specialized international journals.

We assume that the effects of the inertia are negligible, and study quasistatic problems. Some of them involve friction while others do not. The variational formulations obtained can be cast into two different abstract frameworks which consist of two different classes of evolutionary variational inequalities in Hilbert spaces, which at our knowledge had not been studied before. The first class, which is called "variational inequalities with Volterra integral term", is associated to contact problems without friction. The second class, which is called "integro-differential Volterra variational inequalities", is mainly associated to frictional contact problems. Their analysis is based on arguments of the theory of monotone operators in Banach spaces and a fixed point strategy.

Thus, the goal of this work is double. On one hand, we study the existence and uniqueness of solution, the properties and the numerical approximation of two different kinds of evolutionary variational inequalities in Hilbert spaces. On the other hand, these theoretical abstract results are applied to the variational and numerical analysis of a variety of contact problems for viscoelastic materials with long memory. Amongst them, we can highlight the frictionless unilateral contact problem between a deformable body and a foundation which can be either rigid (in this case it is best known as contact problem with Signorini conditions) or deformable (where the contact is modelled by using the normal compliance conditions), the contact problem between two deformable bodies without interpenetration nor friction, the bilateral and frictional contact problem between a deformable body and a rigid foundation (where the friction is given by the Tresca law) or the unilateral contact problem between a deformable body and a semi-rigid obstacle without friction.

In general, for each contact problem, we have performed the analysis of the existence and uniqueness of a weak solution, and, for the most of them, we have studied the numerical approximation of that solution, including error estimations by using the Finite Element Method, finite differences and numerical integration. For these contact problems, we have also derived numerical algorithms and implemented them on computer. Thus we show results of several numerical simulations for 1D, 2D and 3D test problems as well.