



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

As 27 rectas da superficie cúbica lisa do espazo proxectivo \mathbb{P}^3

Miguel Sánchez Campo

2021/2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

*As 27 rectas da superficie cúbica lisa do
espazo proxectivo \mathbb{P}^3*

Miguel Sánchez Campo

Xullo, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Álgebra
Título: Las 27 rectas de la superficie cúbica lisa del espacio proyectivo \mathbb{P}^3
Breve descripción do contido
<p>Mi interés por la superficie de Clebchs conteniendo 27 rectas reales viene de haberla encontrado reiteradamente en artículos divulgativos sobre esta superficie y la configuración de las 27 rectas contenidas en ella estudiada por el geómetra Suizo Ludwig Schläfli.</p> <p>He manifestado al profesor Manuel Pedreira mi deseo de realizar un tfg en donde pueda describir cómo se ha llegado a descubrir esta superficie y sus 27 rectas. Así como estudiar las propiedades más importantes relacionadas con dicha superficie. Por ejemplo su racionalidad.</p>
Recomendacións
Outras observacións

Índice

Resumo	VII
Introdución	VIII
1. Topoloxía de Zariski	1
1.1. Definicións e noións básicas	1
1.2. Teoría de dimensión	3
2. Rectas sobre superficies	5
2.1. Descrición dunha recta	5
2.2. Coordenadas de Plücker	5
2.3. Condicións para que unha recta esté contida nunha superficie	9
2.4. Toda superficie cúbica contén unha recta	10
2.5. Exemplos de rectas sobre superficies cúbicas	11
3. Teorema de Cayley-Salmon	16
3.1. Teorema de Cayley-Salmon	16
3.2. Configuracións entre as 27 rectas da cúbica lisa	23
3.3. Pares triedrais e normalizacións	27
3.4. Racionalidade da cúbica lisa	31
4. As matrices de intersección	33

4.1. Número de intersección, divisores e Grupo de Picard	33
4.2. Subgrupo de Picard xerado polas 27 rectas	39
4.3. Reducción da orde da matriz de intersección	41
4.4. Consideracións adicionais sobre o Teorema de Cayley-Salmon	42
Bibliografía	45

Resumo

Próbase a existencia dunha recta na superficie cúbica lisa de \mathbb{P}^3 . A partir de aquí e mediante argumentos xeométricos atópanse as 27 rectas de cúbica e tradúcese as relacións entre elas en números de interseccións. De xeito natural faise o estudo do Grupo de Picard da cúbica, amosando que toda curva $\mathcal{C} \subset S$ da cúbica é linealmente equivalente a unha combinación lineal de 6 das rectas da cúbica e unha cónica residual nun plano contendo a unha determinada recta de S . O concepto linealmente equivalente é suxerido pola deformación continua das interseccións de dous planos ca superficie S .

Abstract

It is proved the existence of a straight line on the smooth cubic surface of \mathbb{P}^3 . From here and through geometric arguments the 27 straight lines and the relationships between them are translated into intersection numbers. Naturally, the study of the Picard Group of the cubic is carried out, showing that every curve $\mathcal{C} \subset S$ of the cubic is linearly equivalent to a linear combination of 6 of the lines of the cubic and a residual conic in a plane containing another line of the family. The concept linearly equivalent is suggested by the continuous deformation of the intersections of two planes with the surface S .

Introdución

Neste TFG expónse un dos temas clásicos da Xeometría Alxébrica: A existencia de 27 rectas nunha superficie cúbica lisa S do espazo proxectivo ordinario \mathbb{P}^3 . Na literatura contemporánea, [H77], a exposición fáise considerando dita superficie como unha da familia de superficies de Del Pezzo [DP87]. Dita superficie ven sendo a realización proxectiva do sistema lineal e completo das cúbicas planas pasando por 6 puntos en posición xeral. Isto quere dicir que nunca 3 dises puntos están sobre unha mesma recta, e nunca os 6 están sobre unha cónica. As 27 rectas e as configuracións xeométricas existentes entre elas xorden de xeito natural coma imaxe de rectas do plano determinadas por cada dúos dises 6 puntos, ou imaxe de cónicas pasando por cada 5 dentre ises 6. De feito a superficie cúbica lisa é isomorfa á explosión do plano \mathbb{P}^2 neses 6 puntos e as 6 rectas excepcionais E_i representando os entornos infinitesimais de primer orde dos puntos en posición xeral completan, canda as xa mencionadas, as 27 rectas da cúbica lisa $S \subset \mathbb{P}^3$.

Por suposto, a proba clásica do teorema non se fixo por iste método. De feito nin A. Cayley, nin G. Salmon coñecían o concepto de explosión do plano proxectivo nun punto que chegaría 40 anos máis tarde da publicación deste resultado cos métodos hiperespaciais introducidos por G. Veronese e E. Bertini [E23]. Primeiramente A. Cayley proba a existencia dunha recta nunha superficie cúbica lisa $S \subset \mathbb{P}^3$, e faíno usando o chamado *Principio de enumeración das constantes* ou tamén coñecido coma *Principio de Plücker - Clebsch* cuxa versión contemporánea é o *Teorema da Dimensión das febras dun morfismo*. Probas deste resultado facendo uso deste *Principio-Teorema*, escritas contemporaneamente mais con ideas clásicas para atopar explícitamente as 27 rectas, son as divulgadas por D. Mumford en [M95], M. Reid en [R88] e I. Shafarevich [S88]. Porén a proba de Salmon [S14] da existencia dunha recta na superficie cúbica é máis acorde cos métodos da Xeometría Alxébrica da época (1847), daquela chamada *Xeometría Proxectiva Hiperespaciai*, e fai uso da teoría de Resultantes dunha familia de polinomios.

Unha proba da existencia dunha recta seguindo iste método expóna K. Hulek [K03] no capítulo 5, páxina 144 e seguintes. De feito, K. Hulek obtén un polinomio resultante de grao 27 cuxas solucións son 27 raíces simples, cada unha delas correspondendo a unha dentre as 27 rectas. Despois as configuracións entre as rectas, acádanse maiormente por argumentos xeométricos.

A idea para iste TFG xorde do feito de que a motivación de Cayley e Salmon para o seu teorema, ven da existencia de exemplos de superficies cúbicas táis que: tendo un punto singular, ou ben non conteñen rectas, ou ben conteñen unha infinidade delas. Véxanse os exemplos na sección 2.5. E se a cúbica é lisa contén 27 rectas. Unha destas superficies lisas foi atopada por Clebsch e as súas 27 rectas son de puntos reais. Outro exemplo importante é a cúbica lisa de Fermat. O procedemento empregado consiste en argumentar coma Cayley a existencia dunha recta na superficie cúbica lisa e logo, empregar argumentos xeométrico -alxébricos, para atopar as 27 rectas e as relacións entre elas.

O TFG divídese en 4 capítulos: no capítulo 1, expóñense as definicións básicas do que enténdese por un pechado de Zariski e propiedades elementáis desta topoloxía, e enúncianse dós resultados indispensábel na Xeometría Alxébrica. Dunha banda o feito de que mediante unha aplicación regular entre variedades proxectivas, a imaxe de todo pechado de Zariski volve a ser un pechado de Zariski, e o xa mencionado *Teorema da Dimensión das Febras*.

Xa no capítulo 2, probamos a existencia dunha recta nunha superficie cúbica lisa, e facemos explícitamente o argumento ó xeito dos clásicos destacando que ven garantido polo *Teorema da Dimensión das Febras*. Temos que manexar a familia de rectas do espazo proxectivo ordinario \mathbb{P}^3 , o que nos obriga a introducir as chamadas coordenadas de Plücker e a súa representación coma puntos da cuádrica non dexenerada $\mathcal{Q}_4 \subset \mathbb{P}^5$. Isto introduce o chamado mergullo de Plücker. Facer uso das coordenadas de Plücker dunha recta en \mathbb{P}^3 , permítenos explicitar que a condición de que unha recta esté contida nunha superficie ven reflexado na existencia de ecuacións polinómicas homoxéneas onde aparecen as coordenadas da recta e os coeficientes da superficie $S \subset \mathbb{P}^3$ de ecuación dada $F(X_0, X_1, X_2, X_3) = 0$. Finaliza o capítulo dando exemplos explícitos de cúbicas que, ou ben non conteñen rectas, ou conteñen unha infinidade, sendo sempre singulares, ou conteñen 27 rectas que podemos explicitar usando as súas coordenadas de Plücker.

O capítulo 3 adícase totalmente a probar o Teorema da existencia das 27 rectas, que chamamos Teorema de Cayley-Salmon, e coma consecuencia da existencia particular de dúas rectas disxuntas, próbase na sección 3.3, a súa racionalidade. Destaca na proba exposta que admitindo xa a existencia dunha recta, e xustificando ca teoría das resultantes, comezamos estudando os planos que contendo unha recta deixan coma sección en S unha cúbica dexenerada en 3 rectas distintas. Istes planos chámanse tritanxentes ordinarios (tanxentes en tres puntos diferentes, os outros planos tritanxentes son os que cortan en 3 rectas pasando por un punto). A argumentación é sempre xeométrica, e a xustificación é alxébrica. A partires da existencia de 5 planos tritanxentes ordinarios atópanse as configuracións das 27 rectas entre sí. Unha sección fundamental deste capítulo é a 3.4 no que un argumento totalmente xeométrico encol dos planos tritanxentes ordinarios permítenos atopar, salvo proxectividade, unha ecuación canónica para a cúbica lisa S . De feito próbase que calquer cúbica lisa do espazo ordinario \mathbb{P}^3 é proxectivamente equivalente á

superficie dada por un polinomio homoxéneo de grao 3 ben explicitado.

O capítulo 4 é unha ilustración da teoría de intersección de curvas nunha superficie (lisa). A existencia formal dunha teoría de intersección nunha superficie lisa, está probada no libro de R. Hartshorne [H77], capítulo 5, sección 1. Porén o feito de que unha cúbica lisa teña 27 rectas, e a configuración entre elas, permítenos introducir de xeito natural, os conceptos de Grupo de Divisores, e Grupo de Divisores linealmente equivalentes, ou Grupo de Picard. De feito permítenos introducir números de intersección que reflexan a posición das 27 rectas da cúbica. Neste punto, intervén a cónica residual nun plano xenérico contendo unha das rectas da cúbica e próbase formalmente que cada unha das 27 rectas é unha combinación con coeficientes enteiros de 6 delas e a cónica. Conclúese que o Grupo de Picard; isto é o grupo de clases de curvas linealmente equivalentes na cúbica é xenerado por táis 6 rectas e a cónica dada.

Capítulo 1

Topoloxía de Zariski

Todos os resultados e definicións deste capítulo, atópanse nos libros de M. Reid [R88] e I. Shafarevich [S88].

1.1. Definicións e nocións básicas

Nesta sección tratarase de expor a notación e presentar definicións e resultados relevantes para a comprensión do teorema último desta sección, o Teorema da Dimensión das Febras o cal nos permitirá garantir a existencia de rectas sobre as superficies cúbicas.

Ao longo de todo o traballo, k denotará a un corpo alxeбраicamente pechado de característica cero. Por outra banda \mathbb{A}^n ($\mathbb{A}^n \simeq k^n$) e \mathbb{P}^n farán referencia ao espazo afín e proxectivo de dimensión n asociados a k .

A topoloxía sobre a que traballaremos de aquí en diante será a de Zariski, esta quedará determinada ao definir os seus conxuntos pechados.

Definición 1.1. Diremos que $X \subseteq \mathbb{A}^n$ é un pechado ou pechado de Zariski cando este é o conxunto de ceros comúns a unha cantidade finita de polinomios con coeficientes en k .

Podemos estender esta definición a un espazo proxectivo \mathbb{P}^n de xeito análogo. Diremos que o punto $(a_0 : a_1 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n$ é un cero dun polinomio homoxéneo $f(X_0, X_1, \dots, X_n) \in k[X_0, X_1, \dots, X_n]$ cando $f(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0$, esta é unha boa definición por ser f un polinomio homoxéneo.

Os pechados de Zariski tamén reciben o nome de conxuntos alxébricos. Según sexan subconxuntos de \mathbb{P}^n ou isomorfos a un pechado de \mathbb{A}^n chamaranse respectivamente conxunto alxébrico proxectivo ou afín.

Definición 1.2. Diremos que $X \subset \mathbb{P}^n$ é un conxunto alxébrico cuasi-proxectivo se é localmente pechado, é dicir, se é a intersección, dentro dun espazo proxectivo, dun aberto e un pechado de Zariski.

Definición 1.3. Diremos que $S \subseteq \mathbb{P}^n$ é unha hipersuperficie de grao m definida por $F = 0$ cando S é un conxunto pechado definido polo polinomio homoxéneo F de grao m . Explícitamente se F é un polinomio homoxéneo de grao m , $F \in k[X_0, X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$ entón $S := \{(a_0 : a_1 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n / F(a_0 : a_1 : \dots : a_n) = 0\}$

Notemos que o conxunto de todos os polinomios homoxéneos de grao m con $n + 1$ variables con coeficientes en k forman un k -espazo vectorial de dimensión $\binom{m+n}{m}$. Observando que dous polinomios de este espazo definen a mesma hipersuperficie se e só se teñen coeficientes proporcionais, é dicir se ambos polinomios pertencen a mesma clase de equivalencia baixo a relación de proporcionalidade. Este feito expón que o conxunto de hipersuperficies de grao m en \mathbb{P}^n está en correspondencia biunívoca cos puntos de \mathbb{P}^N onde $N := \binom{m+n}{m} - 1$, cada punto de \mathbb{P}^N está a representar unha clase de polinomios con coeficientes proporcionais e dicir unha hipersuperficie.

Definición 1.4. Un conxunto pechado X dise redutible se existen subconxuntos pechados propios $X_1, X_2 \subsetneq X$ táis que $X = X_1 \cup X_2$. En caso contrario X dise irredutible.

Definición 1.5. Unha variedade alxébrica será un conxunto alxébrico, proxectivo ou afín, irredutible.

Definición 1.6. Sexa $X \subset \mathbb{P}^n$ un conxunto alxébrico cuasi-proxectivo, $f : X \rightarrow k$ cociente de dous polinomios homoxéneos do mesmo grao ($f = \frac{P}{Q}$). Diremos que f é regular en $x \in X$ se $Q(x) \neq 0$, é dicir, se f define unha función nunha veciñanza de x . Se f é regular $\forall x \in X$ entón f dirase regular en X .

Esta definición permítenos introducir o concepto de anel de coordenadas de X o cal nos facilitará distinguir se tal conxunto X é unha variedade ou non.

Definición 1.7. Sexa $X \subset \mathbb{P}^n$ un conxunto alxébrico cuasi-proxectivo, defínese o anel de coordenadas de X como o conxunto de todas as funcións $f = \frac{P}{Q}$ regulares en X , este será denotado por $S[X]$. Cando $X \subset \mathbb{A}^n$ é unha variedade afín o anel de coordenadas suele denotarse por $A[X]$.

Unha aplicación $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbb{A}^n$ é regular se $f_i : X \rightarrow k$ é regular $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Se $X \subset \mathbb{A}^n$ entón X é variedade alxébrica se e só se $A[X]$ é un dominio. Cando X é unha variedade alxébrica afín entón o corpo $k(X)$ das funcións racionais será definido como o corpo das fraccións do dominio $A[X]$. Se X é un conxunto cuasi-proxectivo entón $k(X) = k(U)$ con U un aberto non vacío de X .

Por último extenderemos o concepto de regularidade a funcións entre variedades alxébricas.

Definición 1.8. Sexa $f : X \subset \mathbb{P}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{P}^m$ unha aplicación entre variedades, f é dita regular se dado $x \in X$ e un entorno afín N de $f(x) \in Y$ ($f(x) \in N$), existe unha veciñanza aberta U de x ($x \in U$) tal que $f(U) \subset N$ e ademáis $f : U \rightarrow N$ é regular.

Teorema 1.9. *A imaxen dun conxunto alxébrico proxectivo por unha aplicación regular entre variedades proxectivas e pechada.*

1.2. Teoría de dimensión

Definición 1.10. A dimensión dunha variedade proxectiva X é o supremo das lonxitudes das cadeas de pechados irreducibles ordeados por inclusión estricta, esta denotarase por $\dim X$.

$$\dim X = \sup\{n \in \mathbb{N} / \exists \{p\} = Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_n = X \text{ unha cadea de irreducibles de } X\}$$

Tense que p é un punto de X e cada Y_i é unha subvariedade irreducible de X . Deste xeito $\dim X$ é a lonxitude da cadea de irreducibles mais longa que podemos construír entre un punto $p \in X$ e a propia variedade X .

Definición 1.11. Se $Y \subseteq X$ unha subvariedade pechada de X entón o número $\dim X - \dim Y$ é chamado codimensión de Y en X .

A continuación presentaranse algúns resultados sobre a dimensión de variedades.

Proposición 1.12. *Sexan X e Y conxuntos alxébricos. Entón tense que:*

1. *Se X é irreducible e $U \subseteq X$ é un aberto de X entón $\dim U = \dim X$.*
2. *Se X e Y son irreducibles entón $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$.*
3. *Se $X \subseteq Y$ entón $\dim X \leq \dim Y$. Por outro lado se Y é irreducible e X e pechado en Y con $\dim X = \dim Y$ entón $X = Y$.*

Definición 1.13. Sexa $f : X \rightarrow Y$ unha aplicación regular entre variedades e $y \in Y$ o conxunto $f^{-1}(y)$ chámase febra de f sobre y , e é un subconxunto alxébrico de X .

Teorema 1.14. (Dimensión das Febras). *Sexa $f : X \rightarrow Y$ unha función regular sobrexectiva entre variedades se $\dim X = n$ e $\dim Y = m$ tense que $m \leq n$ e ademáis:*

1. *$\dim F \geq n - m$ para toda compoñente F da febra $f^{-1}(y)$ con $y \in Y$ arbitrario.*

2. Existe un abierto no vacío $U \subseteq Y$ tal que $\dim f^{-1}(y) = m - n$ con $y \in U$.

Teorema 1.15. $f : X \rightarrow Y$ una aplicación regular sobreyectiva entre conjuntos algebraicos proyectivos. Suponemos que Y es irreducible y que todas las fibras $f^{-1}(y)$ con $y \in Y$ son irreducibles e de la misma dimensión. Entonces X es irreducible.

Capítulo 2

Rectas sobre superficies

As definicións e resultados que expoñemos nesta sección están sacados de [J92].

2.1. Descripción dunha recta

Para estudar as rectas de \mathbb{P}^3 aportaremos tres formas de interpretalas. Se $L \subset \mathbb{P}^3$ é unha recta entón:

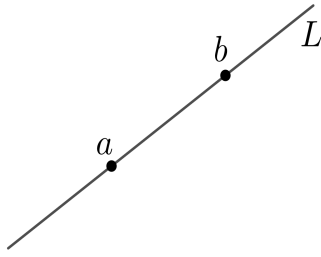
- 1) (Descripción xeométrica) L é o máis pequeno subespazo proiettivo contendo os dous puntos de \mathbb{P}^3 . Se $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3), (b_0 : b_1 : b_2 : b_3) \in L$ entón $L = \{(\lambda a_0 + \mu b_0 : \lambda a_1 + \mu b_1 : \lambda a_2 + \mu b_2 : \lambda a_3 + \mu b_3)/\lambda, \mu \in k \setminus \{0\}\}$. Véxase 2.1a.
- 2) (Descripción dual) L é a intersección de dous planos distintos. Véxase 2.1b.
- 3) (Coordenadas Plückerianas)

A dificultade de caracterizar unha recta das dúas primeiras formas radica na arbitrariedade da escolla de dous puntos ou dous planos.

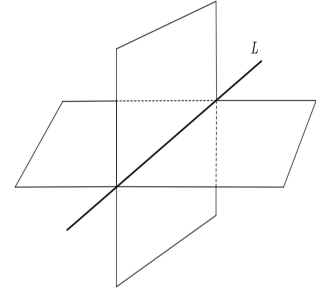
2.2. Coordenadas de Plücker

Teorema 2.1. (*Mergullo de Plücker*): Existe unha bixección entre as rectas de \mathbb{P}^3 e os puntos dunha hipersuperficie cuádrica $\mathcal{Q}_4 \subset \mathbb{P}^5$.

$$\{\text{rectas de } \mathbb{P}^3\} \longleftrightarrow \{(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}^5 / p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0\}$$



(a) Descripción xeométrica



(b) Descripción dual

Figura 2.1: Visualización de 1) e 2)

Onde a recta que pasa por $a = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ e $b = (b_0 : b_1 : b_2 : b_3)$ está en correspondencia co punto de coordenadas $p_{ij} := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i$

Demostración. Sexan (a_0, a_1, a_2, a_3) e (b_0, b_1, b_2, b_3) vectores linearmente independentes de k^4 tais que $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3), (b_0 : b_1 : b_2 : b_3) \in L$. Para ver que o mergullo está ben definido tomemos outros dous vectores $(c_0, c_1, c_2, c_3), (d_0, d_1, d_2, d_3) \in k^4$ tais que $(c_0 : c_1 : c_2 : c_3), (d_0 : d_1 : d_2 : d_3) \in L$. Digamos que $c_i = \lambda_1 a_i + \mu_1 d_i$ e $d_i = \lambda_2 a_i + \mu_2 d_i$ pra certos $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2 \in k$ e $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Tense que $\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ é dicir $\det \begin{pmatrix} c_i & c_j \\ d_i & d_j \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix} p_{ij}$ e dado que $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix} \neq 0$ temos que a aplicación está ben definida.

Para ver a implicación cara a dereita como os vectores a e b son linearmente independentes existen $i \leq j$ con $\det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} \neq 0$, sen perda de xeralidade podemos supor $i = 0$ e $j = 1$ entón

$\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} \neq 0$. Partindo deste feito existirá unha transformación proxectiva que nos permite

supor tamén sen perda de xeralidade que $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Así de esto e da definición dos p_{ij} obtense que $p_{01} = 1, p_{02} = b_2, p_{03} = b_3, p_{12} = -a_2, p_{13} = -a_3$ e $p_{23} = a_2 b_3 - a_3 b_2$ de onde se conclue que $p_{01} p_{23} - p_{02} p_{13} + p_{03} p_{12} = 0$.

Reciprocamente dado un punto $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}^5$ satisfacendo $p_{01} p_{23} - p_{02} p_{13} + p_{03} p_{12} = 0$ e supoñendo sen perda que $p_{01} = 1$, determina unha única recta, aquela que pasa por $(1 : 0 : -p_{12} : -p_{13})$ e $(0 : 1 : p_{02} : p_{03})$, tales puntos obtéñense ao resolver nas variables a_i, b_j con $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ o sistema de 8 ecuacions :

$$\begin{cases} p_{01} = 1 \\ p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0 \\ p_{ij} = a_i b_j - a_j b_i \text{ con } (i, j) \in \{(0, 1)(0, 2)(0, 3)(1, 2)(1, 3)(2, 3)\} \end{cases}$$

□

Algunhas observacións sobre este resultado e a súa demostración:

(1^a) A suposición $p_{01} \neq 0$ non restrinxe a xeralidade da proba pois dado $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}^5$ non todas as compoñentes son simultaneamente nulas. Tomar $p_{01} \neq 0$ dínos que a recta L non interseca a recta $H_0 \cap H_1 = \{(0 : 0 : x_2 : x_3)/(x_2 : x_3)\mathbb{P}^1\}$ onde $H_i = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3/x_i = 0\}$ é un plano. É dicir:

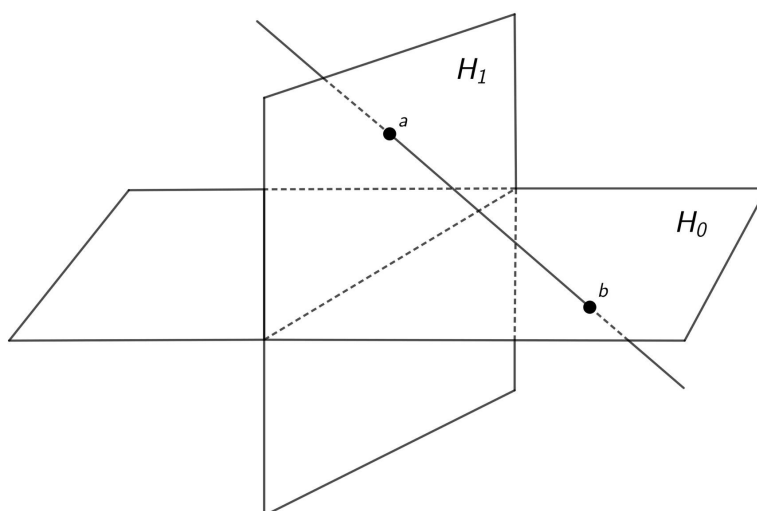
$$p_{01} \neq 0 \iff L \cap (H_0 \cap H_1) = \emptyset$$

” \implies ”

Se $p_{01} \neq 0$ podemos supor $p_{01} = 1$, de ahí conclúese que L pasa por $(1 : 0 : a_2 : a_3) \in H_1$ e por $(0 : 1 : b_2 : b_3) \in H_0$ logo $L \cap (H_0 \cap H_1) = \emptyset$.

” \impliedby ”

Se supoñemos que $p_{01} = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{pmatrix} = 0$ tense que os vectores (x_0, x_1) e (y_0, y_1) son linealmente dependentes, por ende existen constantes non simultaneamente nulas $\alpha, \beta \in k$ táis que $\alpha(x_0, x_1, x_2, x_3) + \beta(y_0, y_1, y_2, y_3) = (0, 0, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) \in L \cap (H_0 \cap H_1) \neq \emptyset$.



(2^a) A partir da descripción de L a partir de dous puntos podemos obter a descripción de L como intersección de dous planos. Se $(1 : 0 : a_2 : a_3), (0 : 1 : b_2 : b_3) \in L$ tense que $L = \{(x_0 : x_1 : a_2x_0 + b_2x_1 : a_3x_0 + b_3x_1)/(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1\} = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)/x_2 = a_2x_0 + b_2x_1 \text{ e } x_3 = a_3x_0 + b_3x_1\}$. Logo L é a intersección de $\Pi_1 = \{(x_0 : x_1 : a_2x_0 + b_2x_1 : x_3)/(x_0 : x_1 : x_3) \in \mathbb{P}^2\}$ e $\Pi_2 = \{(x_0 : x_1 : a_2x_0 + b_2x_1 : x_3)/(x_0 : x_1 : x_3) \in \mathbb{P}^2\}$.

(3^a) Sabemos que o plano proiettivo \mathbb{P}^2 e localmente afín, é dicir se l e unha recta en \mathbb{P}^2 entón $\mathbb{P}^2 \setminus \{l\} \cong k^2$ deste xeito as rectas de \mathbb{P}^3 que non intersecan á recta $H_0 \cap H_1$ forman un espacio afín 4-dimensional mediante $H_0 \setminus (H_0 \cap H_1) \times H_1 \setminus (H_0 \cap H_1) \cong \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^2$. Doutro xeito:

$$\{\mathbb{A}^4\} \longleftrightarrow \{(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}^5 / p_{01} = 1 \text{ e } p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0\}$$

Esta bixección fai corresponder un punto $(a_2, a_3, b_2, b_3) \in \mathbb{A}^4$ con $(1 : b_2 : b_3 : -a_2 : -a_3 : a_2b_3 - a_3b_2) \in \mathbb{P}^5$.

A importancia práctica do mergullo de Plücker é que nos permite manexar as rectas de \mathbb{P}^3 ao través das súas coordenadas de \mathbb{P}^5 , unha expresión sinxela que nos aparta da tediosidade de representala como unión de dous puntos ou intersección de dous planos.

Esta simplicidade permítenos traducir alxébricamente o feito de que dúas rectas de \mathbb{P}^3 se intersequen ao través dunha única expresión que relaciona as súas coordenadas de Plücker.

Proposición 2.2. *Dúas rectas en \mathbb{P}^3 con coordenadas de Plücker $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23})$ e $(q_{01} : q_{02} : q_{03} : q_{12} : q_{13} : q_{23})$ intersecanse se e só se $p_{01}q_{23} - p_{02}q_{13} + p_{03}q_{12} + p_{12}q_{03} - p_{13}q_{02} + p_{23}q_{01} = 0$.*

Demostración. Tomemos a recta unindo os puntos $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ e $(b_0 : b_1 : b_2 : b_3)$ e a recta unindo $(c_0 : c_1 : c_2 : c_3)$ e $(d_0 : d_1 : d_2 : d_3)$. Para que estas rectas se corten teñen que estar no mesmo plano polo que os puntos arriba marcados teñen que ser coplanarios o que equivale a que os vectores (a_0, a_1, a_2, a_3) , (b_0, b_1, b_2, b_3) , (c_0, c_1, c_2, c_3) e (d_0, d_1, d_2, d_3) sexan linearmente dependentes, o que se traduce en que:

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} \\ &+ \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} c_0 & c_3 \\ d_0 & d_3 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} c_0 & c_2 \\ d_0 & d_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ d_0 & d_1 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= p_{01}q_{23} - p_{02}q_{13} + p_{03}q_{12} + p_{12}q_{03} - p_{13}q_{02} + p_{23}q_{01}.$$

□

2.3. Condicións para que unha recta esté contida nunha superficie

Consideremos unha superficie $S \subseteq \mathbb{P}^3$ dada pola ecuación $F = 0$ onde $F \in k[X_0, X_1, X_2, X_3] \setminus \{0\}$ é un polinomio homoxéneo de grao m . Sexa $l \subseteq \mathbb{P}^3$ unha recta con coordenadas de Plücker $(p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23})$.

Proposición 2.3. *As condicións que expresan o feito de que unha recta L está contida nunha superficie S son un número finito de relacións alxébricas homoxéneas entre as coordenadas de Plücker da recta e os coeficientes do polinomio F que define a S .*

Demostración. Tratemos de presentar unha representación paramétrica de L en función das súas coordenadas de Plücker, para facelo construiremos o plano vectorial que a contén xa que este plano terá como imaxe a recta L pola proxección canónica $\pi : k^3 \setminus \{0\} \rightarrow \frac{k^3 \setminus \{0\}}{\sim}$, onde \sim é a relación de proporcionalidade.

Sexan $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ dós vectores linearmente independentes de k^4 tais que $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3), (y_0 : y_1 : y_2 : y_3) \in L$. Sexa $\mathcal{L} \subseteq k^4$ o 2-espazo vectorial xerado por x e y . Como se verá nunha observación posterior $\mathcal{L} = \{\langle v, y \rangle x - \langle v, x \rangle y / v \in k^4\}$. Así se v ten coordenadas (v_0, v_1, v_2, v_3) entón o vector $\langle v, y \rangle x - \langle v, x \rangle y$ ten coordenadas $z_i = \sum_{j=0}^3 p_{ij} v_j$ onde $p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$. Deste xeito podemos escribir os puntos de $L = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3 / (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{L} \setminus \{0\}\}$ como puntos cuxas coordenadas son $\sum_{j=0}^3 p_{ij} v_j$.

Substituíndo esta última expresión na ecuación $F(X_0, X_1, X_2, X_3) = 0$ e igualando a cero os coeficientes de todos os monomios en v_i obtemos ese número finito de relacións homoxéneas que forzan a que $L \subseteq S$. □

De seguido expoñense dúas observacións acerca da proba.

- 1) Descrición explícita da recta, $L = \{(v_1 p_{01} + v_2 p_{02} + v_3 p_{03} : -v_1 p_{01} + v_2 p_{12} + v_3 p_{13} : -v_0 p_{02} - v_1 p_{12} + v_3 p_{23} : -v_0 p_{03} - v_1 p_{13} - v_2 p_{23}) / (v_0, v_1, v_2, v_3) \in k^4 \setminus (0, 0, 0, 0)\}$

- 2) Vexamos que en efecto $\mathcal{L} = \{\langle v, y \rangle x - \langle v, x \rangle y / v \in k^4\}$:

Dado $l \in \mathcal{L}$ arbitrario, por ser x e y xeradores de \mathcal{L} existen $a, b \in k$ tais que $l = ax + by$. Queremos ver que existe $v \in k^4$ verificando $\langle v, y \rangle x - \langle v, x \rangle y = l = ax + by$. Igualando

os coeficientes de x e y a ambos lados da igualdade, equivale a ver que existe $v \in k^4$ cumprindo:

$$\begin{cases} \langle v, x \rangle := x_0v_0 + x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = -b \\ \langle v, y \rangle := y_0v_0 + y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 = a \end{cases}$$

Agora ben, tal sistema é resoluble por seren x e y linearmente independentes. A inclusión cara a esquerda e inmediata.

2.4. Toda superficie cúbica contén unha recta

Recordemos que o conxunto de hipersuperficies de grao m en \mathbb{P}^3 está en correspondencia biunívoca cos puntos de \mathbb{P}^N onde $N := \binom{m+3}{m} - 1$.

Sexa $\mathcal{Q}_4 = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbb{P}^5 / x_0x_5 - x_1x_4 + x_2x_3 = 0\}$ a hipersuperficie cuádriga que é imaxen das rectas de \mathbb{P}^3 polo mergullo de Plücker. Consideremos $\Gamma_m \subseteq \mathbb{P}^N \times \mathcal{Q}_4$ o conxunto de pares $(\Lambda, l) \in \mathbb{P}^N \times \mathcal{Q}_4$ tal que a recta l está contida na superficie Λ . Pola proposición anterior tense que Γ_m é un conxunto alxébrico proxectivo. Queremos calcular a súa dimensión.

Consideremos as proxeccións $\pi_1 : (\Lambda, l) \in \mathbb{P}^N \times \mathcal{Q}_4 \mapsto \Lambda \in \mathbb{P}^N$ e $\pi_2 : (\Lambda, l) \in \mathbb{P}^N \times \mathcal{Q}_4 \mapsto l \in \mathcal{Q}_4$, táis aplicacións son regulares e para o caso que nos ocupa consideraremos a súa restricción a Γ_m .

Notemos que $\pi_2(\Gamma_m) = \mathcal{Q}_4$ é dicir, para cada recta de \mathbb{P}^3 existe polo menos unha superficie de grao m que a contén.

Agora interézanos o cálculo da dimensión das febras $\pi_2^{-1}(l)$. Para este cálculo ao traveso dunha transformación proxectiva podemos asumir sen perda que a recta corespondente a l ven dada por $x_0 = x_1 = 0$ isto é, abusando de notación, $l \equiv \{(0 : 0 : x_2 : x_3) / (x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^1\}$. Os puntos $\Lambda \in \mathbb{P}^N$ táis que $(\Lambda, l) \in \pi_2^{-1}(l) \subseteq \Gamma_m$ corresponden as formas $F \in k[X_0, X_1, X_2, X_3]$ de grao m táis que $F(0, 0, x_2, x_3) = 0$ para todo $x_2, x_3 \in k$ isto é, as formas de grao m táis que os coeficientes de $X_2^m, X_2^{m-1}X_3, \dots, X_2X_3^{m-1}, X_3^m$ son nulos. Logo a codimensión do subespazo $\pi_2^{-1}(l)$ é $m + 1$ por tanto $\dim \pi_2^{-1}(l) = N - (m + 1)$.

Sabiamos que Γ_m era un conxunto alxébrico; ademáis, séguese do teorema 1.15 que Γ_m é irreductible e por ende variedade alxébrica. Aplicando a segunda parte do Teorema da Dimensión das Febras temos que $\dim \Gamma_m = \dim \pi_2(\Gamma_m) + \dim \pi_2^{-1}(l) = \dim \mathcal{Q}_4 + \pi_2^{-1}(l) = 4 + N - (m + 1) = N - m + 3$.

Considerando agora a outra proxección $\pi_1 : \Gamma_m \rightarrow \mathbb{P}^N$ temos que $\pi_1(\Gamma_m)$ é un pechado de \mathbb{P}^N por ser imaxe dun conxunto alxébrico por unha aplicación regular, así mesmo $\dim \pi_1(\Gamma_m) \leq \dim \mathbb{P}^N$.

A continuación estudarase o valor de $\dim\pi_1(\Gamma_m)$ en función do valor do grao m :

- Caso $m > 3$: Dado que $\dim\Gamma_m = N - m + 3$ cando $m > 3$ tense que $\dim\Gamma_m < N$. Isto significa que $\pi_1(\Gamma_m) \subsetneq \mathbb{P}^N$ é dicir, non todas as superficies de grao $m > 3$ conteñen algunha recta. Nótese que $\mathbb{P}^N \setminus \{\pi_1(\Gamma_m)\}$ é aberto. En resumo:

Teorema 2.4. *Para calquera $m > 3$, existen superficies de grao m que non conteñen ningunha recta. Máis aínda, tales superficies son un aberto de \mathbb{P}^N*

- Caso $m=1$: As superficies de grao 1 en \mathbb{P}^3 son os planos, e estes conteñen infinitas rectas.
- Caso $m=2$: Salvo transformación proectiva existen só catro cuádricas en \mathbb{P}^3 : a non singular, o cono, o plano dobre e a unión de dous planos simples. Sabemos que cada unha destas contén infinitas rectas. Verifiquemos que en efecto conteñen polo menos unha recta ca teoría dispoñible. Temos que $m = 2 \Rightarrow N = 9$. Polo tanto $\dim\Gamma_2 = 9 + 3 - 2 = 10$ e tamén $\dim\pi_1(\Gamma_2) \leq 9$. Aplicando o Teorema de Dimensión das Febras temos que o número de rectas é $\dim\pi_1^{-1}(l) \geq \dim\Gamma_2 - \dim\pi_1(\Gamma_2) \geq 10 - 9 = 1$.
- Caso $m=3$: Neste caso temos $N = 19$ e $\dim\Gamma_3 = N = 19$. Comezamos por afirmar que existe unha superficie cúbica Λ con un número finito de rectas, tal feito será visto posteriormente nun exemplo. Partindo deste feito temos que existe $\Lambda \in \mathbb{P}^{19}$ tal que $\pi_1^{-1}(\Lambda) \neq \emptyset$ e $\dim\pi_1^{-1}(\Lambda) = \dim\{\text{núm de puntos de } \Gamma_3\} = 0$ por ser este último un conxunto discreto finito.

Agora podemos afirmar que $\dim\pi_1(\Gamma_3) = \dim\mathbb{P}^{19}$. Vexámolo:

" \Leftarrow " De xeito inmediato, $\dim\pi_1(\Gamma_3) \leq \dim\mathbb{P}^{19} = 19$

" \Rightarrow " Aplicando a primeira parte do Teorema de Dimensión das Febras na febra $\pi_1^{-1}(\Lambda)$ temos que $0 = \dim\pi_1^{-1}(\Lambda) \geq \dim\Gamma_3 - \dim\pi_1(\Gamma_3)$, isto é $\dim\pi_1(\Gamma_3) \geq \dim\Gamma_3 = 19$

Por ser π_1 sobrexectiva temos que $\pi_1(\Gamma_3) \subseteq \mathbb{P}^{19}$ é un pechado e ademáis coa mesma dimensión que \mathbb{P}^{19} entón $\pi_1(\Gamma_3) = \mathbb{P}^{19}$.

De todo o exposto até aquí xunto co Teorema de Dimensión de Febras séguese o seguinte resultado para $m = 3$.

Teorema 2.5. *Toda superficie cúbica contén polo menos unha recta. Ademáis o subconxunto que parametriza todas as superficies cúbicas que conteñen só unha cantidade finita de rectas é un aberto non vacío de \mathbb{P}^{19} .*

2.5. Exemplos de rectas sobre superficies cúbicas

Ao longo dos exemplos será a variable X_0 a que faga referencia aos puntos do infinito, concretamente estaremos traballando con puntos do infinito se $X_0 = 0$.

A continuación expoñemos o concepto de regularidade ou non singularidade dun punto nunha superficie.

Definición 2.6. (Criterio de Jacobi): Un punto dunha superficie $F = 0$ dise singular ou non liso se todas as derivadas parciais de F se anulan nese punto.

De xeito análogo temos a definición xeralizada a superficies.

Definición 2.7. Unha superficie S definida por $F = 0$ é dita regular ou lisa se todos os seus puntos son lisos i.e. non contén puntos singulares.

A continuación presentanse distintos exemplos de superficies cúbicas nas que veremos como varia o número de rectas según a expresión de dita cúbica.

Exemplo 1: Superficie cúbica contendo unha cantidade finita de rectas en \mathbb{P}^3 , sexa S dada pola ecuación $F = 0$ onde

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_1 X_2 X_3 - X_0^3$$

Tal superficie non contén ningunha liña recta contida en \mathbb{A}^3 ($X_0 = 1$). Se escribimos a ecuación dunha recta afín na forma $X_i = a_i t + b_i$, $a_i, b_i \in k$ con $i = 1, 2, 3$ e substituímos na ecuación anterior obtemos unha contradición (ver máis abaixo). Pola contra a intersección da superficie co plano do infinito $X_0 = 0$ contén 3 liñas, éstas son $L_i : x_0 = x_i = 0$.

Notemos que polo Criterio de Jacobi para esta superficie os puntos $\{(0 : 1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1 : 0), (0 : 0 : 0 : 1)\}$ son singulares.

Verifiquemos agora a contradición que marcabamos arriba substituíndo X_i por $a_i t + b_i$ con $i = 1, 2, 3$ e $X_0 = 1$. Chegamos a unha igualdade de polinomios na variable t : $(a_1 t + b_1)(a_2 t + b_2)(a_3 t + b_3) = 1$, igualando coeficientes obtemos:

$$\begin{cases} a_1 a_2 a_3 = 0 \rightarrow a_1 = 0 \text{ ou } a_2 = 0 \text{ ou } a_3 = 0 \\ a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 + a_1 a_3 b_1 = 0 \\ a_1 b_2 b_3 + a_2 b_1 b_3 + a_3 b_1 b_2 = 0 \\ b_1 b_2 b_3 = 1 \rightarrow b_1 \neq 0, b_2 \neq 0 \text{ e } b_3 \neq 0 \end{cases}$$

Temos da 1ª expresión que $a_i = 0$ para certo i , entón substituíndo na 2ª expresión, como os b_s son non nulos temos $a_j a_k = 0$ de onde se segue: $a_j = 0$ ou $a_k = 0$. Asumimos sen perda que $a_j = 0$, substituíndo na 3ª ecuación, por ser os b_s non nulos, temos que $a_k = 0$. Conclusión: a recta redúcese ao punto (b_1, b_2, b_3) . Contradición!

Exemplo 2: Os Conos Cúbicos: Superficies cúbicas con infinitas rectas en \mathbb{P}^3 . Sexa $G(X_1, X_2, X_3)$ un polinomio homoxéneo de grao 3 en tres variables. A ecuación $G = 0$ describe unha

curva cúbica plana en $\mathbb{P}^2 = \{(0 : x_1 : x_2 : x_3) / (x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^2\}$. Agora podemos construír a superficie cúbica S mediante a unión das rectas que pasan polo punto da curva $(1 : 0 : 0 : 0)$ que chamamos vértice e por cada punto $\{(0 : x_1 : x_2 : x_3) / G(x_1, x_2, x_3) = 0\}$. S denominase *cono de vértice* $(1:0:0:0)$ sobre a curva $G=0$. O Criterio de Jacobi dinos que o vértice $(1 : 0 : 0 : 0) \in S$ é un punto singular, ademáis se a curva plana $G = 0$ ten unha singularidade no punto $(0 : a : b : c)$ entón cada punto $(x_0 : a : b : c) \in S$ con $x_0 \in k$ tamén é singular.

Observemos que cada recta de S pasando por $(0 : x_1 : x_2 : x_3)$ e $(1 : 0 : 0 : 0)$ ten coordenadas de Plücker $(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)$ e claramente existen infinitas rectas sobre S , en verdade tantas como puntos ten a curva plana $G = 0$.

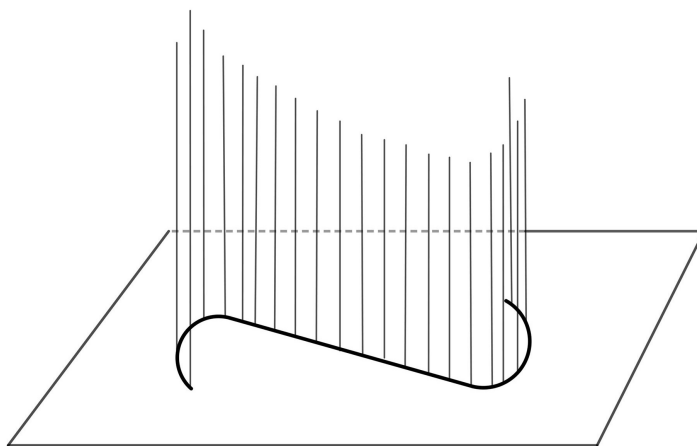


Figura 2.2: Cono cúbico

Notemos que esta definición de cono pode xeralizarse para calquera curva plana e calquera vértice fora do plano que contén a dita curva.

Exemplo 3: *A Superficie Cúbica de Fermat: Sexa*

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$$

Trataremos de escribir as coordenadas de Plucker de todas as rectas de $S : F = 0$. Sexa L dada por $(p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23})$ e consideremos $L \subseteq S$. Supoñamos $p_{01} \neq 0$ e sen perda tomemos $p_{01} = 1$, nese caso L é a recta que une os puntos $(1 : 0 : -p_{12} : -p_{13}), (0 : 1 : -p_{02} : -p_{03})$, esto é,

$$L = \{(x : y : -p_{12}x + p_{02}y : -p_{13}x + p_{03}y) \in \mathbb{P}^3 / (x, y) \in k^2 \setminus (0, 0)\}$$

Como L está contida en S temos que ver que $F(x, y, -p_{12}x + p_{02}y, -p_{13}x + p_{03}y) = 0$ con $(x, y) \neq (0, 0)$ en k^2 , isto é:

$$x^3 + y^3 + (-p_{12}x + p_{02}y)^3 + (-p_{13}x + p_{03}y)^3 = 0$$

operando obtemos:

$$(1 - p_{12}^3 - p_{13}^3)x^3 + (1 + p_{02}^3 + p_{03}^3)y^3 + 3(p_{02}p_{12}^2 + p_{03}p_{13}^2)x^2y - 3(p_{02}^2p_{12} + p_{03}^2p_{13})xy^2 \equiv 0$$

Temos entón o seguinte sistema:

$$\begin{cases} p_{12}^3 + p_{13}^3 = 1 \\ p_{02}^3 + p_{03}^3 = -1 \\ p_{02}p_{12}^2 + p_{03}p_{13}^2 = 0 \\ p_{02}^2p_{12} + p_{03}^2p_{13} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Obsérvese que as expresións do sistema non son homoxéneas como indicabamos na proposición 2.3. Isto é debido a que asumimos $p_{01} = 1$ e deshomonizamos o problema, porén no que resta trataremos de obter os valores de $p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}$ e p_{23} . Para resolver o sistema 2.1 tentaremos eliminar unha variable, escollemos p_{12} por ser linear na 4ª ecuación de 2.1, podemos despexala sempre que $p_{02} \neq 0$. Isto motívanos a dividir a resolución en dous casos:

- Caso 1: $p_{01} = 1$ e $p_{02} \neq 0$: Da 4ª ecuación de 2.1 temos:

$$p_{12} = -\frac{p_{03}^2p_{13}}{p_{02}^2}$$

Substituíndo na 1ª e 3ª ecuación de 2.1 obtemos:

$$\begin{cases} p_{13}^3(p_{02}^3 + p_{03}^3)(p_{02}^3 - p_{03}^3) = p_{02}^6 \\ p_{02}^3 + p_{03}^3 = -1 \\ p_{03}p_{13}^2(p_{02}^3 + p_{03}^3) = 0 \end{cases}$$

Substituíndo agora a 2ª deste último sistema nas outras dúas expresións temos:

$$\begin{cases} p_{13}^3(p_{02}^3 - p_{03}^3) = p_{02}^6 \\ p_{03}p_{13}^2 = 0 \end{cases}$$

Sendo $p_{02} \neq 0$ temos que $p_{13} \neq 0$, entón $p_{03} = 0$ e consecuentemente $p_{12} = 0$. Por outra banda da expresión $p_{02}^3 + p_{03}^3 = -1$ obtemos que $p_{02}^3 = -1$ e finalmente temos $p_{13}^3 = 1$. De todo isto obtemos un total de 9 solucións.

- Caso 2: $p_{01} = 1$ e $p_{02} = 0$: Séguese da 1ª expresión de 2.1 que $p_{03}^3 = -1$. Da 3ª e 4ª ecuación, por ser $p_{02} = 0$ e $p_{03} \neq 0$ concluimos que $p_{13} = 0$. Finalmente da 2ª ecuación de 2.1 temos que $p_{12}^3 = 1$. Neste caso tamén obtemos 9 solucións.
- Caso 3: $p_{01} = 0$ e $p_{02} = 1$: Vaéndonos da simetría de F resolveremos este caso basándonos no caso 2, aplicando a permutación de índices $(0213) \mapsto (0123)$ isto é $p_{01} \leftrightarrow p_{02}, p_{21} \leftrightarrow -p_{12}, p_{13} \leftrightarrow p_{23}$. Logo as solucións deste caso son: $p_{02} = 1, p_{01} = p_{23} = 0$ e $p_{03}^3 = p_{12}^3 = -1$. Neste caso volvemos obter 9 solucións.

En total obtivemos 27 solucións as cales explicitaremos a continuación. Antes de eso fagamos notar que esas son todas as solucións, xa que dos casos 1 e 2 se $p_{01} \neq 0$ implica que $p_{02} = p_{13} = 0$ ou $p_{03} = p_{12} = 0$, facendo un razoamento análogo podemos dicir que se $p_{02} \neq 0$ implica que $p_{01} = p_{23} = 0$ ou $p_{03} = p_{12} = 0$ e se $p_{03} \neq 0$ implica que $p_{01} = p_{23} = 0$ ou $p_{02} = p_{13} = 0$, é dicir p_{01} e p_{02} non se anulan simultaneamente, logo non hai que considerar ese cuarto caso onde os dous son nulos.

Resumo: Se nos referimos por ξ a raíz sexta primitiva da unidade $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, temos que as 27 rectas contidas na Superficie de Fermat dadas polas súas coordenadas de Plücker son:

01.(1 : -1 : 0 : 0 : 1 : -1)	10.(1 : 0 : -1 : 1 : 0 : 1)	19.(0 : 1 : -1 : -1 : 1 : 0)
02.(1 : -1 : 0 : 0 : - ξ : ξ)	11.(1 : 0 : -1 : ξ^2 : 0 : ξ^2)	20.(0 : 1 : -1 : - ξ^2 : ξ^2 : 0)
03.(1 : -1 : 0 : 0 : ξ^2 : - ξ^2)	12.(1 : -1 : 0 : - ξ : 1 : ξ)	21.(1 : -1 : 0 : ξ : - ξ : -1)
04.(1 : ξ : 0 : 0 : 1 : ξ)	13.(1 : -1 : ξ : 0 : 1 : - ξ)	22.(1 : -1 : ξ : 0 : - ξ : -1)
05.(1 : ξ : 0 : 0 : - ξ : - ξ^2)	14.(1 : -1 : ξ : ξ^2 : 1 : -1)	23.(1 : -1 : ξ : - ξ^2 : 1 : -1)
06.(1 : ξ : 0 : 0 : 1 : -1)	15.(1 : -1 : 0 : 0 : 1 : -1)	24.(1 : -1 : 0 : 0 : 1 : -1)
07.(1 : - ξ^2 : 0 : 0 : 1 : -1)	16.(1 : -1 : 0 : 0 : 1 : -1)	25.(1 : -1 : 0 : 0 : 1 : -1)
08.(1 : - ξ^2 : 0 : 0 : 1 : -1)	17.(1 : -1 : 0 : 0 : 1 : -1)	26.(1 : -1 : 0 : 0 : 1 : -1)
09.(1 : - ξ^2 : 0 : 0 : 1 : -1)	18.(1 : -1 : 0 : 0 : 1 : -1)	27.(1 : -1 : 0 : 0 : 1 : -1)

Tamén podemos describilas máis compactamente como tres familias 2-paramétricas de nove elementos cada unha:

$$\{(1 : -\lambda : 0 : 0 : \mu : -\lambda\mu)/\lambda^3 = 1 \text{ e } \mu^3 = 1\}$$

$$\{(1 : 0 : -\lambda : \mu : 0 : \lambda\mu)/\lambda^3 = 1 \text{ e } \mu^3 = 1\}$$

$$\{(0 : 1 : \lambda : -\mu : \lambda\mu : 0)/\lambda^3 = 1 \text{ e } \mu^3 = 1\}$$

Capítulo 3

Teorema de Cayley-Salmon

3.1. Teorema de Cayley-Salmon

As definicións e resultados expostos tanto neste como no derradeiro capítulo están recollidos nos libros de Hulek,k.[K03], Henderson,A.[He11] e Shafarevich,I.[S88]

Vimos até aquí que dada unha superficie cúbica $S \subset \mathbb{P}^3$ sempre existe unha recta L contida na mesma. A continuación levaremos un estudo de incidencia para determinar a posible existencia de outras rectas intersecando a L . Sempre que sexa necesario, por comodidade, podemos supor a existencia dunha transformación proectiva que fai que $L : x_0 = x_1 = 0$.

O polinomio $F \in k[X_0, X_1, X_2, X_3]$ que define a S é unha k -combinación linear dos 20 monomios de grao 3 en 4 variables (n° monomios = $\frac{(M+N-1)!}{M!(N-1)!}$ con M =grao de F , N = n° variables). Como a recta L está contida en S os monomios onde non aparecen X_0 e X_1 , ($X_2^3, X_2^2X_3, X_2X_3^2, X_3^3$) teñen que ter coeficientes nulos. Reciprocamente, se os coeficientes dos termos onde non aparecen X_0 e X_1 son nulos, entón cada monomio posue o factor X_0 ou X_1 e por tanto a recta $L : x_0 = x_1 = 0$ está contida na superficie $S : F = 0$.

Atendendo a isto temos que F ten a seguinte expresión:

$$\begin{aligned} F(X_0, X_1, X_2, X_3) = & c_{01}X_0^3 + c_{02}X_1^3 + c_{03}X_0^2X_1 + c_{04}X_0X_1^2 + c_{05}X_0^2X_2 + c_{06}X_0X_2^2 + \\ & + c_{07}X_0^2X_3 + c_{08}X_0X_3^2 + c_{09}X_1^2X_2 + c_{10}X_1X_2^2 + c_{11}X_1^2X_3 + c_{12}X_1X_3^2 + \\ & + c_{13}X_0X_1X_2 + c_{14}X_0X_1X_3 + c_{15}X_0X_2X_3 + c_{16}X_1X_2X_3 \end{aligned}$$

onde os coeficientes c_{ij} non son todos nulos.

A partir de agora suporemos que S é non singular é dicir que é unha superficie lisa.

Sexa $P \subset \mathbb{P}^3$ un plano, cando P interseca á cúbica S determina unha curva plana cúbica. Esta

cúbica plana puidera ser *a priori* unha recta triple, a unión dunha recta dobre e unha simple, a unión de tres rectas simples ou a unión dunha cónica non dexerada e unha recta simple.

Definición 3.1. Diremos que un plano P é tritanxente ordinario ou xenérico a S se a súa intersección e a unión de tres rectas distintas.

Resaltemos que a palabra tritanxente fai referencia aos tres puntos ou punto triplo onde o plano e tanxente á superficie.

Consideremos agora a familia dos planos $P_{(a:b)} \subset \mathbb{P}^3$ que conteñen a recta $L : x_0 = x_1 = 0$ e pasa polo punto $(a : b : 0 : 0)$ onde $(a : b) \in \mathbb{P}^2$, explicitamente:

$$P_{(a:b)} = \{(ax : bx : y : z)/(x : y : z) \in \mathbb{P}^2\}$$

Cada un deses planos interseca a S nunha cúbica plana que contén a recta L , é dicir esa intersección é a unión dunha recta e unha cónica. Cando esta cónica fose dexenerada e non contivera a recta L entón o plano $P_{(a:b)}$ determina sobre S tres rectas, sendo polo menos dúas distintas.

As cuestións que nos interesan a continuación serán: atopar condicións sobre a e b e os coeficientes de F que expresen o feito de que $P_{(a:b)} \cap S$ sexa a unión de tres rectas, determinar a cantidade de planos tritanxentes contendo a L e saber o número de rectas de S que intersecan a recta L .

Imos comezar analizando o caso particular $(a : b) = (0 : 1)$, e dicir o plano $P_{(0:1)}$ cuxa primeira coordenada e nula. Isto tradúcese en facer: $X_0 = 0$, $X_1 = x$, $X_2 = y$, $X_3 = z$ na ecuación F que define a S , obtemos así a ecuación da curva cúbica $P_{(a:b)} \cap S$:

$$x(c_{02}x^2 + c_{10}y^2 + c_{12}z^2 + c_{09}xy + c_{11}xz + c_{16}yz) = 0$$

Esta curva é a unión da recta $L : x = 0$ e a cónica $(x, y, z)G(x, y, z)^t = 0$, onde

$$G = \begin{pmatrix} c_{02} & \frac{1}{2}c_{09} & \frac{1}{2}c_{11} \\ \frac{1}{2}c_{09} & c_{10} & \frac{1}{2}c_{16} \\ \frac{1}{2}c_{11} & \frac{1}{2}c_{16} & c_{12} \end{pmatrix}$$

Proposición 3.2. A cónica $(x, y, z)G(x, y, z)^t = 0$ é dexenerada se e só se a matriz G é singular, é dicir se $\det G = 0$.

Demostración. Se a cónica é dexenerada significa que algún punto $(x_0 : y_0 : z_0)$ é singular, e polo Criterio de Jacobi teriamos:

$$\nabla((x, y, z)G(x, y, z)^t)(x_0, y_0, z_0) = 0$$

onde $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial X_i} \right)_{i=0}^n$ é o operador gradiente. Tense entón que $0 = \nabla((x, y, z)G(x, y, z)^t)(x_0, y_0, z_0) = 2G(x_0, y_0, z_0)^t$ o que equivale a dicir que a matriz $2G$ é singular, así $\det G = 0$ \square

Supoñendo no caso particular que $\det G = 0$, para ver que a cúbica plana é unión de tres rectas faltarianos por probar que a recta $L : x = 0$ non e compoñente da cónica dexenerada $(x, y, z)G(x, y, z)^t = 0$ e que esta cónica non é unha recta dobre. De esto poderíamos concluir que o plano $P_{(0:1)} : x_0 = 0$ é tritanxente á superficie cúbica non singular S . Que a recta L non sexa compoñente da cónica garante a existencia de dúas rectas distintas. Agora ben, a cónica non pode ser unha recta dobre pois, se aplicamos o razoamento aplicado a L a unha das compoñentes da recta dobre obtemos que ésta ten que ser distinta as outras dúas. Por tanto todo se reduce a probar:

Proposición 3.3. *A recta L non é compoñente da cónica $(x, y, z)G(x, y, z)^t = 0$.*

Demostración. Partimos dunha superficie lisa S definida por F , a afirmación que queremos probar é equivalente a dicir que x divide ao polinomio $c_{02}x^2 + c_{10}y^2 + c_{12}z^2 + c_{09}xy + c_{11}xz + c_{16}yz$, isto implicaría que a expresión $c_{10}y^2 + c_{12}z^2 + c_{16}yz$ e idénticamente nula.

Se aplicamos o Criterio de Jacobi aos puntos $(0 : 0 : y : z) \in L$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial X_0}(0, 0, y, z) &= c_{06}y^2 + c_{15}z^2 + c_{08}yz \\ \frac{\partial F}{\partial X_1}(0, 0, y, z) &= c_{10}y^2 + c_{12}z^2 + c_{16}yz \equiv 0 \\ \frac{\partial F}{\partial X_2}(0, 0, y, z) &= \frac{\partial F}{\partial X_3}(0, 0, y, z) = 0 \end{aligned}$$

Sendo k alxébricamente pechado, a ecuación cuadrática $c_{06}y^2 + c_{15}z^2 + c_{08}yz = 0$ admite unha solución (y_0, z_0) non trivial e polo tanto o punto $(0 : 0 : y_0 : z_0) \in L \subseteq S$ sería singular, o que contradí a non singularidade de S . \square

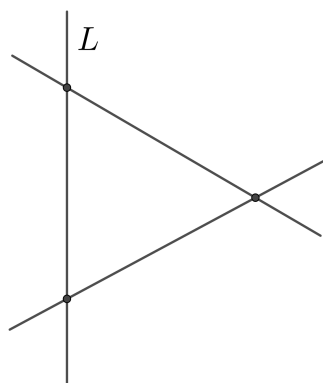
No caso xeral substituímos X_0 por ax , X_1 por bx , X_2 por y e X_3 por z na ecuación F que define a S . Entón a cúbica plana $P_{(a,b)} \cap S$ é a unión da recta $L : x = 0$ e a cónica $(x, y, z)G(x, y, z)^t = 0$ onde

$$G = \begin{pmatrix} (c_{01}a^3 + c_{03}a^2b + c_{04}ab^2 + c_{02}b^3) & \frac{1}{2}(c_{05}a^2 + c_{13}ab + c_{09}b^2) & \frac{1}{2}(c_{07}a^2 + c_{14}ab + c_{11}b^2) \\ \frac{1}{2}(c_{05}a^2 + c_{13}ab + c_{09}b^2) & (c_{06}a + c_{10}b) & \frac{1}{2}(c_{15}a + c_{16}b) \\ \frac{1}{2}(c_{07}a^2 + c_{14}ab + c_{11}b^2) & \frac{1}{2}(c_{15}a + c_{16}b) & (c_{08}a + c_{12}b) \end{pmatrix}$$

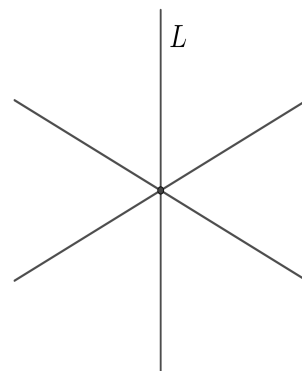
Notemos que $\det G$ é unha forma de grao 5 nas variables a e b con coeficientes dados por combinacións dos coeficientes c_{ij} de F . Ao igual que antes a cónica é dexerada se e só se $\det G = 0$. Así a ecuación $\det = 0$ expón as relacións entre a, b e os 16 coeficientes de F para que a curva $P_{(a,b)} \cap S$ sexa a unión de tres rectas non necesariamente distintas.

Por ser k alxébricamente pechado, existe unha raíz $(a_0 : b_0)$ para a ecuación quártica $\det G = 0$. Por unha transformación proxectiva podemos supor $(a_0 : b_0) = (0 : 1)$. Polo visto no estudo do caso particular temos que $P_{(0:1)}$ é tritanxente a S .

Até aquí temos que dada unha recta L sobre unha superficie cúbica lisa $S \subseteq \mathbb{P}^3$ existe un plano P tal que $S \cap P$ é a unión de tres rectas distintas, sendo unha delas L . Estas tres rectas só poden ter dúas configuracións posibles ou se cortan en tres puntos como vemos en 3.1a ou concurren nun único punto como se aprecia en 3.1b.



(a) Intersección en 3 puntos



(b) Concurrencia nun punto

Figura 3.1: Posibles interseccións de 3 rectas

Para atopar o número exacto de planos tritanxentes só precisamos saber o número de raíces distintas $(a : b)$ da ecuación quártica $\det G = 0$.

Proposición 3.4. *Cada raíz $(a : b)$ de $\det G = 0$ é simple.*

Demostración. Como vimos anteriormente $(a : b) = (0 : 1)$ é unha raíz, será suficiente mostrar que ten multiplicidade 1. Para probar isto distinguiremos dous casos según a configuración das tres rectas.

Caso 1 (Tres puntos de intersección): Podemos supor depós dunha transformación proxectiva que as tres rectas son $L_i : x_0 = x_i = 0$ con $i = 1, 2, 3$ no plano $P_{(0:1)} : x_0 = 0$. Neste caso, F ven dado por:

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_0(c_{01}X_0^2 + c_{03}X_0X_1 + c_{04}X_1^2 + c_{05}X_0X_2 + c_{06}X_2^2 + c_{07}X_0X_3 + c_{08}X_3^2 + c_{13}X_1X_2 + c_{14}X_1X_3 + c_{15}X_2X_3) + X_1X_2X_3$$

Onde se obtiveron as seguintes simplificacións con respecto á primeira expresión de F : $c_{02} = c_{09} = c_{10} = c_{11} = c_{12} = 0$ e $c_{16} = 1$.

Con estas simplificacións e deshomoxeneizando en b a ecuación $\det G = 0$, obtense:

$$\det \begin{pmatrix} (c_{01}a^3 + c_{03}a^2 + c_{14}a) & \frac{1}{2}(c_{05}a^2 + c_{13}a) & \frac{1}{2}(c_{07}a^2 + c_{11}a) \\ \frac{1}{2}(c_{05}a^2 + c_{13}a) & (c_{06}a) & \frac{1}{2}(c_{15}a + 1) \\ \frac{1}{2}(c_{07}a^2 + c_{14}a) & \frac{1}{2}(c_{15}a + 1) & (c_{08}a) \end{pmatrix} = 0$$

Obviamente $a = 0$ é unha raíz da ecuación anterior. Observemos que ésta é simple se e só se o coeficiente de a no polinomio anterior $\det G$ é distinto de cero, tal coeficiente é $-\frac{1}{4}c_{04}$, que é distinto de cero xa que $c_{04} \neq 0$.

A curva cúbica $P_{(0:1)} \cap S$ é a unión de tres rectas distintas L_1, L_2 e L_3 así ten tres puntos singulares, estes son $L_1 \cap L_2 = (0 : 0 : 0 : 1)$, $L_1 \cap L_3 = (0 : 0 : 1 : 0)$ e $L_2 \cap L_3 = (0 : 1 : 0 : 0)$, como estes pertencen a S podémoslles aplicar o Criterio de Jacobi.

Comezamos por aplicar o Criterio de Jacobi aos puntos da forma $(0 : x : y : z) \in P_{(0:1)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial X_0}(0, x, y, z) &= c_{04}x^2 + c_{06}y^2 + c_{08}z^2 + c_{13}xy + c_{14}xz + c_{15}yz \\ \frac{\partial F}{\partial X_1}(0, x, y, z) &= yz, \quad \frac{\partial F}{\partial X_2}(0, x, y, z) = xz, \quad \frac{\partial F}{\partial X_3}(0, x, y, z) = xy \end{aligned}$$

Tense que nos puntos $(0 : 0 : 0 : 1)$, $(0 : 0 : 1 : 0)$ e $(0 : 1 : 0 : 0)$ as derivadas $\frac{\partial F}{\partial X_1}$, $\frac{\partial F}{\partial X_2}$ e $\frac{\partial F}{\partial X_3}$ son nulas. Por outra banda $\frac{\partial F}{\partial X_0}$ toma os valores c_{08} , c_{06} e c_{04} en sendos puntos respectivamente. Como estes puntos pertencen á superficie non singular S necesariamente estes coeficientes son non nulos. Como $a = 0$ anula a F e non ó seu gradiente concluímos que $a = 0$ e raíz simple da ecuación $\det G$.

Caso 2 (Concurrencia nun punto): Despois dunha transformación proxectiva podemos considerar que as tres rectas sexan $L_1 : x_0 = x_1 = 0$, $L_2 : x_0 = x_2 = 0$ e $L_3 : x_0 = x_1 + x_2 = 0$ no plano $P_{(0:1)} : x_0 = 0$. Neste caso F ven dado por:

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_0(c_{01}X_0^2 + c_{04}X_1^2 + c_{06}X_2^2 + c_{08}X_3^2 + c_{03}X_0X_1 + c_{05}X_0X_2 + c_{07}X_0X_3 + c_{13}X_1X_2 + c_{14}X_1X_3 + c_{15}X_2X_3) + X_1X_2(X_1 + X_2)$$

Neste caso as simplificacións obtidas son $c_{02} = c_{11} = c_{12} = c_{16} = 0$ e $c_{09} = c_{10} = 1$. Baixo estas simplificacións e deshomoxeneizando en b a ecuación $\det G = 0$ redúcese a :

$$\det G = \begin{pmatrix} (c_{01}a^3 + c_{03}a^2 + c_{04}a) & \frac{1}{2}(c_{05}a^2 + c_{13}a + 1) & \frac{1}{2}(c_{07}a^2 + c_{14}a) \\ \frac{1}{2}(c_{05}a^2 + c_{13}a + 1) & (c_{06}a + 1) & \frac{1}{2}c_{15}a \\ \frac{1}{2}(c_{07}a^2 + c_{14}a) & \frac{1}{2}c_{15}a & c_{08}a \end{pmatrix}$$

Tense que $a = 0$ é unha raíz de $\det G = 0$. Análogamente ao caso anterior dicir que a é unha raíz simple equivale a esixir que $c_{08} \neq 0$. Neste caso o punto de intersección $P_{(0:1)} \cap S = L_1 \cap L_2 \cap L_3$

é $(0 : 0 : 0 : 1)$. Por estar este punto en S aplicándolle o Criterio de Jacobi obtemos a condición $c_{08} \neq 0$. De feito aplicando o Criterio de Jacobi aos puntos $(0 : x : y : z) \in P_{(0:1)}$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial X_0}(0, x, y, z) &= c_{04}x^2 + c_{06}y^2 + c_{08}z^2 + c_{13}xy + c_{14}xz + c_{15}yz \\ \frac{\partial F}{\partial X_1}(0, x, y, z) &= 2xy + y^2, \quad \frac{\partial F}{\partial X_2}(0, x, y, z) = 2xy + x^2, \quad \frac{\partial F}{\partial X_3}(0, x, y, z) = 0 \end{aligned}$$

Entón para o punto a estudar $(0 : 0 : 0 : 1)$ tense que $\frac{\partial F}{\partial X_1} = \frac{\partial F}{\partial X_2} = \frac{\partial F}{\partial X_3} = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial X_0} = c_{08}$. Así $c_{08} \neq 0$ pola non singularidade de S e por tanto $a = 0$ e raíz simple. \square

A continuación mostramos algúns resultados para expoñer as conclusións desta sección.

Teorema 3.5. *Sexa S unha superficie cúbica non singular en \mathbb{P}^3 . Para cada recta $L \subseteq S$ existen exactamente 5 planos tritanxentes a S contendo a L . Consecuentemente, cada recta $L \subseteq S$ interseca a outras 10 rectas distintas contidas en S .*

Tendo probado até aquí os requisitos necesarios podemos enunciaren finalmente o seguinte resultado:

Teorema 3.6. (Cayley-Salmon, 1849): *Dada unha superficie cúbica non singular en \mathbb{P}^3 , existen exactamente 27 rectas de \mathbb{P}^3 contidas na mesma.*

Demostración. Sexa P un plano tritanxente a S e sexan L_1, L_2 e L_3 as rectas de $P \cap S$. Cada unha destas rectas interseca a outras 10 rectas distintas estando 2 contidas en P e outras 8 fóra de P . Entón podemos contar para cada $i = 1, 2, 3$ á recta L_i e as 8 rectas que non están en P intersecando a L_i . O total de rectas obtidas é:

$$3 + 3 \times 8 = 27$$

Agora só falta mostrar que estas 27 son todas as rectas. Supoñamos que existe outra recta contida en S , se está en P entón tal recta sería algunha das L_i que xa foron contadas. Se non está en P , intersecao nalgún punto, como esta recta está en S o punto de intersección con P estará en $P \cap S$, e por elo esta recta intersecará a algunha recta L_i , no entanto estas rectas xa foron contadas. \square

Corolario 3.7. *Unha superficie cúbica lisa en \mathbb{P}^3 admite exactamente:*

$$\frac{27 \cdot 5}{3} = 45$$

planos tritanxentes.

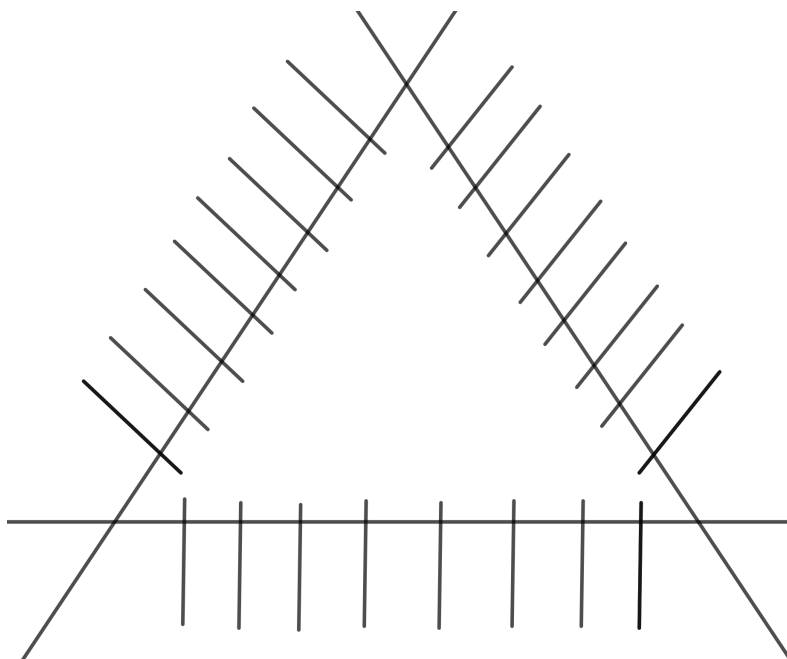


Figura 3.2: Configuración das 27 rectas

Para concluir esta sección, hacemos fincapé en que a condición de non singularidade de S é fundamental, tanto na prova de que a recta L non é compoñente da cónica dexterada $(x, y, z)G(x, y, z)^t$ como na prova de que as raíces da ecuación cuántica $\det G = 0$ son todas simples. Á luz disto reexaminaremos os exemplos 1) e 2) da sección anterior.

Exemplo 1: Sexa a cúbica singular dada polo polinomio:

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_1 X_2 X_3 - X_0^3$$

Empregando a notación desta sección temos: $c_{01} = 1, c_{16} = -1$ e $c_{02} = \dots = c_{15} = 0$, notemos tamén que a recta $L : x - 0 = x_1 = 0$ está contida en S . Entón a ecuación cuántica, de onde sairán as raíces que caracterizan aos planos tritanxentes ven dada por:

$$\det G = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}b \\ 0 & \frac{1}{2}b & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}a^3 b^2 = 0$$

Se $a \neq 0$ podemos considerar sen perda $a = 1$ e obtemos a raíz $(1 : 0)$ con multiplicidade 2. Por outro lado se $b \neq 0$, considerando $b = 1$, obtemos a raíz $(0 : 1)$ con multiplicidade 3. Observemos o efecto de que as raíces non sexan simples.

No plano $P_{(0:1)} : x_0 = 0$ temos a ecuación da curva cúbica $S \cap P_{(0:1)}$ ven dada por $xyz = 0$, e dicir as tres rectas son distintas. Pola contra no plano $P_{(1:0)} : x_1 = 0$ a ecuación da curva cúbica $S \cap P_{(0:1)}$ ven dada por $x^3 = 0$ o que indica unha recta triple.

Exemplo 2: Os Conos Cúbicos: Consideramos o cono cúbico de vértice $(1 : 0 : 0 : 0)$ sobre a curva plana $G = 0$ onde $G \in k[X_1, X_2, X_3]$ é unha forma de grao 3 en tres variables. A superficie S ven dada pola ecuación $F(X_0, X_1, X_2, X_3) = G(X_1, X_2, X_3)$.

Podemos supor despois dunha transformación proxectiva no plano " \mathbb{P}^2 " = $\{(0 : x_1 : x_2 : x_3)/(x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^2\}$, que a curva $G = 0$ pasa polo punto $(0 : 1 : 0 : 0)$. Con eso garantimos que a recta $L : x_0 = x_1 = 0$ está contida na superficie S , e coa notación desta sección obtemos as seguintes simplificacións: $c_{01} = c_{03} = c_{04} = c_{05} = c_{06} = c_{07} = c_{08} = c_{13} = c_{14} = c_{15} = 0$. Entón a ecuación quántica que nos caracterizará os planos tritanxentes está dada por:

$$\det G = \det \begin{pmatrix} c_{02}b^3 & \frac{1}{2}c_{09}b^2 & \frac{1}{2}c_{11}b^2 \\ \frac{1}{2}c_{09}b^2 & c_{10}b & \frac{1}{2}c_{16}b \\ \frac{1}{2}c_{11}b^2 & \frac{1}{2}c_{16}b & c_{12}b \end{pmatrix} = b^5 \det \begin{pmatrix} c_{02} & \frac{1}{2}c_{09} & \frac{1}{2}c_{11} \\ \frac{1}{2}c_{09} & c_{10} & \frac{1}{2}c_{16} \\ \frac{1}{2}c_{11} & \frac{1}{2}c_{16} & c_{12} \end{pmatrix} = 0$$

Vemos que se o determinante anterior que acompaña ao termo b^5 é nulo, entón a ecuación quántica sería idénticamente cero o que caracterizaría infinitas solucións e con elo infinitos planos tritanxentes. Se pola contra tal determinante é non nulo obtemos a raíz $(a : b) = (1 : 0)$ con multiplicidade 5. En calquera caso o efecto que producen as singularidades é a desaparición de 5 raíces simples para a ecuación quántica.

3.2. Configuracións entre as 27 rectas da cúbica lisa

Seguimos estudando as posibles configuracións e interseccións entre as 27 rectas. Estas foron estudadas polo matemático suízo *Ludwig Schäfli*. Aquí amosaremos as máis importantes dentro da teoría de intersección da cúbica lisa.

En primeiro lugar pretendemos probar que non existen triedros sobre unha superficie cúbica non singular S . Definindo triedro da seguinte maneira.

Definición 3.8. Un triedro é unha figura formada pola unión de tres rectas distintas non coplanares que concorren nun mesmo punto chamado vértice.

Proposición 3.9. *Unha superficie cúbica non singular non contén triedros. En particular, se tres rectas distintas sobre a superficie concorren nun mesmo punto, entón son coplanares.*

Demostración. Supoñamos unha superficie cúbica dada por $F = 0$ con $F \in k[X_0, X_1, X_2, X_3]$ conteña un triedro. Baixo unha transformación proxectiva, podemos supoñer que dito triedro é

dato pola recta $x_0 = x_1 = 0$, $x_0 = x_2 = 0$ e $x_1 = x_2 = 0$, e con vértice $(0 : 0 : 0 : 1)$. Entón, en base a esto podemos escribir F como:

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_0X_2(a_1X_0 + a_2X_1 + a_3X_2 + a_3X_3) + \\ + X_1(a_5X_0 + a_6X_2)(a_7X_0 + a_8X_1 + a_9X_2 + a_{10}X_3)$$

Aplicando o Criterio de Jacobi ao vértice $(0 : 0 : 0 : 1)$ concluímos que tal punto é singular. \square

Sexa A_1 unha das 27 rectas contidas en S . Sexa B_1 unha das rectas sobre S que non intersecan A_1 .

Proposición 3.10. *Existen exactamente 5 rectas sobre S que intersecan simultáneamente A_1 e B_1 .*

Demostración. Considere a recta A_1 e as outras dúas rectas distintas nun dos 5 planos tritanxentes que conteñen A_1 . A recta B_1 interseca a este plano en algún punto de A_1 ou das outras dúas rectas. Non será en A_1 (pois escollemos B_1 de tal maneira que $A_1 \cap B_1 = \emptyset$) e non será na intersección das outras dúas rectas (pois xa eliminamos a posibilidade de triedros sobre C). Por ende, B_1 corta a dito plano exactamente nunha única recta que interseca a A_1 . \square

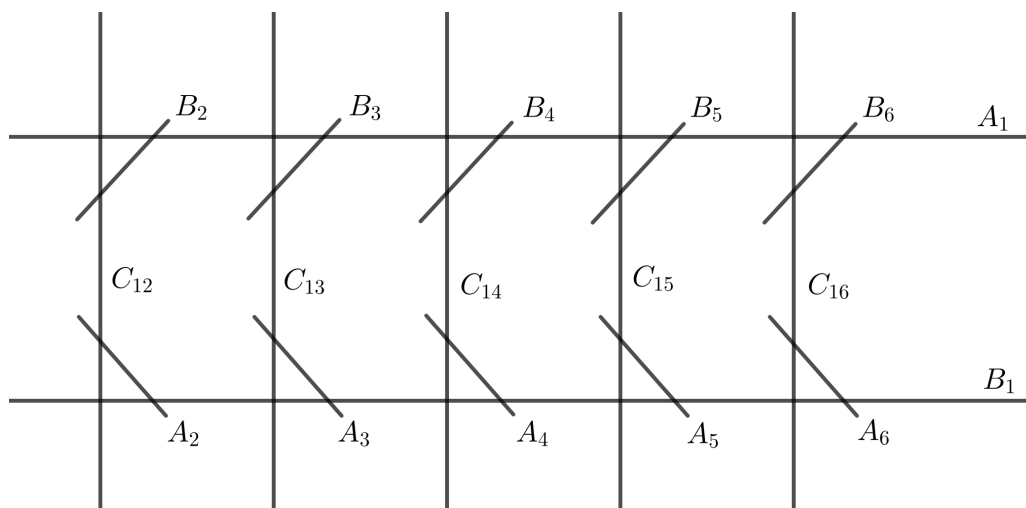


Figura 3.3: Configuración das 17 rectas

Sexan $C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}$ e C_{16} as cinco rectas ás que nos acabamos de referir, isto é, que intersecan simultaneamente A_1 e B_1 . Para cada $j = 2, \dots, 6$, sexa A_j a terceira recta no plano tritanxente no que se atopan B_1 e C_{1j} , é dicir, a única recta sobre a cúbica S que interseca a B_1 e C_{1j} simultáneamente e sexa diferente delas. Análogamente, para cada $j = 2, \dots, 6$, sexa B_j a única recta que interseca as rectas A_1 e C_{1j} .

As 17 rectas descritas enriba quedan representadas esquematicamente mediante a figura 3.3.

Proposición 3.11. *Os seis pares de rectas $(A_1, B_1), \dots, (A_6, B_6)$ forman unha Configuración Bisesta (Double Six), o que equivale a que se den simultaneamente:*

- 1) A_1, \dots, A_6 non se intersecan dúas a dúas.
- 2) B_1, \dots, B_6 non se intersecan dúas a dúas.
- 3) A_i interseca a B_j se e só se $i \neq j$.

Demostración. Para comprobar a validez do anterior enunciado, é suficiente mostrar que as seguintes afirmacións son válidas: **a)** A_1 non interseca A_2 , **b)** A_2 non interseca A_3 , **c)** A_2 non interseca B_2 , **d)** A_2 interseca B_3 .

a) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$: A_1 xa interseca a C_{12} , se intersecase a A_2 , entón sería coplanar coas rectas A_2, B_1, C_{12} e intersecaría tamén a B_1 o que non é posible por construción. Véxase 3.4a

b) $A_2 \cap A_3 = \emptyset$: A_2 xa interseca a B_1 , se intersecase a A_3 tamén, sería coplanar coas rectas A_3, B_1, C_{13} ou sexa, sería unha cuarta recta distinta no plano tritanxente que contén a A_3, B_1, C_{13} , o que non é posible. Véxase 3.4b

c) $A_2 \cap B_2 = \emptyset$: A_2 xa interseca a C_{12} , se intersecase a B_2 tamén, entón sería unha cuarta recta distinta coplanar con A_1, B_2, C_{12} , o que non é posible. Véxase 3.4c

d) $A_2 \cap B_2 \neq \emptyset$: Xa sabemos que A_2 ten que intersectar o plano tritanxente que contén a A_1, B_3 e C_{13} . Xa sabemos tamén que A_2 non interseca a A_1 como vimos en **a)** e tampouco a C_{13} , xa que isto implicaría que A_2 interseca a A_3 . Por tanto, A_2 ten que intersecar a B_3 . \square

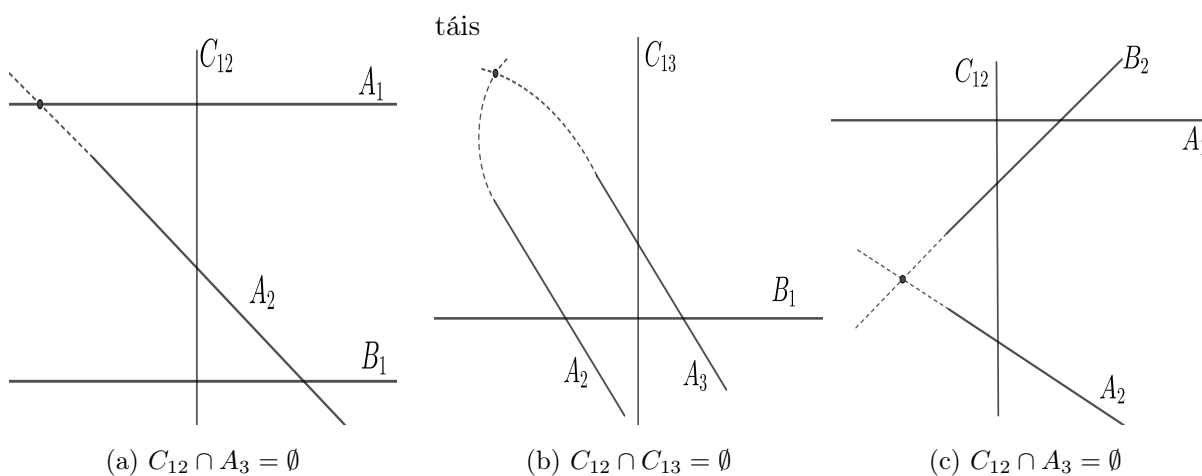


Figura 3.4: Exemplos (a),(b) e (c)

Observación: O número de Configuracións Bisestas, salvando un intercambio entre A_1 e B_1 ou unha permutación dos seis pares, ven dada por:

$$\frac{27 \cdot 16 \cdot 5!}{2 \cdot 6!} = 36.$$

Acabamos de ver que para cada par $i \neq j$ en $\{2, \dots, 6\}$ as rectas A_i e B_j intersécanse. Sexa C_{ij} a terceira recta no plano tritanxente que contén a A_i e B_j .

Proposición 3.12. *As rectas C_{ij} cumpren as seguintes afirmacións:*

1. $C_{ij} = C_{ji}$ interseca a A_i, B_i, A_j e B_j , pero non interseca a A_k e B_k con $k \notin \{i, j\}$,
2. C_{ij} e C_{ik} non se intersecan cando $j \neq k$,
3. C_{ik} e C_{jk} non se intersecan cando $i \neq j$
4. C_{ij} e C_{kl} intersécanse cando i, j, k e l son distintos entre si.

Demostración. A proba pasará polas seguintes etapas: a) Veremos que $C_{ij} = C_{ji}$ e que interseca a A_i, B_i, A_j e B_j , b) C_{12} non interseca a A_3 nin a B_3 , c) C_{12} non interseca a C_{13} , d) C_{13} non interseca a C_{23} e por último e) C_{12} interseca a C_{34} .

a) $C_{ij} = C_{ji}$: Sexan $i \neq j$. Pola Configuración Bisesta, A_j non intersecan a A_i nin a B_j , polo tanto, A_j interseca a C_{ij} . Ademais B_i non interseca a B_j nin a A_i , entón B_i interseca a C_{ij} . Posto que a recta que interseca simultaneamente A_j e B_i é C_{ij} concluimos que $C_{ij} = C_{ji}$. Que C_{ij} interseca a A_i, B_i, A_j e B_j é inmediato por construción e porque $C_{ij} = C_{ji}$.

b) $C_{12} \cap A_3 = \emptyset$ e $C_{21} \cap B_3 = \emptyset$: Sabemos que para a Configuración Bisesta A_3 interseca a B_2 . Se tamén intersercase C_{12} entón sería coplanar con (e por tanto intersecaría) A_1 , o que non é posible en base á Configuración Bisesta. O raciocinio para $C_{21} \cap B_3 \neq \emptyset$ é análogo. Véxase 3.5a

c) $C_{12} \cap C_{13} = \emptyset$: Sabemos que C_{13} interseca a A_1 por construción. Se intersecase tamén C_{12} , sería unha cuarta recta no plano tritanxente que contén a A_1, B_2 e C_{12} e isto non é posible. Véxase 3.5b

d) Empregando que $C_{13} = C_{31}$ e $C_{23} = C_{32}$ e o caso anterior, concluimos que $C_{13} \cap C_{23} = \emptyset$.

e) $C_{12} \cap C_{34} \neq \emptyset$: No plano que contén a A_1, B_2 e C_{12} , a recta C_{34} non pode intersecar a A_1 nin a B_2 (polo caso descrito en b), quedando só a opción de intersecar a recta C_{34} . \square

Observación: O número de rectas C_{ij} con $1 \leq i \leq j \leq 6$ é igual a 15. Se a isto lle sumamos as 12 da Configuración Bisesta, temos descritas tanto as 27 rectas como as súas interseccións.

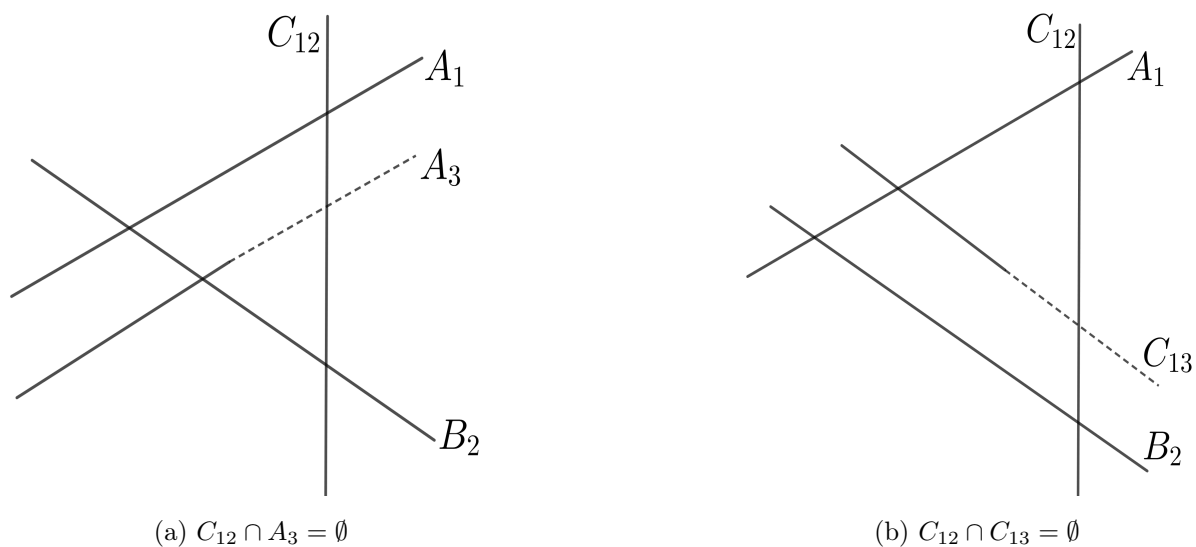


Figura 3.5: Exemplos (b) e (c)

Observación: O número de permutacións ou simetrías en \mathcal{S}_{27} que mantén a configuración de intersección invariante, dito de outro modo, o número de automorfismos da configuración das 27 rectas que preserva o modo no que se intersecan ven dado por:

$$27 \cdot 16 \cdot 5! = 51840$$

3.3. Pares triedrais e normalizacións

Como xa vimos anteriormente, un dos colorarios do Teorema de Cayley-Salmon é o feito de que a superficie cúbica non singular S admita exactamente 45 planos tritanxentes. Para cada plano tritanxente H existen exactamente outros 32 planos cuxa intersección con H son rectas non contidas na superficie cúbica. De feito, cada recta contida en $H \cap S$ pertence a 5 planos tritanxentes distintos. Deste xeito temos $3 \cdot 4 = 12$ planos tritanxentes diferentes de H que o intersectan nunha recta contida en S , e por tanto existen $45 - 12 - 1 = 32$ planos tritanxentes tais que as tres rectas da súa intersección con S son diferentes das tres rectas de $H \cap S$.

Imos escoller dous planos tritanxentes T_1 e T_2 tais que a súa intersección sexa unha recta non contida en S . Por exemplo, T_1 e T_2 tais que

$$T_1 \cap S = A_1 \cup C_{12} \cup B_2,$$

$$T_2 \cap S = C_{13} \cup B_1 \cup A_3.$$

Nesta escolla supostamente particular non hai perda de xeneralidade. De feito, sexa A unha recta

calquera contida na superficie S e sexa B unha das 16 que non intersecan a A . Sen perda de xeralidade podemos supor que as rectas anteriores son A_1 e B_1 . Sexan entón T_1 e T_2 táis que $T_1 \cap S = \{A_1, C_{1i}, B_i\}$ e $T_2 \cap S = \{C_{1j}, B_1, A_j\}$. Para que os planos T_1 e T_2 non teñan rectas en común sobre S é necesario e suficiente que $i \neq j$. Entón, exceptuando unha permutación das 27 rectas que preserve a configuración de intersección, podemos asumir que $i = 2$ e $j = 3$. De ahí dedúcese que esta aparente escolla particular pode ser considerada como xeral.

Os doús planos T_1 e T_2 determinan tres planos tritanxentes R_1, R_2 e R_3 cada un dos cales contendo unha recta de $T_1 \cap S$ e unha recta de $T_2 \cap S$. De feito, cada recta de $T_1 \cap S$ interseca exactamente a unha recta de $T_2 \cap S$, porque se non, a recta de intersección $T_1 \cap T_2$ estaría contida en S . Na escolla coa que estamos traballando temos:

$$R_1 \cap S = A_1 \cup C_{13} \cup B_3,$$

$$R_2 \cap S = C_{12} \cup B_1 \cup A_2,$$

$$R_3 \cap S = B_2 \cup A_3 \cup C_{23}.$$

Observamos agora que as terceiras rectas do conxunto $R_1 \cap S, R_2 \cap S$ e $R_3 \cap S$ determinan elas mesmas un plano tritanxente, que denotaremos por T_3 , isto é:

$$T_3 \cap S = B_3 \cup A_2 \cup C_{23}.$$

Determinamos así un par de familias de tres planos tritanxentes distintos $\{T_1, T_2, T_3\}$ e $\{R_1, R_2, R_3\}$ coa propiedade de que cada plano dunha familia contén exactamente unha recta de cada plano da outra familia. Os pares como os que acabamos de describir son denominados como *Par Triedral*, concepto introducido polo xeómetra suízo *Jacob Steiner*. O número de pares triedrais é dado por:

$$\frac{45 \cdot 32}{2 \cdot 3!} = 120.$$

Se escollemos un plano dunha familia e os tres doutra familia, digamos, T_i, R_1, R_2 e R_3 con $i = 1, 2, 3$ pode ser que teñan un punto en común. De feito, T_i, R_1, R_2 e R_3 teñen un punto en común se e só se $T_i \cap R_1, T_i \cap R_2$ e $T_i \cap R_3$ teñen un punto en común, é dicir, se as tres rectas de $T_i \cap S$ se intersecan nun mesmo punto. Cando un plano calqueira T tritanxente á superficie cúbica lisa S é tal que as tres rectas de $T \cap S$ se intersecan nun mesmo punto, ese plano e ese punto son denominados como; *Plano de Eckardt* e *punto de Eckardt*. No entanto, se escollemos dous planos de cada familia garantimos que os catro non teñan un punto en común. Por exemplo, $T_1 \cap T_2 \cap R_1 \cap R_2 = (T_1 \cap R_1) \cap (T_2 \cap R_2) = A_1 \cap B_1 = \emptyset$. As oito combinacións restantes resolvense do mesmo xeito como consecuencia inmediata do estudo da intersección que se dá entre as 27 rectas.

Así, tras garantir que os planos T_1, T_2, R_1 e R_2 non teñen puntos en común, podemos asumir baixo a existencia dunha transformación proxectiva que as ecuacións deses planos son respectivamente $x_2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ e $x_0 = 0$. Con esta simplificación, o polinomio homoxéneo de grao 3 que describe á cúbica S tomará a seguinte forma:

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_1X_2l_{12}(X_0, X_1, X_2, X_3) + X_0X_3l_{03}(X_0, X_1, X_2, X_3) .$$

onde $l_{12}, l_{03} \in k[X_0, X_1, X_2, X_3] \setminus \{0\}$ son formas lineais non nulas, véxanse:

$$\begin{aligned} l_{12}(X_0, X_1, X_2, X_3) &= c_{13}X_0 + c_{09}X_1 + c_{10}X_2 + c_{16}X_3 \\ l_{03}(X_0, X_1, X_2, X_3) &= c_{07}X_0 + c_{14}X_1 + c_{10}X_2 + c_{08}X_3 \end{aligned}$$

Esa primeira redución anula 12 coeficientes na ecuación, estes son os dos seguintes monomios: $X_0^3, X_1^3, X_2^3, X_3^3, X_0^2X_1, X_0X_1^2, X_0^2X_2, X_0X_2^2, X_1^2X_3, X_1X_3^2, X_2^2X_3$ e $X_2X_3^2$. Observamos que as ecuacións dos planos de T_3 e R_3 son respectivamente $l_{12} = 0$ e $l_{03} = 0$.

Para seguir simplificando a expresión de F estudiaremos a relación entre os seus coeficientes.

Proposición 3.13. *Os coeficientes c_{07}, c_{08}, c_{09} e c_{10} son necesariamente non nulos.*

Demostración. Para probar isto estudiaremos a imposibilidade de intersección de catro planos escollidos dous de cada familia $\{T_1, T_2, T_3\}$ e $\{R_1, R_2, R_3\}$ tal e como segue:

Sabemos que non existe $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3$ tal que $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in T_1 \cap T_2 \cap R_1 \cap R_2$. Entón o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_3 : \\ T_2 : \\ T_1 : \\ S_1 : \end{array} \right. \begin{array}{l} c_{07}x_0 + c_{14}x_1 + c_{15}x_2 + c_{08}x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_{07}x_0 + c_{14}x_1 + c_{15}x_2 + c_{08}x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right.$$

admite só a solución trivial. Portanto temos $c_{07} \neq 0$.

Repetindo este razoamento de xeito análogo para os casos $T_1 \cap T_2 \cap R_2 \cap R_3 = \emptyset$, $T_1 \cap T_3 \cap R_1 \cap R_2 = \emptyset$ e $T_2 \cap T_3 \cap R_1 \cap R_2 = \emptyset$ chegamos a que $c_{08} \neq 0$, $c_{09} \neq 0$ e $c_{10} \neq 0$. \square

Seguindo co razoamento empregado na demostración anterior obteremos catro desigualdades que involucran aos coeficientes de F .

Novamente, sabemos que non existe $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3$ tal que $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in T_1 \cap T_3 \cap R_1 \cap R_3$. Entón o sistema:

$$\begin{cases} T_3 : & c_{13}x_0 + c_{09}x_1 + c_{10}x_2 + c_{16}x_3 = 0 \\ S_3 : & c_{07}x_0 + c_{14}x_1 + c_{15}x_2 + c_{08}x_3 = 0 \\ T_1 : & x_2 = 0 \\ S_1 : & x_3 = 0 \end{cases}$$

admite só a solución trivial, e portanto o determinante asociado é non nulo, de onde se segue:

$$c_{13}c_{14} - c_{07}c_{09} \neq 0$$

De maneira análoga, de $T_1 \cap T_3 \cap R_2 \cap R_3 = \emptyset$, $T_2 \cap T_3 \cap R_1 \cap R_3 = \emptyset$ e $T_2 \cap T_3 \cap R_2 \cap R_3 = \emptyset$ obtemos:

$$c_{14}c_{16} - c_{08}c_{09} \neq 0$$

$$c_{13}c_{15} - c_{07}c_{10} \neq 0$$

$$c_{15}c_{16} - c_{08}c_{10} \neq 0$$

A continuación vamos a mostrar como se calcula unha transformación proxectiva tal que os coeficientes de $X_1^2X_2$, $X_1X_2^2$, $X_0^2X_3$ e $X_0X_3^2$ sexan todos iguais e non nulos. Con iso obteremos unha nova normalización de F , facendo eses coeficientes iguais a 1 poderemos escribir a cúbica dunha maneira mais simple.

Esta transformación, que denotaremos $p \in GL_4(k)$, deberá ser diagonal para que os 4 planos T_1, T_2, R_1 e R_2 permanezan invariantes. Dita transformación ven dada por:

$$p := \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix} \text{ con } \lambda_i \in k \setminus \{0\} \forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Isto é, $p : X_i \mapsto \lambda_i X_i$ con $i = 0, 1, 2, 3$. Así o novos coeficientes de $X_1^2X_2$, $X_1X_2^2$, $X_0^2X_3$ e $X_0X_3^2$ serán respectivamente $c_{09}\lambda_1^2\lambda_2$, $c_{10}\lambda_1\lambda_2^2$, $c_{07}\lambda_0^2\lambda_3$, $c_{08}\lambda_0\lambda_3^2$. Esixindo que sexan iguais a 1, chegamos a un sistema de 4 ecuacións nas variables $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ e λ_3 cuxa solución é facil de calcular. Unha vez obtidos a transformación proxectiva permitenos escribir a ecuación da superficie cúbica como:

$$x_1x_2(c'_{13}x_0 + x_1 + x_2 + c'_{16}x_3) + x_0x_3(x_0 + c_{14}x_1 + c'_{15}x_2 + x_3) = 0$$

para certos $c'_{13}, c'_{13}, c'_{13}, c'_{13} \in k$.

A anterior discusión resúmese no seguinte:

Proposición 3.14. *Cada superficie cúbica lisa en \mathbb{P}^3 é proxectivamente equivalente a unha superficie dada por un polinomio na seguinte forma normal:*

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_1X_2(aX_0 + X_1 + X_2 + dX_3) + X_0X_3(X_0 + bX_1 + cX_2 + X_3)$$

onde $a, b, c, d \in k$ son constantes que verifican as seguintes desigualdades:

$$\begin{cases} ab - 1 \neq 0 \\ ac - 1 \neq 0 \\ bd - 1 \neq 0 \\ cd - 1 \neq 0 \end{cases}$$

Observación: Séguese da proposición anterior que o polinomio F que describe a unha superficie cúbica lisa pode vir dado por:

$$F = UVW - \lambda RST$$

onde $U, V, W, R, S, T \in k[X_0, X_1, X_2, X_3] \setminus \{0\}$ son formas lineares non nulas e $\lambda \in k \setminus \{0\}$ é unha constante non nula. Cada posible representación deste tipo refírese a un dos pares triedrais e as 6 formas lineares fan referencia aos 6 planos tritanxentes que compoñen o par triedral. Como existen 120 pares posibles, tamén existen 120 maneiras distintas de representar a anterior ecuación cúbica e ademais o factor λ indica que a superficie non só depende do par triedral. Por outra banda a normalización dos 4 planos T_1, T_2, R_1 e R_2 tal e como foi feito, crea unha discriminación entre os 6 planos do par triedral. Por mor mor disto, as arbitrariedades que surxen fan que o número de posibles representacións da cúbica supere os 120, isto supón unha gran desvantaxa desta forma normal, xa que se complica o feito de decidir cando dúas cúbicas en forma normal son ou non proxectivamente equivalentes.

3.4. Racionalidade da cúbica lisa

Definición 3.15. Dise que unha superficie é racional se é biracionalmente equivalente ao plano proxectivo, é dicir se existe unha aplicación racional invertible entre a superficie e o plano proxectivo.

Para ver que unha superficie cúbica non singular S é racional, pobaremos a seguinte proposición.

Proposición 3.16. *Se S é unha superficie cúbica lisa que contén dúas rectas disxuntas entón S é racional.*

Demostración. Polo xa visto en seccións anteriores podemos garantir a existencia de dúas rectas l e m disxuntas. Agora imos construír a aplicación racional invertible que nos probará a racionalidade de S :

$$\pi_{l,m} : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \cong l \times m$$

Sexa un punto $Q \notin l \cup m$, entón existe unha única recta $n = n(Q)$ pasando por Q e cortando a l e m , isto pode verse do seguinte xeito: Se consideramos o plano m_Q , que contén a recta m e pasa polo punto Q , e o plano l_Q , plano que contén a l e pasa por Q entón a recta $n(Q) := m_Q \cap l_Q$ pasa por Q e corta as rectas l e m .

Deste xeito podemos ver xeométricamente como actúa a nosa aplicación:

$$\begin{aligned} \pi_{l,m} : \mathbb{P}^3 \setminus \{l, m\} &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \cong l \times m \\ Q &\mapsto (n(Q) \cap l, n(Q) \cap m) \end{aligned}$$

mediante unha transformación proxectiva podemos supor que $l = \{x_2 = x_3 = 0\}$ e $m = \{x_0 = x_1 = 0\}$ deste xeito a aplicación quedaría como:

$$\begin{aligned} \pi_{l,m} : \mathbb{P}^3 \setminus \{l, m\} &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \cong l \times m \\ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) &\mapsto ((x_0 : x_1), (x_2 : x_3)) \end{aligned}$$

onde vemos claramente que $\pi_{l,m}$ é unha aplicación racional con dominio de definición \mathbb{P}^3 . A continuación estudiaremos a súa restrición a S , sexa $\phi := \pi_{l,m} |_S : S \longrightarrow l \times m$, vexamos que ten unha inversa racional.

Vimos anteriormente que dada unha recta de S existen outras dez rectas de S que a cortan, entón se consideramos $(P, Q) \in l \times m$ e tomamos a recta l_{PQ} que une P e Q só 10 rectas desa familia están contidas en S . As que non están en S intersecan a esta en tres puntos contados con multiplicidade, como xa veñen a pasar por P e Q córtana ademais nun punto R .

Defínese agora a aplicación:

$$\begin{aligned} \psi : l \times m &\longrightarrow S \\ (P, Q) &\mapsto R \end{aligned}$$

esta expresión é tamén racional e ademais é a inversa de ϕ .

Acabamos de ver que $l \times m \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ é unha superficie racional, é dicir, que é birracionalmente equivalente a \mathbb{P}^2 ; séguese entón que S é racional. \square

Capítulo 4

As matrices de intersección

4.1. Número de intersección, divisores e Grupo de Picard

Despóis de estudar a configuración e as interseccións das rectas, queremos obter os números de interseccións das 27 rectas. Ister números pódense representar cunha matriz que terá na posición ij co número asociado a intersección da i -ésima recta e a j -ésima, onde i e j varían en $\{1, \dots, 27\}$. O número 1 representa o número de puntos de intersección entre dúas rectas distintas que se intersecan. Do mesmo xeito, o número 0 indica o número de puntos de intersección entre dúas rectas distintas que non se cortan.

Definición 4.1. Sexan α e β dúas curvas que se intersecan transversalmente, entón o número de intersección, denotado por $\alpha \cdot \beta$, ven dado por:

$$\alpha \cdot \beta := \#(\alpha \cap \beta)$$

Onde $\#(\alpha \cap \beta)$ refírese ao número de puntos onde se intersecan α e β . Para completar todos os casos de intersección de dúas rectas, que presentamos no primeiro parágrafo deste capítulo, debemos estudar cal podrá ser o número de auto-intersección dunha recta con ela mesma. A continuación faremos un cálculo intuitivo e posteriormente respaldarémolo con xustificacións formáis. Antes desa discusión definiremos un concepto que empregaremos de seguido.

Definición 4.2. Un p -ciclo é unha suma formal de pechados irreducibles, sendo p a dimensión de táis pechados; é dicir, é a combinación enteira de variedades alxébricas de dimensión p .

Sexa A unha recta sobre a cúbica non singular S . Sexan A, B e L as tres rectas distintas dun plano tritanxente contendo a A e sexan A', B' e L as tres rectas doutro plano tritanxente contendo a L .

Facendo variar, en torno a L , un plano tritanxente cara o outro, podemos ver que o 1-ciclo $A+B$, que representa a unha cónica, é dalgun xeito equivalente a cónica $A'+B'$. Esa equivalencia pode intuírse a través de observar como unha familia de cónicas se deforma de xeito continuo de un plano tritanxente a outro, véxase 4.1. Tense entón:

$$A + B \sim A' + B'$$

isto é,

$$A \sim A' + B' - B$$

Agora podemos plantear a auto-intersección de A :

$$A \cdot A = A \cdot (A' + B' - B) = A \cdot A' + a \cdot B' - A \cdot B = 0 + 0 - 1 = -1$$

Polo tanto, na diagonal da matriz de intersección das 27 rectas debemos colocar o número -1.

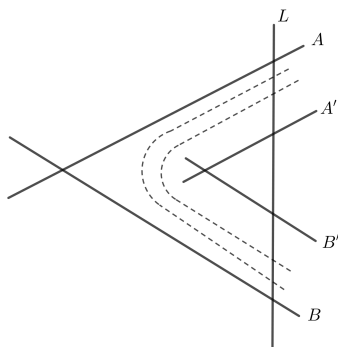


Figura 4.1: Equivalencia das cónicas

Agora formalizaremos o razoamento anterior.

Definición 4.3. Sexa X unha variedade proxectiva non singular de dimensión m . Un divisor primo de X é unha subvariedade irredutible de codimensión 1.

Nótese que cando X é unha superficie os divisores primos son as curvas irredutibles contidas na mesma.

Definición 4.4. Sexa X unha variedade proxectiva non singular de dimensión m . Un divisor de X é unha suma formal de divisores primos.

En base a isto, un divisor é un $(m-1)$ -ciclo. Por outra banda ao conxunto de todos os divisores denotarémolo por $Div(X)$.

Proposición 4.5. *Sexa X unha superficie non singular. Cada función racional non nula $f \in k(X) \setminus \{0\}$ define un divisor de X que lle chamaremos $\text{div}(f)$.*

Intuitivamente, cando temos unha función racional non nula f , podemos representala como cociente de polinomios homoxéneos do mesmo grao. entón f será o produto de formas irreducibles con multiplicidades positivas ou negativas dependendo de se están no numerador ou no denominador. Cada unha desas formas é a ecuación dunha hipersuperficie proxectiva que non contén a X . Tal hipersuperficie intersecada con X determina sobre a mesma unha subvariedade de codimensión 1. A suma formal de tales variedades, contadas con multiplicidade, da o divisor $\text{div}(f)$ sobre X .

Definición 4.6. Defínese o grao de un divisor $D = \sum_i k_i C_i$ de X como $\text{deg} D := \sum_i k_i \text{deg} H_i$ con $H_i \in k[X]$ a forma que define á subvariedade C_i e i recorrendo un conxunto finito.

Definición 4.7. Sexan D e E dós divisores de X . Diremos que D é *linearmente equivalente* a E , denotado por $D \sim E$, se e só se existe unha función racional $f \in k(X) \setminus \{0\}$ tal que $E = D + \text{div}(f)$

Se escribimos $D_{(a:b)} := D + \text{div}(af + b)$ con $(a : b)$ variando en \mathbb{P}^1 entón $D_{(0:1)} = D + \text{div}(1) = D$ e $D_{(1:0)} = D + \text{div}(f) = E$, logo o divisor D deformase en E a través dun parametro que recorre a recta \mathbb{P}^1 , de ahí que digamos que son linearmente equivalentes.

Definición 4.8. Un divisor $\text{div}(f)$ que provén dunha función racional non nula é chamado *divisor principal* de X .

Tense de xeito inmediato que o conxunto de divisores principais de X é un subgrupo de $\text{Div}(X)$, este subgrupo induce a seguinte definición.

Definición 4.9. O *Grupo das Clases de Divisores de X* defínese como o espazo cociente $\frac{\text{Div}(X)}{\sim}$ coa operación suma inducida por $\text{Div}(f)$, onde \sim é a relación de equivalencia linear.

Definición 4.10. No caso de que X sexa unha variedade non singular o grupo anterior recibe o nome de *Grupo de Picard de X* e denótase por $\text{Pic}(X)$, este é:

$$\text{Pic}(X) = \frac{\text{Grupo dos divisores de } X}{\text{Grupo dos divisores principais de } X}$$

Observación: No caso de que X sexa unha superficie arbitraria, non necesariamente singular, os conceptos de Grupo de Picard e o de Grupo de Clases de Divisores non coinciden, non entanto esa diferenza non é relevante para esta disertación por ende vamos a ignorala.

Sexan $H, H' \in k[X_0, X_1, X_2, X_3]$ as formas de grao 1 que definen aos planos tritanxentes contendo a A, B e L e a A', B' e L respectivamente. Sexa $f := \frac{H'}{H}$ unha función racional sobre

a superficie S e $\text{div}(f) = (A + B + L) - (A' + B' + L)$, aquí estase a establecer a equivalencia $A + B \sim A' + B'$. Séguese das propiedades de grupo de $\text{Pic}(S)$ a validez da descomposición $A \sim A' + B' - B$. Para rematar, o paso $A \cdot A = A \cdot (A' + B' - B)$ baséase no seguinte resultado:

Proposición 4.11. *Sexa X unha superficie non singular e $\text{Div}(X)$ o seu grupo de divisores. Existe unha única aplicación $\text{Div}(X) \times \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ que a cada par de divisores D e E lle asocia o número $D \cdot E$, verificando que:*

- 1) *Se D e E son curvas non singulares que se intersecan transversalmente entón $D \cdot E = \#(D \cap E)$.*
- 2) *A aplicación é simétrica, e dicir $D \cdot E = E \cdot D$.*
- 3) *A aplicación é aditiva, e dicir $(D_1 + D_2) \cdot E = D_1 \cdot E + D_2 \cdot E$.*
- 4) *A imaxen pola aplicación depende só da clase de equivalencia linear, e dicir se $D_1 \sim D_2$ entón $D_1 \cdot E = D_2 \cdot E$.*

Con isto damos por cerrada a xustificación de que o número de auto-intersección dunha recta contida nunha superficie cúbica non singular e -1.

Agora xeralizaremos o cálculo do número de auto-intersección para unha recta nunha superficie non singular de grao m .

Proposición 4.12. *Se X é unha superficie non singular en \mathbb{P}^3 de grao m , entón para cada recta L contida en X o número de auto-intersección $L \cdot L$, é igual a $2 - m$.*

Demostración. Sexan H_1 e H_2 dous planos diferentes en \mathbb{P}^3 contendo á recta L . entón $X \cap H_i = L + C_i$ onde C_i é unha curva de grao $m - 1$ contida en H_i . Observemos que C_1 e C_2 non teñen puntos de intersección, pois H_i é o plano tanxente a X en cada punto de $L \cap C_i$.

Por unha banda temos: $(X \cap H_1) \cdot (X \cap H_2) = L \cdot L + L \cdot C_1 + L \cdot C_2 + C_1 \cdot C_2 = L \cdot L + (m - 1) + (m - 1) + 0 = L \cdot L + 2m - 2$.

Por outra banda considerando outros dous planos $H'_1, H'_2 \subseteq \mathbb{P}^3$ cuxa intersección e unha recta que incide en X transversalmente, como o divisor $X \cap H_i$ é linearmente equivalente a $X \cap H'_i$, concluímos que: $(X \cap H_1) \cdot (X \cap H_2) = (X \cap H'_1) \cdot (X \cap H'_2) = \#(X \cap H'_1 \cap H'_2) = \text{deg}(X) = m$. De xuntar ambos razoamentos obtemos que $L \cdot L = 2 - m$. \square

Vexamos antes de cambiar de sección algúns exemplos do cálculo do grupo de Picard de algunhas superficies coñecidas.

Exemplo 1: Consideremos $X = \mathbb{A}^2$ o plano afín, un divisor D no plano afín e unha curva alxébrica non singular, e por tanto definida por algún polinomio $f \in k[X_1, X_2] \setminus \{0\}$, isto é, todo divisor D é principal. Por ende:

$$\text{Pic}(\mathbb{A}^2) = \frac{\text{Div}(\mathbb{A}^2)}{\text{Divisores principales de } \mathbb{A}^2} = \{id\}$$

Exemplo 2: Sexa agora $X = \mathbb{P}^2$ o plano proxectivo, calquera subvariedade iredutible de codimension 1 en \mathbb{P}^2 está biunívocamente relacionada cunha forma iredutible non nula de $k[X_0, X_1, X_2]$. Sexa $f \in k(\mathbb{P}^2 \setminus \{0\})$ unha función racional non nula sobre \mathbb{P}^2 , podemos escribir f como cociente de dúas formas $F, G \in k[X_0, X_1, X_2]$ do mesmo grao. Se factorizamos f obtemos a seguinte expresión, $f = H_1^{k_1} \dots H_r^{k_r} L_1^{-m_1} \dots L_s^{-m_s}$ onde os termos H_i e L_j son os factores iredutibles de F e G respectivamente mentras que os escalares k_i e m_j son sendas multiplicidades. Sexan C_i e D_j as subvariedades de codimensión 1 en \mathbb{P}^2 definidas polos ecuacións $H_i = 0$ e $L_j = 0$. Partindo deste temos:

$$\text{div}(f) = \sum_{i=1}^r k_i C_i - \sum_{j=1}^s m_j D_j$$

Tiñamos por hipótese que $\text{deg}F = \text{deg}G$, de isto dedúcese de xeito directo que $\sum_i k_i \text{deg}(H_i) = \sum_j m_j \text{deg}(L_j)$, alén diso $\text{deg}(\text{div}(f)) = 0$. Reciprocamente, se $\sum_i k_i \text{deg}(H_i) = 0$ a forma $F := H_1^{k_1} \dots H_r^{k_r}$ é homoxénea de grao cero e $\text{div}(F) = \sum_{i=1}^r k_i C_i$.

Entón temos que:

$$D \sim C \text{ en } \mathbb{P}^2 \iff D = C + \text{div}(f) \text{ para algún } f \in k(\mathbb{P}^2) \iff \text{deg}G = \text{deg}C.$$

Así cada enteiro define unha clase de divisores sobre \mathbb{P}^2 , de onde se segue:

$$\text{Pic}(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}$$

Notemos que $\text{Pic}(\mathbb{P}^2)$ é o grupo abeliano libre xerado por unha recta calquera de \mathbb{P}^2 .

Exemplo 3: Consideremos agora $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ que ao través do mergullo de Segre é unha superficie non singular do espazo \mathbb{P}^3 , de feito é a cuádrlica non dexenerada \mathcal{Q}_2 . Aquí cada subvariedade de codimensión 1 está biunivocamente determinada por un polinomio bi-homoxéneo do anel de polinomios $k[X_1, X_2, Y_1, Y_2]$, é dicir, é homoxéneo en cada par de variables (X_1, X_2) e (Y_1, Y_2) . Facemos uso do mergullo de Segre $S_{1,1}: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathcal{Q}_2 \subset \mathbb{P}^3$. Fixando un punto na primeira variable, temos que $\{(t_0 : t_1)\} \times \mathbb{P}^1$ é unha recta na cuádrlica \mathcal{Q}_2 , variando o $(t_0 : t_1) \in \mathbb{P}^1$, conquerimos todas as rectas dunha familia de rectas de \mathcal{Q}_2 . Facendo o mesmo razoamento fixando

agora un punto na segunda variable; isto é $\mathbb{P}^1 \times \{(u_0 : u_1)\}$ e facendo variar $(u_0 : u_1) \in \mathbb{P}^1$, conquerimos todas as rectas da outra familia de rectas da cuádrica \mathcal{Q}_2 .

Empregando de novo o mergullo de Segre,

$$(t_0 : t_1) \cdot (u_0 : u_1) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightsquigarrow (t_0u_0 : t_0u_1 : t_1u_0 : t_1u_1) \in \mathbb{P}^3$$

Un polinomio bi-homoxéneo $f(X_1, X_2, Y_1, Y_2)$ convértese nun polinomio homoxéneo nas variables $\{X_i Y_j\}$, é dicir $F(X_1 Y_1, X_1 Y_2, X_2 Y_1, X_2 Y_2)$. Deste xeito, as curvas definidas en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ están en correspondenza 1 a 1 cas curvas na cuádrica \mathcal{Q}_2 . Unha curva $\mathcal{C} \subset \mathcal{Q}_2$ ten un grao en \mathbb{P}^3 , o número de puntos contados con multiplicidade, no que un plano calquera de \mathbb{P}^3 corta á curva. Particularizando a un plano tanxente nun punto da cuádrica, como a intersección do plano tanxente ca cuádrica é a cónica dexenerada formada por unha recta de cada familia, temos que os puntos de intersección do plano tanxente ca curva, distribúense en dous conxuntos de puntos sobre cada unha das rectas. Deste xeito, o grao da curva \mathcal{C} convértese nun bigrao (d_1, d_2) tal que $d_1 + d_2 = \deg(\mathcal{C})$. En particular como o grao dunha función racional en \mathbb{P}^3 é cero, vemos que un divisor principal en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, ten bigrao $(0, 0)$.

Conclúese entón que: $\text{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Doutro xeito dados dous divisores D e C tense que $D \sim C$ en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ se e só se $\text{bideg}D = \text{bideg}C$. Isto equivale a dicir que cada par de enteiros define unha clase de divisores sobre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Polo tanto temos:

$$\text{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Observación: No próximo capítulo calcularemos o Grupo de Picard dunha superficie cúbica lisa S . Veremos que se ten:

$$\text{Pic}(S) = \mathbb{Z}^7$$

Observación: Unha expresión da profundidade de que $\text{Pic}(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}$ é unha proba inmediata do *Teorema de Bezout*:

Sexan α e β dúas curvas alxébricas planas de graos m e n respectivamente e sexan L e L' dúas rectas calquera de \mathbb{P}^2 . Por ser \mathbb{Z} o Grupo de Picard de \mathbb{P}^2 tense que $\alpha \cong mL$ e $\beta \cong nL'$. Así:

$$\alpha \cdot \beta = (mL) \cdot (nL') = mnL \cdot L' = mn.$$

4.2. Subgrupo de Picard xerado polas 27 rectas

Sexa $Pic(S)$ o Grupo de Picard da superficie cúbica non singular S e imos considerar o subgrupo xerado polas clases das 27 rectas. Denotando ese subgrupo por

$$Pic'(S).$$

Sexa E o divisor dado pola intersección dun plano calqueira coa superficie cúbica non singular S e sexa F a cónica que obtemos ao intersecar a superficie cúbica non singular S con un plano calqueira contendo a recta B_1 isto é $F \sim E - B_1$. De cada un dos 45 planos tritanxentes podemos obter relacións que expresan E en termos das clases das 27 rectas sobre C . Traballando só con esas relacións será posible probar o seguinte resultado.

Proposición 4.13. *Cada unha das clases das 27 rectas pode ser escrita como \mathbb{Z} - combinación lineal das clases dos divisores $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, e F .*

Observaión: O que a anterior proposición ven a dicir, é que o subgrupo $Pic'(S)$ é xerado polas clases dos divisores $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, e F . Pode parecer estrano e pouco natural presentar a clase de F entre os xeradores de $Pic'(S)$. Sendo $F \sim A_2 + C_{12}$ (por exemplo) pareceríanos menos estrano substituír F por C_{12} no conxuntos dos xeradores. Non obstante, unha das razóns para escoller F é a simplicidade de operar con el, vexámolo:

$$A_i \cdot A_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ -1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$F \cdot A_1 = (A_2 + C_{12}) \cdot A_1 = 0 + 1 = 1$$

$$F \cdot A_2 = (A_2 + C_{12}) \cdot A_2 = -1 + 1 = 0$$

$$F \cdot A_j = (A_2 + C_{12}) \cdot A_j = 1, \quad j = 3, 4, 5, 6$$

$$F \cdot F = (A_2 + C_{12}) \cdot (A_2 + C_{12}) = A_2 \cdot A_2 + 2A_2 \cdot C_{12} + C_{12} \cdot C_{12} = -1 + 2 - 1 = 0$$

Esta simplicidade faise evidente cando escribimos a matriz 7x7 de intersección entre

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, \quad e \quad F$$

:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & -1 & & & & \vdots \\ \vdots & & -1 & & & \vdots \\ \vdots & & & -1 & & \vdots \\ \vdots & & & & -1 & \vdots \\ \vdots & & & & & -1 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Demostración. Comezamos agora a probar a proposición 4.13.

Temos $E \sim A_i + B_j + C_{ij}$, $E \sim A_j + B_i + C_{ij}$ e $E \sim B_1 + F$. Comparando $E - C_{ij}$ nas dúas primeiras relacións obtemos $A_i + B_j \sim A_j + B_i$, e por tanto:

$$B_j \sim A_j + B_1 - A_1 \text{ para } j = \{2, \dots, 6\}. \quad (4.1)$$

Da primeira relación que relaciona a C_{ij} e E , da formula 4.1 que describe a B_j e tendo en conta que $E \sim B_1 + F$ obtemos a seguinte expresión para C_{ij} en termos das clases de A_1, A_i, A_j e F :

$$C_{ij} \sim A_1 - A_i - A_j + F, \text{ con } i \neq j \text{ en } \{2, \dots, 6\}. \quad (4.2)$$

Cando escribimos B_j como \mathbb{Z} - combinación lineal das clases $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, e F , observamos que basta facer iso para B_1 , xa que para $j = 2, \dots, 6$ aplica a formula 4.1 de enriba.

Temos aínda a seguinte relación para: $E \sim C_{12} + C_{34} + C_{56}$. Sostituíndo cada C_{ij} pola fórmula correspondente presentada en 4.2, eliminando os B_j que aparecen a través da fórmula 4.3 e reducindo os termos semellantes, obtemos $E \sim 3E - A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 - A_6 - 3B_1 + 3A_1$. Sendo $E \sim B_1 + F$, podemos despexar B_1 e obter:

$$B_1 \sim 2A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 - A_6 + 2F.$$

Consecuentemente, para $j = 2, \dots, 6$, temos $B_j \sim -A_1 + A_j + 2A_1 - \sum_{i=2}^6 A_i + 2F$, daquí obtemos:

$$B_j \sim A_1 - \sum_{i=2, i \neq j}^6 A_i + 2F \quad (4.3)$$

□

4.3. Reducción da orde da matriz de intersección

Nesta sección partiremos aceptando que $Pic(S) = Pic'(S)$, conforme se dixo na observación anterior. Para cada divisor D na superficie cúbica non singular S , consideremos o vector

$$[D] := (D \cdot A_1, D \cdot A_2, \dots, D \cdot C_{56}) \in \mathbb{Z}^{27}.$$

Con esa notación temos que as 27 filas de matriz de intersección das 27 rectas son dadas por $[A_1], [A_2], \dots, [C_{56}]$. Obtemos entón un homomorfismo de grupos $h_{27} : D \in Div(S) \mapsto [D] \in \mathbb{Z}^{27}$, que induce un homomorfismo $h_{27} : Pic(S) \rightarrow \mathbb{Z}^{27}$.

Proposición 4.14. *Os vectores $[A_1], [A_2], [A_3], [A_4], [A_5], [A_6]$ e $[F] := [A_2] + [C_{12}] \in \mathbb{Z}^{27}$ son \mathbb{Z} -linealmente independentes.*

Demostración. Tomemos unha combinación linear destes vectores e igualémola a cero, $\alpha_1[A_1] + \alpha_2[A_2] + \dots + \alpha_6[A_6] + \alpha_7[F] = 0$, estamos a plantexar un sistema homoxéneo de 27 ecuacións lineais nas incógnitas $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7)$, fixándonos na matriz de intersección anteriormente descrita é inmediato ver que só admite a solución trivial $\alpha_1 = \dots = \alpha_7 = 0$, garantindo así a independencia linear de tales vectores. \square

Da proposición exposta anteriormente derívase que as clases de divisores A_1, A_2, A_3, A_4, A_6 e F sobre S son \mathbb{Z} -linearmente independente en $Pic(S)$.

Finalmente, é inmediato observar que o homomorfismo $h_{27} : Pic(S) \rightarrow \mathbb{Z}^{27}$ é inxectivo, e por tanto, o grupo $Pic(S)$ é isomorfo ao subgrupo aditivo xerado polas filas da matriz de intersección das 27 rectas. Observamos que o rango e o determinante da matriz de intersección das 27 rectas son respectivamente 7 e cero.

Dun xeito similar, para cada divisor D na superficie cúbica lisa S , podemos considerar o vector

$$[[D]] := (D \cdot A_1, \dots, D \cdot A_6, D \cdot F) \in \mathbb{Z}^7.$$

Aquí os sete vectores $[[A_1]], \dots, [[A_6]]$ e $[[F]]$ son as filas da matriz de intersección entre A_1, \dots, A_6 e F .

Análogamente á anterior proposición, temos que os vectores $[[A_1]], [[A_6]]$ e $[[F]]$ son \mathbb{Z} -linearmente independentes en \mathbb{Z}^7 .

Tamén de maneira análoga podemos definir o homomorfismo de grupos $h_7 : D \in Pic(S) \mapsto [[D]] \in \mathbb{Z}^7$ o cal é inxectivo. A inxectividade dese homomorfismo garante que o Grupo de Picard

$Pic(S)$ sexa isomorfo ao subgrupo aditivo de \mathbb{Z}^7 xerado polas 7 filas da matriz de intersección entre A_1, A_2, A_3, A_4, A_6 e F .

Esa redución de orde é tamén significativa no estudo das matrices de intersección. De feito, se quixésemos inferir propiedades do Grupo de Picard $Pic(S)$ ao través da súa relación coas matrices de intersección, estudamos entón a matriz de intersección 7×7 entre A_1, \dots, A_6 e F no canto de estudar a matriz orixinal 27×27 ; matriz de intersección das 27 rectas.

Observamos finalmente que a matriz reducida 7×7 é invertible, xa que o seu rango e o seu determinante son respectivamente 7 e 1.

4.4. Consideracións adicionais sobre o Teorema de Cayley-Salmon

Neste apartado ímos presentar novas consideracións sobre a prova do Teorema de Cayley-Salmon empregando o concepto de divisor e algún resultado visto en apartados anteriores.

Supoñamos que xa coñecemos as rectas $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ e B_1 ademáis de coñecer a existencia das 10 rectas que intersecan a B_1 . Sexa F a cónica que obtemos ao intersecar a superficie cúbica non singular S con un plano calqueira que conten a recta B_1 .

O que pretendemos é contar a cantidade de rectas distintas sobre a superficie cúbica non singular S . Dando por coñecidas a recta B_1 e as outras 10 rectas rectas que a intersecan partimos xa de un total de 11 rectas. Para atopar as que faltan seguiremos o seguinte percorrido: en primeiro lugar, contaremos cantas clases de divisores de S son de tal modo que non intersequen a B_1 e poidan ser rectas, como veremos estas son 16. En segundo lugar, provaremos que efectivamente tales clases proveñen de rectas. Finalmente, observaremos que a recta contida en cada clase é única.

Teorema 4.15. *Unha superficie cúbica non singular en \mathbb{P}^3 contén exactamente 27 rectas.*

Demostración. Sexa A unha recta calquera sobre a superficie cúbica non singular S que non interseca a B_1 . A cumpre as seguintes tres condicións: $A \cdot B_1 = 0$ (pois $A \cap B_1 = \emptyset$), $A \cdot A = -1$ (pois $A \subseteq C$) e $A \cdot F = 1$ (pois A ten que intersecar o plano contendo $B_1 + F$ exactamente unha vez). Escribindo A como unha \mathbb{Z} -combinación lineal dos xeradores, $A \sim x_1 A_1 + \sum_{i=2}^6 x_i A_i + yF$, as tres condicións xeométricas anteriores tradúcense nun sistema de ecuacións nas variables $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, e y .

$$\blacksquare \quad A \cdot F = (x_1 A_1 + \sum_i x_i A_i + yF) \cdot F = x_1 \rightarrow A \cdot F = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1$$

- $A \cdot A = (A_1 + \sum_i x_i A_i + yF) \cdot (A_1 + \sum_i x_i A_i + yF) = -1 + y - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 + y \rightarrow$
 $A \cdot A = -1 \Leftrightarrow -2y + \sum_{i=2}^6 x_i^2 = 0$
- $A \cdot B_1 = (A_1 + \sum_i x_i A_i + yF) \cdot B_1 = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2y \rightarrow A \cdot B_1 = 0 \Leftrightarrow 2y + \sum_{i=2}^6 x_i = 0$

Así, $A \sim A_1 + \sum_{i=2}^6 x_i A_i + yF$ onde se cumpre:

$$\begin{cases} -2y + \sum_{i=2}^6 x_i^2 = 0 \\ 2y + \sum_{i=2}^6 x_i = 0 \end{cases}$$

Reemplazando a primeira ecuación pola suma das dúas ecuacións, obtemos un sistema equivalente:

$$\begin{cases} \sum_{i=2}^6 (x_i^2 + x_i) = 0 \\ 2y + \sum_{i=2}^6 x_i = 0 \end{cases}$$

A primeira ecuación é equivalente a dicir que $x_i^2 + x_i = 0$ para cada $i = 2, \dots, 6$, isto é, para cada $i \in \{2, \dots, 6\}$ deberase verificar que $x_i = -1$ ou $x_i = 0$. O coeficiente 2 na variable y na segunda ecuación indica que a cantidade de índices $i \in \{2, \dots, 6\}$ tais que $x_i = -1$ é par. Temos entón que os tres casos referentes á cantidade de índices $i \in \{2, \dots, 6\}$ tais que $x_i = -1$ son, cero, dous e catro.

Caso Cero: Neste caso, $x_i = 0$ para todo $i = 2, \dots, 6$ e, consecuentemente, $y = 0$. Obtemos entón unha única solución:

$$A \sim A_1.$$

Caso Catro: Neste caso, só temos un único $x_j = 0$ e os demais $x_i = -1$. Consecuentemente $y = 2$. Obtendo entón cinco solucións da forma:

$$A \sim A_1 - \sum_{i=2, i \neq j}^6 A_i + 2F, j = 2, \dots, 6$$

Caso Dous: Existen $x_i = x_j = -1$ e os demais $x_k = 0$. Temos $y = 1$ e obtemos $\frac{5!}{2!3!} = 10$ solucións para a expresión:

$$A \sim A_1 - A_i - A_j + F, i \neq j \text{ en } \{2, \dots, 6\}.$$

Obtivemos até agora 16 clases de divisores tais que non intersecan B_1 e que podan ser rectas.

No Caso Cero, concluímos que a solución encontrada é unha recta, a recta A_1

No Caso Catro, comparando o divisor obtido cá expresión 4.3, concluímos que devandito divisor é a recta B_1 .

No Caso Dous, ao comparar o divisor obtido coa expresión 4.2, verificamos que este divisor é a recta C_{ij} .

Antes de finalizar a demostración, é preciso facer unha observación: Se existen dúas rectas distintas $A \sim A'$ nunha mesma clase, entón $A \cdot A = A \cdot A' \geq 0$, o que sería unha contradición. Con isto, garantimos a unicidade de recta cuxa clase é unha das 16 solucións obtidas. Así, o número exacto de rectas sobre a superficie cúbica non singular ven dado por:

$$1+10+16=27$$

□

Con esta prova exponse a contendencia de empregar resultados e conceptos que se alexan da intuición xeométrica, se ben éstos poden reducir significativamente a dimensión da proba, a súa dificultade radica no nivel de abstracción que debemos empregar para comprendelos e usalos de xeito eficaz. Por ende en moitos casos, aínda que sexa nun primeiro momento, debemos guiarnos pola beleza da simplicidade e da intuición, xa que doutro xeito podemos perder parte da esencia que se agocha no problema.

Bibliografía

- [E23] Bertini, E. (1923). *Geometria Proietiva degli Iperspazi*, Casa Editrice Giuseppe Principato. Messina.
- [DP87] Del Pezzo, P. (1887). *Sulle superficie dell' n^{mo} ordine immerse nello spazio a n dimensioni*, Rendiconti di Palermo, t. **I**.
- [J92] Harris, J. (1992). *Algebraic Geometry, a First Course*, Graduate Texts in Mathematics vol. **103**. Springer-Verlag
- [H77] Hartshorne, R. (1977). *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics vol. **52**. Springer-Verlag.
- [He11] Henderson, A. (1911). *The twenty-seven lines upon The Cubic Surface*, Hafner Publishing Co.
- [K03] Hulek, K. (2003). *Elementary Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics. Volume **52**. Springer- Verlag.
- [M95] Mumford, D. (1995). *Algebraic Geometry I. Complex Projective Varieties*, Classics in Mathematics, reprinted of the **1976** edition. Springer-Verlag.
- [R88] Reid M. (1988). *Undergraduate Algebraic Geometry*, London Mathematical Society. Student Texts **12**. Cambridge University Press.
- [S14] Salmon, G. (1914) *A Treatise On The Analytic Geometry Of Three Dimensions*. Vol**III**. Fifth Edition. Chelsea Publishing Company.
- [S88] Shafarevich, I. (1988) *Basic Algebraic Geometry. Varieties in Projective Space*. Springer-Verlag.