

Traballo Fin de Grao

Grafos planares e triangulación de superficies

Noel Rodil López

Xullo, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Grafos planares e triangulación de superficies

Noel Rodil López

Xullo, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía
Título: Grafos planares e triangulación de superficies
Breve descrición do contido
Un teorema de Kuratowski establece que un grafo é planar (mergullable no plano) se e só se non contén o grafo completo con 5 vértices nen o grafo bipartito de 3+3 vértices. Seguindo un famoso artigo de Carsten Thomassen, expoñerase unha demostración sinxela dunha parte deste teorema, que logo se usará para dar unha demostración sinxela do teorema de Jordan-Schonflies, e como consecuencia obter que toda superficie é triangulable.
Recomendacións
Especialmente interesante para alumnos que lles gustara a materia “Topoloxía de superficies”.
Outras observacións

Índice

Resumo	VII
Introdución	IX
1. Grafos Planares e Teorema da Curva de Jordan	1
2. Teorema de Jordan-Schönflies	13
3. Triangulación de superficies pechadas	19
4. Clasificación de superficies pechadas	25
A. Anexo I: Un contraexemplo ó teorema de Jordan-Schönflies en dimensión 3	35
B. Anexo II: O xénero dun grafo e a coloración de mapas	41

Resumo

Neste traballo, levaremos a cabo un estudo detallado dun artigo publicado por Carsten Thomassen en 1992, no que presenta probas elementais de catro grandes teoremas, culminando co Teorema de Clasificación de Superficies Pechadas. Profundizaremos nos resultados e as probas expostas neste artigo, e propoñeremos algún resultado adicional para facelo máis doado de seguir. Tamén engadiremos numerosas ilustracións dos conceptos e probas máis importantes, e aclararemos todos os detalles que o autor deixa ao lector. Todo isto, co fin de facilitar a comprensión das ideas expostas polo autor. Por último, presentaremos un contraexemplo a unha xeralización dun dos principais resultados do artigo, o Teorema de Jordan-Schönflies, xunto cunha aplicación do Teorema de Clasificación de Superficies Pechadas ao problema da coloración de mapas.

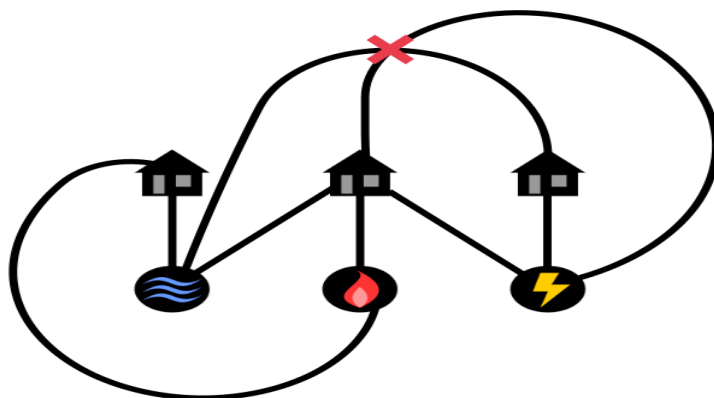
Abstract

In this work, we will carry out a detailed study of an article published by Carsten Thomassen in 1992, in which he presents elementary proofs of four important results, ending with the Classification Theorem for Closed Surfaces. In order to facilitate the understanding of the article, we will delve in the results and proofs contained in the article, and propose some other results from outside the article in order to make it easier to follow. We will also illustrate the most important concepts and proofs, and clarify the many details the author has left for the reader. Finally, we present a counterexample to a generalisation of one of the main results of the article, the Jordan-Schönflies Theorem, as well as an application of the Classification Theorem for Closed Surfaces to the map coloring problem.

Introdución

En 1992, Carsten Thomassen, publica un artigo no que, en tan só 13 páxinas, consegue probar 4 grandes resultados, cuxas probas habituais poden chegar a ser bastante engorrosas e técnicas, de forma moi elemental, empregando soamente coñecementos topolóxicos básicos e introducindo uns poucos conceptos, tamén moi básicos, da teoría de grafos. Estes catro resultados son o teorema da curva de Jordan, o teorema de Jordan-Schönflies, o teorema de triangulación de superficies pechadas, e o teorema de clasificación de superficies pechadas. Cada un destes resultados, empezando polo teorema da curva de Jordan, é empregado para probar o seguinte.

O problema dos tres servizos é un puzzle matemático clásico que adoita a ser empregado como introdución á teoría de grafos. Consiste en atopar o xeito de conectar 3 casas con 3 servizos diferentes no plano, por exemplo, auga, luz e gas, de forma que as conexións non se crucen. Unha vez que o expresemos matematicamente, veremos que este problema é equivalente a atopar unha representación planar do grafo $K_{3,3}$, o cal probaremos que non é posible.



Usando este feito, xunto con outro resultado que nos di que un arco simple non separa o plano, probaremos de forma breve o teorema da curva de Jordan. Este teorema, establece que unha curva pechada simple (sen autointerseccións) divide o plano en dúas rexións, o cal, aínda que a primeira vista poda parecer trivial, non é nada sinxelo de probar. O motivo disto é a existencia de

curvas que se comportan de formas moi patolóxicas (podemos pensar en curvas non diferenciables en ningún punto, curvas fractais, etc). Hoxe en día, coñécense varias demostracións diferentes. Algunhas destas probas son máis elementais, mentrás que outras fan uso das ferramentas da topoloxía alxébrica para probalo dunha forma máis sinxela, e incluso xeralizar o teorema en dimensións superiores, obtendo o que se coñece como o teorema de separación de Jordan-Brouwer (Véxase [Bey]). A demostración dada por C.Thomassen en [Tho92] é unha das máis elementais, ademais de non resultar demasiado engorrosa.

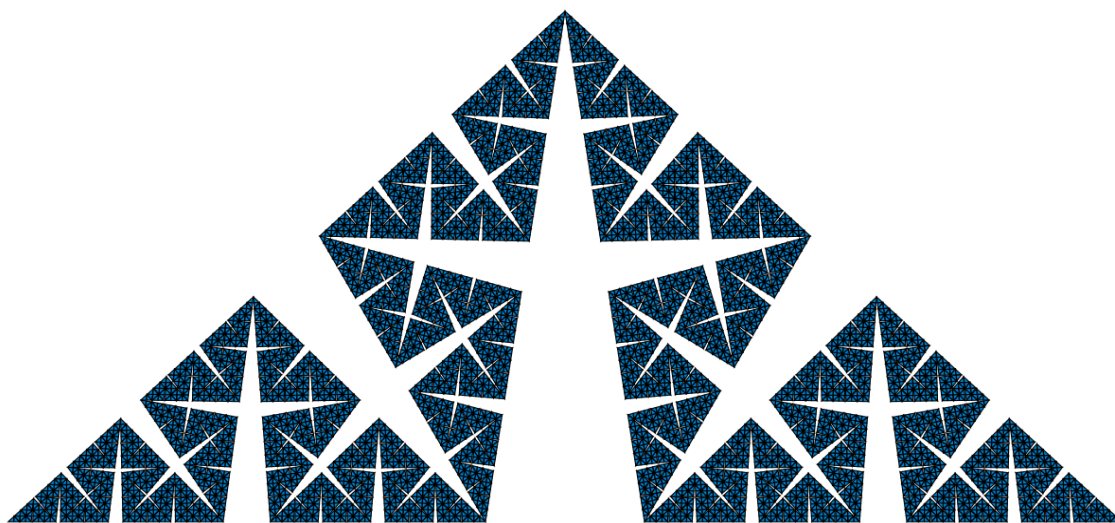


Figura 1: Curva de Osgood, unha curva simple con área positiva

Para poder probar que toda superficie pechada é triangulable, precisaremos dunha extensión do Teorema da curva de Jordan, coñecida como o Teorema de Jordan-Schönflies. Se temos un homeomorfismo entre dúas curvas simples pechadas, podemos extendelo a todo o plano. Este teorema, contradecendo ó que a nosa intuición podería facernos pensar, non se xeraliza ao espazo tridimensional, como foi asumido no inicio do século pasado. No primeiro anexo, expoñemos un interesante contraexemplo, coñecido como a *esfera cornuda de Alexander*, descuberto por J.W. Alexander en 1924, cando estaba a intentar probar o teorema para dimensión 3.

Unha vez probado que toda superficie pechada ten unha triangulación, daremos unha demostración combinatoria do teorema de clasificación de superficies pechadas. Este teorema, o cal nos di que calquera superficie pechada é homeomorfa a unha superficie obtida a partir da esfera engadido asas ou tapas cruzadas (bandas de Möbius), é un resultado topolóxico de gran importancia e beleza, e conta cunha longa historia de versións e probas (Véxase [Jea13], apéndice D). No segundo anexo, expoñeremos unha aplicación deste teorema a un problema clásico, o da coloración de mapas.

Capítulo 1

Grafos Planares e Teorema da Curva de Jordan

De aquí en adiante, todos os resultados empregados que non estean referenciados pertencen a [Tho92].

Comezamos introducindo unha serie de definicións topolóxicas básicas.

Definición 1.1. Sexa X un espazo topolóxico, un *camiño* entre dous extremos é unha función continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. Chamaremos a $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$ *extremos* do camiño. Un *arco simple* é un camiño no que γ é inxectiva, é dicir, un mergullo. Un *lazo* é un camiño no que os extremos coinciden. Unha *curva pechada simple* é un arco simple cuxos extremos coinciden. Facendo certo abuso da linguaxe, referirémonos ás imaxes da mesma forma que ás aplicacións.

Definición 1.2. Un espazo topolóxico X é *conexo por camiños* se para cada par de puntos de X existe un camiño entre os dous. Se ademáis existe un arco simple entre cada par de puntos, diremos que X é *arconexo*. Unha *rexión* dun aberto do plano \mathbb{R}^2 é un subconxunto arconexo maximal.

Definición 1.3. Un *arco simple poligonal* é un arco simple formado por unha unión finita de segmentos de recta.

Lema 1.4. Sexa Ω un subespazo aberto e arconexo do plano \mathbb{R}^2 . Se $x, y \in \Omega$, entón existe un arco simple poligonal conectando x e y

Demostración. Sexan $x, y \in \Omega$, e sexa f un arco simple tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Como f é continua e $[0, 1]$ é compacto, $f([0, 1])$ é compacto en Ω . Por ser Ω aberto, $\forall p \in \Omega$, $\exists B(p, r) \subset \Omega$ para algún $r \in \mathbb{R}$. Logo, temos que $\bigcup_{p \in f([0, 1])} B(p, r)$ é un recubrimento por abertos do arco,

é por ser este compacto, existe un subrecubrimento finito. É sinxelo construír un arco simple poligonal na unión finita das bolas que conecte x e y . \square

Agora presentamos algúns conceptos da teoría de grafos non dirixidos.

Definición 1.5. Un *multigrafo* G é unha tripla ordeada $(V(G), E(G), \partial)$, onde $V(G)$ é o conxunto de vértices, $E(G)$ o conxunto de arestas, e ∂ é unha aplicación que asigna cada aresta un par de vértices non necesariamente distintos de G , aos que chamaremos *extremos* da aresta. Denotaremos ás arestas en función dos seus extremos, é dicir, se $v_1, v_2 \in V(G)$, a aresta que os une será v_1v_2 . Neste caso, diremos que v_1 e v_2 son adxacentes. É posible que existan varias arestas cos mesmos extremos, as cales chamaremos *arestas paralelas* e diremos que forman unha *aresta múltiple*. Ademais, tamén é posible que unha aresta teña como extremos ao mesmo vértice, ó que chamaremos un *lazo*. Se G non contén lazos nin arestas múltiples, diremos que G é un *grafo*.

O concepto de multigrafo será de gran utilidade cando introduzcamos as superficies pechadas, pero por agora, G sempre será un grafo.

Definición 1.6. Un *subgrafo* H de G é un grafo que verifica $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Diremos que G contén a H . Definimos $G - H$ como o subgrafo obtido eliminando de G todos os vértices de H e todas as arestas que ou ben están en H ou ben son incidentes con algún vértice de H .

Definición 1.7. Un *camiño* é un grafo formado por n vértices v_1, v_2, \dots, v_n e $n - 1$ aristas $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$. Aínda que o denotamos coa mesma palabra, distinguiremos este concepto do de camiño topolóxico definido anteriormente segundo o contexto (grafo ou espazo topolóxico). Un *ciclo* é un camiño ao que engadimos a arista v_nv_1 , é dicir, un camiño pechado.

A partir de agora, cando falemos de camiños, estaremonos a referir ao concepto anterior de camiño nun grafo, non ó de camiño topolóxico, salvo que se especifique o contrario.

Definición 1.8. Un *isomorfismo de grafos* entre dous grafos G e H é unha aplicación bixectiva $g : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $v_1, v_2 \in V(G)$ son adxacentes se e só se $f(v_1)$ e $f(v_2)$ tamén o son. Se $C = v_1v_2\dots v_n$ é un camiño de G , denotaremos por $f(C)$ ao camiño $f(v_1)f(v_2)\dots f(v_n)$.

Definición 1.9. Un grafo G dirase *conexo* se para cada par de vértices de G , existe un camiño entre eles. Se ademais, $G - v$ é conexo $\forall v \in V(G)$, dirase que G é *2-conexo*.

Definición 1.10. Sexa G un grafo. Diremos que o grafo G' é unha subdivisión de G se é posible obtelo engadindo vértices ás aristas de G .

Definición 1.11. Diremos que un grafo G é *mergullable* no espazo topolóxico X se $V(G)$ pode ser representado por distintos elementos de X , e $E(G)$ por arcos simples entre estes elementos de forma que a intersección de dous arcos diferentes sexa vacía ou consista nun extremo.

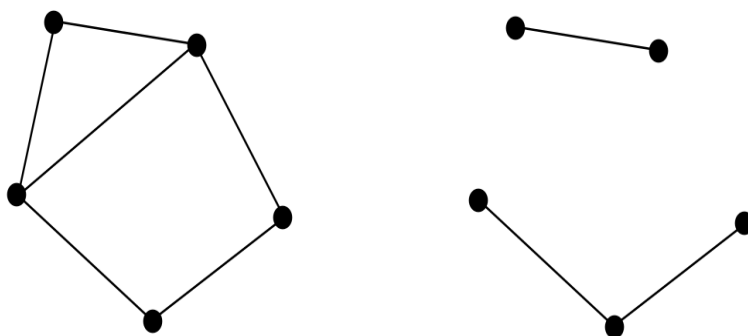


Figura 1.1: Un grafo 2-conexo cun subgrafo non conexo

Existen dous tipos de grafos que, como veremos de seguido, son de especial interese. Estes son os grafos *completos* e os *bipartitos*.

Definición 1.12. Un grafo completo de orde n , ao que nos referiremos por K_n , é un grafo formado por n vértices, conectados dous a dous por unha aresta. Un grafo *bipartito completo* é un grafo formado pola unión de dous conxuntos de vertices V_1 e V_2 , de forma que se escollemos un vértice de cada conxunto, existe unha aresta entre os dous. Denótase como $K_{n,m}$ ao grafo bipartito completo con $|V_1| = n$, $|V_2| = m$.

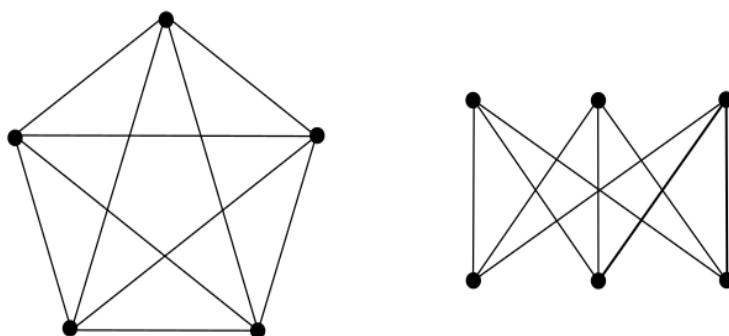


Figura 1.2: K_5 e $K_{3,3}$

Definición 1.13. Se un grafo G pode ser mergullado no plano \mathbb{R}^2 , diremos que G é un *grafo planar*, e á súa representación no plano chamarémoslle *grafo plano*.

Lema 1.14. *Sexa G un grafo planar. Entón G pode ser mergullado no plano de forma que todas as súas arestas sexan arcos simples poligonales.*

Demostración. Sexa Γ unha representación de G no plano. Para cada vértice $p \in \Gamma$, tomamos un disco pechado D_p de forma que só interseque ás arestas que inciden en p e a a unión de todos os discos sexa disxunta. Agora, para cada aresta pq de Γ , tomamos o arco $\overline{pq} = pq \cap (\mathbb{R}^2 / (\overset{\circ}{D}_p \cup \overset{\circ}{D}_q))$ e engadímoslle un segmento en cada un dos dous discos conectando p e q cos extremos de \overline{pq} . Como \mathbb{R}^2 é Hausdorff, e os arcos \overline{pq} , $p, q \in \Gamma$ son compactos disxuntos, existen abertos disxuntos que conteñen a cada un dos arcos, e polo tanto podemos aplicar o Lema 1.5 para substituílos por arcos simples en cada aberto. \square

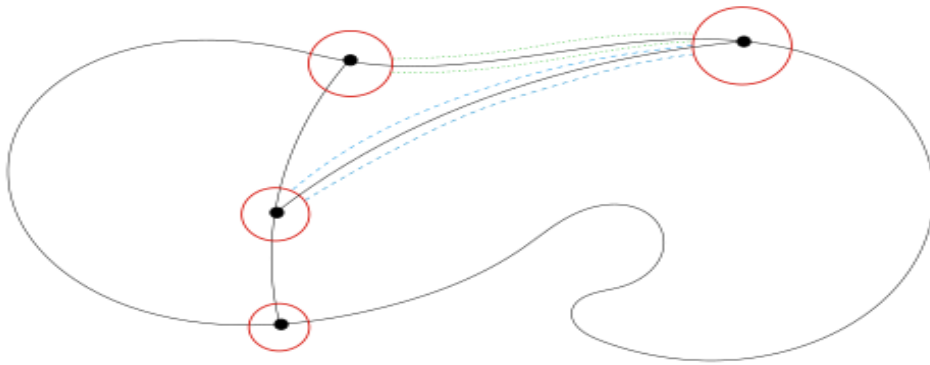


Figura 1.3: Lema 1.14

Lema 1.15. *Se C é unha curva simple poligonal pechada en \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^2/C posúe dúas rexións con C como fronteira.*

Demostración. Probando que \mathbb{R}^2/C ten como moito dúas rexións e que non é arconexo, obtemos o resultado. Vexamos que ten como moito dúas rexións. Supoñamos que q_1, q_2, q_3 pertencen a 3 rexións distintas de $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Sexa D un disco tal que $D \cap C$ é un segmento de recta. Agora, podemos levar cada un dos 3 puntos cara o disco a través dun arco simple poligonal sen intersecar C . Non habería máis que desplazarse paralelamente ós segmentos de C a unha distancia pequena. Polo tanto, dous dos tres puntos están conectados a través dun arco simple poligonal.

Vexamos agora que $\mathbb{R}^2 \setminus C$ non é arconexo. Sexa $q \in \mathbb{R}^2 \setminus C$. Tomemos unha semirecta L dende q con dirección arbitraria. $L \cap C$ é unha unión finita de intervalos (posiblemente, puntos). Dado Q , un destes intervalos, se C pasa dun lado ao outro de L ao percorrer Q , diremos que C corta a L en Q . No caso contrario, diremos que C toca a L en Q . Ao cambiar a dirección de L , o número de veces que C corta a L módulo 2 non varía. Isto ocorre xa que cando nos atopamos cun novo vértice, ou C corta a L nese vértice, co que o número de cortes non varía ou ben C toca a L , co que o número de cortes ao cambiar de dirección aumenta ou diminúe en 2.

Polo exposto anteriormente, a paridade mantense fixa para calquer punto dentro do mesmo arco poligonal en \mathbb{R}^2/C (non hai máis que mudar a dirección de L na dirección que se está a percorrer no arco). Por tanto, a paridade é a mesma para todos os puntos dunha rexión de \mathbb{R}^2/C . Agora ben, considerando unha semirecta dende Q que interseque a C precisamente unha vez, obtemos puntos de distinta paridade, e polo tanto, en diferentes rexións. \square

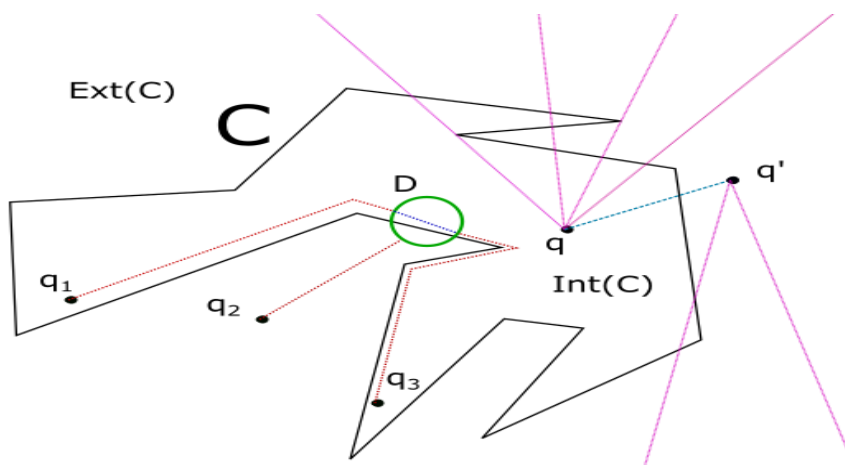


Figura 1.4: Lema 1.15: Teorema da curva de Jordan para curvas poligonais

A rexión non acotada de \mathbb{R}^2/C chamarase *exterior* de C , e a rexión acotada será o *interior* de C . Denotaremos como $ext(C)$ e $int(C)$ respectivamente. Ademais definimos $\overline{ext(C)} = C \cup ext(C)$ e $\overline{int(C)} = C \cup int(C)$.

Este último resultado é un caso particular do teorema da curva de Jordan para curvas pechadas simples poligonais. Unha das probas clásicas, apoiase neste lema, xunto con outros resultados de aproximación de curvas simples arbitrarias mediante curvas poligonais, para probar o teorema da curva de Jordan (véxase [Tve93]). Sen embargo, neste caso, o autor emprega este resultado para probar de forma moi sinxela a non planaridade de $K_{3,3}$, o que máis adiante será de vital importancia para a proba que pretendemos construír.

O seguinte lema é unha extensión do lema anterior.

Lema 1.16. *Sexa C unha curva simple poligonal pechada e P un arco simple en $\overline{int(C)}$ tal que P conecta $p, q \in C$, e $P \cap C = \{p, q\}$. Sexan $P_1, P_2 \in C$ os dous arcos de p a q . Logo, $\mathbb{R}^2/(C \cup P)$ posúe precisamente 3 rexións, con fronteiras C , $P_1 \cup P$, e $P_2 \cup P$ respectivamente.*

Demostración. Primeiramente, $ext(C)$ é unha das rexións de $\mathbb{R}^2/(C \cup P)$. Agora, procedemos igual que no lema anterior, tomando un disco D tal que $D \cap P$ é un segmento de recta, e concluímos que $int(C)$ ten ao sumo dúas rexións. Agora temos que ver que ten polo menos dúas rexións.

Sexan L_1 e L_2 dous segmentos de recta cruzados de forma que $L_1 \subset P$ e $L_1 \cap L_2 = \{p\} \subset P$. Pola proba do lema anterior, vemos que os extremos de L_2 están en dúas rexións distintas de $\mathbb{R} \setminus (P \cup P_1)$, e polo tanto en dúas rexións distintas de $\mathbb{R} \setminus (P \cup C)$. Como tamén están en $\text{int}(C)$, concluímos que $\text{int}(C)$ ten polo menos dúas rexións distintas. \square

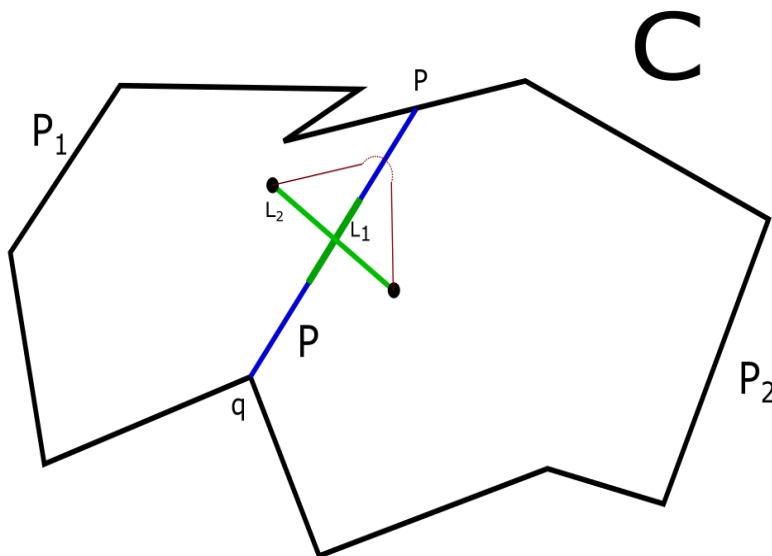


Figura 1.5: Lema 1.16

Observación 1.17. O anterior lema implica que dados dous puntos r, s en P_1 e P_2 respectivamente, ambos distintos de p e q , non é posible unir r e s cun arco simple poligonal en $\overline{\text{int}(C)}$ sen intersecar a P .

Lema 1.18. $K_{3,3}$ non é planar.

Demostración. Podemos representar $K_{3,3}$ coma un ciclo $C : x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ con tres cordas x_1x_4, x_2x_5, x_3x_6 . Se $K_{3,3}$ fose planar, poderíamolo representar de dita forma con C unha curva simple poligonal pechada. Agora, tendo en conta a observación 1.18, como dous das cordas deben atoparse en $\overline{\text{int}(C)}$ ou $\overline{\text{ext}(C)}$, chegamos a unha contradición. \square

De forma idéntica, tamén poderíamos probar que K_5 tampouco é planar. Isto constitúe unha das partes do teorema de Kuratowski¹.

¹Un grafo é planar se e só se non contén a ningunha subdivisión dos grafos K_5 ou $K_{3,3}$.

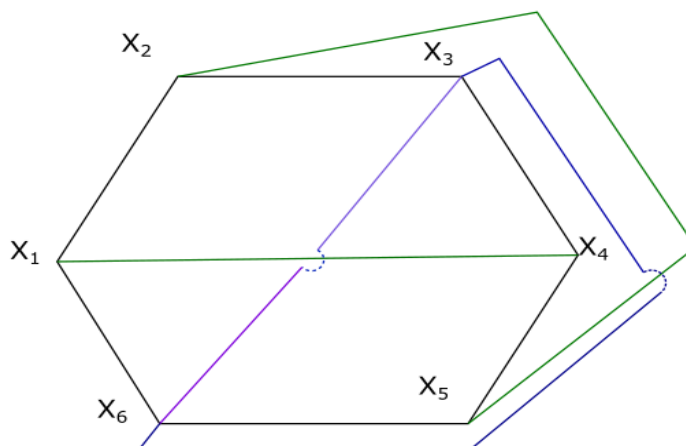


Figura 1.6: Lema 1.18. Non se pode conectar x_3 con x_6 no interior nin no exterior

Proposición 1.19. *Se C é unha curva pechada simple en \mathbb{R}^2 , entón \mathbb{R}^2/C non é conexo.*

Demostración. Definamos L_1 (resp. L_2) como as rectas verticais que deixan C na metade do plano pechado partido por L_1 (resp. L_2). Sexa p_1 (resp. p_2) o punto superior de $L_1 \cap C$ (resp. $L_2 \cap C$), e P_1 e P_2 as curvas en C de p_1 a p_2 . Sexa L_3 outra recta vertical entre L_1 e L_2 . Como $P_1 \cap L_3$ e $P_2 \cap L_3$ son compactos disxuntos, existe $L_4 \subset L_3$ un intervalo conectando P_1 e P_2 tal que $L_4 \cap C = \{p_5, p_6\}$ con p_5 e p_6 en P_1 e P_2 respectivamente. Sexa L_5 un arco poligonal en $\overline{\text{ext}(C)}$ formado por dous segmentos de L_1 e L_2 unidos mediante un segmento por enriba de C . Se L_4 estivese en $\overline{\text{ext}(C)}$, existiría un arco simple poligonal L_6 conectando puntos medios p_3 e p_4 de L_4 e L_5 respectivamente. Observemos que p_1 conéctase a p_4 , p_5 e p_6 a través de L_4 , P_1 e P_2 respectivamente, e o mesmo ocorre para p_2 e p_3 (con diferentes arcos). Logo, $C \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6$ sería un grafo planar isomorfo a $K_{3,3}$, contradecindo ao lema anterior. Polo tanto, o punto medio de L_4 non está en $\overline{\text{ext}(C)}$, polo que está en $\text{int}(C)$. \square

Para demostrar o teorema da curva de Jordan, só nos queda entón probar que $\mathbb{R}^2 \setminus C$ non ten máis de dúas rexións.

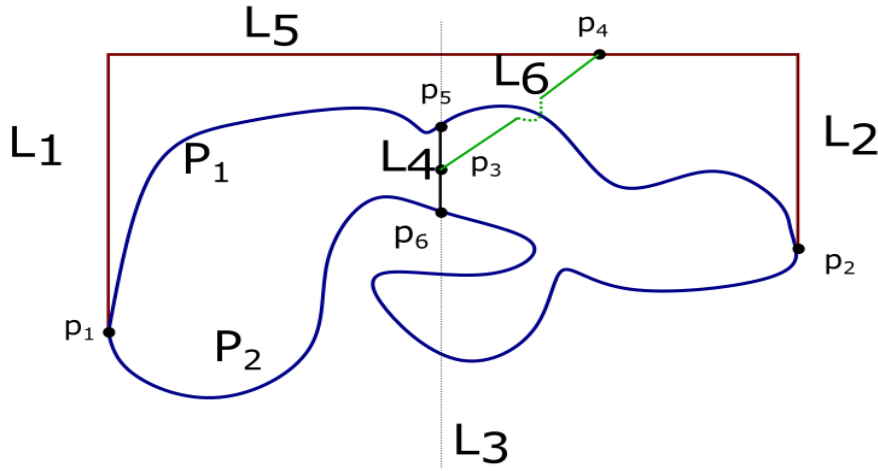


Figura 1.7: Proposición 1.21

Lema 1.20. *Se G é un grafo 2-conexo e H un subgrafo 2-conexo de G , entón podemos construír G a partir de H engadindo sucesivamente camiños de forma que cada un destes camiños teña por vértices inicial e final dous vértices distintos do grafo actual, e o resto dos vértices estén fora do grafo actual.*

Demostración. A proba será por indución no número de aristas de $E(G) \setminus E(H)$. Se este número é cero, teríamos $G = H$, polo que asumimos que é distinto de 0. Pola hipótese de indución, temos que o resultado cúmprese para dous grafos G', H' tales que $|E(G') \setminus E(H')| < |E(G) \setminus E(H)|$. Sexa H' un subgrafo propio 2-conexo maximal de G contendo a H . Se H fose un subgrafo propio de H' , poderíamos aplicar a hipótese de indución dúas veces, primeiro sobre H' e H , e posteriormente sobre G e H . Polo tanto, podemos asumir que $H = H'$. Como G é conexo, existe unha arista x_1x_2 en $E(G) \setminus E(H)$ de forma que $x_1 \in H$. Se $x_2 \in H$, $H \cup x_1x_2 = G$ pola maximalidade de H . Logo, supoñamos que x_2 non está en H . Xa que $G - x_1$ é conexo (G é 2-conexo), existe un camiño $x_2x_3\dots x_k$ de forma que $x_k \in H$ e $x_i \notin H : 2 \leq i < k$. Agora ben, dado que $H \cup P \cup x_1x_2$ é 2-conexo, e de novo pola maximalidade de H obtemos que $H \cup P \cup x_1x_2 = G$. \square

Lema 1.21. *Se Γ é un grafo planar 2-conexo de polo menos 3 vértices, cuxas aristas son arcos simples poligonales, logo $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ ten $|E(\Gamma)| - |V(\Gamma)| + 2$ rexións, cada unha delas cun ciclo de Γ como fronteira.*

Demostración. Sexa C un ciclo de Γ . Polo lema 2.3, o resultado quedaría probado se $\Gamma = C$. Noutro caso, podemos obter Γ a partir de C engadindo camiños sucesivamente do xeito explicitado no lema anterior. Cada un destes camiños é engadido dentro dunha rexión, que está acotada

por un ciclo, e polo tanto, podemos aplicar o lema 2.4, concluindo que por cada camiño engadido, subdividindo unha rexión, aumentamos o número de rexións en 1, o que remata a proba, se observamos que ao engadir un camiño cos extremos no grafo actual e os demais vértices foradel, estamos engadindo n vértices e $n + 1$ arestas. \square

Se Γ é un grafo plano, chamaremos *caras* de Γ ás rexións de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Ademais, se Γ é 2-conexo, a rexión non limitada será a *cara exterior* de Γ , cuxa fronteira será o *ciclo exterior* de Γ .

Definición 1.22. Se G e H son dous grafos, definimos a unión

$$G \cup H = (V(G) \sqcup V(H), E(G) \cup E(H))$$

Para os grafos planos, convén definir a unión de distinta forma, co fin de conservar a planaridade.

Definición 1.23. Sexan Γ_1 e Γ_2 dous grafos planos con arcos simples poligonales como arestas. A súa unión $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ construírase da seguinte forma:

Sexa Γ'_i unha subdivisión de Γ_i de forma que cada aresta sexa un segmento de recta para $i = 1, 2$. Agora, sexa Γ''_i unha subdivisión de Γ'_i de maneira que un punto p dunha aresta a de Γ'_i sexa vértice de Γ''_i se p é un vértice de Γ'_{3-i} ou ben p está nunha aresta de Γ'_{3-i} intersecando a a . Por último, a unión usual definida anteriormente entre Γ''_1 e Γ''_2 é un grafo plano que tomará o papel de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

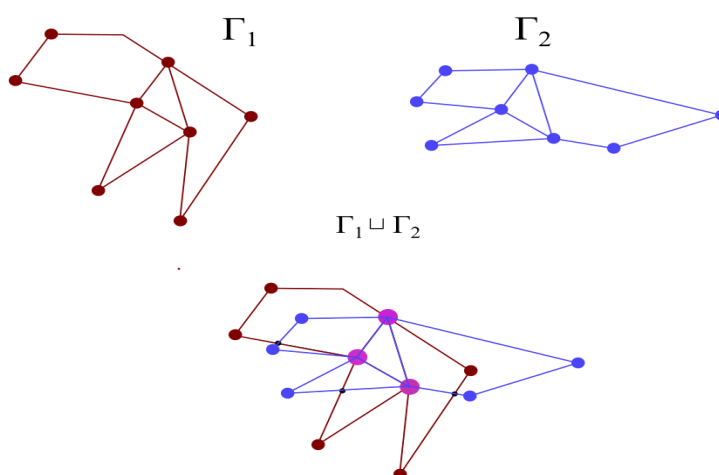


Figura 1.8: Unión de grafos planares

Lema 1.24. Sexan $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ grafos planos 2-conexos cuxas arestas son arcos simples poligonales de forma que cada Γ_i ($i = 2, 3, \dots, k-1$) ten polo menos dous puntos en común con Γ_{i-1} e con Γ_{i+1} , e ningún punto en comun co resto dos Γ_j . Supoñemos ademais que $\Gamma_1 \cap \Gamma_k = \emptyset$. Entón, todo punto que se atope na cara exterior de cada $\Gamma_i \cup \Gamma_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$) está tamén na cara exterior de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_k$.

Demostración. Supoñamos que p é un punto nunha cara interior de $\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$. Dado que $\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$ é 2-conexo, séguese do lema 1.21 que existe un ciclo C en $\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$ tal que $p \in \text{int}(C)$. Podemos escoller C de forma que C esté en $\Gamma_i \cup \Gamma_{i+1} \dots \cup \Gamma_j$ e $j-i$ sexa mínimo. Vexamos que $j-i \leq 1$. Supoñamos entón que $j-i \geq 2$. De novo, podemos asumir que o número de arestas de C que non están en Γ_{j-1} é mínimo. Como C interseca a Γ_{j-2} e a Γ_j , C ten polo menos dous segmentos disxuntos maximales en Γ_j . Sexa P un deles, e P' o camiño máis curto en Γ_{j-1} entre P e $C - V(P)$. Os extremos de P' dividen C en dous arcos, P_1 e P_2 , e cada un deles contén segmentos fora de Γ_{j-1} . Necesariamente, un dos dous ciclos, $P \cup P_1$ ou $P \cup P_2$ contena p no seu interior, e ten menos segmentos fora de Γ_{j-1} dos que ten C , o que contradice a minimalidade na elección de C asumida anteriormente, polo que se C é escollido desa forma, C non pode estar na unión minimal $\Gamma_i \cup \Gamma_{i+1} \dots \cup \Gamma_j$ con $j-i \geq 2$. \square

Teorema 1.25 (do arco). *Se P é un arco simple en \mathbb{R}^2 , $\mathbb{R}^2 \setminus P$ é arconexo.*

Demostración. Sexan p e q dous puntos en $\mathbb{R}^2 \setminus P$, e sexa $d \in \mathbb{R}$ tal que p e q estean a distancia $> 3d$ de P . Dado que P é a imaxe dunha aplicación continua (uniformemente xa que o dominio é compacto), podemos dividir P en segmentos P_1, P_2, \dots, P_k de forma que P_i vai de p_i a p_{i+1} e tal que a distancia de cada punto de P_i a p_i sexa menor que d , para $i = 1, 2, \dots, k-1$. Sexa d' a mínima distancia entre P_i e P_{i+1} , $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Dividiremos agora cada P_i en segmentos $P_{i,j}$ de forma que $P_{i,j}$ vai de $p_{i,j}$ a $p_{i,j+1}$ e a distancia entre cada punto de $P_{i,j}$ a $p_{i,j}$ é menor que $d'/4$. Sexa Γ_i o grafo formado pola unión das fronteiras dos cadrados de centro $p_{i,j}$ e lado $d'/2$. Observamos que os Γ_i satisfacen as condicións do lema anterior. Observemos agora que dado que $\Gamma_i \cup \Gamma_{i+1}$ está contido no disco de radio $3d$ centrado en p_{i+1} , mentras que p e q non, e aplicando o lema anterior, temos que p e q están na cara exterior de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_k$. Ao mesmo tempo, P non interseca a esta cara, polo que podemos unir p e q mediante un arco simple poligonal disxunto de P . \square

Observación 1.26. Se C é un subconxunto pechado do plano e Ω é unha rexión de $\mathbb{R}^2 \setminus C$, diremos que un punto $p \in C$ é *accesible* dende Ω se para algún punto q de Ω (e polo tanto todos), existe un arco simple poligonal entre p e q , intersecando a C soamente en p . É unha curiosa observación que se C é unha curva simple pechada e $p \in C$, p non é necesariamente accesible, dado que como dixemos na introdución, existen curvas con comportamentos patolóxicos, con puntos aos que non é posible acceder mediante un arco simple poligonal, xa que este está formado por un número

finito de segmentos. Por outra parte, se P é un segmento de C que contén a p , polo teorema anterior, $\mathbb{R}^2 \setminus (C \setminus P)$ é arconexo, e polo tanto existe un arco simple poligonal P' dende q ata outro punto contido nunha rexión de $\mathbb{R}^2 \setminus C$ diferente de Ω , e logo P' interseca a C nun punto de P . Dado que podemos escoller un P arbitrariamente pequeno, deducimos que o conxunto de puntos accesibles de C é denso en C .

Teorema 1.27 (da curva de Jordan). *Se C é unha curva simple pechada en \mathbb{R}^2 , $\mathbb{R}^2 \setminus C$ ten exactamente dúas rexións, cada unha delas con C como fronteira.*

Demostración. Supoñamos que existen 3 puntos q_1, q_2, q_3 tales que se atopan cada un deles nunha rexión diferente de $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Sexan Q_1, Q_2, Q_3 segmentos de C disxuntos dous a dous. Aplicando a observación anterior, temos que existe un arco simple poligonal $P_{i,j}$ de q_i a q_j con $i, j = 1, 2, 3$. Podemos asumir que $P_{i,j} \cap P_{i',j'} = q_i$ se $j \neq j'$, xa que se por exemplo ao percorrer $P_{i,2}$ cara q_i nos atopásemos con $P_{i,1}$ no punto q'_i , poderíamos modificar $P_{i,2}$ de forma que o seu último segmento este moi preto do segmento de $P_{i,1}$ que vai de q'_i a q_i , sen tocalo, e o único punto en común con $P_{i,1}$ sexa q_i . Como os q_i se atopan en rexións distintas, $P_{i,j} \cap P_{i',j} = \emptyset$ se $i \neq i'$. Agora, considerando como vértices a os q_i , podemos estender a unión dos arcos $P_{i,j}$, engadindo para cada Q_i un vértice no punto intermedio dos tres nos que cada arco $P_{i,j}$ interseca a Q_i , e completando as arestas cos segmentos de Q_i que une estes puntos intermedios aos outros dous, de forma que obtemos unha representación plana de $K_{3,3}$, o cal sabemos que non pode ocorrer, polo que $\mathbb{R}^2 \setminus C$ ten menos de 3 rexións, e polo visto na proposición 1.19, concluímos que $\mathbb{R}^2 \setminus C$ ten exactamente dúas rexións, $int(C)$ e $ext(C)$. Ademáis, o teorema do arco tamén implica que todo punto de C é un punto fronteira de $int(C)$ e $ext(C)$. \square

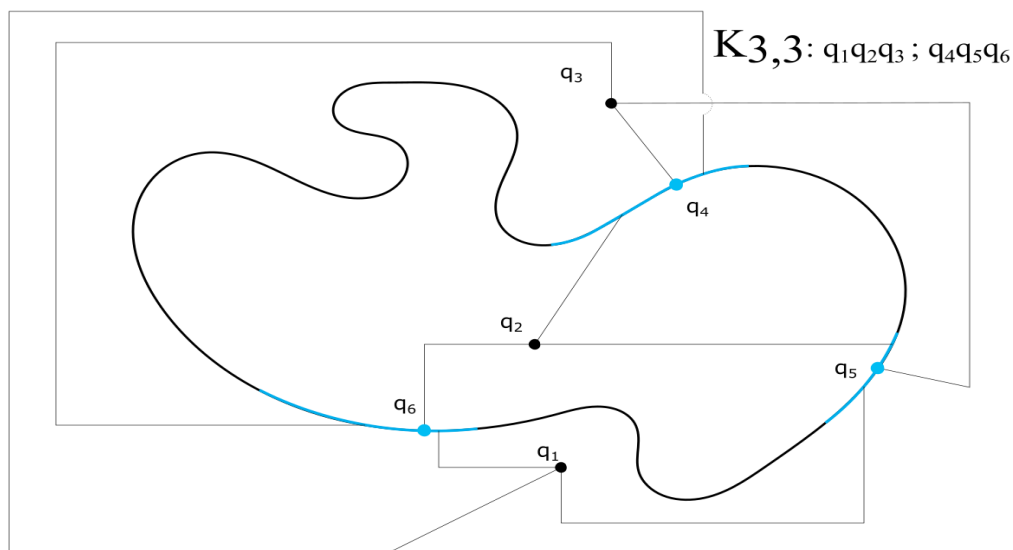


Figura 1.9: Proposición 1.21

Observación 1.28. É moi fácil ver que un grafo é mergullable no plano se e só se é mergullable na esfera. É obvio que calquer grafo planar é mergullable na esfera, e para ver que o recíproco é certo, só habería que eliminar un punto da esfera que non pertenza ó grafo, co cal obteríamos un espazo homeomorfo a \mathbb{R}^2 . Por isto último, tamén é certo o teorema do arco para unha esfera. Polo tanto, o teorema da curva de Jordan é válido para curvas pechadas simples en esferas.

Capítulo 2

Teorema de Jordan-Schönflies

Agora imos a probar o resultado central deste traballo, que forma unha ponte entre o teorema da curva de Jordan (do que é unha xeralización) e o teorema de triangulación de superficies pechadas. Xa temos case todo o necesario, soamente nos fará falta estender un par de resultados do capítulo anterior. Comezamos cunha extensión do lema 1.17.

Lema 2.1. *Sexa C unha curva simple pechada e P un arco simple poligonal en $\text{int}(C)$ unindo os puntos p e q e con ningún outro punto en común con C . Sexan P_1 e P_2 os dous arcos en C de p a q . Entón, $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup P)$ ten exactamente 3 rexións con fronteiras C , $P_1 \cup P$ e $P_2 \cup P$ respectivamente.*

Demostración. Ao igual que na proba do lema 1.17, só nos falta probar que $\overline{\text{int}(C)}$ se divide en polo menos dúas rexións. Sexan L_1 e L_2 dous segmentos cruzados de forma que $L_1 \subset P$ e $L_1 \cap L_2 = \{p\} \subset P$. Se os extremos de L_2 estivesen na mesma rexión de $\text{int}(C)$, existiría un arco simple poligonal P_3 tal que $L_2 \cup P_3$ é unha curva simple poligonal pechada. Pola proba do lema 1.15, os extremos de L_1 están en distintas rexións de $\mathbb{R}^2 \setminus (L_2 \cup P_3)$. Ao mesmo tempo, os extremos de L_1 están na mesma rexión de $\mathbb{R}^2 \setminus (L_2 \cup P_3)$, dado que están conectados por un arco simple en $P \cup C$ que non interseca a $L_2 \cup P_3$. Esta contradicción implica que os extremos de L_2 están en distintas rexións de $\text{int}(C)$, o que remata a proba. \square

Tamén obtemos a seguinte xeralización do lema 1.23.

Lema 2.2. *Se Γ é un grafo plano 2-conexo que contén a un ciclo C , sendo C unha curva simple pechada, de forma que todas as arestas de $\Gamma \setminus C$ sexan arcos simples poligonales en $\overline{\text{int}(C)}$, entón $\mathbb{R} \setminus \Gamma$ ten $|E(\Gamma)| - |V(\Gamma)| + 2$ rexións, cada unha delas cun ciclo de Γ como fronteira.*

Demostración. A proba é idéntica á do lema 1.23, pero empregando o lema anterior en lugar do lema 1.17. \square

Para rematar, recalcamos que a unión de grafos planos definida anteriormente segue a ser válida se temos dous grafos planos Γ_1, Γ_2 e a súa intersección contén a un ciclo C (pode ser unha curva simple non poligonal) de forma que todas as arestas de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ non contidas en C sexan arcos simples poligonais en $\overline{\text{int}(C)}$. Isto será necesario para poder efectuar as unións de grafos que se describirán na demostración do seguinte teorema.

Definición 2.3. Sexan C e C' dúas curvas pechadas simples e Γ, Γ' dous grafos planos formados por C (resp. C') e arcos simples poligonais en $\overline{\text{int}(C)}$ (resp. $\overline{\text{int}(C')}$), diremos que Γ e Γ' son *plano-isomorfos* se existe un isomorfismo de grafos g entre Γ e Γ' de forma que un ciclo S e Γ é a fronteira dunha cara se e só se $g(S)$ tamén o é, e a imaxe do ciclo exterior de Γ sexa o ciclo exterior de Γ' . É claro que se dous grafos planos son plano-isomorfos, é posible construír un homeomorfismo entre eles, cuxa restricción ao conxunto de vértices sexa un plano-isomorfismo.

Teorema 2.4 (de Jordan-Schönflies). *Sexa f un homeomorfismo dunha curva simple pechada C a outra curva simple pechada C' . Entón, f pode extenderse a un homeomorfismo de todo o plano.*

Demostración. Podemos asumir que C' é un polígono convexo sen perda de xeneralidade (noutro caso, só habería que considerar o homeomorfismo composición de C a C' pasando por un polígono convexo). Realizaremos a extensión en 3 pasos, primeiro extenderemos f a $\text{int}(C)$, logo comprobaremos que esta extensión é apropiada, e para rematar extenderemos f a $\text{ext}(C)$ de forma sinxela empregando exactamente o mesmo método que no primeiro paso.

Paso 1: Extensión a $\text{int}(C)$.

Extenderemos f a un homeomorfismo de $\overline{\text{int}(C)}$ a $\overline{\text{int}(C')}$. Sexa B un conxunto numerable denso en $\text{int}(C)$, por exemplo os puntos de $\text{int}(C)$ con coordenadas racionais. Como vimos anteriormente, o conxunto dos puntos accesibles de C dende $\text{int}(C)$ é denso en C , e polo tanto existe un conxunto numerable A formado por puntos accesibles dende $\text{int}(C)$ e denso en C . Sexa $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ unha sucesión de puntos de $A \cup B$ tal que cada punto de $A \cup B$ aparece infinitas veces. Sexa Γ_0 un grafo 2-conexo constituído por C e algúns arcos simples poligonais en $\overline{\text{int}(C)}$. Definimos Γ'_0 do mesmo xeito para C' , pero de forma que Γ_0 e Γ'_0 sexan plano-isomorfos a través dun isomorfismo g_0 que coincida con f en $C \cap V(\Gamma_0)$. Extendemos f a $C \cup V(\Gamma_0)$ facendo coincidir f con g_0 en $V(\Gamma_0)$. Agora, definiremos dúas sucesións de grafos 2-conexos $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ e $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \dots$ de forma que $\forall n \geq 1$, Γ_n (resp. Γ'_n) é unha extensión de unha subdivisión de Γ_{n-1} (resp. Γ'_{n-1}), existe un isomorfismo plano $g_n : \Gamma_n \rightarrow \Gamma'_n$ coincidindo con g_{n-1} en $V(\Gamma'_{n-1})$, e Γ_n (resp. Γ'_n) consista en C (resp. C') xunto con arcos simples poligonais en $\overline{\text{int}(C)}$ (resp. $\overline{\text{int}(C')}$). Asumiremos tamén que $\Gamma'_n \setminus C'$ é conexo $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, extenderemos f a $C \cup V(\Gamma_n)$ de forma que f e g_n coincidan en $V(\Gamma_n)$.

Supoñamos entón que estamos no paso n , tendo xa definido $\Gamma_0, \dots, \Gamma_{n-1}$ e $\Gamma'_0, \dots, \Gamma'_{n-1}$. Descri-

biaremos agora o seguinte paso para definir Γ_n , Γ'_n e g_n . Consideramos o punto p_n . Distinguimos dous casos.

Caso 1: Se $p_n \in A \subset C$, tomamos un arco simple poligonal P que una p_n cun punto $q_n \in \Gamma_{n-1} \setminus C$ de forma que $P \cap \Gamma_{n-1} = \{p_n, q_n\}$. Definimos $\Gamma_n = \Gamma_{n-1} \cup P$. O arco P atópase nunha cara de Γ_{n-1} que está acotada por un ciclo S . Agora, engadímoslle a Γ'_{n-1} un arco simple poligonal P' na cara acotada por $g_{n-1}(S)$, de forma que P' una $f(p_n)$ con $g_{n-1}(q_n)$, se $q_n \in V(\Gamma_{n-1})$, ou cun punto en $g_{n-1}(a)$, se q_n está contido nunha aresta a de Γ_{n-1} . Logo, definimos $\Gamma'_n = \Gamma'_{n-1} \cup P'$, e g_n de forma que $g_n(P) = P'$ e coincida con g_{n-i} no resto do dominio. Para rematar, extendemos f de forma que $f(q_n) = g_n(q_n)$.

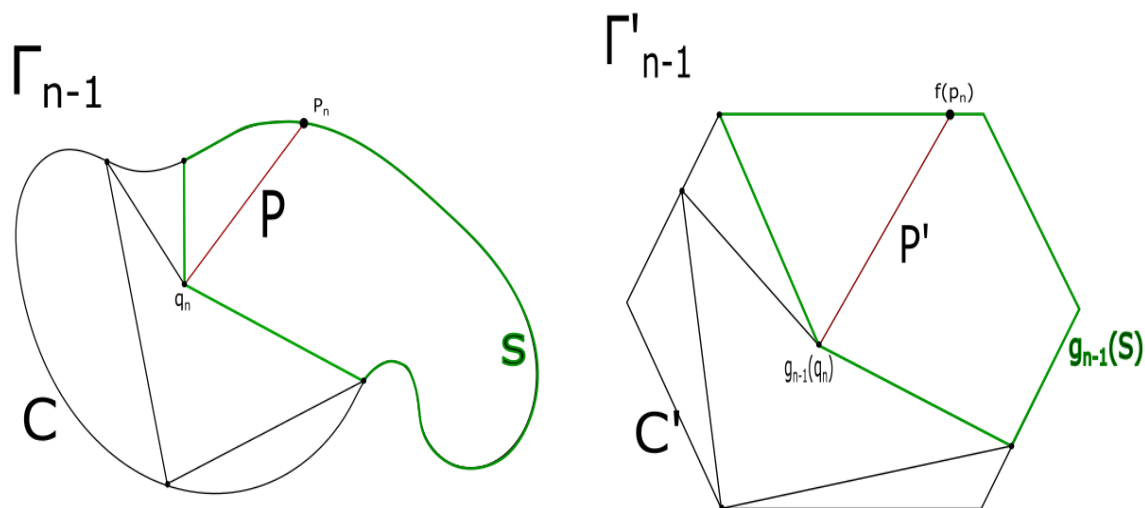


Figura 2.1: Caso 1

Caso 2: Se $p_n \in B \subset \text{int}(C)$, consideramos o cadrado máis grande tal que esté contido en $\overline{\text{int}(C)}$ e teña a p_n como punto central. Observemos que non podemos engadir os lados deste cadrado a Γ_{n-1} , xa que poderían conter infinitos puntos de C . Polo tanto, consideramos un novo cadrado dentro do primeiro, de forma que a distancia entre cada lado dos dous cadrados sexa menor que $1/n$. Agora, dentro deste novo cadrado debuxamos unha especie de "malla", unha serie de liñas horizontais e verticais de forma que p_n se atope nunha vertical e noutra horizontal, e ademáis cada rexión do cadrado esté contida nun disco de radio $< 1/n$. Sexa H_n a unión de Γ_{n-1} cos novos segmentos horizontais e verticais (incluíndo o cadrado), xunto con un arco simple poligonal J en $\text{int}(C)$ se fose necesario para que H_n sexa 2-conexo e $H_n \setminus C$ conexo. Polo lema 1.22, H_n pode ser obtido a partir de Γ_{n-1} engadindo sucesivamente camiños (neste caso segmentos de recta) dentro de caras dos grafos, de forma que cada un destes arcos conecta

dous vértices v e v' dun ciclo Z que acota unha cara do grafo actual. Por cada arco engadido deste xeito, engadimos en Γ'_{n-1} un arco conectando $g_{n-1}(v)$ e $g_{n-1}(v')$ dentro da cara acotada por $g_{n-1}(Z)$, e obtemos un grafo H'_n plano-isomorfo a H_n . Logo, engadimos líneas verticais e horizontais en $\overline{int(C')}$ de forma que só intersequen a C' en $f(A)$, a H'_n nun número finito de puntos, e cada rexión do grafo resultante estén contida nun disco de radio $< 1/n$ (podemos facelo xa que $f(A)$ é denso en $C' = f(C)$). Denotamos como Γ'_n á unión de H'_n con estas líneas. Ao igual que fixemos antes, empregando o lema 1.22, obtemos a partir de H_n un grafo Γ_n plano-isomorfo a Γ'_n . Esta vez, ao engadir a malla a H'_n , como estamos alterando todas as rexións de H'_n , os arcos que temos que engadir posteriormente a H_n para obter Γ_n non necesariamente teñen que parecerse a unha malla, o que fai o proceso complicado de visualizar. Por último, extendemos f de forma que esté definida en $C \cup V(\Gamma_n)$ e coincida con g_n en $V(\Gamma_n)$.

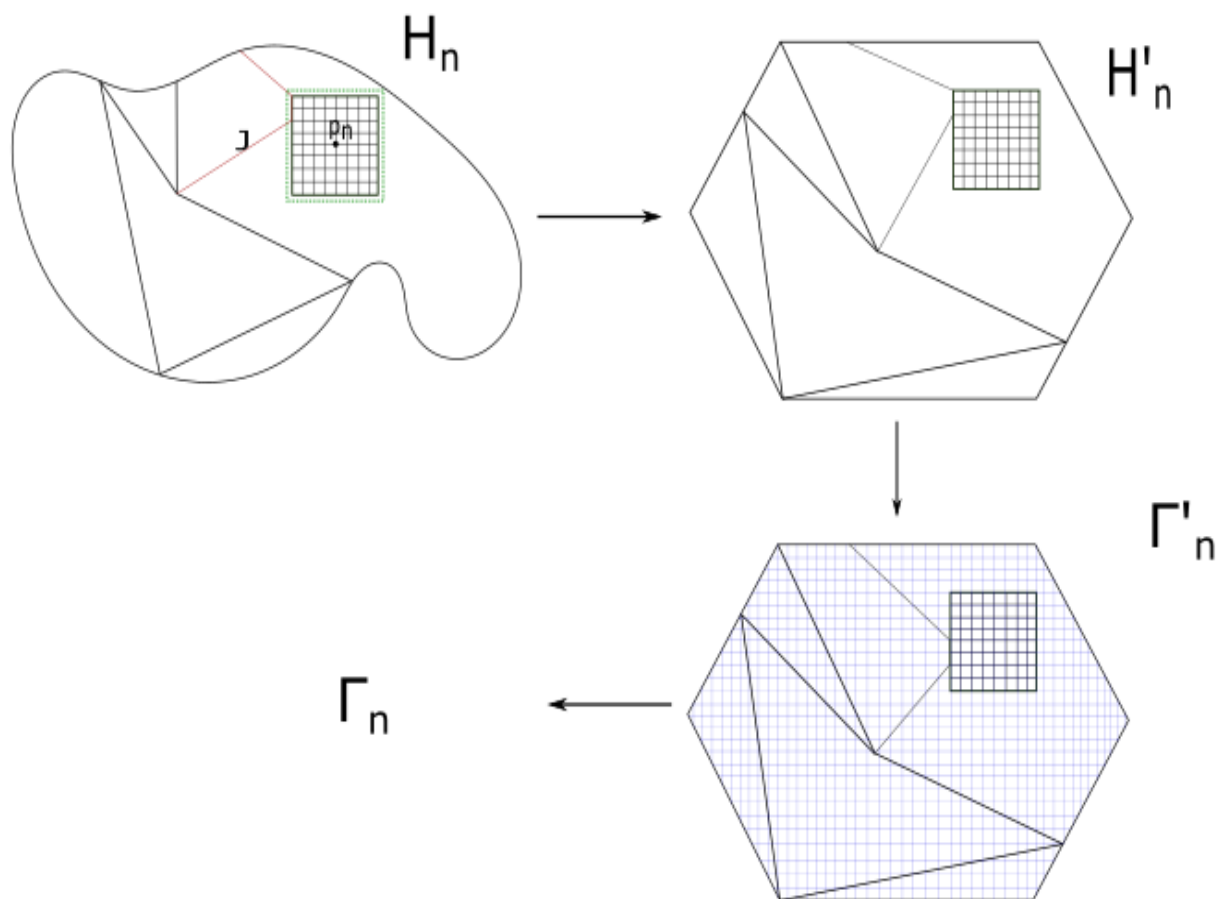


Figura 2.2: Caso 2

Paso 2: Comprobación da validez da extensión.

Deste xeito, acabamos de estender f a unha aplicación definida en $F = C \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots$ con imaxe $C \cup \Gamma'_0 \cup \Gamma'_1 \cup \dots$. Estes dous conxuntos son densos en $\overline{\text{int}(C)}$ e $\overline{\text{int}(C')}$ respectivamente $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como conxunto contén a $A \cup B$). Fáltanos definir f no resto dos puntos. Sexa $p \in \overline{\text{int}(C)} \setminus F$, e $\{q_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ unha sucesión de puntos de $V(\Gamma_0) \cup V(\Gamma_1) \cup \dots$ converxente a p , vexamos que a sucesión $\{f(q_m)\}$ converxe, e definamos $f(p)$ coma o seu límite. Sexa d a distancia de p a C , é $p' = p_n$ (para algún n) un punto a distancia $< d/3$ de p . Notemos que n pode ser tan grande como queiramos, dado que na sucesión $\{p_n\}$ aparece cada punto de $A \cup B$ infinitas veces). Temos que p se atopa no interior do cadrado máis grande en $\overline{\text{int}(C)}$ con p_n como punto central, e tamén no que chamáramos “novo” cadrado, se n é suficientemente grande. Séguese da construción que realizamos de Γ_n e Γ'_n que p se atopa no interior dun ciclo S de Γ_n , que está a súa vez contido nun disco de radio $< 1/n$, ao igual que $g_n(S)$. Dado que f leva $F \cap \text{int}(S)$ en $\text{int}(g_n(S))$ e $F \cap \text{ext}(S)$ en $\text{ext}(g_n(S))$ (f coincide con g_n en Γ_n), temos que os puntos da sucesión $\{f(q_m)\}$ están contidos en $\text{int}(g_n(S))$ para m suficientemente grande. Como observamos anteriormente, n pode ser tan grande como queiramos, polo que $\text{int}(g_n(S))$ pode ser arbitrariamente pequeno, o que implica que a sucesión $\{f(q_m)\}$ é de Cauchy, e polo tanto converxente. Polo tanto, f está ben definida. Temos tamén que como f leva $\text{int}(S)$ en $\text{int}(g_n(S))$, f é continua en $\text{int}(C)$, xa que ambos conxuntos son abertos tan pequenos como queiramos. Polo mesmo argumento, é fácil ver que f é inxectiva en $\text{int}(C)$, xa que dados dous puntos en $\text{int}(C)$ e n suficientemente grande, os dous puntos estarán contidos en discos disxuntos de radio $< 3/n$ con centro ditos puntos, polo que tamén se atoparán nos interiores de dous ciclos disxuntos de Γ_n , con imaxes disxuntas por f . Que f é sobrexectiva é obvio, polo que f é bixectiva, e empregando de novo o mesmo argumento anterior, temos que f^{-1} é continua. Agora temos que probar que f é continua en C , e consecuentemente f^{-1} en C' , xa que $\overline{\text{int}(C)}$ é compacto. Sabemos por hipótese que f é continua se a restrinximos a C , polo que só temos que probar que dada unha sucesión $\{q_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converxente a $q \in C$, a sucesión $\{f(q_m)\}$ converxe a $f(q)$. Se non fose así, dado que $\overline{\text{int}(C')}$ é compacto, $\{f(q_m)\}$ tería unha subsucesión $\{f(q_i)\}$ converxente a $q' \neq f(q)$. Como f^{-1} é continua en $\text{int}(C')$, q' está en C' . Como $f(A)$ é denso en C' , cada un dos dous arcos de C' entre $f(q)$ e q' contén a un punto $f(t_1)$ e $f(t_2)$ respectivamente ($t_1, t_2 \in C$). Existe un n tal que Γ_n ten un camiño P de t_1 a t_2 con t_1 e t_2 os únicos puntos en común con C . Polo lema 2.1, P divide a $\text{int}(C)$ en dúas rexións, cada unha delas con imaxe por f nas correspondentes dúas rexións de $\text{int}(C') \setminus g_n(P)$. Observemos que unha das dúas rexións de $\text{int}(C)$ contén a case todos os puntos da sucesión $\{q_i\}$, dado que q está na fronteira non común coa outra rexión. Polo tanto, a rexión correspondente de $\text{int}(C') \setminus g_n(P)$ contén a case todos os puntos de $\{f(q_i)\}$. Sen embargo, é a outra rexión a que contén o punto q' na súa fronteira (non común á anterior rexión), polo que o límite de $\{f(q_i)\}$ non pode ser q' , unha contradicción. Polo tanto, f é continua en C .

Paso 3: Extensión a $\text{ext}(C)$.

Agora imos extender f a $\text{ext}(C)$, usando un argumento similar. Sen perda de xeralidade, podemos asumir que a orixe de coordenadas do plano está en $\text{int}(C)$, é ambas as curvas C e C' atópanse no interior do cadrado T de vértices $(\pm 1, \pm 1)$. Sexan L_1, L_2, L_3 os segmentos de recta en rectas que pasan pola orixe que van dende $(1, 1)$, $(-1, -1)$ e $(1, -1)$ a C , respectivamente. Sexa $p_i = L_i \cap C$. Sexan L'_1 e L'_2 arcos poligonales dende $f(p_1)$ ata $(1, 1)$ e dende $f(p_2)$ a $(-1, -1)$ respectivamente, de forma que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ e L_i só teña os seus extremos en común con C' e T . Dado que C' é un polígono convexo, é obvio que existe un arco poligonal L'_3 dende $f(p_3)$ a $(1, -1)$ ou ben a $(-1, 1)$ de forma que $L'_3 \cap (L'_1 \cup L'_2) = \emptyset$ e só teña os seus extremos en común con C' e T . No caso de que L'_3 fose de $f(p_3)$ a $(-1, 1)$, realizamos unha reflexión da curva C sobre a recta que pasa por $(1, 1)$ e $(-1, -1)$, de forma que L'_3 tería como extremo ó punto $(1, -1)$. Agora, usamos o método descrito na primeira parte da proba para extender f a $\overline{\text{int}(T)}$ de forma que f sexa a identidade en T , e para rematar, extendemos f a todo o plano, sendo f tamén a identidade en $\text{ext}(T)$. \square

Corolario 2.5. *Sexan Γ e Γ' grafos planos 2-conexos, de forma que exista un plano-isomorfismo e homeomorfismo g de Γ a Γ' . Entón, podemos extender g a un homeomorfismo do plano.*

Demostración. A proba será por inducción no número de arestas de Γ . Se Γ é un ciclo, estamos no caso do teorema 2.4. Noutro caso, séguese do lema 1.22 que existe un camiño P en Γ e un subgrafo 2-conexo Γ_1 que contén ó ciclo exterior de Γ de forma que Γ se obteña a partir de Γ_1 engadindo P nunha cara, que está acotada por algún ciclo C en Γ_1 . Aplicamos agora a hipótese de inducción a $\Gamma_1 = \Gamma - P$ e despois a os dous ciclos de $C \cup P$ que conteñen a P . \square

Capítulo 3

Triangulación de superficies pechadas

Definición 3.1. Unha *superficie pechada* S é un espazo topolóxico non vacío, compacto e Hausdorff, que é localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 , é dicir, cada $s \in S$ ten un entorno homeomorfo a \mathbb{R}^2 (ou equivalentemente a un disco aberto).

Definición 3.2. Sexa \mathcal{P} unha colección finita de polígonos convexos do plano disxuntos dous a dous (xunto cos seus interiores) con lados da mesma lonxitude, de forma que en total haxa un número par de lados. A cada un destes lados asignámoslle unha orientación elixindo un dos seus puntos extremos como punto inicial. Formamos o espazo topolóxico S identificando cada lado dun polígono con exactamente outro lado doutro (ou do mesmo) polígono de acordo coas orientacións anteriores, é dicir, se identificamos os lados a e b , identificaremos o extremo inicial de a co extremo inicial de b . Observamos que isto tamén define un multigrafo G mergullable en S , cuxos vértices e arestas son os vértices e lados dos polígonos respectivamente. S é compacto, polo que é unha superficie pechada se e só se G é conexo e para cada $x \in S$, existe un entorno de x homeomorfo a un disco. Claramente para os puntos interiores dos polígonos e dos lados isto cúmprese, e é fácil ver que o mesmo ocorre para cada vértice y , unha vez feitas todas as identificacións de lados adxacentes a vértices que se identifican con y . Neste caso, diremos que G é un *mergullo 2-celular* en S , e que os polígonos de \mathcal{P} son as *caras* de G , ou o que é o mesmo, as rexións de $S \setminus G$. No caso de que todos os polígonos de \mathcal{P} sexan triángulos, e o multigrafo inducido G sexa un grafo, diremos que G é unha triangulación de S , e que S é unha superficie triangulada.

Definición 3.3. Definimos a *característica de Euler-Poincaré* dun mergullo 2-celular G coma $E(G) = n - q + f$, onde n, q e f son o número de vértices, arestas, e caras, respectivamente.

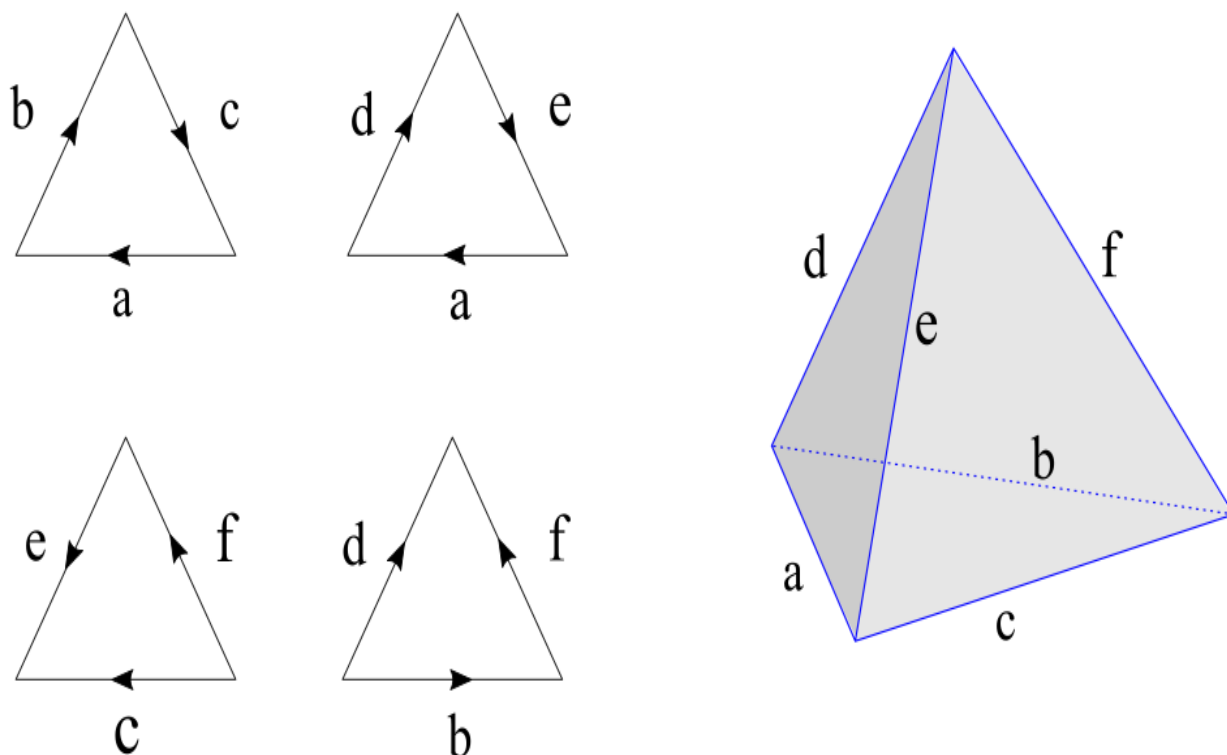


Figura 3.1: Unha superficie pechada, o tetrahedro

Observación 3.4. G pode conter arestas múltiples e lazos, polo que non necesariamente é un grafo. Aínda así, a partir de calquer mergullo 2-celular G é posible obter unha triangulación, procedendo da seguinte forma. Se G non é grafo, subdividimos as arestas paralelas e os lazos que poida haber, de forma que obtemos un grafo. Agora, despois de facer as correspondentes divisións nos lados dos polígonos se fose necesario, cada cara de G que sexa un polígono convexo con máis de 3 lados é sinxela de triangular. Imos a describir un procedemento xeral, aínda que podería facerse de calquer xeito.

Sexan v_1, v_2, \dots, v_r con $r \geq 4$ os vértices do polígono, con índices expresados módulo r . Engadimos $r+1$ novos vértices u, u_1, \dots, u_r no interior do polígono, xunto coas arestas $u_i v_i, u_i v_{i+1}, u_i u_{i+1}, u_i u$. Unha vez separados, os triángulos obtidos inducen un novo grafo G' . Cabe observar que $E(G) = E(G')$. Na seguinte figura ilustramos os anteriores procedementos cun exemplo no que S é o toro (definiremos esta superficie no seguinte capítulo). Cabe observar que este método de triangulación de polígonos está construído de forma que o resultado non conteña lazos nin arestas múltiples, polo que o resultado final de todo o procedemento sempre é unha triangulación.

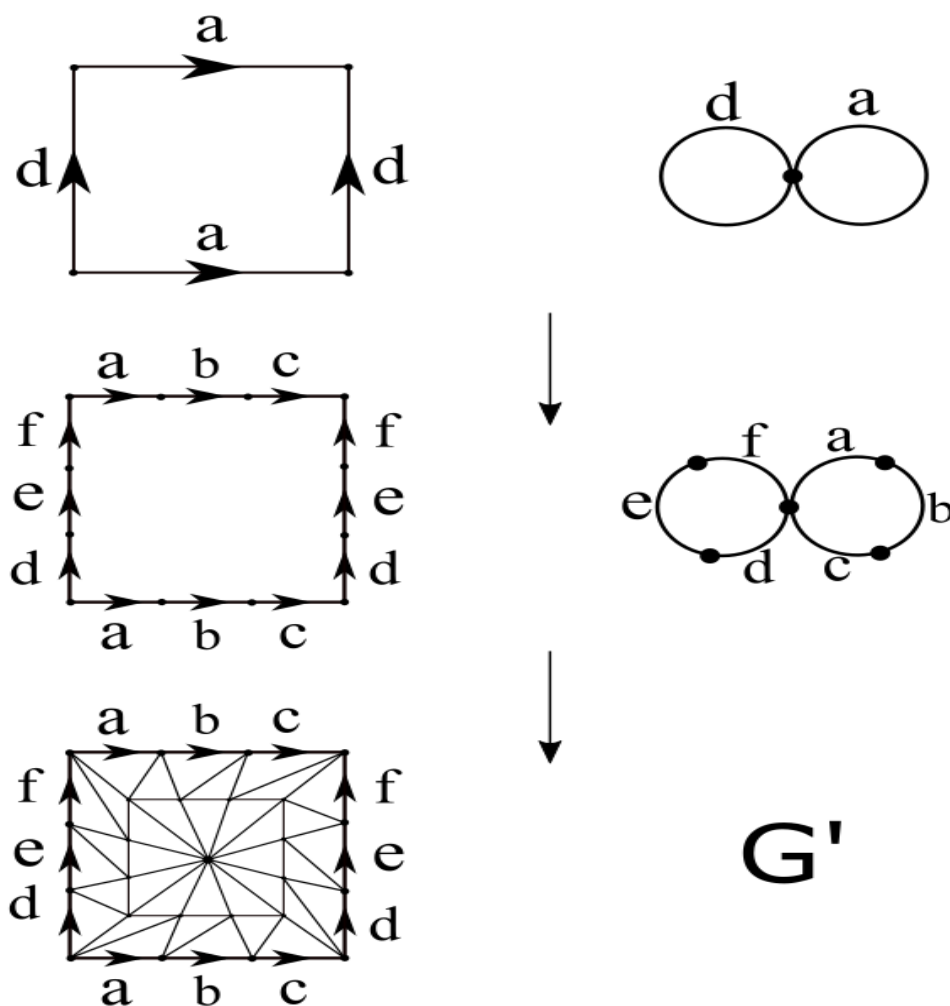


Figura 3.2: Triangulación do toro

Probamos agora un resultado auxiliar para a demostración do seguinte teorema.

Lema 3.5. (*[Jea13], Lema E.2*) *Sexan $C, C_2, C_3 \subset \mathbb{R}^2$ tres curvas pechadas simples, tal que $C_3 \subset \text{int}(C_2)$. Definimos un "mal segmento" de C coma un segmento $P \subset C$ de forma que $P \subset \overline{\text{int}(C_2)}$ e $P \cap C_2 = \{p, q\}$. Definimos tamén un "moi mal segmento" coma un mal segmento que interseca a C_3 . Logo, nas condicións anteriores, só existe un número finito de segmentos moi malos.*

Demostración. Observemos que como as curvas son conxuntos compactos (imaxe por aplicación continua de $[0, 1]$), e $C_3 \subset \text{int}(C_2)$, existe un $\epsilon > 0$ para o que C_3 ten un recubrimento finito formado por discos de radio ϵ , todos eles contidos en $\text{int}(C_2)$.

Supoñamos que existen infinitos segmentos moi malos, e sexa $\{P_n\}$ unha sucesión de ditos segmentos. Cada un destes segmentos correspóndese cos dous puntos nos que interseca a C_2 , p_n

e q_n . Se $C = \gamma([0, 1])$, temos que $p_n = \gamma(u_n)$ e $q_n = \gamma(v_n)$, polo que podemos formar a sucesión $\{t_k\}$, definida por $t_{2k-1} = u_k$ e $t_{2k} = v_k$. Como $[0, 1]$ é compacto, esta sucesión ten un punto de acumulación t . Ademáis, dado que as curvas son compactas, ambas as dúas sucesións $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ teñen algunha subsucesión converxente a $\gamma(t) = s$, do que deducimos que s está en C_2 e por tanto en $C \cap C_2$. Como $C = \gamma([0, 1])$ é unha curva continua, dado $\eta > 0$, $\exists \epsilon_2 > 0$ tal que $|u - t| < \epsilon_2 \implies \gamma(u) \in B(s, \eta)$. Dado que t é un punto de acumulación de $\{t_k\}$, isto implica que existe algún u_k ou v_k a distancia $< \epsilon_2$ de t , polo que hai algún moi mal segmento $P_n \subset B(s, \eta)$. Agora ben, se escollemos $\eta < \epsilon$, pola observación inicial, dito segmento non intersectaría a C_3 , o cal é unha contradicción. Por tanto, só existe un número finito de segmentos moi malos. \square

Teorema 3.6. *Toda superficie pechada é homeomorfa a unha superficie triangulada.*

Demostración. Polo que observamos anteriormente, só será necesario probar que toda superficie pechada é homeomorfa a unha superficie cun mergullo 2-celular.

Para cada punto $p \in S$, sexa $D(p)$ un disco aberto do plano homeomorfo a un entorno aberto U_p de p a través dun homeomorfismo $\theta_p : D(p) \rightarrow U_p$. Consideramos en $D(p)$ dous cuadriláteros $Q_1(p)$ e $Q_2(p)$ tales que $Q_1(p) \subset \text{int}(Q_2(p))$ e con $p \in \theta_p(\text{int}(Q_1(p)))$. Como S é compacto, existe un número finito de puntos p_1, p_2, \dots, p_n de forma que $S = \bigcup_{i=1}^n \theta_i(\text{int}(Q_1(p_i)))$. Como os discos $D(p_i)$ son subconxuntos do plano, podemos asumir que son disxuntos dous a dous. O problema fundamental que se nos presenta, é que é posible que os $\theta_i(Q_1(p_i))$ iniciais se intersequen de formas moi complicadas (están formados por arcos simples non necesariamente poligonais), podendo chegar a intersectarse infinitas veces, o que imposibilitaría a construción dun mergullo 2-celular e por iso, no que ven, manteremos os $D(p_i)$ fixos no plano, pero modificaremos os homeomorfismos θ_{p_i} , e en consecuencia os conxuntos correspondentes $U_{p_i} = \theta_{p_i}(D(p_i))$, considerando despois novos cuadriláteros $Q_1(p_i)$ que formen un mergullo 2-celular de S .

Procedendo por indución, supoñamos que $Q_1(p_1), \dots, Q_1(p_{k-1})$ foron elixidos de forma que calesquera dous cuadriláteros de $\theta_{p_1}(Q_1(p_1)), \dots, \theta_{p_{k-1}}(Q_1(p_{k-1}))$ teñan intersección finita en S . Agora vexamos o que ocorre en $Q_2(p_k)$.

Definimos un “mal segmento” coma un segmento P de algún $Q_1(p_j)$, ($1 \leq j \leq k-1$) de forma que $\theta_{p_j}(P)$ conecta dous puntos de $\theta_{p_k}(Q_2(p_k))$ e ten o resto dos puntos en $\theta_{p_k}(\text{int}(Q_2(p_k)))$. Cada mal segmento ten unha imaxe en $Q_2(p_k)$, dada por $\theta_{p_k}^{-1}(\theta_{p_j}(P))$, á que chamamos “mal segmento” en $Q_2(p_k)$. Sexa $Q_3(p_k)$ outro cuadrilátero tal que $Q_1(p_k) \subset \text{int}(Q_3(p_k))$ e $Q_3(p_k) \subset \text{int}(Q_2(p_k))$. Decimos que un mal segmento P é un “moi mal segment” se $\theta_{p_j}(P)$ intersecta a $\theta_{p_k}(Q_3(p_k))$. É posible que existan infinitos malos segmentos, xa que podería existir un segmento dalgún $Q_1(p_j)$ que se “revolvase” infinitas veces intersercando a $Q_2(p_k)$ infinitas veces. En cambio, como estamos nas condicións do lema anterior ($Q_3(p_k) \subset \text{int}(Q_2(p_k))$), sabemos que só existe un número finito de segmentos moi malos.

Os segmentos moi malos $\theta_{p_k}^{-1}(\theta_{p_j}(P))$ dentro de $Q_2(p_k)$ xunto con $Q_2(p_k)$ forman un grafo plano 2-conexo Γ . Polo lema 1.20, sabemos que podemos redebuxar Γ dentro de $Q_2(p_k)$ de forma que obtemos un grafo Γ' plano-isomorfo (e por tanto homeomorfo) a Γ no que todas as arestas sexan arcos simples poligonais. Agora, aplicando o corolario 2.5, extendemos o plano-isomorfismo a un homeomorfismo de $\overline{\text{int}(Q_2(p_k))}$ deixando fixo $Q_2(p_k)$. Este homeomorfismo transforma $Q_1(p_k)$ e $Q_3(p_k)$ en curvas simples pechadas Q'_1 e Q'_3 en $\text{int}(Q_2(p_k))$ tal que $Q'_1 \subset Q'_3$ e $p_k \in \theta_{p_k}(\text{int}(Q'_1))$.

Vexamos que existe unha curva simple poligonal $Q''_3 \subset \text{int}(Q_2(p_k))$, de forma que $Q'_1 \subset \text{int}(Q''_3)$ e non interseque a ningún mal segmento que non sexa moi malo. Efectivamente, se para cada $p \in Q'_3$ escollemos un cadrado $R(p)$ de centro p que non interseque nin a Q_1 nin a ningún mal segmento que non sexa moi malo. Estes cadrados recubren Q'_3 . Logo, tomando un subrecubrimento finito (Q'_3 é compacto), a unión destes cadrados forma un grafo plano 2-conexo, cuxo ciclo exterior pode tomar o papel de Q''_3 . Se fose necesario, podemos xirar algún dos cadrados en torno ó centro para que a intersección cos segmentos moi malos sexa finita (podémolo facer, dado que os segmentos moi malos son arcos simples poligonais, formados por un número finito de segmentos de recta, polo que só existe un número finito de direccións).

Agora, ao igual que fixemos antes, podemos redibuxar $\Gamma' \cup Q''_3$, que é un grafo plano 2-conexo, de forma que Q''_3 sexa un cuadrilátero (que contén a Q'_1 no seu interior), e extender o plano-isomorfismo de grafos a un homeomorfismo de $\text{int}(Q_2(p_k))$ grazas ó corolario 2.5. Dado que $Q'_1 \subset \text{int}(Q''_3)$, podemos escoller a Q''_3 como o novo $Q_1(p_k)$, e seguirase cumprindo $S = \bigcup_{i=1}^n \theta_i(\text{int}(Q_1(p_i)))$, ademáis de que $\theta_{p_k}(Q_1(p_k))$ terá intersección finita con cada un dos $\theta_{p_i}(Q_1(p_i))$ ($1 \leq i \leq k-1$). A hipótese de inducción queda así probada para todo k .

Dado que $S = \bigcup_{i=1}^n \theta_i(\text{int}(Q_1(p_i)))$ e que a intersección entre cada dous dos $\theta_{p_i}Q_1(p_i)$ é finita, podemos pensar en $\bigcup_{i=1}^n \theta_{p_i}(Q_1(p_i))$ coma un grafo Γ mergullado en S . Cada rexión de $S \setminus \Gamma$ está limitada por un ciclo C . Agora, para cada C debuxamos un polígono convexo C' de lado 1 de forma que os vértices de C' se correspondan cos vértices de C , e obtemos a superficie S' identificando os lados de todos os polígonos adecuadamente para que o grafo inducido do 2-mergullo celular Γ' en S' sexa isomorfo a Γ . Podemos extender facilmente o isomorfismo entre Γ e Γ' (pensando en Γ e Γ' como grafos abstractos) a un homeomorfismo $f : \Gamma \subset S \rightarrow \Gamma' \subset S'$. En particular, a restricción de f a C é un homeomorfismo de C en C' . Claramente, para algún i , C está contido en $\theta_{p_i}(\text{int}(Q_2(p_i)))$, homeomorfo a \mathbb{R}^2 , mentres que $\text{int}(C')$ é o interior dun polígono convexo, polo que podemos aplicar o teorema de Jordan-Schönflies para extender $f|_C$ a $\overline{\text{int}(C)}$. Procedendo deste xeito para todas as rexións de $S \setminus \Gamma$, obtemos un homeomorfismo entre S e S' .

□

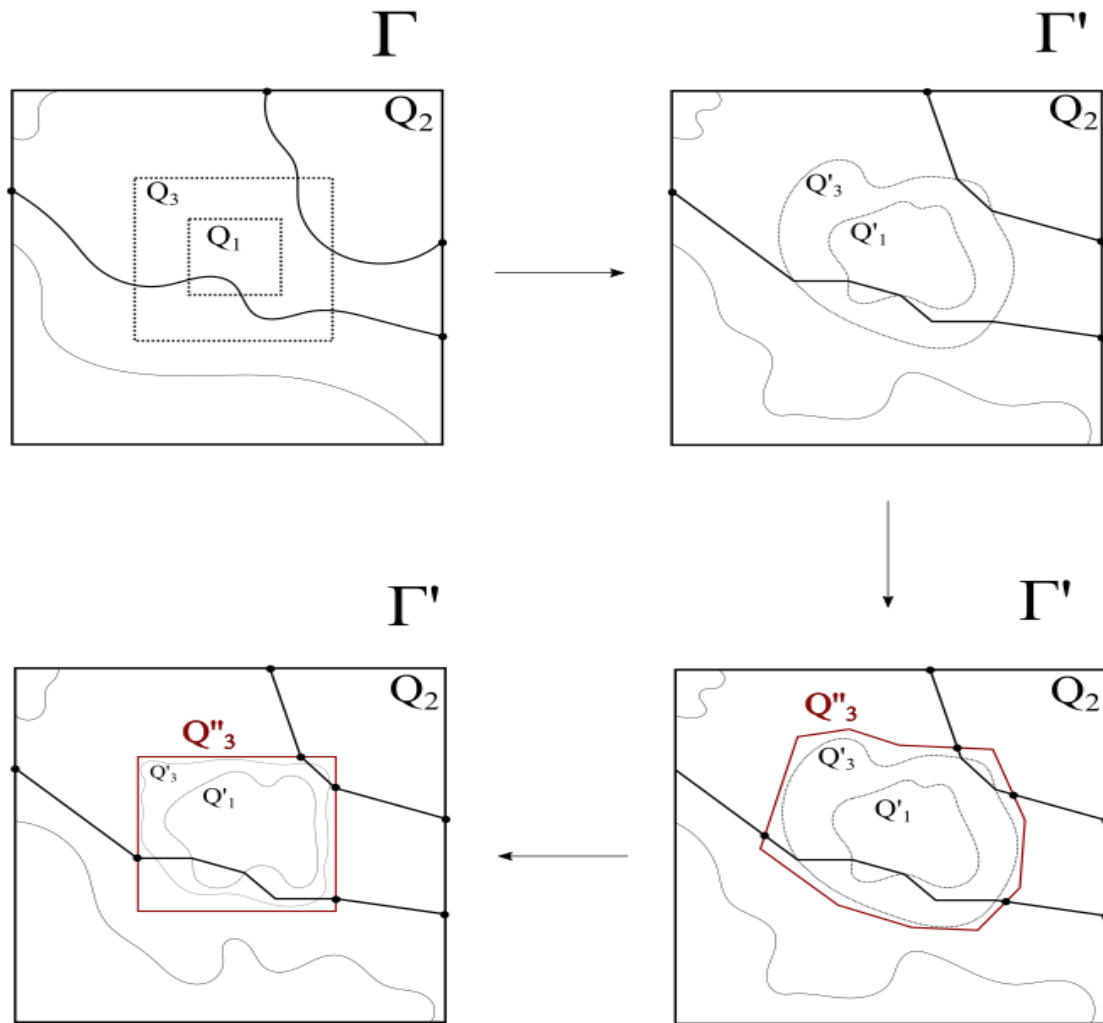


Figura 3.3: Teorema 3.5

Capítulo 4

Clasificación de superficies pechadas

Xa probado que toda superficie pechada é homeomorfa a unha superficie triangulada, imos a describir un conxunto de superficies pechadas e probaremos que toda superficie pechada é homeomorfa a unha delas. Para rematar, veremos que ningunha das superficies descritas é homeomorfa a outra. Como consecuencia, teremos probado o teorema de clasificación de superficies pechadas.

Definición 4.1. Sexa F unha cara dunha superficie S con un 2-mergullo celular. Dentro dela, consideremos dous triángulos disxuntos T_1 e T_2 . Eliminamos os interiores dos triángulos, e formamos unha superficie S' identificando os lados dos triángulos de forma que as orientacións no plano dos lados coincida. Formamos outra superficie S'' identificando os lados de forma que as orientacións no plano sexan opostas. Decimos que S' e S'' son obtidas a partir de S engadindo un *asa torcida* ou un *asa* respectivamente. Se en lugar de dous triángulos consideramos un cadrado, borramos o seu interior, e indentificamos os puntos "diametralmente opostos", como se mostra na figura, obtemos unha superficie S''' , a cal diremos que é obtida a partir de S engadindo unha *tapa cruzada* (realmente estamos a pegar unha banda de Möbius polo seu borde).

É claro que non ten importancia a localización dos triángulos ou cuadriláteros dentro da mesma cara, nin tampouco a elección da cara F na que os situamos. Tamén é posible que os dous triángulos se atopen en diferentes caras, aínda que por agora non seríamos capaces de distinguir entre os dous tipos de asa. Ademais, ao engadir unha tapa cruzada, non é necesario empregar un cuadrilátero, se non que identificando puntos opostos en calquera curva simple pechada, obteríamos a mesma superficie (salvo homeomorfismo)

Tamén podemos representar as asas e as asas torcidas considerando un cuadrilátero é identificando os lados debidamente, da forma indicada nas seguintes figuras. É fácil ver que estas representacións son equivalentes. Procedendo dun xeito similar, podemos probar graficamente o seguinte lema.

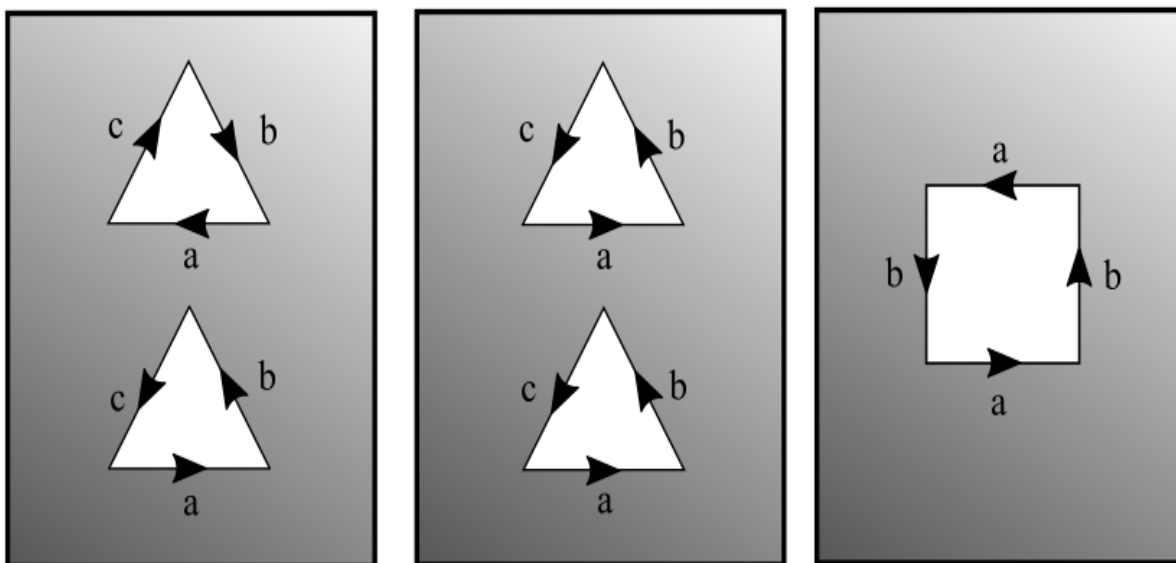


Figura 4.1: Asa, asa torcida e tapa cruzada

Lema 4.2. *A adición dun asa torcida é equivalente a engadir dúas tapas cruzadas. Ademais, unha vez que temos engadido unha tapa cruzada, a adición dun asa é equivalente á dun asa torcida.*

Demostración. A proba está ilustrada a continuación. Só resta ver que os cuadriláteros da primeira e última ilustración da segunda parte do lema son, respectivamente, equivalentes ós triángulos que forman unha asa ou unha asa torcida, o cal é moi sinxelo de ver empregando o mesmo método da demostración. \square

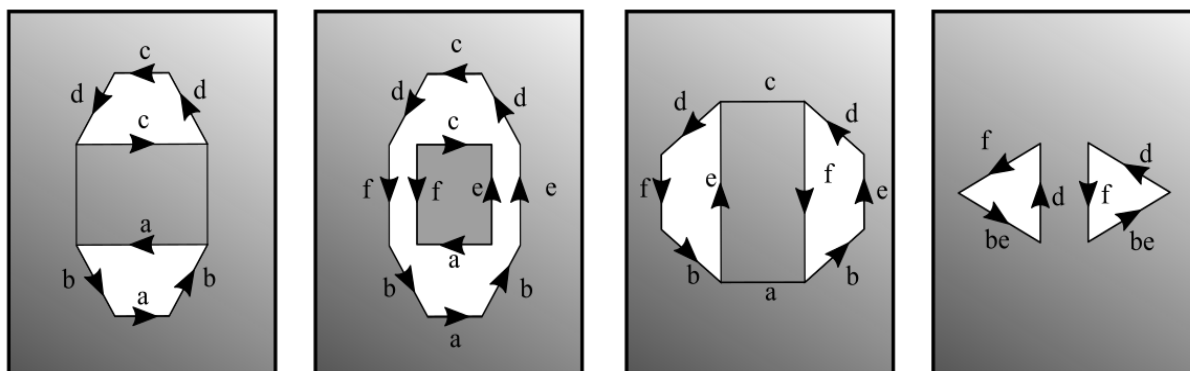


Figura 4.2: Asa torcida = 2 tapas cruzadas

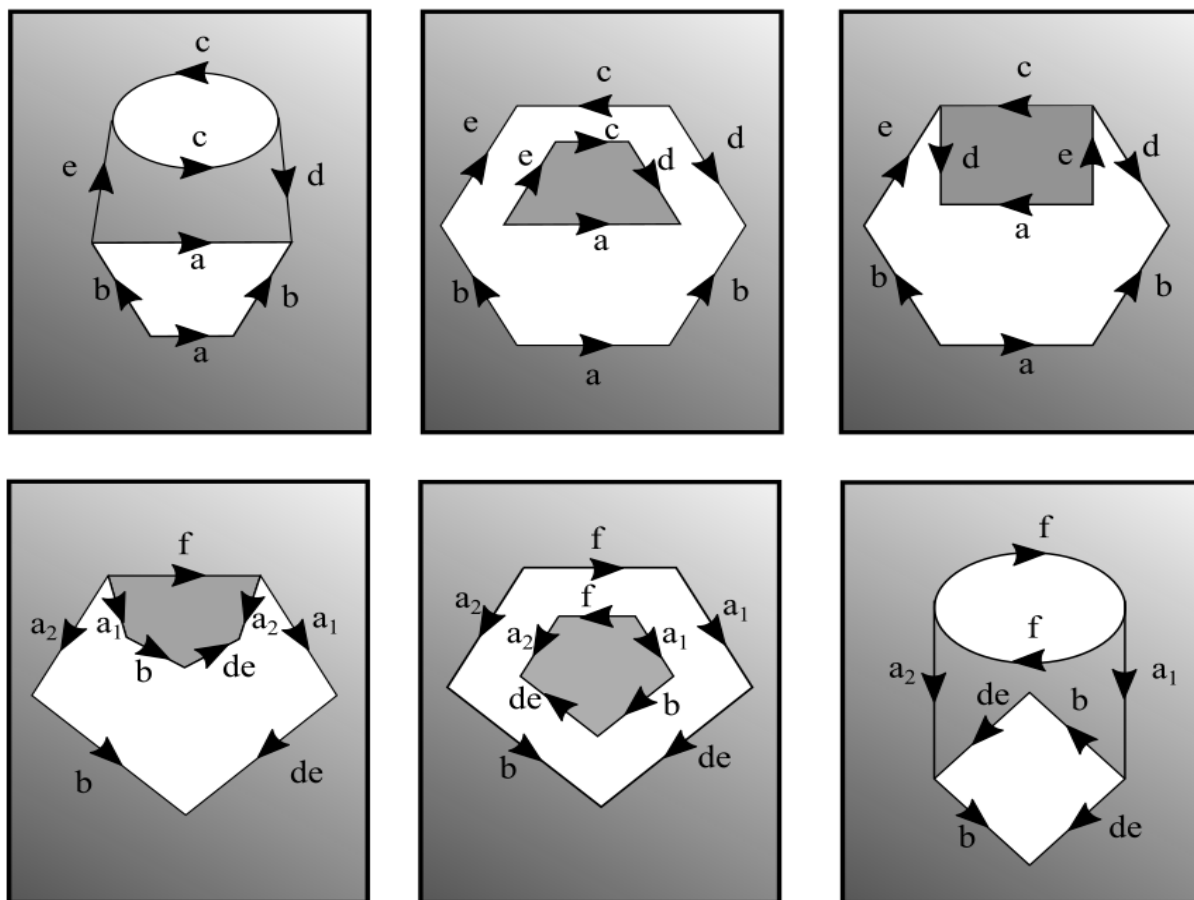


Figura 4.3: Asa + tapa cruzada = asa torcida + tapa cruzada

Agora, consideremos todas as superficies obtidas do xeito anterior, a partir da esfera \mathbb{S}_0 , pensada coma un cociente de polígonos (tetraedro). Engadindo h asas á esfera, obtemos unha superficie que denotaremos por \mathbb{S}_h , e chamaremos *superficie orientable de xénero h* . Se en cambio engadimos k tapas cruzadas, obtemos outra superficie, á cal denotaremos por \mathbb{N}_k , e chamaremos *superficie non orientable de xénero k* . Máis adiante, veremos o porqué desta denominación. \mathbb{S}_1 , \mathbb{N}_1 e \mathbb{N}_2 son o *toro*, o *plano proxectivo* e a *garrafa de klein* respectivamente. A partir do lema anterior, dedúcese o seguinte resultado.

Proposición 4.3. *Sexa S a superficie obtida a partir da esfera, engadindo h asas, t asas torcidas e c tapas cruzadas. Entón, se $t = c = 0$, $S = \mathbb{S}_h$, e noutro caso, $S = \mathbb{N}_{2h+2t+c}$.*

Agora probaremos o resultado fundamental deste capítulo, que nos deixará a un paso de establecer o teorema de clasificación de superficies pechadas. Imos a ver que dada unha superficie pechada S , sempre é posible transformala en \mathbb{S}_0 , mediante un número finito de cortes e identificacións. En [Ots] pódese consultar unha exposición moi intuitiva e cunha visualización moi clara dunha demostración do teorema de clasificación, ideada por E.C. Zeeman, onde este

proceso recibe o nome de “cirurxía”.

Lema 4.4. *Sexa S unha superficie pechada, e G un multigrafo mergullado en S (mediante un mergullo 2-celular), con n vértices, q arestas e f caras. Entón S é homeomorfo a \mathbb{S}_h ou \mathbb{N}_k , onde h e k veñen dados polas ecuacións*

$$E(G) = n - q + f = 2 - 2h = 2 - k \quad (4.1)$$

Demostración. Como S é conexo, G tamén. Vexamos en primeiro lugar que $E(G) \leq 2$. Para velo, eliminamos sucesivamente arestas de G ata que obtemos un subgrafo conexo minimal H de G . En cada eliminación, o número de caras (agora non necesariamente polígonos) mantense ou redúcese en 1. É claro que H ten n vértices, $n - 1$ arestas e unha sola cara. Disto deducimos que, efectivamente, $E(G) \leq 2$.

Agora, como xa vimos no capítulo anterior, podemos obter a partir do multigrafo G un grafo G' que trianque S , e de forma que $E(G) = E(G')$. Polo tanto, é suficiente con probar o resultado cando G é unha triangulación de S . Faremos unha proba por redución ó absurdo.

Supoñamos que S e G forman un contraexemplo ao lema, de forma que G posúa polo menos 4 vértices e

- (1) $2 - E(G) = 2 - n + q - f$ é mínimo.
- (2) Suxeito a (1), n é mínimo.
- (3) A mínima valencia m de G é mínima, suxeita a (1) e (2) (A valencia dun vértice é o número de arestas incidentes nel).

Sexa v un vértice de mínima valencia en G . Sexan v_1, v_2, \dots, v_m os vértices veciños de v tal que os ciclos $vv_1v_2, vv_2v_3, \dots, vv_mv_1$ acoten as caras adxacentes a v (cos índices expresados módulo m). Como G é un grafo, necesariamente temos $m \geq 3$. Se $m = 3$, $G - v$ é unha triangulación de S , a non ser que S sexa o tetraedro (entón $G - v$ só tería un triángulo, o cal non é unha superficie pechada). O primeiro caso contradeciría (2) e o segundo a suposición de que S e G son un contraexemplo do lema. Por tanto, temos que $m \geq 4$.

Se para algún $i = 1, 2, \dots, m$, o vértice v_i non está conectado a v_{i+2} mediante unha aresta, denotemos como G' ao grafo obtido a partir de G eliminando a aresta vv_{i+1} e engadindo a aresta vv_{i+2} . É fácil ver que G' trianque a S , o que contradice (3). Entón, podemos asumir que G contén a todas as arestas v_iv_{i+2} , cando v ten valencia mínima.

A idea do que segue de demostración é a seguinte; imos a "cortar" (eliminar as identificacións) a nosa superficie polo triángulo $T = vv_1v_3$, o cal non desconecta á superficie (T é unha curva de S pero non delimita unha cara). Ao facer isto, veremos que poden ocorrer dúas cousas; que T se transforme en dous triángulos disxuntos, o cal ocorrería cando T forme parte dunha asa ou asa torcida, ou que T se transforme nun hexágono, o cal ocorre se T forma parte dunha banda de

Möbius (observemos que ao cortar unha banda de Möbius polo seu meridiano non a separamos en dúas partes). Despois, “rechearemos” os ocos que quedan no interior de T para obter unha superficie pechada S' cun mergullo 2-celular G' , para o cal veremos que $E(G') > E(G)$, o que implicaría que $2 - E(G') < 2 - E(G)$, e de acordo con **(1)**, isto implica que S' é da forma \mathbb{S}_h ou \mathbb{N}_k . Como no proceso de construción de S' estamos a desfacer un asa, asa torcida, ou tapa cruzada, é claro que S obtense a partir de S' engadindo unha das anteriores, polo que será da mesma forma. Imos a desenvolver agora este argumento, e para facilitar a súa visualización, apoiaremonos nun exemplo gráfico, neste caso o do toro, o cal representaría o primeiro dos dous casos aos que antes nos referíamos. É importante notar que para poder aplicar visualmente o proceso, é necesario partir dunha triangulación mínima (nas condicións anteriormente expostas). Ademais, hai que entender a representación da figura coma un grafo, na que para aumentar a claridade e poder representar o grafo no plano (non é un grafo planar), aparecen por duplicado algúns vértices e arestas.

Denotemos por M o espacio topolóxico resultante de identificar os lados dos triángulos de S (da forma indicada pola triangulación), exceptuando os seis lados que se corresponden coas arestas vv_1 , v_1v_3 e v_3v , os cales deixamos sen identificar. Chamaremos a estes seis lados *lados fronteira* de M . Sexa G' o grafo cuxos vértices son os vértices dos triángulos de M e cuxas arestas son os lados de ditos triángulos (unha vez identificados, analogamente ó grafo que induciría M se fose unha superficie pechada). Notemos que G' ten exactamente 6 vértices incidentes con lados fronteira, e cada un destes vértices é incidente con exactamente 2 lados fronteira. Polo tanto, os lados fronteira forma un subgrafo C formado por vértices de valencia 2. Entón, só temos dúas posibilidades para C , ou ben está formado por dous triángulos disxuntos, ou ben é un hexágono. Se C está formado por dous triángulos disxuntos, engadimos a M dous novos triángulos disxuntos do plano, e identificamos os seus lados coas arestas de C , de forma que obtemos unha superficie S' triangulada por G' . Se C é un hexágono H , engadimos un hexágono do plano (previamente triangulado) a M , e identificamos os seus lados coas arestas de C , de forma que obtemos unha superficie S'' , triangulada por un grafo G'' (aquí é necesario estender G' dado que temos que triangular o hexagono engadido). No primeiro caso, engadimos dúas caras, polo que

$$E(G') = E(G) + 2 \quad (4.2)$$

e no segundo caso, como $E(H)$ non varía ao triangulalo, temos que

$$E(G'') = E(G) + 1 \quad (4.3)$$

Por **(1)**, temos que de ser superficies pechadas, S' ou S'' son da forma \mathbb{S}_h ou \mathbb{N}_k , o cal é así, dado que G' é conexo pola existencia da aresta v_2v_m (v_2 está dentro de T e v_m fora). Se C consiste en dous triángulos, como dixemos antes, é claro que S obtense a partir de S' engadindo un asa, ou un asa cruzada, mentras que se C consiste nun hexágono, S obtense a partir de S''

engadindo unha tapa cruzada (xa que o hexágono é unha curva pechada simple). Polo tanto, no primeiro caso S é da forma \mathbb{S}_{h+1} ou \mathbb{N}_{k+2} , e no segundo é da forma \mathbb{N}_{k+1} ou \mathbb{N}_{2h+1} . Isto contradice que S e G formen un contraexemplo ó lema 4.4, co que queda probado o resultado. A validez da ecuación (4.1) é clara vista esta proba e que a característica de Euler do grafo do tetrahedro (esfera) é 2. \square

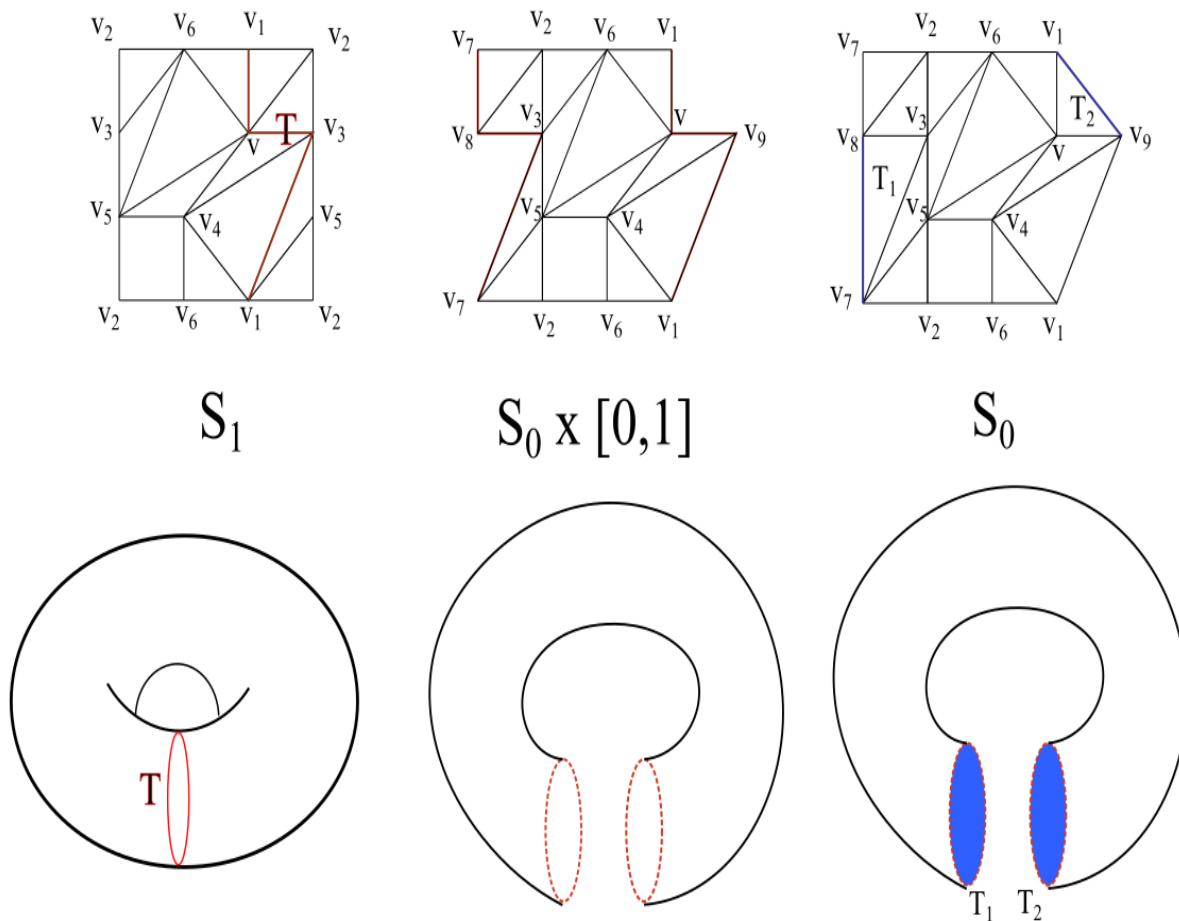


Figura 4.4: Lema 4.4

Definición 4.5. Definimos a característica de Euler dunha superficie pechada S como:

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - 2h & \text{se } S = \mathbb{S}_h \\ 2 - k & \text{se } S = \mathbb{N}_k \end{cases} \quad (4.4)$$

Do anterior resultado, xunto co feito de que calquer mergullo 2-celular se pode estender a unha triangulación, deducimos a formula de Euler.

Corolario 4.6 (Formula de Euler). *Sexa S unha superficie pechada cun mergullo 2-celular G . Entón, $\chi(S) = E(G)$.*

Para completar o teorema de clasificación de superficies, imos a probar que todas as superficies descritas na proposición 4.3 son non homeomorfas dous a dous.

Teorema 4.7. *Sexan S e S' dúas superficies pechadas. Se $\chi(S) \neq \chi(S')$, S e S' non son homeomorfas. É dicir, a característica de Euler é un invariante topolóxico.*

Demostración. Sexa S unha superficie pechada. Consideremos un grafo G mergullado en S (non necesariamente un mergullo 2-celular). Como S constrúese identificando lados de polígonos planos, empregando o lema 1.14, podemos asumir que as arestas de G son poligonais. Sexan n , q e f o número de vértices, arestas e caras (rexións de $S \setminus G$), respectivamente, de G . Se G' é un mergullo 2-celular de S , entón $G \sqcup G'$ é un mergullo 2-celular de S que contén unha subdivisión de G . Agora eliminamos sucesivamente arestas de $G \sqcup G'$ ata obter unha subdivisión de G , a cal ten as mesmas caras que G como grafo mergullado en S , pero pode ter máis vértices e arestas. Polo que temos

$$n - q + f \geq \chi(S) \quad (4.5)$$

Agora, dado que para calquer grafo tense que $3f \leq 2q$, obtemos

$$q \leq 3(n - \chi(S)) \quad (4.6)$$

Observemos que a igualdade dase cando G é unha triangulación de S , xa que por cada aresta temos 2 triángulos, e por cada triángulo 3 arestas, co que se cumpre a segunda desigualdade, mentras que a primeira cúmprese por definición. Polo tanto, se $\chi(S') > \chi(S)$, unha triangulación G de S ten demasiadas arestas para poderse mergullar en S' . \square

O único que nos resta por ver, é que \mathbb{S}_h e \mathbb{N}_{2h} non son homeomorfos, xa que teñen a mesma característica de Euler. Vexamos que \mathbb{S}_h pode ser mergullado de forma poliédrica en \mathbb{R}^3 mentras que \mathbb{N}_k non.

Definición 4.8. Un *poliedro* P é un subconxunto de \mathbb{R}^3 formado por unha unión finita e conexas de polígonos planos de forma que:

- 1: Cada aresta é incidente con exactamente dous polígonos
- 2: A intersección de dous polígonos distintos so pode ser o baleiro, un vértice ou unha aresta.

Parece claro que segundo esta definición, todos os poliedros son superficies compactas, pero veremos que o recíproco non é certo.

¹Empregamos aquí o símbolo da unión disxunta para denotar unha unión no sentido da definición 1.23, que podemos considerar dado que a pesar de non ser grafos planos, están mergullados nun espazo formado por polígonos planos cos lados identificados.

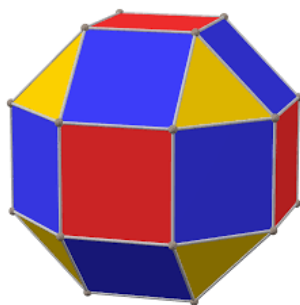


Figura 4.5: Poliedro

Podemos representar facilmente \mathbb{S}_h como un poliedro de \mathbb{R}^3 da seguinte forma. Partimos da esfera \mathbb{S}_0 , á cal representamos como un tetrahedro. Agora seleccionamos calquera cara do tetrahedro, na que engadiremos as h asas. Subdividimos esta cara en tantas partes como asas queiramos engadir, e en cada unha delas engadimos un asa da forma que se indica na seguinte figura. Claramente, isto describe un homeomorfismo entre \mathbb{S}_h e un poliedro en \mathbb{R}^3 .

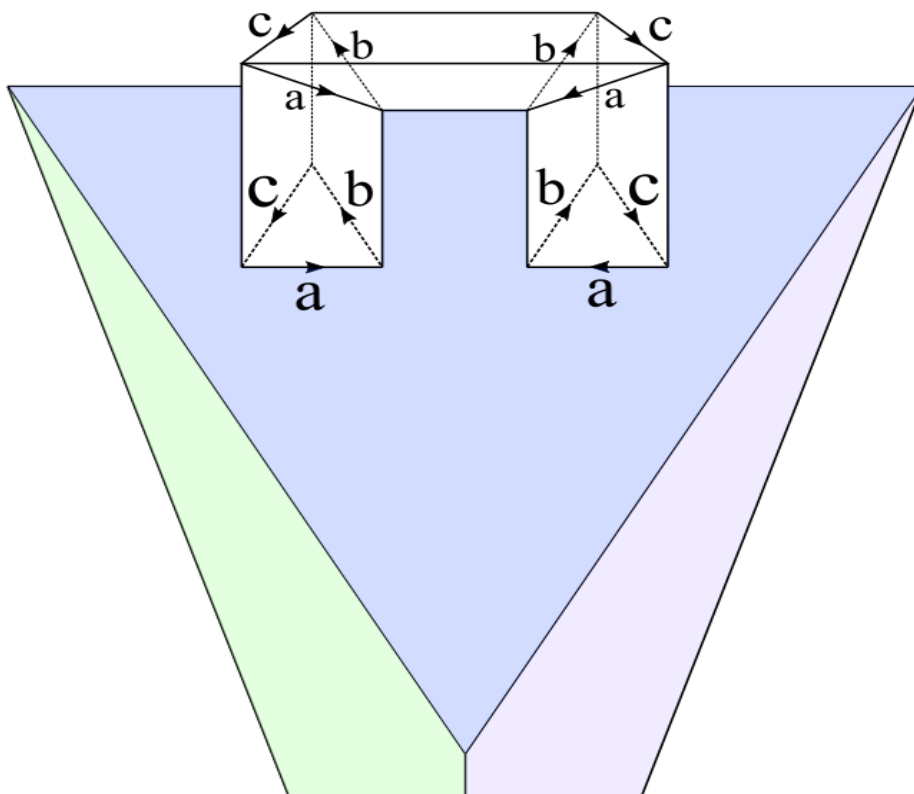


Figura 4.6: Asa poliédrica

O seguinte resultado, que é moi similar á versión poligonal do teorema da curva de Jordan

que probamos no lema 1.16, dinos que non ocorre o mesmo para as superficies da forma \mathbb{N}_k . Fagamos antes unha observación previa.

Observación 4.9. Dada unha superficie S da forma \mathbb{N}_k , e un punto p de S , existe unha curva pechada simple poligonal C dende p , tal que cando a percorremos, a dereita e a esquerda intercámbianse. É dicir, que se a cara da superficie que contén a p estivese mergullada en \mathbb{R}^3 , ao percorrer a curva de p a p “camiñando” pola superficie (moi preto da superficie, pero sen tocala), acabaríamos no lado oposto da cara. Na seguinte figura, temos unha descripción gráfica de dita curva. Observamos que se escollésemos un entorno da curva, obteríamos unha banda de Möbius.

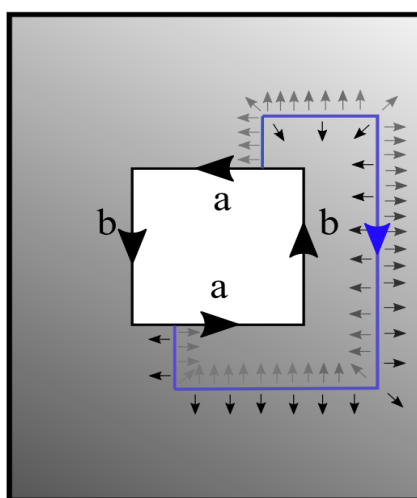


Figura 4.7: C en azul

Proposición 4.10. *Sexa S unha superficie pechada. Se S é homeomorfo a un poliedro P de \mathbb{R}^3 , entón S non é homeomorfo a \mathbb{N}_k para ningún k .²*

Demostración. O argumento desta proba é case idéntico ao do lema 1.16. Vexamos en primeiro lugar que $\mathbb{R}^3 \setminus P$ ten dúas rexións. Comezamos considerando unha dirección v en \mathbb{R}^3 (vector non nulo) fixada, non paralela a ningunha das caras de P . Sexa p en $\mathbb{R}^3 \setminus P$, do que sen perda de xeneralidade, podemos asumir que non pertence a ningunha das rectas con dirección v partindo de calquera dos vértices de P . Sexa L unha semirecta dende p con dirección v . Se L non interseca a ningunha aresta de P , contamos o número de veces que L interseca a P módulo 2. Se L interseca a algunha ou varias arestas de P (necesariamente en puntos disxuntos), contamos o número de interseccións de L con P dende algún punto cercano (podemos escollelo arbitrariamente próximo) a p para o que L non interseque a ningunha aresta de P . Isto ten sentido, xa que se L interseca a unha aresta Q , poden ocorrer 2 cousas; ou as dúas caras adxacentes á Q están na mesma

²Este resultado está baseado nunha resposta de Sergei Ivanov no sitio web MathOverflow

rexión de $\mathbb{R}^3 \setminus \Pi$, onde Π é o plano que contén a L e Q , ou ben as dúas caras están en distintas rexións. É fácil ver que en calquera dos dous casos, ao desplazar lixeiramente L , non alteramos a paridade do número de interseccións de L e P . Por este mesmo motivo, se nos desplazamos dende p cara outro punto q mediante un arco simple poligonal, evitando os puntos que estean nas rectas con dirección v pasando polos vértices de P , a paridade do número de interseccións en q é a mesma ca en p . Agora, tomando un pequeno segmento de recta coa mesma dirección v cortando perpendicularmente á unha das caras de P de forma que so interseque a P nun punto, obtemos dous puntos a e b con distinta paridade (os extremos do segmento). Polo tanto, non podemos conectar a e b mediante un arco simple poligonal. Agora ben, se P fose homeomorfo a \mathbb{N}_k , entón poderíamos desplazarnos dende a ata b mediante un arco simple poligonal, primeiro acercándonos perpendicularmente ao poliedro (sen chegar a cortalo, pero moi preto), logo seguindo unha das curvas pechadas descritas na observación anterior, e por último desplazándonos cara b perpendicularmente. Isto contradice o que acabamos de probar, polo que S non pode ser homeomorfo a \mathbb{N}_k . \square

En [Mae93] atopamos unha curiosa proba sinxela deste mesmo resultado que emprega un resultado de teoría de grafos. Notemos que a condición de que o mergullo sexa poliédrico non é realmente necesaria. Pódese probar que \mathbb{N}_k non é mergullable en \mathbb{R}^3 de ningunha forma, pero non de forma elemental, como no caso poliédrico, o cal é suficiente para os nosos fins.

Aínda que non introducimos formalmente o concepto de orientabilidade, aquí podemos observar cal é a idea de fondo. Acabamos de ver que un poliedro divide o espazo tridimensional en dúas rexións, mentras que se \mathbb{N}_k fose homeomorfo a un poliedro de \mathbb{R}^3 , sería imposible que este poliedro dividise o espazo en máis dunha rexión. Neste sentido, poderíamos dicir que \mathbb{N}_k ten unha única cara. Isto ocorre dado que \mathbb{N}_k ten un subespazo homeomorfo a unha banda de Möbius, como observamos anteriormente, mentras que \mathbb{S}_h non. Logo, podemos dicir que unha superficie é orientable se e só se non contén ningunha banda de Möbius.

Obtemos do resultado anterior o seguinte corolario.

Corolario 4.11. \mathbb{S}_h e \mathbb{N}_k non son homeomorfos.

Finalmente, temos completamente probado e podemos enunciar o teorema de clasificación.

Teorema 4.12 (de clasificación das superficies pechadas). *Sexa S unha superficie pechada. Entón S é homeomorfa a exactamente unha das superficies \mathbb{S}_h , $h \geq 0$, ou \mathbb{N}_k , $k \geq 1$.*

Anexo A

Anexo I: Un contraexemplo ó teorema de Jordan-Schönflies en dimensión 3

Aínda que a intuición nos diga que o teorema de Jordan-Schönflies se pode xeralizar para subespazos homeomorfos á esfera S^2 en \mathbb{R}^3 , como foi asumido durante o principio do século pasado, coñécense múltiples exemplos de 2-esferas (subespazos de \mathbb{R}^3 homeomorfos a S^2), de forma que non existe un homeomorfismo de \mathbb{R}^3 en si mesmo que leve a 2-esfera en S^2 . Un deles, quizáis o máis coñecido, é a *esfera cornuda de Alexander*, que foi descuberta por J.W. Alexander cando trataba de afinar unha proba do teorema de Jordan-Schönflies para \mathbb{R}^3 , e que describiremos a continuación.

Introducimos antes algúns conceptos da teoría homotópica, que nos serán de axuda para ver que efectivamente a esfera cornuda constitúe un contraexemplo á afirmación sen restricións do teorema en dimensión 3.

Definición A.1. Sexa X un espazo topolóxico. Unha *homotopía de extremos fixos* entre dous camiños σ_1 e σ_2 en X que comparten extremos, é unha aplicación continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ que verifica $H(t, 0) = \sigma_1(t)$, $H(t, 1) = \sigma_2(t)$ e $H(0, s) = \sigma_1(0) = \sigma_2(0)$, $H(1, s) = \sigma_1(1) = \sigma_2(1)$. Diremos que dous camiños que comparten extremos son *homótopos* se existe unha homotopía de extremos fixos entre eles.

Definición A.2. Diremos que un espazo conexo por camiños X é *simplemente conexo* se calquer lazo en X é homótopo a un lazo constante (un punto).

Faremos uso da seguinte proposición, cuxa proba podemos atopar en calquer libro de topoloxía xeral.

Proposición A.3. *Ser simplemente conexo é unha propiedade topolóxica.*

Definiremos a esfera cornuda como o límite dunha sucesión de esferas, e veremos que a pesar de ser homeomorfa á S^2 , o complementario da unión da esfera co seu interior non é simplemente conexo, é dicir, que existe un lazo contido nel que non se pode deformar ata un punto.

Partimos da esfera S_0^2 a que lle engadimos unha asa, de forma que obtemos un toro, ao que chamaremos X_1 . Agora, removemos unha pequena sección transversal (un cilindro) da asa, obtendo así un cilindro, e tapamos con dous discos o cilindro de forma que obtemos unha esfera S_1^2 (análogo ó que faciamos na demostración do teorema de clasificación). A continuación, a cada un dos discos (de radio r), quitámoslle un disco menor concéntrico de radio $r/2$, e pegámoslle un toro pinchado (toro menos un disco) de forma que os dous toros estén "encadeados", como se mostra na figura. Desta forma obtemos o espazo X_2 . Agora, igual ca no paso anterior, eliminamos en cada un dos novos toros un cilindro do modo descrito na figura, e pegamos 4 tapas, de forma que obtemos unha nova esfera S_2^2 . Repetindo este procedemento ata o infinito, cada vegada pegando toros máis e máis pequenos a cada un dos discos resultantes de eliminar os cilindros, obtemos a esfera cornuda de Alexander A .

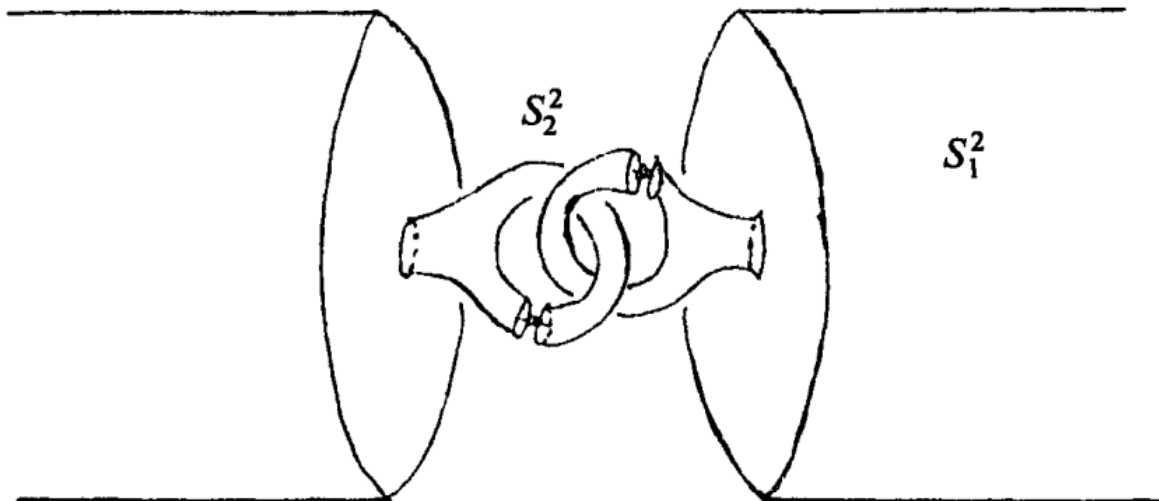


Figura A.1: Construcción da esfera [Bin83]

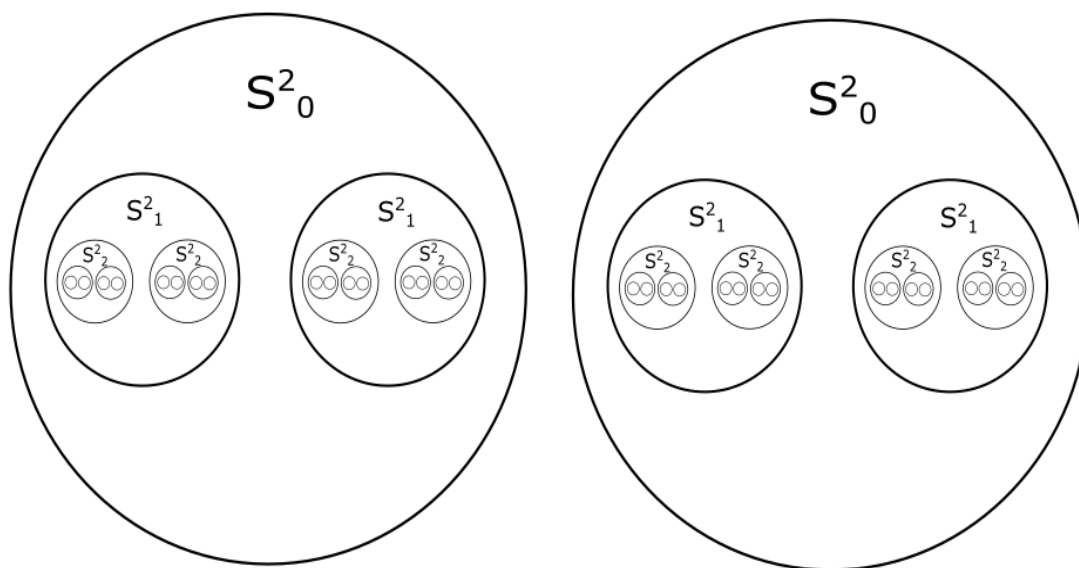


Figura A.2: Caricatura do matemático John H. Conway coa esfera cornuda de Alexander crecéndolle na cabeza, por Simon Fraser (Guy 1983, Schroeder 1991, Albers 1994)

Proposición A.4. *A esfera cornuda de Alexander é unha 2-esfera.*

Demostración. Imos a describir un homeomorfismo h entre A e S^2 . ([Bin83], exercicio IV.3.A)

Sexan $D_i, i = 0, 1$ dous discos disxuntos en S^2 . Consideramos agora no interior de cada un destes discos, outros dous discos $D_{ij}, i, j = 0, 1$, en cada un destes 4 discos, outros 2 (8 en total) $D_{ijk}, i, j, k = 0, 1$, e así sucesivamente, engadindo en cada paso 2^n discos. O homeomorfismo h levará $A \cap S_2^2$ en $S^2 \setminus \bigcup_{i,j} \text{Int}(D_{ij})$, $A \cap S_3^2$ en $S^2 \setminus \bigcup_{i,j,k} \text{Int}(D_{ijk})$, etc. Fáltanos definir h nos puntos límite, é dicir, os puntos de A que non se atopan en ningún dos S_i^2 . Sexa p un destes puntos, U_t a compoñente conexa de $A \setminus S_t^2$ que contén a p , e D_t o disco $D_{ij\dots}$ encerrado en $h(\partial U_t)$. Definimos $h(p) = \bigcap_{t \in \mathbb{N}} D_t$. \square

Figura A.3: Construcción de h

Curiosamente, como se pode apreciar de forma clara na figura anterior, estes puntos que non se atopan en ningunha das aproximacións S_n^2 , chamados "puntas dos cornos", forman un conxunto de Cantor, xa que en cada paso removemos 2 discos do interior de cada novo disco, o cal é análogo á construción do conxunto de Cantor a partir dun intervalo.

Do mesmo xeito que na anterior demostración, considerando "rodaxas" da bola tridimensional en lugar de discos na esfera, poderíamos establecer un homeomorfismo entre a B , a bola cornuda (a esfera cornuda xunto co seu interior) e a bola canónica de \mathbb{R}^3 , o cal quere dicir que o interior da esfera cornuda sí é homeomorfo ao interior de S^2 . (véxase [Bin83], exercicio IV.4.C)

Vexamos agora que o exterior da bola cornuda non é simplemente conexo, seguindo unha idea de [Col07].

Sexa L o lazo representado na figura. Daremos unha idea de porqué non se pode deformar mediante unha homotopía a un punto. Supoñamos que exista dita homotopía, $\Gamma : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus B$, con $\Gamma_0 = L$ e $\Gamma_1 = \{p\}$. Como $S^1 \times [0, 1]$ é compacto, a súa imaxe por Γ tamén o é. Ademais, $\Gamma(S^1 \times [0, 1])$ é disxunto de B , que tamén é compacto, polo que a distancia entre os dous conxuntos ten que ser un número real positivo ϵ . Agora ben, na construción da esfera cornuda descrita anteriormente, os cilindros que se sustraen dos toros en cada paso son cada vez máis pequenos, de feito poden ser tan pequenos como queramos (o radio redúcese á metade en cada paso), polo que chegado a certo paso, a distancia entre as dúas tapas dos novos cornos é menor que ϵ , facendo imposible que $\Gamma(S^1 \times [0, 1])$ pase a través dos cornos. Isto é suficiente para ver que $\mathbb{R}^3 \setminus B$ non é simplemente conexo, pero pódese probar que o seu grupo fundamental é

un grupo libre infinitamente xerado (véxase [Hat01]).

Dado que ser simplemente conexo é unha propiedade topolóxica, o exterior da esfera cornuda non é homeomorfo ao exterior de S^2 , e polo tanto, non podemos estender o homeomorfismo entre A e S^2 a un homeomorfismo de R^3 en R^3 , e concluímos que o teorema de Jordan-Schönflies non se sostén (sen restriccións) en dimensión 3.

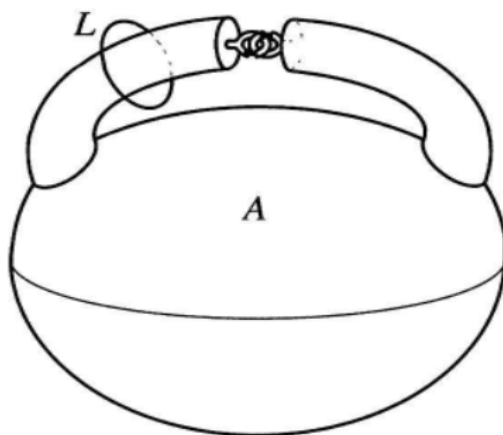


Figura A.4: [Col07]

Anexo B

Anexo II: O xénero dun grafo e a coloración de mapas

Xa sabemos que o problema dos tres servizos exposto na introdución non ten solución, tendo probado que $K_{3,3}$ non é planar. Tamén sabemos que podemos representar $K_{3,3}$ no plano cunha soa intersección entre dúas arestas, o cal, se pensamos un pouco, pode dar lugar á seguinte "trampa". Se puidésemos colocar un asa no plano de forma que esta pasase por enriba da intersección, poderíamos facer pasar unha das arestas polo asa e a outra por debaixo, de forma que non se intersequen.

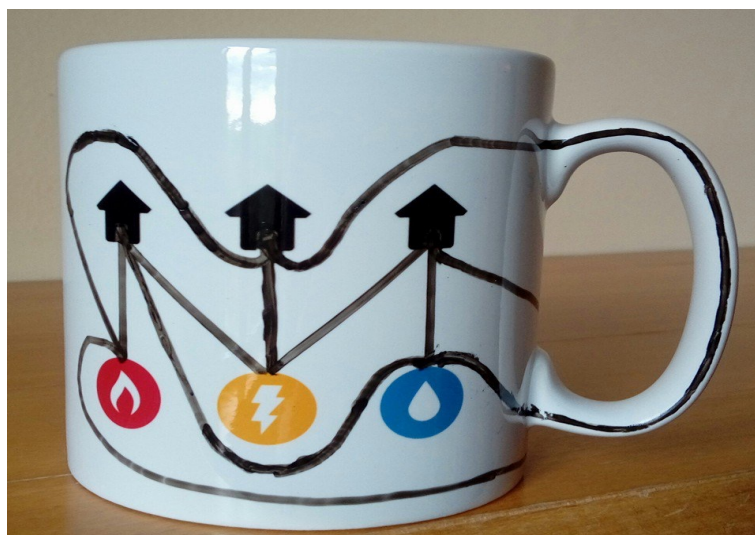


Figura B.1: Solución ao problema dos tres servizos nunha taza

Agora, como xa observamos no primeiro capítulo, un grafo é mergullable no plano se e só se

é mergullable nunha esfera. Xunto, co anterior, isto quere dicir que se replantexamos o problema dos 3 servicios, pensando en que as casas están no globo terráqueo (unha esfera), a solución consistiría en engadir unha asa á esfera, é dicir, transformala nun toro. Outra forma de dicir isto é que $K_{3,3}$ é mergullable no toro.

Xa vimos que existen máis grafos non planares que sí son mergullables no toro, como por exemplo K_7 (a triangulación mínima do toro). Isto pode levarnos a facernos a seguinte pregunta. Dado un grafo G , existe algunha superficie orientable \mathbb{S}_h de forma que G sexa mergullable en \mathbb{S}_h ? Claramente, a resposta é sí. Dado un grafo arbitrario, podemos representalo na esfera cun número finito de interseccións¹. Logo, só temos que colocar un asa por cada unha destas interseccións e proceder do xeito descrito anteriormente. Agora ben, é necesario engadir unha asa por cada intersección para poder mergullar G en \mathbb{S}_h ? Como dixemos antes, K_7 é mergullable no toro, e a súa representación planar ten necesariamente máis dunha intersección. Polo tanto, en xeral, a resposta a esta última pregunta é non. Esta cuestión levanos a definir o *xénero* dun grafo.

Definición B.1. Sexa G un grafo. Definimos o xénero de G , ó que denotamos por $\gamma(G)$, como o número mínimo de asas que hai que engadir a \mathbb{S}_0 para poder mergullar G . É dicir, o xénero de G é o mínimo valor de h para o que G pode ser mergullado en \mathbb{S}_h .

Un grafo planar ten polo tanto xénero 0, mentrás que un grafo toroidal (mergullable no toro e non planar) ten xénero 1. Como indica o autor en [Tho92], o problema de determinar o xénero dun grafo arbitrario dado é moi difícil, en particular é NP-completo. Sen embargo, para algunhas familias de grafos, sí que é posible calcular rapidamente o xénero².

Observación B.2. O xénero dun grafo está intimamente ligado ó xénero dunha superficie orientable. Se G é un mergullo 2-celular de \mathbb{S}_h , pola fórmula de Euler, temos que $E(G) = n - q + f = 2 - 2h$, polo que $\gamma(G) = h$.

Esta última observación é de gran importancia, pois permítenos estudar un problema clásico, o da coloración de mapas, empregando ferramentas da teoría de grafos. Este problema consiste en saber cal é o número máximo de cores necesarias para colorear un mapa³ de forma que dous países adxacentes sempre teñan distinta cor. Agora, se lle asignamos un vértice a cada país, e representamos a adxacencia de dous países mediante unha aresta entre os seus vértices correspondentes, obtemos un grafo G . Entón, este problema é equivalente a obter o número máximo de cores necesarias para colorear os vértices de G de forma que dous vértices adxacentes non compartan cor. Este número é coñecido como *número cromático* de G , e denotarémolo por $\kappa(G)$.

¹O mínimo número de interseccións ao representar G no plano é coñecido como o *número de cruce* de G .

²Véxase [Ano]

³Entendemos por mapa a unha subdivisión do plano ou da esfera dada por un grafo H mergullado nela, na que asignamos a cada país unha ou máis rexións de $\mathbb{S}_0 \setminus G$.

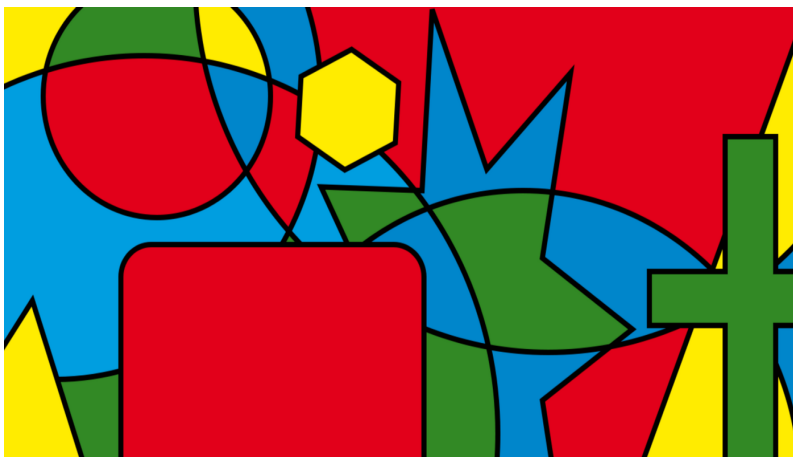


Figura B.2: Mapa con 4 cores

É fácil ver que se o territorio de cada país fose contiguo (subconxunto aberto e conexo), entón o problema reduciríase a atopar o número máximo de cores necesarias para colorear as caras dun mergullo 2-celular da esfera (ou equivalentemente, do plano). Pola observación anterior, isto é o mesmo que achar o máximo número cromático dun grafo planar ou de xénero 0. Sen embargo, se por exemplo un país tivese dous territorios non contiguos, o problema sería equivalente a atopar o número máximo de cores necesarias para colorear as caras dun mergullo 2-celular dun toro, como se pode apreciar na seguinte figura. Se permitíssemos que houbo n países que tivesen en total m territorios non contiguos, habería que engadir ata $m - n$ asas á esfera para poder mergullar G na superficie. Logo, o problema sería equivalente ó de atopar o máximo número cromático dun grafo de xénero $\leq m - n$.

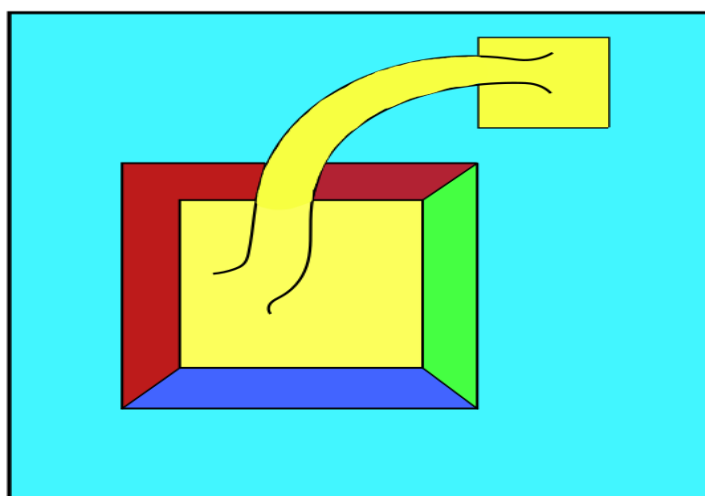


Figura B.3: Territorios non contiguos

O primeiro caso, no que os territorios son contiguos, foi o primeiro en formularse, cando Francis Guthrie, en 1852, tratando de colorear o mapa de Inglaterra, decatouse de que só eran necesarias 4 cores. Moito máis tarde, en 1976, tras varios intentos falidos por parte de notables matemáticos, foi probado por Kenneth Appel e Wolfgang Haken. É o primeiro gran teorema en ser probado por forza bruta facendo uso dunha computadora, o que se debe a necesidade de comprobar unha enorme cantidade de casos. A súa formulación en teoría de grafos é a seguinte.

Teorema B.3 (das catro cores). *Sexa G un grafo planar. Entón, $\kappa(G) \leq 4$.*

Curiosamente, 9 anos antes, Gerhard Ringel e J.W.T. Youngs xa lograran probar cunha aproximación moi distinta un resultado que resolve o problema do segundo caso. Esta era a coñecida como conxectura de Heawood, e posteriormente como teorema de Ringel-Youngs, e admite a seguinte formulación.

Teorema B.4 (de Ringel-Youngs). *Sexa G un grafo mergullado nunha superficie pechada S distinta de \mathbb{N}_2 e \mathbb{S}_0 . Entón, $\kappa(G) \leq \lfloor \frac{7+\sqrt{49-24\chi(S)}}{2} \rfloor^4$. Ademais, esta é a mellor cota posible⁵.*

Para \mathbb{S}_0 e \mathbb{N}_2 non se cumpre a fórmula. No caso de \mathbb{N}_2 o número máximo de cores necesarias é 6^6 , e no caso de \mathbb{S}_0 , ven dado polo teorema das catro cores.

Corolario B.5. *Sexa G un grafo. Entón $\kappa(G) \leq \lfloor \frac{7+\sqrt{1+48\gamma(G)}}{2} \rfloor$. Ademais, esta é a mellor cota posible.*

Por exemplo, se só houbo un país que tivese un territorio non contiguo, formado por dúas rexións, necesitaríamos como máximo $\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48}}{2} \rfloor = 7$ cores para colorear o noso mapa.

Notemos que o teorema de clasificación de superficies pechadas está a xogar aquí un papel fundamental, xa que del deducimos a fórmula de Euler, coa que estamos establecendo unha ponte entre un problema topolóxico e outro da teoría de grafos.

⁴Onde $\lfloor x \rfloor$ denota á función piso.

⁵Isto é o que conxeturou Heawood no seu artigo orixinal, onde xa probara a validez da cota.

⁶Foi probado por Philip Franklin en 1934.

Bibliografía

- [Bin83] R.H. Bing. *The Geometric Topology of 3-Manifolds*. American Mathematical Society, 1983. ISBN: 0821810405.
- [Tho92] Carsten Thomassen. “The Jordan-Schönflies Theorem and the Classification of Surfaces”. En: *The American Mathematical Monthly* 99.2 (1992), pp. 116–130. URL: <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/jordan/thomass.pdf>.
- [Mae93] Hiroshi Maehara. “Why is P^2 not Embeddable in R^3 ?” En: *The American Mathematical Monthly* 100.9 (1993), pp. 862–864. URL: <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.122.1066&rep=rep1&type=pdf>.
- [Tve93] Helge Tverberg. “A Proof of the Jordan Curve Theorem”. En: *Bulletin of the London Mathematical Society* 12.1 (1993), pp. 34–38. URL: <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/jordan/tverberg.pdf>.
- [Boj01] Carsten Thomassen Bojan Mohar. *Graphs on Surfaces*. The John Hopkins University Press, 2001. ISBN: 0801866898.
- [Hat01] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001. ISBN: 0521795400.
- [Col07] Robert Franzosa Colin Adams. *Introduction to Topology: Pure and Applied*. Pearson, 2007. ISBN: 0131848690.
- [Jea13] Dianna Xu Jean Gallier. *A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces*. Springer, 2013. ISBN: 9783642343636.
- [Jon13] Ping Zhang Jonathan L. Gross Jay Yellen. *Handbook of Graph Theory, 2nd Edition*. Chapman e Hall/CRC, 2013. ISBN: 1439880182.
- [Ano] Anonimous. *Graph Genus*. URL: <https://mathworld.wolfram.com/GraphGenus.html>.
- [Bey] Olaf Beyersdorf. *Separation and Homology*. URL: <https://www.informatik.hu-berlin.de/de/forschung/gebiete/ki/algorithmenII/mitarbeiter/beyersdorff/Papers/jordan.pdf>.

- [Ots] Shu Otsuka. *An Introduction to Topology, The Classification theorem for Surfaces by E.C. Zeeman*. URL: <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/surgery/zeeman.pdf>.
- [Wik] Wikipedia. *Four color theorem*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem.