FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

DISTANCIA HOMOTÓPICA ENTRE FUNTORES

Isaac Carcacía Campos

2020-2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

DISTANCIA HOMOTÓPICA ENTRE FUNTORES

Isaac Carcacía Campos

07/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía

Título: Distancia homotópica entre funtores

Breve descrición do contido

Sexan $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ dúas categorías pequenas. Denotemos por F e G dous funtores entre $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$, é posible introducir un xeito de medir a diferencia entre F e G, que xeneraliza invariantes topolóxicos coñecidos como a categoría de Lusternik-Schnirelmann ou a Complexidade Topolóxica. O obxectivo deste TFG consiste no estudo desta "distancia homotópica" entre funtores, mediante as nocións de transformación natural e de homotopía entre funtores.

Recomendacións

Ter coñecementos básicos de Topoloxía e de Teoría de categorías.

Índice general

Resumen

En este trabajo introducimos la noción de distancia homotópica entre funtores como una adaptación al contexto de las categorías pequeñas y, como un caso particular, a los Posets del concepto topológico de distancia homotópica entre aplicaciones continuas. Esta noción puede entenderse como una generalización de la recientemente estudiada categoría-LS y la complejidad categórica, dos importantes invariantes por equivalencias de homotopía entre categorías pequeñas. Para mostrar todo esto primero introducimos algunos conceptos elementales procedentes de la teoría de categorías para luego explorar la adaptación de nociones topológicas (como la homotopía, los caminos, la conexidad por caminos, ...) al contexto de las categorías pequeñas.

Abstract

In this work we introduce the notion of homotopical distance between funtors as an adaptation of the topological concept of homotopic distance between continous maps to the context of small categories and, as a particular case, Posets. This notion can be viewed as a generalization of the recently studied LS-category and categorical complexity, two important invariants by homotopic equivalence between small categories. To show all this we first introduce some elementary concepts from category theory to then explore the adaptation of topological notions (as homotopy, path, pathwise connected space, ...) to the context of small categories.

Introducción

En los últimos años ha habido un creciente interés en la generalización de nociones topológicas al ámbito de las categorías pequeñas. En particular, trabajos como los de Tanaka en [11] han servido para introducir ideas como la de categoría LS a dicho ámbito. Uno de las últimas contribuciones en esta tarea ha sido el artículo de E. Macías y D. Mosquera ([8]) en el que generalizan la distancia homotópica entre aplicaciones continuas que definieron en [7] al contexto de las categorías pequeñas, definiendo para ello la distancia homotópica entre funtores. Dicho concepto a su vez sirve para obtener como casos particulares tanto la categoría LS como la complejidad categórica, que a su vez provienen de conceptos topológicos con fuertes implicaciones en problemas actuales como la robótica ([9]).

El objetivo de este trabajo es servir de introducción a la ya mencionada idea de distancia homotópica entre funtores. Para ello se procederá a presentar algunos conceptos elementales de teoría de categorías para así poder «traducir» las nociones topológicas al lenguaje y contexto propio de las categorías. Una vez realizado esto se procederá a la definición y a la demostración de sus propiedades.

La organización del trabajo es la siguiente:

En el Capítulo 1 se introducirán las nociones básicas de la teoría de categorías. Se empezará con la idea de categoría y a partir de la misma iremos definiendo las ideas de funtor entre categorías y de transformación natural entre funtores. Además, se contará, para facilitar la comprensión y motivar el estudio de las categorías, con ejemplos que muestren los posibles usos de dichas nociones para sistematizar y explicar ideas matemáticas empleadas habitualmente. Para ello nos serviremos de las definiciones y ejemplos canónicos de diversos libros habituales para introducirse en la teoría de categorías como [2], [5], [6] y [10].

En el Capítulo 2 se trasladarán nociones habituales de Topología al contexto de las categorías pequeñas. La primera de estas nociones es la de homotopía entre funtores, que juega un papel indispensable para la construcción de la distancia homotópica entre funtores. Además, estudiaremos los conceptos derivados del de homotopía entre funtores como son la relación de equivalencia que induce la noción de homotopía, tanto en funtores como en categorías. Una vez hecho esto se procederá a definir las ideas de camino en una categoría,

categoría conexa, componentes conexas y categoría contráctil debido a su proximidad con la noción de homotopía y la importancia de estas para construcciones que realizaremos en el último capítulo. También habrá una sección dedicada al caso particular de los Posets entendidos como categorías.

Finalmente en el Capítulo 3 definiremos la noción de distancia homotópica entre funtores, originalmente definida por E. Macías y D. Mosquera en [8]. Una vez tengamos la definición comprobaremos que tanto la categoría LS como la complejidad categórica son dos casos particulares de esta noción. Concluido lo anterior veremos algunas propiedades de la distancia que hemos definido, para así analizar cómo se comporta en relación con nociones habituales al tratar con categorías, funtores y homotopías entre funtores como son: la composición de funtores, el producto y el coproducto de categorías, propiedades del dominio y el codominio de los funtores involucrados y su invariancia por la relación tener el mismo tipo de homotopía. Para terminar veremos cómo se comporta este concepto en el caso de los Posets.

Capítulo 1

Introducción a la teoría de Categorías

En este capítulo se procederá a introducir la teoría de categorías. Para esto se tratará en secciones diferentes con diferentes ideas básicas de dicha teoría, teniendo siempre en mente el «proceso de construcción» de las mismas. Por tanto empezaremos con la idea de categoría y a partir de la misma iremos definiendo las ideas de funtor entre categorías y de transformación natural entre funtores. Además, se contará, para facilitar la comprensión y motivar el estudio de las categorías, con numerosos ejemplos que muestren los posibles usos de dichas nociones para sistematizar y explicar ideas matemáticas empleadas habitualmente. Para ello nos serviremos de las definiciones y ejemplos canónicos de diversos libros habituales para introducirse en la teoría de categorías como [2], [5], [6] y [10].

También contaremos con una sección dedicada a proporcionar ejemplos de construcciones con categorías. El objetivo es poder tener herramientas cuya necesidad aparecerá más adelante, tanto para la definición de distancia homotópica entre funtores como para poder enunciar propiedades de dicha idea.

1.1. ¿Qué es una categoría?

La idea básica que rige la teoría de categorías consiste en que hay objetos y transformaciones. Dicha la principal idea en términos más o menos vagos y abstractos, toca ahora empezar con cierto formalismo que nos indique unas reglas elementales. Para ello establecemos la siguiente definición que tomamos de [10]:

Definición 1.1 (Categoría). Una categoría $\mathfrak{C}$ consiste en:

- Una colección de objetos X, Y, ...

- Una colección de morfismos entre objetos f, g, ...

Acompañados de las siguientes reglas:

- Todo morfismo f tiene un dominio X y un codominio Y, siendo X e Y objetos de la categoría. De forma que para mencionar a los tres usaremos
$$f : X \to Y.$$
- Para todo objeto X existe un morfismo llamado identidad que denotaremos como
$$\mathrm{id}_X : X \to X.$$

Sujetas a las siguientes condiciones «algebraicas»:

- Los morfismos pueden componerse, es decir si f y g son dos morfismos tales que el codominio de f es el mismo que el dominio de g entonces existe $g \circ f$ con el dominio de f y el codominio de g. En diagramas diríamos que si
$$f : X \to Y, g : Y \to Z$$
entonces existe
$$g \circ f : X \to Z.$$
- El morfismo identidad no hace nada, esto es, si $f : X \to Y$ lo componemos con id_X a la derecha o con id_Y a la izquierda entonces el resultado sigue siendo el mismo y por tanto
$$\mathrm{id}_Y \circ f = f$$
y
$$f \circ \mathrm{id}_X = f.$$
- Se cumple la propiedad asociativa, por tanto dados f, g y h tres morfismos de forma tal que $f : X \to Y$, $g : Y \to V$ y $h : V \to W$ es lo mismo hacer primero $g \circ f$ y luego aplicar por la izquierda h que hacer $h \circ g$ y luego aplicarlo por la derecha a f. Es decir se cumple la siguiente identidad:
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Observación 1.2. Como se puede observar en la definición las categorías tienen objetos y morfismos que forman una colección (no necesariamente un conjunto). Como ambas colecciones son importantes conviene denotarlas con algún símbolo. Así pues, a la colección de objetos de una categoría $\mathfrak{C}$ la denotaremos como $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ y a la colección de morfismos la denotaremos como $\mathrm{Arr}(\mathfrak{C})$. A su vez, fijados X e Y objetos de una categoría a la colección de morfismos con dominio X y codominio Y la denotaremos como $\mathrm{Arr}(X, Y)$.

Como es habitual en matemáticas cuando se introduce una clase de objetos también se introduce la idea de una parte o subobjeto. En el caso de las categorías existen las subcategorías que definimos de la siguiente forma.

Definición 1.3 (Subcategoría). Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{U}$ dos categorías. Diremos que $\mathfrak{U}$ es una subcategoría de $\mathfrak{C}$ si se cumple que:

- Todos los objetos de $\mathfrak{U}$ son objetos de $\mathfrak{C}$.
- Todo morfismo de $\mathfrak{U}$ es un morfismo de $\mathfrak{C}$.

1.1.1. Ejemplos

Empezamos ahora con un ejemplo «trivial» de categoría que nos resultará de ayuda más adelante.

Ejemplo 1.4. Definimos la categoría trivial, que denotaremos como $\{\bullet\}$, a la categoría con un único objeto $\bullet$ y un único morfismo $\mathrm{id}_\bullet$.

Además podemos representar categorías con una cantidad finita de objetos mediante un diagrama en el que aparezcan los objetos y entre ellos existan flechas que representen «morfismos no derivados ni triviales» entre ellos, es decir que representen morfismos que sean distintos del morfismo identidad y que no se puedan obtener como composición no trivial (sin la identidad entre ellos).

Ejemplo 1.5. La categoría generada por el siguiente diagrama:

$$A \qquad B$$

tiene dos únicos morfismos, las identidades de A y de B.

Ejemplo 1.6. La categoría generada por el siguiente diagrama:

$$X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{j} Z$$

tiene además de los morfismos identidad e i y j el morfismo $j \circ i$.

Conviene ofrecer ahora algunos ejemplos que clarifiquen la noción de forma no tan trivial. Ahora bien, dado el carácter abstracto y sumamente amplio de las categorías tomaremos dos grandes clases de ejemplos: las categorías que representan «ámbitos de investigación» matemática y ejemplos de categorías que representan (cada categoría) un objeto matemático particular.

Categorías que representan «ámbitos de investigación» matemática:

Ejemplo 1.7. La categoría **SET** cuyos objetos son los conjuntos y cuyos morfismos son las aplicaciones entre conjuntos.

Ejemplo 1.8. Las categorías algebraicas **Monoides**, **Grupos**, **GrupoAb**, **Anillos**, o, fijado un cuerpo K, $\mathbf{Vec}_K$, cuyos objetos son respectivamente los monoides, los grupos, los grupos abelianos, los anillos y los espacios vectoriales sobre un cuerpo K, siendo sus morfismos los homomorfismos entre monoides, grupos, grupos abelianos, anillos y espacios vectoriales respectivamente.

Ejemplo 1.9. La categoría **TOP** cuyos objetos son los espacios topológicos y sus morfismos las aplicaciones continuas.

Categorías que representan objetos matemáticos habituales:

Ejemplo 1.10. Dado un grupo G podemos construir una categoría C que lo represente. Para ello basta tomar C como una categoría de un solo objeto que denotaremos por «$\bullet$» y tomando para cada elemento $g \in G$ un único morfismo $g : \bullet \to \bullet$ con la restricción añadida de que el elemento neutro e sea representado por $\mathrm{id}_\bullet$. Ahora basta con interpretar la operación interna $*$ del grupo G como la operación con la que vienen «equipados» los morfismos de una categoría, esto es la composición $\circ$.

Ejemplo 1.11. Un Poset es un par ordenado $(P, \leq)$ donde P es un conjunto y $\leq$ un orden (una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva). Tal estructura la podemos representar a través de una categoría P de fácil construcción. Para cada elemento $X \in P$ construimos un único objeto en la categoría que denotamos por comodidad como X. Ahora para cada par de elementos $X, Y \in P$ tales que $X \geq Y$ definimos un único morfismo $X \to Y$. Con esto construimos una categoría, puesto que existe identidad por el carácter reflexivo de la relación y se tienen las propiedades de la composición gracias a la transitividad.

Observación 1.12. En los dos últimos ejemplos también se tiene un «resultado recíproco». Es decir, existen unas condiciones bajo las cuales una una categoría puede entenderse como un grupo o un poset.

1.1.2. Propiedades interesantes en las categorías

La idea de categoría nos brinda la posibilidad de definir nociones interesantes como objetos o morfismos «destacados» o tipos especiales de categorías.

El primer ejemplo de esto son la clase de morfismos que se denotan como «isomorfismos» que permiten, hasta cierto punto, expandir el concepto ordinario de identidad.

Definición 1.13 (Isomorfismo). Dados dos objetos X e Y de una categoría decimos que $f : X \to Y$ es un isomorfismo entre ellos si existe $g : Y \to X$ de forma que se cumpla que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ y $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Definición 1.14 (Objetos isomorfos). Dados dos objetos X e Y de una categoría decimos que son isomorfos si existe un isomorfismo entre ellos. Es decir, existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ de forma que se cumpla que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ y $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Demos ahora ejemplos de estas dos definiciones.

Ejemplo 1.15 (•). En las categorías **SET**, **TOP** y **Grupos** los objetos isomorfos son los conjuntos equipotentes (esto es, aquellos que tienen una aplicación biyectiva entre ellos, es decir «tienen la misma cantidad de elementos»), los espacios topológicos homeomorfos y los grupos isomorfos respectivamente.

Ejemplo 1.16 (Isomorfismo en categorías generales). Si G es una categoría que representa un grupo entonces hay un único objeto trivialmente isomorfo a sí mismo (por la existencia del morfismo identidad) y además todo morfismo es un isomorfismo. En efecto, por los axiomas de grupo dado un elemento del grupo $g : \bullet \to \bullet$ existe un elemento inverso $g^{-1} : \bullet \to \bullet$ tal que $g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_\bullet$ y $g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_\bullet$.

[**Isomorfismo en Posets**]

Ejemplo 1.17. En un Poset no hay isomorfismos no triviales, es decir, distintos a los morfismos identidad. En efecto, si existiera un morfismo $X \to Y$ y un morfismo $Y \to X$ entonces se tendría que $X \geq Y$ y $Y \geq X$. Ahora, usando la propiedad antisimétrica podemos deducir que $X = Y$ y por tanto ambos morfismos son la identidad por la unicidad.

Además necesitaremos, para los propósitos de este TFG, las siguientes definiciones de categorías «especiales» en las que se restringen algo la noción tan general de «categoría». Es más, en nuestro trabajo debemos restringirnos a las categorías pequeñas. Debemos también destacar que tanto la noción de Categoría pequeña como la de localmente pequeña aparecen definidas en [5].

Definición 1.18 (Categoría pequeña). Una categoría $\mathfrak{C}$ es pequeña si y solo si la colección $\mathrm{Arr}(\mathfrak{C})$ forma un conjunto.

A partir de esta definición es inmediato el siguiente resultado.

Proposición 1.19. *En toda categoría pequeña la colección de objetos forma un conjunto.*

Demostración. Cada objeto está en una relación uno a uno con los morfismos identidad. Por tanto si los objetos no pudiesen formar un conjunto, tampoco podrían serlo los morfismos. □

Algunos ejemplos de categoría pequeña son:

Ejemplo 1.20. Una categoría que represente un grupo como vimos en el Ejemplo 1.10.

Ejemplo 1.21. Una categoría que representa un conjunto con un orden como vimos en el Ejemplo 1.11

Definición 1.22 (**Categoría localmente pequeña**). Una categoría $\mathfrak{C}$ es localmente pequeña si y solo si para cada dos objetos X e Y de $\mathfrak{C}$ la colección $\mathrm{Arr}(X, Y)$ de los morfismos de X en Y forma un conjunto.

Proposición 1.23. *Toda categoría pequeña es localmente pequeña.*

Demostración. Si $\mathfrak{C}$ es una categoría pequeña entonces $\mathrm{Arr}(X, Y)$ es una parte de $\mathrm{Arr}(\mathfrak{C})$ y por tanto un conjunto. □

Como ejemplos de categorías localmente pequeñas podemos dar:

Ejemplo 1.24. Todas las categorías pequeñas por la proposición anterior.

Ejemplo 1.25. La categoría **SET** puesto que toda aplicación entre los conjuntos A y B es un subconjunto de $A \times B$, es decir un elemento del conjunto $P(A \times B)$.

Ejemplo 1.26. Las categorías **TOP**, **Grupos** o **Anillos** puesto que las aplicaciones continuas y los homomorfismos de distintos tipo son casos particulares de aplicaciones entre conjuntos.

También necesitamos introducir una clase importante de objetos que pueden tener las categorías.

Definición 1.27 (**Objeto inicial**). Dada una categoría $\mathfrak{C}$ diremos que tiene un objeto inicial si existe un objeto I en la categoría de forma que para cualquier objeto X exista un único morfismo $I \to X$.

Definición 1.28 (**Objeto final**). Dada una categoría $\mathfrak{C}$ diremos que tiene un objeto final si existe un objeto T en la categoría de forma que para cualquier objeto X exista un único morfismo $X \to T$.

Ejemplo 1.29 (Objetos iniciales y finales en la categoría SET). La categoría **SET** tiene un objeto inicial que es el conjunto vacío $\emptyset$ y un (salvo aplicación biyectiva) objeto final $\{*\}$, un conjunto con un solo elemento $*$. En efecto, dado un conjunto X cualquiera existe una única aplicación de $\emptyset \to X$ y una única aplicación $X \to \{*\}$ definida como la aplicación constante, esto es aquella que cumple que $f(x) = *$ para todo elemento $x \in X$.

Ejemplo 1.30 (Objetos iniciales y terminales en la categoría Grupos). La categoría **Grupos** tiene un objeto inicial y final (salvo isomorfismo) y además coinciden. Para ser más exactos, dicho objeto es el grupo trivial, es decir, el grupo con un solo elemento el neutro $\{e\}$. Así es, sea G un grupo arbitrario como todo morfismo de grupos lleva el neutro en el neutro hay una único morfismo $\{e\} \to G$ que lleva e en el elemento neutro de G. Y al revés, existe un único morfismo de grupos $G \to \{e\}$ definido como el morfismo que lleva todo elemento del grupo G en e.

Proposición 1.31 (Unicidad del objeto inicial y final). *Si una categoría $\mathfrak{C}$ tiene un objeto inicial I o un objeto final T entonces es único salvo isormofismo en la categoría. Esto es, si hay otro objeto inicial I' u otro objeto final T' existe un único isomorfismo $i : I \to I'$ o $i : T \to T'$*

Demostración. Veremos solo el caso de una categoría con un objeto inicial puesto que la demostración es análoga para el objeto final.

Dada una categoría con un objeto inicial I, por definición para cualquier objeto X de $\mathfrak{C}$ hay un único morfismo $I \to X$, en particular existe un único morfismo de I en I. Ahora bien, como por definición de categoría ya hay un morfismo $\mathrm{id}_I : I \to I$ este es el único morfismo posible de I en I.

Supongamos ahora que existe I' otro objeto inicial en $\mathfrak{C}$ entonces tenemos que existe un único morfismo $i : I \to I'$ y un único morfismo $j : I' \to I$ por lo que tenemos que

- $j \circ i : I \to I$ pero como solo hay un morfismo de I en I se tiene que $j \circ i = \mathrm{id}_I$.
- $i \circ j : I' \to I'$ pero como solo hay un morfismo de I' en I' se tiene que $i \circ j = \mathrm{id}_{I'}$.

Por tanto i es un isomorfismo y es único como queríamos demostrar. $\square$

1.2. Funtores

Según lo expuesto en la sección anterior, lo principal de las categorías se encuentra en las transformaciones y esta tesis invita a que nos realicemos la siguiente pregunta ¿no debemos, acaso, aplicar la tesis de la teoría de categorías a las propias categorías? La respuesta es un rotundo «Sí». En efecto, hay transformaciones entre categorías y estas reciben el nombre de «funtores».

Al igual que con las categorías, necesitamos para los funtores no solo esta visión intuitiva de los mismos sino una serie de definiciones que recojan las condiciones que les exigimos para trabajar con ellos, en particular tomaremos la siguiente definición de funtor basándonos en la que se ofrece en [5].

Definición 1.32 (Funtor). Dadas dos categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ diremos que F es un funtor entre $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ y representaremos como $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ si se cumple que

- Para todo objeto X de $\mathfrak{C}$ existe un único objeto en $\mathfrak{D}$ que denotaremos como $F(X)$.
- Para cada morfismo $f : X \to Y$ en $\mathfrak{C}$ existe un único morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ en $\mathfrak{D}$.

Ahora debemos pedir otra vez condiciones de tipo algebraico a las que también se conocen como condiciones de funtorialidad:

- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.
- $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.

Observación 1.33. Llamaremos endofuntor a un funtor de la forma $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$, es decir un funtor que va de una categoría en sí misma,.

Hemos de notar que la definición anterior no es arbitraria. Al igual que otras transformaciones entre objetos su construcción busca que preserve cierta estructura o aspectos importantes de dichos objetos. Volviendo a las categorías y los funtores ¿qué se preserva? La respuesta vaga y general es: los aspectos más importantes de una categoría, la respuesta concreta es: los morfismos (de ahí las reglas de la composición y la identidad) y además la identidad de los objetos, es decir los isomorfismos.

Dada la importancia que hemos dado a este aspecto y como el último resultado no aparece de forma explícita en la definición nos vemos en la obligación de probarlo.

Proposición 1.34 (Conservación de isomorfismos). *Si X e Y son objetos de $\mathfrak{C}$ isomorfos entonces $F(X)$ y $F(Y)$ objetos de $\mathfrak{D}$ también son isomorfos.*

Demostración. Como X e Y son isomorfos entonces existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ de forma que se cumple que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ y $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Por la primera condición de funtorialidad se tiene que $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f)$ y $F(f) \circ F(g) = F(f \circ g)$. Aplicando ahora la segunda condición tenemos que como $g \circ f = \mathrm{id}_X$ y $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ se cumple que $F(g \circ f) = F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ y $F(f \circ g) = F(\mathrm{id}_Y) = id_{F(Y)}$. En consecuencia existen $F(f)$

y $F(g)$ tales que $F(g) \circ F(f) = \mathrm{id}_{F(X)}$ y $F(f) \circ F(g) = \mathrm{id}_{F(Y)}$, por lo que $F(X)$ y $F(Y)$ son isomorfos como queríamos demostrar. $\square$

Definición 1.35 (**Categoría Imagen**)**.** Dadas dos categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ y un funtor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ entre ellas llamaremos imagen de F y denotamos por $F(\mathfrak{C})$ a la subcategoría más pequeña de $\mathfrak{D}$ tal que posee todos los objetos de la forma $F(X)$ con X objeto de $\mathfrak{C}$ y todos los morfismos $F(f)$ con f morfismo de $\mathfrak{C}$.

Observación 1.36. En la definición anterior debemos tomar una subcategoría que contenga a los objetos y morfismos imágenes puesto que la colección de dichos objetos y dichos morfimos no siempre es una subcategoría de $\mathfrak{D}$. Un ejemplo de un caso en el cual la colección de objetos y morfismos no forma una categoría es el siguiente:

Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ las categorías generadas por los siguientes diagramas:

$$A \xrightarrow{f} B \qquad\qquad X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{j} Z$$

$$C \xrightarrow{g} D$$

y el funtor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ que actúa de la siguiente forma: $F(A) = X$, $F(B) = Y = F(C)$, $F(D) = Z$, $F(f) = i$ y $F(g) = j$. La imagen de F no es una categoría y por tanto tampoco una subcategoría. Esto se debe a que en una categoría tienen que estar todos los morfismos obtenidos por composición, sin embargo $j \circ i$ no es la imagen de ningún morfismo de $\mathfrak{C}$, aunque sí lo sean i y j.

1.2.1. Ejemplos

De nuevo nos encontramos con la necesidad de dar unos cuantos ejemplos que ayuden a concretar el significado del concepto de funtor.

Igual que antes, empezamos viendo qué sucede con la categoría trivial.

Ejemplo 1.37. Dada una categoría cualquiera $\mathfrak{C}$ solo hay un funtor $F : \mathfrak{C} \to \{\bullet\}$ ya que para todo objeto X y morfismos f de $\mathfrak{C}$ se tiene que $F(X) = \bullet$ y $F(f) = \mathrm{id}_\bullet$ dado que al haber un único objeto y un único morfismo en $\{\bullet\}$ no hay alternativa posible.

Ejemplo 1.38. Dada una categoría cualquiera $\mathfrak{C}$ un funtor $F : \{\bullet\} \to \mathfrak{C}$ se puede entender como un objeto de $\mathfrak{C}$ y viceversa. En efecto, dado un funtor F en las condiciones anteriores podemos asociarle el objeto $F(\bullet)$ y al revés, dado un objeto X podemos asociarle el funtor $X : \{\bullet\} \to \mathfrak{C}$ que cumple que $X(\bullet) = X$.

Ahora empezamos con algunos funtores que aparecen de forma natural al trabajar con categorías.

Ejemplo 1.39 (**Funtor identidad**). Dada una categoría $\mathfrak{C}$ existe un funtor $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ que lleva un objeto A de $\mathfrak{C}$ en $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}(A) = A$ y todo morfismo $f : A \to B$ en $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}(f) : \mathrm{id}_{\mathfrak{C}}(A) \to \mathrm{id}_{\mathfrak{C}}(B) = f : A \to B$.

Ejemplo 1.40 (**Composición de funtores**). Sean $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{B}$ tres categorías y $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{B}$, existe un único funtor $G \circ F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$. Tal funtor viene determinado por la siguiente actuación:

- $(G \circ F)(X) = G(F(X))$ para X objeto de $\mathfrak{C}$.
- $(G \circ F)(f) = G(F(f))$ para f morfismo de $\mathfrak{C}$.

Además es fácil comprobar que cumple las condiciones de funtorialidad. En efecto, puesto que:

- $(G \circ F)(\mathrm{id}_X) = G(F(\mathrm{id}_X)) = G(\mathrm{id}_{F(X)}) = \mathrm{id}_{G(F(X))}$ aplicando la funtorialidad de F y G.
- $(G \circ F)(g \circ f) = G(F(g \circ f)) = G(F(g) \circ F(f)) = G(F(g)) \circ G(F(f)) = (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(f)$ de nuevo aplicando las condiciones de funtorialidad.

La noción definida en la sección anterior de subcategoría viene acompañada con los siguientes funtores.

Ejemplo 1.41 (**Funtor inclusión**). Dada una categoría $\mathfrak{C}$ y una subcategoría $\mathfrak{U}$ existe un funtor $i_{\mathfrak{U}} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{C}$ que lleva un objeto A de $\mathfrak{U}$ en $i(A) = A$ y todo morfismo $f : A \to B$ en $i_{\mathfrak{U}}(f) : i_{\mathfrak{U}}(A) \to i_{\mathfrak{U}}(B) = f : A \to B$.

Ejemplo 1.42 (**Funtor restricción**). Dadas dos categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, una subcategoría $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{C}$ y un funtor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ existe un funtor $F|_{\mathfrak{U}} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{D}$ definido como el funtor composición $F \circ i_{\mathfrak{U}}$.

Además también contamos con ejemplos más elaborados y concretos como los siguientes:

Ejemplo 1.43 (**Funtores entre grupos**). Dados G y H grupos y $F : G \to H$ un homomorfismo entre grupos tenemos un funtor L entre las categorías G y H que representan a los grupos homónimos. Como en ambas categorías solo hay un objeto es inmediato definir cómo actúa el funtor sobre el objeto de G: lo lleva al único objeto de H. Dado f un morfismo (obviamos el dominio y el codominio puesto que solo hay un único objeto) en G definimos $L(f)$ como $F(f)$. Como $\mathrm{id}_M = e_M$ y F es un homomorfismo se tiene que $F(\mathrm{id}_M) = F(e) = e_N = \mathrm{id}_N$. Además dados dos morfismos f y g de G (siempre se pueden componer al haber solo un objeto) como $F(f * g) = F(f) * F(g)$ tenemos que $L(g \circ f) = L(g) \circ L(f)$. La demostración del resultado recíproco de que todo funtor entre grupos tomados como categorías define un homomorfismo de grupos se razona de manera análoga.

Ejemplo 1.44 (Funtor entre posets). Sean P y Q dos posets tomados como categorías, un funtor $F : P \to Q$ es unA aplicación que conserva el orden, esto es, si $X \geq Y$ entonces $F(X) \geq F(Y)$. Para ver que en efecto estE es el caso tomemos $X \geq Y$ y veamos que se cumple que$F(X) \geq F(Y)$. En efecto, por definición la desigualdad equivale a que exista un morfismo $X \to Y$ que será llevado por el funtor en un morfismo en Q de la forma $F(X) \to F(Y)$ que equivale, a su vez, a que $F(X) \geq F(Y)$.

Ejemplo 1.45 (Funtor de olvido:). Tomando una categoría que represente una cierta estructura matemática (espacios topológicos, grupos, anillos, ...) que se haya construido a partir de otra más simple podemos construir un funtor que vaya de la más compleja a la más simple en la que nos olvidamos de la estructura adicional. Algunos casos son:

- F : $\mathbf{TOP} \to \mathbf{SET}$ que lleva un espacio topológico $(X, \mathbf{T})$ en X, es decir lleva un espacio topológico, definido por un par ordenado de un conjunto y una topología, en el conjunto X.

- F : $\mathbf{Grupos} \to \mathbf{SET}$ que lleva un grupo $(G, *)$ en G, es decir lleva un grupo, entendido por un par ordenado de un conjunto y una operación interna con las propiedades de un grupo, en el conjunto G.

- F : $\mathbf{Anillos} \to \mathbf{GrupoAb}$ que lleva un anillo $(R, +, *)$ en $(R, +)$, es decir lleva un anillo (definido por un triple ordenado de un conjunto, una operación $+$ con la que es un grupo abeliano y una operación $*$ con la que es un monoide de forma tal que cumplen las propiedades que relacionan $+$ y $*$ en un anillo) en el par ordenado $(R, +)$.

- F : $\mathbf{Vec}_K \to \mathbf{SET}$ que lleva un espacio vectorial $(V, +, *)$ en V, es decir lleva un espacio vectorial en el conjunto de sus elementos.

Ejemplo 1.46 (Funtor Libre:). Este ejemplo es una especie de «inverso» al funtor de olvido. Si en el anterior íbamos de una categoría con una estructura más rica a una con estructura más pobre aquí vamos de una estructura más pobre a una estructura más rica. Ejemplos de este funtor son:

- $D : \mathbf{SET} \to \mathbf{TOP}$ que lleva un conjunto S en el espacio topológico $(S, \mathbf{D})$ donde $\mathbf{D}$ es la topología discreta de S o el funtor $T : \mathbf{SET} \to \mathbf{TOP}$ que hace lo mismo que lo anterior pero con la topología trivial.

- Dado K un cuerpo, el funtor $V : \mathbf{SET} \to \mathbf{Vec}_K$ que toma un conjunto S y lo lleva al espacio vectorial $V(S)$, el espacio vectorial que tiene como base S. Es decir, el espacio formado por los vectores de la forma $\sum_{x\in S} \lambda_x x$ con $\lambda_x \in \mathbf{K}$ y siendo nulos salvo para una cantidad finita de elementos x.

1.3. Transformaciones Naturales

En la sección anterior motivamos la necesidad del concepto de funtor como un intento de extender la tesis de que lo principal de las categorías está en las transformaciones. Si hemos comprobado que lo importante son las transformaciones, también deben ser importantes las transformaciones de las transformaciones. Si las transformaciones entre las categorías son los funtores, es hora de que introduzcamos las transformaciones entre estos. Estas reciben el nombre de transformaciones naturales.

El problema que tenemos ahora es el de dar con una buena definición de qué es una transformación de un funtor en otro. Tal definición, como veremos, surge de forma natural una vez tomamos en cuenta que dicha definición debe hacer uso de los conceptos y morfismos ya definidos; veámoslo.

Lo primero que necesitamos son dos categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ y dos funtores $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ entre ellas. Sabemos que los funtores se definen a partir de cómo actúan sobre los objetos de $\mathfrak{C}$ y sus morfismos, tomemos por tanto X e Y objetos de $\mathfrak{C}$ y $f : X \to Y$ un morfismo entre ambos. Por la definición de funtores para el objeto X existen los objetos imagen $F(X)$ y $G(X)$, a su vez para Y tenemos los objetos imagen $F(Y)$ y $G(Y)$ y, finalmente, para el morfismo f tenemos $F(f) : F(X) \to F(Y)$ y $G(f) : G(X) \to G(Y)$. La situación hasta el momento tiene el siguiente aspecto:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) & G(Y) \end{tikzcd}$$

Viendo esto parece claro aquello que hace falta para ver cómo llevar un funtor a otro, hace falta unir esos dos morfismos. ¿Cómo? pues a partir de otros dos morfismos $\alpha(X) : F(X) \to G(X)$ y $\alpha(Y) : F(Y) \to G(Y)$. De esta forma nos encontraríamos con el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha(X)"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha(Y)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Llegamos por tanto a la siguiente definición.

Definición 1.47 (**Transformación Natural**). Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ y dos funtores $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ diremos que hay una transformación natural entre F y G y denotaremos como

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & \mathfrak{D} \end{tikzcd}$$

si para cada objeto X de $\mathfrak{C}$ existe un morfismo $\alpha(X) : F(X) \to G(X)$ de forma tal que para todo morfismo $f : X \to Y$ de $\mathfrak{C}$ se tenga el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\alpha(X)} & G(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle F(f)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(Y) & \xrightarrow{\alpha(Y)} & G(Y) \end{array}$$

Esto es

$$G(f) \circ \alpha(X) = \alpha(Y) \circ F(f).$$

1.3.1. Ejemplos

Ejemplifiquemos ahora la definición.

Ejemplo 1.48 (**Transformación identidad**). Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías y $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ un funtor entre ellas. Existe una transformación natural del funtor en sí mismo a través del morfismo identidad asociado a cada objeto $F(X)$. En efecto, para cada par de objetos X e Y de $\mathfrak{C}$ y un morfismo $f : X \to Y$ entre estos se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\mathrm{id}_{F(X)}} & F(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle F(f)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ F(Y) & \xrightarrow{\mathrm{id}_{F(Y)}} & F(Y) \end{array}$$

Ejemplo 1.49 (**Determinante**). Dado $n \in \mathbb{N}$ distinto de 0 existen dos funtores M_n, U : **AnilloCom** $\to$ **Mon** entre la categoría de anillos conmutativos a la de monoides Monoides y la transformación natural det entre ellos; donde M_n es el funtor que lleva un anillo conmutativo A en el monoide de las matrices con coeficientes en ese anillo con la multiplicación, U es el monoide que consiste en A sin la suma y $\det_A$ es la aplicación que dada una matriz con coeficientes en A le asigna su determinante.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{AnilloC} \arrow[rr, bend left, "M_n"] \arrow[rr, bend right, "U"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \text{det}"] & & \mathbf{Mon} \end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.50 (Conjuntos parcialmente ordenados). Una transformación natural entre funtores $F, G : P \to Q$ entre posets existe si se cumple que$F(X) \geq G(X)$ para cualquier objeto X de P puesto que:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \longrightarrow & G(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(Y) & \longrightarrow & G(Y) \end{array}$$

Al igual que múltiples ideas en matemáticas conviene no solo saber qué objetos hay y que morfismos hay entre ellos, también importa conocer cuándo dos de esos objetos son el mismo, o mejor dicho, intercambiables en cierto contexto. Gracias a la noción de funtor y de transformación natural podemos construir la noción de equivalencia entre categorías.

Definición 1.51 (Categorías equivalentes). Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías, se dicen equivalentes si existen dos funtores $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ tales que existen transformaciones naturales $\mu : \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} \to G \circ F$ y $\gamma : \mathrm{id}_{\mathfrak{D}} \to F \circ G$.

1.4. Construcciones con Categorías

Es habitual en las matemáticas que al definir una clase de objetos se construyan además métodos para construir nuevos objetos a partir de los ya dados. Con las categorías pasa algo similar y dado que muchas de estas construcciones aparecerán más adelante nos vemos en la necesidad de introducirlas.

Definición 1.52 (Categoría Producto). Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías. Definimos la categoría producto $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ como aquella que cumple que:

- Sus objetos son pares ordenados (X, Y) donde X es un objeto de $\mathfrak{C}$ e Y un objeto de $\mathfrak{D}$.

- Todo morfismo $h : (X, Y) \to (X', Y')$ es un par ordenado $h = (f, g)$ donde $f : X \to X'$ es un morfismo de $\mathfrak{C}$ y $g : Y \to Y'$ es un morfismo de $\mathfrak{D}$.

Observación 1.53 (**Proyecciones**). La categoría $\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}$ viene «equipada» con dos funtores naturales, a saber $p_1 : \mathfrak{C}\times\mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ y $p_2 : \mathfrak{C}\times\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ que «proyectan» los morfismos y objetos. Es decir dado (X, Y) y (f, g) un objeto y un morfismo de $\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}$ los funtores actúan de la siguiente forma:

- $p_1(X, Y) = X$ y $p_1(f, g) = f$.
- $p_2(X, Y) = Y$ y $p_2(f, g) = g$.

Proposición 1.54 (**Propiedad universal del producto**). *Si tenemos $F : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ y $G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ existe un único funtor $(F, G) : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}\times\mathfrak{D}$ tal que $p_1 \circ (F, G) = F$ y $p_2 \circ (F, G) = G$. Y al revés, si tenemos un funtor $H : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}\times\mathfrak{D}$ existen dos únicos funtores $F : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ y $G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ que hacen el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{B} \arrow[d, "H"] \arrow[ddl, bend right, "F"'] \arrow[ddr, bend left, "G"] & \\
 & \mathfrak{C}\times\mathfrak{D} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
\mathfrak{C} & & \mathfrak{D}
\end{tikzcd}$$

Demostración. Dados los funtores $F : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ y $G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ construimos el funtor $(F, G) : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}\times\mathfrak{D}$ de la siguiente forma:

- $(F, G)(X) = (F(X), G(X))$ para todo objeto X de $\mathfrak{B}$.
- $(F, G)(f) = (F(f), G(f))$ para todo morfismo f de $\mathfrak{B}$.

Dado $H : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}\times\mathfrak{D}$ basta tomar los funtores $p_1 \circ H$ y $p_2 \circ H$. $\square$

Observación 1.55. Si tenemos $H : \mathfrak{C}\times\mathfrak{D} \to \mathfrak{B}$ e Y es un objeto de $\mathfrak{D}$ podemos construir un funtor $H_Y : \mathfrak{C} \to \mathfrak{E}$ de la siguiente forma:

- $H_Y(X) = H(X, Y)$ para todo objeto X de $\mathfrak{C}$.
- $H_Y(f) = H(f, \mathrm{id}_Y)$ para todo morfismo f de $\mathfrak{C}$.

Y un resultado análogo se tiene fijado X un objeto de $\mathfrak{C}$.

Definición 1.56 (**Categoría Coproducto**). Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías. Definimos la categoría coproducto $\mathfrak{C}\sqcup\mathfrak{D}$ como aquella que cumple que:

- Un objeto de $\mathfrak{C}\sqcup\mathfrak{D}$ es o bien un objeto de $\mathfrak{C}\times\{0\}$ o un objeto de $\mathfrak{D}\times\{1\}$.

- Un morfismo de $\mathfrak{C} \sqcup \mathfrak{D}$ es o bien un morfismo de $\mathfrak{C} \times \{0\}$ entre objetos de $\mathfrak{C} \times \{0\}$ o bien un morfismo de $\mathfrak{D} \times \{1\}$ entre objetos de $\mathfrak{D} \times \{1\}$.

Observación 1.57 (**Inclusiones naturales en el coproducto**). La categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ se pueden ver como «subcategorías» de $\mathfrak{C} \sqcup \mathfrak{D}$. Siendo más exactos existen dos funtores de «inclusión» $i_1 : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C} \sqcup \mathfrak{D}$ e $i_2 : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C} \sqcup \mathfrak{D}$ definidos de la siguiente forma:

- $i_1(X) = (X, 0)$ e $i_1(f) = (f, \mathrm{id}_0)$.

- $i_2(Y) = (Y, 1)$ e $i_2(g) = (g, \mathrm{id}_1)$.

Proposición 1.58 (**Propiedad universal del coproducto**). *Si tenemos $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$ y $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{B}$ existe un único funtor $F \sqcup G : \mathfrak{C} \sqcup \mathfrak{D} \to \mathfrak{B}$ tal que $(F \sqcup G) \circ i_1 = F$ y $(F \sqcup G) \circ i_2 = G$. Y al revés, si tenemos un funtor $H : \mathfrak{C} \sqcup \mathfrak{D} \to \mathfrak{B}$ existen dos únicos funtores $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$ y $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{B}$ que hacen el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{B} & \\
 & \mathfrak{C} \sqcup \mathfrak{D} \arrow[u, "H"] & \\
\mathfrak{C} \arrow[ur, "i_1"] \arrow[uur, bend left, "G"] & & \mathfrak{D} \arrow[ul, "i_2"'] \arrow[uul, bend right]
\end{tikzcd}$$

Demostración. Dados los funtores $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$ y $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{B}$ construimos el funtor $F \sqcup G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ de la siguiente forma:

- $(F \sqcup G)(X, 0) = F(X)$ si X es un objeto de $\mathfrak{C}$ y $(F \sqcup G)(Y, 1) = G(Y)$ si Y es un objeto de $\mathfrak{D}$.

- $(F \sqcup G)(f, \mathrm{id}_0) = F(f)$ si f es un morfismo de $\mathfrak{C}$ y $(F \sqcup G)(g, \mathrm{id}_1) = G(g)$ si g es un morfismo de $\mathfrak{D}$.

Dado $H : \mathfrak{C} \sqcup \mathfrak{D} \to \mathfrak{B}$ basta tomar los funtores $H \circ i_1$ y $H \circ i_2$. $\square$

Capítulo 2

Homotopías en Categorías

El objetivo de este capítulo es introducir nociones habituales de Topología desde una perspectiva propia de la teoría de categorías sin hacer mención explícita de los espacios topológicos. La primera de estas nociones es la de homotopía entre funtores. Dicha noción juega un papel indispensable para la construcción de la distancia homotópica entre funtores. Además, estudiaremos los conceptos derivados del de homotopía entre funtores como son la relación de equivalencia entre categorías «tener el mismo tipo de homotopía». Después daremos definiciones de camino en una categoría, categoría conexa,componentes conexas y categoría contráctil debido a su proximidad con la noción de homotopía y la importancia de estas para construcciones que realizaremos en el último capítulo.

Finalmente dedicaremos una sección a caracterizar como categorías los espacios topológicos finitos que, como se puede ver en [1], se puede reducir al estudio de posets finitos. El enfoque que daremos es ligeramente distinto al de dicho libro, pues aquí veremos los posets no en tanto que espacios topológicos sino en tanto que categorías. Con esto buscamos no solo probar la eficacia de las nociones categóricas. sino obtener multitud de ejemplos en los cuales existen herramientas más potentes para encontrar homotopías y por tanto sea más sencillo clasificar los espacios usando herramientas derivadas de la idea de homotopía.

2.1. Homotopía entre funtores

La noción de homotopía que aquí definimos viene de las ideas de los artículos clásicos de Lee [3] y [4]. Esta construcción aparece motivada por dos ideas que, como se verá más adelante, coinciden. La primera de ellas viene de generalizar la noción habitual de homotopía entre dos aplicaciones continuas $f, g : X \to Y$ entre espacios topológicos como una aplicación continua $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$. Para ello debemos introducir una categoría que jugará un papel análogo al de $[0,1]$ a la que llamaremos categoría intervalo y que definiremos de la siguiente forma.

Definición 2.1 (**Categoría intervalo**). Definimos la categoría intervalo $\mathbb{I}$ como la categoría con objetos $\mathbb{Z}$ y con morfismos no triviales, es decir distintos a los morfismos identidad, $s_n : n \to n+1$ si n es par y con $s_n : n+1 \to n$ si n es impar. Tal categoría se puede entender como la generada por el siguiente diagrama:

$$... - 2 \to -1 \leftarrow 0 \to 1 \leftarrow 2...$$

Ahora, con la categoría intervalo ya definida podemos definir la noción de homotopía entre funtores sustituyendo adecuadamente en la definición de homotopía entre aplicaciones continuas con nociones propias de la teoría de categorías.

Definición 2.2 (**Homotopía entre funtores**). Dados dos funtores $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ entre dos categorías pequeñas decimos que hay una homotopía entre F y G si existe un funtor $H : \mathfrak{C} \times \mathbb{I} \to \mathfrak{D}$ tal que para ciertos $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m \leq n$ se cumple que:

- $H_m : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es igual a F.
- Todos los funtores $H_l : \mathfrak{C} \times \{l\} \to \mathfrak{D}$ con $l \leq m$ son iguales a F.
- $H_n : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es igual a G.
- Todos los funtores $H_k : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ con $n \leq k$ son iguales a G.

En tal caso diremos que F y G son homótopos con homotopía H y lo denotaremos como $F \simeq G$.

Observación 2.3. Como es evidente si existen m y n existen infinitos pares de números enteros que satisfacen la definición anterior. Por comodidad supondremos que m es el máximo entero antes del cual el funtor que define la homotopía restringida es constante y n el mínimo de los enteros a partir de los cuales el funtor que define la homotopía restringida es constante. Además dada una homotopía H diremos que m y n de dicha forma son sus valores extremos y llamaremos soporte al par ordenado $[m, n]$.

Teniendo esta definición podemos proceder a demostrar una de las propiedades más inmediatas y útiles, a saber que define una relación de equivalencia entre funtores.

Proposición 2.4. *Dadas las categorías pequeñas $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, la relación $\simeq$ entre funtores entre ellas es una relación de equivalencia.*

Demostración.

- Reflexiva. Basta tomar la homotopía H tal que $H(X, i) = F(X)$ para todo (X, i) objeto de $\mathfrak{C} \times \mathbb{I}$ y $H(f, g) = F(f)$ para todo morfismo (f, g) de $\mathfrak{C} \times \mathbb{I}$.

- Simétrica. Supongamos que $F \simeq G$ y veamos que $G \simeq F$. Sea H una homotopía de F en G definimos H' una homotopía entre G y F de la siguiente forma: $H'(X,i) = H(X,-i)$ y $H'(f,s_i) = H(f,s_{-i})$ y $H'(f,\mathrm{id}_i) = H(f,\mathrm{id}_{-i})$.
- Transitiva. Sean F, G y P funtores tales que $F \simeq G$ y $G \simeq P$ con H_1 y H_2 las homotopías entre F y G y G y P respectivamente. Suponemos además que $[m_1,n_1]$ es el soporte de H_1 y $[m_2,n_2]$ es el soporte de H_2. Construiremos ahora una homotopía H_3 entre F y P de la siguiente forma:

$$H_3(X,i) = \begin{cases} H_1(X,i) & si \quad m_1 \leq i \leq n_1 \\ \\ H_2(X, i - n_1 + m_2) & si \qquad n_1 \leq i \end{cases}$$

y análogo para los funtores.

□

Visto lo anterior debemos proceder a dar la otra idea con la que poder definir la homotopía entre funtores. Esta idea proviene de entender que una homotopía no es más que una «transformación entre transformaciones». Ahora bien, en las categorías ya existe algo que permite entender esa idea: las transformaciones naturales. No obstante, para que las transformaciones naturales se comporten de forma semejante a las homotopías hay que pedir un poco más, por ello terminamos viendo una homotopía no tanto como una transformación natural, sino como una sucesión de funtores con transformaciones naturales entre ellos. Veamos esto de forma más exacta.

Lema 2.5 (**Transformaciones naturales y homotopías**). *Dados dos funtores $F,G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ son equivalentes:*

1. *Existe una homotopía entre F y G con soporte $[0,1]$.*
2. *Existe una transformación natural entre F y G.*

Demostración.

- « $\Longrightarrow$ » Sea H la homotopía entre F y G en las condiciones del enunciado, con esta podemos construir una transformación natural entre F y G. En efecto, construimos una transformación natural α de la siguiente forma: para cada X objeto de $\mathfrak{C}$ tomamos el morfismo $\alpha(X) = H(\mathrm{id}_X, s_0)$ que hace el siguiente diagrama conmutativo para cualesquiera objetos X e Y objetos de $\mathfrak{C}$ y $f : X \to Y$:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{H(\mathrm{id}_X,s_0)} & G(X) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(Y) & \xrightarrow[H(\mathrm{id}_Y,s_0)]{} & G(Y) \end{array}$$

Que conmuta al ser equivalente al diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "H(\mathrm{id}_X, s_0)"] \arrow[d, "H(f,\mathrm{id}_0)"'] & G(X) \arrow[d, "H(f,\mathrm{id}_1)"] \\
F(Y) \arrow[r, "H(\mathrm{id}_Y, s_0)"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

En efecto:

$$H(\mathrm{id}_Y, s_0) \circ H(f, \mathrm{id}_0) = H(\mathrm{id}_Y \circ f, s_0 \circ \mathrm{id}_0) =$$
$$H(f, s_0) = H(f \circ \mathrm{id}_X, \mathrm{id}_1 \circ s_0) = H(f, \mathrm{id}_1) \circ H(\mathrm{id}_X, s_0)$$

- « $\Longleftarrow$ » Definimos la homotopía $H : \mathfrak{C} \times \mathbb{I} \to \mathfrak{D}$ como igual a F antes de 0 e igual a G después de 1, verificando además que $H(\mathrm{id}_X, s_0) = \alpha(X)$ para cualquier objeto X en $\mathfrak{C}$.

$\square$

Corolario 2.6 (**Caracterización de la homotopía con transformaciones naturales**). *Dados dos funtores $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, son equivalentes:*

1. *F y G son homótopos.*

2. *Existe una sucesión $\{F_0, ..., F_k\}$ de funtores de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$ con $F_0 = F$ y $F_k = G$ tal que para todo par de funtores consecutivos F_l y F_{l+1} existe una transformación natural de uno en otro, es decir hay una trasnformación antural de F_l a F_{l+1} o una entre F_{l+1} y F_l.*

2.1.1. Ejemplos

Veamos ahora unos ejemplos de homotopías:

Ejemplo 2.7. Por lo visto en el Ejemplo 1.50, dados dos posets P y Q con dos funtores $F, G : P \to Q$ entre ellos, una homotopía entre ambos funtores no es más que una sucesión de funtores $\{F_0, ..., F_n\}$ tales que:

- $F_0 = F$.
- $F_n = G$.
- Para todo objeto X de P se tiene que :

$$F_0(X) \geq F_1(X) \leq F_2(X) \geq F_3(X) ... \leq (\geq) F_n(X)$$

Ejemplo 2.8. Sea $\mathfrak{C}$ la categoría generada por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} .$$

Existe una homotopía entre $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ y Y el funtor constante asociado a dicho objeto. Basta tomar la siguiente transformación natural α tal que $\alpha(X) = f$ y $\alpha(Y) = \mathrm{id}_Y$, ya que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha(X)=f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}(f)=f"'] & Y(X) = Y \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"] \\ Y \arrow[r, "\mathrm{id}_Y"] & Y(Y) = X \end{tikzcd}$$

En general dada una categoría de la forma:

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & ... \arrow[r] & X_n \end{tikzcd} .$$

Los endofuntores id_F y X_n son homótopos repitiendo la transformación natural anterior.

Ejemplo 2.9. Sea $\mathfrak{C}$ la categoría generada por:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

en donde g y f son isomorfismos, es decir son tales que verifican que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ y $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Existe una homotopía entre $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ e Y dada por la transformación natural construida a partir de los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"] \\ Y \arrow[r, "\mathrm{id}_Y"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\mathrm{id}_Y"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

El de la izquierda es trivialmente conmutativo y el de la derecha es conmutativo ya que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. De manera análoga se construyen una homotopía entre $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ y X.

2.1.2. Equivalencia de homotopía

Como es conocido en el caso de los espacios topológicos, a pesar de que la noción de homotopía se define entre aplicaciones continuas e induce sobre estas una relación de equivalencia se puede construir una relación de equivalencia, entre espacios topológicos. Para ello se define la noción de equivalencia «tener el mismo tipo de homotopía». En el caso de las categorías pequeñas veremos que funciona de igual forma.

Definición 2.10 (Equivalencia homotópica). Dado un funtor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ diremos que es una equivalencia homotópica si existe otro funtor $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ tal que se cumple que:

- $G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$.
- $F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{D}}$.

Observación 2.11. Se dice que un funtor $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ es un inverso homotópico por la izquierda de un funtor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ si G verifica la primera de las condiciones anteriores. En caso de que G verifique la segunda condición se dice que que es un inverso homotópico por la derecha de F. En caso de satisfacer ambas se dice que G es una inverso homotópico de F. Trivialmente, se tiene que un funtor es una equivalencia homotópica si y solo si tiene un inverso homotópico.

Definición 2.12 (Categorías con el mismo tipo de homotopía). Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías pequeñas, diremos que tienen el mismo tipo de homotopía y denotaremos por $\mathfrak{C} \simeq \mathfrak{D}$ si existe una equivalencia homotópica entre ellas.

Ejemplo 2.13. Un caso particular de esta noción son las categorías equivalentes que definimos en la Definición 1.51.

Ejemplo 2.14. Sea $\mathfrak{C}$ la categoría generada por el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & & V \end{array}$$

Se puede comprobar fácilmente, repitiendo dos veces lo visto en el Ejemplo 2.8, que tiene el mismo tipo de homotopía que:

$$X \qquad U$$

Para probar que la relación entre categorías pequeñas «tener el mismo tipo de homotopía» es una relación de equivalencia necesitamos probar este resultado.

Proposición 2.15 (Composición y homotopía). *Sean $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{B}$ tres categorías pequeñas tales que existen funtores $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y $M : \mathfrak{D} \to \mathfrak{B}$ tales que $F \simeq G$. Entonces se satisface también que $M \circ F \simeq M \circ G$.*

Alternativamente, sean $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{B}$ tres categorías pequeñas tales que existen funtores $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y $M : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ que cumplen que $F \simeq G$. Entonces se satisface también que $F \circ M \simeq G \circ M$.

Demostración. Sea H la homotopía entre F y G y sea $[n, m]$ su soporte. Por tanto tenemos que $H_m = F$ y $H_n = G$. Ahora necesitamos construir una homotopía entre $M \circ F$ y $M \circ G$, como solo disponemos de la homotopía H debemos hacer uso de ella de la forma más natural. En el primer caso como el codominio de $M \circ F$ y $M \circ G$ es $\mathfrak{B}$ la homotopía que buscamos será un funtor $K : \mathfrak{C} \times \mathbb{I} \to \mathfrak{B}$ que podemos construir de la siguiente forma:

- $K(X, i) = M(H(X, i))$.
- $K(f, g) = M(H(f, g))$.

Que es funtorial por ser H y K funtoriales y además en sus extremos se cumple que $K_m = M \circ H_m = M \circ F$ y $K_n = M \circ H_n = M \circ G$. En el segundo caso buscamos un funtor $K : \mathfrak{B} \times \mathbb{I} \to \mathfrak{D}$ que podemos construir de la siguiente forma:

- $K(X, i) = H(M(X), i)$.
- $K(f, g) = H(M(f), g)$.

Por tanto se tiene que $M \circ F \simeq M \circ G$ y $F \circ M \simeq G \circ M$. □

Con este resultado podemos ya demostrar lo que queríamos:

Proposición 2.16. *La relación entre categorías pequeñas «tener el mismo tipo de homotopía» es de equivalencia*

Demostración.

- Reflexiva. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña se cumple que $\mathfrak{C} \simeq \mathfrak{C}$ ya que podemos tomar los funtores $F = \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} = G$.
- Simétrica. Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías pequeñas se cumple que $\mathfrak{C} \simeq \mathfrak{D} \implies \mathfrak{D} \simeq \mathfrak{C}$. En efecto, puesto que si existe F equivalencia de homotopía entre $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ existe G tal que $G \circ D \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ y $F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{D}}$. Por tanto G es una equivalencia homotópica entre $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D} \simeq \mathfrak{C}$.
- Transitiva. Sean $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{B}$ tres categorías pequeñas tales que $\mathfrak{C} \simeq \mathfrak{D}$ y $\mathfrak{D} \simeq \mathfrak{B}$ veamos que $\mathfrak{C} \simeq \mathfrak{B}$. En efecto, por la primera relación existen $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ cumpliendo que $G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ y $F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{D}}$; y por la segunda condición existen $M : \mathfrak{D} \to \mathfrak{B}$ y $N : \mathfrak{D} \to \mathfrak{B}$ tales que $N \circ M \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{D}}$ y $M \circ N \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{B}}$.

  Tomamos como candidato a equivalencia homotópica entre $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{B}$ al funtor $M \circ F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$ junto con el funtor $G \circ N : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$. Si componemos en una dirección tenemos

  $$(G \circ N) \circ (M \circ F) = G \circ (N \circ M) \circ F \simeq G \circ \mathrm{id}_{\mathfrak{D}} \circ F = G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{C}}.$$

Al revés

$$(M \circ F) \circ (G \circ N) = M \circ (F \circ G) \circ N \simeq M \circ \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} \circ M = M \circ N \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{B}}.$$

□

Para terminar esta sección demostraremos una propiedad de la homotopía que nos servirá más adelante.

Proposición 2.17 (**Homotopía y productos**). *Sean $\mathfrak{C}_1$,$\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$ categorías pequeñas, $F_1, G_1 : \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{D}_1$ y $F_2, G_2 : \mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{D}_2$ funtores entre ellas tales que $F_1 \simeq G_1$ y $F_2 \simeq G_2$ entonces se tiene que $F_1 \times F_2 \simeq G_1 \times G_2$.*

Demostración. Sea $H : \mathfrak{C}_1 \times \mathbb{I} \to \mathfrak{D}_1$ la homotopía entre F_1 y G_1 y $H' : \mathfrak{C}_2 \times \mathbb{I} \to \mathfrak{D}_2$ la homotopía entre F_2 y G_2. Podemos construir una homotopía entre $F_1 \times F_2$ y $G_1 \times G_2$ utilizando el funtor $K : (\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) \times \mathbb{I} \to \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2$ definido de la siguiente forma $K(X, Y, i) = (H(X, i), H'(Y, i))$. □

2.2. Caminos y conexidad

El intervalo $[0, 1]$ usado en espacios topológicos tiene interés no solo por su papel en la homotopía, sino porque permite definir la noción de camino que resulta incluso más básica que la de homotopía, pudiendo verse esta como un caso particular como veremos en la última sección de este capítulo. Además dicha noción permite construir la idea de conexidad por caminos y de componentes conexas por caminos.

2.2.1. Conexidad

Recordemos que en los espacios topológicos se entiende que un camino en X es una aplicación continua $\alpha : [0, 1] \to X$. A partir de esta definición se construye la noción de camino en categorías pequeñas al igual que obtuvimos la noción de homotopía: substituyendo los términos adecuadamente.

Definición 2.18 (**Camino**). Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña. Un camino es un funtor $F : \mathbb{I} \to \mathfrak{C}$ tal que existen números $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m \leq n$ y además:

- F es constante antes de m, es decir para todo $l \in \mathbb{Z}$ tal que $l \leq m$ se tiene que $F(l) = F(m)$ y para todo morfismo f en que aparezca l se tiene que $F(f) = \mathrm{id}_{F(l)}$.
- F es constante después de n, es decir para todo $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \geq n$ se tiene que $F(k) = F(n)$ y para todo morfismo f en que aparezca k se tiene que $F(f) = \mathrm{id}_{F(n)}$.

Llamaremos objeto de salida, número inicial, objeto de llegada y número final a $F(m)$, m, $F(n)$ y n respectivamente y al par $[m, n]$ el soporte del camino. Diremos, también, que el número $n - m$ es la longitud del camino. Además dados $F(m) = X$ e $F(n) = Y$ diremos que F es un camino de X a Y.

En las categorías hay casos particulares de caminos que no definiremos de forma explícita por una cuestión de espacio. Algunos ejemplos son los caminos constantes o el producto, la inversión de caminos o el transporte de un camino por un funtor.

Como sabemos a partir de los caminos de una categoría podemos hablar de cuándo una categoría es conexa por caminos. En el caso de las categorías pequeñas la idea de conexidad se define a partir de los caminos al igual que se define la conexidad por caminos en espacios topológicos.

Definición 2.19 (Categoría conexa). Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña. Diremos que es conexa cuando dados dos objetos cualesquiera X e Y de $\mathfrak{C}$ existe un camino tal que su objeto de salida es X y su objeto de llegada es Y.

Proposición 2.20 (Caracterización de las categorías conexas). *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña. Son equivalentes las siguientes proposiciones:*

- *$\mathfrak{C}$ es conexa.*
- *Para cualesquiera objetos X e Y existe una sucesión finita de morfismos en zig zag tales que:*

  $$X = c_0 \to c_1 \leftarrow c_2 \to \ldots \to (\leftarrow) c_k = Y$$

  o

  $$X = c_0 \leftarrow c_1 \to c_2 \leftarrow \ldots \leftarrow (\to) c_k = Y$$

Demostración.

- « $\Longrightarrow$ »

  Sea $[m, n]$ el soporte de un camino F y $k = n - m$ su longitud. Basta con tomar objetos de la forma $F(m) = c_0$, $F(-m+l) = c_l$ si $0 < l < n+m$ y $F(n) = c_{m-n} = c_k$ y por morfismos entre ellos $F(s_l)$ con $m \leq l \leq n$.

- « $\Longleftarrow$ »

  Basta con definir el camino F que lleva $F(l) = c_l$ si $0 \leq l \leq k$ y los morfismos s_l en $F(s_l) = f_l$ donde f_l es el morfismo que hay entre l y $l+1$ si $0 \leq l < k$, siendo F un funtor constante antes de 0 y después de k.

□

Ejemplo 2.21. Sea $\mathfrak{C}$ la categoría representada por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \arrow[dl] \\ U & V \end{tikzcd}$$

Es conexa.

Ejemplo 2.22. Sea $\mathfrak{C}$ la categoría representada por el siguiente diagrama:

$$X \qquad Y$$

No es conexa ya que los únicos caminos son los caminos constantes, por lo que no podemos «conectar» los objetos X e Y.

Un importante resultado que anticipa la idea ya mencionada de que la homotopía es un caso particular de los caminos es la siguiente caracterización de las categorías conexas usando funtores constantes.

Proposición 2.23 (**Caracterización categorías conexas a partir de funtores constantes**). *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *$\mathfrak{C}$ es conexa.*

2. *Dados dos funtores constantes $X, Y : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ existe una homotopía entre ellos.*

Demostración. Antes de demostrar las equivalencias conviene remarcar el hecho de que un funtor constante $X : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ está en correspondencia natural con un objeto de $\mathfrak{C}$, a saber el objeto al que X manda todos los objetos de $\mathfrak{C}$. Por comodidad y permitiéndonos el abuso de notación usaremos X indistintamente para denotar un objeto como un funtor constante.

Además dada una transformación natural entre los funtores X, Y podemos construir un morfismo $f : X \to Y$ y dado un morfismo $f : X \to Y$ podemos construir una trasnformación natural. En efecto, si tenemos tal morfismo podemos definir la transformación natural que actúa sobre cada par objetos U y V y un morfismo $g : U \to V$ de $\mathfrak{C}$ de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} X(U) = X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "X(g)=\mathrm{id}_X"] & Y(U) = Y \arrow[d, "Y(g)=\mathrm{id}_Y"] \\ X(V) = X \arrow[r, "f"] & Y(V) = Y \end{tikzcd}$$

Y al revés, si tenemos una transformación natural α podemos construir un morfismo $f : X \to Y$ ya que dado cualquier Z de $\mathfrak{C}$ existe $\alpha_Z : X(Z) = X \to Y(Z) = Y$.

- « $\Longrightarrow$ »

  Como $\mathfrak{C}$ es conexa dados dos objetos X e Y existe una sucesión finita de morfismos en zig zag tales que:

  $$X = c_0 \to c_1 \leftarrow c_2 \to ... \to (\leftarrow)c_k = Y$$

  Por tanto tenemos una sucesión de transformaciones naturales en zig zag del funtor X en el funtor Y, es decir una homotopía.

- « $\Longleftarrow$ »

  Sean X e Y objetos de $\mathfrak{C}$ existe una homotopía entre los funtores X e Y, por tanto existe una sucesión en zig zag de transformaciones naturales de X en Y, pero por lo dicho antes esto define una sucesión en zig zag de morfismos de X en Y. □

2.2.2. Componentes conexas

Al introducir la noción de conexidad y trabajar con ella aparecen dos intereses. El primero es el de poder reducir el estudio de una categoría no conexa a categorías que sí lo son al «fragmentarla». El segundo es el de dar una suerte de medida de cómo de «poco conexa» es una categoría. Para satsifacer ambos introducimos la noción de componentes conexas que aparece en [6] y que definimos a continuación.

Definición 2.24 (**Componente conexa**). Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña. Diremos que una subcategoría $\mathfrak{U}$ es una componente conexa de $\mathfrak{C}$ si cumple que:

1. $\mathfrak{U}$ es conexa.
2. Es maximal, es decir no existe ninguna otra subcategoría conexa $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{C}$ tal que $\mathfrak{U}$ sea una subcategoría propia de $\mathfrak{V}$.

Presentada la definición debemos comprobar ahora que podemos «fragmentar» las categorías en sus componentes conexas. Para ello veremos que hay algo análogo a una partición de una categoría inducida a través de una relación de equivalencia entre sus objetos.

Lema 2.25. *Dada una categoría pequeña $\mathfrak{C}$. La relación entre sus objetos «existe un camino entre ellos» es de equivalencia.*

Demostración. 1. Reflexiva. Dado un objeto X existe el camino constante X.

2. Simétrica. Dado un camino entre objetos X e Y existe un camino inverso entre Y y X.

3. Transitiva. Dado un camino entre X e Y y un camino entre Y y Z existe el camino entre X y Z obtenido al concatenarlos.

$\square$

Proposición 2.26 (**Descomposición en componentes conexas**). *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña y $\{\mathfrak{U}_i\}_{i\in I}$ la colección de sus componentes conexas, entonces dicha colección es disjunta y además $\mathfrak{C} = \sqcup_{i\in I}\mathfrak{U}_{\mathfrak{i}}$.*

Demostración. Sea X un objeto de $\mathfrak{C}$ basta con tomar la componente conexa $[X]$ definida como la subcategoría formada por todos los objetos relacionados con X y con todos los morfismos entre sus objetos.

Para comprobar que $[X]$ es una componente conexa es suficiente con comprobar que es maximal ya que es conexa por construcción. Sea $\mathfrak{U}$ una subcategoría conexa de $\mathfrak{C}$ que contenga a $[X]$. Para todo objeto Y de $\mathfrak{U}$, al ser esta conexa, existirá un camino entre X e Y, es decir Y será un objeto de $[X]$. Además como $[X]$ contiene todos los morfismos entre sus objetos no puede haber un morfismo en $\mathfrak{U}$ que no esté en $[X]$ y en consecuencia $[X] = \mathfrak{U}$, es decir $[X]$ es maximal y una componente conexa.

Además podemos comprobar que dada una componente conexa $\mathfrak{U}$ existe un objeto X tal que $[X] = \mathfrak{U}$. En efecto, puesto que dado un X de $\mathfrak{U}$ (que es trivialmente no vacía) se tiene que $[X]$ es una componente conexa y que además todos sus objetos están en $\mathfrak{U}$ por ser esta una componente conexa, pero como $[X]$ es maximal se tiene que $[X] = \mathfrak{U}$.

Ahora tenemos que ver que la colección es disjunta. Ahora bien, esto se deduce del hecho de que la construcción de las componentes conexas se realiza a partir de una relación de equivalencia. En efecto, supongamos que existen $[X]$ e $[Y]$ dos categorías conexas maximales y Z un objeto que está en $[X]$ e $[Y]$, por definición se tiene que $[X] = [Z] = [Y]$. $\square$

Para poder apreciar la potencia de esta definición debemos probar la siguiente proposición que viene a generalizar la idea topológica de que la conexidad es un invariante por aplicaciones continuas.

Proposición 2.27 (**Invariancia de la conexidad**). *Sean $\mathfrak{C}$ una categoría conexa, $\mathfrak{D}$ una categoría pequeña y $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ un funtor entre ellas, entonces la categoría imagen $F(\mathfrak{C})$ es conexa.*

Demostración. Sean U y V objetos de $F(\mathfrak{C})$, por definición de categoría imagen existen X e Y en $\mathfrak{C}$ tales que $F(X) = U$ y $F(Y) = V$. Como $\mathfrak{C}$ es conexa existe un camino entre X e Y, si componemos dicho camino con F obtenemos un camino en D con objeto de salida $U = F(X)$ y objeto de llegada $V = F(Y)$. Por tanto $F(\mathfrak{C})$ es conexa. $\square$

2.3. Contráctil

Como vimos en la primera sección de este capítulo la noción de homotopía induce tanto una relación de equivalencia entre funtores como entre categorías pequeñas. En particular hay una clase de categorías salientable, la clase de las categorías que tienen el mismo tipo de homotopía que la categoría trivial $\{\bullet\}$ a las que se conoce con el nombre de contráctiles. Estas categorías resultan de gran ayuda a la hora de analizar diversas propiedades debido a la simplicidad de la categoría trivial a la que, en cierto modo, se «parecen» las categorás contráctiles. Un ejemplo de esto es la categoría LS que veremos más adelante.

Definición 2.28 (Contráctil). Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña diremos que es contráctil si tiene el mismo tipo de homotopía que la categoría trivial $\{\bullet\}$.

Proposición 2.29. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña, son equivalentes las siguientes proposiciones:*

1. *Existe una homotopía entre el funtor $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ y un funtor constante $X : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$.*

2. *$\mathfrak{C}$ es contráctil*

Demostración.

- « $\Longrightarrow$ »

  Basta tomar el funtor constante $F : \mathfrak{C} \to \{\bullet\}$ y $G : \{\bullet\} \to \mathfrak{C}$ que lleva $\bullet$ en X. En efecto, puesto que $G \circ F = X \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ y $F \circ G = \mathrm{id}_{\{\bullet\}}$, es decir son una equivalencia de homotopía.

- « $\Longleftarrow$ »

  Por ser $\mathfrak{C}$ contráctil es del mismo tipo de homotopía que $\{\bullet\}$. Por tanto, existen $F : \mathfrak{C} \to \{\bullet\}$ y $G : \{\bullet\} \to \mathfrak{C}$ tales que $G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ y $F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\{\bullet\}}$. Ahora basta tomar el funtor constante $G \circ F$ homótopo a la identidad de $\mathfrak{C}$.

□

Proposición 2.30. *Toda categoría $\mathfrak{C}$ contráctil es conexa.*

Demostración. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría contráctil y $X : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ el funtor constante que envía todo objeto en X, con el que hay una homotopía al funtor identidad. Denotemos como H a dicha homotopía y sean m y n sus valores extremos.

Sea Y un objeto cualquiera, veamos que existe un camino de Y a X. En efecto, como existe una homotopía entre $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ y X es fácil construir una sucesión de morfismos en zig zag entre Y y X. Basta tomar el camino $F : \mathbb{I} \to \mathfrak{C}$ tal que $F(i) = H(Y, i)$ y $F(s_i) = H(\mathrm{id}_Y, s_i)$

con $m \leq i \leq n$. En efecto, puesto que $H(Y, m) = \mathrm{id}_{\mathfrak{C}}(Y) = Y$ y $H(Y, n) = X(Y) = X$. Es decir tenemos el camino de Y a X dado por:

$$Y = H(Y, m) \to (\leftarrow) H(Y, m+1) \cdots H(Y, -1) \leftarrow H(Y, 0) \to H(Y, 1) \cdots (\to) \leftarrow H(Y, n) = X$$

Por tanto todo objeto Y de $\mathfrak{C}$ está en $[X]$ (la componente conexa de X) y en consecuencia se tiene que $\mathfrak{C} = [X]$. □

2.3.1. Ejemplos

Una condición suficiente muy rápida para saber si una categoría es contráctil es la de si presenta un objeto inicial o terminal.

Proposición 2.31. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña con un objeto inicial o final, entonces es contráctil.*

Demostración. Supongamos que tiene un objeto final T entonces tomamos la transformación natural entre $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ y el funtor constante T que lleva cada objeto X en T mediante el único morfismo que hay entre ellos y que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha(X)"] \arrow[d, "f"] & T \arrow[d, "\mathrm{id}_T"] \\ Y \arrow[r, "\alpha(Y)"] & T \end{tikzcd}$$

Como solo hay un morfismo $X \to T$ el diagrama conmuta. De forma análoga se demuestra cuando hay un objeto inicial. □

Ejemplo 2.32. Todas las categorías con objeto inicial o terminal por la proposición anterior.

El recíproco de este resultado no es cierto puesto que existen numerosos ejemplos que lo contradicen, en particular podemos tomar el siguiente.

Ejemplo 2.33. Sea $\mathfrak{C}$ la categoría generada por el siguiente diagrama:

$$... \longrightarrow -2 \xrightarrow{s_{-2}} -1 \xrightarrow{s_{-1}} 0 \xrightarrow{s_0} 1 \xrightarrow{s_1} 2 \longrightarrow ...$$

Es decir, la categoría con objetos los números enteros $\mathbb{Z}$ y morfismos obtenidos de componer $s_i : i \to i+1$. Esta categoría no tiene objeto inicial ni terminal, pero es contráctil. En efecto, basta tomar los funtores $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}, Fy0$ donde $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ es el funtor definido por:

$$F(i) = \begin{cases} 0 & si \quad I \leq 0 \\ \\ i & si \quad 0 \leq i \end{cases}$$

y 0 es el funtor constante 0. Ahora basta tomar la transformación natural entre $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ y F dada por:

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "s_{-1}\circ\cdots\circ s_{i+1}\circ s_i"] \arrow[d, "s_i"] & 0 \arrow[d, "\mathrm{id}_0"] \\ i+1 \arrow[r, "s_{-1}\circ\cdots\circ s_{i+1}"] & 0 \end{tikzcd}$$

si $i \leq 0$. Y ahora la transformación natural entre 0 y F dada por:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "s_{i-1}\circ\cdots\circ s_2\circ s_1"] \arrow[d, "\mathrm{id}_0"] & i \arrow[d, "s_i"] \\ 0 \arrow[r, "s_i\circ s_{i-1}\circ\cdots\circ s_2\circ s_1"] & i+1 \end{tikzcd}$$

Al igual que en topología la idea aquí es que una categoría no es contráctil cuando presenta «agujeros». Veamos que en efecto es así con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.34. Sea $\mathfrak{C}$ la categoría generada por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{C}$ no es contráctil. Para ver esto primero comprobemos que $\mathfrak{C}$ solo admite cuatro endofuntores, el funtor $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$, el funtor constante X, el funtor constante Y y el funtor F que actúa como la identidad para los objetos y satisface que $F(f) = g$ y $F(g) = f$. Para ver que no es contráctil basta ver que no hay ninguna transformación natural de $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ o el funtor F en el funtor constante X. Recordemos que como C es conexa todos los funtores constantes son homótopos y por tanto basta ver que no es homótopo a uno de ellos.

Si queremos una transformación natural entre $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ y X tenemos que dar un morfismo entre X e Y, ya que de X en sí mismo solo hay el morfismo identidad, igual que de Y en sí mismo. Como solo tenemos dos morfismos solo puede haber dos candidatos a transformación natural, la que viene por utilizar el morfismo f y la que viene determinada por emplear el morfismo g. Veamos que ninguna funciona.

Así es, suponemos primero que utilizamos f, en tal caso tenemos un diagrama que no conmuta:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] \\ X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] & X \end{tikzcd}$$

Alternativamente, si suponemos que empleamos g para definir una transformación natural nos encontramos con el siguiente diagrama no conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] \\ X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] & X \end{tikzcd}$$

Este ejemplo prueba, además, que hay categorías conexas que no son contráctiles.

2.3.2. Propiedades

Una de las principales utilidades de las categorías contráctiles es que presentan la siguiente propiedad con respecto a los funtores que «terminan» y «empiezan» en ellas.

Proposición 2.35. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías pequeñas siendo $\mathfrak{D}$ contráctil y sean $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ dos funtores entre ellas. Se tiene que $F \simeq G$.*

Demostración. Como $\mathfrak{D}$ es una categoría contráctil se tiene que $\mathrm{id}_{\mathfrak{D}} \simeq \bullet$ donde $\bullet$ representa un funtor constante. Teniendo en cuenta lo anterior se tiene que

$$F = \mathrm{id}_{\mathfrak{D}} \circ F \simeq \bullet \circ F$$

y

$$G = \mathrm{id}_{\mathfrak{D}} \circ G \simeq \bullet \circ G.$$

Como $\bullet \circ F = \bullet$ y $\bullet \circ G = \bullet$ son el mismo funtor constantes en particular son homótopos y en consecuencia también lo son F y G. □

Proposición 2.36. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías pequeñas siendo $\mathfrak{C}$ contráctil y $\mathfrak{D}$ conexa, entonces dados $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ dos funtores entre ellas se tiene que $F \simeq G$.*

Demostración. Como $\mathfrak{C}$ es una categoría contráctil se tiene que $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}} \simeq \bullet$ donde $\bullet$ representa un funtor constante. Teniendo en cuenta lo anterior se tiene que

$$F = F \circ \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} \simeq F \circ \bullet$$

y

$$G = g \circ \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} \simeq G \circ \bullet.$$

Como $F \circ \bullet$ y $G \circ \bullet$ son funtores constantes en $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{D}$ es conexa se tiene que existe una transformación natural entre ellos, por tanto son homótopos como queríamos demostrar. □

La condición de que $\mathfrak{D}$ sea conexa es necesaria, puesto que en caso contrario existen contraejemplos.

Ejemplo 2.37. Sea $\mathfrak{C}$ la categoría generada por el siguiente diagrama:

$$X \xrightarrow{f} Y$$

y la categoría $\mathfrak{D}$ generada por el diagrama:

$$A \qquad B$$

Es evidente que la categoría $\mathfrak{C}$ es contráctil y que $\mathfrak{D}$ no es conexa y además es inmediato que los funtores constantes A y B no son homótopos pues no hay ningún camino entre los objetos A y B.

2.4. Homotopía en Posets finitos

En esta sección estudiaremos las homotopías de un tipo de categorías muy particular: los posets finitos. Para ello usaremos ideas topológicas desarrolladas en [1].

Empecemos con la siguiente definición.

Definición 2.38. Sea P un poset y X un elemento de P definimos las subcategorías:

- $U_X = \{Z \in P|\ Z \leq X\}$ con el orden inducido.
- $F_X = \{Z \in P|\ X \leq Z\}$ con el orden inducido.

Observación 2.39. Además de subcategorías, U_X y F_X son posets con el orden inducido por los morfismos.

Proposición 2.40. *Sea P un poset y X un elemento de él, se tiene que U_X y F_X son contráctiles.*

Demostración. Basta emplear la Proposición 2.31 junto con el hecho de que U_X y F_X tienen a X como objeto inicial y final respectivamente. □

Definición 2.41 (Beat-point). Sea P un poset, un elemento X se dice que es un «beat-point» si satisface alguna de estas dos condiciones:

- El conjunto de puntos $\widehat{U_X} = \{Z \in P|\ Z \leq X \text{ y } Z \neq X\}$ tiene un único máximo. En este caso se dirá que es un beat-point superior.
- El conjunto de puntos $\widehat{F_X} = \{Z \in P|\ X \leq Z \text{ y } Z \neq X\}$ tiene un único mínimo. En este caso se dirá que es un beat-point inferior.

Definición 2.42 (Poset minimal). Diremos que un poset finito P es minimal si no presenta ningún beat-point.

Proposición 2.43. *Sea P un poset finito, X un beat-point de P y Q el poset obtenido eliminando de P el objeto X, entonces existe una equivalencia de homotopía entre P y Q.*

Demostración. Para definir una equivalencia de homotopía utilizamos el funtor inclusión $i : Q \to P$ y el un funtor $F : P \to Q$ definido como:

- Si X es un beat punto superior definimos $F : P \to Q$ como $F(Z) = Z$ para todo $Z \neq X$ y $F(X) = \bar{X}$ el máximo de $\widehat{U_X}$, que es un funtor puesto que preserva el orden.
- Si X es un beat punto inferior definimos $F : P \to Q$ como $F(Z) = Z$ para todo $Z \neq X$ y $F(X) = \bar{X}$ el mínimo de $\widehat{F_X}$, que es un funtor puesto que preserva el orden.

Para ver que hay una equivalencia de homotopía tenemos que ver que exista una homotopía entre $(F \circ i)$ e id_Q y una homotopía entre $(i \circ F)$ e id_P. La primera de ellas es trivial puesto que $F \circ i = \mathrm{id}_Q$. Para encontrar la segunda usaremos el resultado del Ejemplo 1.50 que nos dice que para encontrar una transformación natural entre dos funtores F y G basta con que $F(Z) \leq G(Z)$ para todo objeto Z de su dominio.

En nuestro caso es fácil comprobar que es así. En efecto, por un lado como $(i \circ F)(Z) = Z$ si $Z \neq X$ se tiene que $(i \circ F)(Z) \leq Z$ y $Z \leq (i \circ F)(Z)$. Por otro lado, como $(i \circ F)(X) = \bar{X}$ y se cumple que $\bar{X} \leq X$ si X es un beat punto superior y $X \leq \bar{X}$ si X es un beat punto inferior, tenemos una transformación natural entre $i \circ F$ e id_P si X es un beat punto superior y una transformación natural, por tanto una homotopía, entre id_P e $i \circ F$. $\square$

Definición 2.44 (**Núcleo de un Poset**)**.** Sean P y P_0 dos posets finitos, diremos que P_0 es un núcleo de P si y solo si $P \simeq P_0$ y además P_0 es minimal.

Dado un poset la forma más natural de calcular su núcleo es ir quitando sucesivamente beat-points hasta obtener un poset minimal. Además, no debemos preocuparnos de que al elegir distintos beat-points en distinto orden podamos llegar a núcleos distintos, pues como veremos a continuación el núcleo va a ser único salvo homeomorfismo, noción que definiremos inmediatamente.

Definición 2.45. Dados P y Q dos posets, diremos que un funtor $F : P \to Q$ es un homeomorfismo entre ellos si y solo si existe un funtor entre posets $F^{-1} : Q \to P$ tal que $F^{-1} \circ F = \mathrm{id}_P$ y $F \circ F^{-1} = \mathrm{id}_Q$.

Si hay un homeomorfismo entre dos posets diremos que son homeomorfos.

Ahora para ver la unicidad del núcleo necesitamos una proposición auxiliar de la cual podremos deducir como corolario el resultado buscado.

Proposición 2.46. *Sea P un poset minimal finito y $F : P \to P$ un endofuntor de P tal que $F \simeq \mathrm{id}_P$, entonces $F = \mathrm{id}_P$.*

Demostración. Razonaremos usando el contrarrecíproco. Suponemos por tanto que existe un objeto X tal que $F(X) \neq X$. Si $F(X) \leq X$ entonces tenemos una contradicción puesto que para todo $Y \leq X$ se cumple que $F(Y) \leq F(X)$ por lo que X sería un beat-point superior. Al contrario, si $X \leq F(X)$ tenemos que para todo objeto $X \leq Y$ se cumple que $F(X) \leq F(Y)$ por lo que X sería un punto beat inferior.

Finalmente, si X y $F(X)$ fueran incomparables podemos reducirnos a los casos anteriores ya que existe en virtud del Corolario 2.7 una sucesión de endofuntores $\{F, F_1, ..., F_n = \mathrm{id}_P\}$ tales que:

$$F(X) \leq F_1(X) \geq F_2(X) ... \leq (\geq) X$$

y satisfaciendo que para algún $1 \leq i \leq n-1$ se tiene que $X \neq F_i(X)$ ya que en caso contrario tendríamos la situación anterior en la que $F(X) \leq X$ o $F(X) \geq X$. Ahora podemos repetir el argumento anterior con F_i y el funtor id_P y por inducción ha de parar en algún momento. □

Corolario 2.47. *Sean P y Q son dos posets finitos minimales tales que P y Q tienen el mismo tipo de homotopía, entonces existe un homeomorfismo entre ellos.*

Demostración. Como son homotópicamente equivalentes existirán funtores $F : P \to Q$ y $G : Q \to P$ tales que $G \circ F \simeq \mathrm{id}_P$ y $F \circ G \simeq \mathrm{id}_Q$, en virtud del teorema anterior $G \circ F = \mathrm{id}_P$ y $F \circ G = \mathrm{id}_Q$. □

Corolario 2.48. *Sea P un poset finito P_0 y P_0' dos núcleos, entonces son homeomorfos.*

Demostración. Como $P \simeq P_0$ y $P \simeq P_0'$ tenemos que $P_0 \simeq P_0'$ y como ambos son posets finitos minimales sabemos que existe un homeomorfismo entre ellos. □

Ahora como corolario de todo lo anterior tenemos la siguiente proposición que nos permite clasificar cualquier poset finito.

Proposición 2.49 (Clasificación de posets finitos). *Sean P y Q dos posets finitos. Son equivalentes:*

- *P y Q tienen el mismo tipo de homotopía.*
- *P y Q tienen el mismo núcleo salvo homeomorfismo.*

Demostración.

- « $\Longrightarrow$ » Sean P_0 y Q_0 el núcleo de P y Q respectivamente. Por ser núcleos tenemos que $P \simeq P$ y $P_0 \simeq Q_0$, como $P \simeq Q$ tenemos que $P_0 \simeq Q_0$ y como ambos son minimales son homeomorfos.

- « $\Longleftarrow$ » Como $P_0 \simeq P$ y $Q_0 \simeq Q$ tenemos que $P \simeq Q$.

$\square$

Para ejemplificar estas nociones veremos ahora el cálculo de un núcleo.

Ejemplo 2.50. Supongamos que tenemos el poset P generado por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
B \arrow[d] \arrow[dr] & C \arrow[dl] \arrow[dr] & D \arrow[dl] \arrow[d] \\
E & F & G
\end{tikzcd}$$

Su núcleo se puede obtener por el proceso de eliminar de forma sucesiva los «beat-points» hasta obtener un poset mínimo. Primero eliminamos el objeto B puesto que $\widehat{F_B} = \{A\}$. Despues eliminamos C por la misma razón. Finalmente eliminamos F de nuevo porque solo tiene por elemento superior a A.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d] \arrow[dr] & & & & A \arrow[dr] \arrow[ddr] & & & & A \arrow[dd] \arrow[ddr] \arrow[ddrr] & & \\
B \arrow[d] \arrow[dr] & C \arrow[dl] \arrow[dr] & D \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[r, dotted] & {} & & C \arrow[dl] \arrow[dr] & D \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[r, dotted] & {} & & & D \arrow[dl] \arrow[d] \\
E & F & G & & E & F & G & & E & F & G
\end{tikzcd}$$

Para obtener finalmente

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d] \arrow[dr] & D \arrow[dl] \arrow[d] \\
F & G
\end{tikzcd}$$

Además una consecuencia importante de dicho teorema de clasificación es que si tenemos un Poset con más de dos elementos y tal que no tiene beat-points entonces no es contráctil. Un ejemplo de esto es el siguiente.

Ejemplo 2.51. Sea $\mathfrak{C}$ la categoría generada por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d] \arrow[dr] & Y \arrow[dl] \arrow[d] \\
U & V
\end{tikzcd}$$

No es contráctil puesto que no tiene beat-points. Esta categoría además tiene importancia ya que por resultados estudiados en [1] es un «modelo finito mínimo» de la circunferencia usando posets.

Capítulo 3

Distancia homotópica entre funtores

Durante el siguiente capítulo definiremos la noción de distancia homotópica entre funtores, cuya primera aparición surge del artículo [8] escrito por E. Macías y D. Mosquera como una extensión al ámbito de las categorías pequeñas de la distancia homototópica entre aplicaciones continuas también descubierta por los mismos autores y explicada en [7]. Después procederemos a analizar dos casos particulares de dicha distancia: la categoría LS (estudiada por Tanaka en [11]) y la complejidad categórica, que a su vez se han obtenido a partir de generalizar los conceptos topológicos de categoría LS y complejidad topológica. Concluido lo anterior veremos algunas propiedades de la distancia que hemos definido para así analizar cómo se comporta en relación con nociones habituales relacionadas con funtores y categorías como es la composición de funtores, el producto y el coproducto de categorías, el dominio y el codominio de los funtores involucrados y su invariancia por la relación «tener el mismo tipo de homotopía». Finalmente estudiaremos la distancia homotópica entre funtores en el contexto de los Posets y lo compararemos con la distancia homotópica entre aplicaciones continuas al dotar a los posets de una topología adecuada.

3.1. Definición de distancia homótopica entre funtores

La distancia homotópica entre funtores busca, como su propio nombre indica, dar una medida de cuánto distan dos funtores de ser homótopos. Para definir esto necesitamos hablar de una clase particular de recubrimiento por subcategorías de una categoría pequeña y para ello necesitamos introducir a su vez la categoría cadena y con esta noción definir qué es una cadena en una categoría pequeña.

Definición 3.1 (**Categoría cadena**). Denotamos por $\mathcal{I}$ a la categoría con objetos los números enteros $\mathbb{Z}$ y con morfismos generados por $s_n : n \to n+1$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, es decir sus morfismos no triviales, distintos a las identidades id_n, son o bien s_n o bien composición de estos. En términos «gráficos» podemos visualizar dicha categoría como la generada por el siguiente diagrama:

$$... \to -2 \to -1 \to 0 \to 1 \to 2 \to ...$$

Definición 3.2 (**Cadena**)**.** Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña e $\mathcal{I}$ la categoría cadena, un funtor $F : \mathcal{I} \to \mathfrak{C}$ es una cadena de $\mathfrak{C}$ si es constante para un m y n con $m \leq n$ con $n, m \in \mathbb{Z}$.

La idea intuitiva es que una cadena es un conjunto ordenado de morfismos de forma que cada uno se pueda componer con su sucesor. Es decir, una colección $\{A_m, ..., A_n\}$ de objetos de $\mathfrak{C}$ y una colección $\{f_m, ..., f_{n-1}\}$ de morfismos tales que:

$$A_m \xrightarrow{f_m} A_{m+1} \xrightarrow{f_{m+1}} A_{m+2} \xrightarrow{f_{m+2}} ... \xrightarrow{f_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n$$

Además diremos que $\{A_m, ..., A_n\}$ y $\{f_m, ..., f_{n-1}\}$ son los objetos y morfismos de la cadena.

Con esto podemos dar la idea de una clase de recubrimiento, a la que llamaremos geométricos, de una categoría. Para ello pediremos que las subcategorías satisfagan una cierta idea de completitud con respecto a las cadenas.

Definición 3.3 (**Recubrimiento geométrico**)**.** Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña se dice que el conjunto $\{U_i\}_{i \in I}$ de subcategorías es un recubrimiento geométrico de $\mathfrak{C}$ si y solo si dada cualquier cadena de $\mathfrak{C}$ existe un $i \in I$ tal que todos los morfismos y objetos de la cadena están en U_i.

La idea que hay detrás de esta definición y que no abordaremos por salirse de los objetivos previstos de esta trabajo es la de espacio clasificante. Esta idea permite dotar a cada categoría de un espacio topológico que se le asocia de forma natural y que permite estudiar sus propiedades. La construcción de dicho espacio emplea las cadenas asociando a cada una de ellas un conjunto simplicial de forma que un n-símplice se asocia a una cadena de n elementos. De ahí que debamos pedir la condición de estar ante un recubrimiento geométrico para poder afirmar que cada símplice se encuentra en al menos una de las subcategorías.

Ahora, con esta idea de recubrimiento, podemos finalmente dar la definición de distancia homotópica entre funtores tal y como aparece en [8].

Definición 3.4 (**Distancia homotópica entre funtores**)**.** Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías pequeñas y $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ dos funtores entre ellas. Definimos la distancia homotópica $\mathrm{cD}(F, G)$ entre F y G como el menor número $n \in \mathbb{N}$ tal que existe un recubrimiento geométrico $\{U_0, ..., U_n\}$ satisfaciendo que $F|_{U_i} \simeq G|_{U_i}$ para cada $0 \leq i \leq n$. Si no existe tal recubrimiento definimos $\mathrm{cD}(F, G)$ como ∞.

Proposición 3.5 (**Propiedades de la distancia homotópica**). *Dados dos funtores* $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *se cumple que*

1. $\mathrm{cD}(F, G) = \mathrm{cD}(G, F)$.

2. $\mathrm{cD}(G, F) = 0$ *si y solo si* $F \simeq G$.

3. *Si* $F \simeq \hat{F}$ *y* $G \simeq \hat{G}$ *entonces* $\mathrm{cD}(F, G) = \mathrm{cD}(\hat{F}, \hat{G})$.

4. *Para cualquier recubrimiento geométrico* $\{U_0, ..., U_n\}$ *de* $\mathfrak{C}$ *se tiene que:*

$$\mathrm{cD}(F, G) \leq \sum_{i=0}^{n} \mathrm{cD}(F|_{U_i}, G|_{U_i}) + n$$

Demostración.

1. Basta observar que si existe $\{U_0, ..., U_n\}$ un recubrimiento geométrico de $\mathfrak{C}$ tal que para todo $0 \leq i \leq n$ se cumple que $F|_{U_i} \simeq G|_{U_i}$ también se cumple que $G|_{U_i} \simeq F|_{U_i}$, por tanto $\mathrm{cD}(G, F) \leq cD(F, G)$.

2. Supongamos que $\mathrm{cD}(F, G) = 0$. En tal caso existe un recubrimiento geométrico $\{U\}$ de $\mathfrak{C}$ de un solo elemento tal que $F|_U = G_U$. Que contiene a todos los objetos es trivial por ser un recubrimiento. Para ver que contiene a todos los morfismos basta observar que dado un morfismo $f : A \to B$ este define una cadena, por tanto f tiene que ser un morfismo de U y en consecuencia $U = \mathfrak{C}$. Ahora biem, como $F|_U = F$, $G|_U = G$ y $F|_U \simeq G|_U$ entonces $F \simeq G$, como queríamos demostrar.

3. Basta con comprobar que si $F \simeq \hat{F}$ entonces dada cualquier subcategoría U de $\mathfrak{C}$ se tiene que $F|_U \simeq \hat{F}|_U$. En efecto, podemos definir la homotopía $H_U : U \times \mathbb{I} \to \mathfrak{D}$ a partir de $H : \mathfrak{C} \times \mathbb{I} \to \mathfrak{D}$ la homotopía entre F y $\hat{F}$ restringiendo esta, esto es $H_U(X, i) = H(X, i)$ y $H_U(f, g) = H(f, g)$.

   Ahora basta con ver que si tenemos $\{U_0, ..., U_n\}$ un recubrimiento geométrico de $\mathfrak{C}$ tal que para todo $0 \leq i \leq n$ se cumple que $F_{U_i} \simeq G_{U_i}$, también sirve para $\hat{F}$ y $\hat{G}$. En efecto, puesto que $F|_{U_i} \simeq \hat{F}|_{U_i}$ y $G|_{U_i} \simeq \hat{G}|_{U_i}$, además por hipótesis $F|_{U_i} \simeq G|_{U_i}$, por tanto $\hat{F}|_{U_i} \simeq \hat{G}|_{U_i}$. Luego $\mathrm{cD}(\hat{F}, \hat{G}) \leq cD(F, G)$. De manera análoga vemos que $\mathrm{cD}(F, G) \leq cD(\hat{F}, \hat{G})$.

4. Sea $\{U_0, ..., U_n\}$ un recubrimiento geométrico de $\mathfrak{C}$ y sea $\mathrm{cD}(F|_{U_i}, G|_{U_i}) = m_i$ para todo $0 \leq i \leq n$. Luego para cada $0 \leq i \leq n$ tenemos $\{U_i^0, ..., U_i^{m_i}\}$ un recubrimiento de U_i tal que $F|_{U_i^j} \simeq G|_{U_i^j}$. Ahora podemos construir un recubrimiento geométrico

$$\{U_0^0, ..., U_0^{m_1}, ..., U_i^0, ..., U_i^{m_i}, ..., U_n^0, ..., U_n^{m_n}\}$$

   con $\sum_{i=0}^{n} m_i + n$ subcategorías tal que para todo U_i^j se cumple que $F|_{U_i^j} \simeq G|_{U_i^j}$.

□

Corolario 3.6. *Dada una categoría pequeña* $\mathfrak{C}$ *y dos funtores* $X, Y : \{\bullet\} \to \mathfrak{C}$ *entonces solo hay estas dos opciones:*

1. $\mathrm{cD}(X, Y) = 0$ *si existe un camino entre los objetos* X *e* Y.
2. $\mathrm{cD}(X, Y) = \infty$ *si no hay un camino entre los objetos* X *e* Y.

Demostración. Por la Proposición 2.23, el apartado dos del teorema anterior y el hecho de solo hay un recubrimiento para la categoría $\{\bullet\}$. □

3.2. Categoría LS y Complejidad Categórica

Parte de la importancia de la idea de distancia homotópica es que abarca dos casos particulares de extremo interés. El primero de ellos es la categoría LS que aparece en el contexto de las categorías finitas en el artículo de Tanaka [11]. El segundo caso es el de la complejidad categorial que surge como análogo al de complejidad topológica.

3.2.1. Categoría LS

Esta noción nos intenta dar una medida de cuánto dista una categoría de ser contráctil. Es más, esta noción tiene importantes consecuencias en el estudio de la distancia homotópica al permitir establecer numerosas cotas.

Definición 3.7 (**Subcategoría categórica**)**.** Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña, una subcategoría U es 0-categórica si el funtor inclusión $i : U \to C$ es homótopo a un funtor constante.

Definición 3.8 (**Categoría LS**)**.** Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña, definimos la categoría normalizada de Lusternik-Schnirelmann de $\mathfrak{C}$, que denotaremos por $\mathrm{ccat}(\mathfrak{C})$, al menor $n \in \mathbb{N}$ tal que existe un recubrimiento geométrico $\{U_0, ..., U_n\}$ de $\mathfrak{C}$ formado por subcategorías 0-categóricas. Si no existe tal recubrimiento definimos $\mathrm{ccat}(\mathfrak{C})$ como ∞.

Proposición 3.9 (**Caracterización de la categoría LS**)**.** *Sea* $\mathfrak{C}$ *una categoría pequeña y conexa, se tiene que*

$$\mathrm{ccat}(\mathfrak{C}) = \mathrm{cD}(\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}, \bullet)$$

donde $\bullet$ *es un funtor constante.*

Demostración. Sea $\{U_0, ..., U_n\}$ un recubrimiento geométrico con $n+1 = \mathrm{cD}(\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}, \bullet)$ elementos de forma tal que $\mathrm{id}|_{U_i} \simeq \bullet$. Como $\bullet \simeq \mathrm{id}|_{U_i} = i_{U_i}$ tenemos que U_i es una subcategoría categórica y $\mathrm{cD}(\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}, \bullet) \geq \mathrm{ccat}(\mathfrak{C})$.

Por otro lado, dado $\{U_0, ..., U_n\}$ un recubrimiento geométrico de $n + 1$ subcategorías categóricas, se tiene que $\mathrm{id}|_{U_i} = i_{U_i} \simeq \bullet$ por tanto $\mathrm{cD}(\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}, \bullet) \leq \mathrm{ccat}(\mathfrak{C})$. □

Corolario 3.10. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña se tiene que son equivalentes las siguientes dos afirmaciones:*

1. *$\mathfrak{C}$ es contráctil.*
2. $\mathrm{ccat}(\mathfrak{C}) = 0$.

Definición 3.11 (**Categoría LS de un funtor**)**.** Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ categorías pequeñas conexas y $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ un funtor entre ellas, definimos la categoría normalizada de Lusternik-Schnirelmann del funtor F como $\mathrm{ccat}(F) = \mathrm{cD}(F, Y)$ donde $Y : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es un funtor constante.

Observación 3.12. Dada una categoría $\mathfrak{C}$ y C un objeto suyo, existen dos funtores i_1 e i_2 definidos entre $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ dados por las siguientes condiciones:

- $i_1(X) = (X, C)$ e $i_2(X) = i_2(C, X)$ con X un objeto de $\mathfrak{C}$.
- $i_1(f) = (f, \mathrm{id}_C)$ e $i_2(f) = (\mathrm{id}_C, f)$ con f un morfismo de $\mathfrak{C}$.

Proposición 3.13 (**Caracterización de la categoría LS**)**.** *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña conexa y C un objeto suyo, se tiene que*

$$\mathrm{ccat}(\mathfrak{C}) = \mathrm{cD}(i_1, i_2)$$

donde i_1 e i_2 se definen como se determinó en la observación anterior.

Demostración. Vamos a demostrar la doble desigualdad.

- «$\leq$»

  Sea $\{U_0, ..., U_n\}$ un recubrimiento geométrico de $\mathfrak{C}$ tal que $i_1|_{U_i} \simeq i_2|_{U_i}$. Veamos que tal recubrimiento es un recubrimiento geométrico de subcategorías categóricas. En efecto, sea U_i fijado, existe una homotopía $H : U_i \times \mathbb{I} \to \mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ entre $i_1|_{U_i} \simeq i_2|_{U_i}$. Como $p_1 \circ H : U_i \to \mathfrak{C}$ define una homotopía tenemos una homotopía entre $p_1 \circ i_1|_{U_i} = i_1|_{U_i}$ y $p_1 \circ i_2|_{U_i} = C$ donde C es el funtor constante determinado por el objeto C.

- «$\geq$»

  Sea $\{U_0, ..., U_n\}$ un recubrimiento geométrico de $\mathfrak{C}$ por subcategorías categóricas, veamos que $i_1|_{U_i} \simeq i_2|_{U_i}$. En efecto, sea U_i arbitrario y $H : U_i \times \mathbb{I} \to \mathfrak{C}$ la homotopía con soporte $[m, n]$ entre i_{U_i} y C el funtor constante. Vamos a construir una homotopía $K : U_i \times \mathbb{I} \to \mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ entre i_1 e i_2.

$$K(X, j) = \begin{cases} (H(X, j), C) & si \quad m \leq j \leq n \\ \\ (C, H(X, -j + 2n) & si \quad\quad n \leq j \end{cases}$$

Que es una homotopía entre $i_1|_{U_i}$ y $i_2|_{U_i}$ ya que

$$K(X,m) = (H(X,m),C) = (X,C) = i_1(X),$$

$$K(X,n) = (H(X,n),C) = (C,C)$$

y

$$K(X,m+2n) = (C,H(X,m-2n+2n)) = (C,H(X,m)) = (C,X) = i_2(X).$$

□

3.2.2. Complejidad Categórica

Definición 3.14 (Funtor diagonal). Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña llamamos funtor diagonal a Δ: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ que lleva cada objeto X en $\Delta(X) = (X,X)$ y cada morfismo f en $\Delta(f) = (f,f)$.

Definición 3.15 (Subcategoría de Farber). Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña, una subcategoría U de $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ es de Farber si existe un funtor $F : U \to \mathfrak{C}$ que cumple que $\Delta \circ F \simeq i_U$.

Definición 3.16 (Complejidad categórica). Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña, definimos la complejidad categórica normalizada de $\mathfrak{C}$ y denotamos por $\mathrm{cTC}(\mathfrak{C})$ al menor número $n \in \mathbb{N}$ para el cual existe un recubrimiento $\{U_0, ..., U_n\}$ de $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ por categorías de Farber. Si no existe tal recubrimiento definimos $\mathrm{cTC}(\mathfrak{C})$ como ∞.

Proposición 3.17 (Caracterización de la complejidad categórica). *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña se tiene que*

$$\mathrm{cTC}(\mathfrak{C}) = \mathrm{cD}(p_1, p_2).$$

Donde p_1 y p_2 son las proyecciones definidas en la Observación 1.53.

Demostración.

«$\leq$»

Sea $\{U_0, ..., U_n\}$ un recubrimiento de $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ por subcategorías tales que $p_1|_{U_i} \simeq p_2|_{U_i}$, veamos que también son subcategorías de Farber. En efecto, dado un U_i podemos ver que es una subcategoría Farber tomando como F a p_1. Para ello basta observar que como existe una homotopía $H : U_i \times \mathbb{I} \to \mathfrak{C}$ entre $p_1|_{U_i}$ y $p_2|_{U_i}$ podemos construir una homotopía entre $\Delta \circ p_1|_{U_i}$ e i_{U_i} como $G : U_i \times \mathbb{I} \to \mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ donde G se define como $G(X,Y,j) = (X, H(X,Y,j))$. Así es, puesto que si $[m,n]$ es el soporte de H se tiene que

$$G(X,Y,m) = (X, H(X,Y,m)) = (X, p_1(X,Y)) = (X,X)$$

y

$$G(X,Y,n) = (X, H(X,Y,n)) = (X, p_2(X,Y)) = (X,Y).$$

«≥»

Sea $\{U_0, ..., U_n\}$ un recubrimiento de $\mathfrak{C}\times\mathfrak{C}$ por subcategorías de Farber veamos que para cada U_i se cumple que $p_1|_{U_i} \simeq p_2|_{U_i}$. En efecto, dado un U_i existe un funtor $F : U_i \to \mathfrak{C}$ tal que $\Delta \circ F \simeq i_{U_i}$. Sea $H : U_i \times \mathbb{I} \to \mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ y $[m, n]$ su soporte, es decir cumpliendo que $H_m = \Delta \circ F$ y $H_n = i_{U_i}$. A partir de esta podemos definir una homotopía $K : U_i \times \mathbb{I} \to \mathfrak{C}$ entre $p_1|_{U_i}$ y $p_2|_{U_i}$ de la siguiente forma:

$$K(X,Y,j) = \begin{cases} p_1 \circ H(X,Y,n-j+m) & si \quad j \leq n \\ \\ p_2 \circ H(X,Y,j-n+m) & si \quad n \leq j \end{cases}$$

Que está bien definida puesto que

$$\begin{aligned} K(X,Y,n) = p_1 \circ H(X,Y,n-n+m) = p_1 \circ H(X,Y,m) = \\ (p_1 \circ \Delta \circ F)(X,Y) = p_1(F(X,Y), F(X,Y)) = F(X,Y). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} K(X,Y,n) = p_2 \circ H(X,Y,n-n+m) = p_2 \circ H(X,Y,m) = \\ (p_2 \circ \Delta \circ F)(X,Y) = p_2(F(X,Y), F(X,Y)) = F(X,Y). \end{aligned}$$

Y además es una homotopía entre p_1 y p_2 puesto que:

$$\begin{aligned} K(X,Y,m) = p_1 \circ H(X,Y,n-m+m) = p_1 \circ H(X,Y,n) \\ = (p_1 \circ i_{U_i})(X,Y) = p_1(X,Y), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} K(X,Y,2n-m) = (p_2 \circ H)(X,Y,2n-m-n+m) = (p_2 \circ H)(X,Y,n) \\ = (p_2 \circ i_{U_i})(X,Y) = p_2(X,Y). \end{aligned}$$

□

3.2.3. Ejemplos

Ejemplo 3.18. La categoría $\mathfrak{C}$ estudiada en el Ejemplo 2.34 y generada por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

cumple que $\mathrm{ccat}(\mathfrak{C}) = 1$. Para comprobar esto basta con tener en cuenta que $\mathrm{ccat}(\mathfrak{C}) \neq 0$ ya que no es contráctil por lo visto en el Ejemplo 2.34 y además existen las siguientes dos subcategorías 0-categóricas generadas por los diagramas:

$$X \xrightarrow{f} Y \qquad X \xrightarrow{g} Y \ .$$

Ejemplo 3.19. Sea $\mathfrak{C}$ la categoría generada por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \arrow[dl] \\ U & V \end{tikzcd}$$

Se cumple que $\mathrm{ccat}(\mathfrak{C}) = 1$. Obviamente no es contráctil ya que no es del mismo tipo de homotopía que un punto por lo visto en el Ejemplo 2.51. Además existe un recubrimiento geométrico dado por las subcategorías 0-categóricas generadas por los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \arrow[dr] & \\ U & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y \arrow[d] \arrow[dl] \\ U & V \end{tikzcd}$$

Para ver que son categóricas es suficiente con ver que ambas tienen un objeto inicial por lo que son contráctiles.

3.3. Propiedades

3.3.1. Composición

Como vimos en el Ejemplo 1.40 dadas tres categorías $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{B}$ junto con los funtores $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{B}$ podemos construir el funtor composición $G \circ F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$. Esta herramienta nos permite expresar unas desigualdades generales que sirven para probar importantes resultados que vinculan nociones como la categoría LS y la complejidad categórica.

Proposición 3.20 (**Desigualdad de la composición por la izquierda**). *Sean $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{B}$ tres categorías pequeñas, $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y $H : \mathfrak{D} \to \mathfrak{B}$ funtores entre ellas, se satisface que:*

$$\mathrm{cD}(H \circ F, H \circ G) \leq \mathrm{cD}(F, G).$$

Demostración. Sea $\{U_0, ..., U_n\}$ un recubrimiento geométrico de $\mathfrak{C}$ con $n+1 = \mathrm{cD}(F,G)+1$ elementos tales que para todo $0 \leq i \leq n$ se cumple que $F|_{U_i} \simeq G|_{U_i}$. Veamos que dicho recubrimiento geométrico de $\mathfrak{C}$ también nos sirve para $H \circ F$ y $H \circ G$. En efecto, puesto que por la Proposición 2.15 tenemos que:

$$(H \circ F)|_{U_i} = H \circ (F|_{U_i}) \simeq H \circ (G|_{U_i}) = (H \circ F)|_{U_i}$$

. □

Corolario 3.21. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría conexa, $\mathfrak{D}$ una categoría pequeña y $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ un funtor entre ellas. Se tiene que:*

$$\mathrm{ccat}(F) \leq \mathrm{ccat}(\mathfrak{C}).$$

Demostración. Por lo visto en la sección anterior $\mathrm{ccat}(F) = \mathrm{cD}(F, \bullet)$ donde $\bullet$ es un funtor constante y $\mathrm{ccat}(\mathfrak{C}) = \mathrm{cD}(\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}, X)$ con X un funtor constante. Si componemos el funtor $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ y el funtor constante X por la izquierda con F obtenemos los funtores $F \circ \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} = F$ y el funtor constante $F(X)$, aplicando la proposición anterior obtenemos que:

$$\mathrm{cD}(F, F(X)) \leq \mathrm{cD}(\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}, X)$$

como queríamos demostrar. □

Proposición 3.22 (**Desigualdad de la composición por la derecha**)**.** *Sean $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{B}$ tres categorías pequeñas y $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y $H : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ funtores entre ellas. Se satisface que:*

$$\mathrm{cD}(F \circ H, G \circ H) \leq \mathrm{cD}(F, G).$$

Demostración. Sea $\{U_0, ..., U_n\}$ un recubrimiento geométrico de $\mathfrak{C}$ con $n+1 = \mathrm{cD}(F, G)+1$ elementos tales que para todo $0 \leq i \leq n$ se cumple que $F|_{U_i} \simeq G|_{U_i}$. Veamos que tal recubrimiento geométrico de $\mathfrak{C}$ también nos sirve para $F \circ H$ y $G \circ H$. Sea ahora U_i fijado, como $\mathfrak{C}$ es una categoría pequeña se cumple que existe la subcategoría $V_i = H^{-1}(U_i)$ de $\mathfrak{B}$ definida de la siguiente forma:

- Sus objetos son los objetos X de $\mathfrak{B}$ tales que $H(X)$ está en U_i.
- Sus morfismos son los morfismos f de $\mathfrak{B}$ tales que $H(f)$ está en U_i.

Además, al tomar la restricción de H a V_i (es decir, el funtor $H|_{V_i} : V_i \to \mathfrak{C}$) esta satisface que es igual a la composición de $i_{U_i} \circ \bar{H}_i$ donde $\bar{H}_i : V_i \to U_i$ es el funtor definido por $\bar{H}_i(X) = H|_{V_i}(X)$ y $\bar{H}_i(f) = H|_{V_i}(f)$ y $i_{U_i} : U_i \to \mathfrak{C}$ es la inclusión de U_i en $\mathfrak{C}$. En tal caso se cumple que:

$$(F \circ H)|_{V_i} = F|_{U_i} \circ \bar{H}_i \simeq G|_{V_i} \circ \bar{H}_i = G \circ i_{U_i} \circ \bar{H}_i = G \circ H|_{V_i} = (G \circ H)|_{V_i}$$

Por lo tanto $\{V_0, ..., V_n\}$ es un recubrimiento geométrico de $\mathfrak{C}$ tal que $(F \circ H)|_{V_i} \simeq (G \circ H)|_{V_i}$. □

Corolario 3.23. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría conexa, $\mathfrak{D}$ una categoría pequeña y $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ un funtor entre ellas. Se tiene que:*

$$\mathrm{ccat}(F) \leq \mathrm{ccat}(\mathfrak{D}).$$

Demostración. Por lo visto en la sección anterior $\mathrm{ccat}(F) = \mathrm{cD}(F, Y)$ donde Y es un funtor constante y $\mathrm{ccat}(\mathfrak{D}) = \mathrm{cD}(\mathrm{id}_{\mathfrak{D}}, X)$ con X un funtor constante. Si componemos el funtor $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ y el funtor constante X por la derecha con F obtenemos los funtores $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}} \circ f = F$ y el funtor constante X, aplicando la proposición anterior obtenemos que:

$$\mathrm{cD}(F, X) \leq \mathrm{cD}(\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}, X).$$

Como queríamos demostrar. □

Corolario 3.24. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías pequeñas y $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ dos funtores entre ellas, se tiene que:*

$$\mathrm{cD}(F, G) + 1 \leq (\mathrm{ccat}(F) + 1)(\mathrm{ccat}(G) + 1).$$

Demostración. Tomemos un funtor constante $X_0 : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y denotemos por n y m a $\mathrm{ccat}(F)$ y $\mathrm{ccat}(G)$ respectivamente. Como $\mathrm{ccat}(F) = n$ y $\mathrm{ccat}(G) = m$ existen $\{U_0, ..., U_n\}$ y $\{V_0, ..., V_m\}$ recubrimientos geométricos de $\mathfrak{C}$ tales que para cada $0 \leq i \leq n$ y para cada $0 \leq j \leq m$ se cumple que $F|_{U_i} \simeq X_0$ y $G|_{V_j} \simeq X_0$.

Con estos recubrimientos podemos construir el recubrimiento geométrico de $\mathfrak{C}$ dado por $\{W_{i,j} \mid 0 \leq i \leq n \text{ y } 0 \leq j \leq m\}$ donde $W_{i,j}$ es la subcategoría de $\mathfrak{C}$ tal que sus objetos son la intersección de los objetos de U_i y V_j y sus morfismos la intersección de los morfismos de U_i y V_j. En cada $W_{i,j}$ se tiene que $F|_{W_{i,j}} \simeq X_0 \simeq G|_{W_{i,j}}$. Por tanto tenemos un recubrimiento de menos de $(n+1)(m+1)$ objetos de $\mathfrak{C}$ en las condiciones de la definición de distancia homotópica entre funtores, como queríamos demostrar. □

Corolario 3.25 (**Relación categoría LS y Complejidad categórica**). *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña y conexa. Se satisface que*

$$\mathrm{ccat}(\mathfrak{C}) \leq \mathrm{cTC}(\mathfrak{C}).$$

Demostración. Sea C_0 un objeto de $\mathfrak{C}$ y $i_1, i_2 : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ los morfismos de $\mathfrak{C}$ definidos como en la Observación 3.12. Sabemos que $\mathrm{cTC}(\mathfrak{C}) = \mathrm{cD}(p_1, p_2)$, si aplicamos la proposición anterior con el funtor i_1 tenemos que:

$$\mathrm{cD}(p_1 \circ i_1, p_2 \circ i_1) = \mathrm{cD}(\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}, C_0) = \mathrm{ccat}(\mathfrak{C}) \leq \mathrm{cD}(p_1, p_2) = \mathrm{cTC}(\mathfrak{C}).$$

□

Corolario 3.26 (**Desigualdad de la complejidad categórica**). *Sean $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ dos funtores entre categorías pequeñas. Entonces se satisface que:*

$$\mathrm{cD}(F, G) \leq \mathrm{cTC}(\mathfrak{D}).$$

Demostración. Basta tomar el funtor $(F, G) : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ definido como en la Proposición 1.54 y las proyecciones p_1 y p_2. Por construcción se cumple que $p_1 \circ (F, G) = F$ y $p_2 \circ (F, G) = G$, por tanto se cumple que:

$$\mathrm{cD}(F, G) = \mathrm{cD}(p_1 \circ (F, G), p_2 \circ (F, G)) \leq \mathrm{cD}(p_1, p_2) = \mathrm{cTC}(\mathfrak{D}).$$

□

3.3.2. Coproducto

Proposición 3.27 (**Coproducto**). *Sean $\mathfrak{C}_1$,$\mathfrak{C}_2$ y $\mathfrak{D}$ tres categorías pequeñas, $F_1, G_1 : \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{D}$ y $F_2, G_2 : \mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{D}$ funtores entre ellas. Se cumple que:*

$$\mathrm{cD}(F_1 \sqcup F_2, G_1 \sqcup G_2) = \max\{\mathrm{cD}(F_1, G_1), \mathrm{cD}(F_2, G_2)\}.$$

Demostración. Para demostrar la desigualdad $\geq$ basta emplear el resultado de la Proposición 3.22. Para ello usaremos los morfismos inclusión $i_1 : \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{C}_1 \sqcup \mathfrak{C}_2$ e $i_2 : \mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{C}_1 \sqcup \mathfrak{C}_2$. En efecto, puesto que como $F_1 = F_1 \sqcup F_2 \circ i_1$ y $G_1 = G_1 \sqcup G_2 \circ i_1$ se tiene que

$$\mathrm{cD}(F_1, G_1) = \mathrm{cD}(F_1 \sqcup F_2 \circ i_1, G_1 \sqcup G_2 \circ i_1) \leq \mathrm{cD}(F_1 \sqcup F_2, G_1 \sqcup G_2).$$

A su vez, como $F_2 = F_1 \sqcup F_2 \circ i_2$ y $G_2 = G_1 \sqcup G_2 \circ i_2$ se tiene que

$$\mathrm{cD}(F_2, G_2) = \mathrm{cD}(F_1 \sqcup F_2 \circ i_2, G_1 \sqcup G_2 \circ i_2) \leq \mathrm{cD}(F_1 \sqcup F_2, G_1 \sqcup G_2).$$

Ahora supongamos por simplicidad que $k_1 = \mathrm{cD}(F_1, G_1) \geq \mathrm{cD}(F_2, G_2) = k_2$. Si suponemos que $k_1 \neq \infty$ existe $\{U_0, ...U_{k_1}\}$ un recubrimiento de $\mathfrak{C}_1$ y $\{V_0, ...V_{k_2}\}$ un recubrimiento de $\mathfrak{C}_2$ tales que $F_1|_{U_i} \simeq G_1|_{U_i}$ para todo $0 \leq i \leq k_1$ y $F_2|_{V_j} \simeq G_2|_{V_j}$ para todo $0 \leq j \leq k_2$. A partir de este podemos construir un recubrimiento

$$\{W_0 = U_0 \sqcup V_0, ..., W_{k_2} = U_{k_2} \sqcup V_{k_2}, W_{k_2+1} = U_{k_2+1}, ...W_{k_1} = U_{k_1}\}$$

de $\mathfrak{C}_1 \sqcup \mathfrak{C}_2$ de forma que satisface que $F_1 \sqcup F_2|_{W_i} \simeq G_1 \sqcup G_2|_{W_i}$. Por tanto

$$\mathrm{cD}(F_1 \sqcup F_2, G_1 \sqcup G_2) \leq \max\{\mathrm{cD}(F_1, G_1), \mathrm{cD}(F_2, G_2)\}.$$

Si $k_1 = \infty$ entonces se cumple trivialmente a partir de la primera desigualdad ya que tenemos que $\infty = \mathrm{cD}(F_1, G_1) \leq \mathrm{cD}(F_1 \sqcup F_2, G_1 \sqcup G_2)$ pero eso solo es posible si $\mathrm{cD}(F_1 \sqcup F_2, G_1 \sqcup G_2) = \infty$. □

El resultado anterior se puede generalizar

Proposición 3.28. *Sea $\{\mathfrak{C}_j\}_{j\in J}$ una colección de categorías pequeñas tal que $\sqcup_{j\in J}\mathfrak{C}_j$ es una categoría pequeña, $\mathfrak{D}$ una categoría pequeña y $\{F_j : \mathfrak{C}_j \to \mathfrak{D}\}_{j\in J}$ y $\{G_j : \mathfrak{C}_j \to \mathfrak{D}\}_{j\in J}$ funtores entre ellas. Se tiene que:*

$$\mathrm{cD}(\sqcup_{j\in J}F_j, \sqcup_{j\in J}G_j) = \sup\{\mathrm{cD}(F_j, G_j)|j \in J\}.$$

Demostración. Usamos de nuevo la Proposición 3.22. Así, al componer los funtores inclusión $i_j : \mathfrak{C}_j \to \sqcup_{j\in J}\mathfrak{C}_j$ con los funtores $\sqcup_{j\in J}F_j$ y $\sqcup_{j\in J}G_j$ se obtienen los funtores $F_j = \sqcup_{j\in J}F_j \circ i_j$ y $G_j = \sqcup_{j\in J}G_j \circ i_j$. Por tanto se tiene que $\mathrm{cD}(F_j, G_j) \leq \mathrm{cD}(\sqcup_{j\in J}F_j, \sqcup j \in JG_j)$ para todo $j \in J$.

Veamos la otra desigualdad. Supongamos que existe un máximo de $\{\mathrm{cD}(F_j, G_j)|j \in J\}$ entonces podemos restringirnos al caso finito tomando a $\sqcup_{j\in J}\mathfrak{C}_j = C_{j_0} \sqcup (\sqcup_{j\neq j_0}\mathfrak{C}_j)$ donde j_0 es un índice en el que se alcanza el máximo.

Si no existe un máximo entonces $\sup_{j\in J}(\mathrm{cD}(F_j, G_j)) = \infty$ y , además, por lo visto en el párrafo anterior $\mathrm{cD}(F_j, G_j) \leq \mathrm{cD}(\sqcup_{j\in J}F_j, \sqcup j \in JG_j)$ para todo $j \in J$. Ahora bien, como $\mathrm{cD}(F_j, G_j)$ es tan grande como queramos se tiene que $\mathrm{cD}(\sqcup_{j\in J}F_j, \sqcup_{j\in J}G_j) = \infty$ como queríamos demostrar. □

Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías pequeñas. Por lo visto en la Proposición 2.26 ambas se descomponen en la unión disjunta de sus componentes conexas $\{\mathfrak{U}_\mathfrak{i}\}_i$ y $\{\mathfrak{V}_\mathfrak{j}\}_j$ respectivamente. Además por lo visto en la Proposición 2.27 para cada $\mathfrak{U}_\mathfrak{i}$ existirá un único $j(i)$ y una única componente $\mathfrak{V}_{j(i)}$ tal que la imagen de $F|_{\mathfrak{U}_i}$ esté contenida en $\mathfrak{V}_{j(i)}$

Lema 3.29. *Sean $\mathfrak{C}$ una categoría conexa, $\mathfrak{D}$ una categorías pequeña y $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ dos funtores entre ellas. Si $F(\mathfrak{C})$ y $G(\mathfrak{C})$ están en componentes conexas $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{V}$ distintas de $\mathfrak{D}$ entonces se tiene que:*

$$\mathrm{cD}(F, G) = \infty.$$

Demostración. Si hubiera algún recubrimiento geométrico finito $\{U_1, ...U_n\}$ de $\mathfrak{C}$ tal que $F|_{U_i} \simeq G|_{U_i}$ entonces habría un camino $H_X : \mathbb{I} \to \mathfrak{D}$ definido como $H_X(i) = H(X, i)$ entre los objetos $F(X)$ y $G(X)$ con X un objeto de U_i, pero esto contradice que estén en componentes conexas distintas. □

Proposición 3.30. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías pequeñas, $\{\mathfrak{U}_\mathfrak{i}\}_i$ su descomposición en componentes conexas y $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ dos funtores entre ellas, entonces se tiene que:*

$$\mathrm{cD}(F, G) = \sup_{i\in I}\{\mathrm{cD}(F|_{\mathfrak{U}_i}, G|_{\mathfrak{U}_i})\}.$$

Demostración. Se sigue de los resultados anteriores. □

3.3.3. Dominio y Codominio

Una pregunta natural que surge en relación al concepto de distancia homotópica es la de cómo se relaciona con el dominio y el codominio de los funtores a los que se aplica. La primera de estas relaciones utiliza la propiedad de ser contráctil para dar con el siguiente resultado.

Proposición 3.31 (**Codomonio contráctil**). *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías pequeñas con $\mathfrak{D}$ contráctil, entonces dado cualquier par de funtores $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ se tiene que*

$$\mathrm{cD}(F, G) = 0$$

.

Demostración. Por lo visto en la Proposición 2.35, como $\mathfrak{D}$ es contráctil tenemos que F y G son homótopos. □

Corolario 3.32. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías pequeñas con $\mathfrak{D}$ con objeto final o inicial, entonces dado cualquier par de funtores $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ se tiene que*

$$\mathrm{cD}(F, G) = 0.$$

Para caracterizar la relación entre la distancia homotópica entre funtores y el dominio tomaremos una hipótesis adicional que no supone un «gran coste». Dicha hipótesis consiste en suponer que $\mathfrak{D}$ es conexa. Por tanto, la restricción que hacemos no resulta ser muy fuerte puesto que por resultados de la anterior subsección siempre podemos restringir el problema a analizar las componentes conexas.

Proposición 3.33 (**Dominio contráctil**). *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías pequeñas con $\mathfrak{C}$ contráctil y $\mathfrak{D}$ conexa, entonces dado cualquier par de funtores $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ se tiene que*

$$\mathrm{cD}(F, G) = 0.$$

Demostración. Como $\mathfrak{C}$ es contráctil el funtor $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ es homótopo a un funtor $\bullet$ constante. En consecuencia $F = F \circ \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} \simeq F \circ \bullet = F(\bullet)$ y $G = G \circ \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} \simeq G \circ \bullet = G(\bullet)$ y como $\mathfrak{D}$ es conexa existe un camino ente los objetos $F(\bullet)$ y $G(\bullet)$, es decir una homotopía entre los funtores constantes $F(\bullet)$ y $G(\bullet)$. □

Observación 3.34. La conexidad de $\mathfrak{D}$ es una condición necesaria ya que en su ausencia existen contraejemplos. El más sencillo consiste en tomar como $\mathfrak{C}$ a la categoría de un solo objeto y por $\mathfrak{D}$ la categoría generada por:

$$X \qquad\qquad Y$$

Está claro que $\mathfrak{C}$ es contráctil, pero los funtores constantes X e Y no son homótopos.

Corolario 3.35. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías pequeñas con $\mathfrak{C}$ con objeto final o inicial y $\mathfrak{D}$ conexa, entonces dado cualquier par de funtores $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ se tiene que*

$$\mathrm{cD}(F, G) = 0.$$

Proposición 3.36 (Cota del dominio). *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías pequeñas con $\mathfrak{D}$ conexa, entonces se tiene que*

$$\mathrm{cD}(F, G) \leq \mathrm{ccat}(\mathfrak{C}).$$

Demostración. Por definición sabemos que $\mathrm{ccat}(\mathfrak{C}) = \mathrm{cD}(\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}, \bullet)$. Tomemos ahora $\{U_0, ..., U_k\}$ un recubrimiento geométrico con $k = \mathrm{cD}(\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}, \bullet)$ elementos tales que $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}|_{U_i} \simeq \bullet_{U_i}$ para todo $0 \leq i \leq k$. Veamos que este recubrimiento funciona también para F y G. En efecto, para cada $0 \leq i \leq k$ tenemos que $\mathrm{id}|_{U_i} = i_{U_i} \simeq \bullet$ y por tanto existe una homotopía $H : \mathfrak{C} \times \mathbb{I} \to \mathfrak{C}$ entre $H_m = \mathrm{id}|_{U_i}$ y $H_n = \bullet|_{U_i}$. Además por ser $\mathfrak{D}$ conexa existe un camino $\alpha : \mathbb{I} \to \mathfrak{D}$ entre los objetos $\alpha(0) = F(\bullet)$ y $\alpha(l) = G(\bullet)$. A partir de estos dos hechos podemos construir una homotopía $K : \mathfrak{C} \times \mathbb{I} \to \mathfrak{D}$ entre $F|_{U_i}$ Y $G|_{U_i}$ de la siguiente forma:

$$K(X, i) = \begin{cases} F(H(X, i)) & si \quad m \leq i \leq n \\ \alpha(i - n) & si \quad n \leq i \leq n + l \\ \\ G(H(X, -i + 2n + 2l)) & si \quad n + l \leq i \end{cases}$$

□

Observación 3.37. No existe una desigualdad semejante empleando $\mathrm{ccat}(\mathfrak{D})$. Basta pensar en el ejemplo que vimos antes donde tomamos $\mathfrak{C}$ como la categoría de un solo objeto y por $\mathfrak{D}$ la categoría generada por:

$$X \qquad Y$$

En este caso se tiene que $\mathrm{ccat}(\mathfrak{D}) = 1$ pero $\mathrm{cD}(X, Y) = \infty$.

Corolario 3.38. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría pequeña se tiene que*

$$\mathrm{cTC}(\mathfrak{C}) \leq \mathrm{ccat}(\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}).$$

Demostración. Por definición $\mathrm{cTC}(\mathfrak{C}) = \mathrm{cD}(p_1, p_2)$ y como $p_i : \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ se tiene que $\mathrm{cD}(p_1, p_2) \leq \mathrm{ccat}(\mathfrak{C} \times \mathfrak{C})$. □

3.3.4. Desigualdad Triangular

A pesar de llamarse «distancia» la distancia homotópica entre funtores no cumple la desigualdad natural. El contraejemplo a dicha propiedad que reproduciremos a continuación se encuentra en el artículo [7] de E. Macías y D. Mosquera.

Ejemplo 3.39. Sea $\mathfrak{C} = S^1 \times S^1$ donde S^1 es la categoría generada por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \arrow[dl] \\ U & V \end{tikzcd}$$

Basta tomar los funtores $F, G, H : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ definidos como $F = \mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$, $G = \mathrm{id}_{S^1} \times U$ y $H = U \times U$ donde $U : S^1 \to S^1$ es el funtor constante asociado al objeto U.

Por un lado tenemos que $\mathrm{cD}(F, G) \leq 1$ ya que podemos tomar el recubrimiento $\{A_1 = S^1 \times X, A_2 = S^1 \times Y\}$. Veamos que $f|_{A_1} \simeq g_{A_2}$. En efecto, puesto que por la Proposición 2.17 y el carácter contráctil de U_X y U_Y se cumple que $f|_{A_1} = id_{S^1} \times \mathrm{id}_{U_X} \simeq id_{S_1} \times U = g|_{A_1}$ y análogamente $f|_{A_2} = id_{S^1} \times \mathrm{id}_{U_Y} \simeq id_{S_1} \times U = g|_{A_2}$. Por otro lado, $\mathrm{cD}(G, H) \leq 1$ por un argumento similar. Basta con tomar el recubrimiento $\{V_1 = U_X \times S^1, V_2 = U_Y \times S^1\}$. En efecto, puesto que $g|_{V_1} = \mathrm{id}_{U_X} \times U \simeq U \times U = g|_{V_1}$ ya que U_X es contráctil y $g|_{V_2} = \mathrm{id}_{U_Y} \times U \simeq U \times U = g|_{V_2}$ al ser U_Y contráctil. Por su parte $\mathrm{cD}(F, H) \geq 3$ por un resultado de [12], contradiciendo la desigualdad triangular.

Proposición 3.40. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías pequeñas tales que $\mathrm{ccat}(\mathfrak{C}) \leq 2$ y $F, G, H : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ tres funtores entre ellas, entonces se tiene que*

$$\mathrm{cD}(F, H) \leq \mathrm{cD}(F, G) + \mathrm{cD}(G, H).$$

Demostración. Si dos de los funtores son homótopos la desigualdad es trivial. En caso de que no haya ninguna homotopía el resultado se deduce de la Proposición 3.36, puesto que $\mathrm{cD}(F, H) \leq \mathrm{ccat}(\mathfrak{C}) = 2 = 1 + 1 \leq \mathrm{cD}(F, G) + \mathrm{cD}(G, H)$. □

Proposición 3.41. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías pequeñas y $F, G, H : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ tres funtores entre ellas, entonces se tiene que:*

1. $$\mathrm{cD}(F, H) \leq \mathrm{cD}(F, G) + \sum_{i=0}^{n} \mathrm{cD}(G|_{U_i}, H|_{U_i})$$

   donde $n + 1 = \mathrm{cD}(F, G)$ y $\{U_0, ..., U_n\}$ es un recubrimiento de $\mathfrak{C}$ tal que $F|_{U_i} \simeq G|_{U_i}$ para todo $0 \leq i \leq n$.

2. $$\mathrm{cD}(F, H) \leq \mathrm{cD}(G, H) + \sum_{j=0}^{m} \mathrm{cD}(F|_{V_j}, G|_{V_j})$$

   donde $m + 1 = \mathrm{cD}(G, H)$ y $\{V_0, ..., V_m\}$ es un recubrimiento de $\mathfrak{C}$ tal que $G|_{V_j} \simeq H|_{V_J}$ para todo $0 \leq j \leq m$.

Demostración. Probaremos el primer resultado pues el otro es análogo.

Sea $\{U_0, ..., U_n\}$ un recubrimiento de $\mathfrak{C}$ en las condiciones de la proposición. Para cada i tal que $0 \leq i \leq n$ podemos construir un recubrimiento $\{U_i^0, U_i^1, ..., U_i^{m_i}\}$ donde $m_i = \mathrm{cD}(G|_{U_i}, H|_{U_i})$ y tal que $G|_{U_i^j} \simeq H|_{U_i^j}$ para todo $0 \leq j \leq m_i$. A partir de esto podemos crear el recubrimiento de $\mathfrak{C}$ dado por

$$\{U_0^0, ..., U_0^{m_0}, ..., U_i^0, ..., U_i^{m_i}, ..U_n^0, ..., U_n^{m_n}\}$$

que tiene $n+1+\sum_{i=0}^n m_n = \mathrm{cD}(F,G) + \sum_{i=0}^n \mathrm{cD}(G|_{U_i}, H|_{U_i})$ elementos y además verifica que para todo U_i^j se tiene que $F|_{U_i^j} \simeq G|_{U_i^j} \simeq H|_{U_i^j}$. □

3.3.5. Invariancia

Proposición 3.42. *Sean $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{B}$ tres categorías pequeñas y $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ dos funtores entre las dos primeras. Se tiene que:*

1. *Si existe $\alpha : \mathfrak{D} \to \mathfrak{B}$ tal que tiene una inversa homotópica por la izquierda entonces:*

$$\mathrm{cD}(F,G) = \mathrm{cD}(\alpha \circ F, \alpha \circ G).$$

2. *Si existe $\beta : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ tal que tiene una inversa homotópica por la izquierda entonces:*

$$\mathrm{cD}(F,G) = \mathrm{cD}(F \circ \beta, G \circ \beta).$$

Demostración. 1. Sea $\gamma : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ la inversa homotópica por la izquierda de α. Por definición se tiene que $\gamma \circ \alpha \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{D}}$. De esto se deduce que $\gamma \circ \alpha \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{D}} \circ F = F$ y $\gamma \circ \alpha \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{D}} \circ F = F$ y además en virtud de la propiedad (3) demostrada en la Proposición 3.5 se tiene que $\mathrm{cD}(F,G) = \mathrm{cD}(\gamma \circ \alpha \circ F, \gamma \circ \alpha \circ G)$. Empleando ahora la Proposición 3.20 se tiene que:

$$\mathrm{cD}(\alpha \circ F, \alpha \circ G) \leq \mathrm{cD}(F,G).$$

Y empleando de nuevo esta proposición tenemos que:

$$\mathrm{cD}(F,G) = \mathrm{cD}(\gamma \circ \alpha \circ F, \gamma \circ \alpha \circ G) \leq \mathrm{cD}(\alpha \circ F, \alpha \circ G).$$

2. Sea $\gamma : \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$ la inversa homotópica por la derecha de β. Por definición se tiene que $\beta \circ \gamma \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$. De esto se deduce que $F \circ \beta \circ \gamma \simeq F \circ \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} = F$ y $G \circ \beta \circ \gamma \simeq \circ G \circ \mathrm{id}_{\mathfrak{C}} = G$ y además en virtud de la propiedad (3) demostrada en la Proposición 3.5 se tiene que $\mathrm{cD}(F,G) = \mathrm{cD}(F \circ \beta \circ \gamma, G \circ \beta \circ \gamma)$. Empleando ahora la Proposición 3.22 se tiene que:

$$\mathrm{cD}(F \circ \beta, G \circ \beta) \leq \mathrm{cD}(F,G).$$

Y empleando de nuevo esta proposición tenemos que

$$\mathrm{cD}(F,G) = \mathrm{cD}(F\circ\beta\circ\gamma, G\circ\beta\circ\gamma) \leq \mathrm{cD}(F\circ\beta, G\circ\beta).$$

□

Proposición 3.43. *Sean $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{C}_2$ y $\mathfrak{D}_2$ cuatro categorías pequeñas tales que existen $\alpha : \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{C}_2$ y $\beta : \mathfrak{D}_1 \to \mathfrak{D}_2$ equivalencias homotópicas y $F_1, G_1 : \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{D}_1$ y $F_2, G_2 : \mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{D}_2$ son funtores que hacen conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}_1 \arrow[r, shift left, "F_1"] \arrow[r, shift right, "G_1"'] \arrow[d, "\alpha"] & \mathfrak{D}_1 \arrow[d, "\beta"] \\
\mathfrak{C}_2 \arrow[r, shift left, "F_2"] \arrow[r, shift right, "G_2"'] & \mathfrak{D}_2
\end{tikzcd}$$

Entonces se satisface que:

$$\mathrm{cD}(F_1, G_1) = \mathrm{cD}(F_2, G_2).$$

Demostración. Por las hipótesis sabemos que existe $\alpha' : \mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{C}_1$ tal que $\alpha'\circ\alpha \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{C}_1}$ y $\alpha\circ\alpha' \simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{C}_2}$. Ahora en virtud de la proposición anterior se tiene que:

$$\mathrm{cD}(F_1, G_1) = \mathrm{cD}(F_1\circ\alpha', G_1\circ\alpha')$$

puesto que α' tiene una inversa homotópica. Aplicando de nuevo la proposición anterior tenemos que:

$$\mathrm{cD}(F_1\circ\alpha', G_1\circ\alpha' = \mathrm{cD}(\beta\circ F_1\circ\alpha', \beta\circ G_1\circ\alpha').$$

Si probamos que $\beta\circ F_1\circ\alpha' \simeq F_2$ y $\beta\circ G_1\circ\alpha' \simeq G_2$ tendríamos el resultado buscado. Ahora bien, dicho resultado es cierto puesto que por hipótesis el diagrama es conmutativo y por tanto $\beta\circ F_1 = F_2\circ\alpha$. Si componemos ahora por la derecha con α' obtenemos que

$$\beta\circ F_1\circ\alpha' = F_2\circ\alpha\circ\alpha' \simeq F_2\circ\mathrm{id}_{\mathfrak{C}_2} = F_2.$$

□

Corolario 3.44. ccat *y* cTC *son invariantes por la relación de equivalencia «tener el mismo tipo de homotopía». Esto es, dadas dos categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ tales que $\mathfrak{C} \simeq \mathfrak{D}$ se tiene que:*

$$\mathrm{ccat}(\mathfrak{C}) = \mathrm{ccat}(\mathfrak{D})$$

y

$$\mathrm{cTC}(\mathfrak{C}) = \mathrm{cTC}(\mathfrak{D}).$$

En particular estos resultados generalizan la demostración de Tanaka en [11] sobre la invariancia de la categoría LS.

3.3.6. Productos

Proposición 3.45. *Sean $\mathfrak{C}_1$,$\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$ categorías pequeñas, $F_1, G_1 : \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{D}_1$ y $F_2, G_2 : \mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{D}_2$ funtores entre ellas, entonces*

$$\mathrm{cD}(F_1 \times F_2, G_1 \times G_2) + 1 \leq (\mathrm{cD}(F_1, G_1) + 1)(\mathrm{cD}(F_2, G_2) + 1).$$

Demostración. Tomamos $\{U_0, ..., U_{k_1}\}$ un recubrimiento de $\mathfrak{C}_1$ y $\{V_0, ..., V_{k_2}\}$ un recubrimiento de $\mathfrak{C}_2$ tales que $F_1|_{U_i} \simeq G_1|_{U_i}$ para todo $0 \leq i \leq k_1$ y $F_2|_{V_j} \simeq G_2|_{V_j}$ para todo $0 \leq j \leq k_2$. A partir de este podemos construir un recubrimiento de $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ dado por $\{U_i \times V_j\}$ que satisface las condiciones de la distancia homotópica.

Para ver que es recubrimiento geométrico es suficiente con ver que toda cadena $C : \mathcal{I} \to \mathfrak{C}\times\mathfrak{D}$ se obtiene a partir de dos cadenas $C_1 : \mathcal{I} \to \mathfrak{C}$ y $C_2 : \mathcal{I} \to \mathfrak{D}$ por la propiedad universal del producto. Ahora bien dadas dos cadenas cualquiera $C_1 : \mathcal{I} \to \mathfrak{C}$ y $C_2 : \mathcal{I} \times \mathfrak{D}$ existe U_i y V_j tales que C_1 está en U_i y C_2 está en V_j y por tanto la cadena $C : \mathcal{I} \to \mathfrak{C}\times\mathfrak{D}$ determinada por dichos funtores estará en $U_i \times V_j$. Falta ver que $(F_1 \times F_2)|_{U_i \times V_j} \simeq (G_1 \times G_2)|_{U_i \times V_j}$, pero esto es inmediato teniendo en cuenta la Proposición 2.17. □

Corolario 3.46. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías pequeñas conexas. Se tiene que*

$$\mathrm{ccat}(\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}) + 1 \leq (\mathrm{ccat}(\mathfrak{C}) + 1)(\mathrm{ccat}(\mathfrak{D}) + 1).$$

Demostración. Basta tomar los funtores $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$, $\mathrm{id}_{\mathfrak{D}}$ y dos funtores constantes $X : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ e $Y : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$. □

Corolario 3.47. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías pequeñas. Se tiene que*

$$\mathrm{cTC}(\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}) + 1 \leq (\mathrm{cTC}(\mathfrak{C}) + 1)(\mathrm{cTC}(\mathfrak{D}) + 1).$$

Demostración. Basta tomar los funtores $p_1 : \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$, $p_2 : \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$, $q_1 : \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ y $q_2 : \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$, las proyecciones canónicas de $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ respectivamente. □

3.4. Relación con otras distancias y el caso de los Posets finitos

Como ya se ha mencionado, la noción de distancia homotópica entre funtores aparece al trasladar al contexto de las categorías pequeñas la noción de distancia homotópica entre aplicaciones continuas. Por tanto, es natural que nos preguntemos cómo se relacionan ambas ideas. Ahora bien, para responder a esta pregunta debemos primero buscar sobre qué objetos se pueden aplicar a la vez. Un contexto dónde sucede esto es en el de los posets finitos.

Como se puede comprobar en [1] a los posets finitos se les puede dotar de una topología a partir de los subconjuntos U_X o F_X que definimos en la Definición 2.38. Con esto solo nos falta entender cómo definir la distancia homotópica entre aplicaciones continuas.

Definición 3.48 (**Distancia homotópica entre aplicaciones continuas**)**.** Sean X e Y espacios topológicos y $F, G : X \to Y$ dos aplicaciones continuas entre ellos. Definimos la distancia homotópica $\mathrm{D}(F, G)$ entre F y G como el menor número $n \in \mathbb{N}$ tal que existe un recubrimiento por abiertos $\{U_0, ..., U_n\}$ de X satisfaciendo que $F|_{U_i}$ es homótopo a $G|_{U_i}$ para cada $0 \leq i \leq n$. Si no existe tal recubrimiento definimos $\mathrm{D}(F, G)$ como ∞.

Además, por resultados de [1] sabemos que una aplicación continua entre posets no es más que una aplicación que respeta el orden. Y no solo eso, sino que como una homotopía entre aplicaciones F y G continuas existe si y solo si existen aplicaciones continuas $\{F_0, F_1, \cdots, F_n\}$ tales que cumplen las propiedades definidas en el Ejemplo 2.7. Por tanto, tanto las aplicaciones como las homotopías entre posets son iguales si se entienden desde el contexto de las categorías como en el contexto de la topología de espacios finitos. No obstante la distancia homotópica no siempre coincide y es que hay un elemento sustancial en que difieren: el tipo de recubrimiento que se emplea para definir la distancia homotópica.

Para entender mejor esto veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.49. Sea P el poset generado por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d] \arrow[drr] & B \arrow[dl] \arrow[dr] & C \arrow[d] \arrow[dll] \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

Está claro que $\mathrm{D}(\mathrm{id}_P, \bullet) \geq 2$, donde $\bullet$ es una aplicación constante. En efecto, por un lado sabemos que P no es contráctil al no tener beat-points y por tanto $\mathrm{D}(\mathrm{id}_P, \bullet) \neq 0$. Además, no puede ser que $\mathrm{D}(\mathrm{id}_P, \bullet) = 1$, puesto que si cogemos abiertos distintos con más de un solo elemento y distintos del propio P (que sabemos que no es contráctil), al ser estos conjuntos de la forma U_A, U_B o U_C no podemos recubrir solo con dos de ellos. Sin embargo se tiene que $\mathrm{cD}(\mathrm{id}_P, \bullet) = 1$ ya que basta tomar el recubrimiento geométrico formado por F_X y F_Y, dos subcategorías contráctiles al tener ambas un objeto final.

Este ejemplo nos motiva a ofrecer el siguiente resultado:

Lema 3.50. *Sea P un poset finito y $\{U_0, ..., U_n\}$ un recubrimiento por abiertos, entonces $\{U_0, ..., U_n\}$ es un recubrimiento geométrico.*

Demostración. Como P es un poset las cadenas no son más que una sucesión finita de elementos ordenados. En efecto, dado $x_0 \to x_1 \to ... \to x_m$ una cadena de elementos del Poset, por construcción se tiene que $x_0 \geq x_1 \geq ... \geq\geq x_m$. Por tanto, dada una cadena arbitraria $x_0 \to x_1 \to ... \to x_m$ se tiene que x_0 es máximo. Ahora, como $\{U_0, ..., U_n\}$ es un recubrimiento se tiene que $x_0 \in U_i$ para algún $0 \leq i \leq n$. Como U_i es abierto se tiene que todos los elementos de U_{x_0}, y en particular los elementos de la cadena, están en U_i. □

Observación 3.51. Como estamos en el contexto de los posets entendemos que si dos objetos comparables están en una subcategoría también lo está el morfismo que los compara.

Por tanto llegamos al siguiente resultado:

Proposición 3.52 (**Relación entre distancias homotópicas**). *Sean P y Q dos posets finitos y $F, G : P \to Q$ dos aplicaciones que conservan el orden entre ellos, se tiene que:*

$$\mathrm{cD}(F, G) \leq \mathrm{D}(F, G).$$

Bibliografía

[1] Barmak, J., *Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications*, vol. 2032., Springer, New York, 2011.

[2] Lawvere F.W , Schanuel S.H., *Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories*, Cambridge University Press, 2009.

[3] Lee, M.J., *Homotopy for functors.* Proc. Am. Math. Soc. **36**, (1973), 571—577.

[4] Lee M.J., *Erratum to: homotopy for functors*, Proc. Am. Math. Soc. **42**, 1974, 648—650.

[5] Leinster T., *Basic category theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics Cambridge University Press, 2014.

[6] Mac Lane S., *Categories for the working mathematician*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, 5, Springer-Verlag, New York, 1998.

[7] Macías-Virgós, E.; Mosquera-Lois, D., *Homotopic distance between maps*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. , (2021), 1–21.

[8] Macías-Virgós, E.; Mosquera-Lois, D., *Homotopic distance between functors*, J. Homotopy and Relat. Struct. **15**, (2020), 537—555.

[9] Mosquera-Lois, D., *Complejidad topológica en la robótica.* Trabajo Final de Grado. Universidade de Santiago de Compostela, 2016.

[10] Riehl, E., *Category Theory in Context*, Dover Modern Math Originals, 2016.

[11] Tanaka, K., *Lusternik–Schnirelmann category for categories and classifying spaces* Topology Appl. **239**, (2018), 65—80.

[12] Tanaka, K., *A combinatorial description of topological complexity for finite spaces* Algebr. Geom. Topol., **18(2)**, (2018), 779—796.