FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Unha introdución ás ecuacións en diferenzas

Martín Lema Pailos

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Unha introdución ás ecuacións en diferenzas

Martín Lema Pailos

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise matemática.
Título: Unha introdución ás ecuacións en diferenzas.
Breve descrición do contido
As ecuacións en diferenzas resultan de gran interese, non só como ferramenta para a aproximación das solucións de ecuacións diferenciais, senón tamén porque aparecen de forma natural en diversos fenómenos económicos ou biolóxicos, entre outros. Neste traballo introducirase o concepto de ecuación en diferenzas, para estudar posteriormente os resultados que garanten a existencia de solución, así como os métodos explícitos de resolución en certos casos. Comprobarase deste xeito a clara analoxía existente entre este tipo de ecuacións e as ecuacións diferenciais ordinarias.
Recomendacións
Ter cursadas as materias de Introdución ás Ecuacións Diferenciais Ordinarias e Ecuacións Diferenciais Ordinarias.

Índice xeral

Resumo

Neste traballo estudaremos as ecuacións en diferenzas. Introduciremos o cálculo en diferenzas para así poder traballar coas ecuacións en diferenzas, vendo métodos explícitos para resolvelas en certos casos e resultados que garanten a existencia de solución. Tras isto, veremos os sistemas de ecuacións lineais en diferenzas de forma breve, comprobando a analoxía existente cos sistemas de ecuacións lineais diferenciais á hora da busca de solucións. Por último, pasaremos a estudar o comportamento asintótico das solucións dos sistemas e das ecuacións non lineais en diferenzas, que é o que se coñece como teoría da estabilidade.

Abstract

In this work we will study the difference equations. We will introduce the calculation in differences in order to work with equations in differences, seeing explicit methods to solve them in certain cases and results that guarantee the existence of a solution. After this, we will see the systems of linear equations in differences in a brief way, checking the existing analogy with the systems of differential linear equations when looking for solutions. Finally, we will study the asymptotic behavior of the solutions of the systems and of the nonlinear equations and differences, which is known as the stability theory.

Introdución

Á hora de modelar procesos en distintas áreas do coñecemento (física, bioloxía, economía, etc) é preciso atopar ecuacións que poidan ser usadas para a predición da evolución destes procesos. As ecuacións máis coñecidas para este tipo de modelos son as ecuacións diferenciais, nas que se considera que o tempo é unha variable continua, pero en determinadas situacións non resulta adecuado tomar o tempo como unha variable continua.

Por exemplo, nos modelos económicos aparecen variables, como o tipo de interese, o produto nacional bruto, un cambio monetario, etc, que non teñen unha evolución temporal continua, senón que cambian cada certo intervalo fixo de tempo, que pode ser un día, unha semana, un mes ou un ano, por exemplo. Tamén nalgúns modelos poboacionais (nos que se quere estudar a variación dunha poboación) obsérvase que hai épocas nas que os individuos non se reproducen e despois hai épocas de cría ou épocas nas que non hai variación de individuos debido determinados motivos, como un periodo de hibernación. Ademais, cando se realiza un exprimento nun laboratorio e se quere estudar a evolución dos niveis dunha substacia, non é posible medilos de forma continua, o que se fai é medilos cada certo tempo (cada hora, cada día, etc.).

Así, en todas estas situacións non é posible medir a variación de forma continua e o que obtemos é un conxunto finito de datos. Cando pasa isto, decimos que o tempo toma valores discretos, é dicir, que toma valores enteiros. Non ten sentido modelar este tipo de situacións con ecuacións diferenciais, posto que non podemos considerar o tempo como algo continuo, neste caso, a ferramenta máis adecuada para traballar con estes modelos son as ecuacións en diferenzas. Unha ecuación en diferenzas é a que se pode escribir da forma $F(y(t+n), y(t+n+1), \dots, y(t+1), y(t)) = 0$ e a súa solución é calquera sucesión de valores que cumpra a ecuación anterior.

As ecuacións en diferenzas pódense interpretar como unha “discretización” das ecuacións diferenciais e, como veremos, existe unha clara analoxía entre o estudo de ambas (como algúns métodos de resolución ou resultados teóricos), pero o estudo das ecuacións en diferenzas ten interese en si mesmo e podemos observar diferenzas coas ecuacións diferenciais (como por exemplo a aparición do caos en ecuacións en diferenzas de orde un, o cal no caso de ecuacións diferenciais só acontece para ordes superiores). Nos últimos anos, a aplicación das ecuacións en diferenzas aumentou considerablemente ao empregarse en novos campos como o análise númerico, a teoría de control ou a ciencia computacional.

Este traballo consta de catro capítulos. No primeiro deles introduciremos o cálculo en diferenzas, fundamental para o posterior estudo das ecuacións en diferenzas. Para iso comezaremos definindo o operador diferenza e o operador shift, así como algunhas das súas principais propiedades e aplicacións ás funcións máis usuais. Tras isto, veremos o seu operador inverso, que é o que se coñece como suma indefinida ou antidiferenza, tamén coas súas propiedades máis importantes. Para rematar este capítulo, compararemos o cálculo diferencial co cálculo en diferenzas, vendo así as similitudes existentes entre o operador diferenza e a suma indefinida coa derivada e a integral, respectivamente.

No segundo capítulo definiremos as ecuacións en diferenzas e o concepto de solución solución para despois pasar a estudar o caso particular das ecuacións lineais. Explicaremos o problema do valor inicial, que consiste en impoñer unha serie de restriccións á nosa solución e veremos un resultado que garante a existencia e unicidade de solución a este problema. Explicaremos o que é unha ecuación en diferenzamos completa e a súa ecuación homoxénea asociada e demostraremos que a busca de todas as solucións da ecuación completa se reduce a buscar unha solución xeral da ecuación homoxénea asociada e unha particular da completa, análogo ao que acontece coas ecuacións diferenciais. Para isto, definiremos o que é un conxunto de funcións linealmente independentes, para despois explicar o que é un conxunto fundamental de solucións e como toda solución pode ser expresada como combinación lineal do conxunto fundamental de solucións. Pasaremos, por último, a ver métodos explícitos para a busca de solucións de ecuacións lineais en diferenzas nos seguintes casos: ecuacións lineais de orde un, ecuacións lineais con coeficientes constantes e ecuacións lineais con coeficientes non constantes. Para as ecuacións lineais con coeficientes constantes, primeiro veremos como obter unha solución da ecuación homoxénea asociada e despois o que se coñece como método do aniquilador para resolver a ecuación completa. Ademais, veremos dous exemplos da súa aplicación á vida real: o coñecido como problema dos coellos, proposto por Fibonacci, e a Ley de Hardy-Weinberg sobre os alelos dominantes dos xens. Por último, para as ecuacións lineais con coeficientes non constantes, aínda que estas non poden ser resoltas na meirande partes dos casos, veremos tres métodos de resolución: o método de variación de parámetros, que nos permite resolver a ecuación completa se temos n solucións linealmente independentes da homoxénea, o método de factorización, para o caso no que o operador shift da nosa ecuación se poida descompoñer en factores lineais, e o método de redución de orde, que nos permite reducir a orde da nosa ecuación coñecendo unha solución non nula da ecuación homoxénea asociada.

No terceiro capítulo pasaremos a traballar con sistemas de ecuacións lineais en diferenzas, de dous tipos: os autónomos, aqueles nos que a súa matriz de coeficientes non depende do tempo, e os non autónomos, os que a súa matriz de coeficientes depende do tempo. Comezaremos introducindo uns conceptos alxébricos como son os autovalores, autovectores e ecuación característica dunha matriz. Tras isto, estaremos en condicións de abordar os sistemas lineais autónomos, para os que tamén definiremos, ao igual que para as ecuacións, o problema do valor inicial e enunciaremos un teorema de unicidade de solución. Veremos tres métodos para resolver sistemas, dous para sistemas homoxéneos (un deles para o caso particular no que os autovalores da matriz asociada ao sistema sexan todos distintos e outro, coñecido por Algoritmo de Putzer, válido para todos os sistemas, independentemente de cales sexan os autovalores da súa matriz asociada) e un terceiro, coñecido por método de variación de parámetros, para sistemas non homoxéneos. No referente aos sistemas lineais non autónomos non entraremos en detalle, unicamente veremos a definición de matriz fundamental e uns resultados sobre ela, para finalizar vendo como se pode empregar para solucionar sistemas non autónomos, de forma análoga aos sistemas en ecuacións diferencais.

Para finalizar, no cuarto capítulo veremos as ecuacións e sistemas non lienais. Como normalmente estas ecuacións e sistemas non se poden resolver de forma explícita, imos estudar como se comportan as solucións a medida que aumenta o tempo, que é o que se coñece como comportamento asintótico e dá lugar á teoría da estabilidade. Centrarémonos nas ecuacións de orde un, pois veremos que calquera ecuación de orde maior, n, se pode transformar nun sistema de n ecuacións de orde un. Comezaremos definindo o que é un sistema non lineal e vendo conceptos básicos sobre estabilidade como os puntos fixos, e cando estes son estables, inestables ou asintoticamente estables. Veremos o método da escaleira, un método gráfico para estudar a estabilidade dos puntos fixos das ecuacións non lineais de orde un, e introduciremos a función de Lyapunov e como se usa para coñecer a estabilidade dos puntos fixo. Para rematar, estudaremos unha ecuación non lineal moi coñecida no ámbito da bioloxía, a ecuación loxística, que modela o crecemento poboacional dunha especie determinada nun ecosistema con recursos limitados e do que coñecemos a súa capacidade de carga.

Capítulo 1

Cálculo en diferenzas

Para o estudo e análise das ecuacións en diferenzas será de gran utilidade á hora de facilitar as operacións o uso do cálculo en diferenzas, en analoxía ao que acontecía co cálculo diferencial cando traballabamos con ecuacións diferenciais. Por este motivo, comezaremos introducindo dous novos operadores e algunhas das súas propiedades seguindo o Capítulo 1 de [5] e as Seccións 2.1 e 2.2 de [6].

1.1. Operador diferenza

Definición 1.1. Sexa y unha función con valores reais. Definimos o **operador diferenza**, Δ, con paso h como

$$\Delta\, y(t) = y(t+h) - y(t).$$

Diremos así que Δy é a primeira diferenza de y, que non será máis que a variación da función y cando t aumenta un paso h.

Normalmente consideraremos como dominio de y os números naturais, aínda que tamén pode ser útil tomar un intervalo real. A pesar de que neste traballo non o imos facer, esta definición pódese xeneralizar para funcións complexas.

A partir de agora, por comodidade, imos traballar con paso $h = 1$.

Ademais, no caso de empregar este operador cunha función con varias variables, indicaremos cun subíndice a variable respecto a cal imos realizar a diferenza. Por exemplo,

$$\Delta_t t\, e^n = (t+1)\, e^n - t\, e^n = e^n,$$

mentres que

$$\Delta_n t\, e^n = t\, e^{n+1} - t\, e^n = t\, e^n\, (e-1).$$

Pódense considerar diferenzas de orde maior. En particular, defínese a diferenza de orde 2 coma

$$\Delta^2 y(t) = \Delta(\Delta y(t)),$$

e, en xeral, a diferenza de orde n coma

$$\Delta^n\, y(t) = \Delta(\Delta^{n-1}\, y(t)).$$

Ademais do operador diferenza, tamén se acostuma a usar o operador shift.

Definición 1.2. Dada unha función y con valores reais, definimos o **operador shift, E,** como

$$Ey(t) = y(t+1).$$

Vemos que

$$\Delta = E - I,$$

onde I denota o operador identidade definido por

$$I\, y(t) = y(t).$$

Podemos expresar entón a diferenza de orde n do seguinte xeito

$$\Delta^n y(t) = (E-I)^n y(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-I)^k E^{n-k} y(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k y(t+n-k).$$

Procedemos agora á introdución dalgunhas propiedades importantes do operador Δ.

Teorema 1.3. *Sexan y e z dúas funcións. Tense que*

1. $\Delta^m(\Delta^n y(t)) = \Delta^{m+n} y(t)$ *para todo* $m, n \in \mathbb{N}$.
2. $\Delta(y(t) + z(t)) = \Delta y(t) + \Delta z(t)$.
3. $\Delta(c\, y(t)) = c\, \Delta\, y(t)$ *para calquera constante* c.
4. $\Delta(y(t)\, z(t)) = y(t)\, \Delta z(t) + E\, z(t)\, \Delta\, y(t)$.
5. $\Delta\left(\frac{y(t)}{z(t)}\right) = \frac{z(t)\,\Delta\, y(t) - y(t)\,\Delta\, z(t)}{z(t)\, E\, z(t)}$.

Demostración. 2 Por definición,

$$\begin{aligned} \Delta[y(t) + z(t)] &= [y(t+1) + z(t+1)] - [y(t) + z(t)] \\ &= [y(t+1) - y(t)] + [z(t+1) - z(t)] = \Delta y(t) + \Delta z(t). \end{aligned}$$

3 Usando a definición,

$$\Delta[c\,y(t)] = c\,y(t+1) - c\,y(t) = c[y(t+1) - y(t)] = c\,\Delta\,y(t).$$

4 Aplicando a definición á función $y(t)z(t)$,

$$\begin{aligned}\Delta[y(t\,)z(t)] &= y(t+1)\,z(t+1) - y(t)\,z(t)\\ &= y(t+1)\,z(t+1) - y(t)\,z(t+1) + y(t)\,z(t+1) - y(t)\,z(t)\\ &= \Delta\,y(t)\,E\,z(t) + y(t)\,\Delta\,z(t).\end{aligned}$$

□

Podemos escribir agora,

$$\begin{aligned}\Delta^2\,y(t) &= \Delta(\Delta\,y(t)) = \Delta(y(t+1) - y(t)) = \Delta\,y(t+1) - \Delta\,y(t)\\ &= (y(t+2) - y(t+1)) - (y(t+1) - y(t)) = y(t+2) - 2\,y(t+1) + y(t).\end{aligned}$$

Do mesmo xeito, por indución,

$$\begin{aligned}\Delta^n y(t) &= y(t+n) - n\,y(t+n-1) + \frac{n\,(n-1)}{2!}\,y(t+n-2) + \cdots + (-1)^n\,y(t)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\,y(t+n-k).\end{aligned}$$

Ademais destas propiedades, hai determinadas funcións que cumpren outras igualdades que poden resultar de utilidade. Antes de velas, imos definir unha función de gran importancia no estudo das ecuacións en diferenzas.

Definición 1.4. Definiremos a **función gamma**, Γ, como

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\,t^{z-1}dt,$$

con $z \in \mathbb{C}$, sempre que a parte real de z sexa positiva.

Aplicando integración por partes, vemos que

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}\,t^z dt = \left[-e^{-t}\,t^z\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-t}\,z\,t^{z-1}dt = z\int_0^\infty e^{-t}\,t^{z-1}dt,$$

polo que a función gamma satisfai a seguinte ecuación en diferenzas

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z),$$

ou o que é o mesmo

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Teorema 1.5. *Sexa a unha constante. Entón,*

1. $\Delta\, a^t = (a-1)\, a^t$.
2. $\Delta\, \operatorname{sen}(a\,t) = 2\, \operatorname{sen}(\frac{a}{2}) \cos(a\,(t+\frac{1}{2}))$.
3. $\Delta\, \cos(a\,t) = -2\, \operatorname{sen}(\frac{a}{2}) \operatorname{sen}(a\,(t+\frac{1}{2}))$.
4. $\Delta\, \log(a\,t) = \log(1+\frac{1}{t})$.
5. $\Delta\, \log(\Gamma(t)) = \log(t)$, *sendo* $t>0$.

Demostración. 2. Aplicando a propiedade trigonométrica da suma de senos, temos que

$$\Delta \operatorname{sen}(a\,t) = \operatorname{sen}(a\,(t+1)) - \operatorname{sen}(a\,t) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{a\,(t+1)-a\,t}{2}\right) \cos\left(\frac{a\,(t+1)+a\,t}{2}\right)$$
$$= 2\, \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(a\,\left(t+\frac{1}{2}\right)\right).$$

3. Do mesmo xeito, usando a propiedade trigonométrica da suma de cosenos, temos que

$$\Delta \cos(a\,t) = \cos(a\ (t+1)) - \cos(a\,t) = -2\, \operatorname{sen}\left(\frac{a\ (t+1)-t}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{a\ (t+1)+a\,t}{2}\right)$$
$$= -2\, \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right) \operatorname{sen}\left(a\,\left(t+\frac{1}{2}\right)\right).$$

□

Vexamos agora un exemplo onde combinamos o uso dos Teoremas 1.3 e 1.5.

Exemplo 1.6. Calculemos $\Delta \sec(\pi t)$:

$$\Delta \sec(\pi\,t) = \Delta\left(\frac{1}{\cos(\pi\,t)}\right) = \frac{(\cos(\pi\,t)\Delta(1) - (1)(\Delta(\cos(\pi\,t)))}{\cos(\pi\,t)\cos(\pi\,(t+1))} = \frac{2\, \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) \operatorname{sen}(\pi\,(t+\frac{1}{2}))}{\cos(\pi\,t)\cos(\pi\,(t+1))}$$
$$= \frac{2\,(\operatorname{sen}(\pi\,t)\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(\pi\,t)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}))}{\cos(\pi\,t)(\cos(\pi\,t)\cos(\pi) - \operatorname{sen}(\pi\,t)\operatorname{sen}(\pi))} = \frac{2\cos(\pi\,t)}{(\cos(\pi\,t)(-\cos(\pi\,t))}$$
$$= -2\, \sec(\pi\,t).$$

Unha das propiedades máis importantes empregadas no cálculo diferencial é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} t^n = n\, t^{n-1}.$$

Desafortunadamente, isto non se cumpre no cálculo en diferenzas pois

$$\Delta_t t^n = (t+1)^n - t^n.$$

Por este motivo, definimos a seguinte función, que xogará o papel das potencias para a derivada.

Definición 1.7. Definimos, sempre que teña sentido, o **factorial de orde r**, $t^{\underline{r}}$, como

$$t^{\underline{r}} = \begin{cases} t(t-1)\cdots(t-r+1), & r \in \mathbb{N}, \\ 1, & r = 0, \\ \frac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t-r)}, & r = -1, -2, \ldots \\ \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)}, & r \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

O factorial de orde r cumpre as seguintes propiedades.

Teorema 1.8. *Tense que*

1. $\Delta_t t^{\underline{r}} = r t^{\underline{r-1}}$.
2. $\Delta_t \binom{t}{r} = \binom{t}{r-1}$.
3. $\Delta_t \binom{r+t}{t} = \binom{r+t}{t+1}$.

1.2. Suma indefinida

Introduciremos agora o inverso dereito do operador diferenza para poder realizar cálculos con el.

Definición 1.9. Chamaremos **suma indefinida** (ou **antidiferenza**) de y, e denotarémolo por $\sum y(t)$ ou $\Delta^{-1} y(t)$, a calquera función que verifique que

$$\Delta \left(\sum y(t) \right) = y(t)$$

para todo t dentro do dominio de y.

Vemos así que este operador terá o papel da integral no cálculo diferencial. É dicir, mentres que a derivada ten por inversa á integral, o operador diferenza terá por inversa a antidiferenza. Do mesmo xeito que acontece coa integral, a antidiferenza dunha función non é única, tal e como podemos ver no seguinte exemplo.

Exemplo 1.10. Calculamos a suma indefinida $\sum 6^t$.

Sabemos, pola propiedade 1 do Teorema 1.3, que $\Delta 6^t = 5 \cdot 6^t$. Polo que

$$\sum 6^t = \frac{6^t}{5}.$$

Ademais, se C é unha función co mesmo dominio que 6^t e verifica que $\Delta C(t) = 0$, temos que

$$\Delta\left(\frac{6^t}{5}+C(t)\right)=\Delta\left(\frac{6^t}{5}\right)=6^t.$$

Daquela $\frac{6^t}{5}+C(t)$ é unha suma indefinida de 6^t. Diremos entón que

$$\sum 6^t=\frac{6^t}{5}+C(t),$$

onde C é unha función co mesmo dominio que 6^t e $\Delta C(t)=0$.

Enunciamos así o seguinte teorema.

Teorema 1.11. *Se z é unha suma indefinida de y, entón toda suma indefinida de y virá dada por*

$$\sum y(t)=z(t)+C(t),$$

onde C ten o mesmo dominio que y e ademais $\Delta C(t)=0$.

No caso de que esteamos traballando en conxuntos discretos, temos o seguinte corolario.

Corolario 1.12. *Sexa y unha función definida nun conxunto da forma $\{a, a+1, a+2, \dots\}$, sendo a un número real, e sexa z unha suma indefinida de y. Entón toda suma indefinida de y vén dada por*

$$\sum y(t)=z(t)+C,$$

sendo C unha constante arbitraria.

Empregando o Teorema 1.11 e o Corolario 1.12, podemos probar as propiedades que aparecen a continuación.

Teorema 1.13. *Sexa a unha constante. Entón, se C é unha función tal que $\Delta C(t)=0$, tense que*

1. $\sum a^t=\frac{a^t}{a-1}+C(t)$ *se* $a\neq 1$.
2. $\sum \operatorname{sen}(a\,t)=-\frac{\cos\left(a\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right)}+C(t)$ *se* $a\neq 2n\pi$.
3. $\sum \cos(a\,t)=\frac{\operatorname{sen}\left(a\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right)}+C(t)$.
4. $\sum \log(t)=\log(\Gamma(t))+C(t)$.
5. $\sum t^{\underline{a}}=\frac{t^{\underline{a+1}}}{a+1}+C(t)$.
6. $\sum \binom{t}{a}=\binom{t}{a+1}+C(t)$.
7. $\sum \binom{a+t}{t}=\binom{a+t}{t-1}+C(t)$.

Teorema 1.14. *Sexan y e z funcións con valores reais. Entón cúmprese que*

1. $\sum(y(t) + z(t)) = \sum y(t) + \sum z(t)$.
2. $\sum D\, y(t) = D \sum y(t)$, *se D é unha constante.*
3. $\sum(y(t)\Delta z(t)) = y(t)\, z(t) - \sum E\, z(t)\Delta y(t)$.

Demostración. 3. Pola propiedade 3 do Teorema 1.3

$$\Delta(y(t)\, z(t)) = y(t)\Delta z(t) + E\, z(t)\, \Delta y(t).$$

Daquela

$$\sum[y(t)\, \Delta\, z(t) + E\, z(t)\, \Delta y(t)] = \sum[\Delta(y(t)\, z(t))] = y(t)\, z(t) + C(t).$$

□

Para rematar, vexamos nas Táboas 1.1 e 1.2 as similitudes e diferenzas entre o cálculo diferencial e o cálculo en diferenzas, onde D respresenta ao operador derivada.

Cálculo en diferenzas	**Cálculo diferencial**
1. $\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$.	1. $\mathrm{D}\, y(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y(x)}{h}$.
2. $\Delta^n\, y = \Delta(\Delta^{n-1} y),\ n = 1, 2, ...$	2. $\mathrm{D}^n\, y = \mathrm{D}(\mathrm{D}^{n-1}\, y),\ n = 1, 2, ...$
3. $\Delta(c\, y) = c\, \Delta y\ \forall c \in \mathbb{R}$.	3. $\mathrm{D}(c\, y) = c\ \mathrm{D}\, y\ \forall c \in \mathbb{R}$.
4. $\Delta(c_1\, y_1 + c_2\, y_2) = c_1\, \Delta y_1 + c_2\, \Delta y_2$.	4. $\mathrm{D}(c_1\, y_1 + c_2\, y_2) = c_1\ \mathrm{D}\ y_1 + c_2\ \mathrm{D}\ y_2$.
5. $\Delta\, x^{\underline{n}} = n\, x^{\underline{n-1}}$.	5. $\mathrm{D}\, x^n = n\, x^{n-1}$.
6. $\Delta(u\, v) = (E\, u)\Delta v + v\Delta u$.	6. $\mathrm{D}(u\, v) = u\, \mathrm{D}\, v + v\, \mathrm{D}\, u$.
7. $\Delta(\frac{u}{v}) = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{vEv}$.	7. $\mathrm{D}(\frac{u}{v}) = \frac{v\, \mathrm{D}\, u - u\, \mathrm{D}\, v}{v^2}$.
8. Se y é un polinomio de grado n, entón $\Delta^n y$ é unha constante e todas as diferenzas de orde maior son nulas.	8. Se y é un polinomio de grado n, entón $\mathrm{D}^n\, y$ é unha constante e todas as derivadas de orde maior son nulas.

Táboa 1.1: Comparación entre o operador diferenza e a derivada.

Cálculo en diferenzas	**Cálculo diferencial**
1. $\sum (d\, y) = d \sum y \ \forall d \in \mathbb{R}$. 2. $\sum (d_1\, y_1 + c_2\, d_2) = d_1 \sum y_1 + d_2 \sum y_2$. 3. $\sum x^n = \frac{x^n}{n-1} + C$ sendo C unha función tal que $\Delta\, C = 0$. 4. $\sum (u\, \Delta\, v)) = u\, v - \sum E\, v \Delta u$.	1. $\int (d\, y) = d \int y \ \forall d \in \mathbb{R}$. 2. $\int (d_1\, y_1 + c_2\, d_2) = d_1 \int y_1 + d_2 \int y_2$. 3. $\int x^n \,\mathrm{d}\, n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ sendo C calquera constante. 4. $\int u \,\mathrm{d}\, v = u\, v - \int v \,\mathrm{d}\, u$.

Táboa 1.2: Comparación entre o operador antidiferenza e a integral.

Capítulo 2

Ecuacións lineais en diferenzas

Neste capítulo falaremos de ecuacións en diferenzas, para iso seguiremos fundamentalmente o Capítulo 3 de [6] e as Seccións 2.1, 2.2 e 2.3 de [5]. Outras referencias onde se pode consultar son [3] e [7].

Antes de comezar co estudo e resolución de ecuacións en diferenzas, definamos os conceptos de ecuación en diferenzas e de solución da mesma, para despois poder buscar as solucións.

Definición 2.1. Sexa y unha función con valores nun conxunto S. Chamaremos **ecuación en diferenzas** sobre S a unha ecuación que conteña os valores dunha ou máis diferenzas $\Delta\, y, \Delta^2\, y, ...$

Normalemente considérase S como o conxunto dos número naturais, aínda que tamén se poden considerar intervalos de $\mathbb{R}$. Por comodidade, no noso traballo empregaremos sempre un conxunto S da forma $\{a, a+1, a+2, ...\}$, onde $a \in \mathbb{R}$.

Definición 2.2. Unha función y é unha **solución dunha ecuación en diferenzas** sobre un conxunto S se os valores de y reducen a ecuación en diferenzas a unha identidade en S, é dicir, se os valores de y fan a ecuación en diferenzas unha afirmación certa en todo o conxunto S.
Se unha función y é solución dunha ecuación en diferenzas, diremos que a función satisfai a ecuación en diferenzas.

Exemplo 2.3. Consideremos a seguinte ecuación en diferenzas

$$y(t+2) - 2\,y(t+1) + y(t) = t\,(t+1), \quad t \in \mathbb{N},$$

que tamén pode ser expresada como

$$\Delta^2\, y(t) = t^{\underline{2}}.$$

Empregando o Teorema 1.8, sabemos que

$$\Delta^2 t^{\underline{4}} = \Delta\, 4\, t^{\underline{3}} = 12\, t^{\underline{2}},$$

polo que, $y(t) = \frac{t^{\underline{4}}}{12}$ é unha solución da nosa ecuación.

2.1. Resultados xerais de ecuacións en diferenzas lineais

Definición 2.4. Unha ecuación en diferenzas sobre un conxunto S é **lineal** se se pode escribir como

$$p_0(t)\, y(t+n) + p_1(t)\, y(t+n-1) + \cdots + p_{n-1}(t)\, y(t+1) + p_n(t)\, y(t) = r(t), \quad t \in S, \tag{2.1}$$

onde $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n$ e r son funcións con valores en S.

Definición 2.5. Unha ecuación lineal nun conxunto S dise de **orde n** se a podemos escribir da forma (2.1) con p_0 e p_n non nulos en S.

Definición 2.6. Diremos que unha ecuación en diferenzas lineal é **homoxénea** cando é da forma

$$p_0(t)\, y(t+n) + p_1(t)\, y(t+n-1) + \cdots + p_{n-1}(t)\, y(t+1) + p_n(t)\, y(t) = 0, \quad t \in S. \tag{2.2}$$

Notemos que a ecuación (2.5) tamén se pode escribir usando o operador shift

$$\left(p_n(t)\, E^n + \cdots + p_0(t)\, E^0\right) y(t) = r(t).$$

Ademais, como $E = \Delta + I$, tamén podemos expresar a ecuación (2.1) en termos do operador diferenza, pero isto non é de utilidade pois con este operador non sabemos a orde da nosa ecuación, como podemos ver no seguinte exemplo.

Exemplo 2.7. Consideremos a ecuación en diferenzas

$$\Delta^3 y(t) + 3\,\Delta^2 y(t) + \Delta\, y(t) - y(t) = r(t).$$

Se substituimos $\Delta = E - I$, vemos que

$$(E^3 - 3\,E^2 + 3\,E - I)\, y(t) + 3(E^2 - 2\,E + I)y(t) + (E - I)y(t) - y(t) = r(t).$$

Operando e simplificando obtemos

$$y(t+3) - 2\,y(t+1) = r(t),$$

que é de orde dous, aínda que na ecuación inicial puidésemos pensar que é de orde tres.

Definición 2.8. Chamaremos **problema de valor inicial** para unha ecuación da forma (2.1) á restricción de impoñer á nosa solución as seguintes condicións

$$y(t+k) = y_k$$

para $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Exemplo 2.9. Consideremos o seguinte problema de valor inicial

$$(P) \begin{cases} y(t+2) - 4\,y(t+1) + 4\,y(t) = 0, \\ y(0) = 1 \quad \text{e} \quad y(1) = 6. \end{cases}$$

A ecuación en diferenzas ten por solución xeral

$$y(t) = 2^t\,(C_1 + C_2\,t).$$

Se lle impoñemos as condicións iniciais obtemos

$$y(0) = C_1 \quad \text{e} \quad y(1) = 2\,(C_1 + C_2),$$

de onde

$$C_1 = 1 \quad \text{e} \quad 2\,(C_1 + C_2) = 6,$$

é dicir,

$$C_1 = 1 \quad \text{e} \quad C_2 = 2.$$

Polo que a solución ao noso problema (P) será

$$y(t) = 2^t\,(1 + 2\,t).$$

O problema de valor inicial ten unha única solución, tal e como veremos no seguinte resultado.

Teorema 2.10 (Teorema de existencia e unicidade de solución)**.** *Sexan $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n$ e r funcións con valores en $S = \{a, a+1, a+2, \dots\}$ con $p_0(t) \neq 0$ e $p_n(t) \neq 0$ para todo $t \in S$. Entón, para todo $t_0 \in S$ e calquera $y_0, \dots, y_{n-1}$ existe unha única solución y que satisfai a ecuación* (2.1) *para $t \in S$ e $y(t_0 + k) = y_k$ para $k = 0, \dots, n-1$.*

Demostración. Por hipótese coñecemos os n primeiros valores de y en t_0, que serán

$$y(t_0 + k) = y_k, \quad \text{para } k = 0, \dots, n-1.$$

Probaremos por indución que o valor de y para todo $t \in S$ está determinado de forma única. Se escribimos a ecuación (2.1) evaluada en t_0 temos que

$$p_0(t_0)\,y(t_0+n) + p_1(t_0)\,y(t_0+n-1) + \cdots + p_{n-1}(t_0)\,y(t_0+1) + p_n(t_0)\,y(t_0) = r(t_0).$$

Despexando na ecuación anterior,

$$p_0(t_0)\, y(t_0+n) = r(t_0) - p_1(t_0)\, y(t_0+n-1) - \cdots + p_{n-1}(t_0)\, y(t_0+1) - p_n(t_0)\, y(t_0),$$

e, como por hipótese $p_0(t) \neq 0$ para todo $t \in S$,

$$y(t_0+n) = \frac{r(t_0) - p_1(t_0)\, y(t_0+n-1) - \cdots + p_{n-1}(t_0)\, y(t_0+1) - p_n(t_0)\, y(t_0)}{p_0(t_0)}.$$

Vemos así que $y_n = y\,(t_0+n)$ está determinado de forma única.

Supoñamos agora que os valores de y son coñecidos para todo $t \in S$ ata $y_{t_0+j} = y(t_0+j)$ con $j \geq n$ e probemos que $y_{t_0+j+1} = y(t_0+j+1)$ está determinado de forma única. Consideremos $k_1 = t_0+j+1-n$ e escribamos a ecuación (2.1) para este caso particular

$$p_0(k_1)\, y(t_0+j+1) + p_1(k_1)\, y(t_0+j) + \cdots + p_{n-1}(k_1)\, y(t_0+j-n+2) + p_n(k_1)\, y(t_0+j-n-1) = r(k_1).$$

Despexando na ecuación anterior,

$$p_0(k_1)\, y(t_0+j+1) = r(k_1) - p_1(k_1)\, y(t_0+j) - \cdots + p_{n-1}(k_1)\, y(t_0+j-n+2) - p_n(k_1)\, y(t_0+j-n+1),$$

e, como por hipótese $p_0(t) \neq 0$ para todo $t \in S$,

$$y(t_0+j+1) = \frac{r(k_1) - p_1(k_1)\, y(t_0+j) - \cdots + p_{n-1}(k_1)\, y(t_0+j-n+2) - p_n(k_1)\, y(t_0+j-n+1)}{p_0(k_1)}.$$

Vemos así que y_{t_0+j+1} está determinado de forma única unha vez coñecidos os valores $y_{t_0}, y_{t_0+1}, \ldots, y_{t_0+n-1}$. Como j era arbitrario, queda probado que o valor $y(t)$ está determinado de forma única para todo $t \in S$.

$\square$

Unha vez visto que o problema de valor inicial ten unha única solución, imos caracterizar as solucións xerais de ecuacións da forma (2.1) cos seguintes resultados.

Teorema 2.11. *1. Se u_1 e u_2 son solucións de (2.2), entón tamén o será $C\,u_1 + D\,u_2$ para calquera constante C e D.*

2. Se u é solución de (2.2) e y é solución de (2.1), entón $u+y$ será solución de (2.1).

3. Se y_1 e y_2 son solucións de (2.1), entón $y_1 - y_2$ é solución de (2.2).

Isto dá lugar ao seguinte corolario.

Corolario 2.12. *Se z é unha solución de (2.1), entón toda solución y de (2.1) será da forma*

$$y(t) = z(t) + u(t),$$

onde u é unha solución da ecuación homoxénea (2.2).

Polo tanto, a busca de solucións para ecuacións da forma (2.1) redúcese simplemente a buscar todas as solucións da ecuación homoxénea (2.2) e buscar unha solución particular da ecuación completa (2.1). Vemos que é análogo ao que acontecía no caso das ecuacións diferenciais lineais.

Antes de proceder a buscar métodos para obter solucións da ecuación homoxénea, precisamos algunhas novas definicións.

Definición 2.13. Diremos que un conxunto de funcións $\{u_1, \dots, u_m\}$ é **linealmente dependente** no conxunto $S = \{a, a+1, \dots\}$ se existen constantes $C_1, \dots, C_m$, algunha non nula, tales que

$$C_1\, u_1(t) + C_2\, u_2(t) + \cdots + C_m\, u_m(t) = 0 \quad \text{para todo} \quad t \in S.$$

En caso contrario, diremos que o conxunto $\{u_1, \dots, u_m\}$ é **linealmente independente**.

Introduciremos agora unha matriz que xogará o papel da matriz Wronskiana nas ecuacións diferenciais.

Definición 2.14. Chamaremos **matriz de Casorati** á matriz que vén dada por

$$W(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_n(t) \\ u_1(t+1) & u_2(t+1) & \cdots & u_n(t+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(t+n-1) & u_2(t+n-1) & \cdots & u_n(t+n-1) \end{pmatrix}$$

onde $u_1, \dots, u_n$ son funcións dadas. O seu determinante,

$$w(t) = \det W(t),$$

denomínase **Casoratiano**.

Observemos que o Casoratiano verifica a ecuación

$$w(t) = \det \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_n(t) \\ \Delta u_1(t) & \Delta u_2(t) & \cdots & \Delta u_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^{n-1} u_1(t) & \Delta^{n-1} u_2(t) & \cdots & \Delta^{n-1} u_n(t) \end{bmatrix}.$$

Podemos dar agora a seguinte caracterización de dependencia.

Teorema 2.15. *Sexan $u_1, \dots, u_n$ solucións da ecuación* (2.2) *para $t \in S = \{a,\, a+1, \dots\}$. Entón as seguintes afirmacións son equivalentes:*

1. *O conxunto* $\{u_1, \dots, u_n\}$ *é linealmente dependente en* S.

2. *Existe algún* $t_0 \in S$ *tal que* $w(t_0) = 0$.

3. $w(t) = 0$ *para todo* $t \in S$.

Demostración. 1)⇒3) Supoñamos que $u_1, \dots, u_n$ son linealmente independentes. Entón existen constantes $C_1, C_2, \dots, C_n$, non todas nulas, tales que

$$\begin{aligned} C_1\, u_1(t) + \cdots + C_n\, u_n(t) &= 0 \\ &\vdots \\ C_1\, u_1(t+n-1) + \cdots + C_n\, u_n(t+n-1) &= 0 \end{aligned}$$

para todo $t \in S$. Como este sistema homoxéneo ten unha solución non trivial $C_1, C_2, \dots, C_n$, o determinante da matriz de coeficientes $w(t)$ é cero para todo $t \in S$.

3)⇒2) Trivial.

2)⇒1) Supoñamos agora que $w(t_0) = 0$ para algún $t_0 \in S$. Entón existen constantes $C_1, C_2, \dots, C_n$, non todas nulas, tales que

$$\begin{aligned} C_1\, u_1(t_0) + \cdots + C_n\, u_n(t_0) &= 0 \\ &\vdots \\ C_1\, u_1(t_0+n-1) + \cdots + C_n\, u_n(t_0+n-1) &= 0. \end{aligned}$$

Cosideremos

$$u(t) = C_1\, u_1(t) + \cdots + C_n\, u_n(t),$$

que é unha solución do problema do valor inicial formado pola ecuación (2.2) e as condicións iniciais $u(t_0 + k) = 0$, $k = 0, \dots n-1$. Polo Teorema 2.10, o problema

$$(P) \begin{cases} p_0(t)\, y(t+n) + p_1(t)\, y(t+n-1) + \cdots + p_{n-1}(t)\, y(t+1) + p_n(t)\, y(t) = 0, \quad t \in S \\ u(t_0 + k) = 0, \; k = 0, \dots, n-1, \end{cases}$$

ten unha única solución e como a función constante igual a 0 é solución de (P), entón $u = 0$, é dicir, $u(t) = 0$ para todo $t \in S$. Polo tanto, $u_1, \dots, u_n$ son linealmente dependentes.

□

Vexamos agora a importancia de atopar un conxunto de solucións da ecuación (2.2) que sexa linealmente independente no seguinte teorema.

Teorema 2.16. *Se* $u_1, \dots, u_n$ *son* n *solucións linealmente independentes de* (2.2)*, entón toda solución* u *de* (2.2) *pode ser expresada como*

$$u = C_1\, u_1 + \cdots + C_n\, u_n$$

para determinadas constantes $C_1, \dots, C_n$.

Demostración. Sexa u unha solución de (2.2). Como $w(t) \neq 0$ para $t \in S$, o sistema de ecuacións

$$\begin{aligned} C_1\, u_1(a) + \cdots + C_n\, u_n(a) &= u(a) \\ &\vdots \\ C_1\, u_1(a+n-1) + \cdots + C_n\, u_n(a+n-1) &= u(a+n-1) \end{aligned}$$

ten unha única solución $C_1, \dots, C_n$. Así, temos que $C_1\, u_1 + \cdots + C_n\, u_n$ é solución do problema de valor inicial dado por

$$(P) \begin{cases} p_0(t)\, y(t+n) + p_1(t)\, y(t+n-1) + \cdots + p_{n-1}(t)\, y(t+1) + p_n(t)\, y(t) = 0, \quad t \in S, \\ C_1\, u_1(a+k) + \cdots + C_n\, u_n(a+k) = u(a+k),\ k = 0, \dots, n-1. \end{cases}$$

Como u tamén é solución de (P) e polo Teorema 2.10 sabemos que este problema ten solución única, entón

$$u(t) = C_1\, u_1(t) + \cdots + C_n\, u_n(t) \text{ para todo } t \in S.$$

□

Posto que o conxunto de todas as solucións dunha ecuación lineal de orde n (2.2) forman un espazo vectorial de dimensión n, introduciremos os seguintes conceptos antes de comenzar coa súa resolución.

Definición 2.17. Chamaremos **conxunto fundamental de solucións** a un conxunto $\{u_1, \dots, u_n\}$ de n solucións da ecuación (2.2) que sexan linealmente independentes, é dicir, que sexan unha base do espazo vectorial de solucións.

Definición 2.18. Sexan $\{u_1, \dots, u_n\}$ un conxunto fundamental de solucións de (2.2). Chamaremos **solución xeral** á solución da ecuación lineal homoxénea (2.2). Vén dada por

$$a_1\, u_1(t) + \cdots + a_n\, u_n(t), \qquad t \in S,$$

con $a_1, \dots, a_n$ constantes arbitrarias.

Definición 2.19. Chamaremos **solución particular** a unha solución da ecuación completa (2.1).

2.2. Resolución de ecuacións lineais en diferenzas

2.2.1. Resolución de ecuacións lineais de primeira orde

Vexamos primeiro o caso particular de ecuacións lineais de orde un, que poden ser resoltas directamente de forma sinxela.

Definición 2.20. Sexan p e r dúas funcións dadas con $p(t) \neq 0$ para todo t. A **ecuación lineal en diferenzas de primeira orde** é

$$y(t+1) - p(t)\,y(t) = r(t), \qquad t \in S. \tag{2.3}$$

Se $p(t) = 1$ para todo t, entón a ecuación (2.3) simplifícase

$$\Delta\, y(t) = r(t),$$

e empregando o visto no capítulo anterior, a súa solución será

$$y(t) = \sum r(t) + C(t),$$

onde $\Delta\, C(t) = 0$.

Por simplicidade, imos supoñer que o dominio das nosas funcións é o conxunto discreto $S = \{a, a+1, a+2, ...\}$. Vexamos como resolver a ecuación (2.3). Consideremos primeiro a ecuación homoxénea

$$u(t+1) = p(t)\,u(t), \qquad t \in S, \tag{2.4}$$

que se resolve por iteración do seguinte xeito:

$$\begin{aligned}
u(a+1) &= p(a)\,u(a),\\
u(a+2) &= p(a+1)\,p(a)\,u(a),\\
&\vdots\\
u(a+n) &= u(a)\prod_{k=0}^{n-1} p(a+k).
\end{aligned}$$

Daquela, podemos escribir a solución como

$$u(t) = u(a)\prod_{s=a}^{t-1} p(s), \quad t \in S,$$

e entendendo que $\prod_{s=a}^{a-1} p(s) = 1$. Se substituímos agora na ecuación (2.3) $y(t) = u(t)\,v(t)$ temos que

$$u(t+1)\,v(t+1) - p(t)\,u(t)\,v(t) = r(t),$$

onde v é unha función que obteremos a continuación. Se subsitutimos $u(t+1) = p(t)\,u(t)$ na igualdade anterior

$$u(t+1)\,v(t+1) - u(t+1)\,v(t) = r(t),$$

é dicir

$$u(t+1)\,[v(t+1) - v(t)] = r(t),$$

ou equivalentemente

$$E\,u(t)\,\Delta\,v(t) = r(t).$$

Así

$$\Delta\,v(t) = \frac{r(t)}{E\,u(t)},$$

de onde

$$v(t) = \sum \frac{r(t)}{E\,u(t)} + C.$$

Polo tanto

$$y(t) = u(t)\left[\sum \frac{r(t)}{E\,u(t)} + C\right],$$

sendo C unha constante arbitraria. Chegamos así ao seguinte teorema.

Teorema 2.21. *Sexan $p \neq 0$ e r dúas funcións con dominio $\{a, a+1, ...\}$. Entón*

1. *A solución da ecuación* (2.4) *vén dada por*

$$u(t) = u(a)\prod_{s=a}^{t-1} p(s), \quad con \;\; t \,=\, a, a+1, ...$$

2. *Todas as solucións da ecuación* (2.3) *veñen dadas por*

$$y(t) = u(t)\left[\sum \frac{r(t)}{E\,u(t)} + C\right],$$

onde C é unha constante e u unha función non nula obtida en 1.

Estivemos resolvendo as ecuacións (2.3) e (2.4) para un dominio discreto. Xeneralicemos agora isto para dominios continuos. Por simplicidade, supoñamos que $p > 0$ e apliquemos logaritmos en ambos lados da ecuación (2.4):

$$\begin{aligned}\log|u(t+1)| &= \log|u(t)| + \log p(t),\\ \Delta \log|u(t)| &= \log p(t),\\ \log|u(t)| &= \sum \log p(t) + D(t),\end{aligned}$$

onde $\Delta D(t) = 0$. Entón

$$|u(t)| = \mathrm{e}^{D(t)}\;\mathrm{e}^{\sum \log p(t)},$$

ou, o que é o mesmo

$$u(t) = C(t)\;\mathrm{e}^{\sum \log p(t)}, \tag{2.5}$$

onde $\Delta\,C(t) = 0$. Así, usamos a ecuación (2.5) para obter unha solución da ecuación (2.4) en termos dunha suma indefinida e podemos calcular a solución da ecuación (2.3) usando o segundo apartado do Teorema 2.21, reemplazando a constante C por unha función arbitraria $C(t)$ con $\Delta C(t) = 0$.

2.2.2. Ecuacións lineais con coeficientes constantes

Trataremos agora de buscar n solucións linealmente independentes da ecuación homoxénea (2.2) no caso de que os coeficientes sexan todos constantes. Como $p_n \neq 0$, podemos dividir ambos lados da ecuación por p_n e obtemos así

$$u(t+n) + p_{n-1}\, u(t+n-1) + \cdots + p_0\, u(t) = 0, \quad t \in S, \tag{2.6}$$

onde $p_0, \ldots, p_{n-1}$ son constantes e $p_0 \neq 0$.

Definición 2.22.
1. Chamaremos **polinomio característico** da ecuación (2.6) ao seguinte polinomio
$$\lambda^n + p_{n-1}\, \lambda^{n-1} + \cdots + p_0.$$
2. Chamaremos **ecuación característica** da ecuación (2.6) a
$$\lambda^n + p_{n-1}\, \lambda^{n-1} + \cdots + p_0 = 0.$$
3. As solucións da ecuación característica, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, son os **autovalores**.

Vexamos agora como obter un sistema de solucións linealmente independentes de (2.6). Para iso escribamos a ecuación (2.6) empregando o operador shift:

$$\left(E^n + p_{n-1}\, E^{n-1} + \cdots + p_0\right)\, u(t) = 0, \quad t \in S. \tag{2.7}$$

Sexan $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ os autovalores asociados á súa ecuación característica e $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ as multiplicidades correspondentes. Podemos escribir así a ecuación característica asociada a (2.7) como

$$\lambda^n + p_{n-1}\, \lambda^{n-1} + \cdots + p_0 = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k} = 0.$$

Vemos así que (2.7) se pode expresar como

$$(E - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (E - \lambda_k)^{\alpha_k} u(t) = 0, \quad t \in S, \tag{2.8}$$

onde $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n$ e a orde dos factores é arbitraria. Notemos que os autovalores son non nulos pois $p_0 \neq 0$. Se consideramos a ecuación

$$(E - \lambda_1)^{\alpha_1}\, u(t) = 0, \quad t \in S, \tag{2.9}$$

todas as solucións de (2.9) serán tamén solución de (2.8). Vexamos como calcular esta solución:

- Se $\alpha_1 = 1$, a ecuación (2.9) redúcese a $u(t+1) = \lambda_1 u(t)$, que ten como solución $u(t) = \lambda_1^t$, $t \in S$.

- Se $\alpha_1 > 1$, consideremos $u(t) = \lambda_1^t\, v(t)$ e substituamos en (2.9):

$$\begin{aligned}
(E-\lambda_1)^{\alpha_1}\, \lambda_1^t\, v(t) &= \sum_{i=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{i} (-\lambda_1)^{\alpha_1-i}\, E^i\, \lambda_1^t\, v(t) \\
&= \sum_{i=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{i} (-1)^{\alpha_1-i} \lambda_1^{\alpha_1-i}\, E^i\, \lambda_1^t\, v(t) \\
&= \sum_{i=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{i} (-1)^{\alpha_1-1}\, \lambda_1^{\alpha_1-i}\, \lambda_1^{t+i}\, E^i\, v(t) \\
&= \lambda_1^{\alpha_1+t} \sum_{i=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{i} (-1)^{\alpha_1-i}\, E^i\, v(t) \\
&= \lambda_1^{\alpha_1+t}\, (E-1)^{\alpha_1}\, v(t) = \lambda_1^{\alpha_1+t}\, \Delta^{\alpha_1}\, v(t) = 0,
\end{aligned}$$

  onde 1 representa a función identidade.

Polas propiedades do Teorema 1.5 sabemos que $\Delta^{\alpha_1}\, v(t) = 0$ se $v(t) = 1, t, t^2, \dots, t^{\alpha_1-1}$. Así, a ecuación (2.9) ten α_1 solucións que serán $\lambda_1^t, t\,\lambda_1^t, t^2\,\lambda_1^t, \dots, t^{\alpha_1-1}\,\lambda_1^t$. Repetindo este proceso para todo α_i con $i \in \{1, \dots, k\}$ obtemos finalmente n solucións da ecuación (2.6) que son linealmente independentes. Recollemos isto no seguinte teorema.

Teorema 2.23. *Sexan $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ con multiplicidade $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, respectivamente, os autovalores da ecuación* (2.6)*. Entón* (2.6) *ten n solucións independentes que veñen dadas por*

$$\lambda_1^t, \dots, t^{\alpha_1-1}\lambda_1^t,\ \lambda_2^t, \dots, t^{\alpha_2-1}\lambda_2^t,\ \dots,\ \lambda_k^t, \dots, t^{\alpha_k-1}\lambda_k^t.$$

Observación 2.24. Se entre os autovalores temos un par complexo $\lambda_1 = a+b\,i$ e $\lambda_2 = a-b\,i$, entón

$$\lambda_1^t = (a+b\,i)^t \quad \text{e} \quad \lambda_2^t = (a-b\,i)^t.$$

Se expresamos os autovalores complexos en función das súas coordenadas polares temos que

$$a = r\,\cos(\theta), \qquad\qquad b = r\,\operatorname{sen}(\theta),$$

onde $r = \sqrt{a^2+b^2}$ e $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ se $a \neq 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ se $a = 0$ e $b > 0$ e $\theta = -\frac{\pi}{2}$ se $a = 0$ e $b < 0$. Así

$$\begin{aligned}
c_1\,\lambda_1^t + c_2\,\lambda_2^t &= c_1(r\,\cos(\theta) + i\,r\,\operatorname{sen}(\theta))^t + c_2(r\,\cos(\theta) - i\,r\,\operatorname{sen}(\theta))^t \\
&= r^t\left[(c_1+c_2)\cos(t\,\theta) + i\,(c_1-c_2)\operatorname{sen}(t\,\theta)\right] \\
&= r^t\left[a_1\,\cos(t\,\theta) + a_2\,\operatorname{sen}(t\,\theta)\right].
\end{aligned}$$

Polo tanto, en lugar de tomar como solucións independentes λ_1^t e λ_2^t, que serán funcións complexas, tomaremos $r^t\,\cos(\theta\,t)$ e $r^t\,\operatorname{sen}(\theta\,t)$. No caso de que os autovalores complexos

$\lambda = a \pm b\,i$ teñan multiplicidade $\alpha > 1$ temos que, de forma análoga aos autovalores reais, as solucións reais linealmente independentes virán dadas por

$$r^t \cos(\theta\, t), \dots, t^{\alpha-1}\, r^t \cos(\theta\, t),\ r^t \operatorname{sen}(\theta\, t), \dots, t^{\alpha-1}\, r^t \operatorname{sen}(\theta\, t).$$

Exemplo 2.25. Buscaremos todas as solucións da ecuación en diferenzas

$$u(t+3) - 7\,u(t+2) + 16\,u(t+1) - 12\,u(t) = 0, \quad t = a,\, a+1, \dots$$

A ecuación característica asociada será

$$\lambda^3 - 7\,\lambda^2 + 16\,\lambda - 12 = 0,$$

ou o que é o mesmo

$$(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0.$$

Así, aplicando o Teorema 2.23, sabemos que as tres solucións linealmente independentes da ecuación en diferenzas son

$$u_1(t) = 2^t, \quad u_2(t) = t\,2^t \quad \text{e} \quad u_3(t) = 3^t.$$

Así, a solución xeral da ecuación vén dada por

$$u(t) = C_1\, 2^t + C_2\, t\, 2^t + C_3\, 3^t,$$

con C_1, C_2, C_3 constantes arbitrarias.

Agora imos ver como resolver unha ecuación non homoxénea con coeficientes constantes,

$$y(t+n) + p_{n-1}\, y(t+n-1) + \cdots + p_0\, y(t) = r(t), \quad t \in S, \tag{2.10}$$

por un método coñecido como **método do aniquilador**, cando $r(t)$ é a solución dunha ecuación homoxénea con coeficientes constantes. Recollemos a idea central deste método no seguinte teorema.

Teorema 2.26. *Supoñamos que y é solución da ecuación* (2.10)*, é dicir,*

$$(E^n + p_{n-1}\, E^{n-1} + \cdots + p_0)\, y(t) = r(t), \quad t \in S,$$

e existen $q_0, \dots, q_{m-1}$ para os cales se satisfai

$$(E^m + q_{m-1}\, E^{m-1} + \cdots + q_0) r(t) = 0, \quad t \in S.$$

Entón y satisfai a ecuación

$$(E^m + \cdots + q_0)(E^n + \cdots + p_0)\, y(t) = 0, \quad t \in S.$$

Demostración. Basta con aplicar o operador $E^m + \cdots + q_0$ a ambos lados da ecuación (2.10). □

Apliquemos este teorema a un caso particular.

Exemplo 2.27. Consideremos a ecuación

$$y(t+2) - 7\,y(t+1) + 6\,y(t) = t. \tag{2.11}$$

Comecemos escribindo esta ecuación empregado o operador shift

$$(E^2 - 7\,E + 6)y(t) = t,$$

ou equivalentemente

$$(E-1)(E-6)\,y(t) = t.$$

Podemos ver que a función t satisfai a ecuación homoxénea

$$(E-1)^2\,t = \Delta^2\,t = 0,$$

polo que $(E-1)^2$ será o noso aniquilador. Entón, aplicando o Teorema 2.26, a función $y(t)$ é solución da seguinte ecuación

$$(E-1)^3(E-6)\,y(t) = 0.$$

Agora, empregando o Teorema 2.23, a solución xeral da ecuación homoxenénea anterior será da forma

$$y(t) = C_1\,6^t + C_2 + C_3\,t + C_4\,t^2.$$

Para determinar os coeficientes, imos substituir $y(t)$ na ecuación orixinal. Como $C_1\,6^t + C_2$ satisfai a parte homoxénea da ecuación, abonda con substituír $y(t) = C_3\,t + C_4\,t^2$, obtendo

$$C_3\,(t+2) + C_4\,(t+2)^2 - 7\,C_3\,(t+1) - 7\,C_4\,(t+2)^2 + 6\,C_3\,t + 6\,C_4\,t^2 = t,$$

ou o que é o mesmo

$$t^2\,[C_4 - 7\,C_4 + 6\,C_4] + t\,[4\,C_4 + C_3 - 14\,C_4 - 7\,C_3 + 6\,C_3] + [4\,C_4 + 2\,C_3 - 7\,C_4 - 7\,C_3] = t.$$

Se igualamos os coeficientes dos dous lados da igualdade, obtemos o seguite sistema de ecuacións

$$-10\,C_4 = 1$$
$$-5\,C_3 - 3\,C_4 = 0$$

que ten por solución $C_4 = -\frac{1}{10}$ e $C_3 = \frac{3}{50}$. Así, a solución da ecuación (2.11) será

$$y(t) = C_1\,6^t + C_2 + \frac{3}{50}\,t - \frac{1}{10}\,t^2.$$

Algunhas aplicacións das ecuacións lineais con coeficientes constantes

Exemplo 2.28 (A sucesión de Fibonacci. O problema dos coellos)**.** Este problema foi formulado por Leonardo de Pisa en [11] e xurdiu tratando de dar resposta á seguinte pregunta: Cantos pares de coellos haberá despois dun ano se se comeza cunha parella adulta de coellos e se cada parella ten un par de descendentes cada mes a partir da súa etapa adulta (o segundo mes)?

O primeiro par de coellos reprodúcese ao final do primeiro mes, temos así dous pares. Ao final do segundo mes, só se pode reproducir a primeira parella e temos entón tres pares de coellos. Ao final do terceiro mes, a primeira e a segunda parella reprodúcense e temos cinco pares de coellos. Continuando con este procedemento, chegamos a que se $F(n)$ é o número de pares de coellos ao final do mes n, entón a relación de recurrencia que representa este modelo vén dada pola ecuación linear en diferenzas de segunda orde seguinte

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n), \qquad F(0) = 1, \qquad F(1) = 2, \qquad 0 \leq n \leq 10.$$

Este exemplo é un caso particular da sucesión de Fibonacci, que vén dada por

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n), \qquad F(0) = 0, \qquad F(1) = 1, \qquad n \geq 0. \tag{2.12}$$

A ecuación característica correspondente a (2.12) é

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Os autovalores correspondentes son $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Así, a solución xeral de (2.12) é

$$F(n) = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \qquad n \geq 1.$$

Empregrando os valores iniciais $F(0) = 0$ e $F(1) = 1$, obtemos que

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Consecuentemente,

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right], \quad n \geq 1.$$

Exemplo 2.29 (Ley de Hardy-Weinberg, Sección 1.7 de [1])**.** Calquera característica dun individuo, como a cor de ollos, está determinado por un par de xens, un procedente do seu pai e outro procedente de súa nai. Cada xen ten dúas formas, a dominante denotada por A e a recesiva denotada por a. Así, cada individuo pode ter tres combinacións diferentes de xens: dominantes AA, híbridos (Aa ou aA) ou recesivos aa.

Supoñamos que na xeración t-ésima, as proporcións de dominantes, híbridos e recesivos son $p(t)$, $q(t)$ e $r(t)$ respectivamente, de maneira que

$$p(t)+q(t)+r(t)=1, \quad p(t)\geq 0, \; q(t)\geq 0, \; r(t)\geq 0.$$

Se consideramos que os apareamentos son aleatorios (é dicir, non depende de se os individuos son dominantes, híbridos ou recesivos), todos teñen a mesma supervivencia e igual fertilidade, vexamos como varían as proporcións de cada xenotipo ao longo das xeracións. Daquela, tendo en conta que $p(t+1)$ é a probabilidade de que un individuo sexa dominante na xeración $(t+1)$-ésima, é dicir, a probabilidade de que recibise un xen dominante, A, do pai e outro da nai, podemos escribir que

$$p(t+1)=\left(p(t)+\frac{1}{2}\,q(t)\right)\cdot\left(p(t)+\frac{1}{2}\,q(t)\right)=\left(p(t)+\frac{1}{2}\,q(t)\right)^2.$$

Do mesmo xeito,

$$q(t+1)=2\left(p(t)+\frac{1}{2}\,q(t)\right)\left(r(t)+\frac{1}{2}\,q(t)\right)$$

e

$$r(t+1)=\left(t(t)+\frac{1}{2}\,q(t)\right)^2.$$

Notemos que estas novas proporcións verifican que

$$p(t+1)+q(t+1)+r(t+1)=\left(p(t)+\frac{1}{2}q(t)+\frac{1}{2}q(t)+r(t)\right)^2=1.$$

Se queremos ver as proporcións de dominantes da seguinte xeración

$$\begin{aligned}p(t+2)&=\left(p(t+1)+\frac{1}{2}q(t+1)\right)^2=\left(\left(p(t)+\frac{1}{2}q(t)\right)^2+\left(p(t)+\frac{1}{2}q(t)\right)\left(r(t)+\frac{1}{2}q(t)\right)\right)^2\\&=\left(p(t)+\frac{1}{2}q(t)\right)^2\left(p(t)+\frac{1}{2}q(t)+\frac{1}{2}q(t)+r(t)\right)^2=\left(p(t)+\frac{1}{2}q(t)\right)^2=p(t+1).\end{aligned}$$

Obtemos así a seguinte ecuación en diferenzas

$$p(t+2)=p(t+1).$$

Esta ecuación tan simple demostranos que a proporción de individuos dominantes se matén constante ao longo das xeracións. Podemos realizar o mesmo proceso para a proporción de individuos híbridos e recesivos. Isto explica, por exemplo, porque aínda que o xen que determina a cor de ollos marrón é dominante, hoxe en día continua existindo xente con ollos de cor verde ou azul.

2.2.3. Ecuacións lineais con coeficientes non constantes

En xeral, as ecuacións de orde superior a un con coeficientes non constantes non poden ser resoltas na meirande parte dos casos. Por este motivo, veremos distintos métodos que servirán para obter solucións explícitas en determinadas situacións.

Consideremos de novo a ecuación non homoxénea

$$p_n(t)\, y(t+n) + p_{n-1}(t)\, y(t+n-1) + \cdots + p_1(t)\, y(t+1) + p_0(t)\, y(t) = r(t), \quad t \in S, \tag{2.13}$$

e a ecuación homoxénea asociada

$$p_n(t)\, y(t+n) + p_{n-1}(t)\, y(t+n-1) + \cdots + p_1(t)\, y(t+1) + p_0(t)\, y(t) = 0, \quad t \in S. \tag{2.14}$$

Método de variación de parámetros

O método de **variación de parámetros** é o procedemento xeral para resolver (2.13). Se supoñemos que coñecemos n solucións linealmente independentes de (2.14), a través deste método obtemos todas as solucións de (2.13) en termos de n sumas indefinidas. Veremos este método para o caso particular $n = 2$. Sexan u_1 e u_2 dúas solucións independentes de

$$p_2(t)\, y(t+2) + p_1(t)\, y(t+1) + p_0(t)\, y(t) = 0, \quad t \in S. \tag{2.15}$$

Buscaremos unha solución da forma

$$y(t) = a_1(t)\, u_1(t) + a_2(t)\, u_2(t),$$

onde a_1 e a_2 teñen que ser determinados. Vemos que

$$\begin{aligned} y(t+1) &= a_1(t+1)\, u_1(t+1) + a_2(t+1)\, u_2(t+1) \\ &= a_1(t)\, u_1(t+1) + a_2(t)\, u_2(t+1) + \Delta\, a_1(t)\, u_1(t+1) + \Delta\, a_2(t)\, u_2(t+1). \end{aligned}$$

Se escollemos as funcións a_1 e a_2 de forma que

$$\Delta\, a_1(t)\, u_1(t+1) + \Delta\, a_2(t)\, u_2(t+1) = 0, \tag{2.16}$$

entón

$$\begin{aligned} y(t+2) &= a_1(t+1)\, u_1(t+2) + a_2(t+1)\, u_2(t+2) \\ &= a_1(t)\, u_1(t+2) + a_2(t)\, u_2(t+2) + \Delta\, a_1(t)\, u_1(t+2) + \Delta\, a_2(t)\, u_2(t+2). \end{aligned}$$

Se subsituímos agora as expresións de $y(t)$, $y(t+1)$ e $y(t+2)$ na ecuación (2.15) temos que

$$\begin{aligned}
&p_2(t)\, y(t+2) + p_1(t)\, y(t+1) + p_0(t)\, y(t) \\
&= a_1(t)[p_2(t)\, u_1(t+2) + p_1(t) u_1(t+1) + p_0(t)\, u_1(t)] \\
&\quad + a_2(t)[p_2(t)\, u_2(t+2) + p_1(t) u_2(t+1) + p_0(t)\, u_2(t)] \\
&\quad + p_2(t)[u_1(t+2)\, \Delta\, a_1(t) + u_2(t+2)\, \Delta\, a_2(t)].
\end{aligned}$$

Como u_1 e u_2 satisfan (2.15), os dous primeiros termos da expresión son nulos e así, $y(t)$ satisfai (2.13) se

$$u_1(t+2)\, \Delta\, a_1(t) + u_2(t+2)\, \Delta\, a_2(t) = \frac{r(t)}{p_2(t)}. \tag{2.17}$$

Podemos concluír así que $y(t) = a_1(t)\, u_1(t) + a_2(t)\, u_2(t)$ é solución de (2.13) se $\Delta\, a_1(t)$ e $\Delta\, a_2(t)$ verifican as ecuacións (2.16) e (2.17). Este sistema de ecuacións lineais ten unha única solución se a matriz de coeficientes, $W(t+1)$, ten determinante distinto de cero (en virtude do Teorema 2.15.

Recollemos o caso para n arbitrario no seguinte resultado.

Teorema 2.30. *Sexan $u_1, \ldots, u_n$ n solucións linealmente independentes de* (2.14). *Entón*

$$y(t) = a_1(t)\, u_1(t) + \cdots + a_n(t)\, u_n(t)$$

é unha solución de (2.13), *sendo $a_1, \ldots, a_n$ funcións que satisfan o seguinte sistema de ecuacións*

$$W(t+1) \begin{bmatrix} \Delta\, a_1\,(t) \\ \vdots \\ \Delta\, a_n\,(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{r(t)}{p_n\,(t)} \end{bmatrix}.$$

Método de factorización

Escribamos agora a ecuación lineal de orde n en termos do operador shift

$$(p_n(t)\, E^n + \cdots + p_0(t))\, y(t) = r(t), \quad t \in S.$$

No caso de que o factor que involucra ao operador shift se poida factorizar en factores lineais, a solución á nosa ecuación en diferenzas pode obterse resolvendo unha serie de ecuacións de primeira orde. Ilustremos esta situación cun exemplo.

Exemplo 2.31. Consideremos a ecuación en diferenzas

$$\left(E^2 - (t-1)\, E - t\right)\, y(t) = 0, \quad t \in S,$$

ou equivalentemente

$$(E+1)\,(E-t)\,y(t)=0.$$

Se consideramos entón a ecuación de primeira orde dada por

$$(E+1)\,v(t)=0,$$

que ten como solución $v(t)=(-1)^t C$, para obter a solución da ecuación orixinal teremos que resolver a ecuación dada por

$$(E-t)\,y(t)=(-1)^t\,C.$$

A ecuación homoxénea asociada será

$$(E-t)y(t)=0.$$

Desenvolvendo isto, temos que

$$y(t+1)-t\,y(t)=0,$$

ou o que é o mesmo,

$$y(t+1)=t\,y(t).$$

Vemos así que esta ecuación en diferenzas satisfaina a función gamma, polo que a solución xeral da ecuación homoxénea é da forma $\frac{D\,\Gamma(t+1)}{t}$, onde D é unha constante arbitraria. Empregando o Teorema 2.21 temos que

$$y(t)=\frac{D\,\Gamma(t+1)}{t}+\frac{C\,\Gamma(t+1)}{t}\sum\frac{(-1)^t\,t}{\Gamma(t+2)}.$$

Se consideramos que t toma os valores discretos $0,1,2,...$ entón

$$y(t)=D\,(t-1)!+C\,(t-1)!\sum_{k=0}^{t-1}\frac{(-1)^k\,(k-1)}{(k+1)!},$$

onde C e D son constantes arbitrarias.

Método de redución de orde

Outro caso particular no que podemos calcular a solución dunha ecuación de orde superior a un é cando somos quen de atopar unha solución non nula da ecuación homoxénea asociada. Neste caso, poderemos reducir nunha unidade a orde da nosa ecuación. Así, se traballamos cunha ecuación de segunda orde, poderemos encontrar unha solución independente da primeira e conseguir así unha solución xeral da ecuación.

Vexamos primeiro a ecuación de primeira orde que satisfai o Casoratiano.

Lema 2.32. *Sexan $u_1, \dots, u_n$ solucións da ecuación*

$$p_n(t)\, u(t+n) + \cdots + p_0(t)\, u(t) = 0, \quad t \in S,$$

e sexa $w(t)$ o Casoratiano correspondente. Entón $w(t)$ satisfai

$$w(t+1) = (-1)^n \frac{p_0(t)}{p_n(t)}\, w(t), \quad t \in S. \tag{2.18}$$

Demostración. Denotemos por F_i a fila i-ésima da matriz de Casorati. O valor de $w(t+1)$ non varía se cambiamos a derradeira fila por

$$F_n + \frac{p_1(t)}{p_n(t)}\, F_1 + \cdots + \frac{p_{n-1}(t)}{p_n(t)}\, F_{n-1}.$$

Así, esta nova fila será

$$\left[-\frac{p_0(t)}{p_n(t)}\, u_1(t), \cdots, -\frac{p_{0(t)}}{p_n(t)}\, u_n(t) \right].$$

Temos así que

$$w(t+1) = \det \begin{bmatrix} u_1(t+1) & \cdots & u_n(t+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(t+n-1) & \cdots & u_n(t+n-1) \\ -\frac{p_0(t)}{p_n(t)}\, u_1(t) & \cdots & -\frac{p_0(t)}{p_{n(t)}}\, u_n(t) \end{bmatrix} = (-1)^n \frac{p_0(t)}{p_n(t)}\, w(t).$$

□

Supoñamos agora que u_1 é unha solución non nula de

$$p_2(t)\, y(t+2) + p_1(t)\, y(t+1) + p_0(t)\, y(t) = 0, \quad t \in S, \tag{2.19}$$

e sexa u_2 outra solución. Recordando que

$$\Delta \frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{u_1(t)\, \Delta\, u_2(t) - u_2(t)\, \Delta\, u_1(t)}{u_1(t)\, u_1(t+1)} = \frac{w(t)}{u_1(t)\, u_1(t+1)},$$

obtemos que

$$\frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \sum \frac{w(t)}{u_1(t)\, u_1(t+1)},$$

ou o que é o mesmo

$$u_2(t) = u_1(t) \sum \frac{w(t)}{u_1(t)\, u_1(t+1)}.$$

Obtemos así o seguinte teorema, que se coñece como **método de redución de orde para ecuacións en diferenzas de orde dous.**

Teorema 2.33. *Se u_1 é unha solución de* (2.19) *que non se anula nunca e $p_0(t) \neq 0$ e $p_2(t) \neq 0$, para todo $t \in S$, entón $u_2(t) = u_1(t) \sum \frac{w(t)}{u_1(t)\, u_1(t+1)}$ proporciona unha solución de* (2.19)*, onde $w(t)$ é unha solución non nula de* (2.18)*.*

Exemplo 2.34. Resolvamos a ecuación

$$u(t+2) - u(t+1) - \frac{1}{t+1} u(t) = 0.$$

Podemos comprobar que $u_1(t) = t + 1$ é unha solución da ecuación. Tendo en conta que o Casoratiano $w(t)$ satisfai

$$w(t+1) = -\frac{1}{t+1}\, w(t),$$

podemos escoller entón

$$w(t) = \frac{(-1)^t}{t!}.$$

Así

$$u_2(t) = (t+1) \sum_{k=0}^{t-1} \frac{(-1)^k}{(k+2)!}.$$

Polo tanto a solución xeral da nosa ecuación será

$$u(t) = (t+1) \left(C + D \sum_{k=0}^{t-1} \frac{(-1)^k}{(k+2)!} \right).$$

Capítulo 3

Sistemas de ecuacións lineais en diferenzas

Pese a que ata agora unicamente traballamos cunha ecuación en diferenzas, moitos modelos matemáticos envolven a máis dunha ecuación, por ese motivo estudaremos agora os sistemas de ecuacións lineais en diferenzas. Diferenciaremos dous tipos de sistemas, non autónomos (aqueles nos que a súa matriz de coeficientes depende do tempo) e autónomos (aqueles nos que a súa matriz de coeficientes non depende do tempo). Ademais, veremos algúns métodos de resolución destes. Para iso seguiremos a Sección 3.1 de [3] e a Sección 4.1 de [6]. Outra referencia onde se pode consultar é [7].

Definición 3.1. Chamaremos **sistema lineal en difenzas non autónomo**, ou variante no tempo, ao seguinte sistema de n ecuacións en diferenzas con coeficientes variables

$$\begin{aligned}
u_1(t+1) &= a_{11}(t)\,u_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)\,u_n(t) + f_1(t),\\
u_2(t+1) &= a_{21}(t)\,u_1(t) + \cdots + a_{2n}(t)\,u_n(t) + f_2(t),\\
&\vdots\\
u_n(t+1) &= a_{n1}(t)\,u_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)\,u_n(t) + f_n(t),
\end{aligned}$$

para $t \in S = \{a, a+1, \dots\}$. Podemos escribir este sistema en forma de ecuación vectorial como

$$u(t+1) = A(t)\,u(t) + f(t), \quad t \in S, \tag{3.1}$$

onde A é unha matriz non singular e

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}, \qquad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \qquad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Se $f(t) = 0$ para todo $t \in S$, temos un **sistema non autónomo homoxéneo** da seguinte forma

$$u(t+1) = A(t)\, u(t). \tag{3.2}$$

Antes de adentrarnos no seu estudo, introduciremos algúns conceptos alxébricos previos para poder abordar sistemas de ecuacións.

Definición 3.2. Dada unha matriz A con coeficientes reais, chamaremos **autovalores** da matriz A aos números reais ou complexos, denotados por λ, que verifican que

$$A\, v = \lambda v, \tag{3.3}$$

para algún vector $v \in \mathbb{C}^n$ non nulo. Este vector v é o que denominaremos **autovector** correspondente ao autovalor λ. O **espectro de** A, denotado por $\sigma(A)$, é o conxunto de autovalores de A e o seu **radio espectral** é

$$r(A) = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Observación 3.3. Notemos que podemos reescribir a ecuación (3.3) como

$$(A - \lambda I)\, v = 0.$$

onde I denota a matriz identidade de orde n. Vemos así que todos os autovalores satisfan a seguinte ecuación

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

Se desenvolvemos ese determinante, obtemos

$$\lambda^n + a_1\, \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, \lambda + a_n = 0,$$

que é o que se coñece como **ecuación característica de A**, denotada por $p(\lambda)$. Tamén a podemos descompoñer en factores do seguinte xeito

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j),$$

onde λ_i son os autovalores da matriz A.

Podemos enunciar agora un dos resultados máis importante da teoría de matrices.

Teorema 3.4 (Teorema de Cayley-Hamilton)**.** *Toda matriz satisfai a súa ecuación característica. Isto é*

$$p(A) = \prod_{j=1}^{n} (A - \lambda_j\, I) = 0,$$

ou o que é o mesmo,

$$A^n + a_1\, A^{n-1} + \cdots + a_n\, I = 0.$$

Observación 3.5. Notemos que este teorema implica que A^n pode ser escrita como unha combinación lineal de $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$. Polo tanto calquera potencia de A pode ser escrita como combinación lineal de $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$.

3.1. Sistemas lineais autónomos con coeficientes constantes

Veremos un caso particular de sistemas que teñen unha matriz de coeficientes constantes, coñecidos como autónomos ou invariantes no tempo. Estudaremos dous métodos para resolver este tipo de sistemas, un para o caso particular de que todos os autovalores sexan diferentes e un método xeral, coñecido como o algoritmo de Putzer.

Definición 3.6. Chamaremos **sistema en diferenzas autónomo**, ou invariante no tempo, ao seguinte sistema de n ecuacións en diferenzas

$$\begin{aligned} u_1(t+1) &= a_{11}\,u_1(t) + \cdots + a_{1n}\,u_n(t) + f_1(t), \\ u_2(t+1) &= a_{21}\,u_1(t) + \cdots + a_{2n}\,u_n(t) + f_2(t), \\ &\vdots \\ u_n(t+1) &= a_{n1}\,u_1(t) + \cdots + a_{nn}\,u_n(t) + f_n(t), \end{aligned}$$

para $t \in S = \{a, a+1, \dots\}$. Podemos escribir este sistema en forma de ecuación vectorial como

$$u(t+1) = A\,u(t) + f(t), \quad t \in S,$$

onde

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Se supoñemos que $f(t) = 0$ para todo $t \in S$, temos o **sistema autónomo homoxéneo** asociado

$$u(t+1) = A\,u(t). \tag{3.4}$$

Se ademais impoñemos unha condición inicial $u(0) = u_0$, temos entón o que se coñece como **problema de valor inicial** dado por

$$u(t+1) = A\,u(t), \quad u(0) = u_0. \tag{3.5}$$

A súa solución será $u(t) = A^t\,u(0)$, polo que as solucións de (3.5) poden obterse calculando potencias de A.

Antes de comezar coa resolución destes sistemas, imos enunciar o seguinte teorema que nos proporcionará unicidade de solución.

Teorema 3.7. *Para cada $t_0 \in S = \{a, a+1, \dots\}$ e cada vector $u_0 \in \mathbb{R}^n$, a ecuación* (3.1) *ten unha única solución u definida para $t \in S$ tal que $u(t_0) = u_0$.*

3.1.1. Resolución de sistemas lineais autónomos

Método dos autovectores

Sexa λ un autovalor de A e sexa v o seu correspondente autovector. Temos que

$$A^t\, v = \lambda^t\, v \quad \text{para } t = 0, 1, 2, \dots$$

Así vemos que $u(t) = \lambda^t\, v$ satisfai a ecuación (3.5) con vector inicial v, pois

$$u(t+1) = \lambda^{t+1}\, v = \lambda^t\, \lambda\, v = \lambda^t\, A\, v = A\, \lambda^t\, v = A\, u(t).$$

Sexan $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os autovalores da matriz A e $v_1, \dots, v_n$ os autovectores asociados. De forma xeral, se u_0 pode ser escrito como combinación lineal dos autovectores de A, é dicir,

$$u_0 = b_1\, v_1 + \cdots + b_n\, v_n,$$

para certos $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, entón a solución de (3.5) será

$$u(t) = b_1\, \lambda_1^t\, v_1 + \cdots + b_n\, \lambda_n^t\, v_n, \tag{3.6}$$

pois vemos que

$$\begin{aligned} u(t+1) &= b_1\, \lambda_1^{t+1}\, v_1 + \cdots + b_n\, \lambda_n^{t+1}\, v_n = b_1\, \lambda_1^t\, \lambda\, v_1 + \cdots + b_n\, \lambda_n^t\, \lambda\, v_n \\ &= b_1\, \lambda_1^t\, A\, v_1 + \cdots + b_n\, \lambda_n^t\, A\, v_n = A\, \left[b_1\, \lambda_1^t\, v_1 + \cdots + b_n\, \lambda_n^t\, v_n\right] = A\, u(t). \end{aligned}$$

Polo tanto, se A ten n autovectores linealmente independentes (é dicir, se A ten n autovalores distintos ou A é simétrica), entón toda solución do sistema pode ser calculada así.

Exemplo 3.8. Queremos resolver a ecuación

$$u(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} u(t).$$

A ecuación característica de A será

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 3\,\lambda + 2 = 0.$$

Vemos así que os autovalores desta matriz serán $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -1$. Obteñamos os autovectores correspondentes, primeiro para λ_1,

$$(-2\, I - A)\, v_1 = 0,$$

ou o que é o mesmo

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Temos así que $v_1^1 = 1$ e $v_1^2 = -2$. Do mesmo xeito, para λ_2, temos que

$$(-1\, I - A)\, v_2 = 0,$$

ou o que é o mesmo

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Temos así que $v_2^1 = 1$ e $v_2^2 = -1$. Polo tanto temos que os autovectores da nosa matriz serán $v_1 = (1, -2)$ e $v_2 = (1, -1)$.

Se consideramos a condición inicial $u_0 = \begin{bmatrix} u_0^1 \\ u_0^2 \end{bmatrix}$ temos que

$$\begin{bmatrix} u_0^1 \\ u_0^2 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

A solución a este sistema lineal é

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_0^1 \\ u_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^1 \\ u_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_0^1 - u_0^2 \\ 2\, u_0^1 + u_0^2 \end{bmatrix}.$$

Así, por (3.6), a solución á nosa ecuación con vector inicial u_0 será

$$u(t) = -(u_0^1 + u_0^2)\,(-2)^t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + (2\, u_0^1 + u_0^2)\,(-1)^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Algortimo de Putzer

Vexamos agora outro método para obter a solución de (3.4) de forma xeral, independentemente de se os seus autovalores son todos diferentes.

Sexan $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (non necesariamente distintos) os autovalores de A, cada un repetido tantas veces como a súa multiplicidade. Definimos

$$\begin{aligned} M_0 &= I, \\ M_i &= (A - \lambda_i\, I)\, M_{i-1}, \qquad\qquad 1 \le i \le n. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Por unha parte, en virtude do Teorema de Cayley-Hamilton temos que $M_n = 0$. Por outra parte, pola ecuación (3.7) vemos que cada matriz A^i se pode escribir como combinación lineal de $M_0, \dots, M_i$ para $i = 0, \dots, n-1$, e empregando a Observación 3.5, deducimos que isto é certo para calquera potencia de A. Podemos escribir entón

$$A^t = \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}(t) M_i, \quad \text{para } t \in \mathbb{Z},$$

onde $c_{i+1}(t)$ está por determinar. Tendo en conta que $A^{t+1} = A\, A^t$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}(t+1) M_i = A^{t+1} = A \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}(t) M_i = \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}(t)\,[M_{i+1} + \lambda_{i+1}\, M_i] \\ = \sum_{i=1}^{n-1} c_i(t) M_i + \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}(t)\, \lambda_{i+1}\, M_i,\end{aligned} \tag{3.8}$$

aplicando a igualdade (3.7) no penúltimo paso. Esta ecuación satisfaise se $c_i(t)$ verifican o sistema

$$\begin{bmatrix} c_1(t+1) \\ \vdots \\ c_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

Ademais, como $A^0 = I = c_1(0) I + \cdots + c_n(0) M_{n-1}$, temos que

$$\begin{bmatrix} c_1(0) \\ c_2(0) \\ \vdots \\ c_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

é dicir,

$$\begin{aligned} &c_1(t+1) = \lambda_1\, c_1(t), && c_1(0) = 1, && \\ &c_i(t+1) = \lambda_i\, c_i(t) + c_{i-1}(t), && c_i(0) = 0, && i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Empregando o Teorema 3.7 sabemos que o problema de valor inicial dado por (3.9) e (3.10) ten unha única solución. Chegamos así ao seguinte resultado.

Teorema 3.9 (O algoritmo de Putzer)**.** *A solución da ecuación* (3.4) *con vector de valores iniciais* u_0 *é*

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}(t)\, M_i\, u_0 = A^t\, u_0,$$

onde as M_i *veñen dadas por* (3.7) *e os* $c_i(t)$ *están determinados de forma única polas ecuacións* (3.9) *e* (3.10).

Exemplo 3.10. Resolveremos o seguinte sistema de ecuacións empregando o algoritmo de Putzer

$$u(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} u(t), \qquad u(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

A ecuación característica correspondente é

$$\lambda^2 - 4\,\lambda + 4 = 0,$$

polo que a nosa matriz ten por autovalor $\lambda = 2$ con multiplicidade dous. Aplicando a ecuación (3.7), temos que

$$\begin{aligned} M_0 &= I, \\ M_1 &= A - 2\,I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Polas ecuacións (3.9) e (3.10) temos que

$$c_1(t+1) = 2\,c_1(t), \qquad c_1(0) = 1,$$

de onde $c_1(t) = 2^t$. Empregando de novo (3.9) e (3.10),

$$c_2(t+1) = 2\,c_2(t) + 2^t, \qquad c_2(0) = 0,$$

de onde $c_2(t) = t\,2^{t-1}$. Así, empregando o Teorema 3.9, temos que

$$\begin{aligned} u(t) = (c_1(t)\,I + c_2(t)\,M_1) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} &= \left(2^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t\,2^{t-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\ = 2^t \begin{bmatrix} 1 - \frac{t}{2} & \frac{t}{2} \\ -\frac{t}{2} & 1 + \frac{t}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sistemas non homoxéneos: variación de parámetros

Finalmente, consideremos agora o sistema non homoxéneo

$$u(t+1) = A\,u(t) + f(t). \tag{3.11}$$

O seguinte teorema establece unha fórmula de variación de parámetros para resolver este tipo de sistemas.

Teorema 3.11. *A única solución do sistema* (3.11) *satisfacendo a condición inicial* $u(0) = u_0$ *é*

$$u(t) = A^t\,u_0 + \sum_{s=0}^{t-1} A^{t-s-1}\,f(s). \tag{3.12}$$

Demostración. Polo Teorema 3.7, abonda con comprobar que (3.12) satisfai o problema de valor inicial. Temos primeiro que, para $t = 0$

$$\sum_{s=0}^{-1} A^{-s-1} f(s) = 0$$

por convención, daquela $u(0) = u_0$. Para $t \geq 1$,

$$\begin{aligned} u(t+1) &= A^{t+1} u_0 + \sum_{s=0}^{t} A^{t-s} f(s) = A^{t+1} u_0 + \sum_{s=0}^{t-1} A^{t-s} f(s) + f(t) \\ &= A \left[A^t u_0 + \sum_{s=0}^{t-1} A^{t-s-1} f(s) \right] + f(t) = A\, u(t) + f(t). \end{aligned}$$

□

3.2. Sistemas lineais non autónomos

Aínda que non imos entrar en detalle (para máis información véxase a Sección 3.2 de [3] e a Sección 4.4 de [6]) estudaremos agora sistemas con matriz de coeficientes non constantes. Recordemos que os sistemas non autónomos eran da forma

$$u(t+1) = A(t)\, u(t) + f(t), \quad t \in S,$$

e o seu sistema homoxéneo asociado era

$$u(t+1) = A(t)\, u(t), \quad t \in S.$$

Comecemos cunhas definicións básicas que nos permitan despois introducir o concepto de matriz fundamental, imprescindible no estudo de sistemas non autónomos.

Definición 3.12. Diremos que as solucións $u_1, \ldots, u_n$ de (3.2) son linealmente independentes se

$$c_1\, u_1(t) + \cdots + c_n\, u_n(t) = 0 \text{ para todo } t \in S \Rightarrow c_i = 0, 1 \leq i \leq n.$$

Se consideramos $\Phi(t) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que as súas columnas son solución de (3.2), é dicir,

$$\Phi(t) = [u_1(t), \ldots, u_n(t)],$$

entón,

$$\begin{aligned} \Phi(t+1) &= [u_1(t+1), \ldots, u_n(t+1)] = [A(t)\, u_1(t), \ldots, A(t)\, u_n(t)] = A(t)\, [u_1(t), \ldots, u_n(t)] \\ &= A(t)\, \Phi(t). \end{aligned}$$

Vemos así que $\Phi(t)$ satisfai a ecuación

$$\Phi(t+1) = A(t)\, \Phi(t). \tag{3.13}$$

Definición 3.13. Chamaremos **matriz fundamental** do sistema (3.2) a unha matriz $\Phi(t)$ non singular para todo $t \in S$ satisfacendo a ecuación (3.13).

Podemos caracterizar as matrices fundamentais mediante o seguinte teorema.

Teorema 3.14. *Se* $\Phi(t)$ *é unha matriz fundamental de* (3.2)*, entón* $\Psi(t)$ *é outra matriz fundamental se e só se existe unha matriz non singular* C *tal que*

$$\Psi(t) = \Phi(t)\, C \text{ para todo } t \in S.$$

Demostración. $\Rightarrow$ Sexa $\Psi(t) = \Phi(t)\, C$, onde $\Phi(t)$ é unha matriz fundamental de (3.2) e C é non singular. Entón $\Psi(t)$ é non singular para todo $t \in S$ e

$$\Psi(t+1) = \Phi(t+1)\, C = A(t)\, \Phi(t)\, C = A(t)\, \Psi(t).$$

Polo tanto, $\Psi(t)$ é unha matriz fundamental de (3.2).

$\Leftarrow$ Supoñamos que $\Psi(t)$ e $\Phi(t)$ son matrices fundamentais de (3.2). Para algún $t_0 \in S$, sexa

$$C = \Phi^{-1}(t_0)\Psi(t_0).$$

Entón $\Psi(t)$ e $\Phi(t)\, C$ son solucións de (3.13), satisfacendo a mesma condición inicial e por unicidade temos que

$$\Psi(t) = \Phi(t)\, C \text{ para todo } t \in S.$$

□

Teorema 3.15. *Se* $\Phi(t)$ *é unha solución de* (3.13)*, entón* $\det \Phi(t) \neq 0$ *para todo* $t \in S$ *ou* $\det \Phi(t) = 0$ *para todo* $t \in S$.

Demostración. Como $\Phi(t)$ é solución de (3.13) para todo $t \in S$,

$$\Phi(t+1) = A(t)\, \Phi(t).$$

Polo tanto,

$$\det \Phi(t+1) = \det A(t)\, \det \Phi(t) \text{ para todo } t \in S.$$

Como por definición, $\det A(t) \neq 0$ para todo $t \in S$ entón a única posibilidade de que se cumpra a igualdade é que $\det \Phi(t) \neq 0$ para todo $t \in S$ ou que $\det \Phi(t) = 0$ para todo $t \in S$. En efecto, se $\det \Phi(t_0) = 0$ para $t_0 \in S$, temos que

$$\det(t_0 + 1) = \det A(t) \det \Phi(t_0) = 0,$$

$$\det(t_0) = \det A(t) \det \Phi(t_0 - 1) = 0,$$

polo que $\det \Phi(t) = 0$ para todo $t \in S$. □

Teorema 3.16. *Se* $\Phi(t)$ *é unha matriz fundamental de* (3.2)*, entón a solución xeral de* (3.2) *estará dada por*

$$u(t) = \Phi(t)\, c,$$

onde c é un vector constante arbitrario.

Os sistemas completos tamén se poden resolver empregando matrices fundamentais, tal e como se recolle no seguinte resultado.

Teorema 3.17 (Método de variación de parámetros)**.** *Se* $\Phi(t)$ *é unha matriz fundamental de* (3.13)*, a única solución de* (3.5) *que satisfai a condición inicial* $u(t_0) = u_0$ *vén dada por*

$$u(t) = \Phi(t)\, \Phi^{-1}(t_0)\, u_0 + \Phi(t) \sum_{s=t_0}^{t-1} \Phi^{-1}(s+1)\, f(s) \qquad \textit{para } t \geq t_0.$$

Vemos así a situación é análoga ao que acontecía no caso dos sistemas lineais de ecuacións diferenciais ordinarias.

Capítulo 4

Teoría da estabilidade

Ata agora estudamos ecuacións e sistemas lineais, pasemos a estudar as ecuacións e sistemas non lineais. Como normalmente estas ecuacións e sistemas non se poden resolver de forma explícita, imos estudar como se comportan as súas solucións, a medida que aumenta t, que é o que se coñece como comportamento asintótico e da lugar á teoría da estabilidade. Para iso seguiremos a Sección 1.3 de [3] e a Sección 4.5 de [6]. Tamén se pode seguir na Sección 4.1 de [5] ou en [7].

Centrarémonos nas ecuacións de orde un, pois podemos ver que calquera ecuación de orde maior, n, se pode transformar nun sistema de n ecuacións de orde un, como se ve a continuación.

Exemplo 4.1. Consideremos a seguinte ecuación non linear de orde tres

$$y(t+3) = 4\,y^4(t+2)\,y(t+1) - 2\,\cos y(t).$$

Podemos reescribir esta ecuación como o seguinte sistema de ecuacións en diferenzas de primeira orde, considerando $u_1(t) = y(t)$, $u_2(t) = y(t+1)$ e $u_3(t) = y(t+2)$, temos

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}(t+1) = \begin{bmatrix} u_2(t) \\ u_3(t) \\ 4\,u_3^4(t)\,u_2(t) - 2\,\cos u_1(t) \end{bmatrix}.$$

Por este motivo, todos os resultados enunciados para sistemas de n ecuacións non lineais son tamén válidos para ecuacións non lineais de orde n.

Estudaremos a estabilidade para sistemas autónomos non lineais da forma

$$u(t+1) = f(u(t)), \qquad t \in S = \{a, a+1, a+2, \dots\}, \tag{4.1}$$

onde $u(t) \in \mathbb{R}^n$ para $t \in S$ e f é unha función continua de $\mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}^n$. Para iso, veremos algún resultado teórico e un método gráfico, coñecido como método da escaleira, pero primeiro introduciremos algúns conceptos básicos sobre estabilidade.

Definición 4.2. Un vector $u \in \mathbb{R}^n$ é un **punto fixo** de f se $f(u) = u$. Un vector $v \in \mathbb{R}^n$ é un **punto periódico** de f se existe un enteiro positivo k tal que $f^k(v) = v$ (entendendo f^k como evaluar k veces f) e k é o período de v.

Así, podemos ver que os puntos fixos son solucións constantes do sistema (4.1) e os puntos periódicos proporcionan solucións periódicas. O período k non é único pois calquera múltiplo enteiro de k é tamén un período, por isto, chamaremos primeiro período ao menor período positivo.

Definición 4.3. Chamaremos **p-ciclo** a unha solución periódica de primeiro periodo igual a p.

Vexamos agora algunhas definicións sobre conceptos básicos da teoría da estabilidade.

Definición 4.4.

1. Sexa $u \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Chamaremos **bóla aberta centrada en** u **con radio** r ao conxunto

$$B(u, r) = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v - u\| < r\}.$$

2. Sexa v un punto fixo de f. Diremos que v é **estable** se dada calquera bóla $B(v, \varepsilon)$, existe unha bóla $B(v, \delta)$ tal que se $u \in B(v, \delta)$, entón $f^t(u) \in B(v, \varepsilon)$ para $t \geq 0$. Diremos que v é **inestable** se non é estable.

3. Diremos que v é **asintoticamente estable** se é estable e existe unha bóla $B(v, r)$ tal que $f^t(u) \to v$ cando $t \to \infty$ para todo $u \in B(v, r)$.

4. Sexa w un punto periódico de f con período k. Diremos que w é **estable** (asintoticamente estable) se $w, f(w), \ldots, f^{k-1}(w)$ son estables (asintoticamente estables) como puntos fixos de f^k.

Observación 4.5. Así, un punto fixo v é estable se os puntos próximos a v non se afastan de v ao ser evaluados sucesivamente por f. Se ademais é asintoticamente estable, entón toda solución de (4.1) que comeza cerca de v converxe a v.

Vexamos un resultado para saber cando un punto fixo é asintoticamente estable para o caso escalar.

Teorema 4.6. *Sexa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unha función, cun punto fixo v e a súa primeira derivada continua nun intervalo aberto contendo a v. Entón:*

1. *Se $|f'(v)| < 1$, v é asintoticamente estable.*

2. *Se $|f'(v)| > 1$, v é inestable.*

Demostración. 1. Supoñamos que $|f'(v)| < 1$. Por ser f' continua existe α tal que $|f'(u)| \leq \alpha < 1$ en algún intervalor da forma $I = (v-\delta, v+\delta)$ con $\delta > 0$. Polo Teorema do Valor Medio temos que se $u, w \in I$, entón

$$|f(u) - f(w)| = |f'(c)|\,|u-w| \leq \alpha|u-w|.$$

Ademais, para cada $u \in I$,

$$|f(u) - v| \leq \alpha|u-v| < \delta,$$

polo que $f(u) \in I$ e podemos concluir que v é estable. Por outra parte,

$$|f^{t+1}(u) - v| \leq \alpha\,|f^t(u) - v|$$

para cada $t \geq 0$ e $u \in I$. Entón, por inducción,

$$|f^t(u) - v| \leq \alpha^t\,|u-v| \text{ para } \; t \geq 0 \; \text{ e } \; u \in I.$$

Como $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha^t = 0$, cada solución da ecuación (4.1) que comeza en I converxe a v cando $t \to \infty$ polo que v é asintoticamente estable.

2. Supoñamos que $|f'(v)| > 1$. Entón, como f' é continua, existen $\lambda > 1$ e $\varepsilon > 0$ tales que $|f'(c)| \geq \lambda > 1$ para todo $\lambda > 1$ e $c \in I = (v-\varepsilon, v+\varepsilon)$. Entón, polo Teorema do Valor Medio,

$$|f(u) - f(w)| = |f'(c)|\,|u-w| \geq \lambda|u-w|, \quad \text{para todo } \; u, w \in I.$$

Por inducción,

$$|f^t(u) - v| \geq \lambda^t|u-w|,$$

mentres $f^t(u) \in I$. Como $\lambda > 1$, todas as solucións da ecuación (4.1) que comezan en I, excepto a solución constante $u(t) = v$, abandonan o intervalo I para t o suficientemente grande. Concluimos así que v é inestable.

□

4.1. Método da escaleira

Trátase dun método gráfico para estudar a estabilidade de ecuacións non lineais de primeira orde. Consideremos unha ecuación non lineal da seguinte forma

$$u(t+1) = f(u(t)), \quad t \in S.$$

Este método consiste en debuxar as gráficas das funcións $y = f(u)$ e $y = u$ nun mesmo plano de coordenadas. Así, os puntos fixos de f serán as interseccións destas dúas gráficas. Escollemos un valor inicial $u(0)$ no eixo de abscisas e subimos verticalmene ata o punto $(u(0), f(u(0)) = (u(0), u(1))$ na gráfica de f. Agora, movémonos horizontalmente ao punto $(u(1), u(1))$ na liña $y = u$. Tras isto, consideramos $u(2) = f(u(1))$ e movémonos verticalmente a $(u(1), u(2))$ na gráfica de f. Así, alternando sucesivamente movementos verticais cara a gráfica de f e movementos horizontais cara a liña $y = u$ xeramos unha sucesión $\{u(t)\}$, o cal nos permite observar o comportamento asintótico da solución.

Ilustremos este método co seguinte exemplo.

Exemplo 4.7. Consideremos a seguinte ecuación non lineal en diferenzas

$$u(t+1) = \frac{1}{2}\, u(t)\, (4 - u(t)).$$

A función $f(u) = \frac{1}{2}\, u\, (4 - u)$ ten dous puntos fixos, o 0 e o 2. En efecto,

$$f(u) = u \Leftrightarrow \frac{1}{2}\, u\, (4 - u) = u \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{1}{2}\,(4 - u) = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = 0 \\ \text{ou} \\ u = 2 \end{array} \right\}.$$

Vexamos o comportamento das solucións mediante o método da escaleira en función de onde está a condición inicial u_0 que lle impoñemos a nosa ecuación. Comecemos considerando $u_0 = 0{,}5$ e apliquemos o método da escaleira como se ve na seguinte gráfica.

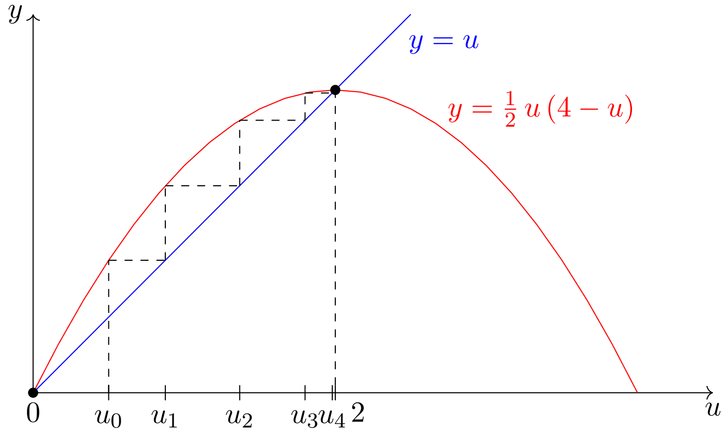

Figura 4.1: Método da escaleira para a función $f(u) = \frac{1}{2}\, u\, (4 - u)$ tomando como punto inicial $u_0 \in (0, 2)$.

Podemos observar así na Figura 4.1 que se tomamos $u_0 \in (0, 2)$, a recta está por debaixo da parábola. Así, realizando este método iremos avanzando cara a dereita aproximándonos cada vez máis a 2.

Consideremos agora $u_0 = 3{,}5$ e apliquemos de novo o método da escaleira.

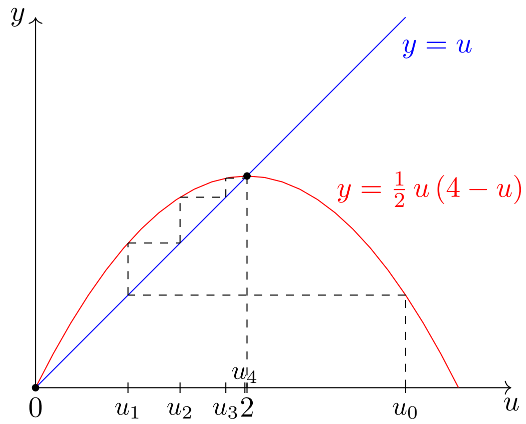

Figura 4.2: Método da escaleira para a función $f(u) = \frac{1}{2}\,u\,(4-u)$ tomando como punto inicial $u_0 \in (2, 4)$.

Vemos así que se consideramos $u_0 \in (2, 4)$, como na Figura 4.2 a recta $y = u$ está enrriba da parábola, polo que na primeira iteración, cando avancemos horizontalmente, iremos cara a esquerda e despois estaremos na mesma situación que o caso anterior.

Vexamos o que acontece cando tomamos como punto inicial $u_0 \notin (0, 4)$. Para iso, comecemos considerando a condición inicial $u_0 = -0{,}5$ e apliquemos o método da escaleira.

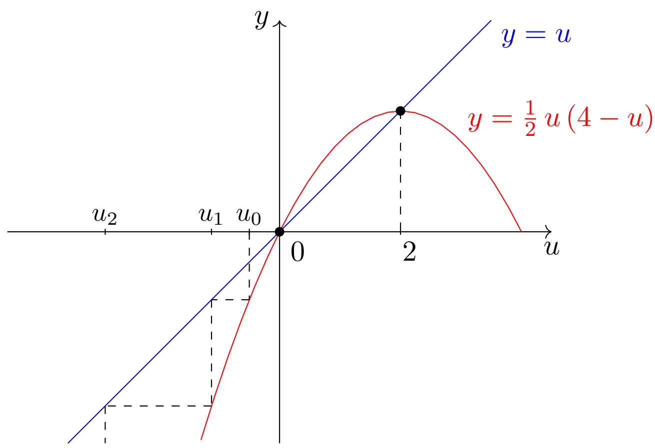

Figura 4.3: Método da escaleira para a función $f(u) = \frac{1}{2}\,u\,(4-u)$ tomando como punto inicial $u_0 \in (-\infty, 0)$.

Consideremos agora $u_0 = 4{,}5$ e apliquemos o método da escaleira.

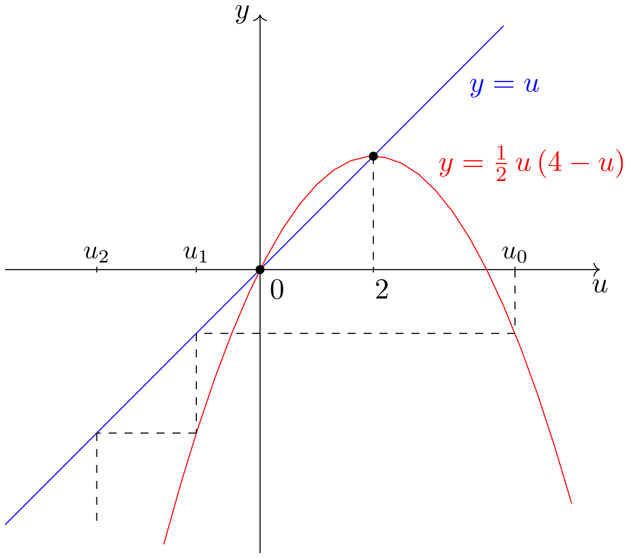

Figura 4.4: Método da escaleira para a función $f(u) = \frac{1}{2}\,u\,(4-u)$ tomando como punto inicial $u_0 \in (4, \infty)$.

Vemos así nas Figuras 4.3 e 4.4 que se $u_0 \notin (0,4)$, a nosa sucesión $\{u(t)\} \to -\infty$ cando $t \to \infty$. Podemos concluír así que as solucións da ecuación non lineal en diferenzas converxen a 2, punto fixo da función, se e só se tomamos unha condición inicial en $(0,4)$.

Para o caso particular $u_0 = 0$, como o 0 é un punto fixo da nosa función, a sucesión obtida polo método da escaleira sería unha sucesión constante de ceros, que sabemos que é solución da ecuación $u(t+1) = \frac{1}{2}\,u(t)\,(4-u(t))$. Se tomamos $u_0 = 4$, como $f(4) = 0$, na primeira iteración do método da escaleira avanzaríamos cara o $(0,0)$, polo que estaríamos na mesma situación que o caso anterior. Así, para $u_0 \in \{0,4\}$, a solución da ecuación non lineal en diferenzas converxe a 0 punto fixo da función.

4.2. Función de Lyapunov

Veremos agora un dos métodos máis empregados para estudar a estabilidade dos sistemas non lineais. Comecemos introducindo o seguinte concepto.

Definición 4.8. Sexa v un punto fixo de f. Chamaremos **función de Lyapunov** de f en v a unha función de variable real $V(u)$ definida para todo $u \in \mathbb{R}^n$ verificando que

1. $V(v) = 0$.

2. $V(u) > 0$ para $u \neq v$.

3. Existe unha bóla B centrada en v verificando que

$$\Delta_t V(u) \equiv V(f(u)) - V(u) \leq 0 \quad \text{para todo} \quad u \in B.$$

Se esta última desigualdade é estricta para $u \neq v$, entón V é unha **función de Lyapunov estricta**.

A última propiedade implica que $V(u(t))$ é unha función non crecente en t mentres $u(t) \in B$. No seguinte resultado recollemos como empregar este tipo de funcións para estudar a estabilidade dos puntos fixos.

Teorema 4.9. *Sexa v un punto fixo de f e supoñamos que f é continua nalgunha bóla centrada en v. Se existe unha función de Lyapunov para f en v, entón v é estable. Se existe unha función de Lyapunov estricta para f en v, entón v é asintoticamente estable.*

Moitas veces, a búsqueda de funcións de Lyapunov é un traballo complexo, pero cando as encontramos, a parte da estabilidade tamén obtemos máis información acerca do comportamento das solucións de (4.1), como a que se mostra nos seguintes corolarios.

Corolario 4.10. *Supoñamos que exite unha función de Lyapunov estricta para f en v e f é continua en B. Entón toda solución da ecuación* (4.1) *que estea en B para $t \geq t_0$ converxe a v.*

Corolario 4.11. *Supoñamos que v é un punto fixo de f e B é unha bóla centrada en v verificando que $|f(u) - v| < |u - v|$ para $u \in B$, $u \neq v$. Entón toda solución da ecuación* (4.1) *que comeza en B converxe a v.*

Empreguemos agora estes resultados para ver a estabilidade dun punto fixo dun sistema.

Exemplo 4.12. Estudemos a estabilidade da orixe para o seguinte sistema

$$u(t+1) = \begin{bmatrix} u_2(t) - 3\,u_2(t)\,(u_1^4(t) + u_2^4(t)) \\ u_1(t) - 3\,u_1(t)\,(u_1^4(t) + u_2^4(t)) \end{bmatrix}.$$

Comprobemos se $V(u) = u_1^2 + u_2^2$ é unha función de Lyapunov para o noso sistema na orixe. Temos que $V(0,0) = 0$, $V(u) > 0$ se $u \neq (0,0)$ e, por último,

$$\begin{aligned}
\Delta_t V(u) &= \left[u_2\left(1 - 3\,(u_1^4 + u_2^4)\right)\right]^2 + \left[u_1\left(1 - 3\,(u_1^4 + u_2^4)\right)\right]^2 - u_1^2 - u_2^2 \\
&= (u_1^2 + u_2^2)\left(1 - 6\,(u_1^4 + u_2^4) + 9\,(u_1^4 + u_2^4)^2\right) - u_1^2 - u_2^2 \\
&= (u_1^2 + u_2^2)\left(-6\,(u_1^4 + u_2^4) + 9\,(u_1^4 + u_2^4)^2\right) \\
&= (u_1^2 + u_2^2)\,3\,(u_1^4 + u_2^4)\left(-2 + 3\,(u_1^4 + u_2^4)\right) < 0
\end{aligned}$$

cando $u \in B\left(0, \sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right)$. Así, V é unha función de Lyapunov estricta, polo que a orixe é asintoticamente estable.

Aínda que moitas veces non é posible obter unha función de Lyapunov estricta, podemos usar igualmente este tipo de funcións para obter información sobre o comportamento das solucións de (4.1), como vemos no teorema seguinte.

Teorema 4.13. *Supoñamos que $D \subset \mathbb{R}^n$ e que existen funcións reais $V(u)$ e $w(u)$ continuas, V está acoutada inferiormente en D, $w(u) \geq 0$ para $u \in D$ e*

$$\Delta_t V(u) \leq -w(u) \quad \text{para } u \in D. \tag{4.2}$$

Se $u(t)$ é unha solución da ecuación (4.1) en D para $t \geq t_0$, entón $w(u(t)) \to 0$ cando $t \to \infty$.

Demostración. Supoñamos que $u(t)$ é unha solución de (4.1) en D para $t \geq t_0$. Empregando (4.2) vemos que

$$\{V(u(t))\}_{t=t_0}^{\infty}$$

é unha sucesión decrecente. Como V está inferiormente acoutada, esta sucesión ten que converxer e polo tanto

$$\lim_{t \to \infty} \Delta_t V(u(t)) = 0.$$

Así, deducimos de (4.2) que

$$\lim_{t \to \infty} w(u(t)) = 0.$$

□

Veremos a través do seguinte exemplo que este teorema é útil para demostrar que o Método da Secante, empregado para calcular aproximacións de ceros dunha función, converxe baixo determinadas condicións.

Exemplo 4.14 (Método da Secante)**.** Supoñamos que h é unha función tal que $h(\alpha) = 0$, $h'(\alpha) \neq 0$ e h ten derivada segunda continua nun intervalo aberto contendo a α. Se z_n e z_{n+1} están no dominio de h, entón a ecuación da recta secante que pasa por $(z_n, h(z_n))$ e $(z_{n+1}, h(z_{n+1}))$ vén dada por

$$y = h(z_{n+1}) + \frac{h(z_{n+1}) - h(z_n)}{z_{n+1} - z_n}(t - z_{n+1}).$$

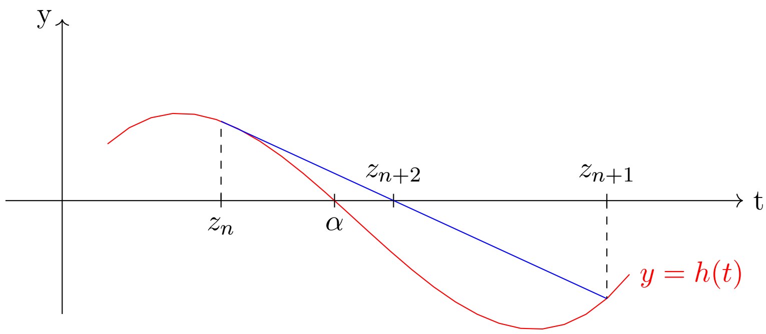

Figura 4.5: Método da Secante.

Se consideramos agora o punto z_{n+2} como a intersección desta recta co eixo de abscisas, é dicir, cando $y = 0$, como se pode ver na Figura 4.5, obtemos

$$0 = h(z_{n+1}) + \frac{h(z_{n+1}) - h(z_n)}{z_{n+1} - z_n}\,(z_{n+2} - z_{n+1}),$$

de onde,

$$\frac{h(z_{n+1}) - h(z_n)}{z_{n+1} - z_n}\,(z_{n+2} - z_{n+1}) = -h(z_{n+1}).$$

Así,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = -\frac{h(z_{n+1}) - h(z_n)}{z_{n+1} - z_n}\,h(z_{n+1}),$$

polo que

$$z_{n+2} = z_{n+1} - \frac{z_{n+1} - z_n}{h(z_{n+1}) - h(z_n)}\,h(z_{n+1}). \tag{4.3}$$

Daquela, se comezamos cunhas aproximacións $z_0 \neq z_1$ cerca de α, a ecuación (4.3) producirá unha sucesión $\{z_n\}$ de aproximacións de α. Comprobemos a converxencia desta sucesión. Para iso consideremos

$$y_n = z_n - \alpha.$$

Por (4.3) temos que

$$y_{n+2} = y_{n+1} - \frac{y_{n+1} - y_n}{h(\alpha + y_{n+1}) - h(\alpha + y_n)}\,h(\alpha + y_{n+1}) = \frac{y_n\,h(\alpha + y_{n+1}) - y_{n+1}\,h(\alpha + y_n)}{h(\alpha + y_{n+1}) - h(\alpha + y_n)}. \tag{4.4}$$

Tomemos unha función $g(u)$ de forma que

$$h(\alpha + u) = h'(\alpha)\,u + g(u)\,u^2. \tag{4.5}$$

Como a derivada segunda de h é continua, empregando a Fórmula de Taylor temos que

$$h(\alpha + u) = h'(\alpha)\,u + \frac{1}{2}h''(c)\,u^2,$$

para un determinado $c \in (u, u+\alpha)$. Consideramos entón

$$g(u) = \frac{h''(c)}{2}.$$

Teremos así que como g é continua, cando $u \to 0$, entón

$$g(u) = \frac{h''(c)}{2} \to \frac{h''(\alpha)}{2}.$$

Se empregamos a igualdade (4.5) e susbtituímos en (4.4) temos que

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= \frac{y_n \left[h'(\alpha)\, y_{n+1} + g(y_{n+1})\, y_{n+1}^2\right] - y_{n+1}\left[h'(\alpha)\, y_n + g(y_n)\, y_n^2\right]}{h(\alpha) + y_{n+1} - h(\alpha + y_n)} \\ &= \frac{y_{n+1}\, g(y_{n+1}) - y_n\, g(y_n)}{h(\alpha) + y_{n+1} - h(\alpha + y_n)}\, y_n\, y_{n+1}. \end{aligned}$$

Así, definindo a función

$$H(u,v) = \frac{v\, g(v) - u\, g(u)}{h(\alpha + v) - h(\alpha + u)},$$

podemos escribir a seguinte ecuación en diferenzas

$$y_{n+2} = H(y_n, y_{n+1})\, y_n\, y_{n+1}.$$

Transformemos a nosa ecuación en diferenzas de segunda orde nun sistema de dimensión dúas considerando $u_n = y_n$ e $v_n = y_{n+1}$ obtendo

$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n, \\ v_{n+1} = H(u_n, v_n)\, u_n\, v_n. \end{cases}$$

Agora consideremos a función $V(u,v) = u^2 + v^2$ para $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Así

$$\Delta_t V(u,v) = v^2 + H^2(u,v)\, u^2\, v^2 - u^2 - v^2 = H^2(u,v)\, u^2\, v^2 - u^2 = -w(u,v),$$

onde $w = u^2\left[1 - H^2(u,v)v^2\right]$. Como H é continua, temos que nun entorno de $(0,0)$, w é continua, $w \geq 0$ e $w(u,v) = 0$ só se $u = 0$. Entón como cada solución que comeza nese entorno permanece no entorno, en virtude do Teorema 4.2 temos que $w(u_n, v_n) \to 0$ cando $n \to \infty$. Deste xeito, como sabemos que $u_n = y_n$, entón $y_n \to 0$ cando $n \to \infty$, polo que o Método da Secante converxe para aproximacións iniciais o suficientemente próximas a α.

4.3. O modelo loxístico

Nesta sección veremos un modelo poboacional coñecido como modelo loxístico. Para iso seguiremos a Sección 9.2 de [4]. Tamén se pode encontrar máis información sobre modelos poboacionais nas Seccións 1 e 3 de [2] e 2 e 3 de [10].

A forma na que o número de individuos dunha determinada especie varía nun ecosistema e os que factores inflúen de forma determinante nestas variacións constitúe un tema amplamente estudado. Este tipo de modelos son moi importantes no estudo do crecemento de bacterias, de especies invasoras en determinados hábitats, etc. Para o noso estudo teremos que facer unha serie de suposicións sobre a poboación para así poder modelar o seu crecemento. Estas son:

- Cada membro da poboación produce o mesmo número de descendentes.
- Todos os membros teñen a mesma posibilidade de sobrevivir tras cada tempada de cría.
- A porcentaxe de machos e femias é a mesma en cada tempada de cría.
- A diferenza de idade entre a poboación pode ser ignorada.
- A poboación está illada, non hai emigración nin inmigración.

Definimos α, denominada *taxa de natalidade per-cápita* como o número de descendentes que ten cada individuo nunha tempada de cría. Definimos tamén β, denominada por *taxa de mortalidade per-cápita* como a probabilidade de que un individuo morra antes da próxima tempada de cría. Temos así que

- O número de inviduos nados nunha determinada tempada de cría é directamente porporcional á poboación existente ao comezo da tempada de cría.
- O número de individuos falecidos entre a fin de dúas tempadas de cría consecutivas é directamente proporcional á poboación existente ao comezo da tempada de cría.

Así, se definimos $N_t = N(t)$, que denota o número de individuos da poboación ao comezo da *t-ésima* tempada de cría, entón $\alpha\, N_t$ é o número de nacementos na tempada de cría e $\beta\, N_t$ é o numero de mortes na tempada de cría. Notemos que aínda que N_0, o número de individuos da poboación antes da primeira tempada de cría, é un enteito, cando calculamos N_t non imos obter un número enteiro pero podemos consideralo como tal redondeando N_t ao enteiro máis próximo.

Daquela, coñecendo N_t, o número de individuos na tempada *(t+1)-ésima* será

$$N_{t+1} = N_t - \beta\, N_t + \alpha\, N_t,$$

ou o que é o mesmo,

$$N_{t+1} = (1 + \alpha - \beta)\, N_t. \tag{4.6}$$

Este modelo depende de $r = \alpha - \beta$, que é o que se coñece como taxa de crecemento. Reescribimos así a ecuación (4.6) como

$$N_{t+1} = N_t + r\,N_t.$$

Se $r < 0$, o número de nacementos en cada tempada é menor que o número de defuncións e polo tanto a poboación diminúe ata a súa extinción. Pola contra, se $r > 0$, o número de nacementos é maior que o de defuncións e a poboación incrementa infinitamente. Vexamos isto plasmado na Figura 4.6.

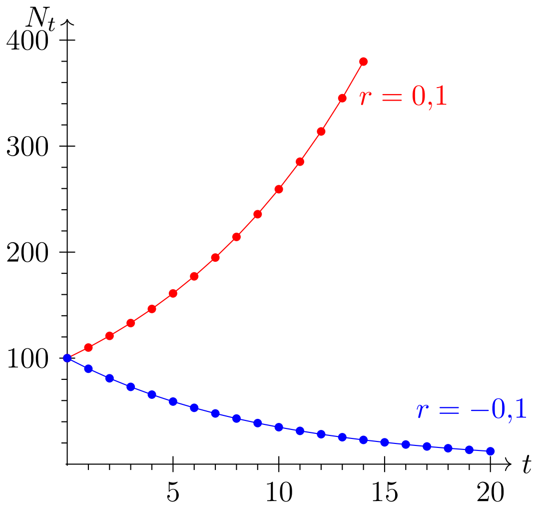

Figura 4.6: Crecemento poboación loxístico lineal para $r = 0{,}1$ en vermello e para $r = -0{,}1$ en azul.

Esta ecuación lineal non se pode xeneralizar para moitas poboacións pois, como podemos ver na natureza, o aumento das poboacións non é ilimitado, xa que o ecosistema no que viven os individuos ten o que se coñece como **capacidade de carga**, que é o tamaño máximo de poboación dunha especie biolóxica que se pode soster nese ecosistema específico, dado o alimento, o hábitat, a auga e outros recursos dispoñibles.

Así, realizando estudos nos laboratorios puidose observar como a medida que aumenta a poboación tamén o fai o número de falecementos, mentres que se reduce o número de nacementos. Isto débese ao sobrepoboamento e a competencia polo alimento. Por este motivo, a partir da ecuación lineal de crecemento poboacional

$$N_{t+1} = N_t + r\,N_t,$$

chegamos a unha ecuación non lineal ao incorporarlle o sobrepoboamento, obtendo

$$N_{t+1} = N_t + R(N_t)\,N_t, \tag{4.7}$$

onde $R(N_t)$ é a ratio de crecemento, unha función que depende do tamaño da poboación N_t. Temos que impoñer certas condicións a esta función de crecemento da poboación:

- Debido ao sobrepoboamento, o número de mortes aumenta e o de nacementos diminúe, polo que $R(N_t)$ ten que decrecer cando N_t aumenta.
- Se $N_t = K$, sendo K a capacidade de carga, o crecemento é nulo, é dicir, $R(K) = 0$.
- Cando $N_t \to 0$ os efectos de sobrepoboación diminúen e o ratio de crecemento tende a unha constante, r, que representa o ratio de crecemento sen restriccións. Así, $R(0) = r$.

Existen numerosas funcións que satisfan estas condicións, pero nós escolleremos a seguinte

$$R(N_t) = -\frac{r}{K} N_t + r. \tag{4.8}$$

Substituíndo (4.8) en (4.7) temos que

$$N_{t+1} = N_t + r\, N_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right), \tag{4.9}$$

que é o que se coñece como **ecuación loxística discreta**. Esta ecuación non lineal, como moitas outras, aínda non foi resolta de forma xeral, pero si se realizaron importantes estudos mediante iteracións para diferentes valores dos parámetros r (ratio de crecemento sen restrición), K (capacidade de carga) e N_0 (poboación inicial), como veremos a continuación.

Comecemos buscando os puntos fixos da ecuación loxística, para iso, substituimos en (4.9) pola seguinte incognita $N_{t+1} = N_t = s$, e obtemos

$$s = s + r\, s \left(1 - \frac{s}{K}\right),$$

ou o que é o mesmo,

$$s \left(1 - \frac{s}{K}\right) = 0.$$

Esta ecuación ten dúas solucións, $s = 0$ e $s = K$. A primeira delas danos un resultado que parece obvio, se a poboación inicial é nula, continuará sendo nula na seguinte tempada de cría, pois non haberá ningún individuo que poida ter descendencia. A segunda solución constante, $s = K$, correspóndese coa capacidade de carga, é dicir, se a poboación inicial é $N_0 = K$, entón esta mantense estable no mesmo valor.

Se escribimos agora a ecuación (4.9) como

$$N_{t+1} - N_t = r\, N_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \tag{4.10}$$

podemos ver como é a taxa de variación da poboación entre dúas tempadas de cría sucesivas. Vemos así que se $N_t < K$ a poboación total aumentará, pola contra, se $N_t > K$ a poboación total diminuirá. A maior limitación deste modelo é que pode producir valores negativos de poboación se $r > 3$.

Vexamos agora un caso particular dun ecosistema que para unha determinada especie ten unha capacidade de carga $K = 100$ e iremos variando o ratio de crecemento sen restricións, r, entre 0 e 3. Estes distintos tipos de comportamento pódense clasificar en tres grupos: crecemento estable, crecemento cíclico e crecemento caótico.

4.3.1. Crecemento estable $(0 < r \leq 2)$

Comecemos primeiro considerando $r = 0{,}8$ e empreguemos o método da escaleira para dúas poboacións iniciais diferentes, unha inferior á capacidade de carga e outra superior á capacidade de carga.

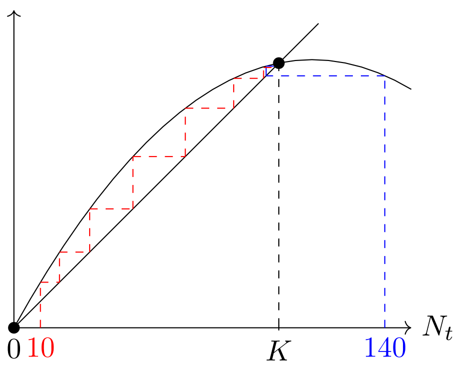

Figura 4.7: Método da escaleira aplicado a ecuación $N_{t+1} = N_t + 0{,}8\, N_t \left(1 - \frac{N_t}{100}\right)$ tomando como condicións iniciais 10, en cor vermella, e 140, en cor azul.

Vemos así na Figura 4.7 que cando a poboación inicial é menor que a capacidade de carga, esta vai aumentando aproximándose cada vez máis á capacidade de carga. Se a poboación inicial é maior que a capacidade de carga, xa na primeira iteración diminúe a poboación ata un valor menor que a capacidade de carga e estamos na mesma situación que o caso anterior. Representemos agora a poboación en cada época de cría nunha gráfica (Figura 4.8) para ver como se vai acercando a 100 e se estabiliza nese valor.

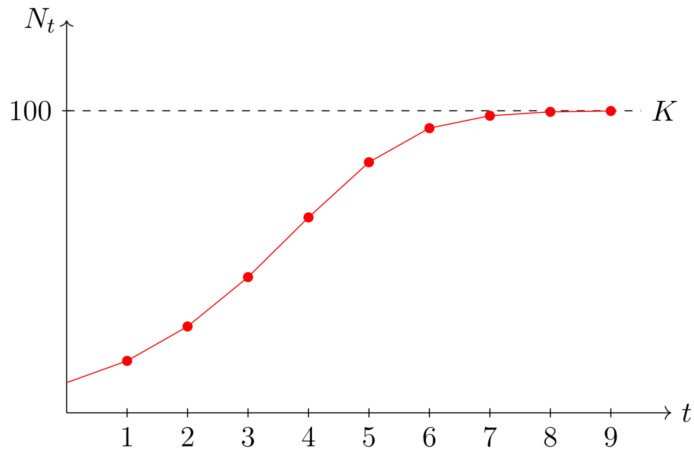

Figura 4.8: Representación do número de individuos en cada época de cría para a ecuación loxística $N_{t+1} = N_t + 0{,}8\, N_t\, \left(1 - \frac{N_t}{100}\right)$.

Vexamos agora como se consideramos un ratio de crecemento sen restriccións máis próximo a 2, a poboación aumenta de forma máis rápida e tarda menos épocas de cría en achegarse á capacidade de carga, $K = 100$. Empregamos así o método da escaleira con $r = 1{,}6$ considerando de novo as cantidades iniciais, N_0, 10 e 140.

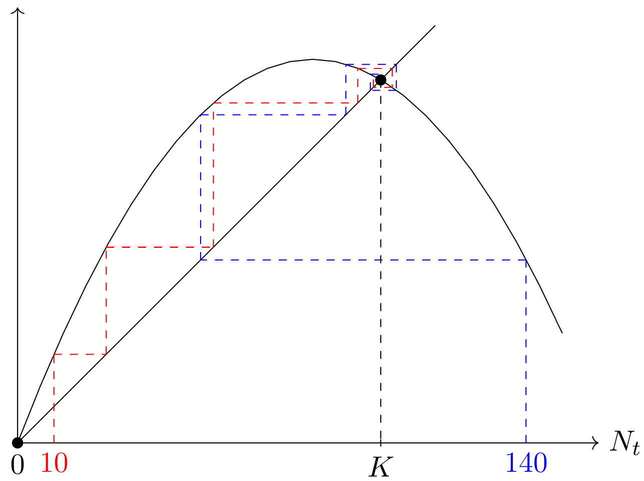

Figura 4.9: Método da escaleira aplicado a ecuación $N_{t+1} = N_t + 1{,}6\, N_t\, \left(1 - \frac{N_t}{100}\right)$ tomando como condicións iniciais 10, en cor vermella, e 140, en cor azul.

Vemos así na Figura 4.9 que acontece o mesmo que no caso anterior, se tomamos como poboación inicial $N_0 = 10$ a poboación vai aumentando ata estabilizarse entorno á capacidade de carga, $K = 100$. Se tomamos como poboación inicial $N_0 = 140$, que é maior que capacidade de carga, a poboación diminúe na primeira iteración ata un valor inferior á capacidade de carga e despois estamos na mesma situación que o caso anterior.

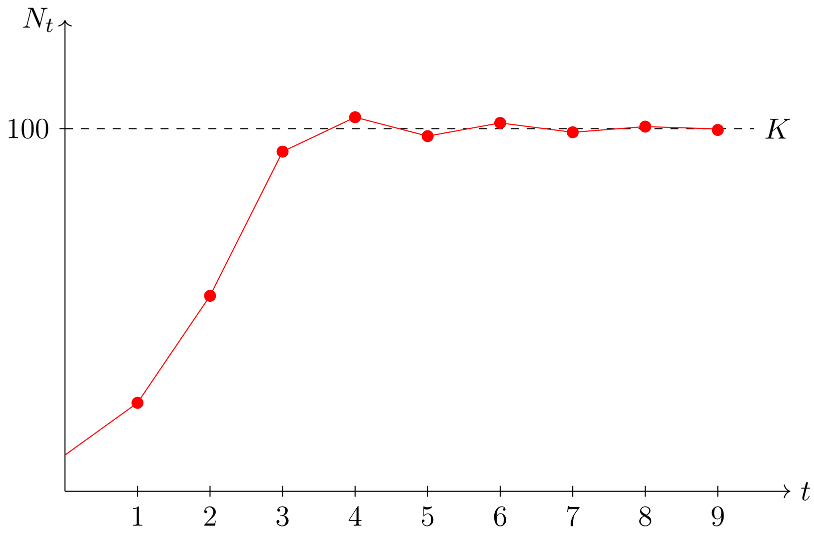

Figura 4.10: Representación do número de individuos en cada época de cría para a ecuación loxística $N_{t+1} = N_t + 1{,}6\, N_t \left(1 - \frac{N_t}{100}\right)$.

A única diferenza resaltable entre $r = 0{,}8$ e $r = 1{,}6$ é que no primeiro caso a poboación nunca aumenta ata superar a capacidade de carga pois a recta corta a parábola antes de que esta acade o seu máximo, entón polo método da escaleira nunca imos obter un $N_t > 100$. Pola contra no segundo caso a recta corta á parábola despois do seu máximo, polo que cando nos imos aproximando á capacidade de carga, vemos como o método da escaleira nos leva a unha espiral entorno ao valor 100, no que nos imos aproximando á capacidade de carga por defecto e por exceso alternadamente (como podemos observar na Figura 4.10), polo que si se chega a ter $N_t > 100$ en varias etapas.

Diferenciamos así dous tipos de comportamento estable, mentres que para $0 < r \leq 1$ a poboación crece ata estabilizarse entorno a 100 sen chegar a sobrepasalo en ningún momento, para $1 < r \leq 2$ a poboación tamén se estabiliza en 100, pero primeiro fluctúa arredor deste valor.

4.3.2. Crecemento cíclico $(2 < r < 2{,}57)$

Vexamos agora un novo comportamento para este rango de valores, para iso tomamos a ecuación loxística con $r = 2{,}4$ e aplicamos o método da escaleira (Figura 4.11).

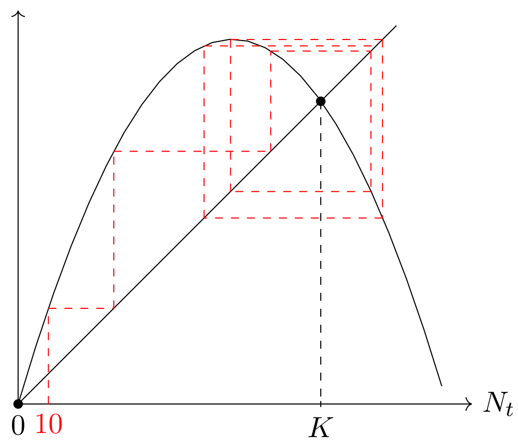

Figura 4.11: Método da escaleira aplicado a ecuación $N_{t+1} = N_t + 2{,}4\,N_t\left(1 - \frac{N_t}{100}\right)$ tomando como condición inicial $N_0 = 10$.

Vemos así que a poboación oscila entre valores superiores á capacidade de carga e valores inferiores a esta. Así, calculando as sucesivas iteracións vemos que a nosa órbita tende a un 2-ciclo. Para calcular os dous valores entre os que oscila este ciclo, resolvemos a ecuación

$$N_{t+2} = N_t. \tag{4.11}$$

Como $N_{t+2} = N_{t+1} + 2{,}4\,N_{t+1}\left(1 - \frac{N_{t+1}}{K}\right)$, podemos escribir

$$N_{t+1} + 2{,}4\,N_{t+1}\left(1 - \frac{N_{t+1}}{K}\right) = N_t,$$

e substituindo $N_{t+1} = N_t + 2{,}4\,N_t\left(1 - \frac{N_t}{100}\right)$ obtemos

$$\left(N_t + 2{,}4\,N_t\left(1 - \frac{N_t}{100}\right)\right) + 2{,}4\left(N_t + 2{,}4\,N_t\left(1 - \frac{N_t}{100}\right)\right)\left(1 - \frac{\left(N_t + 2{,}4\,N_t\left(1 - \frac{N_t}{100}\right)\right)}{K}\right) = N_t,$$

que ten por solución 119,305 e 64,0281, que serán os valores do 2-ciclo ao que tenderá a nosa órbita. Vemos na Figura 4.12 como os valores oscilan cada dúas épocas de cría e se van aproximando as solucións da ecuación (4.11).

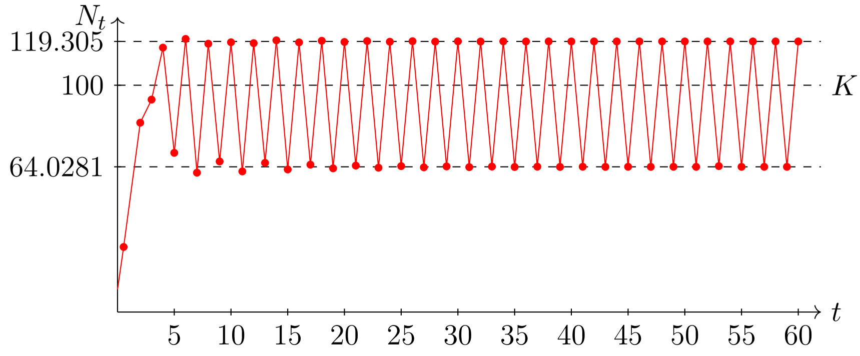

Figura 4.12: Representación do número de individuos en cada época de cría para a ecuación loxística $N_{t+1} = N_t + 2{,}4\, N_t \left(1 - \frac{N_t}{100}\right)$.

Así, $N_6 = 120{,}40665, N_8 = 118{,}2973818, \ldots, N_{24} = 119{,}173124, \ldots, N_{60} = 119{,}3042752$ e $N_7 = 61{,}43633727, N_9 = 66{,}39251878, \ldots, N_{23} = 63{,}63511996, \ldots, N_{59} = 64{,}02527594, \ldots$ e vemos como os valores pares sen van aproximando paulatinamente a 119,305 e os valores impares a 64,0281. Se tomasemos $r \geq 2{,}5$ poderiamos ver como o comportamento do número de individuos seguiría ciclos de orde cada vez maior a medida que nos aproximamos a 2,57.

4.3.3. Crecemento caótico $(2{,}57 < r \leq 3)$

Dentro deste rango de valores o comportamento deixa de seguir un patrón fixo como nos casos anteriores, é o que se coñece como caos. Apliquemos o método da escaleira á nosa ecuación para $r = 2{,}7$ e vexamos o que acontece.

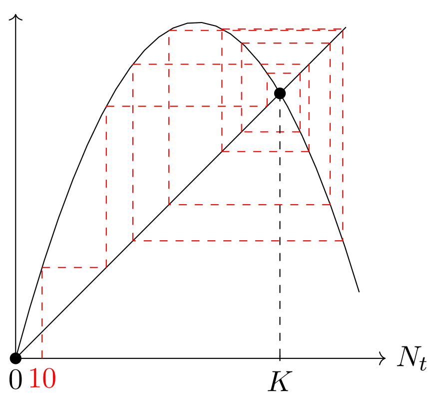

Figura 4.13: Método da escaleira aplicado a ecuación $N_{t+1} = N_t + 2{,}7\, N_t \left(1 - \frac{N_t}{100}\right)$ tomando como condición inicial $N_0 = 10$.

Vemos así na Figura 4.13 que este tipo de crecemento poboacional non segue ningún patrón. Un dos primerios en descubrir que un modelo tan sinxelo podía propiciar un comportamento tan complexo foi Rober May en diversos artículos que publicou na segunda parte do século XX (ver [8] e [9]). Porén, temos que destacar que para determinados valores dentro deste intervalo o crecemento poboacional sí presenta algún tipo de patrón recoñecible, como pode ser un *3-ciclo.*

Outra das peculiaridades deste comportamento é a gran variación ao longo das xeracións que supón cambiar un pouco o valor inicial da poboación. Por isto falamos de caos, ademais de non estabilizarse a poboación entorno a un comportamento concreto, para condicións iniciais moi próximas teñense comportamentos moi distintos. Comprobémolo na Figura 4.14 tomando como valores iniciais 10 individuos, en cor vermella, e 13 individuos, en cor azul.

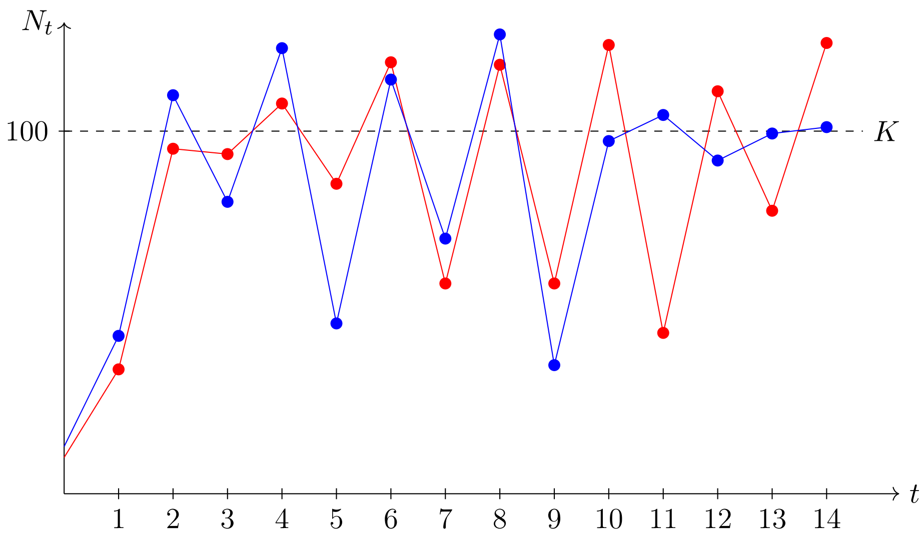

Figura 4.14: Representación do número de individuos en cada época de cría para a ecuación loxística $N_{t+1} = N_t + 2{,}7\, N_t \left(1 - \frac{N_t}{100}\right)$ tomando como valor inicial $N_0 = 10$, en cor vermella, e $N_0 = 13$, en cor azul.

Por este motivo, neste tipo de modelos é complexo saber cal vai ser o comportamento da poboación para un período longo de tempo.

Bibliografía

[1] R. P. Agarwal, *Difference Equations and Inequalities. Theory, Methods, and Applications.* Marcel Dekker, Inc., 2000.

[2] L. Edelstein-Keshet, *Mathematical Models in Biology.* SIAM, 1988.

[3] S. N. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations.* Springer, 1996.

[4] G. Fulford, P. Forrester and A. Jones, *Modelling with Differential and Difference Equations.* Cambridge University Press, 1997.

[5] S. Goldberg, *Introduction to Difference Equations with Illustrative Examples from Economics, Psychology, and Sociology.* Dover Publications, Inc., New York, 1986.

[6] W. G. Kelley and A. C. Peterson, *Difference Equations: An Introduction with Applications.* Academic Press, 1991.

[7] V. Lakshmikantham and D. Trigiante, *Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications.* CRC Press, 1988.

[8] R. M. May, *Biological Populations obeying Difference Equations: stable points, stable cycles, and chaos.* Journal of Theoretical Biology, 1975.

[9] R. M. May, *Simple mathematial models with very complicated dynamics.* Nature, 1976.

[10] J. Maynard Smith, *Mathematical Ideas in Biology.* Cambridge University Press, 1968.

[11] Leonardo de Pisa, *Liber abaci.* 1202.