



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# La optimización matemática en la gestión de recursos

Tania Pensado Tasende

2023/2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRADO DE MATEMÁTICAS

**Trabajo Fin de Grado**

# La optimización matemática en la gestión de recursos

Tania Pensado Tasende

Junio, 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



*A mis padres y hermano.  
A Alberto, por acompañarme en este largo camino.  
Y a mí, por no rendirme.*



# Trabajo propuesto

<b>Área de Conocimiento: Estadística e Investigación Operativa</b>
<b>Título: La optimización matemática en la gestión de recursos</b>
<b>Breve descripción del contenido</b>
<p>La programación matemática, y más concretamente la programación lineal y entera, es la herramienta matemática más utilizada a la hora de optimizar recursos en el mundo que nos rodea. Estos suelen medirse en términos de costes o de tiempo de los procesos y que habitualmente debemos minimizar. En este trabajo analizaremos diferentes situaciones prácticas en las que estas técnicas permiten ofrecer soluciones óptimas (o quasi-óptimas) a la distribución y asignación de recursos, como por ejemplo, en la gestión de incendios forestales. Además, desde un enfoque práctico, abordaremos el uso de diferentes herramientas informáticas para su resolución.</p>



# Índice

<b>Resumo</b>	<b>II</b>
<b>Resumen</b>	<b>XI</b>
<b>Introducción</b>	<b>XIII</b>
<b>1. La optimización matemática</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción a la optimización matemática . . . . .	1
1.2. Conceptos fundamentales de la optimización . . . . .	1
1.2.1. Función objetivo y restricciones . . . . .	2
1.2.2. Tipos de soluciones . . . . .	2
1.3. Tipos de optimización . . . . .	2
1.3.1. Optimización no lineal . . . . .	3
1.3.2. Optimización entera y combinatoria . . . . .	3
1.3.3. Optimización estocástica . . . . .	3
1.3.4. Optimización multiobjetivo . . . . .	4
1.4. Programación lineal y entera . . . . .	4
1.4.1. Programación lineal . . . . .	4
1.4.2. Programación entera . . . . .	5
1.5. Métodos de resolución de problemas de optimización . . . . .	7
1.5.1. Métodos heurísticos . . . . .	7

---

1.5.2. Métodos exactos . . . . .	7
1.5.3. Método simplex . . . . .	8
<b>2. Optimización en la asignación de Recursos publicitarios</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción a la asignación de recursos publicitarios . . . . .	9
2.2. Modelo matemático . . . . .	10
2.3. Aplicación del modelo en un ejemplo real . . . . .	12
<b>3. Optimización en la asignación de muestras de laboratorio</b>	<b>17</b>
3.1. Introducción a la optimización de muestras de laboratorio . . . . .	17
3.2. Formulación matemática del problema . . . . .	18
3.3. Métodos de solución heurísticos . . . . .	19
3.4. Comparación con métodos exactos . . . . .	20
3.5. Resultados y discusión . . . . .	23
3.6. Ejemplo . . . . .	24
<b>4. Optimización en la gestión de recursos en incendios forestales</b>	<b>29</b>
4.1. Introducción a la optimización en la gestión de recursos en incendios forestales . .	29
4.2. Formulación matemática del problema . . . . .	30
4.3. Restricciones . . . . .	31
4.4. Fin de actividad . . . . .	33
4.5. Modelo modificado para maximizar los esfuerzos de represión . . . . .	34
4.6. Pruebas del modelo . . . . .	35
<b>5. Discusión y conclusiones</b>	<b>47</b>
<b>I. Código en Python</b>	<b>51</b>
I.1. Optimización en la asignación de recursos publicitarios: . . . . .	51
Anexo: Código en Python . . . . .	51

I.2. Optimización en la asignación de muestras de laboratorio . . . . .	53
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>



# La optimización matemática en la gestión de recursos

## Resumen

En la actualidad, la optimización matemática se ha convertido en una herramienta clave para la gestión eficiente de recursos en diversas áreas, como la publicidad, la investigación en laboratorios y la gestión de emergencias, incluyendo los incendios forestales. La asignación óptima de recursos no solo maximiza los beneficios económicos, sino que también reduce los costes y el tiempo necesario para completar las tareas. Este Trabajo de Fin de Grado (TFG) se centra en la aplicación de técnicas de programación matemática, especialmente la programación lineal y la programación entera, para resolver problemas prácticos relacionados con la distribución y asignación de recursos.

## Abstract

Nowadays, Mathematical Optimization has become a key tool for the efficient management of resources in various areas, such as advertising, laboratory research, and emergency management, including wildfires. Optimal resource allocation not only maximizes economic benefits but also reduces costs and the time needed to complete tasks. This degree thesis (TFG) focuses on the application of mathematical programming techniques, especially linear programming and integer programming, to solve practical problems related to resource distribution and allocation.



# Introducción

La optimización matemática se ha convertido en una herramienta esencial en la gestión de recursos en múltiples sectores. La complejidad creciente de los problemas que enfrentan las empresas, desde la asignación de presupuestos publicitarios hasta la distribución de muestras de laboratorio y la gestión de recursos en situaciones de emergencia, hace que la optimización sea crucial para tomar decisiones bien fundamentadas y efectivas.

Uno de los problemas que vamos a tratar es cómo optimizar la asignación de recursos publicitarios. En un mercado muy competitivo, las empresas necesitan hacer que sus campañas publicitarias tengan el mayor impacto posible, pero con presupuestos limitados. Utilizaremos la programación lineal para encontrar la mejor combinación de anuncios en diferentes medios y así llegar a la mayor audiencia posible, respetando el presupuesto y la disponibilidad. Estudios anteriores han demostrado que estas técnicas son efectivas para maximizar el retorno de inversión en publicidad [1].

Otro ejemplo que abordaremos es la optimización en la gestión de muestras de laboratorio. Los laboratorios de investigación y diagnóstico manejan muchas muestras que deben procesarse de manera eficiente para asegurar resultados fiables y reducir costes. En estos casos, la programación entera y los métodos heurísticos son especialmente útiles porque ayudan a asignar muestras a placas de laboratorio de manera óptima, respetando las restricciones de temperatura y capacidad [9].

La gestión de recursos en situaciones de emergencia, como los incendios forestales, también se beneficia enormemente de la optimización matemática. La planificación y asignación de recursos, como brigadas de bomberos y equipos aéreos, deben realizarse de manera que se minimicen los costes y se maximice la efectividad de las operaciones de extinción [12]. Existen modelos de programación lineal y entera que permiten desarrollar estrategias óptimas para la distribución de estos recursos, considerando factores como la disponibilidad, el tiempo de respuesta y las restricciones operativas [20].

Este Trabajo de Fin de Grado (TFG) se centra en la aplicación de técnicas de programación matemática para resolver estos problemas prácticos. En primer lugar, se presentará la optimi-

zación de la asignación de recursos publicitarios, mostrando cómo la programación lineal puede maximizar la audiencia alcanzada. A continuación, se abordará la optimización en la asignación de muestras de laboratorio, utilizando tanto métodos exactos como heurísticos para mejorar la eficiencia operativa. Finalmente, se estudiará la gestión de recursos en incendios forestales, desarrollando un modelo completo para la asignación óptima de brigadas y equipos.

Las técnicas de optimización matemática no solo resuelven problemas complejos, sino que también apoyan la toma de decisiones estratégicas en distintos campos. Su capacidad para manejar múltiples restricciones y objetivos las hacen clave para mejorar la eficiencia y efectividad en la gestión de recursos.

# Capítulo 1

## La optimización matemática

### 1.1. Introducción a la optimización matemática

La optimización matemática es una herramienta esencial en la gestión eficiente de recursos y en la toma de decisiones estratégicas en diversas áreas como en economía, ingeniería, logística y administración de empresas. Se centra en encontrar la mejor solución a un problema, ya sea maximizando o minimizando una función objetivo, dentro de ciertas limitaciones reales. Su poder radica en convertir problemas complejos en modelos matemáticos que se pueden analizar y resolver para encontrar la mejor solución, es decir, la solución óptima [2].

Por ejemplo, en la ingeniería, la optimización matemática puede usarse para diseñar estructuras que minimicen el coste y maximicen la seguridad. En la economía, se utiliza para asignar recursos de manera eficiente y maximizar el beneficio. En la logística, ayuda a diseñar rutas de transporte que minimicen el tiempo y el coste. El ámbito de la optimización matemática es amplio y tiene aplicaciones en diversas áreas, siempre con el objetivo de usar los recursos de la manera más eficiente posible para alcanzar un objetivo específico [16].

### 1.2. Conceptos fundamentales de la optimización

Los conceptos básicos de la optimización matemática, como la función objetivo, las restricciones y los tipos de solución son la base fundamental para entender cómo funcionan y se resuelven estos problemas. En esta sección definiremos estos conceptos.

### 1.2.1. Función objetivo y restricciones

La función objetivo es el núcleo de cualquier problema de optimización. Indica lo que queremos mejorar, es decir, lo que se desea maximizar o minimizar. Por ejemplo, en un problema de optimización de costes, la función objetivo podría ser el coste total de producción, mientras que en un problema de optimización de beneficios, podría ser el beneficio total. En términos generales, si denotamos la función objetivo como  $Z$ , y las variables de decisión como  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , la función objetivo se representa como:  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Las restricciones son condiciones que limitan los valores que las variables de decisión pueden tomar. Estas restricciones aseguran que las soluciones sean viables dentro del contexto del problema. Pueden ser expresadas como igualdades o desigualdades. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n) &\geq b_1 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) &\geq b_m \end{aligned}$$

Donde  $g_i(x_1, \dots, x_n)$  es una función de las variables de decisión  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que debe ser mayor o igual a un valor constante  $b_i$  [23].

### 1.2.2. Tipos de soluciones

En la optimización matemática, es importante diferenciar entre una solución factible y una solución óptima. Una solución factible es cualquier conjunto de valores para las variables de decisión que satisfacen todas las restricciones del problema. Por otro lado, una solución óptima es una solución factible que proporciona el valor más alto o más bajo de la función objetivo, en problemas de maximización o minimización, respectivamente.

Por ejemplo, en un problema de optimización de producción, una solución factible podría ser cualquier combinación de productos que cumpla con las restricciones de recursos y demanda. La solución óptima sería la combinación que maximiza el beneficio total [23].

## 1.3. Tipos de optimización

En esta sección vamos a definir las distintas categorías en las que podemos dividir la optimización, que van a depender del tipo de función objetivo y sus restricciones.

### 1.3.1. Optimización no lineal

La optimización no lineal aborda problemas donde la función objetivo o las restricciones no son lineales, es decir, que no se pueden representar simplemente como una línea recta. Estos problemas son de mayor complejidad y su resolución es más complicada que los problemas lineales. Para resolver estos problemas, se usan técnicas como los métodos de Newton, los algoritmos genéticos o el recocido simulado [24].

Un ejemplo de optimización no lineal es el diseño de una antena, donde se quiere maximizar la ganancia y minimizar la interferencia, cumpliendo con restricciones no lineales relacionadas con las propiedades del material y la forma de la antena [10]. También, en la ingeniería estructural, la optimización no lineal puede aparecer cuando se diseñan materiales que deben soportar cargas de manera no proporcional.

### 1.3.2. Optimización entera y combinatoria

La optimización entera se centra en problemas donde algunas o todas las variables de decisión deben tomar valores enteros. Esto es crucial en problemas donde las soluciones deben ser discretas, como en la asignación de tareas o la planificación de horarios. Un ejemplo clásico de optimización entera es el problema de la mochila, donde se busca maximizar el valor de los objetos en una mochila con una capacidad limitada, seleccionando objetos indivisibles [18].

La optimización combinatoria se ocupa de resolver problemas en los que se busca encontrar la mejor combinación posible de ciertos elementos, siguiendo ciertas reglas o restricciones. Un ejemplo es el problema del viajante, donde se busca encontrar la ruta más corta donde el viajante visite un conjunto de ciudades exactamente una vez, regresando al punto de partida. Este tipo de problemas a menudo requiere el uso de algoritmos especializados debido a su complejidad computacional [19].

### 1.3.3. Optimización estocástica

La optimización estocástica se utiliza en situaciones donde algunos de los parámetros del problema son variables aleatorias. Esto es especialmente útil cuando la incertidumbre es un parámetro fundamental, lo que sucede en campos como la economía y la gestión de riesgos. Por ejemplo, en la optimización de carteras de inversión, observamos incertidumbre en los rendimientos de los activos, y la programación estocástica permite obtener las decisiones óptimas modelando este parámetro como variable aleatoria [4].

Un caso práctico es la planificación de la producción en la industria manufacturera, donde

desconocemos cual será la demanda de productos. Utilizando modelos de programación estocástica, las empresas pueden desarrollar planes de producción que minimicen los costes esperados y maximicen la rentabilidad en diferentes escenarios de demanda [22].

#### 1.3.4. Optimización multiobjetivo

La optimización multiobjetivo se aplica cuando se deben optimizar simultáneamente múltiples criterios, que a menudo están en conflicto. Por ejemplo, en el diseño de vehículos, puede surgir la necesidad de minimizar el peso del vehículo sin perder eficacia en la seguridad y el rendimiento. Las técnicas comunes para abordar estos problemas incluyen la frontera de Pareto, donde identificamos las soluciones en las que no se puede mejorar un objetivo sin empeorar al menos otro [11]. Otro ejemplo real de optimización multiobjetivo surge en la gestión de recursos hídricos, donde los modelos de este tipo permiten encontrar soluciones en problemas donde se debe equilibrar el suministro de agua para la agricultura, el consumo humano y la conservación del medio ambiente [7].

### 1.4. Programación lineal y entera

La programación lineal y entera son técnicas importantes en la optimización matemática. La programación lineal se ocupa de maximizar o minimizar una función lineal con restricciones lineales, mientras que la programación entera se encarga de problemas donde las variables deben ser enteras, permitiendo soluciones discretas. Estas metodologías son esenciales para resolver problemas complejos en diversos campos, mejorando la productividad y precisión en la toma de decisiones. A continuación, veremos en detalle estas técnicas y sus aplicaciones.

#### 1.4.1. Programación lineal

La programación lineal es el campo de la programación matemática que se utiliza en problemas donde queremos maximizar o minimizar funciones objetivo que son lineales. Además, las variables de decisión están sujetas a restricciones expresadas mediante un sistema de ecuaciones o inecuaciones también lineales. El método tradicionalmente usado para resolver problemas de programación lineal es el Método Simplex que usaremos y definiremos a continuación.

Un problema típico de programación lineal puede ser formulado como:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximizar} & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
 \\
 \text{Sujeto a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
 \\
 & x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n
 \end{array}$$

donde  $Z$  es la función objetivo que se desea maximizar,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las variables de decisión,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son los coeficientes que representan la contribución de cada variable a la función objetivo,  $a_{ij}$  son los coeficientes de las restricciones y  $b_i$  son los términos constantes de las restricciones [8].

### 1.4.2. Programación entera

La programación entera es una extensión de la programación lineal en la que algunas o todas las variables de decisión están restringidas a tomar valores enteros. Esto es particularmente útil en problemas donde las soluciones deben ser discretas, como en la asignación de tareas o la planificación de horarios. Un problema típico de programación entera se puede plantear como:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximizar} & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
 \\
 \text{Sujeto a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
 \\
 & x_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i
 \end{array}$$

donde  $\mathbb{Z}^+$  denota el conjunto de números enteros no negativos [25].

Uno de los ejemplos más conocidos de programación entera es el problema de la mochila. En este problema, buscamos maximizar el valor total de los objetos que caben en una mochila de capacidad limitada, donde estos objetos tienen cada uno un valor y un peso asignado, y además

no se pueden dividir. La formulación matemática del problema es la siguiente:

$$\text{Maximizar} \quad Z = v_1x_1 + v_2x_2 + \cdots + v_nx_n$$

$$\text{Sujeto a} \quad w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n \leq W$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i$$

donde  $v_i$  es el valor del objeto  $i$ ,  $w_i$  es el peso del objeto  $i$ ,  $W$  es la capacidad máxima de la mochila, y  $x_i$  es una variable binaria que indica si el objeto  $i$  se incluye o no en la mochila [23].

Un problema NP-Duro es un tipo de problema de decisión para el cual no se conoce un algoritmo que pueda resolverlo en tiempo polinómico para todos los casos posibles. El tiempo polinómico es una medida de la cantidad de tiempo que un algoritmo tarda en resolver un problema en función del tamaño de la entrada. Esto significa que, a medida que el tamaño del problema aumenta, el tiempo necesario para encontrar una solución puede crecer exponencialmente [13].

Muchos problemas de optimización, incluyendo algunos problemas de programación entera como el problema de la mochila, son NP-duros. Esto implica que, para problemas de gran escala, puede ser imposible encontrar la solución óptima en un tiempo razonable. En estos casos, se suelen utilizar técnicas heurísticas o aproximaciones para obtener soluciones satisfactorias en un tiempo aceptable.

Otro ejemplo típico de un problema NP-duro es el problema del “viaje del vendedor” en su versión de optimización. Dado un conjunto de ciudades y las distancias entre cada par de ciudades, el objetivo es encontrar el recorrido más corto posible que debe realizar el vendedor para visitar cada ciudad exactamente una vez y regresar a la ciudad de origen [13]. Su formulación matemática es la siguiente:

- Función objetivo:

$$\text{Minimizar} \quad Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}$$

Donde,  $c_{ij}$  es la distancia entre la ciudad  $i$  y la ciudad  $j$ ,  $x_{ij}$  es una variable binaria que vale 1 si el recorrido va de la ciudad  $i$  a la ciudad  $j$  y 0 en caso contrario.

- Restricciones: En este problema, debemos considerar que cada ciudad debe ser visitada exactamente una vez, lo que expresamos de la siguiente manera:

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Además, se debe llegar a cada ciudad exactamente una vez, es decir:

$$\sum_{i=1, i \neq j}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Por último, debemos tener en cuenta las restricciones para evitar subciclos, es decir, estas restricciones evitan que se formen ciclos más pequeños dentro del recorrido total.

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subset \{1, \dots, n\}, |S| \geq 2$$

## 1.5. Métodos de resolución de problemas de optimización

Para finalizar este capítulo, describiremos los diferentes métodos para resolver problemas de optimización, que se dividen entre métodos heurísticos y exactos.

### 1.5.1. Métodos heurísticos

Los métodos heurísticos son estrategias de resolución de problemas que buscan encontrar soluciones suficientemente buenas en un tiempo razonable, sin garantizar que sean óptimas. Son útiles para problemas complejos donde los métodos exactos son demasiado costosos y se basan en reglas prácticas y experiencia previa. Ejemplos comunes incluyen algoritmos genéticos, recocido simulado y búsqueda tabú [14].

En un problema de optimización como el viaje del vendedor, se puede usar una heurística que consiste en visitar, en cada paso, la ciudad más cercana que aún no ha sido visitada. Aunque esta estrategia no garantiza encontrar la ruta óptima, generalmente produce una solución razonablemente buena [14].

### 1.5.2. Métodos exactos

Los métodos exactos son algoritmos que garantizan encontrar la solución óptima de un problema de optimización, explorando exhaustivamente todas las soluciones posibles. Aunque pueden ser muy intensivos en términos de tiempo y recursos computacionales, aseguran que la solución encontrada es la mejor posible [19]. Algunos ejemplos de métodos exactos son: el método de fuerza bruta, la programación dinámica y la técnica de ramificación y acotación.

Dentro de los métodos exactos, uno de los algoritmos más conocidos y utilizados es el método simplex.

### 1.5.3. Método simplex

El método simplex, que fue desarrollado por George Dantzig en 1947, es un algoritmo exacto para resolver problemas de programación lineal. Este método busca, entre todas las soluciones factibles, la solución óptima, representando las posibles soluciones como vértices de un poliedro [8].

El proceso comienza seleccionando una solución inicial que cumple con todas las restricciones del problema, que se representa como un vértice en el espacio de soluciones factibles. Luego, se evalúa el valor de la función objetivo en este punto y se determina si hay una dirección en la cual se puede mejorar el valor de la función objetivo. Si se encuentra una dirección de mejora, nos movemos a lo largo de esta dirección hasta llegar a un nuevo vértice del poliedro, actualizando así la solución. Este proceso se repite iterativamente hasta que no se puede encontrar una dirección que mejore el valor de la función objetivo. Cuando esto sucede, indica que hemos alcanzado la solución óptima. Este método es eficiente en la práctica porque reduce de manera significativa el número de cálculos necesarios, ya que tan solo se evalúan las soluciones más prometedoras, en lugar de evaluar todas las soluciones posibles [8].

En los siguientes capítulos, describiremos varios problemas reales en los que la optimización desempeña un papel importante. La optimización matemática no solo es una herramienta teórica, sino que tiene aplicaciones prácticas en numerosos campos. Los ejemplos que analizaremos demuestran cómo la optimización puede mejorar la eficiencia en la asignación de recursos publicitarios, la gestión de muestras de laboratorio y la gestión de recursos en incendios forestales, ilustrando así cómo las técnicas de programación matemática pueden resolver problemas complejos en la práctica.

## Capítulo 2

# Optimización en la asignación de Recursos publicitarios

### 2.1. Introducción a la asignación de recursos publicitarios

En el entorno empresarial actual, la optimización de recursos se ha convertido en una necesidad inevitable debido a la alta competitividad y la restricción de los presupuestos. Las empresas buscan constantemente formas de maximizar el impacto de sus inversiones minimizando los costes, siendo una de las áreas donde esta necesidad es particularmente crítica la asignación de recursos publicitarios. La publicidad efectiva no solo incrementa la visibilidad de una marca, sino que también es crucial para atraer nuevos clientes y retener los ya existentes.

Este capítulo se enfocará en la aplicación de la programación lineal para optimizar la asignación de recursos publicitarios en una empresa. Se presentará un modelo basado en el método Simplex para maximizar la audiencia alcanzada con un presupuesto fijo y limitado. Este método es adecuado en este caso por su capacidad para encontrar soluciones óptimas en un número finito de pasos. El modelo tomará en cuenta diversos medios publicitarios, como televisión, radio y redes sociales, y buscará determinar la combinación óptima de anuncios que maximice el alcance de la audiencia.

El estudio se estructura de la siguiente manera: en primer lugar, se presenta la formulación matemática del problema, detallando las variables y restricciones involucradas. A continuación, se aplica el modelo a un caso de estudio real, proporcionando datos específicos sobre los costes y la audiencia esperada de diferentes medios publicitarios. Los resultados se analizan para identificar la mejor estrategia de asignación de recursos y, finalmente, se discuten las implicaciones prácticas de los resultados obtenidos y se proponen recomendaciones para la aplicación del modelo en

escenarios empresariales reales.

La investigación demuestra cómo la optimización matemática puede ser una herramienta indispensable para la toma de decisiones estratégicas en la empresa, proporcionando soluciones que no solo son eficientes sino también efectivas en términos de maximización de recursos. A medida que las empresas se mueven en un entorno económico cada vez más desafiante, la capacidad de aplicar técnicas matemáticas avanzadas para resolver problemas prácticos se vuelve cada vez más crucial para el éxito a largo plazo.

## 2.2. Modelo matemático

La optimización matemática, y en particular la programación lineal, es una técnica utilizada para resolver problemas de asignación de recursos en los que se busca maximizar o minimizar una función objetivo sujeta a una serie de restricciones lineales. En el contexto de la asignación de recursos publicitarios, la programación lineal permite a las empresas determinar la combinación óptima de medios publicitarios para maximizar la cobertura de audiencia dentro de un presupuesto limitado.

La programación lineal es una técnica matemática que se utiliza para optimizar un objetivo lineal, denominado función objetivo, sujeto a un conjunto de restricciones lineales. El método simplex es un algoritmo desarrollado por George Dantzig que resuelve problemas de programación lineal. Este método itera a través de los vértices del poliedro definido por las restricciones del problema, mejorando la solución en cada paso hasta alcanzar la óptima.

Un problema típico de programación lineal tiene la forma:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximizar} & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
 \\ 
 \text{Sujeto a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
 \\ 
 & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0
 \end{array}$$

Donde  $Z$  es la función objetivo que queremos maximizar,  $x_i$  son las variables de decisión,  $c_i$  son los coeficientes de la función objetivo,  $a_{ij}$  son los coeficientes de las restricciones, y  $b_i$  son los límites de las restricciones.

El problema de asignación de recursos publicitarios se puede formular como un problema de

programación lineal. Supongamos que una empresa desea maximizar la cobertura de audiencia utilizando diferentes medios publicitarios (televisión, radio, prensa, y redes sociales) dentro de un presupuesto fijo de 10,000 \$. Las variables de decisión  $x_i$  representan el número de anuncios en cada medio y la función objetivo maximiza la audiencia total alcanzada.

Las variables de decisión utilizadas en el modelo son las siguientes:  $x_1$  es el número de anuncios de 30 segundos en televisión (matutino),  $x_2$  el número de anuncios de 30 segundos en televisión (vespertino),  $x_3$  el número de anuncios de 30 segundos en televisión (nocturno),  $x_4$  el número de anuncios de 30 segundos en radio (matutino),  $x_5$  el número de anuncios de 30 segundos en radio (vespertino/nocturno),  $x_6$  el número de anuncios en prensa (lunes a sábado),  $x_7$  el número de anuncios en prensa (domingo) y  $x_8$  el número de anuncios en redes sociales (Facebook/Instagram).

La función objetivo es maximizar la audiencia total alcanzada. Los coeficientes de la función objetivo ( $c_i$ ) representan la audiencia estimada alcanzada por cada tipo de anuncio.

Maximizar  $Z = 178750x_1 + 121960x_2 + 209060x_3 + 356901x_4 + 250710x_5 + 284762x_6 + 466728x_7 + 50000x_8$

Para finalizar con el modelo, vamos a definir sus respectivas restricciones:

1. Restricciones de presupuesto: El coste total de los anuncios no debe exceder el presupuesto asignado:

$$745x_1 + 985x_2 + 1150x_3 + 360x_4 + 315x_5 + 1294x_6 + 552x_7 + 150x_8 \leq 10000$$

2. Restricciones de disponibilidad: Cada tipo de anuncio tiene una disponibilidad máxima por semana:  $x_1 \leq 9$ ,  $x_2 \leq 10$ ,  $x_3 \leq 12$ ,  $x_4 \leq 18$ ,  $x_5 \leq 22$ ,  $x_6 \leq 5$ ,  $x_7 \leq 1$  y  $x_8 \leq 45$ .
3. Restricciones de no negatividad: El número de anuncios no puede ser negativo:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$$

Para encontrar la solución óptima a este problema utilizaremos el método Simplex, cuyos pasos aplicados a este problema describimos a continuación.

Primeramente formaremos una tabla inicial del Simplex, donde se incluyen las variables de decisión, las restricciones y la función objetivo que hemos definido previamente. Segundo, en cada iteración, determinaremos las variables que entran y las que salen de la base. Esto se hace evaluando las tasas de mejora de la función objetivo y asegurando que se sigan verificando las restricciones. Tercero, actualizaremos la tabla del Simplex con las nuevas variables básicas y, para finalizar, repetiremos el proceso de iteración hasta que no sea posible mejorar más la función objetivo, es decir, hasta alcanzar la solución óptima.

En conclusión, el método Simplex en este caso permite identificar la combinación óptima de anuncios en diversos medios publicitarios para maximizar la cobertura de audiencia, respetando el presupuesto y las restricciones de disponibilidad.

### 2.3. Aplicación del modelo en un ejemplo real

La empresa "GastroJardín" tiene un presupuesto de 10,000 dólares para distribuir entre diferentes canales de medios publicitarios con el objetivo de maximizar la audiencia total, lo cual es crucial para el lanzamiento de su nueva línea de fertilizantes orgánicos. La inversión publicitaria se realizará en varios medios: televisión (matutino, vespertino y nocturno), radio (matutino y vespertino/nocturno), prensa (lunes a sábado y domingo) y redes sociales (Facebook e Instagram). Cada medio tiene un coste asociado y una audiencia estimada alcanzada. Para determinar la combinación óptima de anuncios que maximice la cobertura de audiencia, se utilizará un programa de software especializado, como Python, para resolver el modelo [21].

Los datos y parámetros utilizados en el modelo incluyen los costes y la audiencia estimada de cada tipo de anuncio, así como las restricciones de disponibilidad. Estos se resumen en la siguiente tabla:

Medio	Horario	Coste por Anuncio	Audiencia Estimada	Máx. Anuncios por Semana
Televisión	Matutino ( $x_1$ )	\$745	178,750	9
Televisión	Vespertino ( $x_2$ )	\$985	121,960	10
Televisión	Nocturno ( $x_3$ )	\$1,150	209,060	12
Radio	Matutino ( $x_4$ )	\$360	356,901	18
Radio	Vespertino ( $x_5$ )	\$315	250,710	22
Prensa	Lunes a Sábado ( $x_6$ )	\$1,294	284,762	5
Prensa	Domingo ( $x_7$ )	\$552	466,728	1
Redes Sociales	Semana ( $x_8$ )	\$150	50,000	45

Cuadro 2.1: Distribución de anuncios por medio, horario, coste, audiencia estimada y límite máximo por semana [21].

El objetivo es maximizar la audiencia total alcanzada con el presupuesto disponible. Recopilando la información de la sección anterior tenemos que la función objetivo y las restricciones del modelo de programación lineal son las siguientes:

#### **Función objetivo:**

$$\text{Maximizar } Z = 178750x_1 + 121960x_2 + 209060x_3 + 356901x_4 + 250710x_5 + 284762x_6 + 466728x_7 + 50000x_8 \quad (2.1)$$

**Restricciones de presupuesto:**

$$745x_1 + 985x_2 + 1150x_3 + 360x_4 + 315x_5 + 1294x_6 + 552x_7 + 150x_8 \leq 10000 \quad (2.2)$$

**Restricciones de disponibilidad:**

$$\begin{aligned} x_1 \leq 9, \quad x_2 \leq 10, \quad x_3 \leq 12, \quad x_4 \leq 18, \\ x_5 \leq 22, \quad x_6 \leq 5, \quad x_7 \leq 1, \quad x_8 \leq 45 \end{aligned} \quad (2.3)$$

**Restricciones de no negatividad:**

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0 \quad (2.4)$$

Para resolver este problema de programación lineal, utilizaremos Python con la biblioteca PuLP, que es una herramienta de optimización lineal y entera. A continuación, se expondrán los resultados obtenido tras copilar dicho código (Anexo I):

Estado de la solución	Optimal
<b>Valores óptimos de las variables de decisión</b>	
Anuncios en televisión matutino (x1)	0
Anuncios en televisión de la tarde (x2)	0
Anuncios en televisión nocturno (x3)	0
Anuncios en radio matutino (x4)	18
Anuncios en radio de la tarde (x5)	11
Anuncios en prensa lunes a sábado (x6)	0
Anuncios en prensa domingo (x7)	0
Anuncios en redes sociales (x8)	0
<b>Valor óptimo de la audiencia alcanzada</b>	<b>9,182,028 personas</b>

Cuadro 2.2: Resultados óptimos de las variables de decisión y audiencia alcanzada

Estos resultados indican que, con un presupuesto de 10,000 dólares, la empresa debería colocar 18 anuncios en la radio durante el horario matutino y 11 anuncios en la radio durante el horario de la tarde para alcanzar la mayor audiencia posible. Para ofrecer una visión más detallada, se presentan las tablas específicas donde se puede apreciar la distribución del presupuesto y de la audiencia para un análisis más exhaustivo. La distribución del presupuesto de 10,000 dólares entre los diferentes medios publicitarios se puede observar en la siguiente tabla:

Medio	Horario	Número de anuncios	Coste por anuncio	Coste total
Televisión	Matutino (x1)	0	\$745	\$0
Televisión	Vespertino (x2)	0	\$985	\$0
Televisión	Nocturno (x3)	0	\$1,150	\$0
Radio	Matutino (x4)	18	\$360	\$6,480
Radio	Vespertino (x5)	11	\$315	\$3,465
Prensa	Lunes a Sábado (x6)	0	\$1,294	\$0
Prensa	Domingo (x7)	0	\$552	\$0
Redes Sociales	Semana (x8)	0	\$150	\$0
<b>Total</b>				<b>\$9,945</b>

Cuadro 2.3: Distribución del presupuesto

Y la distribución de la audiencia alcanzada por cada medio publicitario la siguiente:

Medio	Horario	Número de anuncios	Coste por anuncio	Coste total
Televisión	Matutino (x1)	0	\$745	\$0
Televisión	Vespertino (x2)	0	\$985	\$0
Televisión	Nocturno (x3)	0	\$1,150	\$0
Radio	Matutino (x4)	18	\$360	\$6,480
Radio	Vespertino (x5)	11	\$315	\$3,465
Prensa	Lunes a Sábado (x6)	0	\$1,294	\$0
Prensa	Domingo (x7)	0	\$552	\$0
Redes Sociales	Semana (x8)	0	\$150	\$0
<b>Total</b>				<b>\$9,945</b>

Cuadro 2.4: Distribución del presupuesto

Al analizar los costes y beneficios, se puede ver que invirtiendo en anuncios de radio, tanto en horario de mañana como de tarde, obtenemos un récord de audiencia de 9,182,028 personas, lo que refleja la alta efectividad de la radio en términos de audiencia alcanzada por dólar invertido. Además, no se realizaron inversiones en medios como televisión, prensa y redes sociales debido a su menor efectividad relativa y/o mayor coste en comparación con los anuncios de radio. Esto pone de manifiesto que, aunque estos medios son importantes para la presencia de la marca, la radio ofrece una mejor relación coste-beneficio para este caso particular.

La estrategia optimizada demuestra que, dentro de las restricciones presupuestarias y de disponibilidad actuales en este caso, la radio es el medio más eficiente para maximizar la audiencia, asegurando además una cobertura amplia en dos horarios diferentes. En consecuencia, la optimización del presupuesto publicitario mediante programación lineal ha demostrado ser una herramienta poderosa para la toma de decisiones, permitiendo a las empresas maximizar su

retorno de inversión y alcanzar sus objetivos de marketing de manera más eficiente.

Para concluir, la aplicación de la programación lineal mediante el método Simplex y su implementación en software especializado demuestran cómo las empresas pueden optimizar la asignación de sus recursos publicitarios, maximizando la cobertura de audiencia y asegurando un uso eficiente del presupuesto. La optimización matemática se presenta así como una herramienta esencial en la toma de decisiones estratégicas en un entorno competitivo y de recursos limitados.

No obstante, es importante reconocer ciertas limitaciones del estudio. La precisión de los resultados depende en gran medida de la exactitud de los datos de costes y audiencias, y cualquier desviación en estos datos puede afectar la validez de las conclusiones. Además, el modelo no considera factores cualitativos como la calidad del contenido publicitario o la percepción de la marca, que también pueden influir en la efectividad de la campaña publicitaria.

En cuanto a las futuras investigaciones, sería valioso ampliar el modelo para incluir estos factores cualitativos y realizar un análisis del impacto a largo plazo de las campañas publicitarias. Asimismo, la implementación de modelos de programación no lineal podría ofrecer una visión más detallada y precisa en escenarios más complejos donde las interacciones entre variables son significativas.



## Capítulo 3

# Optimización en la asignación de muestras de laboratorio

### 3.1. Introducción a la optimización de muestras de laboratorio

En el ámbito de la investigación y diagnóstico de laboratorio, la manipulación y análisis de muestras constituye una tarea importante que involucra, entre otros equipos, el uso de termocicladores para llevar a cabo procesos bioquímicos o moleculares complejos. Esta actividad es crucial para el avance científico y la confirmación de resultados experimentales, implicando un desafío logístico y económico debido a la inversión de tiempo y recursos financieros que requiere.

La optimización en la asignación de muestras de placas de laboratorio se convierte en una prioridad básica para aumentar la eficiencia operativa y disminuir los costes asociados al procesamiento de muestras. En este desafío no solo son relevantes las implicaciones económicas sino que también afectan la fiabilidad y calidad de los resultados obtenidos. En estos problemas, una distribución ineficiente nos puede llevar a contaminación cruzada, errores experimentales o incluso la obligación de repetir experimentos, lo que conllevaría un aumento mayor de los costes y los tiempos de espera.

La complejidad del problema radica en las múltiples restricciones que se deben considerar para una asignación óptima. Cada tipo de muestra requiere, quizá, de condiciones particulares de temperatura o agrupación con muestras similares y, de igual manera, las placas incluyen unas limitaciones físicas, con pozos organizados en un número fijo de filas y columnas. Además, la restricción de que las diferencias de temperatura entre bandas adyacentes en una misma placa no superen cierto umbral añade una complejidad adicional al problema de asignación.

Dada la similitud de esta situación con el conocido problema de empaquetamiento o *bin pac-*

*king* que es de por sí un problema NP-Duro y, por ello, su solución mediante programación lineal asumiendo costes razonables se vuelve complicada. Se plantea entonces la necesidad de explorar enfoques alternativos que permitan encontrar soluciones satisfactorias con un menor coste computacional. Este escenario justifica la investigación y el desarrollo de algoritmos heurísticos, como el de recocido simulado, que puedan ofrecer resultados prometedores en la optimización de la asignación de muestras en placas de laboratorio.

En este contexto, el presente estudio busca, más allá de abordar un problema práctico con implicaciones directas en la eficiencia y la economía de los laboratorios, contribuir al campo de la optimización y la investigación operativa con metodologías que puedan ser aplicadas en problemas análogos en otras áreas.

### 3.2. Formulación matemática del problema

El objetivo es asignar un conjunto de muestras a un número mínimo de placas de laboratorio, maximizando la ocupación de cada placa y teniendo en cuenta que las bandas adyacentes no pueden superar una diferencia de temperatura de 5°C. A continuación, definiremos las variables, restricciones y función objetivo que usaremos para el desarrollo de este problema:

Definimos  $x_{ijk}$  como una variable binaria donde  $i$  se refiere a la placa específica que estamos considerando,  $j$  indica el compartimento específico en esa placa y  $k$  identifica la muestra única que estamos colocando. Si ponemos un banderín en el compartimento  $j$  de la placa  $i$  para la muestra  $k$ , decimos que  $x_{ijk} = 1$  y, en caso contrario,  $x_{ijk} = 0$ .

Además, cada compartimento en una placa tiene su propia "temperatura", y cada muestra requiere estar en un compartimento con una temperatura específica para asegurar la validez del experimento. Denotamos la temperatura del compartimento  $j$  en la placa  $i$  como  $T_{ij}$  y la temperatura requerida para la muestra  $k$  como  $C_k$ .

Es importante mantener las muestras en compartimentos adyacentes a temperaturas similares para evitar interferencias en los experimentos. Así pues, la diferencia de temperatura entre compartimentos vecinos, denotada por  $\Delta T$ , no debe exceder un umbral específico, que hemos fijado en 5°C.

A continuación, definiremos el rango de movimiento de las variables utilizadas para este problema:

- La variable  $i$  se mueve a través del conjunto de placas disponibles en el laboratorio. Si hay  $P$  placas, entonces  $i \in \{1, 2, \dots, P\}$ .

- La variable  $j$  se refiere a los pozos específicos dentro de una placa. Cada placa tiene un número fijo de pozos  $M$ , organizados en una configuración de filas y columnas. Por lo tanto,  $j$  se mueve dentro del rango  $\{1, 2, \dots, M\}$ .
- La variable  $k$  registra las muestras que necesitan ser asignadas. Siendo el total de muestras  $N$ , entonces  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

Teniendo en cuenta las variables definidas anteriormente, formulamos algunas reglas esenciales:

1. A cada muestra se le asigna exactamente un pozo y este pozo no puede contener más de una muestra [16]:

$$\sum_{i,j} x_{ijk} = 1, \quad \forall k \quad \text{y} \quad \sum_k x_{ijk} \leq 1, \quad \forall i, j$$

2. La diferencia de temperatura entre bandas adyacentes no debe superar los  $5^\circ\text{C}$  ( $\Delta T$ ) [15]:

$$|T_{ij} - T_{i,j+1}| \leq \Delta T, \quad \forall i, j$$

3. Las muestras deben asignarse a pozos con la temperatura requerida [15]:

$$x_{ijk} = 1 \Rightarrow T_{ij} = C_k, \quad \forall i, j, k$$

Siguiendo las reglas establecidas, nuestro objetivo es usar la menor cantidad de placas posibles, pero asegurándonos de que la mayoría de compartimentos que sea posible en cada placa estén ocupados. Matemáticamente, buscamos minimizar el número de placas utilizadas y maximizar el número de compartimentos ocupados, teniendo en cuenta las restricciones de temperatura:

$$\min \sum_i \left( 1 - \frac{\sum_{j,k} x_{ijk}}{N} \right) \quad [13]$$

donde  $N$  es el número total de pozos por placa.

### 3.3. Métodos de solución heurísticos

Dada la complejidad del problema de asignación de muestras en placas de laboratorio, ya que es un problema NP-Duro, se decide usar un algoritmo heurístico basado en el método de recocido simulado. Este enfoque se justifica por la necesidad de encontrar soluciones de calidad en tiempos computacionales razonables, especialmente dada la ineficacia de los métodos de programación lineal para problemas grandes como este.

El recocido simulado se inspira en el proceso físico de *annealing* de metales, modelado matemáticamente para la optimización de problemas combinatorios. Se inicia a una temperatura inicial alta  $T_0$  y se reduce según un esquema de enfriamiento específico. A cada temperatura  $T$ , se exploran soluciones vecinas  $s'$  de la actual  $s$ , aceptando cambios con probabilidad  $\mathbb{P}(\Delta E, T) = \exp\left(-\frac{\Delta E}{k \cdot T}\right)$  [17], donde  $\Delta E$  es la diferencia en la función objetivo y  $k$  es una constante simulada.

Traslandando este método al problema de asignación de muestras, definimos el espacio de soluciones como  $S$  donde cada  $s \in S$  representa una configuración de asignación de muestras a las placas. La solución inicial  $s_0$  se genera ordenando las muestras por temperatura, respetando la restricción de diferencia de temperatura máxima  $\Delta T \leq 5^\circ\text{C}$ .

Las transiciones se realizan mediante operaciones de vecindad  $N(s)$ , incluyendo intercambios y reagrupaciones de muestras, y la función objetivo  $f(s)$  evalúa el número de placas y la ocupación de los pozos.

El algoritmo procede iterativamente, explorando la vecindad de la solución actual y aplicando el criterio de Metrópolis-Hastings [3] para aceptar nuevas soluciones. Con el objetivo de evitar mínimos locales, se consideran en cada iteración aquellas soluciones que empeoran la función objetivo, repitiendo el proceso hasta alcanzar el criterio de parada, bien se alcanzando el número máximo de iteraciones o una temperatura mínima  $T_{\min}$ .

Con esta descripción del problema, podemos formular el modelo como:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & f(s) = \text{Número de placas utilizadas} + \lambda \left(1 - \frac{\text{Pozos ocupados}}{\text{Pozos totales}}\right) \\ \text{Sujeto a } & \Delta T_{ij, i(j+1)} \leq 5^\circ\text{C}, \quad \forall i, j \\ & s' \in N(s), \quad \forall s \in S \\ & P(\Delta f, T) = \exp\left(-\frac{\Delta f}{k \cdot T}\right), \quad \Delta f = f(s') - f(s) \end{aligned}$$

donde  $\lambda$  es un parámetro de penalización para equilibrar el número de placas y la ocupación de los pozos. Este enfoque, centrado en el recocido simulado, ofrece una estructura robusta para abordar el complejo problema de asignación de muestras en laboratorios, equilibrando eficazmente las múltiples restricciones y objetivos del problema.

### 3.4. Comparación con métodos exactos

La principal diferencia matemática entre los métodos exactos y heurísticos radica en su enfoque de exploración del espacio de soluciones. Mientras que los métodos exactos, como la programación lineal y la programación entera, definen un espacio de soluciones factible y buscan el

óptimo global a través de un enfoque determinista [25]; los métodos heurísticos, como el recocido simulado, utilizan un enfoque estocástico para explorar el espacio de soluciones, aceptando incluso soluciones subóptimas temporalmente para evitar quedarse atrapados en mínimos locales [17].

Los métodos exactos garantizan la obtención de una solución óptima, pero su aplicabilidad se ve limitada por cuestiones de complejidad computacional y capacidad de gestión. Poniendo como ejemplo el problema de asignación de muestras que hemos formulado, a medida que aumentamos el tamaño del problema (número de muestras y placas), puede ser imposible por tiempo y recursos encontrar una solución óptima mediante métodos exactos, pues es un problema NP-duro [13]. Por otro lado, los métodos heurísticos ofrecen una alternativa práctica y flexible para abordar los problemas NP-duros, equilibrando la calidad de la solución con la eficiencia computacional. A continuación, se presentan las principales ventajas y desventajas de ambos enfoques:

	Métodos exactos	Métodos heurísticos
<b>Ventajas</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Garantizan la solución óptima.</li> <li>▪ Basados en un marco teórico riguroso.</li> <li>▪ Pueden proporcionar información sobre la estructura del problema.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Menor tiempo de ejecución.</li> <li>▪ Mayor capacidad para manejar problemas de gran tamaño.</li> <li>▪ Flexibilidad para adaptarse a diferentes tipos de problemas.</li> </ul>
<b>Desventajas</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Alta complejidad computacional.</li> <li>▪ Capacidad limitada a problemas de pequeño y mediano tamaño.</li> <li>▪ Requieren mayor tiempo de ejecución para problemas grandes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ No garantizan la solución óptima.</li> <li>▪ Pueden necesitar ajuste de parámetros específicos.</li> <li>▪ Pueden requerir varias ejecuciones para evaluar la calidad de las soluciones.</li> </ul>

Cuadro 3.1: Ventajas y desventajas de métodos exactos y heurísticos

Para ilustrar la diferencia entre los métodos exactos y heurísticos, consideramos el problema de asignación de muestras anterior con un conjunto de datos específico. Supongamos que necesitamos asignar 2071 muestras a placas de laboratorio con 96 pozos cada una. Utilizando un método exacto, como la programación entera mixta (MILP) [25], el tiempo de ejecución puede ser significativamente alto, y la solución podría requerir un número elevado de placas debido a

las restricciones de temperatura. Por el contrario, utilizando el algoritmo heurístico de recocido simulado [17], podemos obtener una solución subóptima en un tiempo mucho menor.

En este apartado, se presenta una comparación entre los resultados obtenidos mediante un Método Exacto de Programación Lineal Entera Mixta (MILP) y un Algoritmo Heurístico para la asignación de muestras de laboratorio en placas. Los datos se han resumido en la Tabla 3.2, donde se muestra el número de placas utilizadas por cada método y el tiempo de ejecución del algoritmo heurístico en segundos. A continuación, se muestran los resultados comparativos (código en el Anexo I.2):

Cantidad de muestras	Método exacto (MILP)	Algoritmo heurístico	Tiempo heurístico (s)
1473	26 placas	19 placas	71.25
1944	35 placas	23 placas	92.48
2071	30 placas	25 placas	59.03
2248	38 placas	27 placas	68.30
2496	42 placas	30 placas	83.08
2703	50 placas	32 placas	102.79
3000	55 placas	36 placas	110.25
3500	60 placas	40 placas	120.50
3783	70 placas	44 placas	109.73
4000	75 placas	48 placas	130.60

Cuadro 3.2: Comparación de resultados entre método exacto y heurístico

En la Tabla 3.2, se observa que el método exacto (MILP) requiere un mayor número de placas para la asignación de muestras en comparación con el algoritmo heurístico. Por ejemplo, para una cantidad de 1473 muestras, el método exacto necesita 26 placas, mientras que el método heurístico sólo requiere 19. Esta tendencia se mantiene en aumento a lo largo de todas las muestras analizadas. En el caso más extremo, para 4000 muestras, el método exacto utiliza 75 placas, en contraste con las 48 placas necesarias según el algoritmo heurístico.

La reducción en el número de placas necesarias cuando se utiliza el algoritmo heurístico puede atribuirse a la capacidad de estos algoritmos para encontrar soluciones aproximadas rápidamente, evitando la complejidad computacional de buscar una solución óptima exacta. Los métodos heurísticos son especialmente útiles en problemas de gran escala donde el tiempo de computación es una limitación crítica.

Además de reducir el número de placas, el algoritmo heurístico también demuestra una notable eficiencia en términos de tiempo de ejecución. El tiempo requerido para ejecutar el heurístico es significativamente menor en comparación con el tiempo que se esperaría para un método exac-

to en problemas de esta magnitud. Por ejemplo, el tiempo de ejecución del algoritmo heurístico para 1473 muestras es de 71.25 segundos, mientras que para 4000 muestras es de 130.60 segundos. Este incremento lineal del tiempo de ejecución con respecto al número de muestras es gestionable y muestra la escalabilidad del algoritmo heurístico.

Por otro lado, los métodos exactos como MILP, aunque garantizan obtener una solución óptima, tienen una aplicabilidad limitada en problemas de gran escala debido a la alta complejidad computacional que presentan. Estos métodos pueden ser ineficaces cuando el tamaño del problema aumenta, lo que se refleja en tiempos de ejecución excesivamente largos y un consumo elevado de recursos computacionales.

En resumen, aunque los métodos exactos proporcionan soluciones óptimas, su uso práctico está restringido por la complejidad y el tiempo de computación necesarios. Los algoritmos heurísticos, en contraste, ofrecen una solución práctica y eficiente, especialmente en situaciones donde el tiempo de computación toma un papel importante. El uso de algoritmos heurísticos como el recocido simulado ha demostrado ser altamente eficaz en este caso para la asignación de muestras en laboratorios, proporcionando un equilibrio adecuado entre la calidad de la solución y la eficiencia computacional [6].

### 3.5. Resultados y discusión

Los resultados obtenidos del algoritmo heurístico se compararon con los resultados del software comercial LabWare para un conjunto de pruebas con diferentes cantidades de muestras. Los resultados se resumen en términos del número de placas necesarias y el tiempo de ejecución del algoritmo heurístico.

Recuento de muestras	LabWare	Algoritmo heurístico	Tiempo empleado (s)
1473	22	19	71.25
1944	47	23	92.48
2071	41	25	59.03
2248	56	27	68.30
2496	36	30	83.08
2703	65	32	102.79
3783	90	44	109.73

Cuadro 3.3: Resultados y comparación [9].

Definimos las siguientes variables para representar los resultados:

- $n_{\text{LabWare}}[i]$ : Número de placas necesarias según LabWare para el conjunto de pruebas  $i$ .
- $n_{\text{Heurístico}}[i]$ : Número de placas necesarias según el algoritmo heurístico para el conjunto de pruebas  $i$ .
- $t_{\text{Heurístico}}[i]$ : Tiempo de ejecución (en segundos) del algoritmo heurístico para el conjunto de pruebas  $i$ .
- $i$ : Índice del conjunto de pruebas, donde  $i \in \{1473, 1944, 2071, 2248, 2496, 2703, 3783\}$  representa la cantidad de muestras.

Para cada conjunto de pruebas  $i$ , evaluamos:

- Reducción en el número de placas:  $\Delta n[i] = n_{\text{LabWare}}[i] - n_{\text{Heurístico}}[i]$
- Tiempo de ejecución del algoritmo heurístico:  $t_{\text{Heurístico}}[i]$

El análisis revela que el algoritmo heurístico propuesto logra una reducción significativa en el número de placas necesarias en comparación con LabWare, lo que demuestra una mejora en la eficiencia de asignación de muestras. Además, los tiempos de ejecución del algoritmo heurístico reflejan su eficacia en términos de velocidad, proporcionando soluciones en tiempos razonables. Este análisis matemático confirma la viabilidad y eficacia del enfoque heurístico, destacando su utilidad en problemas de optimización complejos donde los métodos tradicionales pueden no ser óptimos.

### 3.6. Ejemplo

Volviendo al ejemplo inicial, en esta sección, presentaremos ejemplos específicos proporcionados en [9], aplicando la metodología propuesta en escenarios de laboratorio reales, resaltando los desafíos encontrados y las soluciones aplicadas. A través de la notación matemática, describimos la adaptación del algoritmo heurístico basado en recocido simulado para optimizar la asignación de muestras en placas.

Cantidad de muestras	LabWare	Algoritmo heurístico	Tiempo gastado (s)
1473	22	19	71.25
1944	47	23	92.48
2071	41	25	59.03
2248	56	27	68.30
2496	36	30	83.08
2703	65	32	102.79
3783	90	44	109.73

Cuadro 3.4: Resultados de pruebas [9].

A continuación, analizaremos con más detalle las muestras proporcionadas por la tabla.

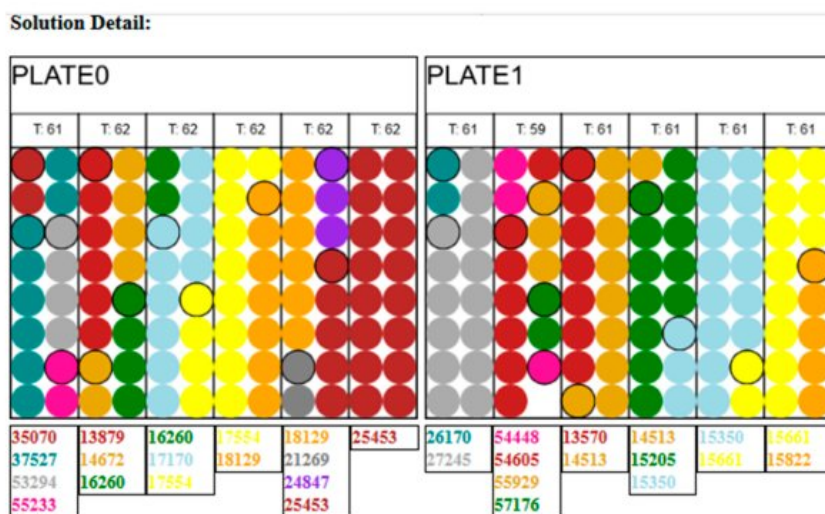
En un laboratorio, se procesan  $N$  muestras, donde  $N = 2071$ , utilizando placas con una capacidad de  $M = 96$  pozos. La meta es minimizar el número de placas  $P$  utilizadas, dado por:

$$P = \left\lceil \frac{N}{M} \right\rceil$$

El algoritmo heurístico se ajustó para considerar la compatibilidad de las muestras, resultando en una reducción del número de placas de  $P_{\text{LabWare}} = 41$  a  $P_{\text{Heurístico}} = 25$ , con un tiempo de ejecución de  $t = 59,03$  segundos.

Otro caso particular consiste en procesar  $N = 3783$  muestras, con la misma capacidad de placa que el caso anterior. La optimización se centró en mantener la diferencia de temperatura  $\Delta T \leq 5^\circ\text{C}$  entre bandas adyacentes. En este caso, el número de placas se redujo de  $P_{\text{LabWare}} = 90$  a  $P_{\text{Heurístico}} = 44$ , y el algoritmo tardó  $t = 109,73$  segundos en encontrar la solución.

De manera análoga en el resto de casos, a continuación los analizaremos visualizando la muestra de colores de los pocillos, profundizando más en el ejemplo para poder concluir el problema de la asignación de muestras de laboratorio.



En la imagen, contemplamos el resultado final de un proceso de asignación estratégica donde dos placas, denominadas PLATE0 y PLATE1, se utilizan para organizar muestras de laboratorio que deben ser procesadas a ciertas temperaturas. Cada placa se conforma por un conjunto de pocillos que sirven de alojamiento para estas muestras.

Visualmente, los colores distintivos en los pocillos representan agrupaciones de muestras distintas, cada una con requisitos de temperatura específicos. Podemos imaginar que el color rojo es asignado al valor numérico o categórico 1, el verde al 2, el azul al 3, y así sucesivamente, para indicar diferencias en las propiedades de las muestras o sus necesidades de procesamiento.

Las temperaturas se indican en la parte superior de cada columna de pocillos. Por ejemplo, T.61 podría significar que los pocillos debajo de esta etiqueta deben mantenerse a 61 grados Celsius. Esta distribución de temperaturas es crucial, ya que las muestras en pocillos adyacentes no deben tener una diferencia mayor a 5 grados entre sí, estableciendo un patrón térmico que debe ser meticulosamente observado para garantizar la integridad del proceso de laboratorio.

Los números dentro de cada pocillo coloreado actúan como identificadores únicos para cada muestra, facilitando su seguimiento y manipulación. Estos identificadores son esenciales, ya que permiten a los técnicos de laboratorio saber exactamente qué muestra se está manejando en cada momento sin riesgo de confusión.

Los números listados en la parte inferior de cada placa sirven como una referencia adicional, posiblemente relacionando los grupos de pocillos de colores con lotes específicos o series de procesos dentro del laboratorio.

El objetivo de todo este diseño cuidadoso es optimizar la cantidad de espacio utilizado, permitiendo que el mayor número posible de muestras se procese simultáneamente mientras se cumplen todas las restricciones térmicas y se minimiza el número total de placas en uso.

Por lo tanto, la imagen que vemos es una representación gráfica de una solución óptima obtenida por un algoritmo de optimización basado en técnicas de recocido simulado, que no solo considera la capacidad física y las restricciones térmicas sino que también busca maximizar la eficiencia y reducir el gasto operacional en un entorno de laboratorio.



## Capítulo 4

# Optimización en la gestión de recursos en incendios forestales

### 4.1. Introducción a la optimización en la gestión de recursos en incendios forestales

La gestión eficiente de recursos en la extinción de incendios forestales es un componente crítico para minimizar los costes y daños asociados a estos desastres naturales. La región de Galicia, situada en el noroeste de España, con una superficie de 29,574 km<sup>2</sup> y de la cual el 69% corresponde a cordilleras montañosas, ha experimentado una alta incidencia de incendios, registrando, según el estudio [20], más de 3550 incendios anuales entre 2011 y 2015. Solo en 2011, se quemaron 42,392.17 hectáreas. En 2017, la entidad pública regional encargada de combatir los incendios forestales gestionó a 7000 personas, 360 bombas motorizadas y 30 recursos aéreos, incluyendo 25 helicópteros [20].

Este trabajo introduce una nueva formulación matemática para la programación óptima de recursos, desarrollada en el marco de un proyecto de transferencia que se centra en el desarrollo de tecnologías avanzadas para la lucha contra incendios en áreas silvestres [5]. Entre las diversas tareas que abarca el proyecto, denominado Enjambre, se incluyen el diseño de algoritmos anti-colisión para aeronaves y la planificación de rutas para brigadas terrestres. En particular, este estudio se enfoca en la selección óptima de recursos (recursos aéreos, brigadas y motores) para combatir incendios en un día laborable, considerando restricciones en el horario para cumplir con las regulaciones que exigen períodos de descanso y la no negligencia de frentes.

El objetivo específico de esta investigación es adaptar la metodología C+NVC (Coste más Cambio de Valor Neto) para la contención de incendios en España, especialmente en Galicia

[25]. La metodología C+NVC combina la minimización del coste asociado con el uso de recursos aéreos y terrestres con la reducción de los costes generados por la tierra quemada, la pérdida de materiales o las tareas de regeneración [12].

La optimización propuesta en este estudio no solo busca mejorar la eficacia en la asignación de recursos para la extinción de incendios forestales, sino también garantizar el cumplimiento de las normativas vigentes que garantizan tanto la integridad del personal involucrado como la efectividad en el control de los incendios. La implementación de este modelo integral de programación lineal entera presenta una oportunidad significativa para avanzar en la gestión de incendios forestales, combinando modelos matemáticos rigurosos con las normativas y exigencias del territorio español. Este modelo también aborda la temporalidad y la asignación dinámica de recursos, utilizando simulaciones para evaluar la eficacia y el tiempo de resolución de las decisiones de asignación [20].

Como veremos, este estudio propone un marco teórico y práctico que permite la optimización en tiempo real de los recursos destinados a la lucha contra incendios forestales, incorporando tanto modelos deterministas como estocásticos para asegurar una respuesta rápida y efectiva ante cualquier escenario posible.

## 4.2. Formulación matemática del problema

La gestión efectiva de los recursos en la lucha contra los incendios forestales implica una planificación estratégica que minimice los costes operativos y maximice la eficacia de la contención del incendio. Este objetivo se consigue planteando un modelo de programación lineal entera, cuya formulación matemática se detalla a continuación.

En primer lugar, definimos los conjuntos e índices que vamos a utilizar, que en este caso serían:  $I$  que representa el conjunto de todos los recursos disponibles para la lucha contra incendios, cada uno identificado por un índice  $i$ ;  $G$  que agrupa los recursos en categorías basadas en su tipo o función, identificados por el índice  $g$  y  $T$  que corresponde al conjunto de periodos discretos durante los cuales se monitoriza y combate el incendio, con un índice  $t$ .

A continuación, definiremos los parámetros del modelo y sus respectivas variables de decisión respectivamente, de manera que:  $C_i$  es el coste por periodo de uso del recurso  $i \in I$ ,  $P_i$  es el coste fijo por seleccionar el recurso  $i$ ,  $BPR_i$  es el rendimiento máximo del recurso  $i$ , definido como la longitud del perímetro del incendio que puede ser contenido en un periodo de tiempo,  $EF_{it}$  la eficiencia del recurso  $i$  en el periodo  $t$ , influenciada por condiciones del terreno, clima, etc. y, por último,  $NVC_t$ , que es el aumento en los costes asociados al incendio en el periodo  $t$ , incluyendo daños a la zona afectada o costes de reforestación, entre otros.

Las variables binarias que denotan si el recurso  $i$  inicia su uso, se encuentra en tránsito, en descanso, finalizando su periodo de descanso o concluyendo su tarea durante el periodo  $t$ , se representarán respectivamente como  $s_{it}$ ,  $tr_{it}$ ,  $r_{it}$ ,  $er_{it}$ ,  $e_{it}$ . Para indicar si el recurso  $i$  tiene una tarea asignada en el periodo  $t$  se denotará por  $u_{it}$  y, si el recurso está trabajando en la extinción del incendio, se denotará por  $w_{it}$ . Asimismo, se denota por  $z_i$  la variable binaria que indica con el valor 1 si el recurso  $i$  es seleccionado para combatir el incendio en algún momento. La variable binaria  $y_t$  toma el valor 1 si el incendio no está contenido en el periodo  $t$  y, por último, denotaremos por  $\mu_{gt}$  a la variable entera que cuenta el número de recursos que faltan del grupo  $g$  para alcanzar el mínimo requerido en el periodo  $t$ .

Definidas las variables a tener en cuenta, expresamos de la manera siguiente la función objetivo diseñada para reducir a mínimo los costes relacionados con la gestión de incendios:

$$\text{mín} \left( \sum_{i \in I, t \in T} C_i \cdot u_{it} + \sum_{i \in I} P_i \cdot z_i + \sum_{t \in T} NVC_t \cdot y_{t-1} + \sum_{g \in G, t \in T} M' \cdot \mu_{gt} \right) \quad (4.1)$$

donde el primer término representa el coste variable por el uso de los recursos seleccionados, el segundo término corresponde al coste fijo por la selección de los recursos, el tercer término está asociado con los costes derivados de las áreas afectadas por el incendio y el último término representa la penalización por no cumplir con el número mínimo de recursos de cada grupo requerido en cada periodo de tiempo.

### 4.3. Restricciones

Para desarrollar un análisis matemático detallado de cada restricción del modelo en la gestión de incendios forestales, es necesario comprender cómo estas afectan a la asignación y utilización de los recursos. Las restricciones pueden incluir limitaciones en el número máximo de horas de trabajo continuo para evitar el agotamiento del personal, periodos de descanso obligatorios para cumplir con regulaciones laborales, y la capacidad máxima de respuesta de los recursos basada en su eficiencia y disponibilidad. Cada una de estas restricciones impacta en la solución óptima con consecuencias diversas, restringiendo el espacio de soluciones factibles, de manera que se garantice que el plan de respuesta proporcionado se ajuste a las necesidades y normativas de cada problema específico.

La primera restricción que vamos a tener en cuenta es la de contención de incendios. Esta restricción garantiza que el perímetro cubierto por los recursos en un determinado periodo debe ser mayor que el perímetro del incendio y se expresa como:

$$\sum_{i \in I} PR_{it} \cdot w_{it} \geq \sum_{t \in T} PER_t \cdot y_{t-1} \quad (4.2)$$

donde:  $PR_{it}$  representa el rendimiento del recurso  $i$  en el periodo  $t$ ,  $w_{it}$  indica si el recurso  $i$  está trabajando en la lucha contra el incendio en el periodo  $t$ ,  $PER_t$  es el incremento del perímetro del incendio en el periodo  $t$ , e  $y_{t-1}$  es una variable binaria que indica si el incendio no está contenido en el periodo anterior  $t - 1$ .

Otra restricción a tener en cuenta es la de asegurar que el incendio está controlado si en un periodo la variable binaria  $y_t$  toma el valor 0, es decir, si la línea de contención creada por los recursos excede el crecimiento del perímetro del incendio. Matemáticamente se expresa como:

$$M \cdot y_t \geq \sum_{t' \in T} PER_{t'} \cdot y_{t'-1} - \sum_{i \in I} PR_{it'} \cdot w_{it'} \quad (4.3)$$

donde  $M$  es una constante suficientemente grande para establecer el confinamiento del incendio,  $y_t$  es una variable binaria que indica si el incendio no está contenido en el periodo  $t$ ,  $PER_{t'}$  es el incremento del perímetro del incendio en el periodo  $t'$ ,  $PR_{it'}$  representa el rendimiento del recurso  $i$  en el periodo  $t'$  y  $w_{it'}$  indica si el recurso  $i$  está trabajando en la lucha contra el incendio en el periodo  $t'$ .

Las siguientes restricciones (ecuaciones (4.4)–(4.6)) constituyen las relaciones lógicas entre las variables y los parámetros relacionados con el inicio de la actividad de un recurso. Esto quiere decir que si un recurso se utiliza en un determinado periodo, debe haber viajado antes de ese periodo durante al menos el número de periodos necesarios para llegar a la ubicación del incendio. Además, si un recurso comienza a usarse en algún periodo, entonces debe haber sido seleccionado previamente.

$$\forall i \in I, t \in T, A_i \cdot w_{it} \leq \sum_{t_0 \in T_t} tr_{it_0} \quad (4.4)$$

$$\forall i \in I : ITW_i = 1, s_{i1} + \sum_{t \in T_2} (m + 1) \cdot s_{it} \leq m \cdot z_i \quad (4.5)$$

$$\forall i \in I : ITW_i = 0, \sum_{t \in T} s_{it} \leq z_i \quad (4.6)$$

Por último, para la finalización de la actividad, la restricción siguiente asegura que cuando un recurso termina su trabajo, debe tener suficiente tiempo para regresar a la base. Se formula como:

$$\sum_{t'=t-TRP_i+1}^t tr_{it'} \geq TRP_i \cdot e_{it} \quad (4.7)$$

donde  $TRP_i$  es el número de periodos de tiempo que el recurso  $i$  necesita para ir desde el punto de descanso hasta la ubicación del incendio,  $tr_{it'}$  indica si el recurso  $i$  está en tránsito durante el periodo  $t'$  y  $e_{it}$  indica si el recurso  $i$  termina su trabajo en el periodo  $t$ .

Para modelar los periodos de descanso de los recursos, consideramos las siguientes restricciones adicionales:

$$cr_{it} = cr_{i,t-1} + 1 - r_{it} - e_{it}, \quad \forall i \in I, \forall t \in T \quad (4.8)$$

$$cr_{it} = 0, \quad \text{si } r_{it} = 1 \text{ o si } e_{it} = 1 \quad (4.9)$$

donde  $cr_{it}$  representa el contador de periodos consecutivos sin descanso para el recurso  $i$  en el tiempo  $t$ ,  $r_{it}$  es una variable binaria que indica si el recurso  $i$  está en descanso en el periodo  $t$  y  $e_{it}$  indica si el recurso  $i$  termina su trabajo en el periodo  $t$ .

Estas restricciones aseguran que los recursos tomen los descansos necesarios, incrementando el contador de tiempo sin descanso cuando el recurso está en operación, y reiniciando el contador cuando el recurso descansa o termina su jornada laboral.

#### 4.4. Fin de actividad

La gestión eficiente de los recursos en la extinción de incendios forestales requiere no solo una asignación adecuada de los mismos, sino también una planificación detallada del fin de sus actividades. La finalización de las tareas por parte de los recursos debe cumplir con una serie de restricciones para asegurar su disponibilidad para futuras asignaciones y el mantenimiento de su efectividad. Estas restricciones se pueden modelar como sigue:

$$\text{Restricción de Retorno: } \forall i \in I, \quad \sum_{t'=t-TRP_i+1}^t tr_{it'} \geq TRP_i \cdot e_{it} \quad (4.10)$$

donde  $TRP_i$  representa el número de periodos necesarios para que el recurso  $i$  regrese a su base o punto de descanso,  $tr_{it'}$  indica si el recurso  $i$  está en tránsito durante el periodo  $t'$ , y  $e_{it}$  denota si el recurso  $i$  termina su actividad en el periodo  $t$ .

Representamos mediante la siguiente restricción la necesidad de incorporar periodos de descanso para los recursos, de manera que se garantice su recuperación y se mantenga la efectividad del recurso en cuestión:

$$\text{Restricción de Descanso: } \forall i \in I, \quad \sum_{t=\text{inicio}}^{\text{fin}} r_{it} \geq RP_i \quad (4.11)$$

en la ecuación,  $r_{it}$  es una variable binaria que indica si el recurso  $i$  está descansando en el periodo  $t$ , y  $RP_i$  es el número mínimo de periodos de descanso requeridos para el recurso  $i$  después de una sesión de trabajo. Esta restricción, que supone una condición esencial para asegurar la disponibilidad y el uso eficaz de los recursos, garantiza que si un recurso finaliza su actividad en un determinado periodo, debe haber un tiempo de tránsito suficiente, asignado con anterioridad, para permitir su regreso a la base.

Después de concluir sus tareas, los recursos deben ser evaluados para determinar su disponibilidad y condición para futuras reasignaciones. Este proceso involucra tanto el estado físico del recurso como la necesidad operativa, y se formula de la siguiente manera:

$$\text{Disponibilidad de Recursos: } \forall i \in I, z_i^{nueva} = \begin{cases} 1 & \text{si } e_{it} = 1 \text{ y } \sum_{t=\text{inicio}}^{\text{fin}} r_{it} \geq RP_i \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases} \quad (4.12)$$

donde  $z_i^{nueva}$  indica la disponibilidad del recurso  $i$  para nuevas asignaciones.

#### 4.5. Modelo modificado para maximizar los esfuerzos de represión

Si el modelo descrito anteriormente es inviable, se implementará un modelo alternativo para determinar la programación de los recursos. Dicho modelo modificado se enfoca en maximizar la eficacia de los esfuerzos de contención en la gestión de incendios forestales. A través de la adaptación de las restricciones operativas y la introducción de nuevas variables y parámetros, buscamos optimizar la asignación y el uso de recursos, garantizando una respuesta más efectiva ante los incendios. En este caso, la función objetivo del modelo es la siguiente:

$$\text{máx} \left( \sum_{i \in I, t \in T} E_{it} - \lambda \left( \sum_{i \in I} C_i + \sum_{t \in T} D_t \right) \right) \quad (4.13)$$

Esta función objetivo modificada busca maximizar la eficiencia de los recursos asignados a la lucha contra el incendio, teniendo en cuenta tanto los costes operativos como los impactos potenciales del mismo. En la ecuación,  $E_{it}$  representa la eficacia del recurso  $i$  en el periodo  $t$ ,  $C_i$  son los costes asociados al uso del recurso  $i$ ,  $D_t$  son los daños potenciales evitados en el periodo  $t$ , y  $\lambda$  es un parámetro que equilibra la eficacia frente a los costes.

El modelo incluye restricciones que aseguran la viabilidad de las soluciones, tales como las restricciones de disponibilidad y capacidad de los recursos, las limitaciones en los tiempos de trabajo y descanso, asegurando el bienestar del personal. Destacamos la restricción de retorno

(ecuación 4.10), que garantiza, junto al resto, la coherencia en la asignación y utilización de los recursos.

## 4.6. Pruebas del modelo

En las secciones anteriores hemos presentado un modelo matemático para la gestión de recursos en incendios forestales, que nos permitirá desarrollar estrategias óptimas para asignar brigadas y equipos de manera eficiente. En esta sección aplicaremos el modelo a un caso práctico.

Consideremos un incendio de tamaño medio con datos obtenidos de la vida real. En este ejemplo, hay cuatro aviones, cuatro motores y cinco brigadas de diferentes tamaños. Disponemos de información sobre el rendimiento base de cada recurso, sus costes en euros (en el caso de España no existe coste inicial por el uso de los recursos) y los plazos legales de trabajo. Además, se consideran periodos de diez minutos, lo que significa que los tipos de aeronaves descritos en la Tabla 4.1 tienen un coste de 480 euros por diez minutos de uso.

Nombre	G	BPR	P	C	TRP	WP	RP	UP
helicóptero1	avión	0.45	0	480	1	12	4	48
helicóptero2	avión	0.45	0	480	1	12	4	48
avión1	avión	0.60	0	520	1	12	4	48
avión2	avión	0.60	0	520	1	12	4	48
maquina1	motor	0.45	0	8	2	48	0	48
maquina2	motor	0.45	0	8	2	48	0	48
maquina3	motor	0.45	0	8	2	48	0	48
maquina4	motor	0.45	0	8	2	48	0	48
brigada7-1	brigada	0.06	0	16	2	48	0	48
brigada7-2	brigada	0.06	0	16	2	48	0	48
brigada12-1	brigada	0.10	0	30	2	48	0	48
brigada12-2	brigada	0.10	0	30	2	48	0	48
brigada12-3	brigada	0.10	0	30	2	48	0	48

Cuadro 4.1: Descripción de los recursos y algunos parámetros asociados [20].

La Tabla 4.1 describe también los recursos utilizados en la lucha contra los incendios forestales, junto con varios parámetros asociados. Incluye diferentes tipos de recursos como helicópteros, aviones, máquinas y brigadas, cada uno con su respectivo rendimiento (BPR), coste fijo (P), coste por periodo (C), y otros parámetros operativos como el tiempo de respuesta (T), los periodos

de descanso requeridos (RP), los periodos de trabajo máximo sin descanso (WP), y el tiempo de uso máximo diario (UP). Estos parámetros son cruciales para la planificación y asignación óptima de los recursos en la extinción de incendios [20].

Respecto al estado inicial de los recursos, podemos ver como dos aviones (helicóptero1 y avión2), y una brigada de 12 personas (brigada12-3) están trabajando actualmente para contener el incendio forestal (Tabla 4.2). También es necesario recopilar información actualizada sobre estos recursos, por lo que definiremos las siglas utilizadas en esta tabla: Nombre describe el tipo de recurso, G es el grupo al que pertenece el recurso, ITW significa que el recurso está actualmente en uso para este incendio (1 para sí, 0 para no), IOW nos indica si el recurso está actualmente en uso en otro incendio (1 para sí, 0 para no), A es el número de periodos requeridos para que el recurso llegue a la ubicación del incendio, CWP es el número actual de periodos de tiempo desde el último periodo de descanso del recurso, CRP es el número actual de periodos de descanso utilizados por el recurso en caso de que esté descansando y CUP es el número actual de periodos de tiempo en un día que el recurso ha sido utilizado.

Nombre	G	ITW	IOW	A	CWP	CRP	CUP
helicóptero1	avión	1	0	0	16	3	16
helicóptero2	avión	0	1	0	5	0	8
avión1	avión	0	0	0	9	0	0
avión2	avión	1	0	0	15	2	15
maquina1	motor	0	0	0	5	0	0
maquina2	motor	0	0	0	7	0	0
maquina3	motor	0	0	0	12	0	0
maquina4	motor	0	0	0	0	0	0
brigada7-1	brigada	0	0	0	0	0	0
brigada7-2	brigada	0	0	0	0	0	0
brigada12-1	brigada	0	0	0	0	0	0
brigada12-2	brigada	0	0	0	7	0	0
brigada12-3	brigada	1	0	0	10	0	10

Cuadro 4.2: Parámetros asociados con la disposición inicial de recursos [20].

Con toda esta información podremos analizar la tabla de manera completa teniendo en cuenta que los dos aviones se encuentran en periodo de descanso. Por ejemplo, el helicóptero1 ya está en acción, involucrado directamente en el incendio actual, lo cual se indica por un '1' en la columna de 'ITW'. Mientras tanto, el helicóptero2 está actualmente comprometido en otro lugar, como lo señala el '1' bajo 'IOW'. Otros recursos, como las brigadas y máquinas, están bien en espera o bien en diferentes etapas de preparación y respuesta.

Además, hay cifras que indican la cantidad de períodos de tiempo desde el último descanso ('CWP'), así como la cantidad de períodos de descanso que han tenido ('CRP'), lo que sugiere una consideración cuidadosa por el bienestar y la eficacia de los equipos y pilotos a lo largo de operaciones prolongadas. También se muestra la cantidad de tiempo que cada recurso ha estado activo durante el día ('CUP'), lo que implica una gestión atenta para evitar el desgaste y garantizar una respuesta sostenida al incendio. En general, la tabla presenta un panorama de los esfuerzos coordinados y regulados para combatir incendios, enfatizando un equilibrio entre la asignación estratégica de recursos y el cumplimiento de normativas laborales y de seguridad.

También conocemos el avance de los incendios forestales en términos de perímetro (en km) e incrementos de costes (Tabla 4.3). Primeramente definiremos que significa cada sigla para una mayor comprensión de la tabla en cuestión. Sea PER el perímetro del incendio en kilómetros, indicando el tamaño o la extensión del área afectada por el incendio en un período específico; NVC son las siglas en inglés de *Net Value Change*, es decir, medida económica que podría representar el cambio en el valor neto debido a los daños causados por el incendio. Para finalizar, Periodo hace referencia al lapso de tiempo en el cual se mide el avance del incendio y los costes relacionados con su combate y contención.

<b>Periodo</b>	<b>PER</b>	<b>NVC</b>
1	10.2	2070
2	0.2	230
3	0.2	200
4	0.4	370
5	0.4	410
6	0.4	400
7	0.4	460
8	0.4	430
9	0.4	440
10	0.6	760
11	0.6	750
12	0.8	890
13	0.8	960
14	0.8	920

Cuadro 4.3: Parámetros asociados a la evolución de los incendios forestales: perímetro y coste [20].

Con todo esto, podemos ver que la información del primer periodo es extremadamente importante porque describe las condiciones iniciales del incendio forestal. En este caso, el incendio

tiene un perímetro de 10,2 km y un coste asociado de 2.070 euros. Los siguientes dos periodos de tiempo describen los incrementos más pequeños en el perímetro del incendio debido a los esfuerzos de contención y las pérdidas relacionadas, lo que sugiere que el impacto o coste acumulativo del incendio sigue creciendo con el tiempo [20].

Es posible incluir en el modelo la eficiencia de los recursos en función de las condiciones climáticas, tipo de combustible, etc., aunque en este ejemplo sencillo consideraremos que todos los recursos tienen un rendimiento máximo (valor 1) en todos los periodos. Además, existen limitaciones para combatir la no negligencia que obligan a que de dos a tres aviones de uno a cuatro motores y de dos a cinco brigadas esten trabajando en el incendio en todo momento.

En resumen, la Tabla 4.3 proporciona una representación de la evolución de un incendio forestal y los costes asociados con su progresión a lo largo del tiempo, lo que es esencial para evaluar la gravedad de un incendio y la eficacia de las operaciones de combate al fuego.

Caso	Aviones	Motores	Brigadas	Periodos
1	5	5	5	20
2	10	5	5	20
3	5	10	5	20
4	10	10	5	20
5	5	5	10	20
6	10	5	10	20
7	5	10	10	20
8	10	10	10	20
9	5	5	5	30
10	10	5	5	30
11	5	10	5	30
12	10	10	5	30
13	5	5	10	30
14	10	5	10	30
15	5	10	10	30
16	10	10	10	30
17	5	5	5	40
18	10	5	5	40
19	5	10	5	40
20	10	10	5	40
21	5	5	10	40
22	10	5	10	40
23	5	10	10	40
24	10	10	10	40

Cuadro 4.4: Configuraciones de recursos para los incendios simulados [20].

La Tabla 4.4 muestra las configuraciones de recursos utilizados para simular respuestas a incendios forestales. Cada caso presenta un conjunto único de recursos, incluyendo Aviones, Motores y Brigadas (brigadas de bomberos o personal de respuesta). Los Periodos indican la duración temporal de cada simulación, con cifras que van desde 20 hasta 40 periodos. En el caso más intensivo, el número 24, se simula un escenario con una mayor cantidad de recursos (10 de cada tipo) durante un período de tiempo extendido (40 periodos), lo que podría reflejar una situación de incendio más grande o más compleja que requiere una respuesta más sostenida y un mayor despliegue de recursos. La variación en las configuraciones entre los casos permite a los investigadores o planificadores evaluar cómo diferentes niveles de respuesta podrían influir en el manejo efectivo de los incendios forestales en diversas situaciones.

A continuación presentaremos una serie de gráficas. En el primero (Figura 4.1), cada fila representa un recurso distinto, como distintos tipos de máquinas, helicópteros y brigadas, designados tanto por tipo como por numeración específica, como "machine1", "helicopter2", "7brigade1", etc.

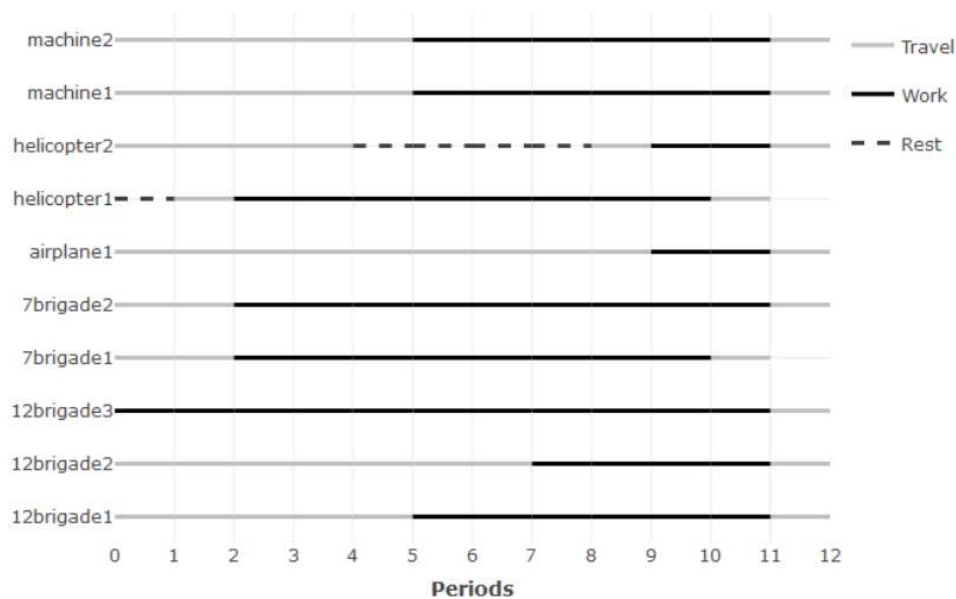


Figura 4.1: Programación de recursos seleccionados para combatir el incendio forestal de prueba [20].

Las líneas horizontales a lo largo del gráfico representan la actividad de cada recurso a lo largo del tiempo, dividido en periodos que van de 0 a 12. Estas actividades se categorizan en

"Travel"(viaje), "Work"(trabajo) y Rest"(descanso), cada una con un estilo de línea distinto. Por ejemplo, las líneas continuas indican periodos de trabajo activo en la lucha contra incendios, mientras que las líneas punteadas representan descansos y las líneas en segmentos cortos representan el viaje hacia o desde el lugar del incendio. Este gráfico proporciona una perspectiva clara del despliegue de recursos en el tiempo, permitiendo a los administradores de emergencias evaluar la utilización y la disponibilidad de cada recurso durante la operación de combate al incendio.

La Figura 4.2 muestra un diagrama de caja y extremos. Cada caja en el gráfico representa la distribución de costes para un caso específico, con casos enumerados del 1 al 24 en el eje horizontal, y los costes representados en el eje vertical, con valores de 0 a 10 millones. En este tipo de gráficos, la caja contiene el rango intercuartílico, que muestra dónde reside la mitad central de los datos (desde el primer cuartil al tercer cuartil). La línea dentro de la caja indica la mediana. Los extremos del gráfico se extienden hasta los valores mínimos y máximos dentro de un rango determinado, excluyendo los puntos atípicos, que se muestran como puntos individuales fuera de los extremos. Este tipo de gráfico es útil para comparar rápidamente la variación entre diferentes conjuntos de datos y sus distribuciones (en este caso, los costes asociados con diferentes escenarios de simulación de incendios) y para identificar dónde hay una mayor variabilidad en los costes, así como la tendencia central de los mismos. Por ejemplo, algunos de los casos en el gráfico pueden mostrar una gran dispersión de costes, indicando una variabilidad significativa en el coste total entre las distintas simulaciones de ese caso particular, mientras que otros tienen una distribución más ajustada, lo que sugiere una mayor consistencia en el coste total.

En la Figura 4.2, vemos que la base de la caja para el caso 24 está cerca de los 2 millones, lo que indica que el 25 % de las simulaciones de este caso resultaron en costes que se sitúan en este punto o por encima. La línea dentro de la caja, que representa la mediana, está cerca de los 7 millones, lo que sugiere que la mitad de las simulaciones incurrieron en costes menores a esta cantidad. El extremo superior de la caja alcanza cerca de los 9 millones, indicando que el 75 % de las simulaciones tuvieron costes debajo de este valor. Los extremos se extienden desde la parte inferior hasta la superior de la caja, mostrando la gama completa de costes desde el valor más bajo hasta el más alto dentro del rango intercuartílico.

Para realizar una comparativa, tomemos el caso 12 como ejemplo. Suponiendo que la estructura del diagrama de caja y extremos para el caso 12 sigue una distribución similar a la del caso 24, con la mediana y los extremos de la caja en posiciones comparables dentro de su propio rango de costes, podemos concluir lo siguiente: si la mediana del caso 12 es significativamente más baja que la del caso 24, esto indicaría que, en promedio, el caso 12 tiene costes más bajos en las simulaciones. La longitud de la caja y la extensión de los extremos en ambos casos también nos daría una idea de la variabilidad y la consistencia de los costes entre los dos, reflejando en

este caso particular una mayor variabilidad en las simulaciones del caso 24 con respecto al caso 12. Además, el caso 12 refleja varias simulaciones con costes muy elevados (más de 2 millones más que el valor máximo) que se consideran simulaciones con un coste atípico.

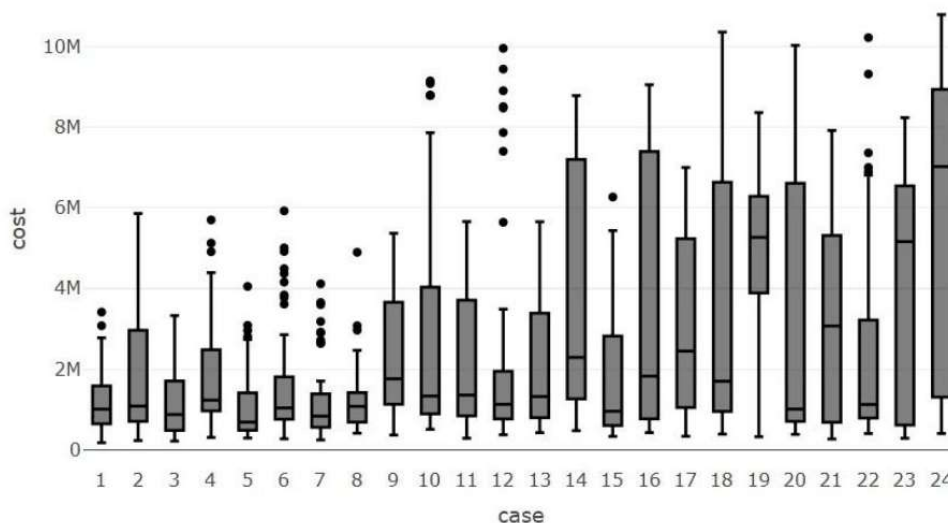


Figura 4.2: Distribución del coste total para cada caso sobre 50 instancias de simulación [20].

La conclusión general que podemos sacar del análisis de esta figura es que existe una considerable variabilidad en los costes asociados con las diferentes configuraciones de simulación. Algunos casos muestran una mayor dispersión en los costes, lo que podría estar relacionado con la complejidad de las simulaciones o la variedad en la severidad de los incendios modelados. Los casos con medianas más bajas y menos variabilidad, como en las configuraciones de la 1 a la 8, donde el número de períodos es menor, podrían ser escenarios en los que se logra una gestión de incendios más eficiente en cuanto a los costes de los recursos se refiere o en los que las condiciones simuladas son menos severas o más predecibles. La presencia de valores atípicos en varios casos indica que, independientemente de la mediana y la variabilidad, siempre hay instancias particulares que pueden resultar en costes inusualmente altos o bajos, lo cual es una consideración importante para la planificación y preparación en la gestión de incendios.

La Figura 4.3 muestra otro gráfico de caja y extremos. En este caso, en el eje horizontal se enumeran los casos del 1 al 24, y el eje vertical muestra el tiempo de ejecución en segundos, que varía desde 0 hasta 600 segundos.

Al igual que en el gráfico anterior, cada caja representa la distribución del tiempo de ejecución para un caso de simulación específico. Las líneas horizontales dentro de las cajas indican la mediana de tiempo de ejecución para cada caso. Los extremos se extienden desde el cuartil inferior al cuartil superior, mostrando el rango de la mayoría de los datos. Los puntos individuales representan valores atípicos o anomalías en el tiempo de ejecución que caen fuera del rango intercuartílico.

Este tipo de visualización es muy útil para identificar patrones o tendencias en el tiempo de ejecución a través de múltiples simulaciones, así como para detectar cualquier caso que pueda tener tiempos de ejecución inusualmente largos o cortos en comparación con otros casos.

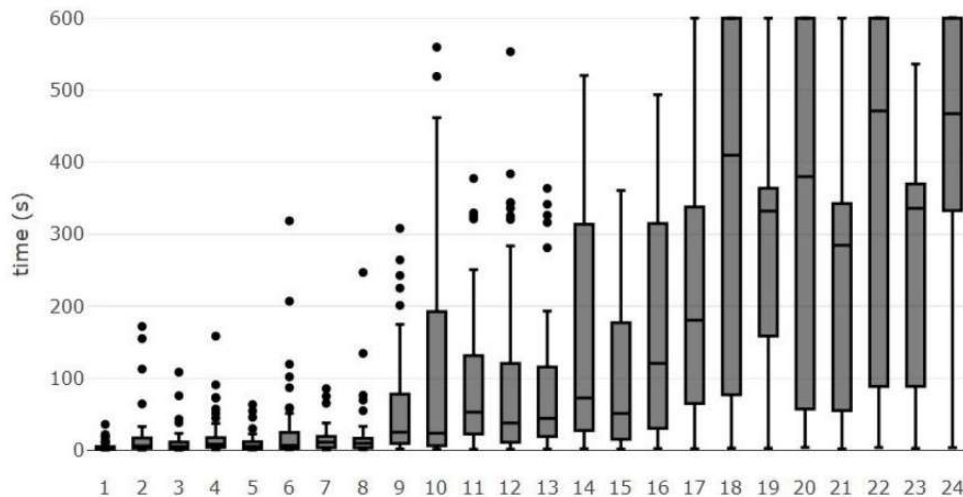


Figura 4.3: Distribución del tiempo de ejecución para cada caso sobre 50 instancias de simulación [20].

Como ejemplo, en el caso 24, la mediana de los tiempos de ejecución está un poco más baja de los 500 segundos, lo cual indica que la mitad de las simulaciones tomó menos de 9 minutos en completarse. La caja, que representa el rango intercuartílico, comienza por encima de los 300 segundos y se extiende hasta valores cercanos a los 600 segundos, indicando una amplia variabilidad en los tiempos de ejecución.

La ausencia de puntos atípicos sugiere que no hubo simulaciones que se alejaran extremada-

mente del rango general, aunque el rango de tiempos es considerablemente amplio. Esto podría interpretarse como que, aunque las simulaciones del caso 24 tienden a requerir más tiempo en comparación con otros casos, los tiempos son consistentemente más largos, lo que refleja un nivel de complejidad y esfuerzo relativamente uniforme y más elevada en las condiciones de este caso particular frente a otros casos, como el 8, por ejemplo.

Comparando con el caso 12, tenemos que el diagrama de caja y extremos empieza justo por encima de 0 segundos, lo que indica que los tiempos de ejecución para esa simulación son bajos. La parte superior de la caja, que señala el tercer cuartil, se sitúa poco más allá de los 100 segundos, sugiriendo que el 75 % de las simulaciones se completaron en menos de 2 minutos.

Si comparamos los resultados de esta gráfica con las características de las brigadas y períodos con los tiempos de ejecución para cada configuración, observamos una cierta relación a priori del número de períodos con el tiempo total. En las 8 primeras configuraciones, se consideran 20 períodos, y en todos estos casos las medias en los tiempos de ejecución son inferiores a 50 segundos. Para los casos del 9 al 16, se tiene una configuración de 30 períodos, y observamos un aumento significativo de la media en la mayoría de estos casos. Por último, las configuraciones 17 a 24 son de 40 períodos, y de nuevo se observa un aumento considerable en los tiempos de ejecución de las simulaciones con respecto a los casos anteriores.

Por último, el caso 12 muestra que la mayoría de las simulaciones se ejecutaron rápidamente, con tiempos de ejecución generalmente bajos y solo un número reducido de instancias que requirieron un tiempo significativamente más largo, lo cual es consistente con un sistema de respuesta eficiente y condiciones de simulación menos variables en comparación con casos que presentan mayor dispersión en sus tiempos de ejecución.

Finalizamos la sección con la Figura 4.4, que muestra un gráfico de barras comparando el porcentaje de instancias resueltas usando el modelo principal contra las instancias resueltas utilizando uno de los dos modelos disponibles para la simulación, indicados por barras grises y negras respectivamente.

Las barras grises representan las instancias que se resolvieron óptimamente con el modelo principal, mientras que las barras negras indican el porcentaje total de instancias resueltas cuando se toma en cuenta tanto el modelo principal como el alternativo. En casos donde la barra negra es significativamente más alta que la gris, podemos deducir que el modelo alternativo fue necesario para resolver muchas de las instancias que el modelo principal no pudo.

Al realizar un análisis detallado de esta figura, hay varios puntos clave que se pueden destacar. En primer lugar, el modelo principal (barras grises) alcanza un alto porcentaje en la mayoría de casos, lo que sugiere que el modelo principal fue efectivo en resolver una gran parte de las instan-

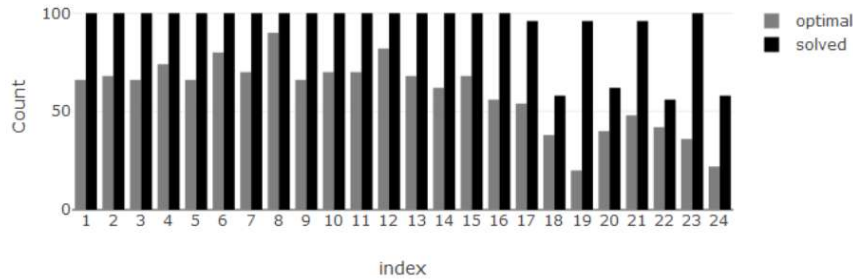


Figura 4.4: Porcentaje de instancias resueltas para cada caso, con el modelo principal (barra gris) o con uno de los dos modelos (barra negra) [20].

cias sin necesidad de recurrir a un modelo alternativo. Por otro lado, hay una diferencia notable entre las barras grises y negras (modelo alternativo), lo que indica que el modelo alternativo jugó un papel importante en la resolución de instancias que el modelo principal no pudo manejar solo. En casi todos los casos, el porcentaje de instancias resueltas por ambos modelos supera el 50 %, demostrando la capacidad combinada de ambos modelos para tratar con una amplia gama de situaciones de simulación. Además, excepto en 7 configuraciones, se obtiene una solución óptima con el modelo original en el 100 % de los casos. Hemos de tener en cuenta los casos donde las barras negras no alcanzan el 100 % que podrían indicar escenarios de simulación particularmente desafiantes que requieren una revisión adicional del modelo o donde las condiciones de simulación exceden las capacidades actuales de ambos modelos.

Para concluir, es esencial destacar la importancia de tener modelos robustos y versátiles en la simulación y gestión de incendios forestales. El modelo principal ha demostrado ser efectivo en la mayoría de los casos, pero la inclusión de un modelo alternativo es crucial para abordar aquellas instancias más complejas que el modelo principal no puede resolver de manera óptima.

Este análisis también refleja la naturaleza impredecible y dinámica de los incendios forestales, donde diferentes escenarios pueden requerir distintas estrategias de modelización y resolución. La flexibilidad en el enfoque de modelización, como la que se presenta aquí, proporciona una herramienta valiosa para los planificadores y responsables en el campo de la gestión de emergencias.

Como conclusión general, este análisis y las herramientas desarrolladas pueden servir como una base sólida para la mejora continua de las estrategias de simulación y gestión de incendios, lo que a su vez puede conducir a una respuesta más efectiva y eficiente en la vida real frente a estos desastres naturales.



## Capítulo 5

# Discusión y conclusiones

A lo largo de este trabajo, se ha explorado la optimización matemática aplicada a diversos contextos prácticos, demostrando su versatilidad y capacidad para resolver problemas complejos. Los capítulos anteriores han detallado diferentes técnicas y sus aplicaciones específicas, proporcionando una visión integral de cómo estas herramientas pueden mejorar la toma de decisiones y la eficiencia operativa en varios sectores.

En el segundo capítulo, se analizó la optimización de la asignación de recursos publicitarios utilizando la programación lineal y el método simplex. Este estudio se centró en maximizar la audiencia total dentro de un presupuesto fijo de 10,000 dólares, distribuyendo los anuncios entre diversos medios como televisión, radio, prensa y redes sociales. Los resultados mostraron que realizando una inversión exclusivamente en anuncios de radio, tanto en horarios matutinos como vespertinos, es la estrategia más efectiva, alcanzando una audiencia total de 9,182,028 personas. Con este problema y sus resultados podemos ver que la programación lineal ofrece una respuesta viable para identificar las combinaciones óptimas de anuncios para la empresa GastroJardín diversos medios de comunicación, logrando maximizar la cobertura máxima de audiencia sin exceder el presupuesto.

A la vista de los resultados de este problema, observamos que los métodos de programación que se utilizan demuestran ser eficientes en términos de maximización del retorno de inversión, proporcionando además una base sólida para la toma de decisiones basada en datos para este tipo de problemas. Es importante para las empresas poder adaptarse a los diferentes escenarios y restricciones del mercado, y las bases que proporciona el modelo formulado les permite adaptarse de manera flexible a estas limitaciones.

El tercer capítulo se centró en la optimización de la asignación de muestras de laboratorio, utilizando tanto técnicas heurísticas como métodos exactos. En este estudio se abordaron desafíos específicos como la compatibilidad entre muestras y las restricciones de temperatura, elementos

críticos en el entorno de laboratorio. A pesar de las limitaciones de los métodos heurísticos, los resultados mostraron una mejora significativa en el uso de placas y la eficiencia del tiempo de procesamiento.

Un aspecto clave abordado fue el uso de banderines como una subdivisión dentro de las bandas más grandes, permitiendo una gestión más detallada y eficiente de los recursos. La categorización y subdivisión de recursos, como las bandas y banderines, demostraron cómo una gestión más detallada y estructurada puede mejorar significativamente la efectividad de las decisiones. Esta capacidad de gestionar y asignar muestras de manera óptima no solo facilita llevar a cabo los experimentos con mayor precisión, sino que también minimiza el desperdicio de recursos en los laboratorios.

Finalmente, en el cuarto capítulo se evaluó la optimización en la gestión de recursos durante incendios forestales, utilizando modelos de programación lineal entera. En estos casos, los modelos deben ser capaces de adaptarse a la naturaleza dinámica y cambiante de los incendios, ya que la gestión de recursos en estos casos es de suma importancia, debido a la necesidad de la toma rápida de decisiones para minimizar daños. Los modelos demostraron ser efectivos en la mayoría de los casos, aunque hay que destacar que hay instancias complejas que el modelo principal no puede resolver de manera óptima, surgiendo la necesidad de modelos alternativos en estos casos.

Este análisis pone de manifiesto la necesidad de modelos robustos y versátiles, así como la importancia de la flexibilidad en la modelización para adaptarse a diferentes escenarios. La capacidad de simular y gestionar recursos de manera eficiente durante emergencias puede tener un impacto significativo en la respuesta y mitigación de desastres naturales, proporcionando a los planificadores y equipos de respuesta herramientas valiosas para la toma de decisiones.

Globalmente, los análisis realizados a lo largo de estos capítulos revelan la potencia y versatilidad de las técnicas de optimización matemática en la resolución de una amplia gama de problemas prácticos. La optimización matemática es capaz de proporcionar decisiones eficientes en los contextos donde los recursos son limitados y las restricciones son complejas. Tanto la programación lineal como la entera se han mostrado como herramientas esenciales en la optimización de recursos en diversos campos, como publicidad, asignación de muestras de laboratorio o gestión de recursos en incendios forestales.

El método simplex, como se destacó en la optimización de recursos publicitarios, se presenta como una técnica robusta para resolver problemas de programación lineal, proporcionando soluciones óptimas de manera eficiente. Por otro lado, los métodos heurísticos y exactos, aplicados en la asignación de muestras de laboratorio y la gestión de incendios forestales, son fundamentales para abordar problemas de programación entera y otros problemas NP-duros, permitiendo encontrar soluciones viables en situaciones donde los métodos tradicionales pueden fallar.

La organización y división de recursos, como se hace con las bandas y banderines en la asignación de muestras de laboratorio, muestra cómo una gestión más estructurada mejora la efectividad de la toma de decisiones. Este enfoque permite aprovechar al máximo los recursos disponibles, mejorando la eficiencia y los resultados de las decisiones.

La aplicación de técnicas de optimización en la gestión de recursos en incendios forestales destaca su capacidad para influir positivamente en la toma de decisiones durante situaciones críticas. La flexibilidad y adaptabilidad de los modelos desarrollados permiten una respuesta más efectiva y eficiente ante emergencias, contribuyendo a minimizar los daños y optimizar el uso de recursos.

En conclusión, la optimización matemática no solo es una herramienta teórica potente, sino que también tiene aplicaciones prácticas que pueden transformar la eficiencia y efectividad de diversas operaciones en múltiples sectores. A medida que las empresas y organizaciones se enfrentan a un entorno cada vez más complejo y dinámico, la capacidad de aplicar técnicas avanzadas de optimización se convierte en un factor crítico para el éxito a largo plazo. Futuras investigaciones pueden explorar nuevas aplicaciones y mejorar las técnicas existentes para abordar problemas aún más complejos, consolidando la optimización matemática como un componente esencial de la estrategia empresarial y de gestión de recursos modernos.



# Anexo I

## Código en Python

### I.1. Optimización en la asignación de recursos publicitarios:

En este anexo puedes encontrar los códigos en Python que usamos para optimizar la asignación de recursos publicitarios y las muestras de laboratorio. El código de esta sección corresponde al capítulo 2 del trabajo y se centra en distribuir anuncios en diferentes medios para alcanzar la mayor audiencia posible dentro de un presupuesto fijo. Este código utiliza la programación lineal para encontrar la combinación óptima de anuncios en televisión, radio, prensa y redes sociales, maximizando así la audiencia alcanzada sin superar el presupuesto disponible.

```
import pulp

# Creacion del problema de maximizacion
prob = pulp.LpProblem("MaximizeAudience", pulp.LpMaximize)

# Definicion de las variables de decision
x1 = pulp.LpVariable('x1', lowBound=0, cat='Integer')
x2 = pulp.LpVariable('x2', lowBound=0, cat='Integer')
x3 = pulp.LpVariable('x3', lowBound=0, cat='Integer')
x4 = pulp.LpVariable('x4', lowBound=0, cat='Integer')
x5 = pulp.LpVariable('x5', lowBound=0, cat='Integer')
x6 = pulp.LpVariable('x6', lowBound=0, cat='Integer')
x7 = pulp.LpVariable('x7', lowBound=0, cat='Integer')
x8 = pulp.LpVariable('x8', lowBound=0, cat='Integer')

# Deficion de la funcion objetivo
prob += 178750*x1 + 121960*x2 + 209060*x3 + 356901*x4 + 250710*x5 +
        284762*x6 + 466728*x7 + 50000*x8, "Total Audience"
```

```
# Definicion de las restricciones del presupuesto
prob += 745*x1 + 985*x2 + 1150*x3 + 360*x4 + 315*x5 + 1294*x6 + 552*x7
      + 150*x8 <= 10000, "Budget"

# Definicion las restricciones de disponibilidad
prob += x1 <= 9
prob += x2 <= 10
prob += x3 <= 12
prob += x4 <= 18
prob += x5 <= 22
prob += x6 <= 5
prob += x7 <= 1
prob += x8 <= 45

# Resolvemos el problema
prob.solve()

# Se imprime el estado de la solucion
status = pulp.LpStatus[prob.status]
print("Solution status: {}".format(status))

# Se imprimen las variables y sus valores optimos
variables = {variable.name: variable.varValue for variable in
             prob.variables()}
for var_name, var_value in variables.items():
    print("{} = {}".format(var_name, var_value))

# Se imprime el valor optimo de la funcion objetivo
optimal_value = pulp.value(prob.objective)
print("Optimal audience value: {}".format(optimal_value))

# Interpretamos de los resultados
interpretation = """
Interpretation of the Results:

Solution status: {}

Optimal values of the decision variables:
- Morning TV ads (x1): {}
- Afternoon TV ads (x2): {}
- Night TV ads (x3): {}
- Morning radio ads (x4): {}
```

```

- Afternoon radio ads (x5): {}
- Newspaper ads Monday to Saturday (x6): {}
- Sunday newspaper ads (x7): {}
- Social media ads (x8): {}

Optimal audience value: {}

To maximize the audience with the current budget and availability
constraints,
the optimal combination of ads is to invest in 18 morning radio ads and
11 afternoon
radio ads. Investing in TV, newspaper, or social media ads is not
recommended due
to their relatively lower effectiveness and/or higher cost compared to
radio ads.
""".format(
status,
variables['x1'], variables['x2'], variables['x3'],
variables['x4'], variables['x5'], variables['x6'],
variables['x7'], variables['x8'],
optimal_value
)

print(interpretation)

```

Listing I.1: Código en Python para la optimización de la audiencia

## I.2. Optimización en la asignación de muestras de laboratorio

El código de esta sección corresponde al capítulo 4, y se encarga de organizar las muestras en placas de laboratorio, asegurando que se cumplan las restricciones de temperatura y capacidad. Este código implementa tanto métodos exactos como heurísticos para resolver el problema de asignación de muestras, buscando minimizar el número de placas necesarias y optimizar la distribución de las muestras para garantizar la eficiencia y la calidad de los resultados.

```

import pulp

# Formulamos el problema para cada caso segun la cantidad especifica de
muestras
samples = [1473, 1944, 2071, 2248, 2496, 2703, 3000, 3500, 3783, 4000]
exact_plates = [26, 35, 30, 38, 42, 50, 55, 60, 70, 75]

```

```

heuristic_plates = [19, 23, 25, 27, 30, 32, 36, 40, 44, 48] # Adjusted
    here

# Definimos la funcion para resolver el problema de optimizacion
def solve_problem(samples, exact_plates, heuristic_plates):
    results = []
    for i in range(len(samples)):
        problem = pulp.LpProblem(f"Minimize_Plates_for_{samples[i]}_samples",
            pulp.LpMinimize)

        # Definimos las variables de decision
        plates = pulp.LpVariable("plates", lowBound=0, cat='Integer')

        # Funcion objetivo (minimizacion del numero de placas)
        problem += plates, "Minimize_Plates"

        # Restricciones basadas en los resultados exactos y heurísticos
        problem += plates >= heuristic_plates[i], f"Heuristic_Constraint_{i}"
        problem += plates <= exact_plates[i], f"Exact_Constraint_{i}"

        # Se agrega una restriccion adicional (Ejemplo)
        problem += plates == round(heuristic_plates[i] + (exact_plates[i] -
            heuristic_plates[i]) * 0.2), f"Additional_Constraint_{i}"

        # Resolvemos el problema
        problem.solve()

        # Guardamos los resultados
        status = pulp.LpStatus[problem.status]
        objective_value = pulp.value(problem.objective)
        results.append((samples[i], objective_value, exact_plates[i],
            heuristic_plates[i], status))

    return results

# Resolvemos y mostramos los resultados
results = solve_problem(samples, exact_plates, heuristic_plates)
for result in results:
    print(f"Samples: {result[0]}, Calculated Plates: {result[1]}, Exact
        Plates: {result[2]}, Heuristic Plates: {result[3]}, Status:
        {result[4]}")

```

Listing I.2: Código en Python para resolver el problema de optimización del método exacto

# Bibliografía

- [1] Agrawal, N., Najafi-Asadolahi, S., & Smith, S. A. (2020). Optimization of operational decisions in digital advertising: A literature review (pp. 99-146). Springer International Publishing.
- [2] Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., & Sherali, H. D. (2008). Linear programming and network flows. John Wiley & Sons.
- [3] Binder, K., Heermann, D. W., & Binder, K. (1992). Monte Carlo simulation in statistical physics (Vol. 8). Berlin: Springer-Verlag.
- [4] Birge, J. R., & Louveaux, F. (2011). Introduction to stochastic programming. Springer Science & Business Media.
- [5] Blesa Jiménez, S. (2018). Optimización de la misión de un enjambre de drones para la detección temprana de incendios forestales (Doctoral dissertation, Universitat Politècnica de València).
- [6] Carpena, L., Cerdeira-Pena, A., Lorenzo-Freire, S., & Places, Á. S. (2019). Optimization in Sanger sequencing. *Computers & Operations Research*, 109, 250-262.
- [7] Coello, C. C. (2006). Evolutionary multi-objective optimization: a historical view of the field. *IEEE computational intelligence magazine*, 1(1), 28-36.
- [8] Dantzig, G. B. (2016). Linear programming and extensions. In *Linear programming and extensions*. Princeton university press.
- [9] Davila, D. N., Rodríguez, L. C., & Freire, S. L. (2018, September). Laboratory Samples Allocation Problem. In *Proceedings* (Vol. 2, No. 18, p. 1189). MDPI.
- [10] Deb, K. (1999). Multi-objective genetic algorithms: Problem difficulties and construction of test problems. *Evolutionary computation*, 7(3), 205-230.
- [11] Deb, K. (2001). Multi-objective optimization using evolutionary algorithms (Vol. 16). John Wiley & Sons.

- 
- [12] Donovan, G. H., & Rideout, D. B. (2003). A reformulation of the cost plus net value change (C+ NVC) model of wildfire economics. *Forest Science*, 49(2), 318-323.
- [13] Garey, M. R., & Johnson, D. S. (1990). A Guide to the Theory of NP-Completeness. *Computers and intractability*, 37-79.
- [14] Gendreau, M., & Potvin, J. Y. (Eds.). (2010). *Handbook of Metaheuristics* (2nd ed.). Springer.
- [15] Glover, F. (1986). Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. *Computers & operations research*, 13(5), 533-549.
- [16] Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2015). *Introduction to operations research*. McGraw-Hill.
- [17] Kirkpatrick, S., Gelatt Jr, C. D., & Vecchi, M. P. (1983). Optimization by simulated annealing. *science*, 220(4598), 671-680.
- [18] Martello, S., & Toth, P. (1990). *Knapsack problems: algorithms and computer implementations*. John Wiley & Sons, Inc..
- [19] Papadimitriou, C. H., & Steiglitz, K. (1998). *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Dover Publications.
- [20] Rodríguez-Veiga, J., Ginzo-Villamayor, M. J., & Casas-Méndez, B. (2018). An integer linear programming model to select and temporally allocate resources for fighting forest fires. *Forests*, 9(10), 583.
- [21] Satama, F. L. V., Gálvez, D. I. M., & Ribadeneira, J. E. N. (2021). Optimización Matemática como Herramienta para la Toma de Decisiones en la Empresa. *INGENIO*, 4(1), 40-60.
- [22] Shapiro, A., Dentcheva, D., & Ruszczyński, A. (2021). *Lectures on stochastic programming: modeling and theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [23] Winston, W. L. (2004). *Operations research: applications and algorithm*. Thomson Learning, Inc..
- [24] Wright, S. J. (2006). *Numerical optimization*.
- [25] Wolsey, L. A., & Nemhauser, G. L. (2014). *Integer and combinatorial optimization*. John Wiley & Sons.