



DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
MATEMÁTICA

Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario

Departamento de Análisis Matemático

Universidade de Santiago de Compostela

Autor: Óscar A. Otero Zarraquiños

Trabajo Fin de Máster

Curso 2011-2012

Santiago de Compostela - 27 de junio de 2012



DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
MATEMÁTICA

Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario

Departamento de Análisis Matemático

Universidade de Santiago de Compostela

Autor: Óscar A. Otero Zarraquiños

Profesor: Juan José Nieto Roig

Santiago de Compostela - 27 de junio de 2012

Índice general

1. Breve perfil histórico del cálculo fraccionario	2
2. Preliminares	7
2.1. Integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville	7
2.2. Derivadas fraccionarias de Caputo	8
3. Algunas ecuaciones diferenciales de orden fraccionario	12
3.1. Consideraciones generales	12
3.2. Derivada de Caputo	13
3.3. Derivada de Riemann-Liouville	13
4. Análisis del movimiento de un proyectil en términos del cálculo fraccional	16
4.1. Introducción	16
4.2. Definiciones y preliminares	16
4.2.1. Derivada fraccionaria de Caputo	16
4.2.2. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville	17
4.2.3. Función Mittag-Leffler	17
4.3. Formulación del problema	17
4.4. Características del movimiento de un proyectil en el cálculo fraccional	20
4.4.1. Trayectoria	20
4.4.2. Rango	22
4.4.3. Tiempo de vuelo	25
4.4.4. Altura máxima	25
4.5. Relación entre los rangos	26
4.6. Relación entre las alturas máximas	27
4.7. Máximo rango de proyectil	28

Capítulo 1

Breve perfil histórico del cálculo fraccionario

El concepto de derivada de una función es básico en el estudio del cálculo. Las derivadas o integrales sucesivas de una función $f^{(n)} = D^n f$, $I^n f$ aparecen de forma natural, por tanto, para valores n enteros.

La idea de generalizar la noción de derivada para valores no enteros, surgió con el nacimiento del propio cálculo diferencial. Así, se planteó la cuestión del sentido que tendría una derivada de orden fraccionario; por ello se le asignó originalmente el nombre de cálculo fraccional.

Más tarde se amplió el alcance de la pregunta anterior: “¿Puede ser n un número cualquiera, racional, irracional o incluso complejo?”. Sabiendo que la respuesta es afirmativa, el actual término de “cálculo fraccional” resulta impropio y deberíamos sustituirlo por el de integración y diferenciación de orden arbitrario.

Fue el propio Leibnitz al inventar la notación $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$, y posiblemente un simple deseo de jugar con los símbolos, lo que empujó en 1695 al Marqués de L'Hôpital a preguntarle “¿Qué sucedería en el caso de ser sustituida n por $\frac{1}{2}$?”. Leibnitz respondió de modo intuitivo que “esta aparente paradoja permitirá en el futuro extraer interesantes consecuencias”.

También en su correspondencia con Bernoulli, Leibnitz mencionó derivadas de “orden genérico”. En 1697, en referencia al producto infinito de Wallis por $\frac{\pi}{2}$, Leibnitz utilizó la notación de $d^{\frac{1}{2}}$, y afirmó que era posible razonar con el cálculo diferencial fraccional para alcanzar el mismo resultado.

La primera referencia en un texto a una derivada de orden arbitrario aparece en un libro del matemático francés Lacroix de 1819 [1], en el que dedicó a este tema dos páginas de las 700 que lo constituyen. Lacroix desarrolló un ejercicio meramente matemático generalizando el caso de orden entero, a la manera típica de los formalistas de aquel período.

Partiendo de $y = x^n$, procedió a determinar la derivada m -ésima:

$$\frac{d^m}{dx^m} y = \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m} \quad (1.1)$$

con m y n enteros positivos y $n \geq m$.

Utilizando la función Gamma para generalizar los factoriales, sustituyendo m por $\frac{1}{2}$, n por un número a real positivo cualquiera y suponiendo $x > 0$, obtuvo la

siguiente fórmula:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} y = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})} x^{a-\frac{1}{2}} \quad (1.2)$$

que representa la derivada de orden $\frac{1}{2}$ de la función x^a . Para $y=x$ (es decir $a=1$), obtuvo:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \quad (1.3)$$

al ser $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Es interesante destacar que este resultado coincide con el que se obtendría mediante la actual definición de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

El paso siguiente lo dio Fourier en 1822, al sugerir la utilización de la igualdad:

$$\frac{d^p}{dx^p} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^p d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda x - t\lambda + p\frac{\pi}{2}) dt \quad (1.4)$$

para definir la derivada de orden p arbitrario de una función que se comportase “suficientemente bien”, sin ser necesariamente una función potencia. Pero, al igual que Euler, tampoco Fourier proporcionó ejemplos o aplicaciones.

El mérito de presentar la primera aplicación fue de Abel en 1823 [2, 3] utilizando la derivada de orden $\frac{1}{2}$ para resolver la ecuación integral:

$$\int_0^x (x-t)^{-1/2} f(t) dt = k, \quad (1.5)$$

resultante de la formulación del problema de la tautocronía [4], es decir, el problema de determinar la forma de una curva de modo tal que el tiempo de descenso de una masa puntual que se desliza por ella sin fricción y bajo el efecto de la gravedad sea independiente del punto de partida.

La ecuación integral (1.5), llamada de Abel, corresponde a un tiempo de deslizamiento constante y conocido; la integral que en ella aparece, a parte por el factor multiplicativo $\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}$, es la integral fraccionaria de orden $\frac{1}{2}$ de Riemann-Liouville de la función f . En realidad Abel estudió ecuaciones integrales más generales con núcleos tipo $(x-t)^\alpha$.

La solución de Abel fue tan elegante que atrajo la atención de Liouville, quien en 1832 [5, 6] hizo el primer gran intento de definir la derivada fraccionaria.

El punto de partida de Liouville fue el conocido resultado para las derivadas de orden entero m de la exponencial:

$$D^m e^{ax} = a^m e^{ax}, \quad (1.6)$$

donde a es una constante real, que extendió de modo natural a las derivadas de orden p arbitrario:

$$D^p e^{ax} = a^p e^{ax}. \quad (1.7)$$

Entonces asumió que la derivada de orden arbitrario de una función $f(x)$, que puede ser desarrollada en una serie del tipo:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \quad (1.8)$$

tiene la forma:

$$D^p f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^p e^{a_n x}. \quad (1.9)$$

Esta fórmula es conocida como la *primera definición de Liouville*, con la obvia desventaja de ser únicamente aplicable para aquellos valores de p para los cuales la serie (1.9) converge.

Liouville adoptó un segundo método para tratar funciones del tipo x^{-a} , para valores reales de $a > 0$ y donde $x > 0$. Para ello consideró la integral:

$$I = \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du, \quad (1.10)$$

que mediante el cambio de variable $xu = t$ proporciona el siguiente resultado:

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} I. \quad (1.11)$$

Entonces, operando con D^p en ambos miembros de (1.11), obtuvo:

$$D^p x^{-a} = \frac{(-1)^p}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a+p-1} e^{-xu} du, \quad (1.12)$$

y llegó a su *segunda definición de derivada fraccionaria*:

$$D^p x^{-a} = \frac{(-1)^p \Gamma(a+p)}{\Gamma(a)} x^{-a-p}, \quad a > 0. \quad (1.13)$$

Pero ninguna de estas dos definiciones estaba destinada a consagrarse, al ser válidas para un conjunto restringido de funciones. La atención se desplazó entonces hacia la integral fraccionaria, pensando que quizás de ésta se deduciría la definición de derivada como la de su operador inverso izquierdo, en analogía al caso entero.

En esos mismos escritos de 1832, Liouville obtuvo la siguiente fórmula:

$$(D^{-p} f)(x) = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(p)} \int_0^{\infty} t^{p-1} f(x+t) dt, \quad \text{Re}(p) > 0, \quad (1.14)$$

que hoy en día, eliminando el factor $(-1)^p$, es conocida por la *definición de Liouville por la derecha de la integral fraccionaria de orden α* .

Siguiendo esto, cabe mencionar un escrito de Riemann fechado en 1847, y de publicación póstuma en 1876 [7], en el que aparece la fórmula:

$$(D^{-p} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-t)^{p-1} f(t) dt + \phi(x) \quad (1.15)$$

para la integral de orden fraccionario.

Debido a la indefinición del extremo inferior de integración a , Riemann consideró oportuno añadir una función complementaria $\phi(x)$ de naturaleza indeterminada.

El primer trabajo que finalmente condujo a la actual definición de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville fue debido a N. Ya. Sonine en 1870 [8]; pero fue Laurent el que en 1884 [9] llegó a formularla de manera definitiva.

Para ello, tomaron como punto inicial la fórmula (también llamada *Fórmula de Cauchy para la integral repetida*), fácilmente demostrable por inducción, que reduce la integral de orden entero n de una función real a una única integral de convolución:

$$({}_a D_x^{-n} f)(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt; \quad (1.16)$$

entonces, generalizando el factorial con la función Gamma, obtuvieron:

$$({}_a D_x^{-p} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-t)^{p-1} f(t) dt, \quad \text{Re}(p) > 0. \quad (1.17)$$

Cuando $x > a$ recuperamos de nuevo la definición de la integral fraccionaria de Riemann, pero sin aparecer la función complementaria; mientras que para $a = -\infty$ obtenemos la definición de la integral fraccionaria de Liouville.

La versión más utilizada de la expresión (1.17) es la que se obtiene haciendo $a=0$, conocida como *integral fraccionaria de Riemann-Liouville*:

$$({}_0 D_x^{-p} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} f(t) dt, \quad \text{Re}(p) > 0. \quad (1.18)$$

En los mismos años, Grünwald (1867) [10] y Letnikov (1868) [11] afrontaron el problema de la diferenciación no entera, generalizando la definición de derivada de orden entero, basada en el concepto de cociente incremental, utilizando la siguiente fórmula:

$$(D^\alpha f)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\nabla_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha}, \quad (1.19)$$

donde $(\nabla_h^\alpha f)(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x-jh)$, con $n = [\alpha]$.

Con la llegada del siglo XX y los desarrollos del análisis matemático y de la teoría de funciones, aparecieron nuevas formas íntegro-diferenciales fraccionales.

En 1917 Weyl [12] definió una integral fraccional adecuada a funciones periódicas:

$$({}_x W_\infty^{-p} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_x^\infty (t-x)^{p-1} f(t) dt, \quad \text{Re}(p) > 0. \quad (1.20)$$

En 1963 Riesz [13, 14] consideró la integral fraccionaria de múltiples variables como un operador de tipo potencial. Uno de estos potenciales ha sido formalmente definido como la potencia $(\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ del Laplaciano.

Por otro lado, el académico y matemático Maravall [15, 16] con una serie de publicaciones que aparecieron a partir del año 1959, muchas acerca de la ingeniería de las oscilaciones, fue el primero en España en mencionar unas particulares oscilaciones fraccionales asociadas a ecuaciones diferenciales no enteras.

En 1967 [17] Caputo dio una nueva definición de la derivada fraccionaria que permitía interpretar físicamente las condiciones iniciales de los cada vez más numerosos problemas aplicados que se estaban estudiando.

En el años 1974, tuvo lugar en Connecticut la primera conferencia internacional sobre el cálculo fraccional, que sirvió de estímulo a numerosos resultados y aplicaciones. La segunda conferencia tuvo lugar en 1984 en Escocia, y la tercera en 1989 en Tokyo.

Actualmente es difícil encontrar un ámbito de la ciencia o de la ingeniería que no considere conceptos del cálculo fraccional y cada año tienen lugar varios acontecimientos que lo ponen de manifiesto.

Desde el punto de vista de la matemática, es fascinante ver como el campo de las generalizaciones “fraccionales” es lugar de encuentro de varias disciplinas (véase por ejemplo, [18] y [19]): entre otras, la teoría de las probabilidades y los procesos estocásticos, las ecuaciones integro-diferenciales, la teoría de las transformadas, las funciones especiales y el análisis numérico.

De relevante importancia son las aplicaciones físicas en la teoría de la viscoelasticidad, en el estudio del fenómeno de la difusión anómala y en la teoría electromagnética; pero podemos anticipar que también se va despertando un interés cada vez mayor en otros ámbitos muy distintos cuales, por ejemplo, el de la teoría de circuitos, de la biología o de la física de la atmósfera. Asimismo, entre los economistas se va consolidando el empleo de conceptos de cálculo fraccional. Ya en 1996, en *Journal of Econometrics* apareció un número especial en el que se recogía una serie de artículos sobre el tema “Fractional Differencing and Long Memory Processes”.

Entre las variadas cuestiones abiertas sobre el cálculo fraccional, ocupa un lugar prominente la de determinar si es posible encontrar una interpretación geométrica para la derivada fraccionaria. Una posible solución a este problema ha sido propuesta por I. Podlubny en un reciente artículo titulado “Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Differentiation” [20] en el que la interpretación física de estos operadores fraccionarios está basada en el empleo de dos tipos de tiempos, un tiempo *cósmico* y un tiempo *individual*, y viene estrechamente relacionada con la teoría de la relatividad.

Algunas tendencias recientes pueden verse en [21] y en las referencias allí citadas.

Por último, decir que también se está tratando de buscar una relación entre la derivada fraccionaria y la famosa hipótesis de Riemann [22] (para más información ver [23]).

Para obtener una información más detallada sobre la historia del cálculo fraccional se puede consultar [24], donde también podemos encontrar dos pósters, que contienen a los principales autores y libros relacionados con este tema.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville

De acuerdo con la aproximación de Riemann-Liouville al cálculo fraccional, la noción de integral fraccionaria de orden α ($\alpha > 0$) es una consecuencia natural de la fórmula conocida (que se suele atribuir a Cauchy), que reduce el cálculo de la primitiva de orden n de una función $f(t)$ a una integral simple de tipo convolutivo. En nuestra notación la fórmula de Cauchy se lee:

$$I^n f(t) := \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) ds, \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definición 2.1.1. La **integral fraccionaria de orden $\alpha > 0$** de una función $f \in L([a, b], \mathbb{R})$ se define como:

$$I_{a^+}^\alpha f(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) ds,$$

donde Γ es la función gamma. Cuando $a = 0$, escribimos $I^\alpha f(t) = f(t) * \phi_\alpha(t)$, donde $\phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ para $t > 0$ y $\phi_\alpha(t) = 0$ para $t \leq 0$, y $\phi_\alpha \rightarrow \delta(t)$ si $\alpha \rightarrow 0^+$, donde δ es la función delta y Γ es la función gamma Euler definida como:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0.$$

También $I^0 = I$ (operador identidad), i.e, $I^0 f(t) = f(t)$. Además, por $I^\alpha f(0^+)$ representamos el límite (si existe) de $I^\alpha f(t)$ para $t \rightarrow 0^+$ (este límite puede ser infinito).

De acuerdo con la bibliografía [25] las siguientes propiedades de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville se verifican.

Teorema 2.1.1. Sean $f(t)$ y $g(t)$ tales que $I^\alpha f(t)$, $I^\alpha g(t)$, $I^{\alpha+\beta} g(t)$ existen. Entonces, las siguientes propiedades básicas de la integral de Riemann-Liouville se cumplen:

1. interpolación (continuidad)

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} I^\alpha(t) = I^n f(t);$$

donde $I^n (n \in \mathbb{N})$ es el operador clásico para la integral n -ésima;

2. linealidad

$$I^\alpha[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda I^\alpha f(t) + \mu I^\alpha g(t), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R};$$

3. propiedad de semigrupo (ley de los exponentes)

$$I^\alpha[I^\beta g(t)] = I^{\alpha+\beta} g(t);$$

4. conmutatividad

$$I^\alpha I^\beta f(t) = I^\beta I^\alpha f(t).$$

El siguiente resultado prueba la acotación de los operadores integrales fraccionarios $I_{a+}^\alpha f$ en el espacio $L^p([a, b], \mathbb{R})$ ($1 \leq p \leq \infty$) con la norma $\|f\|_p$ definida como:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty; \quad \|f\|_p := \text{ess sup}_{a \leq t \leq b} |f(t)|, \quad p = \infty.$$

Lema 2.1.1. [25] Los operadores integrales fraccionarios $I_{a+}^\alpha : L^p \rightarrow L^p$ con $\alpha > 0$ son acotados en $L^p[a, b]$ para todo $1 \leq p \leq \infty$, y además:

$$\|I_{a+}^\alpha f\|_p \leq k \|f\|_p, \quad k = \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

2.2. Derivadas fraccionarias de Caputo

Después de la noción de integral fraccionaria, la derivada fraccionaria de orden α ($\alpha > 0$) se convierte en una exigencia natural y uno está tentado de sustituir α por $-\alpha$ en las fórmulas de arriba. Sin embargo, esta generalización necesita algún tipo de atención con el fin de garantizar la convergencia de la integral y conservar las conocidas propiedades de la derivada ordinaria de orden entero. Denotando por D^n con $n \in \mathbb{N}$, el operador de la derivada de orden n , primero notemos que:

$$D^n I^n = I \quad \text{pero} \quad I^n D^n \neq I, \quad n \in \mathbb{N},$$

i.e., tiene inversa por la izquierda (y no inversa por la derecha) a la del operador integral correspondiente I^n . Podemos fácilmente probar que:

$$I^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a^+) \frac{(t-a)^k}{k!}, \quad t > 0.$$

Como consecuencia, esperamos que D^α se defina como la inversa por la izquierda de I^α . Para este propósito, se elige el entero positivo n tal que $n-1 < \alpha < n$, y se define la derivada fraccionaria de orden $\alpha > 0$ de la siguiente forma:

Definición 2.2.1. Para una función f dada en un intervalo $[a, b]$, la **derivada fraccionaria de orden α de Riemann-Liouville** de f se define como:

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t - s)^{-\alpha+n-1} f(s) ds,$$

donde $n = [\alpha] + 1$ y $[\alpha]$ es la parte entera de α , es decir, el mayor número entero natural mayor que α .

También definimos $D^0 = I^0 = I$. Entonces fácilmente identificamos:

$$D^\alpha I^\alpha = I, \quad \alpha \geq 0, \quad (2.1)$$

y

$$D^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma + 1 - \alpha)} t^{\gamma - \alpha}, \quad \alpha > 0, \quad \gamma - 1, t > 0. \quad (2.2)$$

Por supuesto, las propiedades (2.1) y (2.2) son una generalización natural de los resultados conocidos para enteros.

Nótese el hecho remarcable de que la derivada fraccionaria $D^\alpha f$ no es cero para la función constante $f(t) = 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$. De hecho, (2.2) con $\gamma = 0$ nos enseña que:

$$D^\alpha 1 = \frac{(t)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}, \quad \alpha > 0, \quad t > 0. \quad (2.3)$$

Es claro que $D^\alpha 1 = 0$ para $\alpha \in \mathbb{N}$ debido a los polos de la función gamma en los puntos $0, -1, -2, \dots$

El siguiente resultado caracteriza las condiciones de existencia de las derivadas fraccionarias $D_{a^+}^\alpha$ en el espacio $AC^n[a, b]$.

Lema 2.2.1. *Sea $\alpha \geq 0$, y $n = [\alpha] + 1$. Si $y \in AC^n[(a, b)]$, entonces la derivada fraccionaria $D_{a^+}^\alpha y(t)$ existe en casi todo punto de $[a, b]$ y podemos representarla de la forma:*

$$D_{a^+}^\alpha y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-a}}{\Gamma(k-\alpha+1)} y^{(k)}(a^+) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{y^{(n)}(s)}{(t-s)^{n-\alpha+1}} ds.$$

Corolario 2.2.1. *Si $\alpha \in (0, 1)$ e $y \in AC([a, b])$, entonces:*

$$D_{a^+}^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{y(a)}{(t-a)^\alpha} + \int_a^t \frac{y'(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \right].$$

Observemos ahora una definición alternativa de derivada fraccionaria, originalmente introducida por Caputo [17, 26] a finales de los 60 y adoptada por Caputo y Mainardi [27] en el marco de la teoría de la viscoelasticidad lineal (ver una reseña en [28]).

Definición 2.2.2. Sea $f \in AC^n([a, b])$. La **derivada fraccionaria de Caputo** de f viene dada por:

$${}^c D^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds.$$

Esta definición es por supuesto mucho más restrictiva que la definición de Riemann-Liouville, ya que requiere la integrabilidad absoluta de la derivada de orden n . Cuando usamos el operador ${}^c D^\alpha$ asumimos que esta condición se cumple. Fácilmente reconocemos que en general:

$$D^\alpha f(t) := D^m I^{m-\alpha} f(t) \neq I^{m-\alpha} D^m f(t) := {}^c D^\alpha f(t). \quad (2.4)$$

a menos que la función $f(t)$ junto con sus primeras $m - 1$ derivadas desaparezcan en $t = a^+$. De hecho, suponiendo que el paso la derivada m -ésima bajo la integral es legítimo, uno reconoce que, $m - 1 < \alpha < m$ y $t < 0$,

$$D^\alpha f(t) = {}^c D^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a^+), \quad (2.5)$$

y por tanto, recordando la derivada fraccionaria de la función potencia (2.2),

$$D^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a^+) \right) = {}^c D^\alpha f(t). \quad (2.6)$$

La definición alternativa, esto es, la definición 2.2.2, para la derivada fraccionaria incorpora los valores iniciales de la función y de orden inferior que α . La sustracción del polinomio de Taylor de grado $m - 1$ en $t = a^+$ para $f(t)$ significa una especie de regularización de la derivada fraccionaria. En particular, de acuerdo con esta definición, una propiedad relevante es que la derivada fraccionaria de una constante sigue siendo cero, i.e.:

$${}^c D^\alpha 1 = 0, \quad \alpha > 0. \quad (2.7)$$

Exploramos ahora las principales diferencias entre ambas definiciones dadas para las derivadas fraccionarias. Para la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, se tiene:

$$D^\alpha (t-a)^{\alpha-j} = 0, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, [\alpha] + 1. \quad (2.8)$$

De las propiedades (2.7) y (2.8) reconocemos los siguientes enunciados sobre funciones, que para $t > 0$ admiten la misma derivada fraccionaria de orden α , con $n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$,

$$D^\alpha f(t) = D^\alpha g(t) \Leftrightarrow f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^n c_j (t-a)^{\alpha-j}, \quad (2.9)$$

y

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^c D^\alpha g(t) \Leftrightarrow f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^n c_j (t-a)^{n-j}. \quad (2.10)$$

En estas fórmulas los coeficientes c_j son constantes arbitrarias. Para probar todos los resultados principales presentamos los siguientes lemas auxiliares.

Lema 2.2.2. [25] Sea $\alpha > 0$ y sea $y \in L^\infty(a, b)$ o $C([a, b])$. Entonces:

$${}^c D^\alpha I^\alpha y(t) = y(t).$$

Lema 2.2.3. [25] Sea $\alpha > 0$ y $n = [\alpha] + 1$. Si $y \in AC^n[a, b]$ ó $y \in C^n[a, b]$, entonces:

$$(I^{\alpha} {}^c D^{\alpha} y)(t) = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k.$$

Lema 2.2.4. [25] Sea $\alpha > 0$, entonces:

$$I^{\alpha} {}^c D^{\alpha} h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

para $c_i \in \mathbb{R}$ arbitrario, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $n = [\alpha] + 1$.

Tenemos la siguiente versión para la derivada de Riemann-Liouville:

Lema 2.2.5. [25] Sea $\alpha > 0$, entonces:

$$I^{\alpha} D^{\alpha} h(t) = h(t) + c_0 t^{\alpha-1} + c_1 t^{\alpha-2} + c_2 t^{\alpha-3} + \dots + c_{n-1} t^{\alpha-n},$$

para $c_i \in \mathbb{R}$ arbitrario, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $n = [\alpha] + 1$.

Capítulo 3

Algunas ecuaciones diferenciales de orden fraccionario

3.1. Consideraciones generales

La ecuación diferencial homogénea de segundo orden:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = 0 \quad (3.1)$$

tiene por solución general:

$$x(t) = c_0 + c_1 t, \quad (3.2)$$

con c_0, c_1 constantes reales arbitrarias.

Si $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces la solución general de la ecuación:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = f(t), \quad t \geq 0 \quad (3.3)$$

será:

$$x(t) = c_0 + c_1 t + \int_0^t (t-s)f(s)ds,$$

esto es,

$$x(t) = c_0 + c_1 t + I^2 f(t). \quad (3.4)$$

Para determinar una solución pueden fijarse las condiciones iniciales:

$$x(0) = x_0 \quad (3.5)$$

$$\dot{x}(0) = x_1 \quad (3.6)$$

de manera que la solución de la ecuación (3.3) con las condiciones iniciales (3.5) y (3.6), vendrá dada por:

$$x(t) = x_0 + x_1 t + \int_0^t (t-s)f(s)ds. \quad (3.7)$$

Nótese que $I^2 f$ es la (única) solución de la ecuación (3.3) con las condiciones iniciales homogéneas, esto es, (3.5) y (3.6) con $x_0 = x_1 = 0$.

Al objeto de generalizar (3.1) y (3.3) al caso fraccionario, vamos a considerar las ecuaciones:

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = 0, \quad (3.8)$$

y

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = f(t), \quad t \geq 0, \quad (3.9)$$

con $1 < \alpha < 2$.

Como primera diferencia, hay que resaltar que la derivada en (3.8) ó (3.9) puede considerarse en el sentido de Caputo o de Riemann-Liouville, dando lugar como veremos, a soluciones y a condiciones iniciales diferentes.

3.2. Derivada de Caputo

Vamos a comenzar por la solución de las ecuaciones (3.8) y (3.9) en el sentido de la derivada de Caputo. Utilizando el lema 2.2.4 se tiene que:

$$x(t) = c_0 + c_1 t, \quad (3.10)$$

es la solución general de la ecuación homogénea (3.8), con c_0, c_1 números reales arbitrarios. Si imponemos las condiciones iniciales (3.5)-(3.6), entonces $c_0 = x_0$ y $c_1 = x_1$, por lo que la solución será:

$$x(t) = x_0 + x_1 t. \quad (3.11)$$

Para la ecuación no homogénea (3.9), también usando el lema 2.2.4, se ve que la solución general de (3.9) viene dada por:

$$x(t) = c_0 + c_1 t + I^\alpha f(t), \quad (3.12)$$

siendo c_0, c_1 constantes arbitrarias.

Además $x_0 = c_0$, ya que $I^\alpha f(0) = 0$.

Por otra parte:

$$\dot{x}(t) = c_1 + D^1 I^\alpha f(t) = c_1 + I^{\alpha-1} f(t),$$

de manera que:

$$\dot{x}(0) = c_1.$$

En consecuencia, la solución de (3.9) junto con las condiciones iniciales (3.5)-(3.6) será:

$$x(t) = x_0 + x_1 t + I^\alpha f(t). \quad (3.13)$$

3.3. Derivada de Riemann-Liouville

Ahora vamos a considerar (3.8) y (3.9) con la derivada de Riemann-Liouville.

La solución general de (3.8) se obtiene calculando la integral de orden α y usando el lema 2.2.5:

$$x(t) = c_0 t^{\alpha-1} + c_1 t^{\alpha-2}, \quad (3.14)$$

con c_0 y c_1 constantes arbitrarias.

En este caso x no puede ser continua cuando $t \rightarrow 0^+$, ya que $\alpha < 2$, salvo cuando $c_1 = 0$. En este caso, $x(t) = c_0 t^{\alpha-1}$ y $x(0) = 0$, puesto que $\alpha > 1$.

De esto se deduce que la condición inicial (3.5) carece de sentido en el caso de la derivada de Riemann-Liouville ya que no podrá ser verificada salvo si $x_0 = 0$.

Por otra parte:

$$\dot{x}(t) = D^1 x(t) = c_0 D^1(t^{\alpha-1}) = c_0 \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-1)} t^{\alpha-2},$$

que nunca será continua en 0 salvo si $c_0 = 0$.

En consecuencia, las condiciones iniciales clásicas (3.5) y (3.6) no son adecuadas en el caso de la derivada de Riemann-Liouville.

Las pertinentes son:

$$D^{\alpha-2} x(0) = x_0 \quad (3.15)$$

y

$$D^{\alpha-1} x(0) = x_1 \quad (3.16)$$

Nótese que para $\alpha = 2$ se obtienen (3.5) y (3.6) respectivamente.

Para una descripción física de estas condiciones puede consultarse [29].

Vamos por tanto a resolver la ecuación homogénea (3.8) en el sentido de la derivada de Riemann-Liouville junto con las nuevas condiciones iniciales (3.15) y (3.16).

La solución general viene dada por (3.14):

$$x(t) = c_0 t^{\alpha-1} + c_1 t^{\alpha-2}. \quad (3.17)$$

Ahora:

$$D^{\alpha-1} x(t) = c_0 D^{\alpha-1}(t^{\alpha-1}) + c_1 D^{\alpha-1}(t^{\alpha-2}) = c_0 \Gamma(\alpha),$$

ya que:

$$D^{\alpha-1}(t^{\alpha-1}) = \Gamma(\alpha) \quad \text{por (2.2)}$$

y

$$D^{\alpha-1}(t^{\alpha-2}) = 0 \quad \text{por (2.8)}.$$

La condición inicial (3.16) implica que $x_1 = \Gamma(\alpha) c_0$, o lo que es lo mismo $c_0 = \frac{x_1}{\Gamma(\alpha)}$.

Análogamente:

$$D^{\alpha-2} x(t) = c_0 D^{\alpha-2}(t^{\alpha-1}) + c_1 D^{\alpha-2}(t^{\alpha-2}) = c_0 \Gamma(\alpha) t + c_1 \Gamma(\alpha-1),$$

ya que usando (2.2) se tiene que:

$$D^{\alpha-2}(t^{\alpha-1}) = \Gamma(\alpha) t,$$

y

$$D^{\alpha-2}(t^{\alpha-2}) = \Gamma(\alpha-1).$$

De esta manera:

$$D^{\alpha-2} x(0) = c_1 \Gamma(\alpha-1).$$

Si queremos que se verifique la condición (3.15) entonces:

$$D^{\alpha-2}x(0) = x_0,$$

entonces $x_0 = c_1 \Gamma(\alpha - 1)$, esto es,

$$c_1 = \frac{x_0}{\Gamma(\alpha - 1)}.$$

Por tanto, la solución de (3.8) con las condiciones iniciales (3.15)-(3.16) será:

$$x(t) = \frac{x_1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{x_0}{\Gamma(\alpha - 1)} t^{\alpha-2}. \quad (3.18)$$

Para resolver la ecuación no homogénea (3.9), usando nuevamente el lema 2.2.5, tenemos que su solución general es:

$$x(t) = c_0 t^{\alpha-1} + c_1 t^{\alpha-2} + I^\alpha f(t). \quad (3.19)$$

Ahora:

$$D^{\alpha-1}x(t) = c_0 \Gamma(\alpha) + D^{\alpha-1}I^\alpha f(t) = c_0 \Gamma(\alpha) + I^1 f(t).$$

Por tanto:

$$D^{\alpha-1}x(0) = c_0 \Gamma(\alpha),$$

lo que implica que:

$$c_0 = \frac{x_1}{\Gamma(\alpha)}.$$

De la misma forma:

$$D^{\alpha-2}x(t) = c_0 \Gamma(\alpha)t + c_1 \Gamma(\alpha - 1) + D^{\alpha-2}I^\alpha f(t) = c_0 \Gamma(\alpha)t + c_1 \Gamma(\alpha - 1) + I^2 f(t).$$

Dado que:

$$D^{\alpha-2}x(0) = c_1 \Gamma(\alpha - 1),$$

se tiene que:

$$c_1 = \frac{x_0}{\Gamma(\alpha - 1)},$$

y la solución será:

$$x(t) = \frac{x_1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{x_0}{\Gamma(\alpha - 1)} t^{\alpha-2} + I^\alpha f(t). \quad (3.20)$$

Capítulo 4

Análisis del movimiento de un proyectil en términos del cálculo fraccional

4.1. Introducción

El movimiento de un proyectil es uno de los problemas más simples cuyos análogos son omnipresentes en la física y prácticamente no necesitan introducción. El objetivo de este capítulo es presentar una generalización del problema del proyectil clásico basado en los métodos del *cálculo fraccional*, en lo que se denominará de ahora en adelante como el *proyectil fraccional*. El cálculo fraccional es una extensión del cálculo ordinario y, como ya se ha visto en la introducción, tiene una historia de unos 300 años, y representa una generalización de la diferenciación ordinaria y la integración en un orden arbitrario [25, 30, 31]. Durante las últimas décadas, el cálculo fraccional empezó a ser usado en varios campos, como por ejemplo: física, ingeniería, biología...y muchos resultados importantes fueron obtenidos; sin embargo, no fue usado para modelar el movimiento proyectil. En problemas aplicados se requiere el uso de definiciones de derivadas fraccionarias, permitiendo la utilización de condiciones iniciales físicamente interpretables, como $x(0), \dot{x}(0), \dots, etc$. La derivada fraccionaria de Caputo y la derivada de Riemann-Liouville satisfacen estas demandas. En este capítulo, aspiramos a extender la aplicación del cálculo fraccional al problema del proyectil, de ahí, las características del movimiento proyectil como el tiempo de vuelo, rango, trayectoria y altura máxima serán discutidas desde el punto de vista del cálculo fraccionario.

4.2. Definiciones y preliminares

4.2.1. Derivada fraccionaria de Caputo

La *derivada fraccionaria de Caputo de una función f* se define como [31]:

$$\frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (n - 1 < \alpha < n). \quad (4.1)$$

La **transformada de Laplace de una función** $f(t)$ definida para todos los números positivos $t \geq 0$, es la función $F(s)$, definida por:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

siempre que esté bien definido.

Si le aplicamos la transformada de Laplace a (4.1) nos dá [31]:

$$L\left\{\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x)\right\} = s^\alpha F(s) - \sum_{m=0}^{n-1} s^{\alpha-m-1} f^{(m)}(0), \quad n-1 < \alpha < n. \quad (4.2)$$

4.2.2. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

La *derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una función* f viene dada por:

$$\frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha+n-1} f(\tau) d\tau, \quad (n-1 < \alpha < n). \quad (4.3)$$

Si le aplicamos la transformada de Laplace nos dá:

$$L\left\{\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x)\right\} = s^\alpha F(s) - \sum_{m=0}^{n-1} s^m f^{(\alpha-m-1)}(0), \quad n-1 < \alpha < n. \quad (4.4)$$

4.2.3. Función Mittag-Leffler

Una *función de dos parámetros del tipo Mittag-Leffler* se define por expansión de series de la siguiente forma [31]:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\alpha m + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \quad (4.5)$$

La transformada de Laplace para la función Mittag-Leffler es muy útil para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha m + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(m)}(\pm at^\alpha) dt = \frac{m! s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha \pm a)^{m+1}}, \quad (Re(s) > a^{\frac{1}{\alpha}}). \quad (4.6)$$

Por tanto:

$$L^{-1}\left[\frac{m! s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha \pm a)^{m+1}}\right] = t^{\alpha m + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(m)}(\pm at^\alpha). \quad (4.7)$$

4.3. Formulación del problema

Un problema familiar de física básica consiste en determinar el movimiento de un objeto que se proyecta en un medio espacial y está sujeto a un campo gravitacional uniforme. En esta sección, consideramos la versión introductoria de este problema en la cual el medio no ofrece resistencia al movimiento del proyectil. El proyectil es tratado como una partícula de masa m bajo una fuerza gravitacional uniforme y

no se considera la fuerza de rozamiento en esta sección. Bajo estas condiciones, las ecuaciones clásicas del movimiento de una partícula en el plano $x - y$ vienen dadas por:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg, \quad (4.8)$$

según la clásica Ley de Newton, y con las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & \dot{x}(0) &= v_0 \cos \phi, \\ y(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= v_0 \sin \phi. \end{aligned} \quad (4.9)$$

esto es, el proyectil parte del reposo, con una fuerza inicial de módulo v_0 y un ángulo ϕ .

Ahora consideremos el problema de arriba en vista del enfoque fraccional. Antes de hacer esto, pensemos en la siguiente cuestión: ¿Cómo formular la aceleración de una partícula en el enfoque fraccional? Parece razonable considerar, en vez de la derivada segunda, una de orden fraccionario [32]. En vista de todo esto, podemos escribir las ecuaciones diferenciales fraccionarias para el problema del proyectil de la siguiente forma:

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = 0, \quad \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = -g, \quad \text{donde } 1 < \alpha \leq 2. \quad (4.10)$$

donde para $\alpha = 2$ tenemos el caso clásico (4.8).

Físicamente, podemos interpretar las derivadas de x y de y respectivamente, como la aceleración arbitraria del proyectil en las direcciones horizontales y verticales, lo cual se reduce a la aceleración de la mecánica clásica si $\alpha \rightarrow 2$.

Veamos ahora cuales son las soluciones según usemos la derivada de Caputo [32] o la derivada de Riemann-Liouville. Para ello seguiremos dos caminos distintos y veremos que obtenemos los mismos resultados. Por un lado utilizaremos sus respectivas transformadas de Laplace (4.2) y (4.4); y por otra parte “integremos directamente” (utilizamos los resultados que obtuvimos en el capítulo 3).

Realicemos primero los cálculos mediante la segunda de estas vías:

La solución general de (4.10) con la derivada de Caputo es:

$$x(t) = c_1 + c_2 t, \quad y(t) = -g \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + d_1 + d_2 t.$$

Imponiendo las condiciones iniciales (4.9) se tiene:

$$x(t) = v_0 \cos \phi t, \quad y(t) = -g \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + v_0 \sin \phi t. \quad (4.11)$$

Sin embargo, para la derivada de Riemann-Liouville las condiciones iniciales correspondientes serán:

$$\begin{aligned} D^{\alpha-2} x(0) &= 0, & D^{\alpha-1} x(0) &= v_0 \cos \phi, \\ D^{\alpha-2} y(0) &= 0, & D^{\alpha-1} y(0) &= v_0 \sin \phi. \end{aligned} \quad (4.12)$$

que para $\alpha = 2$ coincide con las condiciones iniciales (4.9).

La solución general de (4.10) para la derivada de Riemann-Liouville es:

$$\begin{aligned}x(t) &= c_0 t^{\alpha-2} + c_1 t^{\alpha-1} \\y(t) &= d_0 t^{\alpha-2} + d_1 t^{\alpha-1} - \frac{g}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha\end{aligned}$$

Ahora bien:

$$D^{\alpha-1}x(t) = c_0 D^{\alpha-1}(t^{\alpha-2}) + c_1 D^{\alpha-1}(t^{\alpha-1}).$$

Usando (2.8) se tiene que $D^{\alpha-1}(t^{\alpha-2}) = 0$ y por (2.2), $D^{\alpha-1}(t^{\alpha-1}) = \Gamma(\alpha)$.

Por tanto $D^{\alpha-1}x(t) = c_1 \Gamma(\alpha)$.

Usando la condición inicial $D^{\alpha-1}x(0) = v_0 \cos \phi$, se deduce que $c_1 = \frac{v_0 \cos \phi}{\Gamma(\alpha)}$, de manera que:

$$x(t) = c_0 t^{\alpha-2} + \frac{v_0 \cos \phi}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}.$$

Usando la otra condición inicial se puede obtener c_0 :

$$D^{\alpha-2}x(t) = c_0 \Gamma(\alpha-1) + v_0 \cos \phi t,$$

ya que $D^{\alpha-2}(t^{\alpha-2}) = \Gamma(\alpha-1)$ y $D^{\alpha-2}(t^{\alpha-1}) = \Gamma(\alpha) t$.

Por tanto $D^{\alpha-2}x(0) = 0$ implica que $c_0 = 0$ y se tiene que:

$$x(t) = \frac{v_0 \cos \phi}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}. \quad (4.13)$$

De la misma forma:

$$D^{\alpha-1}y(t) = -gt + d_1 \Gamma(\alpha)$$

$$D^{\alpha-2}y(t) = \frac{-1}{2} gt^2 + d_0 \Gamma(\alpha-1) + v_0 \sin \phi t$$

de donde se obtiene $d_1 = \frac{v_0 \sin \phi}{\Gamma(\alpha)}$, $d_0 = 0$, es decir:

$$y(t) = \frac{-g}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \frac{v_0 \sin \phi}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}. \quad (4.14)$$

Usando ahora las respectivas transformadas de Laplace veamos que llegamos a lo mismo:

Para la derivada de Caputo se tiene que la solución de (4.10) se puede obtener mediante la transformada de Laplace (4.2) como sigue:

$$\begin{aligned}s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) - s^{\alpha-2}\dot{x}(0) &= 0, \\s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1}y(0) - s^{\alpha-2}\dot{y}(0) &= -\frac{g}{s}.\end{aligned} \quad (4.15)$$

Usando las condiciones iniciales (4.9), se llega a que:

$$X(s) = \frac{v_0 \cos \phi}{s^2}, \quad Y(s) = -\frac{g}{s^{\alpha+1}} + \frac{v_0 \sin \phi}{s^2}. \quad (4.16)$$

Por tanto:

$$x(t) = v_0 \cos \phi t, \quad y(t) = -\frac{gt^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + v_0 \sin \phi t. \quad (4.17)$$

Para la derivada de Riemann-Liouville, se tiene que la solución de (4.10) puede ser hallada usando la transformada de Laplace (4.4) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} s^\alpha X(s) - D^{\alpha-1}x(0) - sD^{\alpha-2}x(0) &= 0, \\ s^\alpha Y(s) - D^{\alpha-1}y(0) - sD^{\alpha-2}y(0) &= -\frac{g}{s}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Utilizando las condiciones iniciales (4.12), obtenemos:

$$X(s) = \frac{v_0 \cos \phi}{s^\alpha}, \quad Y(s) = -\frac{g}{s^{\alpha+1}} + \frac{v_0 \sin \phi}{s^\alpha}. \quad (4.19)$$

De ahí se sigue que:

$$x(t) = v_0 \cos \phi \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad y(t) = -\frac{gt^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + v_0 \sin \phi \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (4.20)$$

4.4. Características del movimiento de un proyectil en el cálculo fraccional

Tres cantidades son particularmente relevantes para identificar, distinguir y analizar trayectorias: rango, altura máxima y tiempo de vuelo. El **rango** es la distancia horizontal recorrida por el proyectil desde que se lanza hasta que aterriza. La **altura máxima** es la altura en el punto más alto de la trayectoria. El **tiempo de vuelo** es la cantidad de tiempo que el proyectil está en el aire desde que se lanza hasta que aterriza.

Obtengamos cada una de estas cantidades usando la derivada de Caputo [32] y la derivada de Riemann-Liouville.

4.4.1. Trayectoria

Caputo

Eliminando t de (4.17), obtenemos la trayectoria del proyectil fraccional en un α arbitrario:

$$y = \tan \phi x - \frac{g x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)(v_0 \cos \phi)^\alpha}. \quad (4.21)$$

Si $\alpha \rightarrow 2$, (4.21) nos da la ecuación clásica de la trayectoria:

$$y = \tan \phi x - \frac{g}{2v_0^2} \sec^2 \phi x^2. \quad (4.22)$$

Riemann-Liouville

Eliminando t de (4.20), se obtiene ahora la trayectoria del proyectil fraccional para un α arbitrario:

$$y = \tan \phi x - \frac{g}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{x \Gamma(\alpha)}{v_0 \cos \phi} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}. \quad (4.23)$$

Nuevamente si $\alpha \rightarrow 2$, a partir de (4.23) conseguimos la ecuación clásica de la trayectoria:

$$y = \tan \phi x - \frac{g}{2v_0^2} \sec^2 \phi x^2. \quad (4.24)$$

4.4.2. Rango

El **rango proyectil fraccional** se define como el valor de x en el punto de impacto.

Caputo

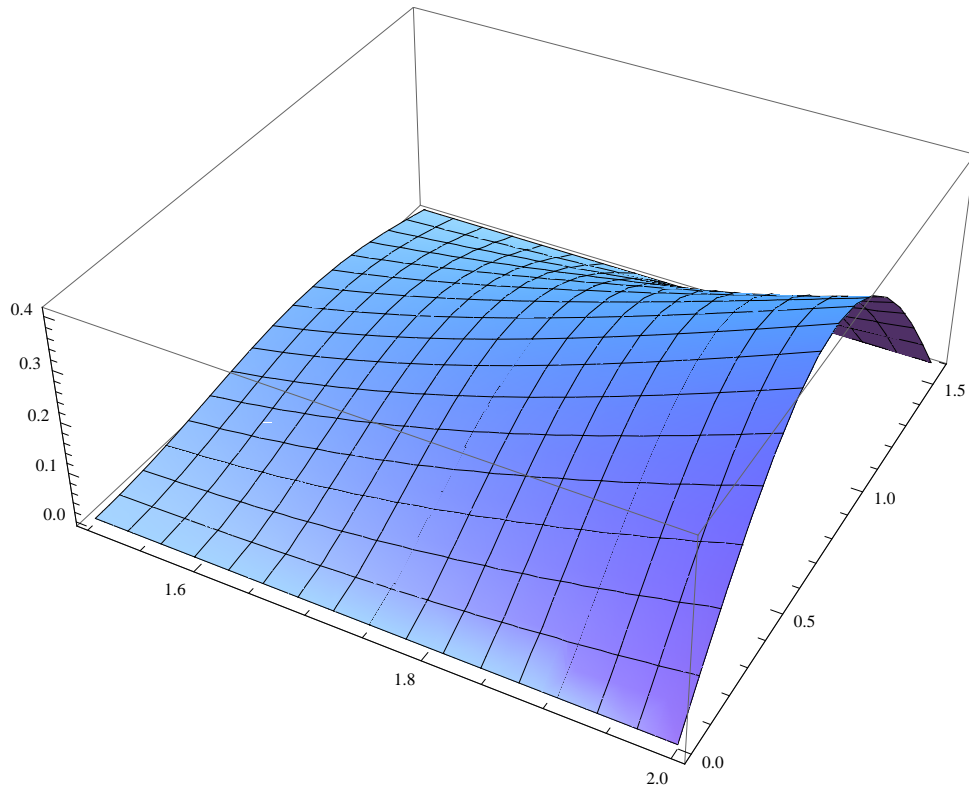
Así, $y = 0$ en $x = R_F$. De ahí, R_F viene dado por:

$$R_F = (v_0)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} (\sin \phi)^{\frac{1}{\alpha-1}} \cos \phi. \quad (4.25)$$

También si $\alpha \rightarrow 2$, (4.25) nos lleva al rango del proyectil clásico:

$$R_C = \frac{2v_0^2}{g} \sin \phi \cos \phi. \quad (4.26)$$

Gráfica del rango para la derivada de Caputo en función del orden de derivación α y del ángulo ϕ ($v_0 = 2$):



Riemann-Liouville

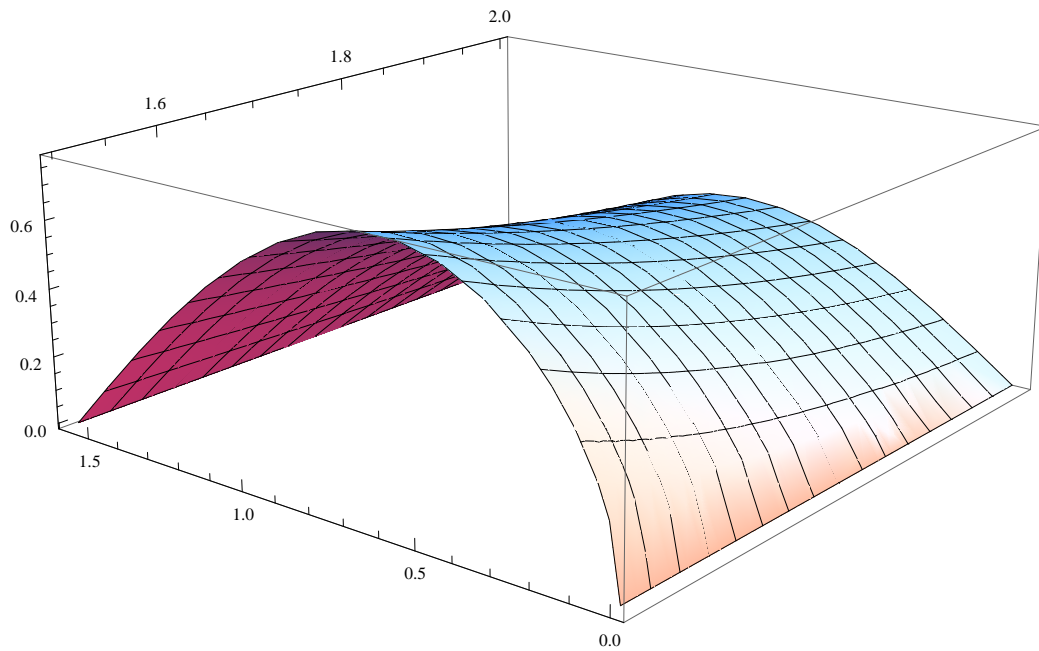
Haciendo nuevamente $y = 0$ en $x = R_F$, se obtiene que en este caso, R_F viene dado por:

$$R_F = \frac{v_0 \cos \phi}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\alpha v_0 \sin \phi}{g} \right)^{\alpha-1} \quad (4.27)$$

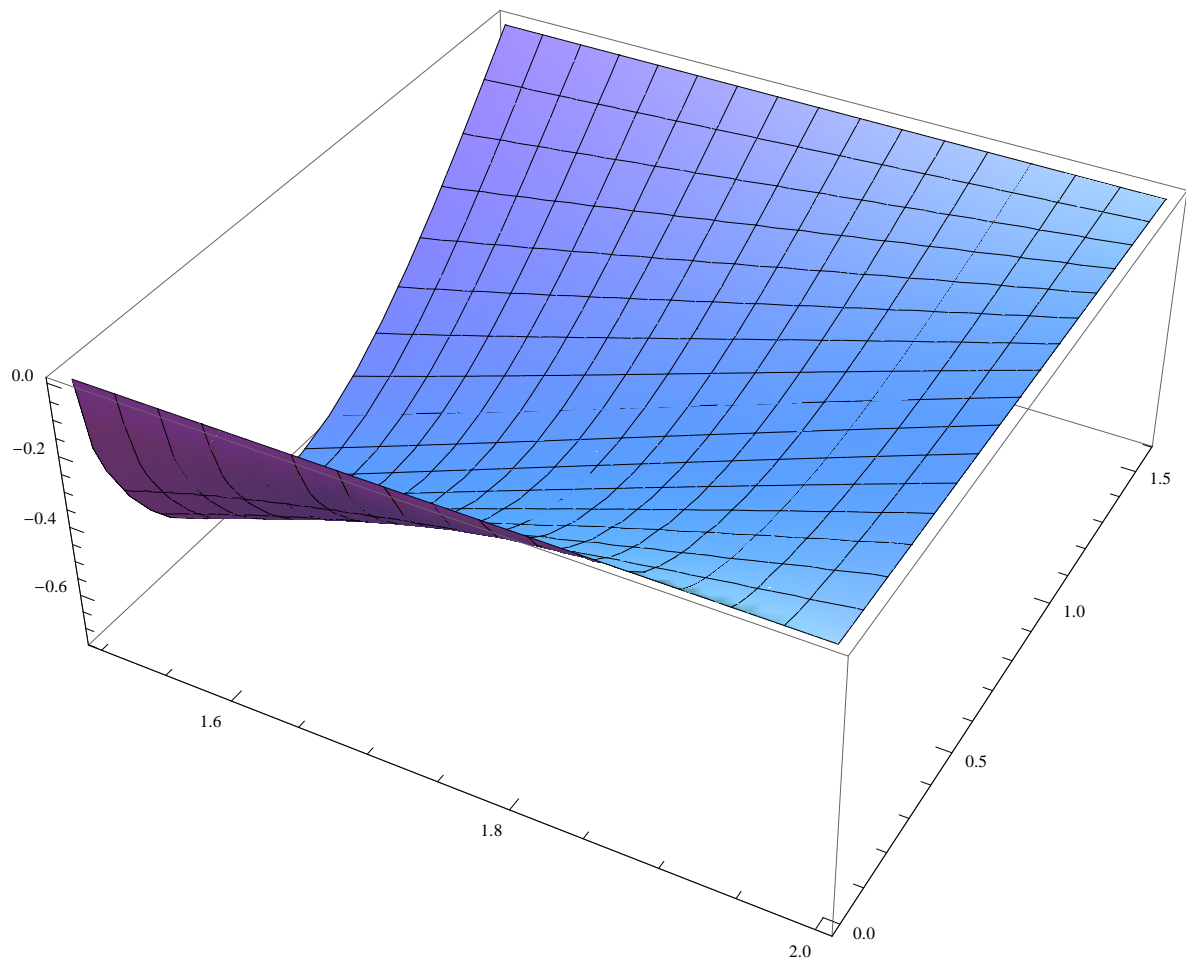
Si $\alpha \rightarrow 2$, a partir de (4.27) obtenemos el rango del proyectil clásico:

$$R_C = \frac{2v_0^2}{g} \sin \phi \cos \phi. \quad (4.28)$$

Gráfica del rango para la derivada de Riemann-Liouville en función del orden de derivación α y del ángulo ϕ ($v_0 = 2$):



Comparación de ambos rangos en función del orden de derivación α y del ángulo ϕ ($v_0 = 2$):



4.4.3. Tiempo de vuelo

El **tiempo de vuelo fraccional** $t_{F-flight}$ se define como el valor de t en el cual el proyectil choca con el suelo.

Caputo

Por esto hacemos, $y = 0$ en $t = t_{F-flight}$, y de ahí:

$$t_{F-flight} = \left[\frac{\Gamma(\alpha + 1) v_0 \sin \phi}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}. \quad (4.29)$$

Aquí, hay que señalar también que el tiempo de vuelo clásico $t_{C-flight}$ se puede deducir de (4.29) si $\alpha \rightarrow 2$:

$$t_{C-flight} = \frac{2 v_0 \sin \phi}{g}. \quad (4.30)$$

Riemann-Liouville

Haciendo $y = 0$ en $t = t_{F-flight}$, se obtiene:

$$t_{F-flight} = \frac{\alpha v_0 \sin \phi}{g}. \quad (4.31)$$

Nuevamente, se verifica que el tiempo de vuelo clásico $t_{C-flight}$ se puede obtener a partir de (4.31) haciendo que $\alpha \rightarrow 2$:

$$t_{C-flight} = \frac{2 v_0 \sin \phi}{g}. \quad (4.32)$$

4.4.4. Altura máxima

Caputo

El proyectil alcanza su **altura máxima** cuando la componente vertical de la velocidad desaparece, i.e, $\dot{y} = 0$. Resolviendo esta ecuación para t , llegamos a que:

$$t_{alt-max} = \left[\frac{\Gamma(\alpha) v_0 \sin \phi}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}. \quad (4.33)$$

Sustituyendo (4.33) en $y(t)$ en (4.17), obtenemos la altura máxima fraccional H_F :

$$H_F = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \left[\frac{\Gamma(\alpha)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} (v_0 \sin \phi)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}. \quad (4.34)$$

De ahí, podemos obtener la altura máxima del proyectil clásico cuando $\alpha \rightarrow 2$:

$$H_C = \frac{v_0^2 \sin^2 \phi}{2g}. \quad (4.35)$$

Riemann-Liouville

Resolvemos para t la ecuación $\dot{y} = 0$, y obtenemos:

$$t_{alt-max} = \frac{(\alpha - 1)v_0 \sin \phi}{g}. \quad (4.36)$$

Sustituyendo (4.36) en $y(t)$ en (4.20), hallamos la altura máxima fraccional H_F :

$$H_F = \frac{-((\alpha - 1)v_0 \sin \phi)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)g^{\alpha-1}} + \frac{(v_0 \sin \phi)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\alpha - 1}{g}\right)^{\alpha-1}. \quad (4.37)$$

Ahora podemos obtener la altura máxima clásica sin más que hacer tender $\alpha \rightarrow 2$:

$$H_C = \frac{v_0^2 \sin^2 \phi}{2g}. \quad (4.38)$$

4.5. Relación entre los rangos

Veremos en esta sección dos teoremas: uno comparando el rango de un proyectil usando cálculo fraccional según la derivada de Caputo con el rango en el caso clásico [32], y otro comparando nuevamente el rango clásico con el rango fraccional, pero esta vez utilizando las fórmulas obtenidas para la derivada de Riemann-Liouville.

Teorema 4.5.1. *Supongamos que $\mu = \frac{1}{2}[\Gamma(\alpha+1)]^{\frac{1}{\alpha-1}} \left[\frac{v_0 \sin \phi}{g}\right]^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}$, entonces la relación entre el rango de un proyectil usando cálculo fraccional (según Caputo) R_{F-C} y el rango en el caso clásico R_C viene dada por $R_{F-C} = \mu R_C$, por tanto:*

1. $R_{F-C} = R_C$ si $\mu = 1$, i.e., $v_0 \sin \phi = \left[\frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g$.
2. $R_{F-C} > R_C$ si $\mu > 1$, i.e., $v_0 \sin \phi > \left[\frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g$.
3. $R_{F-C} < R_C$ si $\mu < 1$, i.e., $v_0 \sin \phi < \left[\frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g$.

Demostración. Usando R_{F-C} y R_C dados en las ecuaciones (4.25) y (4.26), obtenemos:

$$\frac{R_{F-C}}{R_C} = (v_0)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{g}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} (\sin \phi)^{\frac{1}{\alpha-1}} \cos \phi + \frac{g}{v_0^2 \sin 2\phi}. \quad (4.39)$$

En una forma más simple, tenemos:

$$\frac{R_{F-C}}{R_C} = \frac{1}{2}[\Gamma(\alpha+1)]^{\frac{1}{\alpha-1}} \left[\frac{v_0 \sin \phi}{g}\right]^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \quad (4.40)$$

Por tanto:

$$R_{F-C} = \mu R_C, \quad \mu = \frac{1}{2}[\Gamma(\alpha+1)]^{\frac{1}{\alpha-1}} \left[\frac{v_0 \sin \phi}{g}\right]^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}. \quad (4.41)$$

Por tanto, $R_{F-C} = R_C$ cuando $\mu = 1$, i.e.,

$$\frac{1}{2}[\Gamma(\alpha+1)]^{\frac{1}{\alpha-1}} \left[\frac{v_0 \sin \phi}{g}\right]^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} = 1. \quad (4.42)$$

Esto conduce a la condición:

$$v_0 \sin \phi = \left[\frac{2^\alpha - 1}{\Gamma(\alpha + 1)} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g. \quad (4.43)$$

Además, $R_{F-C} > R_C$ si $\mu > 1$, lo cual requiere que:

$$v_0 \sin \phi > \left[\frac{2^\alpha - 1}{\Gamma(\alpha + 1)} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g. \quad (4.44)$$

De manera similar, $R_{F-C} < R_C$ si $\mu < 1$ y esto da:

$$v_0 \sin \phi < \left[\frac{2^\alpha - 1}{\Gamma(\alpha + 1)} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g. \quad (4.45)$$

■

Teorema 4.5.2. *Supongamos que $v = \frac{g^{2-\alpha}(v_0 \sin \phi)^{\alpha-2} \alpha^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)}$, entonces la relación entre el rango de un proyectil usando cálculo fraccional (según Riemann-Liouville) R_{F-RL} y el rango en el caso clásico R_C viene dada por $R_{F-RL} = vR_C$, por tanto:*

1. $R_{F-RL} = R_C$ si $v = 1$, i.e., $v_0 \sin \phi = \left(\frac{2\Gamma(\alpha)}{\alpha^{\alpha-1}} \right)^{\frac{1}{\alpha-2}} \frac{1}{g}$.
2. $R_{F-RL} > R_C$ si $v > 1$, i.e., $v_0 \sin \phi > \left(\frac{2\Gamma(\alpha)}{\alpha^{\alpha-1}} \right)^{\frac{1}{\alpha-2}} \frac{1}{g}$.
3. $R_{F-RL} < R_C$ si $v < 1$, i.e., $v_0 \sin \phi < \left(\frac{2\Gamma(\alpha)}{\alpha^{\alpha-1}} \right)^{\frac{1}{\alpha-2}} \frac{1}{g}$.

4.6. Relación entre las alturas máximas

Teorema 4.6.1. *Supongamos que $\lambda = 2(1 - \frac{1}{\alpha})[\Gamma(\alpha)]^{\frac{1}{\alpha-1}} [\frac{v_0}{g} \sin \phi]^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}$, entonces la relación entre la altura máxima de un proyectil usando cálculo fraccional (según Caputo) H_F y la altura máxima en el caso clásico H_C viene dada por $H_F = \lambda H_C$, por tanto:*

1. $H_F = H_C$ si $\lambda = 1$, i.e., $v_0 \sin \phi = [(2 - \frac{2}{\alpha})^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)]^{\frac{1}{2-\alpha}} g$.
2. $H_F > H_C$ si $\lambda > 1$, i.e., $v_0 \sin \phi > [(2 - \frac{2}{\alpha})^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)]^{\frac{1}{2-\alpha}} g$.
3. $H_F < H_C$ si $\lambda < 1$, i.e., $v_0 \sin \phi < [(2 - \frac{2}{\alpha})^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)]^{\frac{1}{2-\alpha}} g$.

Demostración. Usando H_F y H_C dados en las ecuaciones (4.34) y (4.35), obtenemos:

$$\frac{H_F}{H_C} = 2g \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \left[\frac{\Gamma(\alpha)}{g}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} [v_0 \sin \phi]^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} = 2 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) [\Gamma(\alpha)]^{\frac{1}{\alpha-1}} \left[\frac{v_0 \sin \phi}{g}\right]^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} = \lambda. \quad (4.46)$$

El resto de la demostración se puede obtener fácilmente como en el teorema 4.5.1. ■

4.7. Máximo rango de proyectil

En aplicaciones, el máximo rango de proyectil y el ángulo de proyección óptimo necesario deben ser de interés considerable (p.e., en situaciones para las cuales el proyectil sirve como un sistema de entrega)[33]. Para maximizar R_F , es necesario optimizar el ángulo de proyección ϕ , lo cual se desarrolla a continuación.

Nuevamente veremos dos teoremas: uno para los valores del ángulo de proyección óptimo y el rango de proyectil máximo que obtenemos a partir de la ecuación del rango según Caputo (4.25) [32], y otro para dichos valores utilizando la ecuación del rango según Riemann-Liouville (4.27).

Teorema 4.7.1. *El ángulo de proyección óptimo ϕ_{max} y el rango de proyectil máximo R_{F-max} vienen dados por:*

$$\phi_{max} = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha - 1}} \right); \quad \frac{\pi}{4} \leq \phi_{max} < \frac{\pi}{2},$$

y

$$R_{F-max} = \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} \left[\frac{\Gamma(\alpha + 1)v_0^\alpha}{\sqrt{\alpha}g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Demostración. La condición necesaria para maximizar R_F ya se conoce del cálculo clásico y es $\frac{dR_F}{d\phi} = 0$, donde R_F viene dada por la ecuación (4.25). Así, es muy fácil obtener:

$$\frac{dR_F}{d\phi} = (v_0)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left[\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \left[-(\sin \phi)^{\frac{1}{\alpha-1}+1} + \frac{1}{\alpha-1} (\sin \phi)^{\frac{1}{\alpha-1}-1} \cos^2 \phi \right].$$

Ahora, resolviendo la ecuación $\frac{dR_F}{d\phi} = 0$ para $\phi = \phi_{max}$, obtenemos:

$$\phi_{max} = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha - 1}} \right).$$

Además, $1 < \alpha \leq 2$ implica que $1 \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}} < \infty$, i.e., $\frac{\pi}{4} \leq \phi_{max} < \frac{\pi}{2}$.

Así, si $\alpha \rightarrow 2$, tenemos $\phi_{max} = \frac{\pi}{4}$, que es el ángulo de proyección óptimo en el caso clásico.

Para obtener el rango de proyectil máximo R_{F-max} , sustituimos el ϕ_{max} que acabamos de hallar, en la ecuación (4.25), y para facilitar los cálculos utilizamos las siguientes razones trigonométricas:

$$\begin{cases} \sin \phi = \frac{\tan \phi}{\sqrt{1+(\tan \phi)^2}} \\ \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan \phi)^2}} \end{cases}$$

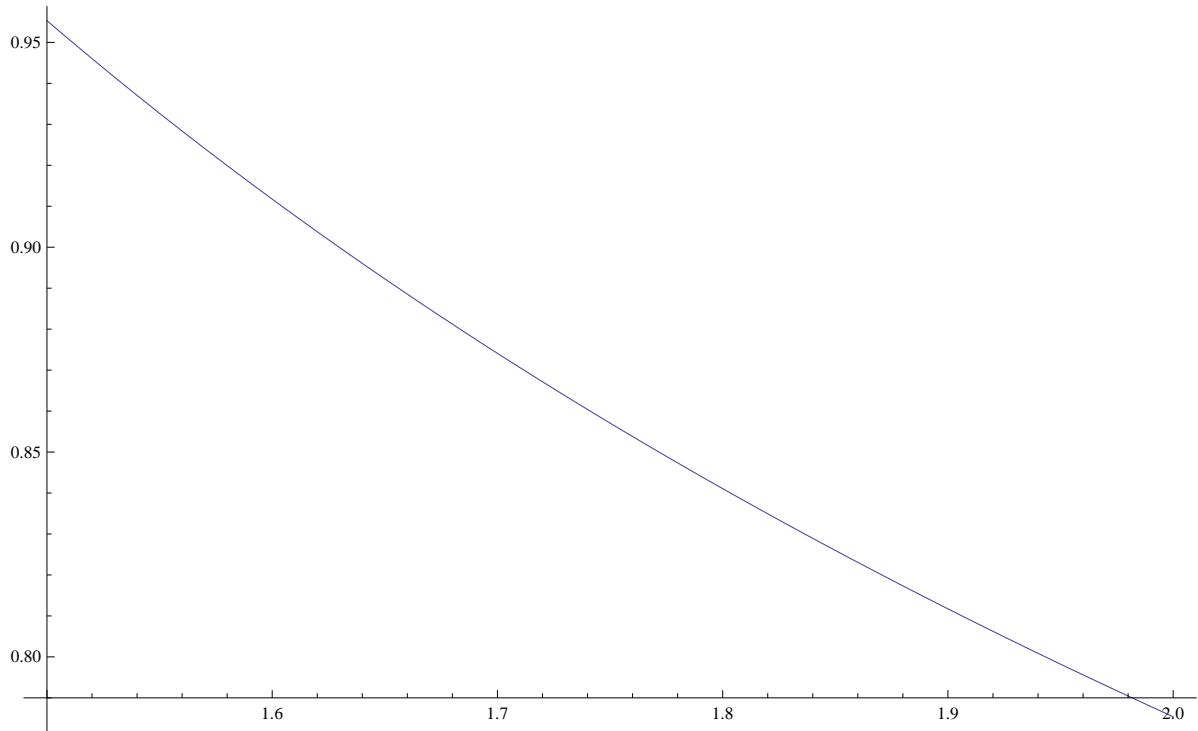
Por tanto nos queda:

$$R_{F-max} = \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} \left[\frac{\Gamma(\alpha + 1)v_0^\alpha}{\sqrt{\alpha}g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Finalmente, podemos obtener la misma expresión del rango clásico máximo $R_{C-max} = \frac{v_0^2}{g}$ si $\alpha \rightarrow 2$. ■

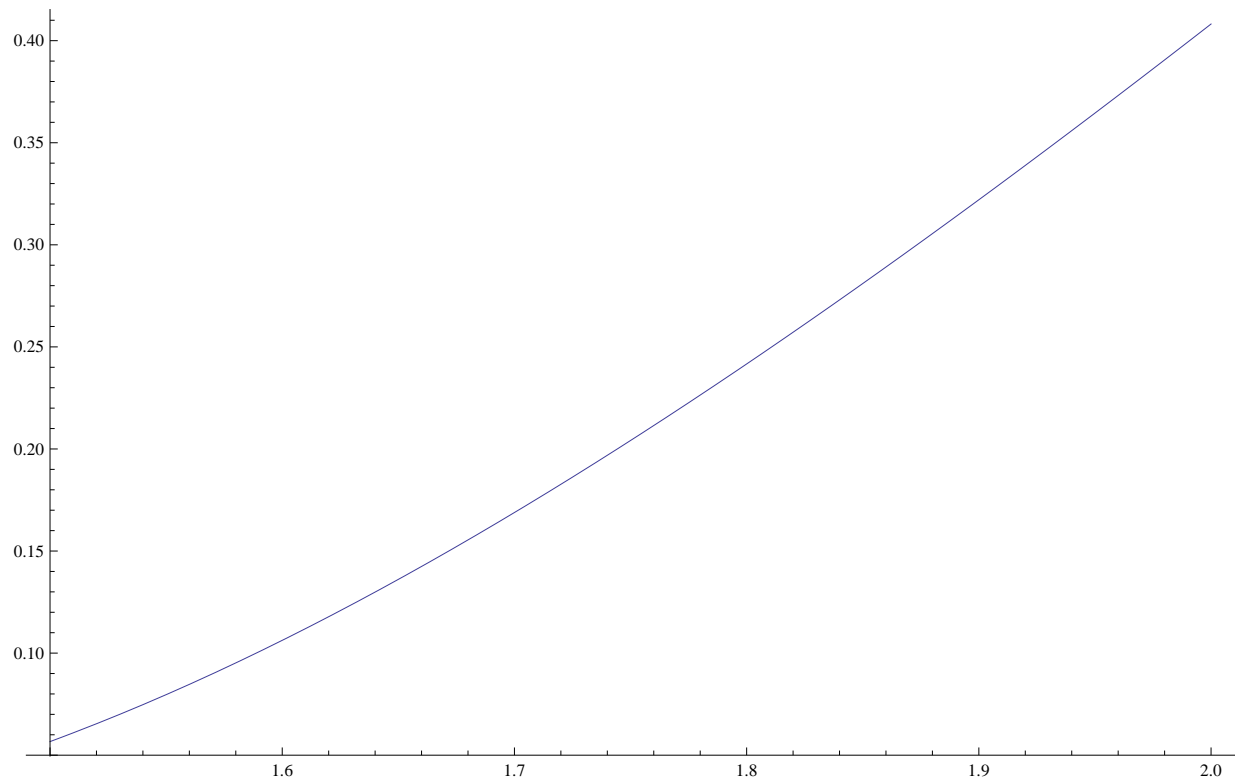
Mostremos ahora algunas gráficas que ponen de manifiesto lo visto en este teorema:

Ángulo de proyección óptimo con la derivada de Caputo:



Se observa que para $\alpha = 2$, se obtiene el ángulo $\frac{\pi}{4}$.

Rango de proyectil máximo con la derivada de Caputo ($v_0 = 2$):



Para $\alpha = 2$, se obtiene el valor $\frac{8}{9,8} \sin(\frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\pi}{4}) = 0,408163\dots$

Teorema 4.7.2. *El ángulo de proyección óptimo ϕ_{max} y el rango de proyectil máximo R_{F-max} vienen dados por:*

$$\phi_{max} = \tan^{-1}(\sqrt{\alpha - 1}); \quad \frac{\pi}{4} \leq \phi_{max} < \frac{\pi}{2},$$

y

$$R_{F-max} = \left(\frac{v_0}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{g} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha-1}{2}}.$$

Demostración. Primero tenemos que maximizar la función R_F , y para ello una condición necesaria es hacer $\frac{dR_F}{d\phi} = 0$, donde R_F la obtuvimos en la ecuación (4.27). Por tanto, lo que obtenemos es:

$$\frac{dR_F}{d\phi} = \left(\frac{v_0}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{g} \right)^{\alpha-1} \left[(\alpha - 1)(\sin \phi)^{\alpha-2}(\cos \phi)^2 - (\sin \phi)^\alpha \right].$$

El siguiente paso, es resolver la ecuación $\frac{dR_F}{d\phi} = 0$ para $\phi = \phi_{max}$, y tras una serie de sencillos cálculos llegamos a que:

$$\phi_{max} = \tan^{-1}(\sqrt{\alpha - 1}).$$

Por otra parte, $1 < \alpha \leq 2$ implica que $1 \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}} < \infty$, i.e., $\frac{\pi}{4} \leq \phi_{max} < \frac{\pi}{2}$.

Cuando hacemos tender en la ecuación de arriba $\alpha \rightarrow 2$, obtenemos $\phi_{max} = \frac{\pi}{4}$, que es el ángulo de proyección óptimo en el caso clásico.

Nos falta ahora hallar el valor del rango de proyectil máximo R_{F-max} , y para eso sustituimos el ϕ_{max} que acabamos de hallar, en la ecuación (4.27). De nuevo como el teorema anterior el uso de las siguientes funciones trigonométricas facilitará mucho los cálculos:

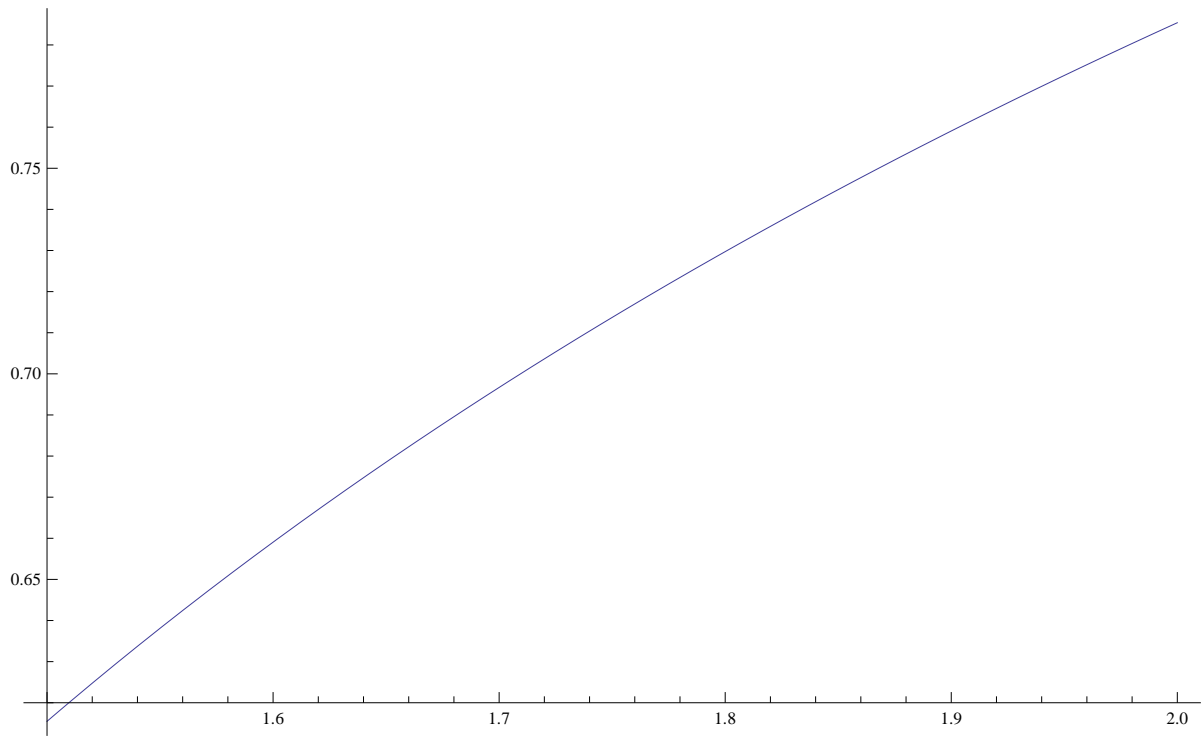
$$\begin{cases} \sin \phi = \frac{\tan \phi}{\sqrt{1+(\tan \phi)^2}} \\ \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan \phi)^2}} \end{cases}$$

La fórmula para el rango de proyectil máximo, será pues la siguiente:

$$R_{F-max} = \left(\frac{v_0}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{g} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha-1}{2}}.$$

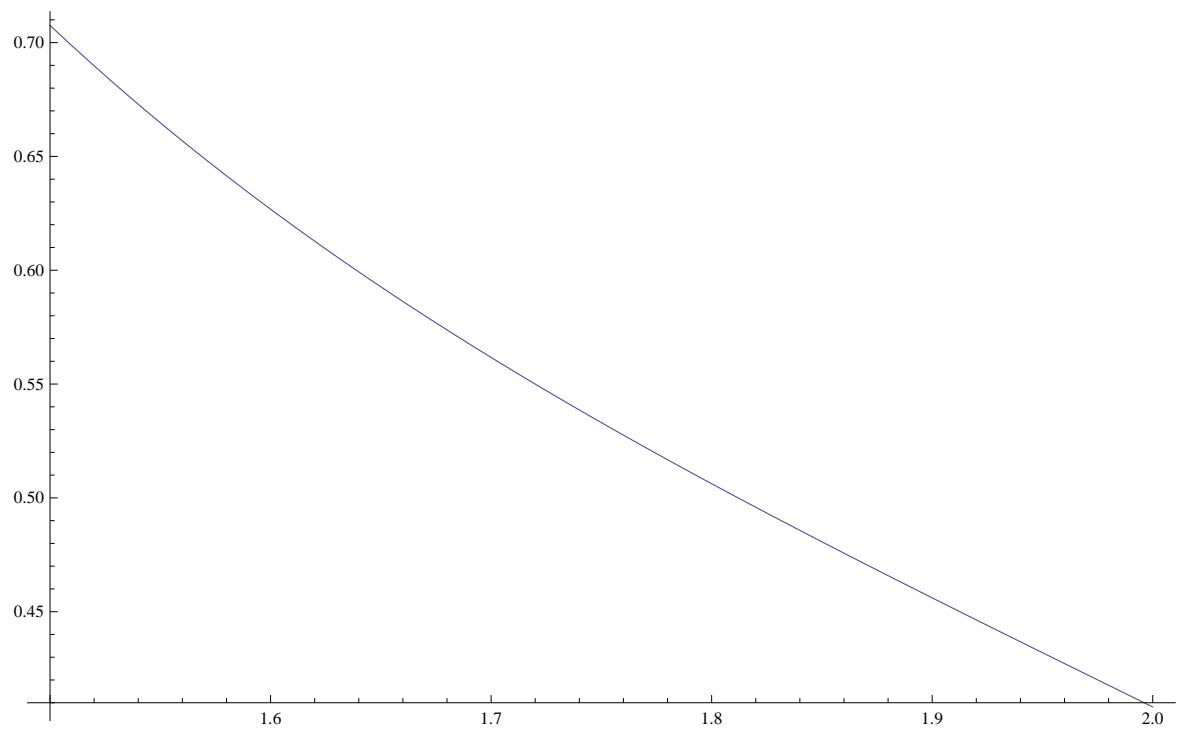
Se puede obtener a partir de ella la expresión del rango clásico máximo $R_{C-max} = \frac{v_0^2}{g}$ si $\alpha \rightarrow 2$. ■

Ángulo de rango máximo con la derivada de Riemann-liouville:

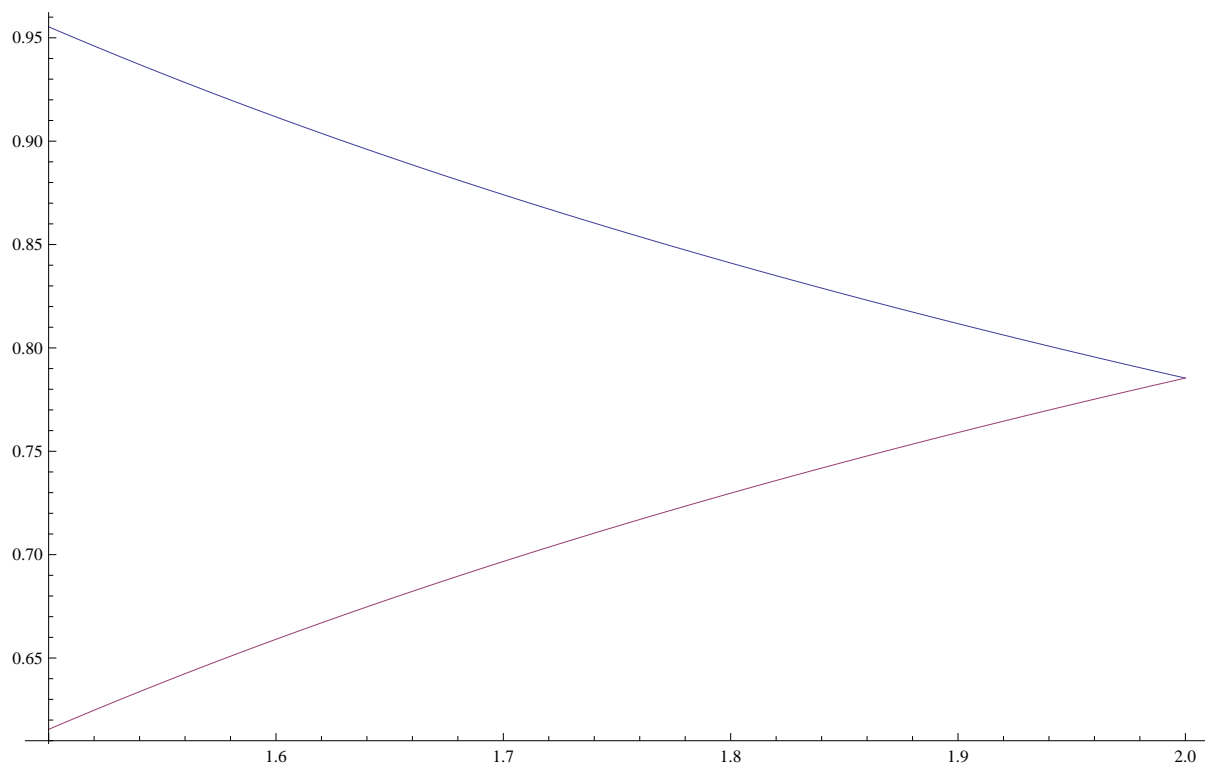


Nuevamente, para $\alpha = 2$ se obtiene el ángulo $\frac{\pi}{4}$.

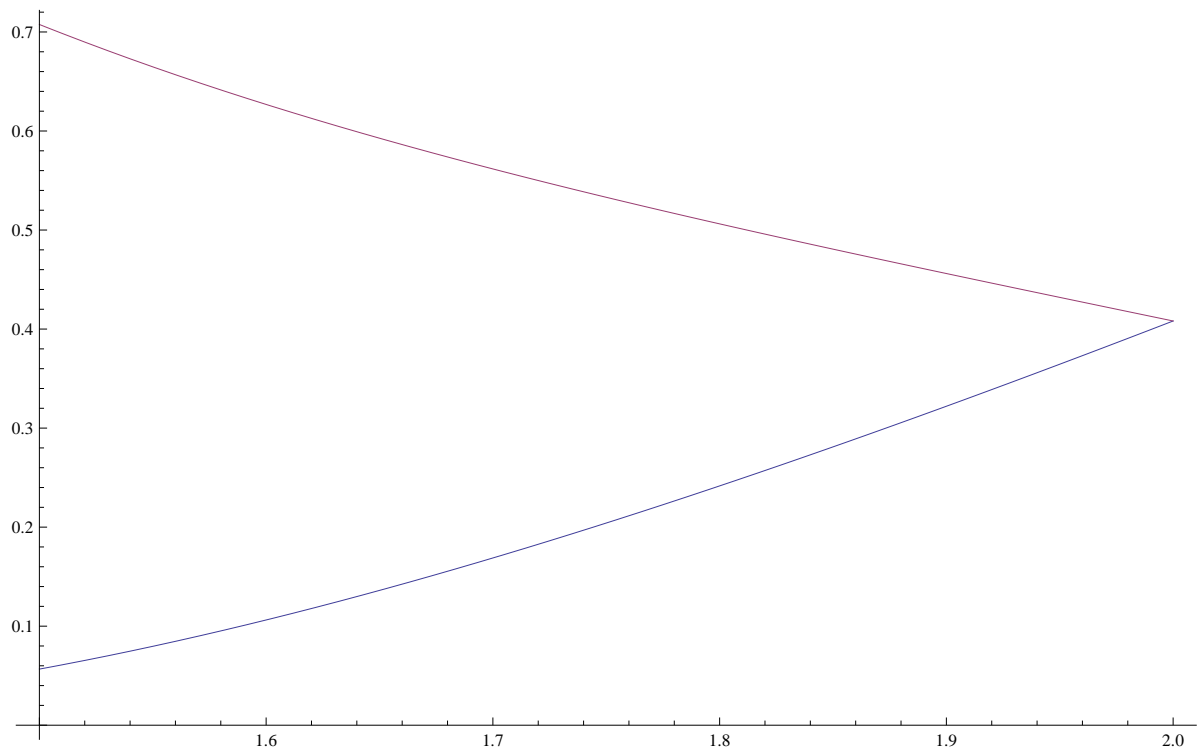
Rango máximo con la derivada de Riemann-Liouville ($v_0 = 2$):



Comparación de ambos ángulos:



Comparación de ambos rangos máximos ($v_0 = 2$):



Bibliografía

- [1] Lacroix S.F., *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. 3 ed., París: Courcier, 1820.
- [2] Abel N.H., *Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies*, *Gesammelte mathematische Werke*, Leipzig: Teubner, 1, 1881, 11-27. (Publicado por primera vez en *Mag. Naturvidenkaberne*, Aurgang, 1 (2), Christiania, 1823).
- [3] Abel N.H., *Auflösung einer mechanischen Aufgabe*, *J. für reine und angew. Math.*, 1, 1826, 153-157.
- [4] Simmons G.F., *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. 2ª ed. 423.
- [5] Liouville J., *Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions*, *J. l'École Roy. Polytechn.*, 13, Sect. 21, 1832, 1-69.
- [6] Liouville J., *Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques*, *Ibid.*, 1832, 71-162.
- [7] Riemann B., *Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation*, *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher*, Leipzig: Teubner, 1876, 331-344.
- [8] Sonine N.Ya., *Report on differentiation with an arbitrary index (Russian)*, *Proc. Second Congress of Russian Naturalists*, 2, 1870, 18-21.
- [9] Laurent H., *Sur le calcul des dérivées à indices quelconques*, *Nouv. Ann. Math.*, 3 (3), 1884, 240-252.
- [10] Grünwald A.K., *Über "begrenzte" Derivationen und deren Anwendung*, *Zeit. angew. Math. Physik*, 12, 1867, 441-480.
- [11] Letnikov A.V., *Theory of differentiation with an arbitrary index*, *Mat. Sb.*, 3, 1868, 1-66.
- [12] Weyl H., *Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung*. *Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 62 (1-2), 1917, 296-302.

- [13] Riesz M., Potentiels de divers ordres et leurs fonctions de Green, C.R. Congrès Intern. Math., Oslo, 2, 1936, 62-63.
- [14] Riesz M., L'intégrales de Riemann-Liouville et solution invariante du problème de Cauchy pour l'équation des ondes, Ibid, 1936. 44-45.
- [15] Maravall D., Ingeniería de las Oscilaciones, Editorial Dossat, 1959.
- [16] Maravall D., Ecuaciones diferenciales de orden no entero y oscilaciones fraccionarias. Rev. Real Academia de Ciencias Madrid, 65, 1971, 245-258.
- [17] Caputo M., Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, Part II., Geophys. J. R. Astr. Soc., 13 (1967), 529-539.
- [18] Vázquez L., Una Panorámica del Cálculo Fraccionario y sus Aplicaciones, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 98, 2004, 17-25.
- [19] S.J. Álvarez y J.M. Rey (Eds.), Libro-Homenaje a José María Fraile Peláez, Universidad Complutense de Madrid. Área de Ciencias Exactas y de la Naturaleza, 2008, 192 p., ISBN: 978-84-691-7747-1
- [20] Podlubny I., Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Differentiation, Fractional Differentiation And its Applications, A. Le Mahaute, J.A. Tenreiro Machado, J.C. Trigeassou and J. Sabatier (Eds), Ubooks Verlag, Neusäß, 2006, 3-18.
- [21] B. Ahmad, J.J. Nieto, A. Alsaedi, M. El-Shahed A study of nonlinear Langevin equation involving two fractional orders in different intervals Original Research Article Nonlinear Analysis: Real World Applications 13 (2012), 599-606.
- [22] <http://www.claymath.org/millennium/> (último acceso 25 de junio 2012)
- [23] A. Le Méhauté, A. El Kaabouchi, L. Nivanen, Riemann's conjecture and a fractional derivative, Computers and Mathematics with Applications 59(2010) 1610-1613.
- [24] <http://www.math.bas.bg/fcaa> (último acceso 25 de junio de 2012)
- [25] A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier Science B. V. Amsterdam, 2006.
- [26] M. Caputo, Elasticità e Dissipazione, Zanichelli, Bologna, 1969.
- [27] M. Caputo and F. Mainardi, Linear models of dissipation in anelastic solids, Riv. Nuovo Cimento (Ser. II.), 1 (1971), 161-198.
- [28] F. Mainardi, Fractional calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in "Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics" (A. Carpinteri and F. Mainardi, Eds), pp. 291-348, Springer-Verlag, Wien, 1997.

- [29] N. Heymans, I. Podlubny, Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives. *Rheol. Acta* 45 (2006), 765-771
- [30] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives-Theory and Applications*, Gordon and Breach, Linghome, PA, 1993.
- [31] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, CA, 1999.
- [32] Abdelhalin Ebaid, Analysis of projectile motion view of fractional calculus, *Applied Mathematical Modelling* 35 (2011) 1231-1239.
- [33] Jeffery C. Hayen, Projectile motion in a resistant medium. Part 2: Approximate solution and estimates, *Int. J. Non-Linear Mech.* 38(2003) 371-380.