



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

El teorema de la aplicación de Riemann

Pablo Arroyo Giganto

Julio, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

El teorema de la aplicación de Riemann

Pablo Arroyo Giganto

Julio, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Análisis Matemático
Título: El teorema de la aplicación de Riemann
Breve descripción do contido
<p>El teorema de la aplicación de Riemann es uno de los resultados clásicos centrales del análisis complejo, especialmente en lo referente a enunciados con claras implicaciones geométricas. El objetivo de este trabajo, que estará centrado en este teorema, será doble. Por una parte, se dará una prueba rigurosa del teorema de la aplicación de Riemann. Para eso, partiendo de lo conocido de la materia de Variable Compleja, se introducirán los conceptos pertinentes relativos a transformaciones de Möbius, lema de Schwarz y algunos resultados básicos de análisis funcional complejo como es el teorema de Montel. Con estas herramientas se desenvolverá la prueba clásica de Paul Koebe que pivota en torno a su famoso argumento de maximalidad. Por otra parte, exploraremos la conexión de ciertas ideas y conceptos propios de la física con algunas herramientas y resultados expuestos en el trabajo.</p>
Recomendacións
Se recomienda haber cursado la asignatura de Variable Compleja.
Outras observacións

Índice

Resumen	VIII
Introducción	XI
1. Preliminares	1
1.1. Introducción histórica	1
1.2. Rigidez de las funciones holomorfas	2
1.3. Definiciones básicas	5
1.4. Inversión geométrica	7
2. Transformaciones de Möbius	9
2.1. Motivación	9
2.2. Extensión a \mathbb{C}^∞ . Proyección estereográfica	11
2.2.1. Interpretación de las funciones complejas en la esfera de Riemann	13
2.2.2. Una interpretación alternativa	15
2.3. Conservación de circunrectas en \mathbb{C}^∞	17
2.4. Puntos fijos y razón cruzada	18
2.5. Principio de simetría	20
2.6. Principio de orientación	22
2.7. Automorfismos	24

3. Lema de Schwarz	27
3.1. Enunciado y demostración	27
3.2. Caracterización de los automorfismos del disco unidad	29
4. Espacio de funciones holomorfas	31
4.1. Construcción de una métrica	31
4.1.1. Familias normales en $\mathcal{C}(U)$	37
4.2. El espacio $\mathcal{H}(U)$	39
4.2.1. Familias normales en $\mathcal{H}(U)$	41
5. Teorema de la aplicación de Riemann	45
5.1. Enunciado y demostración	45
5.2. Importancia y aplicaciones	49
5.2.1. Transformación de Schwarz-Christoffel	50
5.3. Métodos aproximados	52
6. Conclusiones	55
Bibliografía	57

Resumen

El presente documento aborda el teorema de la aplicación de Riemann, un resultado esencial en el análisis complejo, que establece la existencia de aplicaciones conformes entre conjuntos simplemente conexos y el disco unidad. Para ello, se introduce el marco teórico necesario, comenzando con una breve introducción sobre el teorema, así como algunas definiciones y resultados fundamentales de las funciones holomorfas. Más adelante, se profundiza en las transformaciones de Möbius, una herramienta esencial en el desarrollo del trabajo que, junto con el lema de Schwarz, tiene un papel fundamental para caracterizar los automorfismos del disco unidad. Se cierra este desarrollo teórico con el estudio de algunas propiedades del espacio de las funciones holomorfas, proporcionando así una base para poder dar una demostración rigurosa del teorema. Finalmente, se destaca la importancia del mismo, poniendo de manifiesto algunas aplicaciones relevantes en otras ramas científicas, como pueda ser la mecánica de fluidos en la física, y se dará un algoritmo para hallar de manera estimativa la aplicación que describe el teorema.

Abstract

This document addresses the Riemann mapping theorem, an essential result in complex analysis that establishes the existence of conformal mappings between simply connected sets and the unit disk. To this end, the necessary theoretical framework is introduced, beginning with a brief introduction to the theorem, along with some fundamental definitions and results on holomorphic functions. Later, the focus shifts to Möbius transformations, a key tool in this work that, together with Schwarz's lemma, plays a fundamental role in characterizing the biholomorphic automorphisms of the unit disk. This theoretical development concludes with the study of certain properties of the space of holomorphic functions, thereby providing a foundation for giving a rigorous proof of the theorem. Finally, the importance of the theorem is highlighted by presenting some relevant applications in other scientific fields, such as fluid mechanics in physics, and an algorithm is provided to approximately compute the mapping described by the theorem.

Introducción

Primeramente, comenzaremos con una pequeña introducción tanto del teorema de la aplicación de Riemann como de resultados esenciales del análisis complejo. En particular, daremos una pequeña introducción histórica [7], [8], relatando la primera postulación del resultado realizada por Riemann en 1851 y los avances que se realizaron en años posteriores. Más adelante, nos centraremos en la definición de las aplicaciones conformes y los biholomorfismos y la relación que guardan estos conceptos. Además, recopilaremos algunos resultados esenciales del análisis complejo y las funciones holomorfas, destacando las propiedades singulares que las caracterizan [1], [3]. Para terminar con la introducción, definiremos los conceptos de inversión con respecto a una recta y a una circunferencia. Nos será de utilidad en capítulos posteriores para dar una interpretación geométrica de algunos aspectos relativos a las transformaciones de Möbius, que serán objeto de estudio en el siguiente capítulo.

El siguiente capítulo, como decimos, se centra en las transformaciones de Möbius [1]. Estas son una herramienta fundamental para el estudio de los automorfismos del disco unidad. Motivaremos la definición de estas aplicaciones mediante la construcción del grupo libre generado por la composición de las traslaciones, rotaciones, homotecias e inversiones del plano complejo. Posteriormente, introduciremos la esfera de Riemann que, junto con la proyección estereográfica, nos permitirá visualizar el comportamiento de los generadores de las transformaciones de Möbius en ella. Además, daremos una interpretación alternativa de las transformaciones de Möbius: veremos cómo podemos hacer una correspondencia entre transformaciones de Möbius y movimientos rígidos en la esfera de Riemann [2]. Tras definir algunos conceptos y propiedades características de estas transformaciones, daremos, también a partir de principios geométricos, una justificación de los principios de simetría y de orientación. Para terminar, deduciremos la expresión que toman las transformaciones de Möbius que sean automorfismos del disco unidad.

Seguidamente, desarrollaremos el lema de Schwarz [1], [3], que nos permitirá caracterizar completamente los automorfismos del disco unidad. Primeramente, daremos una demostración del resultado a partir del teorema del módulo máximo. Cerraremos este capítulo con la prueba de que todo automorfismo del disco unidad viene dado por una transformación de Möbius, con

la expresión demostrada en el capítulo anterior.

Por otra parte, continuaremos el estudio teórico con el espacio de las funciones holomorfas definidas en un abierto [3]. Primeramente, introduciremos algunas distancias en otros espacios funcionales, para así motivar y justificar una métrica para el espacio de funciones continuas en un abierto del plano complejo, proporcionándole así una estructura de espacio métrico que, posteriormente, generalizaremos para el espacio de funciones holomorfas. Con esto, podremos definir la noción de convergencia de sucesiones funcionales en este espacio métrico, que será equivalente a la convergencia uniforme en los subconjuntos compactos del abierto. Introduciremos algunos conceptos, como familias normales, equicontinuidad o acotación local, que podrán relacionarse entre sí con algunos resultados relevantes como los teoremas de Ascoli–Arzelà, Hurwitz, Montel o Vitali [3].

Por último, y para completar el objetivo principal de este trabajo, daremos una demostración rigurosa del teorema de la aplicación de Riemann [4], a partir de los resultados desarrollados con anterioridad. Estudiaremos la unicidad y la existencia de la aplicación dada por el teorema, esta última utilizando el enfoque de Koebe. Mediante su principio de maximalidad, entre todas las funciones conformes e inyectivas que envían un cierto dominio al disco unidad fijando un punto dado, existe una única función que maximiza la derivada en ese punto. Además, dicha función es sobreyectiva. Es decir, esta función extremal no solo existe, sino que es precisamente la función dada por el teorema para ese dominio. Una vez demostrado, pondremos de manifiesto su relevancia y se mostrarán algunas aplicaciones, como su uso para varios aspectos de la física, dando un ejemplo explícito para la mecánica de fluidos [6], utilizando la transformación de Schwarz-Christoffel [4] que, en ciertas condiciones, puede dar una expresión de la aplicación de Riemann. Por último, daremos un algoritmo (basado en [5]) que permitirá obtener de manera aproximada la función descrita por el teorema para cualquier dominio simplemente conexo, mostrando un ejemplo visual en el caso de tomar como dominio el territorio peninsular gallego (basado en [9]).

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, enunciaremos y daremos una pequeña introducción histórica sobre el teorema de la aplicación de Riemann. Además, recopilaremos los diferentes conceptos clave que se utilizarán continuamente en los desarrollos realizados en el presente documento. Estudiaremos las aplicaciones conformes, es decir, aquellas funciones holomorfas que preservan ángulos orientados que, por otra parte, su derivada no se anula en el dominio de interés. Por otra parte, se hará especial énfasis en la rigidez de las funciones holomorfas y cómo su comportamiento local puede determinar su carácter global.

Salvo la introducción histórica, basada en [7], [8], los resultados y definiciones se pueden consultar en [1].

1.1. Introducción histórica

El actualmente llamado teorema de la aplicación de Riemann, que afirma que todo dominio simplemente conexo del plano complejo, distinto de \mathbb{C} , es biholomorfo al disco centrado en el origen de radio unidad $\mathbb{D} = D(0, 1)$, fue enunciado por primera vez por Riemann en 1851.

Teorema 1.1 (Teorema de la aplicación de Riemann). *Sea $U \neq \mathbb{C}$ un conjunto simplemente conexo y $z_0 \in U$. Existe un único biholomorfismo $f : U \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$.*

Para demostrarlo, Riemann trató de probar el problema equivalente de la existencia de una función de Green en regiones simplemente conexas. Sin embargo, esta demostración, que utilizaba el principio de Dirichlet para la energía asociada a funciones armónicas, no fue demasiado rigurosa. Esto llevó a que fuese criticada por muchos matemáticos y que se tratase de dar una prueba [7], [8].

El primero que lo consiguió fue Osgood en 1900, quien publicó una demostración mediante el uso de funciones armónicas y la existencia de la función de Green para regiones simplemente conexas. En su demostración utilizó algunos resultados que se habían desarrollado en los años anteriores para dar una demostración completamente analítica.

Hubo varios avances realizados en diversas áreas que facilitaron más adelante la demostración, como la de Montel en la teoría de funciones normales, la de Poincaré en topología y otras de Schwarz o Weierstrass en análisis. Una de las más importantes para este caso fue la de Koebe, quien pudo dar una demostración del teorema utilizando lo que hoy se conoce como el principio de maximalidad de Koebe. Además, pudo dar una prueba sobre un resultado aun más general, el teorema de uniformización. Este asegura que una superficie de Riemann simplemente conexa es biholomorfa al disco unidad, al plano complejo o a la esfera de Riemann.

Más allá de su interés intrínseco, el teorema de la aplicación de Riemann tuvo un interés generalizado. Este resultado conecta el análisis complejo, la topología e incluso la geometría diferencial, y tuvo implicaciones en la geometría hiperbólica y en desarrollos físicos como en la teoría cuántica de campos. Además, desde un principio este resultado llamó la atención porque permitía resolver un problema en el disco y trasladarlo de manera conforme a un dominio mucho más general.

En definitiva, se puede ver que este resultado tuvo un interés bastante generalizado desde su enunciado en 1851 hasta la actualidad. A continuación, daremos una pequeña introducción acerca de las funciones holomorfas y algunos resultados esenciales en el análisis complejo.

1.2. Rigidez de las funciones holomorfas

A diferencia de otro tipo de funciones, como puedan ser las funciones reales diferenciables, las funciones holomorfas están sujetas a una estructura mucho más restrictiva. El comportamiento local en un subconjunto pequeño del dominio puede determinar su comportamiento a nivel global. Esta propiedad se pone de manifiesto en algunos de los teoremas más destacados del análisis complejo (se pueden consultar, por ejemplo, en [1], [3]), haciendo que el comportamiento de estas funciones esté, en cierto sentido, mucho más restringido.

Esto se debe principalmente a las condiciones de Cauchy-Riemann que, junto con la \mathbb{R} -diferenciabilidad (para asegurar la existencia de las derivadas parciales siguientes), determina la holomorfía de una función. Considerando una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, si hacemos la identificación de \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 , y escribimos

$$f(z) \equiv f(x + iy) \equiv f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y),$$

las condiciones de Cauchy-Riemann son las siguientes:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Estas condiciones establecen una rigidez adicional con respecto a las funciones diferenciables de \mathbb{R}^2 por ejemplo. En este caso, las funciones pueden ser infinitamente diferenciables sin que haya ningún tipo de restricción en sus derivadas. Esto hace que el comportamiento de las funciones reales sea, en cierto modo, mucho más “flexible” que el de las funciones holomorfas complejas.

Un resultado central en el análisis complejo es la fórmula integral de Cauchy, que nos permite establecer el valor de una función y de sus derivadas a partir de una integral. Si tenemos una cierta función holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, con U abierto, y γ es un camino cerrado que da una vuelta alrededor de z_0 en sentido antihorario en un entorno simplemente conexo de z_0 , entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_0} dw,$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

Cabe destacar que el hecho de que una función sea holomorfa implica que existen las derivadas de todos los órdenes y son, también, holomorfas. Además, se puede demostrar que la serie de Taylor centrada en un punto donde f es holomorfa, converge en un disco abierto. Esto es un cambio bastante notable con respecto a las funciones diferenciables reales, donde pueden no estar bien definidas las derivadas de orden superior o, por ejemplo, que una de ellas no sea continua.

Uno de los resultados más fuertes es el principio de identidad. Este afirma que si el conjunto de los ceros de una función f tiene un punto de acumulación, entonces f debe ser nula en todo el dominio conexo. De esto se puede deducir, por ejemplo, que si dos funciones coinciden en un conjunto con un punto de acumulación, entonces deben ser iguales en todo el dominio conexo.

Proposición 1.2 (Principio de identidad). *Sea f una función holomorfa en un abierto $U \subset \mathbb{C}$. Equivalen:*

- f es idénticamente nula en U .
- Existe un punto $z_0 \in U$ tal que $f(z_0) = 0$ y $f^{(n)}(z_0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- El conjunto $\{z \in U : f(z) = 0\}$ tiene un punto de acumulación en U .

Esto no se cumple, por ejemplo, en el caso de funciones reales infinitamente diferenciables. Como contraejemplo, podemos considerar la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \\ \exp\left(-\frac{x^2}{1-x^2}\right), & x \in (-1, 1). \end{cases}$$

El teorema del módulo máximo también pone de manifiesto el comportamiento singular de las funciones holomorfas. Este teorema asegura que si una función holomorfa alcanza el valor máximo de su módulo en el interior del dominio conexo, entonces la función debe ser constante. Esto indica que una función holomorfa no puede contar con un máximo interior no trivial.

Teorema 1.3 (Teorema del módulo máximo). *Sea U un abierto conexo del plano complejo y f una función holomorfa en U . Si existe un punto $z_0 \in U$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, para todo punto $z \in U$, entonces la función f es constante en U .*

Este resultado es muy característico del análisis complejo, y no tiene validez, por ejemplo, en el análisis real. Mismamente, considerando la función $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x^2$, esta presenta un máximo, y la función no es constante.

Uno de los aspectos destacados de las funciones holomorfas de otros espacios funcionales es la relación entre la integrabilidad en curvas cerradas y la derivabilidad compleja, establecida por el teorema de Morera. Este resultado permite garantizar que toda función continua con integral nula sobre toda curva cerrada en el dominio abierto es necesariamente holomorfa en dicho abierto. De este modo, se tiene una herramienta bastante útil para poder verificar la holomorfía.

Teorema 1.4 (Teorema de Morera). *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Si para toda curva cerrada y \mathcal{C}^1 a trozos γ contenida en U cumple que*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

entonces f es holomorfa en U .

Otro de los teoremas importantes que nos permite estudiar la cantidad y la posición de los ceros de funciones holomorfas es el teorema de Rouché. En ciertas condiciones, este establece que, si en la frontera de un conjunto una función domina a la otra en módulo, entonces la función original f y la perturbada $f + g$ cuentan con la misma cantidad de ceros en el interior de dicho conjunto (contando multiplicidades). Así, se tiene una herramienta útil para poder determinar la cantidad de ceros de una función a partir de otra más simple, cuya distribución de ceros es conocida.

Teorema 1.5 (Teorema de Rouché). *Sea K un conjunto cerrado, con frontera ∂K una curva cerrada y simple. Sean f, g dos funciones arbitrarias definidas en un abierto $U \subset K$, y holomorfas en U . Si $|g(z)| < |f(z)|$ para todo punto $z \in \partial K$, entonces las funciones f y $f + g$ tienen la misma cantidad de ceros en el interior de K (contando multiplicidades).*

Otro de los ejemplos de este comportamiento es el de la extensión analítica de las funciones holomorfas. Si contamos con una función f definida en un conjunto U , y queremos extenderla

analíticamente a un abierto conexo $V \supset U$, entonces esta extensión es única. Esto es una consecuencia directa del principio de identidad y permite ver cómo las funciones holomorfas no pueden extenderse de varias maneras, como ocurre en el caso real o en el caso de funciones continuas. El valor que toma la función en una zona puede determinar completamente de forma única el resto.

Como hemos podido observar, las funciones holomorfas tienen muchas restricciones internas que limitan la libertad de su comportamiento. Estas propiedades permiten que las funciones holomorfas tengan una estructura muy particular y que se puedan obtener resultados muy profundos.

1.3. Definiciones básicas

En este apartado daremos algunas definiciones básicas que serán continuamente empleadas a lo largo del documento. En particular, hablaremos de aplicaciones conformes y de biholomorfismos. En el enunciado del teorema de la aplicación de Riemann, se habla de biholomorfismos, cuyo interés radica en que son aplicaciones conformes, es decir, preservan localmente los ángulos y la orientación.

Definición 1.6. Una función $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con U un abierto, se dice conforme en $z_0 \in U$ si dadas dos curvas diferenciables C_1 y C_2 en U intersecando en un punto z_0 , el ángulo orientado entre C_1 y C_2 es el mismo que el de la imagen de las mismas $f(C_1)$ y $f(C_2)$ en $f(z_0)$.

Definición 1.7. Consideremos una función $f : U \subset \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$, con U abierto, $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ el plano complejo ampliado y $z_0 \in U$ un punto del dominio. Teniendo en cuenta que por definición $1/0 = \infty$ y $1/\infty = 0$, se define la conformidad del siguiente modo.

- En caso de que z_0 y $f(z_0)$ sean finitos, f es conforme en z_0 si lo es en el sentido de la definición 1.6.
- En caso de que z_0 sea finito y $f(z_0) = \infty$, se dirá que f es conforme en z_0 si $1/f(z)$ lo es según la definición 1.6.
- En caso de que $z_0 = \infty$ y $f(z_0)$ sea finito, se dirá que f es conforme en el punto del infinito si $f(1/z)$ es conforme en $z_0 = 0$ según la definición 1.6.
- En caso de que $z_0 = f(z_0) = \infty$, diremos que f es conforme en el punto del infinito si $1/f(1/z)$ es conforme en $z_0 = 0$ según la definición 1.6.

Observación 1.8. Esta definición es consistente con el hecho de que, si interpretamos \mathbb{C}^∞ como una esfera, la función $f : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ tal que $f(z) = 1/z$ esencialmente invierte los polos norte

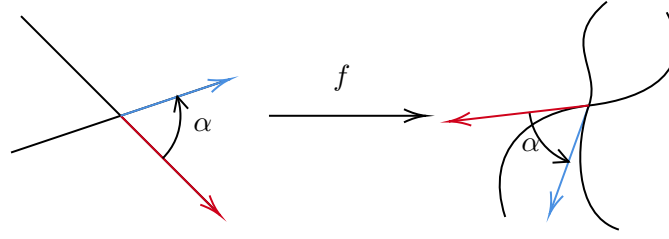


Figura 1.1: Diagrama cualitativo del comportamiento de una aplicación conforme, donde se preserva el ángulo orientado. Elaboración propia.

y sur, preservando los ángulos localmente. Este hecho se probará explícitamente en el próximo capítulo.

Definición 1.9. Una función $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con U abierto, se dice conforme en U si lo es para cada punto $z \in U$.

Definición 1.10. Una aplicación $f : U_1 \subset \mathbb{C} \rightarrow U_2 \subset \mathbb{C}$, con U_1, U_2 abiertos en \mathbb{C} , es un biholomorfismo si es holomorfa, biyectiva y con inversa holomorfa.

Observación 1.11. Si una función holomorfa, $f : U_1 \subset \mathbb{C} \rightarrow U_2 \subset \mathbb{C}$, es biyectiva, entonces su derivada no se anula en ningún punto de U_1 .

Una vez dada la definición de ambos conceptos, es importante ver la relación entre ambos. En particular, veamos que todo biholomorfismo es, en efecto, una aplicación conforme. Para ello, nos apoyaremos en la observación 1.11, que nos permite afirmar que un biholomorfismo tiene derivada no nula. Este hecho, junto con la holomorfía en un abierto, nos servirá para ver que una aplicación de este tipo preserva ángulos localmente, es decir, es conforme.

Proposición 1.12. Si $f \in \mathcal{H}(U)$, con U abierto, y $f'(z) \neq 0$, para todo $z \in U$, entonces f es conforme.

Demostración. Por ser f una función holomorfa, deberá cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Es decir, si hacemos la identificación de \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 , y escribimos $f(z) \equiv f(x + iy) \equiv f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, entonces se debe cumplir que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Si identificamos las partes real e imaginaria como componentes de \mathbb{R}^2 , tendremos que $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, y la matriz jacobiana en un punto (x_0, y_0) asociada será de la forma

$$Df_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

donde $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\alpha \in [0, 2\pi)$.

En el caso de que $f'(z_0) \neq 0$, se tendrá que la matriz jacobiana asociada será la composición de una rotación y una dilatación o contracción del plano complejo, lo que preservará los ángulos orientados. Es decir, f será una aplicación conforme. \square

Corolario 1.13. *Si f es un biholomorfismo, entonces f es conforme.*

1.4. Inversión geométrica

A lo largo del documento, trataremos de dar una visión geométrica de ciertos aspectos, sobre todo en lo relativo a las transformaciones de Möbius. Con este objetivo, analizaremos el comportamiento geométrico de algunas funciones clave, como pueda ser la inversión. Introduciremos una transformación clásica en la geometría euclídea conocida como la inversión con respecto a una circunferencia. El estudio de esta propiedad nos será de utilidad en capítulos posteriores para poder interpretar de un modo más visual algunas propiedades importantes.

Cuando hablamos de inversión con respecto a una recta resulta sencillo de definir. La reflexión de un punto P con respecto a una recta L consiste en encontrar el punto simétrico P' respecto a esta, es decir, un punto que se encuentre a la misma distancia que L y que el segmento que los una PP' sea perpendicular a L . Algunas de las propiedades evidentes son el intercambio de los semiplanos separados por la recta, la invariancia los puntos de la misma y el hecho de que la doble realización de la inversión sobre un punto p devuelve el mismo punto p .

Definición 1.14. La reflexión $\mathcal{R}_L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con respecto a una recta, L , definida por $\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0$ viene dada por

$$\mathcal{R}_L(z) = z - \frac{\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma}{|\beta|^2} \bar{\beta} \quad (1.1)$$

Además, decimos que z y \tilde{z} son simétricos con respecto a L si $\mathcal{R}_L(z) = \tilde{z}$ (o, equivalentemente $\mathcal{R}_L(\tilde{z}) = z$).

Si buscamos una analogía de la inversión con respecto a una circunferencia K deberíamos buscar que se cumplan las mismas propiedades: intercambiar el interior y el exterior de K , dejando invariante los puntos de la misma y que realizada dos veces sea la identidad. Para ello, siendo q el centro de la circunferencia K , definimos la imagen de un cierto punto z como el punto en su misma dirección radial a una distancia R^2/ρ de q .

Observación 1.15. Fijémonos que el hecho de que la distancia al punto q sea R^2/ρ es esencial para que se cumpla el hecho de que se intercambien el interior y el exterior de la circunferencia K . Como $R^2/\rho < R$ es equivalente a $\rho > R$, la inversión de un cierto z está dentro de K si y

solo si z está fuera de K . Esto no ocurriría si la inversión la definiésemos como el punto que está a una distancia $1/\rho$ o R/ρ de q .

Definición 1.16. La inversión geométrica, $J_K : \mathbb{C} \setminus \{q\} \rightarrow \mathbb{C}$ con respecto a una circunferencia K de radio R y centro $q \in \mathbb{C}$ viene dada por

$$J_K(z) = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{q}} + q. \quad (1.2)$$

Además, decimos que z y \tilde{z} son simétricos respecto a K si $J_K(z) = \tilde{z}$ (o, equivalentemente $J_K(\tilde{z}) = z$).

Observación 1.17. La anterior definición es fácilmente extensible a \mathbb{C}^∞ . Para ello, bastaría definir $J_K(q) = \infty$ y $J_K(\infty) = q$.

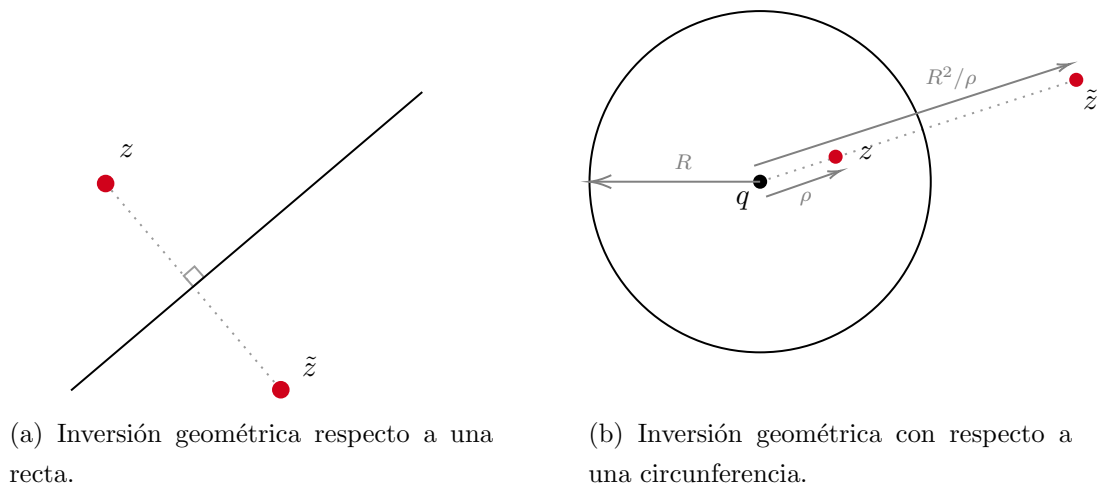


Figura 1.2: Visualización de la inversión geométrica con respecto a una recta y con respecto a una circunferencia. Elaboración propia.

Capítulo 2

Transformaciones de Möbius

Una de las principales ideas subyacentes al teorema de la aplicación de Riemann es la búsqueda de biholomorfismos entre abiertos de \mathbb{C} . Como se comentó en el capítulo anterior, una propiedad importante de este tipo de funciones es que preservan ángulos localmente. Si pensamos en un principio qué tipo de funciones cumplen este tipo de propiedades, es razonable pensar que las traslaciones, las rotaciones, las homotecias y las inversiones del plano complejo pudieran ser unos ejemplos naturales. Veremos que el grupo libre generado por estas funciones con la operación composición admite una descripción sencilla en términos de un cociente entre funciones afines. Veremos algunas de las propiedades que estas tienen y, además, estudiaremos los automorfismos del disco unidad que podemos obtener a partir de transformaciones de Möbius. En el capítulo siguiente, veremos que estos son precisamente todos los automorfismos del disco que se pueden conseguir.

Gran parte de los resultados pueden ser consultados en [1], salvo otras ideas sobre la interpretación alternativa de las transformaciones de Möbius con movimientos rígidos en la esfera de Riemann, basada en [2]. Otros resultados y enfoques como la demostración del principio de simetría a partir de principios geométricos, así como las imágenes presentadas, son de elaboración propia.

2.1. Motivación

Definición 2.1. Una transformación de Möbius es una aplicación, $M : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, de la forma

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (2.1)$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$.

Observación 2.2. En el caso de que $c \neq 0$, el dominio de estas funciones sería $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$, y codominio $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$.

Observación 2.3. La condición $ad - bc \neq 0$ se considera para evitar las funciones constantes. Nótese que la condición es equivalente a que el determinante de la matriz formada por los coeficientes

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sea no nulo. Esto evita que los coeficientes sean proporcionales entre sí y la expresión se pueda simplificar a una constante.

Observación 2.4. El conjunto de las transformaciones de Möbius \mathcal{M} anteriormente definido forma un grupo al considerar la operación composición. Nótese que a cada una de estas transformaciones se le puede asociar una matriz, como vimos anteriormente, y su composición es precisamente el producto de sus matrices asociadas. De este modo, el conocido grupo de matrices invertibles con la operación composición es de utilidad para determinar este hecho.

Observación 2.5. El grupo de las transformaciones de Möbius es el grupo lineal proyectivo $PGL(2, \mathbb{C})$.

Proposición 2.6. Si M es una transformación de Möbius como la expresada en (2.1), entonces su inversa viene dada por

$$M^{-1}(\omega) = \frac{-b + d\omega}{a - c\omega}. \quad (2.2)$$

Observación 2.7. En caso de que $c \neq 0$, su dominio sería $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ y codominio $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$.

Para contextualizar esta definición, intentaremos motivar la idea que hay detrás de la misma.

Como introdujimos anteriormente, nuestro objetivo será trabajar con funciones que preserven ángulos localmente. Unas de las más sencillas que podemos considerar son las traslaciones (T_a), las rotaciones y las homotecias (multiplicaciones por un escalar complejo no nulo R_b). Además, consideraremos la inversión del plano complejo (ι) que sigue siendo una aplicación conforme¹ y nos permitirá adquirir unas propiedades interesantes más adelante con el punto del infinito. Es decir,

$$\begin{array}{lll} T_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} & R_b : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} & \iota : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z + a & z \mapsto bz & z \mapsto 1/z \end{array} \quad (2.3)$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$ y $b \neq 0$.

Por ello, consideramos el conjunto cuyos elementos se obtienen como una composición finita de los tres tipos de funciones anteriores. Denotaremos a este conjunto por $\widetilde{\mathcal{M}}$. Dicho de otro

¹La inversión $\iota : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ es una aplicación conforme en su dominio. Como veremos posteriormente, puede extenderse de manera natural a \mathbb{C}^∞ . Así, tendríamos $\tilde{\iota} : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$, definiendo $\iota(0) = \infty$ e $\iota(\infty) = 0$. Esta aplicación $\tilde{\iota}$ es conforme en todo \mathbb{C}^∞ , según la definición 1.7.

modo, una cierta función f estará en dicho conjunto si puede ponerse como composición de funciones del tipo de las recogidas en (2.3). Conviene destacar que la descripción de $\widetilde{\mathcal{M}}$ es más intuitiva que la de \mathcal{M} , al poder describirse en términos de un conjunto de generadores. El siguiente resultado permite comparar tanto \mathcal{M} y $\widetilde{\mathcal{M}}$, para afirmar que estas dos formulaciones son equivalentes.

Observación 2.8. Este conjunto, $\widetilde{\mathcal{M}}$, tiene estructura de grupo con la composición.

Proposición 2.9. *Los grupos \mathcal{M} y $\widetilde{\mathcal{M}}$ son iguales.*

Demostración. Primeramente, veamos que el grupo de las transformaciones de Möbius \mathcal{M} es un subgrupo de $\widetilde{\mathcal{M}}$. Para ello, tomaremos la expresión más general de las mismas, dada por (2.1), y veamos que la podemos poner como composición de funciones del tipo de (2.3). Sin pérdida de generalidad, asumiremos que $c \neq 0$, pues en otro caso la afirmación es trivial. Basta ver que

$$\frac{az + b}{cz + d} = \left(b - \frac{ad}{c}\right) \left(\frac{1}{cz + d}\right) + \frac{a}{c}.$$

Por otra parte, los generadores de $\widetilde{\mathcal{M}}$ son elementos de \mathcal{M} . Basta tomar adecuadamente los coeficientes complejos de la definición de transformación de Möbius para verlo para cada uno de los generadores, trivialmente. Es decir, como los generadores de $\widetilde{\mathcal{M}}$ son elementos de \mathcal{M} , se tiene, a su vez, que $\widetilde{\mathcal{M}}$ es un subgrupo de \mathcal{M} .

Tras haber demostrado las dos inclusiones, se tiene el resultado deseado. \square

En definitiva, el conjunto de las funciones generadas por las traslaciones, homotecias e inversiones vienen dadas por las funciones del tipo (2.1). Además, estas tienen una estructura de grupo con la composición, como acabamos de ver.

2.2. Extensión a \mathbb{C}^∞ . Proyección estereográfica

Viendo las expresiones generales de las transformaciones de Möbius, es muy razonable extenderlas a \mathbb{C}^∞ , mediante su comportamiento en el límite del infinito. De este modo, podríamos definir $M(-d/c) = \infty$ y $M(\infty) = a/c$, teniendo así una biyección de \mathbb{C}^∞ . Cabe destacar que en el caso de que $c = 0$, se tendría que $M(\infty) = \infty$.

Una manera de visualizar esta correspondencia es utilizando la proyección estereográfica. Esta nos permite de un modo general hacer una correspondencia biyectiva de una esfera unidad sin un punto a un plano. En nuestro caso, será la denominada esfera de Riemann y el plano complejo \mathbb{C} .

Para evitar sobrecargar la notación, nos apoyaremos en la identificación usual de \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} .

Definición 2.10. La proyección estereográfica de la esfera de Riemann de radio unidad y centrada en el origen (menos el polo norte, $N = (0, 0, 1)$) al plano complejo, $P : S \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ viene dada por:

$$P(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

cuya inversa es $P^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow S \setminus \{N\}$

$$P^{-1}(\eta, \mu) = \left(\frac{2\eta}{1+\eta^2+\mu^2}, \frac{2\mu}{1+\eta^2+\mu^2}, \frac{\eta^2+\mu^2-1}{1+\eta^2+\mu^2} \right) \quad (2.4)$$

Una manera de extenderla a S y a \mathbb{C}^∞ es definiendo $P(N) = \infty$ y, respectivamente, $P^{-1}(\infty) = N$.

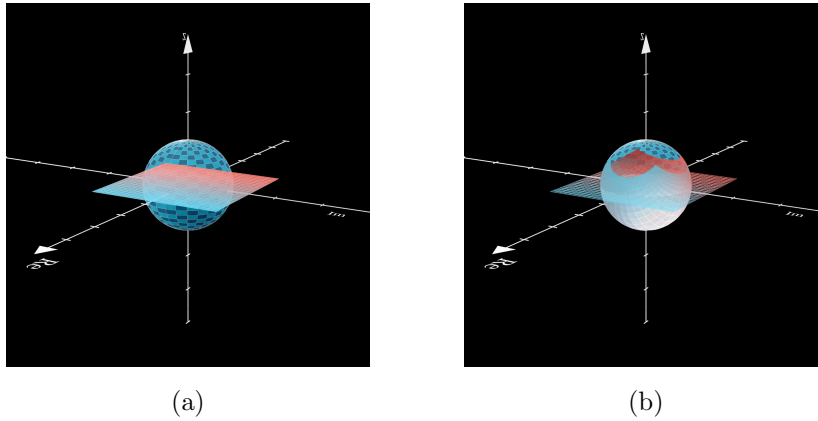


Figura 2.1: Visualización de la proyección estereográfica de una porción del plano complejo en la esfera de Riemann. Elaboración propia.

La siguiente proposición permite relacionar las circunferencias en la esfera con las las propias circunferencias y las rectas del plano, que denotaremos como circunrectas. Este resultado será de gran importancia para visualizar y demostrar una de las propiedades centrales de las transformaciones de Möbius. A partir de ella, podremos demostrar que las circunrectas se preservan bajo este tipo de transformaciones.

Proposición 2.11. *La proyección estereográfica manda circunferencias de la esfera que pasan por el polo norte en rectas en el plano. Por otra parte, manda circunferencias de la esfera que no pasan por el polo norte en circunferencias en el plano.*

Demostración. Dada una circunferencia C en la esfera, podemos pensarla como la intersección de un cierto plano π con la esfera. Tomemos, pues, el plano dado por la ecuación

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

con A, B, C, D números reales y alguno de los coeficientes A, B, C no nulo. Veamos cuál es la imagen de estos puntos mediante la proyección estereográfica.

Para ello, veremos qué puntos del plano se proyectan en la intersección de la esfera con el plano. Para ello, bastará con ver qué puntos proyectados cumplen la ecuación del plano.

$$\begin{aligned} A \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \right) + B \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \right) + C \left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) + D &= 0, \\ 2Ax + 2By + C(x^2 + y^2 - 1) + D(x^2 + y^2 + 1) &= 0, \\ 2Ax + 2By + (C + D)(x^2 + y^2) + D - C &= 0. \end{aligned}$$

En el caso de que el polo norte $(0, 0, 1)$ esté en el plano π se tiene que $C + D = 0$, por lo que se tendría

$$Ax + By + D = 0,$$

que es la ecuación de una recta.

En el caso de que el polo norte no esté en el plano, $C + D \neq 0$, por lo que

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{2Ax}{C + D} + y^2 + \frac{2By}{C + D} + \frac{D - C}{C + D} &= 0, \\ \left(x + \frac{A}{C + D} \right)^2 - \left(\frac{A}{C + D} \right)^2 + \left(y + \frac{B}{C + D} \right)^2 - \left(\frac{B}{C + D} \right)^2 &= \frac{C - D}{C + D}, \\ \left(x + \frac{A}{C + D} \right)^2 + \left(y + \frac{B}{C + D} \right)^2 &= \frac{A^2 + B^2 + C^2 - D^2}{(C + D)^2}. \end{aligned}$$

que es la ecuación de una circunferencia. Nótese que, como el plano está a una distancia al origen menor que la unidad para que interseque con la esfera, el radio está bien definido porque $D^2 < A^2 + B^2 + C^2$. Esto es porque la distancia del plano al origen viene dada por

$$d(O, \pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

□

2.2.1. Interpretación de las funciones complejas en la esfera de Riemann

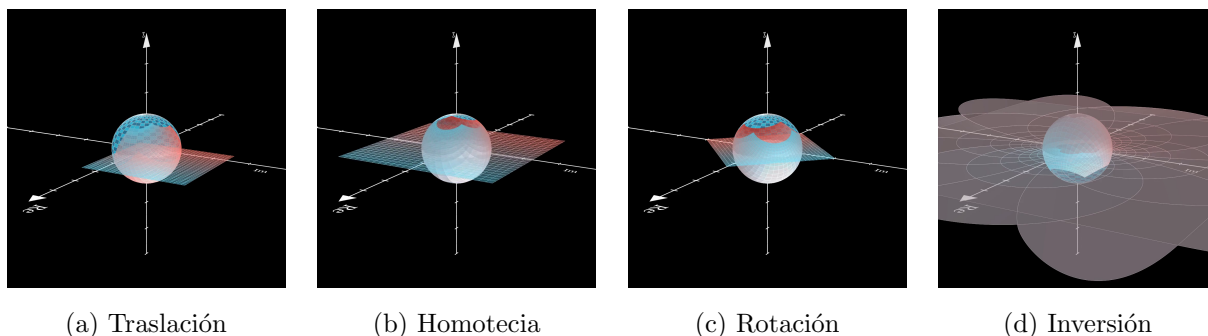
La manera de emplear la proyección estereográfica para visualizar cómo actúan las funciones complejas es la siguiente. Cada punto del plano $z \in \mathbb{C}$ se proyecta en la esfera mediante la expresión (2.4) al punto \hat{z} . De la misma manera, si tenemos un cierto punto $w = f(z)$, podremos tener su correspondiente punto en la esfera, \hat{w} . De este modo, en lugar de pensar los puntos de \mathbb{C} en un plano, podemos pensarlos como puntos de la esfera de Riemann.

Así, una cierta función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ induce otra en la esfera de Riemann $\hat{f} : S \setminus \{N\} \rightarrow S \setminus \{N\}$ (en el caso de que en el infinito se tenga una singularidad evitable o polo, \hat{f} será extensible a

toda la esfera). Esto nos permite pensar las funciones complejas como funciones de la esfera en sí misma. Además, tiene la ventaja de que podemos analizar de un modo más sencillo lo que ocurre con las funciones en las proximidades del infinito, sin más que observar su comportamiento cerca del polo norte de la esfera.

Para algunas funciones en específico, la transformación en la esfera puede ser fácil de visualizar. En concreto, algunos de los generadores de las transformaciones de Möbius (traslaciones, homotecias, rotaciones e inversiones del plano complejo) tienen una sencilla interpretación en la esfera, como podemos observar en la figura 2.2.

En las traslaciones los puntos en la esfera se mueven en una dirección, donde los puntos cerca del infinito apenas se ven afectados. Por su parte, las rotaciones se corresponden con una rotación en la esfera. Las homotecias se pueden interpretar como el desplazamiento de los puntos a través de los “meridianos” de la esfera, acumulándose hacia el polo norte o sur dependiendo de si es una dilatación o contracción, respectivamente. En cuanto a la inversión, esta se corresponde con una rotación en la esfera de 180° con respecto al eje “parte real”, hecho que probaremos a continuación.



(a) Traslación

(b) Homotecia

(c) Rotación

(d) Inversión

Figura 2.2: Visualización del efecto en la esfera de Riemann de los cuatro tipos de transformaciones que generan las transformaciones de Möbius. Se muestra cuál es la proyección de la imagen de una porción del plano complejo para cada una de las transformaciones. Elaboración propia.

Proposición 2.12. *La inversión se corresponde con la rotación de 180° de la esfera de Riemann con respecto al eje “parte real” (eje x).*

Demostración. Queremos ver qué función en la esfera se corresponde con la función compleja $f : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ con $f(z) = 1/z$. Para probarlo, veremos cuál es la proyección en la esfera de un punto del plano $z_0 = \eta_0 + i\mu_0 \equiv (\eta_0, \mu_0)$ y el de su imagen,

$$f(z_0) = w_0 = \frac{1}{z_0} = \frac{1}{\eta_0 + i\mu_0} = \frac{\eta_0 - i\mu_0}{\eta_0^2 + \mu_0^2} \equiv \left(\frac{\eta_0}{\eta_0^2 + \mu_0^2}, \frac{-\mu_0}{\eta_0^2 + \mu_0^2} \right).$$

Usando la expresión (2.4), podemos calcular la proyección de cada uno en la esfera

$$\hat{z}_0 = P^{-1}(z_0) = \left(\frac{2\eta_0}{1 + \eta_0^2 + \mu_0^2}, \frac{2\mu_0}{1 + \eta_0^2 + \mu_0^2}, \frac{\eta_0^2 + \mu_0^2 - 1}{1 + \eta_0^2 + \mu_0^2} \right),$$

$$\hat{w}_0 = P^{-1}(w_0) = \left(\frac{2\eta_0}{1 + \eta_0^2 + \mu_0^2}, \frac{-2\mu_0}{1 + \eta_0^2 + \mu_0^2}, \frac{-\eta_0^2 - \mu_0^2 + 1}{1 + \eta_0^2 + \mu_0^2} \right).$$

Buscamos encontrar una función $\hat{f} : S \rightarrow S$ de tal modo que $\hat{f}(\hat{z}_0) = \hat{w}_0$. Teniendo en cuenta que la expresión que da una rotación de 180° con respecto al eje x es $T : S \rightarrow S$, con $T(x, y, z) = (x, -y, -z)$, ya queda probado el resultado. \square

2.2.2. Una interpretación alternativa

Podemos buscar una interpretación alternativa para el resultado mencionado anteriormente [2]. Puede resultar interesante estudiar qué efecto tendría realizar la proyección estereográfica con la esfera unidad centrada en un punto que no fuese el origen. Es decir, la esfera estaría centrada en un punto (x_0, y_0, z_0) , y para cada $(\eta, \mu) \in \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ lo uniríamos con una recta el punto $(x_0, y_0, z_0 + 1)$. Así, su intersección con la esfera nos daría su proyección.

Para evitar problemas de definición, consideraremos únicamente esferas cuyo polo norte esté por encima del plano complejo, $z_0 + 1 > 0$.

Definición 2.13. La proyección estereográfica de la esfera de Riemann de radio unidad centrada en un punto (x_0, y_0, z_0) , menos el polo norte, $N = (0, 0, z_0 + 1)$, con $z_0 + 1 > 0$, al plano complejo, $P_S : S \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ viene dada por:

$$P_S(x, y, z) = \left(x_0 + \frac{(x - x_0)(1 + z_0)}{1 + z_0 - z}, y_0 + \frac{(y - y_0)(1 + z_0)}{1 + z_0 - z} \right),$$

cuya inversa es $P_S^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow S \setminus \{N\}$

$$P_S^{-1}(\eta, \mu) = (x, y, z) = \begin{cases} x = x_0 + \frac{2(z_0+1)}{(\eta-x_0)^2+(\mu-y_0)^2+(z_0+1)^2}(\eta - x_0) \\ y = y_0 + \frac{2(z_0+1)}{(\eta-x_0)^2+(\mu-y_0)^2+(z_0+1)^2}(\mu - y_0) \\ z = z_0 + 1 - \frac{2(z_0+1)^2}{(\eta-x_0)^2+(\mu-y_0)^2+(z_0+1)^2} \end{cases}$$

Una manera de extenderla a S y a \mathbb{C}^∞ es definiendo $P_S(N) = \infty$ y, respectivamente, $P_S^{-1}(\infty) = N$.

Con esta generalización de la proyección estereográfica, podemos utilizar la esfera como un “proyector móvil”. Proyectamos los puntos del plano en la esfera centrada en el origen utilizando P_S^{-1} (o bien P^{-1} ya que, en este caso, coinciden), realizamos una cierta transformación T sobre

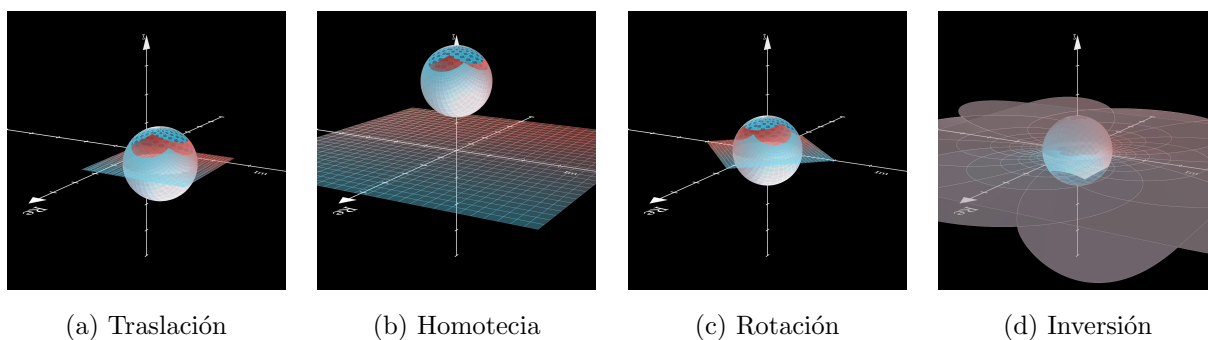


Figura 2.3: Interpretación alternativa de los cuatro tipos de transformaciones que generan las transformaciones de Möbius utilizando la esfera de Riemann. En este caso, se proyectan los puntos a la esfera centrada en el origen utilizando (2.4), se realiza un movimiento rígido en la esfera y se proyectan de nuevo al plano mediante la proyección estereográfica generalizada (2.13). Elaboración propia.

ella, y proyectamos de nuevo los puntos al plano utilizando P_S . Así, dependiendo de cuál sea la transformación aplicada sobre la esfera, tendremos una transformación u otra en el plano. Una característica destacable de las transformaciones de Möbius es que cualquiera de ellas se puede obtener utilizando esta estrategia realizando un movimiento rígido en la esfera.

En este caso, es aún más sencillo intuir los movimientos rígidos correspondientes a cada generador de las transformaciones de Möbius. En el caso de las traslaciones, se corresponderá con una traslación horizontal de la esfera de la misma cantidad. Para las homotecias de razón ρ , se corresponderá con una traslación de la esfera de $\rho - 1$ en la dirección vertical. Para las rotaciones se corresponderá igualmente con una rotación con respecto al eje perpendicular al plano. Por último, para la inversión, tendremos una rotación de 180° con respecto al eje “parte real”.

Teorema 2.14. *Una función compleja, f , es una transformación de Möbius si, y solo si, se puede obtener mediante la composición $f = P_{T(S)} \circ T \circ P_S^{-1}$, siendo P_S la proyección estereográfica, S y T una esfera y un movimiento rígido de manera que S y $T(S)$ tengan el polo norte por encima del plano de proyección. [2]*

De este modo, podemos tener una interpretación de las transformaciones de Möbius con movimientos rígidos en la esfera de Riemann. Esta perspectiva permite visualizar dichas transformaciones no solo como funciones racionales en el plano, sino también como rotaciones y desplazamientos de la esfera, proporcionando así una interpretación alternativa y geométrica de su comportamiento global.

2.3. Conservación de circunrectas en \mathbb{C}^∞

Una de las propiedades más importantes de las transformaciones de Möbius que nos serán de más utilidad es la preservación de las circunferencias en \mathbb{C}^∞ , que, como comentamos anteriormente denotaremos por circunrectas. Teniendo en cuenta que las rectas son circunferencias que pasan por el punto del infinito en \mathbb{C}^∞ , el conjunto de las circunrectas está formado por las circunferencias y las rectas del plano complejo.

Proposición 2.15. *La ecuación de una circunrecta en el plano complejo puede expresarse como*

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0 \quad (2.5)$$

donde $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ y $|\beta|^2 - \alpha\gamma > 0$.

Demostración. Tomaremos las formas binómicas $z = x + yi$, $\beta = c + di$ y expandiremos la expresión anterior para ver que llegamos a la ecuación de una circunferencia o una recta.

$$\begin{aligned} \alpha(x^2 + y^2) + (c + di)(x + yi) + (c - di)(x - yi) + \gamma &= 0, \\ \alpha(x^2 + y^2) + (cx - dy) + (dx + cy)i + (cx - dy) - (dx + cy)i + \gamma &= 0, \\ \alpha(x^2 + y^2) + 2(cx - dy) + \gamma &= 0. \end{aligned}$$

En el caso de que $\alpha = 0$, tendremos la ecuación de una recta

$$dy - cx = \frac{\gamma}{2}.$$

Por otro lado, en el caso de que $\alpha \neq 0$,

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{2cx}{\alpha} + y^2 - \frac{2dy}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} &= 0, \\ \left(x + \frac{c}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{c}{\alpha}\right)^2 + \left(y - \frac{d}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{d}{\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} &= 0, \\ \left(x + \frac{c}{\alpha}\right)^2 + \left(y - \frac{d}{\alpha}\right)^2 &= \frac{c^2 + d^2 - \alpha\gamma}{\alpha^2} \end{aligned}$$

tendremos la ecuación de una circunferencia con centro $-c/\alpha + id/\alpha$ y radio $\frac{\sqrt{c^2 + d^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}$.

Vemos cómo es necesaria la condición de que $|\beta|^2 - \alpha\gamma = c^2 + d^2 - \alpha\gamma > 0$ para que el radio sea un número real positivo. \square

Para ver que las transformaciones de Möbius conservan las circunrectas, bastará ver que lo hacen las traslaciones, multiplicaciones por un número complejo y la inversión. Es evidente que las traslaciones y multiplicaciones por un número complejo (rotaciones y homotecias) son movimientos que preservan tanto circunferencias como rectas. Sin embargo, puede no estar claro que la inversión lo haga. Demostremoslo explícitamente.

Proposición 2.16. *La inversión conserva circunrectas en \mathbb{C}^∞ .*

Demostración. Para ello bastará ver que al aplicar la inversión a la expresión (2.5) se sigue obteniendo una circunrecta. En efecto, aplicando la inversión:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{z\bar{z}} + \frac{\beta}{z} + \frac{\bar{\beta}}{\bar{z}} + \gamma &= 0, \\ \gamma z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \alpha &= 0.\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene una circunrecta en \mathbb{C}^∞ , donde se han intercambiado α por γ y β por $\bar{\beta}$. Cabe destacar que las condiciones de la definición dada en (2.5) se siguen cumpliendo. \square

Demostración alternativa. Discutimos anteriormente que podemos identificar una función del plano complejo $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con una función en la esfera de Riemann, $\hat{f} : S \rightarrow S$. Además, probamos en la proposición 2.11 que una circunrecta en \mathbb{C}^∞ se corresponde con otra en la esfera de Riemann mediante la proyección estereográfica. Por tanto, con ver que dicha función inducida \hat{f} conserva circunferencias en la esfera, se tendrá que f conserva circunrectas en \mathbb{C}^∞ . En el caso de la inversión, se puede ver en la esfera de Riemann como una rotación de 180° con respecto al eje “parte real” que, trivialmente, por ser un movimiento rígido, conserva las circunferencias en la esfera. Por tanto, usando la proposición 2.11, tendremos que se conservan las circunrectas en \mathbb{C}^∞ . \square

Corolario 2.17. *Las transformaciones de Möbius conservan circunrectas en \mathbb{C}^∞*

2.4. Puntos fijos y razón cruzada

Para poder caracterizar las transformaciones de Möbius con mayor facilidad, será importante el estudio de los puntos fijos de las mismas. Si observamos cuál es la expresión que determina sus puntos fijos, bastará con igualar $M(z) = z$, donde M es una transformación de Möbius dada por (2.1), es decir,

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \implies cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

En el caso de que tratemos con la identidad, tendremos que todos los puntos quedan fijos. En cualquier otro caso, tenemos una ecuación de grado menor o igual que dos que sabemos que tendrá, como mucho, dos soluciones, dependiendo de los coeficientes de la transformación. Esto permite probar fácilmente la siguiente propiedad.

Proposición 2.18. *Una transformación de Möbius queda determinada por la imagen de tres puntos.*

Demostración. Sean $\{z_i\}_{i=1}^3 \subset \mathbb{C}$ tres números complejos distintos. Supongamos que M y \widetilde{M} son tales que $M(z_i) = \widetilde{M}(z_i)$, para $i \in \{1, 2, 3\}$. Tomando $S = M^{-1} \circ \widetilde{M}$, se tiene que $S(z_i) = z_i$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Por tanto, S es una transformación de Möbius con más de dos puntos fijos, por lo que será la identidad. Así, $M = \widetilde{M}$. \square

Observación 2.19. Podría parecer razonable que al tener, en principio, cuatro parámetros complejos en la expresión (2.1) se necesitase conocer las imágenes de cuatro puntos. Sin embargo, el hecho de que los parámetros a, b, c, d y ka, kb, kc, kd , siendo $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ den lugar a la misma transformación de Möbius hace que realmente solo sean necesarios tres números complejos para caracterizar la transformación. En efecto, con conocer los cocientes $a/b, b/c, c/d$, esta ya queda determinada.

Una vez conocido este resultado, falta dar una manera de obtener la expresión de la transformación de Möbius que lleve los puntos p, q, r a los puntos $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}$, respectivamente. Para ello, consideremos de una manera general la transformación de Möbius, M_{z_0, z_1, z_∞} , que lleva los puntos z_0, z_1, z_∞ a los puntos $0, 1, \infty$.

Definición 2.20. Dados $z, z_0, z_1, z_\infty \in \mathbb{C}^\infty$, llamamos razón cruzada de z, z_0, z_1, z_∞ a la imagen de z bajo la única transformación de Möbius que lleva z_0, z_1, z_∞ a $0, 1, \infty$, respectivamente. La denotaremos por $M_{z_0, z_1, z_\infty}(z) = [z, z_0, z_1, z_\infty]$.

Es sencillo deducir y comprobar que la expresión de la razón cruzada debe ser:

$$M_{z_0, z_1, z_\infty}(z) = [z, z_0, z_1, z_\infty] = \frac{(z - z_0)(z_1 - z_\infty)}{(z - z_\infty)(z_1 - z_0)}.$$

Observación 2.21. Cabe destacar que en el caso de que z_0, z_1 o z_∞ sean ∞ , la expresión se adaptaría a cada caso. Esto es, si $z_0 = \infty$, $[z, z_0, z_1, z_\infty] = (z_1 - z_\infty)/(z - z_\infty)$, si $z_1 = \infty$, $[z, z_0, z_1, z_\infty] = (z - z_0)/(z - z_\infty)$ y si $z_\infty = \infty$, $[z, z_0, z_1, z_\infty] = (z - z_0)/(z_1 - z_0)$.

De este modo, por la propiedad de grupo estudiada anteriormente, sabemos que la composición $M = M_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}}^{-1} \circ M_{pqr}$ es una transformación de Möbius, que lleva los puntos p, q, r a los puntos $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}$, como queríamos probar. Podemos dar una expresión alternativa de esta transformación utilizando razones cruzadas mediante los siguientes resultados.

Proposición 2.22. Las transformaciones de Möbius preservan las razones cruzadas, es decir, dada cualquiera transformación de Möbius, T , se cumple que

$$[z, z_0, z_1, z_\infty] = [T(z), T(z_0), T(z_1), T(z_\infty)]$$

Demostración. Sea $S(z) = [z, z_0, z_1, z_\infty]$ y $M = S \circ T^{-1}$. Entonces,

$$M(T(z_0)) = 0, \quad M(T(z_1)) = 1, \quad M(T(z_\infty)) = \infty.$$

Por tanto, por definición de razón cruzada, $M(z) = [z, T(z_0), T(z_1), T(z_\infty)]$, de lo que se obtiene que

$$[z, z_0, z_1, z_\infty] = S(z) = M(T(z)) = [T(z), T(z_0), T(z_1), T(z_\infty)]$$

□

Corolario 2.23. *Si z_1, z_2, z_3 y w_1, w_2, w_3 son ternas de puntos de \mathbb{C}^∞ , la única transformación de Möbius M que cumple que $M(z_i) = w_i$ para $i \in \{1, 2, 3\}$ viene dada implícitamente por*

$$[z, z_1, z_2, z_3] = [M(z), w_1, w_2, w_3]$$

Demostración. Por la proposición 2.22, se tiene que

$$[z, z_1, z_2, z_3] = [M(z), M(z_1), M(z_2), M(z_3)] = [M(z), w_1, w_2, w_3],$$

para cualquier punto $z \in \mathbb{C}^\infty$.

□

El siguiente resultado nos permite establecer la existencia de una transformación de Möbius tal que, dadas dos circunrectas, se garantice que la imagen de una sea exactamente la otra. Más adelante, con el principio de orientación, podremos asegurar la existencia de transformaciones de Möbius que envíen una cierta región delimitada por una circunrecta en otra región determinada por otra circunrecta.

Corolario 2.24. *Dadas dos circunrectas Γ_1 y Γ_2 existen transformaciones de Möbius M tales que $M(\Gamma_1) = \Gamma_2$. Además, esta queda unívocamente determinada con la elección de tres puntos de cada circunrecta.*

Demostración. Por el corolario 2.17, la imagen de una circunrecta por una transformación de Möbius es otra circunrecta. Podemos construir esta función sin más que elegir tres puntos de cada circunrecta y aplicar el corolario 2.23.

□

2.5. Principio de simetría

A continuación estudiaremos una propiedad geométrica que nos será de utilidad para poder tener una mayor intuición sobre el comportamiento de las transformaciones de Möbius. Estas preservan la relación de simetría entre puntos con respecto a una circunrecta, en el sentido de que si dos puntos son simétricos con respecto a una circunrecta, entonces sus imágenes lo siguen siendo respecto a la imagen de dicha circunrecta. La razón doble nos será de utilidad para caracterizar la simetría.

Proposición 2.25. *Dos puntos z, \tilde{z} , son simétricos con respecto a una circunferencia K de centro q y radio R , determinada por los puntos z_0, z_1, z_∞ , si y solo si sus razones cruzadas son conjugadas:*

$$[z, z_0, z_1, z_\infty] = \overline{[\tilde{z}, z_0, z_1, z_\infty]}.$$

Demostración. Según la definición 1.16, dos puntos son simétricos con respecto a una circunferencia K si y solo si son imágenes uno de otro respecto a la expresión dada en (1.2), es decir,

$$\tilde{z} = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{q}} + q.$$

Tomaremos tres puntos que determinen la circunferencia de centro q y radio R . Sin pérdida de generalidad, tomaremos $z_0 = q + R$, $z_1 = q + Ri$, $z_\infty = q - R$ como tres puntos de la circunferencia. Calculando cada una de las razones cruzadas tenemos que

$$\begin{aligned} [z, z_0, z_1, z_\infty] &= \frac{(z - q - R)(Ri + R)}{(z - q + R)(Ri - R)} = \frac{(-z + q + R)}{(z - q + R)} Ri, \\ [\tilde{z}, z_0, z_1, z_\infty] &= \frac{\left(\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{q}} - R\right)(Ri + R)}{\left(\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{q}} + R\right)(Ri - R)} = \frac{(\bar{z} - \bar{q} - R)}{(\bar{z} - \bar{q} + R)} Ri. \end{aligned}$$

Realizando la conjugación compleja y ajustando algunos signos en la última expresión, llegamos a que

$$\overline{[\tilde{z}, z_0, z_1, z_\infty]} = \frac{(-z + q + R)}{(z - q + R)} Ri,$$

quedando probado el resultado. \square

Proposición 2.26. *Dada una recta, L , definida por los puntos z_0, z_1, z_∞ , se tiene que dos puntos z y \tilde{z} son simétricos con respecto a L si y solo si*

$$[z, z_0, z_1, z_\infty] = \overline{[\tilde{z}, z_0, z_1, z_\infty]}$$

Demostración. Sea L la recta definida por la ecuación $\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0$. Sean $z_0, z_1 = z_0 - i\bar{\beta}$, $z_\infty = \infty$ tres puntos en la recta.

Sean z_r y \tilde{z}_r dos puntos simétricos con respecto a L . Utilizando la expresión de la inversión con respecto de una recta (1.2) podemos expresar estos dos puntos en función de un punto de la recta, esto es, el punto medio entre ambos. Sin pérdida de generalidad, tomaremos z_0 como el punto medio entre z_r y \tilde{z}_r . De este modo, tenemos que

$$\begin{aligned} z_r &= z_0 + \frac{\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma}{2|\beta|^2} \bar{\beta} = z_0 + \frac{R\bar{\beta}}{2} \\ \tilde{z}_r &= z_0 - \frac{\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma}{2|\beta|^2} \bar{\beta} = z_0 - \frac{R\bar{\beta}}{2} \end{aligned}$$

donde $R = (\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma) / |\beta|^2 \in \mathbb{R}$.

Tomando ahora las razones cruzadas (teniendo en cuenta que $z_\infty = \infty$)

$$\begin{aligned} [z_r, z_0, z_1, \infty] &= \frac{z_r - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{R\bar{\beta}}{-2i\bar{\beta}} = -\frac{R}{2i}, \\ [\tilde{z}_r, z_0, z_1, \infty] &= \frac{\tilde{z}_r - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{-R\bar{\beta}}{-2i\bar{\beta}} = \frac{R}{2i}. \end{aligned}$$

Como $R \in \mathbb{R}$, queda probado el resultado. \square

Corolario 2.27 (Principio de simetría). *Si dos puntos son simétricos con respecto a una circunrecta, entonces sus imágenes bajo una transformación de Möbius también son simétricas con respecto a la imagen de la misma.*

Demostración. Teniendo en cuenta que las transformaciones de Möbius preservan la razón cruzada

$$[z, z_0, z_1, z_\infty] = [T(z), T(z_0), T(z_1), T(z_\infty)],$$

si dos puntos z, \tilde{z} son simétricos con respecto a una circunrecta Γ definida por z_0, z_1, z_∞ , sabemos que $[z, z_0, z_1, z_\infty] = \overline{[\tilde{z}, z_0, z_1, z_\infty]}$, entonces

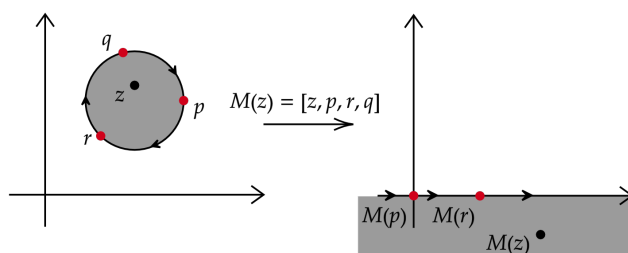
$$[T(z), T(z_0), T(z_1), T(z_\infty)] = \overline{[T(\tilde{z}), T(z_0), T(z_1), T(z_\infty)]}.$$

Por tanto $T(z)$ y $T(\tilde{z})$ son simétricos con respecto a la imagen de Γ , que está definida por $T(z_0), T(z_1), T(z_\infty)$. \square

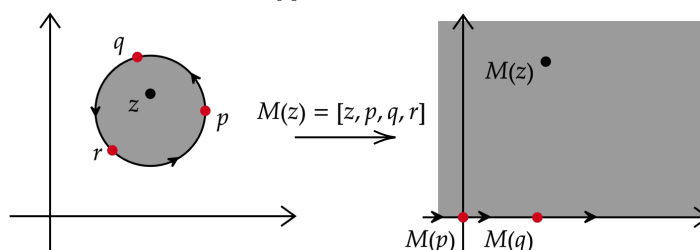
2.6. Principio de orientación

Una de las ventajas que nos proporcionará el estudio de la razón cruzada es el hecho de poder distinguir el interior y el exterior de una circunferencia. Atendiendo a su definición, la razón cruzada es la imagen de un cierto z bajo la única transformación que manda la circunrecta definida por p, q, r a la recta real, ya que estos tienen imagen en $0, 1, \infty$, respectivamente. Así, todos los puntos de la circunrecta se enviarán a la recta real, mientras que las dos regiones separadas por esta se enviarán a los semiplanos $\{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) > 0\}$ y $\{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) < 0\}$. El orden en el que elijamos estos puntos será el que determine qué región se envíe a un semiplano u otro.

Definición 2.28. Dada una circunferencia Γ en \mathbb{C}^∞ , definimos una orientación en Γ como una terna ordenada (p, q, r) , donde $p, q, r \in \Gamma$.



(a) Con una orientación negativa de la circunferencia definida por p, q, r , el punto z se encuentra “a la derecha” de la misma, por lo que $M_{pqr}(z) \in \{w \in \mathbb{C}^\infty : \text{Im}(w) < 0\}$.



(b) Con una orientación positiva de la circunferencia definida por p, q, r , el punto z se encuentra “a la izquierda” de la misma, por lo que $M_{pqr}(z) \in \{w \in \mathbb{C}^\infty : \text{Im}(w) > 0\}$.

Figura 2.4: Visualización del efecto de la orientación. Elaboración propia.

Si (p, q, r) es una orientación en Γ , definimos el lado izquierdo de Γ como $\{z \in \mathbb{C}^\infty : \text{Im}([z, p, q, r]) < 0\}$. Análogamente, definimos el lado derecho de Γ como $\{z \in \mathbb{C}^\infty : \text{Im}([z, p, q, r]) > 0\}$

Proposición 2.29 (Principio de orientación). Sean Γ_1, Γ_2 dos circunrectas en \mathbb{C}^∞ y M una transformación de Möbius tal que $M(\Gamma_1) = \Gamma_2$. Sea (p, q, r) una orientación de Γ_1 . Entonces M aplica el lado derecho (izquierdo) de Γ_1 con respecto a la orientación (p, q, r) sobre el lado derecho (izquierdo) de Γ_2 con respecto a la orientación $(M(p), M(q), M(r))$.

Demostración. Sean $\{z \in \mathbb{C}^\infty : \text{Im}([z, p, q, r]) > 0\}$ y $\{z \in \mathbb{C}^\infty : \text{Im}([z, M(p), M(q), M(r)]) > 0\}$ los lados izquierdos de Γ_1 y Γ_2 , respectivamente.

Sea $\alpha \in \{z \in \mathbb{C}^\infty : \text{Im}([z, p, q, r]) > 0\}$ un punto perteneciente al lado izquierdo de Γ_1 . Dado que las transformaciones de Möbius preservan la razón cruzada,

$$[\alpha, p, q, r] = [M(\alpha), M(p), M(q), M(r)],$$

podremos asegurar que $M(\alpha)$ se encuentra en el lado izquierdo de Γ_2 , $M(\alpha) \in \{z \in \mathbb{C}^\infty : \text{Im}([M(z), M(p), M(q), M(r)]) > 0\}$. Con un razonamiento análogo, se tendría el respectivo resultado para el lado derecho. \square

Observación 2.30. Dadas dos circunferencias Γ_1, Γ_2 , es posible encontrar una transformación de Möbius tal que el interior de Γ_1 tenga como imagen el interior o el exterior de Γ_2 .

2.7. Automorfismos

Recordemos que el objetivo del estudio de las transformaciones de Möbius era el de la obtención de biholomorfismos entre abiertos de \mathbb{C} . Para ello, nos será de utilidad los automorfismos del disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, es decir, aquellos biholomorfismos de \mathbb{D} en sí mismo. En esta sección nos centraremos en caracterizar las transformaciones de Möbius que cumplan ese requisito. Más adelante, en el capítulo posterior, veremos que estas son, precisamente, todos los automorfismos del disco unidad.

Como vimos en la proposición 2.18, una transformación de Möbius M queda determinada por la imagen de tres puntos. Esto permite caracterizar M completamente mediante la elección de tres números complejos, lo que se corresponde con escoger seis parámetros reales (la parte real e imaginaria de cada una de las imágenes de los tres números complejos). Decimos que una transformación de Möbius tiene seis grados de libertad.

Al imponer ciertas condiciones, el número de grados de libertad se reducirán. En particular, al forzar que la imagen de \mathbb{D} sea él mismo, tendremos únicamente tres grados de libertad.

Proposición 2.31. *Las transformaciones de Möbius que son automorfismos del disco unidad tienen tres grados de libertad.*

Demostración. Por el corolario 2.17, sabemos que la imagen de la frontera del disco por una transformación de Möbius será una circunrecta. Por tanto, es necesario que $M(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ para que M sea un automorfismo de \mathbb{D} . Dados tres puntos fijados de la frontera del disco unidad $p, q, r \in \partial\mathbb{D}$, habrá una única transformación de Möbius M tal que sus imágenes sean $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r} \in \partial\mathbb{D}$, respectivamente. Asegurándonos que (p, q, r) y $(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r})$ definan la misma orientación en $\partial\mathbb{D}$, por el principio de orientación 2.29, sabemos que será un automorfismo de \mathbb{D} que, según la proposición 2.22, vendrá dado por la igualdad

$$[M(z), \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}] = [z, p, q, r].$$

Por tanto, con especificar $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}$, tendremos establecido el automorfismo. Sin embargo, para determinar cada uno de estos puntos solo necesitaremos un parámetro, como por ejemplo su argumento, ya que su módulo está fijado a la unidad. Es por ello que decimos que las transformaciones de Möbius que son automorfismos de \mathbb{D} tienen tres grados de libertad. \square

Proposición 2.32. *Las transformaciones de Möbius que son automorfismos de \mathbb{D} toman la expresión*

$$M_a^\phi(z) = e^{i\phi} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad (2.6)$$

donde $a \in \mathbb{D}$ y $\phi \in [0, 2\pi)$.

Demostración. Por la proposición 2.31, necesitaremos establecer tres parámetros independientes para determinar una transformación de Möbius M que sea un automorfismo de \mathbb{D} . Para ello, especificaremos el punto cuya imagen sea el origen (usando dos grados de libertad) y forzando que la imagen de un punto de la frontera del disco, por ejemplo $1 \in \partial\mathbb{D}$, sea otro punto de la frontera $p \in \partial\mathbb{D}$ (usando el otro grado de libertad, ya que solo haría falta explicitar el argumento).

Por el principio de orientación 2.29, sabemos que la imagen del interior de $\partial\mathbb{D}$ será o bien el interior o el exterior de $\partial\mathbb{D}$. Con asegurar el hecho de que un punto interior tenga imagen en un punto interior, ya estaría asegurado que M es un automorfismo de \mathbb{D} . Por ello, tomaremos un punto $a \in \mathbb{D}$ tal que $M(a) = 0$.

Sea $1/\bar{a}$ el punto simétrico de a con respecto a $\partial\mathbb{D}$. Según el principio de simetría 2.27 $M(a)$ y $M(1/\bar{a})$ serán simétricos con respecto a $M(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$. Así, si $M(a) = 0$, $M(1/\bar{a}) = \infty$, M tendrá la forma

$$M(z) = k \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Utilizando el otro grado de libertad, podremos determinar k . Sea $p = M(1) \in \partial\mathbb{D}$, tendremos que

$$1 = |p| = |k| \frac{|1 - a|}{|1 - \bar{a}|} = |k|.$$

Por tanto, $k = e^{i\phi}$, es decir, la elección de p es equivalente a la de ϕ . Así, llegamos a que la expresión general de una transformación de Möbius que es un automorfismo de \mathbb{D} viene dado por

$$M_a^\phi(z) = e^{i\phi} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

□

Observación 2.33. Los automorfismos dados por (2.6) que vengan dados por $\phi = 0$ los denotaremos por

$$M_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}. \quad (2.7)$$

Es fácil comprobar que $(M_a)^{-1}(z) = M_{-a}(z)$.

Capítulo 3

Lema de Schwarz

En este capítulo desarrollaremos el lema de Schwarz, que impone restricciones sobre los automorfismos del disco unidad \mathbb{D} . Basándonos en la exposición de [1], y a partir de algunos resultados adicionales, podremos demostrar que los biholomorfismos del disco en sí mismo vienen dados únicamente por las transformaciones de Möbius que estudiamos en el capítulo anterior. Con esto, cerraremos el estudio de los automorfismos del disco para pasar, en el capítulo posterior, a estudiar propiedades generales sobre el espacio de las funciones holomorfas.

3.1. Enunciado y demostración

Antes de pasar a enunciar y demostrar el lema de Schwarz, será de utilidad recordar otro resultado importante, que es el teorema del módulo máximo, introducido en el capítulo 1. Este asegura esencialmente que una función holomorfa no puede alcanzar valores máximos en el interior de su dominio, salvo que esta sea constante. Esta propiedad permitirá controlar el comportamiento de las funciones holomorfas en el disco unidad y así deducir algunas desigualdades propias del lema de Schwarz.

Teorema 3.1 (Teorema del módulo máximo). *Sea U un abierto conexo del plano complejo y f una función holomorfa en U . Si existe un punto $z_0 \in U$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, para todo punto $z \in U$, entonces la función f es constante en U .*

Corolario 3.2. *Sea U un abierto, no vacío, conexo y acotado de \mathbb{C} . Sea \bar{U} su clausura y $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en U . Entonces, $|f(z)|$ alcanza un máximo en un punto de la frontera de U , denotada por ∂U .*

Demostración. Como U es un conjunto acotado no vacío, \bar{U} también lo será, de lo que deducimos

que \bar{U} sea compacto. Por ser f una función holomorfa, en particular es continua, por lo que alcanzará un máximo en un punto $z_0 \in \bar{U}$. En el caso de que $z_0 \in \partial U$, ya se tendría el resultado.

En caso de que $z_0 \in U$, por el teorema del módulo máximo (teorema 3.1) se tiene que f es constante en U . Por continuidad, también tomaría el mismo valor en ∂U . Así, se tendría un máximo en ∂U . \square

Teorema 3.3 (Lema de Schwarz). *Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ una función holomorfa en \mathbb{D} tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Entonces $|f'(0)| \leq 1$ y $|f(z)| \leq |z|$, para todo $z \in \mathbb{D}$.*

Además, si $|f'(0)| = 1$ o $|f(z)| = |z|$ para algún $z \neq 0$, existe una constante $c \in \mathbb{C}$, con $|c| = 1$ tal que $f(z) = cz$ para todo z en \mathbb{D} .

Demostración. Sea f una función holomorfa en \mathbb{D} y sea $z_0 \in \mathbb{D}$. Queremos ver que $|f(z_0)| \leq |z_0|$ y $|f'(0)| \leq 1$.

Para ello, estudiaremos cómo se comporta la función

$$F(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Observamos que, además de estar bien definida, F resulta ser holomorfa. Esto se debe a que sabemos que lo es, en principio, en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. En $z = 0$ resulta ser continua porque $f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{f(z)}{z}$, ya que $f(0) = 0$ y f es una función holomorfa en \mathbb{D} , por hipótesis. De este modo, como tenemos una función holomorfa en \mathbb{D} salvo un punto donde es continua, la singularidad es de tipo evitable y admite una extensión holomorfa.

Sea $0 < r < 1$ y consideremos el disco cerrado de radio r , $\mathbb{D}_r = \bar{D}(0; r)$. Denotaremos la restricción de F a este disco por \tilde{F} . Aplicando el corolario 3.2, $|\tilde{F}|$ tomará valores máximos en $\partial \mathbb{D}_r$. Además, como $|z| = r$ en $\partial \mathbb{D}_r$, se tiene que $|F(z)| = |f(z)|/r$, para todo $z \in \partial \mathbb{D}_r$. Por último, usando la hipótesis de que $|f(z)| \leq 1$, para todo $z \in \mathbb{D}$, se tiene la siguiente cadena de desigualdades

$$|F(z_0)| \leq \max_{z \in \partial \mathbb{D}_r} |F(z)| = \frac{\max_{z \in \partial \mathbb{D}_r} |f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r}.$$

Al tomar límites cuando r tiende hacia 1 se tiene que $|F(z_0)| \leq 1$. De lo anterior, se obtiene trivialmente que $|F(0)| = |f'(0)| \leq 1$ y $|f(z_0)| \leq |z_0|$, como queríamos probar.

En el caso de que $|f'(0)| = 1$ o $|f(z)| = |z|$ para algún $z \neq 0$, significaría que $|F(z)| = 1$ para algún $z \in \mathbb{D}$, es decir, $|F|$ alcanzaría su valor máximo en un punto interior de \mathbb{D} . Aplicando el teorema del módulo máximo (teorema 3.1) se tiene que la función $|F|$ es constante e igual a la unidad en \mathbb{D} , obteniendo que $|f'(0)| = 1$ y $|f(z)| = |z|$. La única manera de que esto ocurra es que f se corresponda con un giro $f(z) = cz$, con $|c| = 1$. \square

Observación 3.4. Una interpretación inmediata del lema de Schwarz es que toda función analítica del disco en sí mismo o bien es una rotación o bien reduce las distancias de los puntos al origen.

3.2. Caracterización de los automorfismos del disco unidad

A continuación se presenta un resultado que nos será de utilidad posteriormente. Se trata de una generalización del lema de Schwarz para la cota de la derivada en el caso de que la función no lleve necesariamente el cero en sí mismo.

Proposición 3.5. *Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ una función holomorfa en \mathbb{D} tal que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$ tales que $f(\alpha) = \beta$. Entonces*

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1 - |\beta|^2}{1 - |\alpha|^2}.$$

La igualdad se da en el caso de que exista un $c \in \mathbb{C}$ con $|c| = 1$ tal que

$$f(z) = M_{-\beta}(c M_{\alpha}(z)),$$

donde M_{α} y $M_{-\beta}$ son transformaciones de Möbius de la forma (2.7)

Demostración. Para demostrarlo, trataremos de utilizar el lema de Schwarz ya conocido. Para ello, aplicaremos las transformaciones de Möbius oportunas antes y después de f , para así estar en el caso de llevar al cero en sí mismo. Aplicando el lema de Schwarz y la regla de la cadena, llegaremos al resultado deseado.

Sea $g = M_{\beta} \circ f \circ M_{-\alpha}$. Usando que $f(\alpha) = \beta$ y que, de modo general las funciones M_a dadas por (2.7) cumplen que $M_{-a}(0) = a$, $M'_a(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$, tenemos que, aplicando la regla de la cadena,

$$g'(0) = M'_{\beta}(\beta) \cdot f'(\alpha) \cdot M'_{-\alpha}(0) = \frac{1}{1-|\beta|^2} \cdot f'(\alpha) \cdot (1-|\alpha|^2). \quad (3.1)$$

Observemos que g es una función holomorfa que cumple $g(0) = 0$ y $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, es decir, $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Por tanto, estamos dentro de las hipótesis del lema de Schwarz (teorema 3.3).

De (3.1), deducimos que

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1 - |\beta|^2}{1 - |\alpha|^2}. \quad (3.2)$$

De nuevo, por el lema de Schwarz se tendrá que $g'(0) = 1$ en el caso de que $g(z) = cz$ para algún $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| = 1$. Por tanto, la igualdad en (3.2) se dará cuando $g(z) = cz$, es decir, cuando $(M_{\beta} \circ f \circ M_{-\alpha})(z) = cz$ o, equivalentemente, $f(z) = M_{-\beta}(c M_{\alpha}(z))$, como queríamos probar. \square

Con estos resultados, podremos caracterizar completamente los automorfismos del disco unidad. En el capítulo anterior, ya vimos que había una subfamilia de las transformaciones de Möbius que actúan como automorfismos de \mathbb{D} . La siguiente proposición demuestra que, en efecto, todas las funciones del disco en sí mismo son biholomorfismos dados precisamente por esas transformaciones de Möbius.

Proposición 3.6. *Si f es un automorfismo del disco unidad, \mathbb{D} , entonces se puede describir como una transformación de Möbius de la forma (2.6):*

$$M_a^\phi(z) = e^{i\phi} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

donde $a \in \mathbb{D}$ y $\phi \in [0, 2\pi)$.

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{D}$ tal que $f(\alpha) = 0$ y sea $g = f^{-1}$. Por la regla de la cadena se llega a que

$$(g \circ f)'(0) = g'(0)f'(\alpha) = 1.$$

Aplicando la proposición 3.5 a f y a g , se tiene que

$$f'(\alpha) \leq \frac{1}{1 - |\alpha|^2}, \quad g'(0) \leq 1 - |\alpha|^2.$$

Observando que su producto debe ser la unidad, se da la igualdad en ambos casos. Por tanto, se tiene que $f(z) = cM_\alpha(z)$ para algún $c \in \mathbb{C}$ con $|c| = 1$. Es decir, se puede reescribir como

$$f(z) = e^{i\phi} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}.$$

como queríamos probar. □

Capítulo 4

Espacio de funciones holomorfas

Cerraremos el marco teórico necesario para la demostración del teorema de la aplicación de Riemann con el estudio del espacio de las funciones holomorfas definidas en un abierto, al que dotaremos de una estructura métrica y estudiaremos varias de sus propiedades.

Primeramente, nos centraremos en el espacio más general de las funciones continuas para, posteriormente, utilizar lo desarrollado para las funciones holomorfas. Construiremos una distancia y veremos cómo la convergencia de una sucesión funcional en este espacio coincide con la uniforme en los subconjuntos compactos del dominio. Más adelante, nos centraremos en el estudio de las familias normales y algunos resultados importantes, como el teorema de Montel, que nos serán de utilidad para el último capítulo.

Gran parte de los resultados están extraídos de [3], aunque se añaden algunas motivaciones propias, como pueda ser en la construcción de la métrica.

4.1. Construcción de una métrica

A la hora de tratar con espacios de funciones definidas sobre un abierto U , como pueden ser el de las funciones continuas $\mathcal{C}(U)$ u holomorfas $\mathcal{H}(U)$, es muy importante dotar dicho espacio con una métrica adecuada para lo que queremos estudiar. En particular, el propio teorema de la aplicación de Riemann requerirá el estudio de sucesiones funcionales y su comportamiento al límite. Aunque en un primer momento nos centraremos en el estudio de $\mathcal{C}(U)$, construiremos esta métrica para que nos sea útil en el estudio de $\mathcal{H}(U)$. Así, resulta interesante que algunas propiedades se conserven, como puede ser la holomorfía.

Una norma ampliamente usada que podría resultar natural sería la norma infinito. Sin embargo, esta está únicamente bien definida de modo general para conjuntos compactos es decir,

dada una función $f \in \mathcal{C}(K)$, siendo K un conjunto compacto, podríamos definir su norma como

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in K\} = \text{máx}\{|f(x)| : x \in K\}.$$

Además, a partir de esta norma, se puede definir la distancia infinito

$$d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in K\} = \text{máx}\{|f(x) - g(x)| : x \in K\}.$$

Esta es la que caracteriza la convergencia uniforme de sucesiones funcionales. El hecho de que el límite de una sucesión funcional $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converja uniformemente a una función f es equivalente a que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Es conocido que este tipo de convergencia preserva ciertas propiedades como puede ser la continuidad. Sin embargo, para garantizar la holomorfía, es necesario que el dominio sea un compacto.

La condición de compacidad asegura de un modo general la correcta definición de esta norma. Podríamos intentar generalizarla en el contexto de funciones continuas en un abierto, pero nos encontraríamos el problema de que el supremo podría ser infinito¹. De hecho, aunque estuviesen definidas sobre cerrados, podríamos tener el mismo problema en el caso de que el conjunto en cuestión no fuese acotado². El objetivo será definir una métrica similar a la inducida por la norma infinito, pero que conserve la holomorfía en su comportamiento al límite en caso de estar trabajando en un abierto U . Para ello, la idea será construir una sucesión exhaustiva de compactos que recubra todo U .

Definición 4.1. Dado un abierto $U \subset \mathbb{C}$, una sucesión exhaustiva de compactos $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es aquella que cumple

$$\begin{aligned} K_n &\subset \text{Int}(K_{n+1}) \subset K_{n+1}, \\ K_n &\subset U, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ donde cada } K_n \text{ es compacto,} \\ &\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = U. \end{aligned}$$

Proposición 4.2. Dado un abierto $U \subset \mathbb{C}$, existe una sucesión exhaustiva de compactos $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Demostración. Podemos construir la sucesión exhaustiva de compactos de la siguiente manera. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$K_n = \left\{ x \in U : d(x, \partial U) \geq \frac{1}{n}, \|x\| \leq n \right\}.$$

¹Por ejemplo, sean $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{D} \setminus \{0\})$ tales que $f(z) = 0$ y $g(z) = 1/z$. Es claro que $d_\infty(f, g) = \sup\{|f(z) - g(z)| : z \in \mathbb{C}\} = \infty$.

²Por ejemplo, sean las funciones $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$ tales que $f(z) = 0$ y $g(z) = z$. Es claro que $d_\infty(f, g) = \sup\{|f(z) - g(z)| : z \in \mathbb{C}\} = \infty$.

Si construimos la sucesión $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, claramente cumple las condiciones de ser una sucesión exhaustiva de compactos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que K_n es compacto y está contenido en $\text{Int}(K_{n+1})$. Además, todo punto $x \in U$ está dentro de un compacto K_n , ya que está a una distancia positiva de $\partial(U)$. \square

Proposición 4.3. *Sea d una distancia. Se tiene que $D = d/(1 + d)$ también es una distancia.*

Demostración. Probaremos que las condiciones que definen a una distancia son cumplidas por D .

La no negatividad, la simetría y el hecho de que $D(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$ se heredan trivialmente de las mismas propiedades de d . Para probar la desigualdad triangular, tomemos $x, y, z \in \mathbb{C}$ y la función $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = t/(1 + t)$. Esta función es estrictamente creciente ya que $f'(t) = 1/(1 + t)^2 > 0$. Usaremos esta propiedad y la desigualdad triangular en d para demostrarlo.

$$\begin{aligned} D(x, z) &= f(d(x, z)) \leq f(d(x, y) + d(y, z)) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \\ &\leq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} = D(x, y) + D(y, z). \end{aligned}$$

\square

Proposición 4.4. *Las distancias d y $D = d/(1 + d)$ inducen la misma topología.*

Demostración. Sean τ_d y τ_D las topologías inducidas por las distancias d y D , respectivamente. Estas se pueden describir por las bolas abiertas de centro $x \in \mathbb{C}$ y radio $r \in \mathbb{R}^+$

$$B_d(x, r) = \{y \in \mathbb{C} : d(x, y) < r\} \text{ y } B_D(x, r) = \{y \in \mathbb{C} : D(x, y) < r\},$$

respectivamente.

Para probar el resultado bastará ver que cada bola abierta en τ_d contiene otra bola abierta en τ_D , y viceversa.

Sea $x \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ y la bola abierta $B_d(x, r)$. Tomando $s = r/(2+r)$, tenemos que $B_D(x, s) \subset B_d(x, r)$. En efecto,

$$y \in B_D(x, s) \iff D(x, y) < s \iff \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} < \frac{r}{2 + r} \iff d(x, y) < \frac{r}{2} \implies y \in B_d(x, r).$$

Análogamente, sea la bola $B_D(x, r)$. En el caso de que $r \geq 1$, se tiene que $B_D(x, r) = \mathbb{C}$ y el resultado es trivial. En el caso de que $r < 1$ tomando $s = r$ se tiene que $B_d(x, r) \subset B_D(x, r)$. En efecto

$$y \in B_d(x, r) \iff d(x, y) < r \implies \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} < r \iff D(x, y) < r \iff y \in B_D(x, r).$$

□

A partir de una sucesión exhaustiva de compactos $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, trataremos de que el comportamiento de d_∞ en cada uno de estos compactos se vea representado en la métrica que queremos construir. En cierto modo, capturaremos la convergencia uniforme en cada uno de estos compactos. Para ello, será de utilidad denotar por

$$d_{K_n}(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in K_n\}$$

a la restricción de d_∞ a cada uno de los K_n de $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. La idea principal será sumar cada una de las contribuciones de d_∞ en cada uno de los compactos, para poder tener información sobre todos los puntos de U .

Sin embargo, como se trata de una suma infinita de términos, esta puede dar un resultado infinito. Es por ello que nos será de utilidad construir una nueva distancia $D_{K_n} = d_{K_n}/(1 + d_{K_n})$, que está acotada por la unidad. Utilizando un factor adicional, podemos definir una métrica en el espacio de funciones holomorfas.

Definición 4.5. Sea $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión exhaustiva de compactos. Para cada $f, g \in \mathcal{C}(U)$ se define la distancia

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_{K_n}(f, g)}{1 + d_{K_n}(f, g)}.$$

Observación 4.6. Esta métrica también es válida para funciones holomorfas $f, g \in \mathcal{H}(U)$.

Observación 4.7. La métrica definida depende de la sucesión $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ escogida pero inducen la misma topología.

Aunque la métrica definida depende claramente de la sucesión $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ escogida, siempre se induce la misma topología, independientemente de esta elección. Esto refuerza la utilidad de la métrica construida, ya que la estructura topológica del espacio no cambia.

Esto sugiere que los entornos definidos a partir de ρ podrían ser descritos en términos más intrínsecos, independientes de una sucesión exhaustiva de compactos. Es posible dar una caracterización de los abiertos básicos de la topología en utilizando abiertos definidos mediante la distancia infinito en un abierto K arbitrario, d_K .

Proposición 4.8. Sea \mathcal{B} una base de la topología inducida por la métrica ρ dada por los abiertos de la forma

$$B_\rho(f, \varepsilon) = \{g \in \mathcal{C}(U) : \rho(f, g) < \varepsilon\},$$

donde $f \in \mathcal{C}(U)$ y ε un número real positivo. Esta base se puede describir en términos de los abiertos de la forma

$$V(f, K, \delta) = \{g \in \mathcal{C}(U) : d_K(f, g) < \delta\},$$

donde $K \subset U$ es un conjunto compacto y δ es un número real positivo.

Demostración. Buscaremos una manera de describir el hecho de que $\rho(f, g) < \varepsilon$, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_{K_n}(f, g)}{1 + d_{K_n}(f, g)} < \varepsilon.$$

Usando la convergencia de la propia serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n$, sabemos que existe un cierto $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon/2.$$

Sabiendo que $d_{K_n}/(1 + d_{K_n})$ está acotada por la unidad para todo $n \in \mathbb{N}$, se deduce que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_{K_n}(f, g)}{1 + d_{K_n}(f, g)} < \varepsilon/2.$$

Para poder acotar los términos restantes, tendremos que controlar el valor de $d_{K_n}(f, g)$ para cada $n \in \{1, \dots, N\}$. Al tratarse de una cantidad finita de términos, podemos encontrar un cierto $\delta > 0$ tal que si $d_{K_n}(f, g) < \delta$ para cada $n \in \{1, \dots, N\}$, se tiene que

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_{K_n}(f, g)}{1 + d_{K_n}(f, g)} < \varepsilon/2.$$

Por tanto, la condición de que $d_{K_n}(f, g) < \delta$ para cada $n \in \{1, \dots, N\}$ implica que $\rho(f, g) < \varepsilon$.

Para que se cumpla esta serie de condiciones, se debe cumplir que

$$g \in \bigcap_{n=1}^N \left\{ h \in \mathcal{C}(U) : \sup_{x \in K_n} |f(x) - h(x)| < \delta \right\} = \left\{ h \in \mathcal{C}(U) : \sup_{x \in K_N} |f(x) - h(x)| < \delta \right\},$$

es decir, $g \in V(f, K_N, \delta)$, donde se ha usado el hecho de que $K_n \subset K_{n+1}$ para todo n . \square

Observación 4.9. La topología inducida por los abiertos $V(f, K, \delta)$ es la de la convergencia uniforme en el compacto K .

Observación 4.10. El hecho de poder describir los abiertos básicos de las dos maneras expuestas en la proposición 4.8, es equivalente a que dado un abierto de la forma $B_\rho(f, \varepsilon)$, exista otro abierto $V(f, K, \delta)$ de manera que esté contenido en $B_\rho(f, \varepsilon)$, y viceversa.

El siguiente resultado nos permitirá caracterizar la convergencia en el espacio $(\mathcal{C}(U), \rho)$ en términos más concretos y manejables. Como vimos con anterioridad, esta métrica está especialmente diseñada para capturar la convergencia uniforme en cada uno de los compactos de la sucesión exhaustiva utilizada para construir la métrica ρ .

Esta proposición formaliza esta idea, haciendo ver que la convergencia en $(\mathcal{C}(U), \rho)$ es equivalente a la convergencia uniforme en cada compacto de U . Esto nos permitirá trabajar indistintamente con la métrica o con la convergencia uniforme local.

Proposición 4.11. *Sea $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{C}(U)$ y f un elemento de $\mathcal{C}(U)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge a f en el espacio métrico $(\mathcal{C}(U), \rho)$
2. $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en los compactos de U .

Demostración. Sea $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{C}(U)$ y sea $f \in \mathcal{C}(U)$. Por la propia noción topológica de convergencia, $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ convergerá a f en $\mathcal{C}(U)$ con una cierta topología si para cada entorno abierto W de f existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_j \in W$ para todo $j > N$.

Sea $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ convergente a f en $(\mathcal{C}(U), \rho)$. Sea K un compacto y sea $V(f, K, \delta)$ un entorno abierto de f arbitrarios. Por la observación 4.10, existirá un abierto $B_\rho(f, \varepsilon)$ de forma que $B_\rho(f, \varepsilon) \subset V(f, K, \delta)$. Por tanto, se tiene que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_j \in B_\rho(f, \varepsilon) \subset V(f, K, \delta)$ para todo $j > N$, teniendo así la convergencia en $(\mathcal{C}(U), d_K)$. Como esta es la topología de la convergencia uniforme, se tiene que $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge a f uniformemente en el compacto K .

Análogamente, sea $z \in U$ un punto arbitrario y sea $K \subset U$ un compacto tal que $z \in K$. Sea $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ convergente a f en $(\mathcal{C}(U), d_K)$. Por la observación 4.10, existe un abierto $V(f, K, \delta)$ de forma que $V(f, K, \delta) \subset B_\rho(f, \varepsilon)$. Por tanto, se tiene que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_j \in V(f, K, \delta) \subset B_\rho(f, \varepsilon)$ para todo $j > N$, teniendo así la convergencia puntual en $(\mathcal{C}(U), \rho)$ para todo punto $z \in U$. \square

Una vez caracterizada la topología inducida por la métrica ρ , resulta natural tratar de estudiar otras propiedades acerca de este espacio, como su completitud. Para ello, será necesario definir en este contexto las sucesiones de Cauchy para así poder caracterizar la completitud del espacio. Esto nos permitirá asegurar que el límite de las sucesiones funcionales convergen en el mismo espacio, es decir, nos permitirá asegurar la continuidad de la función límite.

Definición 4.12. Una sucesión de funciones $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ en $(\mathcal{C}(U), \rho)$ se dice de Cauchy si y solo si para cada compacto $K \subset U$ y $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_K(f_p, f_q) < \varepsilon$, para todo $p, q > N$ o, equivalentemente, $|f_p(z) - f_q(z)| < \varepsilon$, para todo $p, q > N$ y $z \in U$.

Proposición 4.13. *El espacio métrico $(\mathcal{C}(U), \rho)$ es completo.*

Demostración. Sea $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{C}(U), \rho)$. Siguiendo la definición 4.12, para cada compacto $K \subset U$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_p(z) - f_q(z)| < \varepsilon$, para todo $p, q > N$ y $z \in U$.

Dado un $z \in U$ fijado, tenemos que $\{f_j(z)\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{C} y, por tanto,

convergente en \mathbb{C} . Por ello, podemos definir la función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, tal que

$$f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto f(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(z).$$

Tomando un $p > N$ y q tendiendo a infinito, $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en K ya que $d_K(f_p, f) < \varepsilon$ para todo $p > N$.

Además, f es continua en U por ser el límite uniforme en cada compacto de una sucesión de funciones continuas. \square

4.1.1. Familias normales en $\mathcal{C}(U)$

Una vez comprendida la estructura topológica del espacio $(\mathcal{C}(U), \rho)$, será interesante estudiar algunos conjuntos que contarán con un comportamiento especial. Entre ellos, se encuentran las familias normales, que se caracterizan por permitir la obtención de subsucesiones convergentes.

A partir de este punto, cuando se hable de $\mathcal{C}(U)$, se considerará implícitamente la métrica ρ .

Definición 4.14. Una familia \mathcal{F} de funciones continuas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ es normal si cada sucesión de elementos de \mathcal{F} contiene una subsucesión convergente a una función $f \in \mathcal{C}(U)$.

Observación 4.15. La definición de normalidad es similar a la de compacidad secuencial³. Lo que las diferencia es el hecho de que el límite de la subsucesión esté en el conjunto (secuencialmente compacto) o no (familia normal). Es por ello que el hecho de que una familia \mathcal{F} sea normal es equivalente a que su clausura $\overline{\mathcal{F}}$ sea compacto⁴, y esto es precisamente la definición de que \mathcal{F} sea relativamente compacto⁵.

Uno de los conceptos que serán de utilidad para caracterizar a las familias normales es la equicontinuidad. Este concepto es una generalización de la continuidad de una función, aplicada a todos los elementos de la familia simultáneamente. De este modo, la equicontinuidad nos dará una noción de si todos los elementos de una familia \mathcal{F} varían “de manera parecida” cerca de cada punto.

Definición 4.16. Sea \mathcal{F} una familia de funciones continuas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$.

- \mathcal{F} es equicontinua en un punto $z_0 \in U$ si dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

³Un conjunto $A \subset X$ se dice secuencialmente compacto si para cada sucesión de elementos de A existe una subsucesión convergente a un punto de A .

⁴En espacios métricos, la compacidad y la compacidad secuencial son equivalentes

⁵Un conjunto $A \subset X$ es relativamente compacto en X si su clausura $Cl(A)$ es compacta en X .

para todo $z \in U$ y para toda $f \in \mathcal{F}$.

- \mathcal{F} es equicontinua en un subconjunto $E \subset U$ si es equicontinua en cada punto de E .
- \mathcal{F} es uniformemente equicontinua en un subconjunto $E \subset U$ si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|z - z'| < \delta \implies |f(z) - f(z')| < \varepsilon,$$

para todo $z, z' \in E$ y para toda $f \in \mathcal{F}$

Observación 4.17. La característica importante de la equicontinuidad (uniforme) es que se puede tomar un δ que cumpla la definición de continuidad (uniforme) independientemente de la función $f \in \mathcal{F}$.

Proposición 4.18. *Una familia \mathcal{F} es equicontinua en un conjunto abierto U si y solo si es uniformemente equicontinua en cada compacto de U .*

Demostración. Sea \mathcal{F} una familia de funciones equicontinua en un abierto U . Sea $K \subset U$ un subconjunto compacto, sea $\varepsilon > 0$ y $f \in \mathcal{F}$ arbitrarios. Por la condición de equicontinuidad en U , para cada $z \in U$, existe δ^z tal que si $z' \in B(z, \delta^z)$ entonces $f(z') \in B(f(z), \varepsilon/2)$.

Por ser K compacto, el recubrimiento $\{B(z, \delta^z/2)\}_{z \in K}$ admite un subrecubrimiento finito $\{B(z_i, \delta_i/2)\}_{i=1}^N$. Sea $\delta = \min_i \{\delta_i/2\}$ el mínimo de estos radios. Sean $x, y \in K$ tal que $|x - y| < \delta$. Por ser un recubrimiento, sabemos que $x \in B(z_i, \delta_i/2)$ para algún índice i . Entonces tenemos que

$$|z_i - y| \leq |z_i - x| + |x - y| < \frac{\delta_i}{2} + \delta \leq \frac{\delta_i}{2} + \frac{\delta_i}{2} = \delta_i,$$

es decir, $y \in B(z_i, \delta_i)$. Así, utilizando la equicontinuidad, tenemos que:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z_i)| + |f(z_i) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por otra parte, sea \mathcal{F} uniformemente equicontinua en todo compacto $K \subset U$. Para cada $z \in U$ arbitrario, existe un entorno compacto $K_z \subset U$ tal que $z \in \text{Int}(K_z)$. Por ser uniformemente equicontinua en K_z , en particular, es equicontinua en el punto z . \square

Uno de los resultados más importantes en el estudio de las funciones continuas es el teorema de Ascoli-Arzelà. Este proporciona una caracterización de los subconjuntos relativamente compactos que, en nuestro caso, se corresponde con las familias normales. En particular, la equicontinuidad nos permitirá asegurar la existencia de subsucesiones convergentes dentro de la familia, lo que será de gran utilidad para demostrar otros resultados.

Teorema 4.19 (Teorema de Ascoli-Arzelà). *Una familia \mathcal{F} de funciones continuas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ es normal si y solo si verifica*

- Para todo $z \in U$, el conjunto $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ es relativamente compacto⁶.
- \mathcal{F} es equicontinua en U .

4.2. El espacio $\mathcal{H}(U)$

El siguiente teorema nos permitirá generalizar los resultados y conceptos mencionados anteriormente en el espacio $\mathcal{C}(U)$ para el espacio de funciones holomorfas $\mathcal{H}(U)$. Durante todo el capítulo estuvimos estudiando la convergencia en el espacio de funciones $\mathcal{C}(U)$, mediante la métrica ρ e introduciendo diferentes conceptos como familias normales o equicontinuidad. Cuando añadimos la condición de que las funciones también sean holomorfas, además de particularizar lo estudiado en $\mathcal{C}(U)$, podremos utilizar resultados ampliamente conocidos sobre este tipo de funciones para poder dar resultados aún más fuertes.

En particular, este teorema permitirá demostrar que el límite de una sucesión convergente de funciones holomorfas tendrá también como límite una función del espacio. Además, se transmitirá este comportamiento en las derivadas sucesivas. Este resultado pone de manifiesto el carácter estable de la holomorfía frente a convergencia uniforme en compactos y será de mucha utilidad para generalizar a $\mathcal{H}(U)$ los resultados obtenidos en $\mathcal{C}(U)$.

Teorema 4.20. *Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(U)$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{C}(U)$ una función continua en U tal que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en $\mathcal{C}(U)$. Entonces $f \in \mathcal{H}(U)$ y para cada natural k la sucesión $\{f_n^{(k)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f^{(k)}$ en $\mathcal{C}(U)$.*

Demostración. Sea T una región triangular contenida en U . Por la convergencia en $\mathcal{C}(U)$ sabemos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en cualquier compacto de U y, por tanto, en la frontera de T . Por tanto, se puede intercambiar el límite con la integral.

$$\int_{\partial T} f = \int_{\partial T} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial T} f_n = 0,$$

donde la última igualdad se debe a que cada función f_n es holomorfa para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema de Morera (teorema 1.4), como f es continua en U e integra cero en ∂T para toda región triangular $T \subset U$, se tiene que f es holomorfa en U .

Por otra parte, sean z_0 y $0 < r < R$ tales que $D(z_0, r) \subset \bar{D}(z_0, r) \subset \bar{D}(z_0, R) \subset U$ y $\gamma = \partial^+ D(z_0, R)$. Usando las fórmulas integrales de Cauchy, se tiene que

$$f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(f_n - f)(w)}{(w - z)^{k+1}} dw,$$

⁶Y, por tanto, normal.

para todo $z \in \overline{D}(z_0, r)$ y $n \in \mathbb{N}$.

Acotando modularmente, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| &\leq \frac{k!}{2\pi} \max \left\{ \left| \frac{(f_n - f)(w)}{(w - z)^{k+1}} \right| : w \in \gamma^* \right\} \text{long}(\gamma) \\ &\leq \frac{k!R}{(R - r)^{k+1}} \cdot \|f_n - f\|_{\overline{D}(z_0, R)}, \end{aligned}$$

para todo $z \in \overline{D}(z_0, r)$ y $n \in \mathbb{N}$.

Como $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en $\overline{D}(z_0, R)$, $\{f_n^{(k)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ también convergerá uniformemente a $f^{(k)}$ en $\overline{D}(z_0, R)$.

Para asegurar la convergencia en $\mathcal{C}(U)$, bastará con ver la convergencia uniforme en los compactos de U . Dado un cierto $K \subset U$ compacto, tomamos $0 < r < d(K, \partial U)$. La familia de conjuntos $\{D(z, r) : z \in K\}$ forma un recubrimiento abierto de K . Por ser compacto, existe un subrecubrimiento finito, de manera que existen z_1, \dots, z_p tales que $K \subset \bigcup_{n=1}^p D(z_n, r)$. Como $\{f_n^{(k)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f^{(k)}$ en cada $D(z_n, r)$, lo hará en la unión de todos ellos y, por tanto, en K . \square

Para intentar caracterizar aún más el comportamiento de las sucesiones funcionales holomorfas, estudiaremos cómo se transmiten los ceros de la sucesión a través del límite. El teorema de Hurwitz nos permitirá establecer una relación entre el número de ceros de una sucesión funcional y el de su límite.

A diferencia del análisis real, o incluso el de funciones complejas continuas, en el caso de las funciones holomorfas el comportamiento de los ceros de una sucesión funcional no se comporta de manera arbitraria.

Teorema 4.21 (Teorema de Hurwitz). *Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{H}(U)$, con $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, convergente a una función $f \in \mathcal{H}(U)$ no idénticamente nula. Sean $z_0 \in U$ y $r > 0$ tales que $\overline{D}(z_0, r) \subset U$ y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \partial D(z_0, r)$. Entonces existe un natural $N \in \mathbb{N}$ tal que f y f_n tienen la misma cantidad de ceros (contando multiplicidades) en $D(z_0, r)$ para todo $n \geq N$.*

Demostración. Sea $0 < \delta \leq \min\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}$. Como $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en $\mathcal{H}(U)$, en particular, convergerá uniformemente en $\partial D(z_0, r)$, por tratarse de un compacto. Por tanto, existirá un cierto $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\delta}{2} < \delta \leq |f(z)|,$$

para todo $z \in \partial D(z_0, r)$ y $n \geq N$. Por el teorema de Rouché (teorema 1.5), f_n y f tienen el mismo número de ceros en $D(z_0, r)$ para todo $n \geq N$. \square

Este resultado da a entender que si las funciones de una sucesión no se anulan en una región y el límite sí lo hace, entonces el conjunto de esos ceros no aparecen de manera “espontánea”, sino que los ceros de la propia sucesión tienen como límite los ceros de f .

Corolario 4.22. *Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{H}(U)$ convergente a otra función $f \in \mathcal{H}(U)$ no idénticamente nula, siendo $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo. Entonces, si f se anula en $z_0 \in U$, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que la sucesión de sus ceros $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, con $f_{n_k}(z_k) = 0$, cumple que $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0$.*

Demostración. Como f no es idénticamente nula, por el principio de identidad (proposición 1.2) los ceros de f deben ser aislados. Por tanto, podemos tomar $r > 0$ tal que $\overline{D}(z_0, r) \subset U$ y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \partial D(z_0, r)$. Por el teorema de Hurwitz (teorema 4.21), existe un cierto natural N tal que f_n tiene al menos un cero en $D(z_0, r)$ para todo $n \geq N$. Sea z_n uno de los ceros de cada f_n en el disco y sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de los mismos. Por estar contenidos en el compacto $\overline{D}(z_0, r)$, se tiene que existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a un cierto z^* .

Como $f_n(z_{n_k}) = 0$ y f_n converge a f , se tiene que $f(z^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(z_{n_k}) = 0$, es decir, z^* es un cero de f . Como los ceros de f son aislados, y solamente había un cero en $D(z_0, r)$, se tiene que $z^* = z_0$. \square

Corolario 4.23. *Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones convergente a una función f en $\mathcal{H}(U)$, siendo U un abierto conexo. Si cada una de las f_n son inyectivas para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es inyectiva o constante.*

Demostración. Supongamos que f no es constante y veamos que es inyectiva.

Por reducción al absurdo, supongamos que no es inyectiva. Existirán dos puntos $z_1, z_2 \in U$ tales que $f(z_1) = f(z_2)$. Sea $g \in \mathcal{H}(U)$ tal que $g(z) = f(z) - f(z_1)$. Se tiene que $g(z_1) = g(z_2) = 0$, por lo que g tiene (por lo menos) dos ceros distintos en U .

Consideremos la sucesión $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(U)$ tal que $g_n(z) = f_n(z) - f(z_1)$. Se tiene que g_n converge a g en $\mathcal{H}(U)$.

Como g no es idénticamente nula y tiene dos ceros $z_1 \neq z_2$ aislados, por el teorema de Hurwitz, para un cierto índice lo suficientemente grande N se tendrá que f_N contará con dos ceros aislados. Esto es una contradicción con la inyectividad de f . \square

4.2.1. Familias normales en $\mathcal{H}(U)$

En este apartado, caracterizaremos el concepto introducido anteriormente de familias normales en $\mathcal{C}(U)$ para el caso de funciones en $\mathcal{H}(U)$. La estructura de este espacio, permitirá

establecer condiciones que, aunque sean de carácter local, tendrán consecuencias globales.

Para ello, nos dotaremos de otros conceptos, como el de acotación local y uniforme, que permiten controlar el crecimiento de las funciones de una familia. Además, estas condiciones tendrán consecuencias sobre la equicontinuidad de la familia en cuestión, condición que ya vimos que el teorema de Ascoli-Arzelà (teorema 4.19) nos muestra que está muy ligada con la normalidad de la misma.

Definición 4.24. Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(U)$ es localmente acotada en U si para cada $z_0 \in U$ existen $r, M > 0$ tales que

$$|f(z)| \leq M, \text{ para todo } z \in D(z_0, r) \subset U \text{ y } f \in \mathcal{F}.$$

Equivalentemente, \mathcal{F} es localmente acotada en U si existe $r > 0$ tal que

$$\sup\{\|f\|_{D(z_0, r)} : f \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Definición 4.25. Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(U)$ es uniformemente acotada en los subconjuntos compactos de U si para cada compacto $K \subset U$ existe un $M > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq M, \text{ para todo } z \in K \subset U \text{ y } f \in \mathcal{F}.$$

Equivalentemente, \mathcal{F} es uniformemente acotada en los compactos de U si para cada compacto $K \subset U$,

$$\sup\{\|f\|_K : f \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Proposición 4.26. Si una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(U)$ es localmente acotada en U , entonces \mathcal{F} es equicontinua en U .

Demostración. Sean $z_0 \in U$ y $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por ser \mathcal{F} localmente acotada en U , existen $r, M > 0$ tales que

$$|f(z)| \leq M, \text{ para todo } z \in \overline{D}(z_0, r) \subset U \text{ y } f \in \mathcal{F}.$$

Sea $z \in D(z_0, r/2)$ y sea $\gamma = \partial^+ D(z_0, r)$. Por la fórmula integral de Cauchy,

$$f(z) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{f(w)}{w-z} - \frac{f(w)}{w-z_0} \right) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)(z-z_0)}{(w-z)(w-z_0)} dw.$$

Por acotación modular, se tiene que

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \max \left\{ \left| \frac{f(w)(z-z_0)}{(w-z)(w-z_0)} \right| : w \in \gamma^* \right\} \text{long}(\gamma) \\ &\leq \frac{2M|z-z_0|}{2\pi r^2} \cdot 2\pi r = \frac{2M}{r} |z-z_0|. \end{aligned}$$

Por tanto, tomando $|z-z_0| < \varepsilon r/(4M)$, se tiene que $|f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, para toda $f \in \mathcal{F}$, quedando probada la equicontinuidad de \mathcal{F} . \square

Dos de los resultados más importantes con respecto a la caracterización de familias y sucesiones funcionales en el espacio $\mathcal{H}(U)$ son el teorema de Montel y el teorema de Vitali. El primero de ellos permite dar una caracterización de las familias normales de $\mathcal{H}(U)$ a partir de un comportamiento local. Por su parte, el teorema de Vitali permite establecer, también a partir de un comportamiento local, la convergencia global de una sucesión funcional.

Teorema 4.27 (Teorema de Montel). *Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(U)$ es normal si y solo si es localmente acotada.*

Demostración. Sea \mathcal{F} una familia normal. Supongamos que \mathcal{F} no es localmente acotada. Entonces existirá un compacto K tal que

$$\sup\{\|f\|_K : f \in \mathcal{F}\} = \infty.$$

Por tanto, existirá una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\|f_n\|_K \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ser \mathcal{F} normal, dada la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, existirá una subsucesión $\{f_{n_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ tal que converja en $\mathcal{H}(U)$ a una función $f \in \mathcal{H}(U)$. En particular convergerá uniformemente en K , por lo que $\lim_{l \rightarrow \infty} \|f_{n_l} - f\|_K = 0$. Por otra parte, si $M = \|f\|_K$, se tiene que existe un cierto $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $l \geq l_0$

$$\|f_{n_l}\|_K \leq \|f\|_K + \|f_{n_l} - f\|_K < M + 1.$$

Esto contradice el hecho de que $\|f_{n_l}\|_K \geq n_l$, para todo $l \in \mathbb{N}$.

Sea \mathcal{F} una familia localmente acotada. Por la proposición 4.26, \mathcal{F} es equicontinua. Además, tomando $K = \{z_0\}$ con $z_0 \in U$ fijado, el conjunto $\{f(z_0) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado y, por tanto, relativamente compacto. Por el teorema de Ascoli-Arzelà (teorema 4.19), se tiene que \mathcal{F} es normal. \square

Teorema 4.28 (Teorema de Vitali). *Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto conexo $U \subset \mathbb{C}$, uniformemente acotada en los compactos de U y puntualmente convergente en un subconjunto $E \subset U$. Si E tiene un punto de acumulación en U , entonces la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en $\mathcal{H}(U)$.*

Demostración. Por estar uniformemente acotada en los compactos de U , en particular, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ será localmente acotada. Por el teorema de Montel (teorema 4.27), $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ será una familia normal, por lo que tendrá por lo menos una subsucesión convergente. En caso de que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no convergiese, existirían dos subsucesiones convergentes a límites distintos, $f, g \in \mathcal{H}(U)$. Tomando la función $h = f - g$, se tiene que $h \equiv 0$ en E con un punto de acumulación y, por el principio de identidad para funciones holomorfas (proposición 1.2), se tendría que $h \equiv 0$ en U , por lo que $f = g$, llegando así a una contradicción. \square

Capítulo 5

Teorema de la aplicación de Riemann

Después de un recorrido por diferentes ámbitos del análisis complejo, estamos en disposición de enunciar y demostrar el teorema de la aplicación de Riemann. Para ello, nos dotaremos de todas las herramientas desarrolladas hasta el momento, desde las transformaciones de Möbius y los biholomorfismos del disco hasta el espacio de las funciones holomorfas, pasando por diferentes teoremas clave, como pueden ser el de Montel o el de Hurwitz. Como veremos, todos los desarrollos realizados a lo largo del documento facilitarán la prueba del teorema.

Por último, trataremos de poner de manifiesto la importancia de este teorema, además de algunas posibles aplicaciones que pueda tener.

La demostración está basada en [4], del que también se ha extraído la formulación de la transformación de Schwarz-Christoffel. La aplicación a la mecánica de fluidos está basada en [6], el método numérico está basado en [5] y el código empleado en [9].

5.1. Enunciado y demostración

Antes de adentrarnos en la demostración en sí, enunciaremos el siguiente lema, que tiene un fin puramente técnico. En el desarrollo de la prueba trataremos una situación concreta en la que contaremos con un abierto simplemente conexo en el que nos resulta útil establecer una rama holomorfa del logaritmo.

Lema 5.1. *Sea $U \subset \mathbb{C} \setminus \{b\}$ un conjunto abierto simplemente conexo. Entonces existe una rama holomorfa del logaritmo $\log(z - b)$ definida en todo U .*

Demostración. Como U es un abierto simplemente conexo en el que $b \notin U$, no habrá ningún camino cerrado en U que encierre a b . Por tanto, por el teorema integral de Cauchy, se tendrá

que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-b} dz = 0$$

para todo camino cerrado γ en U . De este modo, como $\log(z-b)$ es una primitiva de $1/(z-b)$, se puede definir consistentemente $\log(z-b)$ como

$$\log(z-b) = \int_{z_0}^z \frac{1}{w-b} dw,$$

donde se fija un cierto $z_0 \in U$.

Cabe destacar que por ser U simplemente conexo, la definición de esta integral no depende del camino escogido. En efecto, si tomamos dos caminos γ_1 y γ_2 con inicio en z_0 y final en z , se tiene que $\gamma = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$ es un camino cerrado por lo que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{w-b} dw = 0,$$

de lo que se deduce que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \frac{1}{w-b} dw + \int_{\gamma_2^{-1}} \frac{1}{w-b} dw &= 0, \\ \int_{\gamma_1} \frac{1}{w-b} dw - \int_{\gamma_2} \frac{1}{w-b} dw &= 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.2 (Teorema de la aplicación de Riemann). *Sea $U \neq \mathbb{C}$ un conjunto simplemente conexo y $z_0 \in U$. Existe un único biholomorfismo $f : U \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$.*

La demostración de este teorema [4] constará de varias partes. En primer lugar, probaremos que, de existir esta aplicación, será única. Por otra parte, para probar la existencia de esta aplicación, consideraremos la siguiente familia de funciones

$$\mathcal{F} = \{f : U \rightarrow \mathbb{D} : f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0 \text{ y } f \text{ es inyectiva}\}, \quad (5.1)$$

donde $z_0 \in U$ es el punto especificado en el enunciado del teorema. Primeramente, comprobaremos que esta familia es no vacía y, a partir de ahí, construiremos una cierta función $f \in \mathcal{F}$ tal que f sea sobreyectiva.

Demostración. Para probar la unicidad, supongamos que existen dos biholomorfismos $f_1 : U \rightarrow \mathbb{C}$ y $f_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $f_1(z_0) = f_2(z_0) = 0$ además de que $f_1'(z_0) > 0$ y $f_2'(z_0) > 0$. En ese caso, por tratarse de biholomorfismos, podríamos construir el biholomorfismo $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $g(z) = (f_1 \circ f_2^{-1})(z)$. Esta función cumple que

$$\begin{aligned} g(0) &= (f_1 \circ f_2^{-1})(0) = f_1(z_0) = 0, \\ g'(0) &= (f_1 \circ f_2^{-1})'(0) = f_1'(f_2^{-1}(0)) \cdot (f_2^{-1})'(0) = f_1'(z_0) \cdot \frac{1}{f_2'(z_0)} > 0. \end{aligned}$$

Por las propiedades estudiadas de los automorfismos del disco unidad, en particular por la proposición 3.6, sabemos que los automorfismos del disco, en concreto g , vienen dados por transformaciones de Möbius de la forma

$$M_a^\phi(z) = e^{i\phi} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

donde $a \in \mathbb{D}$ y $\phi \in [0, 2\pi)$. Como $g(0) = 0$, se tiene que $a = 0$ y como $g'(0) > 0$, se tiene que $\phi = 0$. Por ello, se tiene que g es la función identidad y, por tanto, $f_1 = f_2$.

Para probar la existencia, veremos que la familia \mathcal{F} dada en (5.1) es no vacía. En primer lugar, como la familia está acotada, en particular está localmente acotada y, por el teorema de Montel (teorema 4.27), se tiene que \mathcal{F} es normal.

Por ser U simplemente conexo, para cada $b \notin U$, se puede definir la función holomorfa $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ que $h(z) = \sqrt{z - b}$. Esto se debe a que por el lema 5.1, $\log(z - b)$ es una función holomorfa definida en todo U y podemos escribir $h(z) = \exp(\log(z - b)/2)$, para poder asegurar su holomorfía.

Evidentemente, al tratarse de una raíz cuadrada, esta función es inyectiva y, además, se tiene que $h(z_1) \neq -h(z_2)$ para todo $z_1, z_2 \in U$. En efecto, si $h(z_1) = -h(z_2)$, al elevar al cuadrado, se tendría que $z_1 = z_2$ pero, en ese caso, $h(z_1) = -h(z_1)$, es decir, $h(z_1) = 0$. Sin embargo, esto es una contradicción ya que implicaría que $z_1 = b$, y $b \notin U$.

Por ser h una función holomorfa en un abierto U , se tiene que, por el teorema de la aplicación abierta, $h(U)$ también es abierto. Por ello, se puede asegurar la existencia de un disco cerrado $\Delta = \overline{D}(h(z_0), r)$, con $r > 0$ y con $h(z_0)$ la imagen del punto z_0 especificado en la definición de \mathcal{F} . Por la observación anterior, se tiene que $-\Delta \cap h(U) = \emptyset$, siendo $-\Delta = \overline{D}(-h(z_0), r)$.

Como consecuencia de la proposición 2.29, podemos encontrar una transformación de Möbius M de tal manera que $M(\mathbb{C} \setminus (-\Delta)) = \mathbb{D}$. Además, esta será única si imponemos las condiciones $M(h(z_0)) = 0$ y $M'(h(z_0)) > 0$, utilizando así los tres grados de libertad propios de las transformaciones de Möbius (proposición 2.31). De este modo, $(M \circ h)'(z_0) = M'(h(z_0)) \cdot h'(z_0) > 0$. Tenemos que $M \circ h$ es inyectiva por ser composición de h inyectiva con M biyectiva. Por tanto, por construcción, tenemos que $M \circ h \in \mathcal{F}$, asegurando así que $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Sea $S = \sup\{f'(z_0) : f \in \mathcal{F}\}$, con $0 < S \leq \infty$. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ una sucesión tal que $\{f'_n(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tienda a S . Por la normalidad de \mathcal{F} , pasando por una subsucesión en caso de ser necesario, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en $\mathcal{H}(U)$, es decir, converge uniformemente a $f \in \mathcal{H}(U)$ en subconjuntos compactos. Por ser f una función holomorfa, se tiene que $f'(z_0) < \infty$ y, de nuevo por el teorema 4.20, se tiene que

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z_0) = f'(z_0) < \infty.$$

Por el corolario 4.23, se tiene que f es inyectiva o constante. Sabemos que constante no puede ser porque $f'(z_0) > 0$, por lo que f debe ser inyectiva. Por tanto, deducimos que $f \in \mathcal{F}$.

Por último, para probar que es un biholomorfismo, bastará ver que f es sobreyectiva. Así, tendremos una función holomorfa biyectiva que sabemos que será un holomorfismo.

Supongamos que no es sobreyectiva, es decir, existe al menos un punto $c \in \mathbb{D}$ con $c \neq 0$ tal que $f(z) \neq c$, para todo $z \in U$. Sea el automorfismo de \mathbb{D}

$$M_c(z) = \frac{z - c}{1 - \bar{c}z},$$

que cumple que $M_c(0) = -c$ y $M'_c(0) = 1 - |c|^2$.

Consideremos la función H dada por la siguiente composición

$$H(z) = \sqrt{M_c(f(z))} = \sqrt{\frac{f(z) - c}{1 - \bar{c}f(z)}}. \quad (5.2)$$

Por ser composición de funciones holomorfas y, de nuevo por el lema 5.1, se tiene que esta función es holomorfa. Además, H es inyectiva por ser composición de funciones inyectivas. Consideremos la función $F \in \mathcal{F}$ dada por

$$F(z) = \frac{e^{i\theta}(H(z) - H(z_0))}{1 - \overline{H(z_0)}H(z)}$$

donde $H'(z_0) = |H(z_0)|e^{-i\theta}$. El factor $e^{i\theta}$ se introduce precisamente para que $F'(z_0) > 0$. De este modo,

$$F'(z) = e^{i\theta} \frac{H'(z) \cdot (1 - \overline{H(z_0)}H(z)) - (H(z) - H(z_0)) \cdot (1 - \overline{H(z_0)}H'(z))}{(1 - \overline{H(z_0)}H(z))^2},$$

que, evaluando en z_0 y usando que $|H(z_0)|^2 = |c|$ se tiene que,

$$F'(z_0) = \frac{|H'(z_0)|}{1 - |c|}.$$

Para calcular $H'(z_0)$, utilizaremos la regla de la cadena. Para ello, tendremos en cuenta la definición dada en (5.2), como composición de varias funciones. Además, utilizando que $f'(z_0) > 0$, $f(z_0) = 0$, $M'_c(0) = 1 - |c|^2$ y $M_c(0) = -c$, y realizando algunos cálculos se tiene que

$$F'(z_0) = \frac{1}{1 - |c|} \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{M_c(f(z_0))}} \cdot M'_c(f(z_0)) \cdot f'(z_0) \right| = \frac{f'(z_0)}{2(1 - |c|)} \cdot \frac{1 - |c|^2}{\sqrt{|c|}},$$

$$F'(z_0) = f'(z_0) \cdot \frac{1 + |c|}{\sqrt{|c|}} = f'(z_0) \cdot \left(\frac{\sqrt{|c|} + \sqrt{\frac{1}{|c|}}}{2} \right)$$

Para terminar, emplearemos la última expresión para utilizar de manera clara la desigualdad aritmético-geométrica. Esta establece que la media aritmética de dos números reales es estrictamente mayor que la media geométrica, en caso de que estos números sean distintos. En este caso,

como c está en el interior del disco unidad, tendremos que $|c| \neq 1$ y, por tanto, $\sqrt{|c|} \neq \sqrt{|c|^{-1}}$. Por tanto, podremos concluir que

$$F'(z_0) = f'(z_0) \cdot \left(\frac{\sqrt{|c|} + \sqrt{\frac{1}{|c|}}}{2} \right) > \sqrt{\sqrt{|c|} \sqrt{\frac{1}{|c|}}} = f'(z_0) = S.$$

De este modo, llegamos a un absurdo, ya que el hecho de que $F \in \mathcal{F}$ y que $F'(z_0) > S$ es una contradicción con la definición de S como supremo, por lo que f debe ser sobreyectiva. \square

Observación 5.3. El teorema de la aplicación de Riemann asume que $U \neq \mathbb{C}$. Esto se debe a que no existe ningún biholomorfismo entre \mathbb{C} y \mathbb{D} . La razón es que, si existiese, este sería una función entera y acotada, por tanto, constante, por lo que no podría ser biyectiva.

Observación 5.4. Dados dos abiertos del plano complejo U, V distintos de \mathbb{C} , se puede encontrar un biholomorfismo entre ambos. Además, este es único cuando se fija la imagen de un punto y la dirección en la que se manda a un vector tangente al punto.

5.2. Importancia y aplicaciones

Como ya comentamos, este teorema tiene una gran importancia intrínseca. El hecho de poder encontrar un biholomorfismo entre dos abiertos simplemente conexos distintos de \mathbb{C} es un resultado ya de por sí bastante interesante desde el punto de vista matemático. El hecho de que todas las regiones simplemente conexas (salvo \mathbb{C}) sean equivalentes desde un punto de vista de la geometría conforme da una visión mucho más profunda acerca de la especial estructura del plano complejo y de las funciones holomorfas. Además, este es solo un caso particular de un teorema mucho más general, como es el teorema de uniformización. Ya se comentó en el capítulo 1 que este permitía clasificar todas las superficies de Riemann simplemente conexas en las que son biholomorfas al disco unidad, al plano complejo o a la esfera de Riemann.

Desde un punto de vista más práctico, este teorema permite trasladar problemas definidos en dominios de forma arbitraria a un entorno mucho más controlado y simétrico, como puede ser el disco unidad. En particular, esto puede ser aplicado a diversas áreas de la física, como pueda ser la resolución de problemas de mecánica de fluidos, en el que, por ejemplo, se interponga un cierto obstáculo. Así, podríamos calcular de manera más sencilla cómo se comporta el flujo cuando se interpone el disco unidad y, posteriormente, en ciertas condiciones, aplicar la aplicación conforme que lleve el disco unidad al obstáculo en cuestión.

Otra de las aplicaciones podría ser el de la resolución de un problema de simulación de campos eléctricos. Por ejemplo, la resolución de Laplace en un cierto dominio, puede ser ciertamente complicado según la forma del mismo. Como las soluciones de la ecuación de Laplace se conservan

bajo transformaciones conformes, mediante la misma estrategia que antes, el problema puede resolverse en el disco y, posteriormente, utilizar dicha transformación conforme para hallar la solución en el dominio inicial.

Todos estas aplicaciones dependen de encontrar la aplicación conforme que lleve el dominio requerido al disco unidad. Aunque el teorema de la aplicación de Riemann no da una construcción explícita de la transformación en sí, existen diversos algoritmos que permiten construir el biholomorfismo de manera aproximada, y algunos casos particulares en los que se puede dar una expresión analítica.

5.2.1. Transformación de Schwarz-Christoffel

Uno de los casos en los que contamos con una expresión de la función descrita por el teorema de la aplicación de Riemann es en el caso de contar con una región definida por un polígono. En estas condiciones, existe una descripción analítica de la transformación que lleva el semiplano superior al polígono en cuestión, denominada aplicación de Schwarz-Christoffel.

Proposición 5.5 (Transformación de Schwarz-Christoffel). *Sea $\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) > 0\}$ y P un polígono definido por los puntos $\{a_1, \dots, a_n\}$, con ángulos interiores $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$. Existe un biholomorfismo $f : \mathbb{H} \rightarrow P$ que toma la expresión*

$$f(w) = A \int \frac{1}{\prod_{j=1}^n (w - a_j)^{1-\theta_j/\pi}} dw, \quad (5.3)$$

donde A es una constante.

Observación 5.6. Esta expresión puede ser considerada para regiones no acotadas, donde algunos de los vértices puedan generalizarse a valores infinitos. Habrá que tener en cuenta en cada caso el comportamiento en el límite para poder determinar los vértices y los ángulos de manera correcta.

Observación 5.7. Cabe destacar que, en caso de requerir un biholomorfismo del disco unidad al polígono P , bastaría con componer con la transformación de Möbius $M : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$, tal que $M(z) = i(1+z)/(1-z)$.

A continuación aplicaremos esta transformación a uno de los problemas descritos en el apartado anterior. En particular, expondremos su uso en el caso de la resolución de un problema de mecánica de fluidos, en el que trataremos de encontrar una solución de la ecuación de Laplace en un cierto dominio poligonal.

Ejemplo 5.8. Consideremos un fluido ideal (incompresible, irrotacional y no viscoso) que fluye en el dominio U , definido por los vértices $\{a_1, a_2\} = \{ih, 0\}$ y los ángulos interiores $\{\theta_1, \theta_2\} = \{3\pi/2, \pi/2\}$ [6].

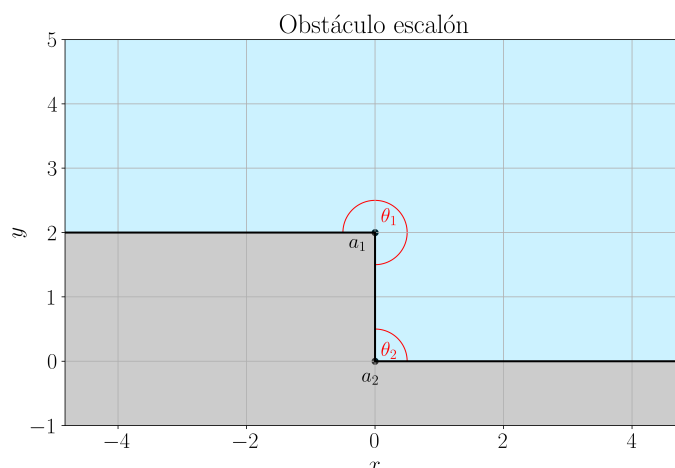


Figura 5.1: Obstáculo de tipo escalón de altura $h = 2$. Se representan los vértices a_1, a_2 y los ángulos interiores θ_1, θ_2 . El flujo está definido en la región azul U , mientras que la región grisácea representa al obstáculo en cuestión. Elaboración propia.

La región $\mathbb{R}^2 \setminus U$ representa un obstáculo de tipo “escalón” de altura h , representado en la figura 5.1. En este caso ideal, podemos determinar el campo de velocidad $\vec{v}(x, y)$ y un potencial de flujo $\phi(x, y)$ alrededor del obstáculo U a partir de la ecuación de Laplace:

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0, & (x, y) \in U, \\ \vec{v} \cdot \vec{n} = 0, & (x, y) \in \partial U, \\ \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} \vec{v}(x, y) = v_\infty, \end{cases} \quad (5.4)$$

donde \vec{n} es el vector normal a ∂U en cada punto (x, y) y v_∞ es el valor constante de la velocidad del flujo en el infinito.

Podemos utilizar el teorema de la aplicación de Riemann para asegurar la existencia de un biholomorfismo $f : \mathbb{H} \rightarrow U$ entre el semiplano superior \mathbb{H} (plano- w) y U (plano- z)¹. Además, podremos obtener la expresión exacta de f mediante la transformación de Schwarz-Christoffel.

En el plano- w las líneas de corriente del flujo corresponden a rectas horizontales, es decir, si $w = u + iv$, serán las rectas $v = \text{cte}$. Por tanto, en el plano- z , las líneas de flujo se obtendrán evaluando $z = f(u + iv)$, para distintos valores constantes de v .

¹Describiremos los puntos de $w \in \mathbb{H}$ como $w = u + iv$, mientras que los puntos $z \in U$ los denotaremos como $z = x + iy$.

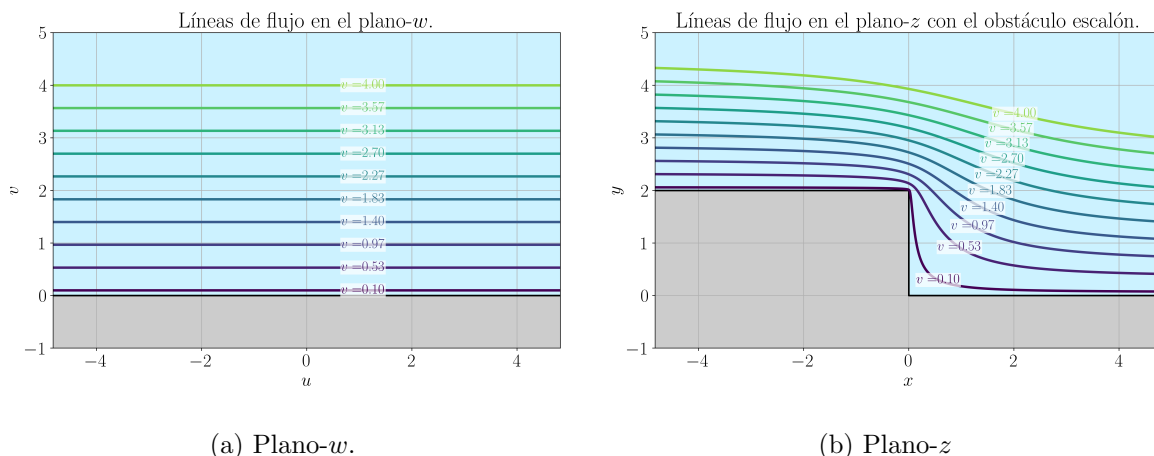


Figura 5.2: Visualización de las líneas de flujo en el plano- w y en el plano- z con el obstáculo. Elaboración propia.

Utilizando la expresión (5.3), y sustituyendo los valores de $a_1, a_2, \theta_1, \theta_2$, llegamos a que

$$f(w) = A \int \sqrt{\frac{w+1}{w-1}} dw,$$

$$f(w) = A \left[\sqrt{w^2 - 1} + \log \left(w + \sqrt{w^2 + 1} \right) \right] + B.$$

Aplicando las condiciones de que, por ejemplo, $f(-1) = ih$ y que $f(1) = 0$, llegamos a que

$$f(w) = \frac{h}{\pi} \left[\sqrt{w^2 - 1} + \log \left(w + \sqrt{w^2 + 1} \right) \right]. \quad (5.5)$$

Tomando las ramas adecuadas de estas funciones, podemos ver representados los resultados en la figura 5.2.

5.3. Métodos aproximados

Más allá del interés teórico, si se intenta buscar una aplicación práctica del teorema de la aplicación de Riemann, como las descritas en el apartado anterior, muchas de ellas requieren de una expresión para la aplicación en cuestión, que el teorema no proporciona. Es por ello que puede resultar interesante tratar de dar algún método para poder encontrar dicha función, aunque sea a nivel estimativo. El siguiente algoritmo trata de dar una solución a este problema, proporcionando un método general e iterativo. Partiendo de un dominio simplemente conexo, construye una función que lo aplica al interior del disco unidad \mathbb{D} y, en cada iteración, la imagen del dominio crece aumentando de tamaño, aproximándose cada vez más a \mathbb{D} .

En primer lugar, este método construye una función F tal que la imagen de la región U esté contenida en el disco unidad y tal que $F(z_0) = 0$ y $F'(z_0) > 0$. Para ello, se sigue un razonamiento similar al realizado en la demostración del teorema de la aplicación de Riemann, donde explicitaremos su construcción [5].

1. Consideremos la función $f_1(z) = \sqrt{z-b}$, donde $b \notin U$. Además, consideremos el disco $\Delta = \overline{D}(f_1(z_0), r) \subset f_1(U)$. Por lo comprobado en la demostración del teorema de la aplicación de Riemann, se tiene que $-\Delta \cap f_1(U) = \emptyset$.
2. Consideremos la transformación de Möbius $f_2(z) = \frac{r}{z+f_1(z_0)}$. Esta lleva el disco $-\Delta$ al exterior del disco unidad, $f_2(-\Delta) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, por lo que $f_2(f_1(U)) \subset \mathbb{D}$.
3. Sea $c = f_2(f_1(z_0))$. Consideremos el automorfismo del disco $f_3(z) = \frac{z-c}{1-\bar{c}z}$, que satisface $f_3(c) = 0$. Por tanto, se tiene que $f_3(f_2(f_1(z_0))) = 0$.
4. Por último, consideremos $F = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, donde $f_4(z) = e^{-i\theta}$, siendo $\theta = \arg((f_3 \circ f_2 \circ f_1)'(z_0))$. Esta función cumple las condiciones $F(z_0) = 0$, $F'(z_0) > 0$ y $F(U) \subset \mathbb{D}$.

El siguiente paso, será construir una función G tal que $G(U)$ contenga estrictamente a $D_0 = F(U)$, siendo F la función construida anteriormente, ampliando así la región alcanzada en la iteración anterior. Para ello, nos cercioraremos de que $G'(z_0) > F'(z_0)$. Con ese objetivo, realizaremos las siguientes composiciones $G = g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ F$ [5].

1. En primer lugar, consideremos el automorfismo del disco $g_1(z) = \frac{z-b}{1-\bar{b}z}$, con $b \in \mathbb{D} \setminus D_0$, en particular $b \neq 0$, ya que $F(z_0) = 0$. Esta función transforma el conjunto D_0 en otro simplemente conexo $D_1 = g_1(D_0)$ contenido en el disco unidad. Además, cumple que $g_1(0) = -b$, $g_1'(0) = 1 - |b|^2$ y $0 \notin g_1(D_0) = D_1$.
2. Consideremos la función $g_2(z) = \sqrt{z}$ holomorfa por el lema 5.1. Es un biholomorfismo de D_1 a $D_2 = g_2(D_1)$ tal que, denotando $c = g_2(-b)$, $g_2'(-b) = 1/(2c)$.
3. Por último, sea el automorfismo del disco $g_3(z) = e^{i \arg c} \frac{z-c}{1-\bar{c}z}$. La región $D_3 = g_3(D_2)$ está claramente contenida en \mathbb{D} , se cumple que $0 \in D_3$ y $g_3'(c) = e^{i \arg c} / (1 - |c|^2)$.

Esta función $G = g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ F$ cumple que $G'(z_0) > F'(z_0)$. En efecto,

$$G'(z_0) = g_3'(c)g_2'(-b)g_1'(0)F'(z_0) = \left(\frac{e^{i \arg c}}{1 - |c|^2} \right) \left(\frac{1}{2c} \right) (1 - |b|^2)F'(z_0),$$

usando que $|b| = |c|^2$, y que $1 + |c|^2 > 2|c|$, se tiene que

$$G'(z_0) = \frac{1 - |c|^4}{2(1 - |c|^2)|c|} F'(z_0) = \frac{1 + |c|^2}{2|c|} F'(z_0) > F'(z_0).$$

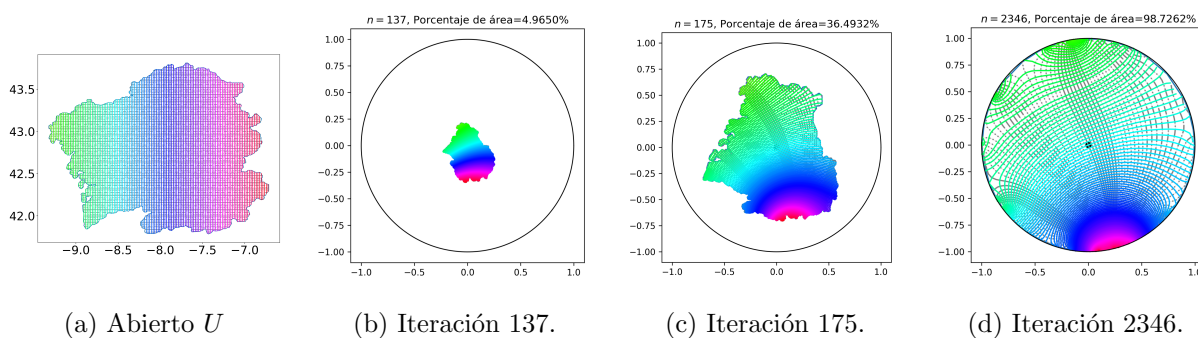


Figura 5.3: Aplicación del método descrito para el abierto U definido por las fronteras de Galicia (sin tener en cuenta islas, para que sea simplemente conexo). Elaboración propia, el código empleado está basado en [9].

Con esto ya tendríamos descrito el método iterativo. En primer lugar, en caso de que el dominio U no estuviese contenido en el disco unidad, habría que construir la función F , para así contar con un dominio $D_0 = F(U) \subset \mathbb{D}$. A continuación, a partir de esta situación inicial, se determina de manera iterativa una función G_{n+1} a partir de G_n obtenida en la iteración anterior.

Este método lo vemos aplicado en la figura 5.3. Partimos del territorio peninsular gallego, para evitar las islas y así contar con un conjunto simplemente conexo. Además, como punto z_0 se tomó el correspondiente a las coordenadas geográficas de Santiago de Compostela. Como vemos, este dominio no está contenido en el disco unidad pero, mediante el método iterativo propuesto, es posible construir una función que lleve un punto dado z_0 al origen y cuya imagen quede contenida en el disco unidad.

En iteraciones posteriores, se puede observar también en la figura 5.3 cómo el algoritmo crea funciones con derivadas en el punto z_0 cada vez mayores, haciendo que la imagen del dominio se vaya expandiendo, hasta llegar casi a la totalidad del disco. Cabe destacar la conformidad de la aplicación ya que se puede observar cómo las líneas perpendiculares en el dominio original siguen manteniendo esa propiedad en iteraciones sucesivas.

Capítulo 6

Conclusiones

A lo largo del documento, se ha puesto de manifiesto la profundidad del teorema de la aplicación de Riemann, así como su importancia en el análisis complejo. Más allá de su formulación, una gran parte del valor de este teorema reside en la gran variedad de ideas que se requieren para su demostración. Se emplearon resultados fundamentales sobre funciones holomorfas, transformaciones de Möbius, el estudio del espacio métrico de las funciones holomorfas, así como resultados muy relevantes, como el teorema de Montel, Hurwitz y Ascoli-Arzelà.

El hecho de haber empleado todos estos resultados, además de haber podido dar una demostración rigurosa, permite también evidenciar cómo todos estos conceptos se integran dentro de una misma estructura teórica. Además, hemos podido hacer notar su relevancia no solo en el análisis complejo, que ya es más que suficiente, sino también fuera del mismo.

Se ha presentado un ejemplo basado en las transformaciones de Schwarz-Christoffel, una formulación de la función descrita por el teorema en un caso particular. Sin embargo, cabe destacar que este ejemplo tan solo abre la puerta a toda una amplia variedad de problemas que se pueden resolver con esta técnica. Por otra parte, también se da pie a tratar con dominios no poligonales, con el algoritmo descrito para hallar de manera aproximada el biholomorfismo entre un cierto conjunto y el disco unidad.

En este sentido, el recorrido no ha sido puramente técnico, sino también conceptual y transversal, permitiéndonos entender cómo un resultado clásico aún puede ser el primer paso para explorar nuevas conexiones dentro de las matemáticas y abrir caminos hacia desarrollos teóricos más amplios o aplicaciones interdisciplinarias.

Bibliografía

- [1] T. Needham, *Visual Complex Analysis*, 25th Anniversary ed. Oxford, U.K.: Oxford University Press, 2023.
- [2] R. Siliciano, “Constructing Mobius Transformations with Spheres”, *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, vol. 13, no. 2, Art. 8, 2012.
- [3] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*. New York, NY, USA: Springer, 1978.
- [4] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*, 3rd ed. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 1978.
- [5] B. P. Palka, *An Introduction to Complex Function Theory*. New York, NY, USA: Springer, 1991.
- [6] I. O. Ibrahim, I. Abdullahi, and M. Salisu, ”Solution to Ideal Fluid Flow Using Schwarz–Christoffel Transformation as a Conformal Mapping Method,” *Journal of Mathematics and Statistical Research*, vol. 7, no. 1, pp. 194–200, 2025.
- [7] J. L. Walsh, “History of the Riemann Mapping Theorem”, *The American Mathematical Monthly*, vol. 80, no. 3, pp. 270–276, 1973.
- [8] L. Ahlfors, E. Calabi, M. Morse, L. Sario, and D. Spencer, Eds., *Developments of the Theory of Conformal Mapping and Riemann Surfaces Through a Century*. New Jersey, USA: Princeton University Press, 1953, pp. 3–4.
- [9] Penttinen, T. (27 de junio de 2022). *Riemann mapping theorem visualization (Koebe approach)* [Vídeo]. YouTube. Consultado el 19 de junio de 2025. https://www.youtube.com/watch?v=B0e_X9DEyq8&ab_channel=TommiPenttinen