



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabalho Fin de Grao

O movemento Kepleriano perturbado

Diego Anido Pereiro

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

O movemento Kepleriano perturbado

Diego Anido Pereiro

Setembro, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Astronomía e Astrofísica
Título: O movemento Kepleriano perturbado
Breve descrición do contido
<p>O problema de dous corpos, base da Mecánica Celeste clásica, e integrable e a súa solución xeral coñécese co nome de movemento kepleriano. Porén, este problema ideal aparece na natureza lixeiramente modificado pola presenza de potenciais que xeran solucións “próximas” dependentes dun pequeno parámetro. Por exemplo no movemento dun satélite artificial en torno á Terra, ou mesmo o movemento da Lúa coa presenza lonxana do Sol. Aparece así o chamado movemento kepleriano perturbado, do que é posible obter solucións cun alto grado de aproximación utilizando técnicas tanto analíticas como semianalíticas e numéricas. O presente TFG tenta dar unha visión matemática desta cuestión que ten numerosas aplicacións en Astronomía.</p>
Outras observacións
<p>O presente Traballo Fin de Grao foi titorizado polos profesores José Ángel Docobo e Pedro Pablo Campos Díaz.</p>

Agradecementos

Quero dar grazas á miña familia e ás miñas amigas (e compañeiras de vida) de Vigo, que sempre estiveron aí e me apoiaron tanto nos bos como nos malos momentos; ás miñas compañeiras e os meus compañeiros do Grao de Matemáticas, que fixeron posible levar con mais ánimo todos estes anos de estudo; e a toda a xente tan especial que coñecín na miña estancia en Santiago, e que sempre levarei no corazón.

Agradecer enormemente aos profesores José Ángel Docobo, o meu titor, e Pedro Pablo Campos, o meu cotitor, por aceptar levar a cabo este Traballo Fin de Grao propiciado e guiarme no seu desenvolvemento, pois sen a súa axuda non sería posible.

A todos eles, dedícolles este traballo.

Índice xeral

Resumo	IV
Resumo	X
Introdución	XIII
1. O movemento kepleriano perturbado	1
1.1. O problema de dous corpos	2
1.2. Os elementos orbitais	6
1.3. O problema con perturbacións	8
1.3.1. Método de variación de constantes: As ecuacións de Lagrange	10
2. A orbita dun satélite artificial	13
2.1. Obtención do potencial terrestre	13
2.2. Dedución dunha función perturbadora simplificada	16
3. O comezo da teoría de perturbacións: as teorías da Lúa	21
3.1. O problema de n corpos	22
3.1.1. Ecuacións do movemento de tres corpos	24
3.1.2. O problema de tres corpos xerarquizado	25
3.2. As teorías da Lúa	26
3.2.1. Modelos tradicionais do movemento lunar	27
3.2.2. Newton e a teoría lunar	28
3.2.3. Desenvolvemento das teorías da Lúa	28
4. O problema restrinxido circular de tres corpos	31
4.1. Motivación e formulación do problema	31
4.2. O caso restrinxido circular plano	33
4.2.1. Establecendo as ecuacións de movemento	33

4.3. Unha nova constante: a integral de Jacobi	35
4.4. Singularidades do sistema: os puntos de Lagrange	37
4.4.1. Estabilidade dos puntos de Lagrange	39
4.5. Contornos de velocidade cero	41
4.6. Reducindo a orde de integración	44
5. Conclusións	45
Bibliografía	47

Resumo

Neste traballo trataremos o tema do movemento kepleriano perturbado, un tipo de movemento orbital que ten como base o movemento kepleriano do Problema de dous corpos, que xorde por pequenas alteracións destas órbitas keplerianas, provocadas por diferentes causas. O obxectivo consiste en explicar cando aparece este movemento e saber en que medida afecta ao modelo teórico, exemplificando este modelo na órbita dun satélite artificial, perturbada por causa do achatamento da Terra. Tamén faremos un percorrido polo Problema de tres corpos e un caso particular do Problema de n corpos, dado que a través do sistema Sol-Terra-Lúa, que é un caso do Problema de tres corpos xerarquizado, comezou a desenvolverse toda unha teoría de perturbacións, onde se tiña en conta a influencia dos demais corpos no movemento da Lúa. Finalmente, tamén introduciremos o Problema restrinxido de tres corpos (circular plano) pois tamén nos permitirá analizar como evoluciona un caso particular de tres corpos cando un deles non é influente no movemento dos outros corpos, como ocorre por exemplo cun exoplaneta que se move baixo a acción gravitacional dunha estrela binaria.

Abstract

In this work, we will deal with the subject of disturbed Keplerian Movement, a type of orbital movement, like the Keplerian movement of the Two-Body Problem, which is developed by small alteration of these Keplerian orbits, caused by different factors. The objective is to explain when this movement appears and to know to what extent it can affect the theoretical Keplerian model, exemplifying this model in the orbit of an artificial satellite, which is disturbed by the flattening of the Earth. We will also take into account the Three-Body Problem, a particular case of n -body Problem, because, through the Sun-Earth-Moon system (it can be classified as a hierarchical three-body movement), it began to unfold a whole theory of perturbations where the influence of other bodies was considered for studying the Moon movement. Finally, we will introduce the Restricted (Circular Plane) three-body Problem, since it allows us to analyse an especial case that evolves when the orbiting body, due to its small mass, it does not influe on the movement of the other two bodies, as occurs with an exoplanet moving around a binary star.

Introdución

O movemento kepleriano obtido como solución do Problema de dous corpos foi un punto de inflexión para o desenvolvemento da Mecánica Celeste, ratificando en gran medida comportamento dos astros no Sistema Solar que se formulaba nas Leis de Kepler. Non obstante, este modelo teórico non é aplicable tan efectivamente como se pensaba na realidade do universo, pois está condicionado a certas hipóteses que non sempre podemos supoñer certas. Sen entrar en detalles nin formalismos, estas condicións sintetízanse en que o sistema de dous corpos debe estar completamente illado, sen ningunha interacción máis ca o efecto da gravitación e cunha xeometría concreta dos corpos (i.e., puntuais ou esféricas) con masas constantes. É mais que evidente que estas condicións son moi difíciles de cumprir no Universo, pois os corpos celestes non se encontran illados do resto e interactúan sen distinción con outros corpos mediante as atraccións gravitacionais mutuas; a xeometría e forma dos corpos celestes pode ser variada, segundo cal sexa o tipo de corpo; e algúns astros perden constantemente masa, como as estrelas ou os cometas. Non obstante, aínda que existen múltiples causantes de que o movemento se afaste do modelo kepleriano, pode suceder que os seus efectos nas órbitas non sexan tan drásticos, e presentan un movemento, en certo modo, semellante ao kepleriano sen chegar a selo.

No primeiro capítulo, trataremos o movemento kepleriano perturbado como tal, partindo do Problema de dous corpos como base para chegar á formulación deste novo tipo de movemento próximo ao kepleriano. Nel tamén falaremos dos elementos orbitais, que caracterizan as órbitas keplerianas, e como podemos utilizalos na resolución do problema perturbado.

No segundo capítulo estudaremos un caso particular de movemento kepleriano perturbado como é a órbita dun satélite artificial. A dificultade deste problema reside en que a causa perturbadora non é directa, como é unha forza gravitacional exercida por outro corpo, senón que reside na xeometría da Terra. Se traballara este problema partindo de considerar a Terra como un sólido ríxido, procurando chegar a unha expresión do potencial perturbador que poidamos utilizar para estudar en que medida afecta a non esfericidade do planeta na órbita do satélite.

Nos restantes capítulos xa entraremos na área do Problema de tres corpos, co que nos permitirá formular o problema de tres corpos xerarquizado, no que podemos abordar co que se comenzou a establecer toda a teoría de perturbacións: a teoría da Lúa, así como entrar no Problema restrinxido de tres corpos, centrándonos no caso circular (orbitas circulares dos corpos principais) e plano (o movemento dos corpos residen no mesmo plano orbital), que poderemos aplicar a movementos de planetas que se moven arredor dun sistema binario masivo.

Capítulo 1

O movemento kepleriano perturbado

Dende a antigüidade, unha das preguntas máis frecuentes tanto dos científicos como da xente en xeral que miraban ao ceo era a causa e forma do movemento dos astros que observabamos. A pesar da evolución nas teorías neste campo que buscaban dar resposta a esta cuestión, como o modelo xeocéntrico do Universo, que estableceu Ptolomeo, e posteriormente substituído polo modelo heliocéntrico, proposto por Copérnico; non foi ata o establecemento de tres leis fundamentais, deducidas por Johannes Kepler, a partir dos datos observados polo seu mestre Tycho Brahe, cando a astronomía deu un gran avance converténdose en ciencia. Ditas leis fórmulanse como segue:

1. Os planetas do Sistema Solar móvense en órbitas elípticas ao redor do Sol, nas cales este ocupa un foco. (1609)
2. Para cada planeta, as áreas descritas polo radio vector que une o Sol co planeta son proporcionais aos tempos empregados en describila. (1609)
3. Os cubos dos semieixes maiores das órbitas planetarias son proporcionais aos cadrados dos tempos empregados en recorrelas. (1619)

Aínda que estas leis empíricas foron propostas para dar unha explicación ao movemento dos planetas ao redor do Sol, máis adiante pódense ratificar, e incluso estender con lixeiras modificacións a movementos relativos doutros corpos celestes (ou, nun caso máis xeral, calquera dúas masas puntuais que presenten un movemento similar), coa *lei de gravitación universal* proporcionada

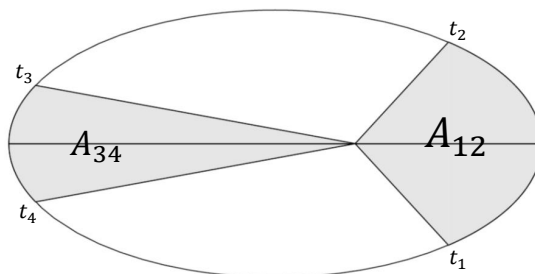


Figura 1.1: Representación gráfica da Lei das áreas ($A_{12} = A_{34}$ sempre que $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$).

por Isaac Newton, dando unha xeneralidade que nos permite formular en problemas matemáticos a cuestión de determinar o movemento dos corpos celestes. A este tipo de problemas chamarémoslle *Problema de n corpos*, sendo n o número de corpos que interveñen no sistema dinámico do problema.

A pesar de que o estudo desta cuestión evolucionou en gran medida a partir das leis nomeadas anteriormente, na actualidade aínda segue sendo imposible calcular e determinar analiticamente as posicións o movemento dos corpos celestes en tódolos diversos casos que nos podemos encontrar no Universo, e nomeadamente cando hai máis de dous participando. Pero, por outra banda, é importante destacar que púidose achar solucións analíticas pechadas para certos casos, e aproximadas noutros mediante técnicas analíticas, semianalíticas ou numéricas.

1.1. O problema de dous corpos

Un destes casos, sendo máis simple de todos e a base da Mecánica Celeste clásica, é o denominado *Problema de dous corpos*. Este problema consiste no "estudo do movemento de dúas masas puntuais que se atraen seguindo a Lei de Gravitación Universal", sendo o problema matemático a resolver:

"Dadas as posicións e velocidades de dúas partículas con masas coñecidas nun instante de tempo, que se moven polas forzas gravitacionais mutuas, calcular as súas posicións e velocidades para calquera outro instante de tempo."

Neste caso, estamos a considerar que as partículas con masa son corpos celestes, como as estrelas, os planetas ou as súas lúas, pero tamén outros corpos como asteroides ou satélites artificiais. Algúns exemplos no que poderíamos aplicar este problema é a órbita da Terra en torno ao Sol, ou o movemento dunha estrela dobre coas súas compoñentes ven separadas, supoñendo desprezables forzas externas existentes producidas pola atracción doutros corpos celestes.

Este problema diferénciase do resto de problemas xerais de n corpos no coñecemento dunha solución analítica exacta. Isto débese a que, para a integración dos problemas xerais de n corpos, onde $n \geq 3$, necesitamos máis constantes de integración independentes das que actualmente coñecemos, pero as características do problema de dous corpos permítenos conseguir as constantes necesarias e suficientes para integralo completamente. Para iso, transformamos o Problema de dous corpos nun problema equivalente, que se fundamenta, por unha banda, en determinar o movemento relativo dun dos corpos respecto doutro e, por outra banda, en obter o movemento do centro de masas dos corpos. A unión destas dúas traxectorias conseguimos acadar como é o comportamento do sistema dinámico de

dous corpos.

Matematicamente, se consideramos $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ os vectores de posición dos corpos con masas m_1 e m_2 , respectivamente, nun sistema de referencia tridimensional fixo, podemos reescribilos como

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_0(t) - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_0(t) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}(t), \quad (1.1)$$

onde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ é o vector de posición da masa m_2 respecto da masa m_1 , sendo

$$\mathbf{r}_0 = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (1.2)$$

o vector de posición do centro de masas.

Agora necesitamos obter as ecuacións que determinan o movemento do centro de masas e o movemento relativo dos corpos. Para iso necesitamos a Lei de Gravitación Universal, xunto coos postulados da Mecánica Newtoniana.

- Coa Lei de Gravitación Universal, podemos afirmar que a forza que exerce o corpo con masa m_1 sobre outro corpo de masa m_2 , sexa \mathbf{F}_1 , ven dada pola expresión

$$\mathbf{F}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \quad (1.3)$$

e polo 3^o postulado da Mecánica Clásica ou de acción e reacción, onde se enuncia que toda forza que actúa nun corpo produce unha forza oposta de igual magnitude, indicáanos que $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$, sendo \mathbf{F}_2 á forza que exerce o corpo con masa m_2 no outro corpo de masa m_1 . Ademais, aplicando o 2^o postulado da Mecánica Clásica, podemos obter as igualdades

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_2 & = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_1 & = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}, \end{cases} \quad (1.4)$$

([2], [3], [8]), coas cales podemos chegar ás ecuacións de movemento nas que estamos a procurar.

- Por unha banda, se sumamos as expresións (1.4) temos

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0}. \quad (1.5)$$

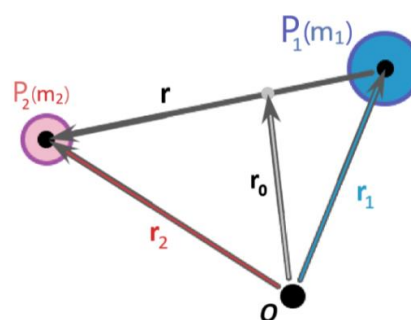


Figura 1.2: Vectores involucrados no Problema de dous corpos.

A partires desta igualdade deduciremos o movemento no centro de masas. Por outra banda, se ao vector $\ddot{\mathbf{r}}_2$ restámoslle o vector $\ddot{\mathbf{r}}_1$, resulta

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = -G \frac{m_2}{r^3} \mathbf{r} - G \frac{m_1}{r^3} \mathbf{r} = -G \frac{m_1 + m_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (1.6)$$

chegando a

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{0}, \quad (1.7)$$

onde $\mu = G(m_1 + m_2)$. Esta ecuación diferencial vectorial describe o movemento relativo dun corpo respecto a outro, e é equivalente a un sistema de tres ecuacións diferenciais lineais de orde dous. A súa resolución dependerá da existencia de seis constantes de integración independentes.

Usando agora a ecuación (1.5) é sinxelo deducir o movemento do centro de masas, pois unicamente basta con integrala dúas veces respecto do tempo, chegando a

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \quad (1.8)$$

sendo os vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} constantes, e dado que sabemos da igualdade $M\mathbf{r}_0 = m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2$, sendo $M = m_1 + m_2$, verificamos finalmente que

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{M} (\mathbf{a}t + \mathbf{b}) = \mathbf{A}t + \mathbf{B}, \quad (1.9)$$

obtendo así a posición do centro de masas, que depende do tempo e de seis constantes, que son as compoñentes dos vectores \mathbf{A} e \mathbf{B} , resultantes desta integración. Cabe destacar que este resultado indica que o centro de masas permanece en repouso (se $\mathbf{A} = \mathbf{0}$) ou, de moverse, faino nun movemento rectilíneo uniforme.

En canto a ecuación (1.7), a súa integración non é inmediata. Cómpre ir obtendo secuencialmente as seis constantes de integración que necesitamos.

- Multiplicando vectorialmente a ecuación (1.7) co vector de posición \mathbf{r} , obtemos a ecuación

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0},$$

conseguindo así a integral primeira $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = 2\mathbf{c}$, onde obtemos un vector constante que coincide co vector velocidade areolar, que é perpendicular ao vector de posición. O vector \mathbf{c} tamén podemos denominalo como momento angular. Multiplicando agora escalarmente polo vector de posición, \mathbf{r} , resulta $\mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = 0$. De aquí dedúcese que a traxectoria ten que ser necesariamente plana, pois o vector \mathbf{r} permanece perpendicular ao vector \mathbf{c} .

- Outra integral primeira obtense multiplicando vectorialmente a velocidade areolar coa ecuación (1.7), de xeito que

$$2\mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} [(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r}]$$

coa que conseguimos a integral primeira

$$2\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}} = \mu \left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \boldsymbol{\varepsilon} \right)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vector constante de integración. A partires desta expresión, dedúcese

$$r = \frac{4c^2/\mu}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (1.10)$$

sendo $\varepsilon = |\boldsymbol{\varepsilon}|$ o módulo do vector constante, que resulta estar dirixido cara a posición de mínima distancia (periastro) entre os dous corpos, e φ o ángulo que forman os vectores $\boldsymbol{\varepsilon}$ e \mathbf{r} . Observamos que a ecuación (1.10) coincide coa ecuación polar dunha cónica

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}. \quad (1.11)$$

De aquí dedúcese que

$$p = \frac{4c^2}{\mu}, \quad e = \varepsilon, \quad f = \varphi. \quad (1.12)$$

Así queda probado que a traxectoria relativa no Problema de dous corpos é unha cónica que verifica a lei das áreas. Ademais, temos que o módulo do vector constante $\boldsymbol{\varepsilon}$ corresponderase co valor da excentricidade da órbita elíptica.

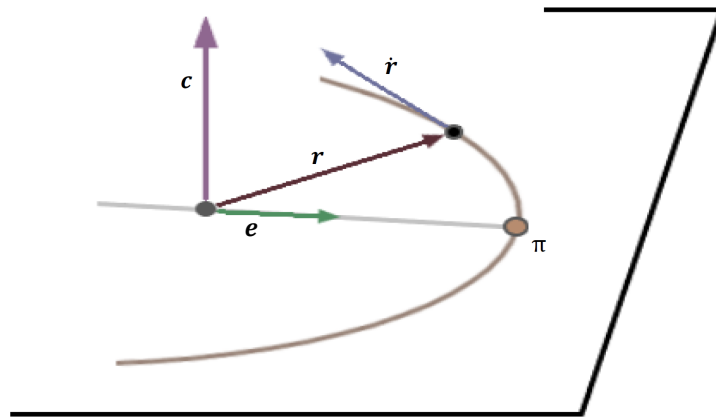


Figura 1.3: Vectores \mathbf{r} , $\dot{\mathbf{r}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{c} no Problema de dous corpos.

Con todo isto, temos 5 constantes de integración independentes, pois temos tres constantes que son as compoñentes do vector velocidade areolar, \mathbf{c} , e as outras tres que corresponden ao vector constante $\boldsymbol{\varepsilon}$, coa relación de dependencia $\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0$.

- A última constante de integración independente próbase que é o instante de paso polo periastro, denotado por T . Esta nova constante aparece na lei horaria do movemento, aquela que relaciona o tempo coa distancia, r , ou da anomalía verdadeira, f . Neste caso, para un movemento kepleriano elíptico, esta ecuación é a denominada ecuación de Kepler:

$$M = n(t - T) = E - e \operatorname{sen} E, \quad (1.13)$$

onde E é unha variable angular, denominada anomalía excéntrica, que podemos relacionar coa distancia relativa dos corpos, de xeito que $r = a(1 - e \cos E)$.

Mentres que coas cinco primeiras constantes nos explicaban o movemento nun sentido xeométrico, coa ecuación de Kepler podemos determinar o movemento relativo dos corpos en función do tempo e, así, ter integrado completamente o Problema de dous corpos. A solución obtida do Problema de dous corpos tamén denomínase Movemento Kepleriano.

1.2. Os elementos orbitais

As ecuación vectorial do problema (1.7) constitúe un sistema de seis ecuacións diferenciais de orden uno, e de acordo coa teoría de ecuacións diferenciais ordinarias una solución de dito sistema virá dada pola expresión $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{C})$, onde \mathbf{C} representa un vector de seis constantes independentes, que chamaremos variables de estado, que poden ser constantes da órbita ou variables particularizadas nun instante dado, nos permiten determinar calquera parámetro da órbita en calquera instante, é dicir, caracterizan a órbita.

Ao integrar o Problema de dous corpos tamén conseguimos as variables de estado necesarias para interpretar as ecuacións de movemento e caracterizar a órbita kepleriana, que son as compoñentes dos vectores constantes \mathbf{c} e $\boldsymbol{\varepsilon}$, coa relación de $\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0$, xunto coa época de paso polo periastro, T . Na práctica, podemos ter en conta calquera outras constantes que estean relacionadas con estas. Unha alternativa, máis natural dende un punto de vista das ecuacións diferenciais, é a través dos valores iniciais do vector de posición, $\mathbf{r}(t_0)$, e velocidade, $\mathbf{v}(t_0)$, para un instante dado, t_0 . En particular, para as órbitas elípticas tomaremos seis constantes (as mais usadas neste caso) que chamaremos elementos orbitais. Estas constantes son:

- T , a época de paso polo periastro.
- a , o semieixe maior.
- e , a excentricidade.

- i , a inclinación.
- Ω , o ángulo do nodo.
- ω , o argumento do periastro.

Por un lado, as constantes a e e que tomamos fan referencia á forma e dimensións da cónica (neste caso, elíptica) e a constante T caracteriza a súa dinámica, mentres que, as tres constantes angulares i, Ω, ω determinan a situación da órbita no espazo.

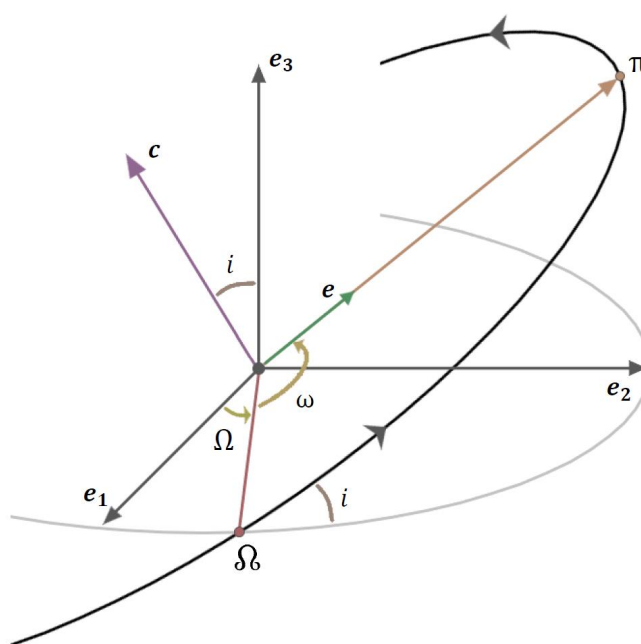


Figura 1.4: Elementos orbitais angulares da órbita kepleriana. (Os símbolos Ω e π corresponden ao nodo ascendente e ao periastro, respectivamente.)

Podemos definir os elementos orbitais angulares do seguinte xeito:

- A inclinación, i , é o ángulo que forma o vector momento angular \mathbf{c} co eixo \mathbf{e}_3 , no caso de estar traballando nun sistema e referencia destróxiro, tal como sucede no Sistema Solar. Representa o ángulo diedro entre o plano fundamental Oxy , con vectores directores \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , e o plano da órbita.
- Considerando que o plano orbital e o plano fundamental do sistema espacial non son paralelos, é dicir, que $i \neq 0$, necesariamente cortaranse nunha recta que chamaremos liña dos nodos. Tomaremos como dirección positiva da recta a que contén o nodo

ascendente, onde o orbitador pasa de coordenadas z negativas a positivas. O ángulo que hai entre o eixe positivo x , con vector director \mathbf{e}_1 , e a liña dos nodos será o que chamaremos ángulo do nodo, Ω .

- Por último, temos o argumento do periastro, ω , que corresponde ao ángulo formado pola liña dos nodos e a liña dos ápsides da órbita ou, equivalentemente, o ángulo que vai dende o nodo ascendente ata o periastro.

Con isto, podemos dicir que os dous ángulos Ω e i representan a posición do plano da órbita no espazo, mentres que o ángulo ω determina a posición relativa de la cónica no seu plano. Deste xeito, coñecidas as masas dos corpos, e polo tanto μ , o conxunto de elementos orbitais que caracterizan unha órbita kepleriana elíptica é $(T, a, e, i, \Omega, \omega)$.

1.3. O problema con perturbacións

A pesar de que o Problema de dous corpos ten a gran particularidade de ser integrado completamente, ven acompañado dalgúñas hipóteses que deben ser consideradas. Estas son:

- O sistema dinámico onde se moven os corpos considerase illado, onde única forza actúa no sistema é a atracción gravitacional mutua entre os dous corpos.
- Os corpos teñen que ser tratados como masas puntuais, é dicir, como partículas con masa. É importante ter en conta que o propio Newton estendeu toda a teoría deste problema ao caso en que os corpos fosen esferas sólidas homoxéneas.
- As masas dos corpos deben ser constantes, isto é, non pode haber ningún tipo de variación na magnitude das masas ao longo do tempo.

No momento en que non esteamos nestas condicións, o estudo do movemento relativo complicase enormemente. Porén, se as condicións aínda "son próximas" cabe agardar que o comportamento do movemento tamén o sexa. É aquí onde xorde o que coñecemos como *movemento kepleriano perturbado* [9], que podemos definir como un movemento próximo ao kepleriano, que difire del por causa da existencia dun potencial perturbador. Algúns exemplos son:

- O movemento orbital dun satélite artificial movéndose en torno á Terra. O noso planeta non é esférico, pero tampouco esta lonxe de selo. No capítulo seguinte veremos en máis profundidade este caso, onde consideraremos o planeta como un sólido ríxido que esta orbitado por unha masa puntual, o satélite.

- A órbita da Lúa en torno á Terra. Se ámbolos dous astros estiveran illados, estaríamos nas condicións dun movemento kepleriano (a falta de esfericidade da Terra inflúe moito menos debido á súa distancia coa Lúa), pero no Sistema Solar atópanse moitos máis astros, en especial o Sol que concentra a meirande parte da masa do sistema. Grazas á lonxana distancia da estrela, é posible que a Lúa se manteña cun movemento orbital estable, aínda que perturbado (de encontrarse a outra distancia mais próxima, probablemente a Lúa non sería o noso satélite natural).
- Unha estrela dobre coas súas compoñentes ben separadas. Este é un bo exemplo de Problema de Dous corpos, pero o inconveniente neste sistema é a continua perda de masa por radiación, logo tampouco nos encontramos teoricamente ante un movemento kepleriano. Afortunadamente, o ritmo de perda de masa é pequeno, logo a función $\mu = \mu(t)$, non sendo constante, anda preto de selo.

Aparte das perturbacións caracterizadas nos exemplos, existen moitas outras perturbadoras no Universo (rozamento da atmosfera, radiación solar, exacción de masa, curvatura do espazo-tempo...) que transforman un movemento kepleriano nun movemento perturbado. Estes tres casos exemplificados sintetizan en gran medida o que caracteriza un movemento kepleriano perturbado: existe unha causa directa ou indirecta suficientemente significativas como para modificar lixeiramente un movemento kepleriano pero sen producir cambios tan drásticos na órbita como para afastarse deste modelo teórico.

En canto ás ecuacións de movemento, a súa expresión é unha extensión de (1.7). Supoñendo que as masas son constantes (como nos dous primeiros exemplos anteriores) temos

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{F} \quad (1.14)$$

onde \mathbf{F} fai referencia á forza que modifica o movemento kepleriano. En xeral, esta forza perturbadora ven definida a partires do gradiente dunha función escalar, que denominaremos *función perturbadora* e denotaremos por \mathcal{R} . Esta función participa no potencial V de forma que $V = V_0 + R$, onde V_0 a función potencial referente ao movemento kepleriano elíptico. No terceiro caso antes comentado, sempre que poidamos consideralo como un Problema de dous corpos con lixeiras variacións de masa nos corpos, podemos describir o movemento relativo mediante a ecuación

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu(t) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{0}. \quad (1.15)$$

Neste último problema compre destacar que o movemento relativo non é o único que pode verse perturbado, o movemento do centro de masas tamén pode ser perturbado respecto do movemento kepleriano pola variación no tempo das masas, engadindo unha complicación máis ao problema.

Nas últimas décadas, no Observatorio Astronómico R.M.Aller da USC téñense abordado este tipo de estudos a través do desenvolvemento de distintas teses de doutoramento, dirixidas polo profesor José Ángel Docobo. Así, na súa propia tese [7] abórdase o denominado Problema estelar de tres corpos, o cal é en certo modo similar ao caso da Lúa pero agora as masas son comparables e a inclinación mutua entre a órbita interior (aquela que describe as dúas estrelas máis próximas entre sí) e a órbita exterior (a da estrela máis lonxana en torno ao centro de masas das outras dúas), xa non ten porque ser tan pequena como ocorre no caso do sistema Terra-Lúa-Sol (neste caso, a inclinación mutua das orbitas é de 5° aproximadamente). Sobre este mesmo tema, pero abordado con outros métodos analíticos de integración, Docobo dirixiulle a tese de doutorante ao profesor Alberto Abad [1], e ambos os dous fixeron o propio coa de Josefina Ling Ling [15]. Recentemente, ven de ser publicado un artigo de referencia sobre este problema, abordado neste caso co integrador numérico TIDES [10]. Sobre o problema de variación de masas, Docobo propuxo e dirixiu a tese de Cristina Prieto [18] sobre o problema de variación de masas lentamente decrecentes, a parte de distintas publicacións derivadas. Mais tarde tamén foi director de Manuel Andrade [3], na cal tívose en conta a influencia no "efecto periastro" na lei de perda de masa, así como do TFG de Hernán Cerviño [5]. Polo que atinxe ao movemento do satélite artificial, o número de contribucións sobre el é enorme, e actualmente Iago Isasi esta rematando a súa tese de doutoramento, baixo a dirección dos profesores Docobo e Abad, considerando non só o movemento orbital senón tamén o de rotación do satélite sobre sí mesmo

1.3.1. Método de variación de constantes: As ecuacións de Lagrange

Agora, unha vez identificado cal é o problema a abordar, como procedemos a estudalo? Dado que estes movementos achéganse a un movemento kepleriano, poden tratarse en primeira aproximación como un Problema de dous corpos. Partindo disto, podemos supoñer que o movemento relativo sempre está movéndose nunha cónica que é diferente en cada instante de tempo. Este método chamarémolo *Variación dos elementos*, *Variación dos parámetros* ou *Variación das constantes de integración*. A base deste método é poder definir a órbita real do movemento en función da variacións dos elementos orbitais, que caracterizan o movemento kepleriano, os cales vanse modificando en cada instante de tempo t , é dicir, deixan de ser constantes transformándose en funcións do tempo:

$$T = T(t), \quad e = e(t), \quad a = a(t), \quad i = i(t), \quad \Omega = \Omega(t), \quad \omega = \omega(t),$$

e, así, podemos calcular a órbita osculatriz en cada instante t .

e, invertendo esta matriz 6×6 dos corchetes de Lagrange, consegue chegar ao sistema de ecuacións anterior (1.16).

Hai que ter en conta que, ademais deste procedemento, o movemento kepleriano perturbado pode ser abordado en forma hamiltoniana. De feito, no libro *Astrodinámica* [2] abórdase a obtención destas ecuacións facendo uso das variables de Delaunay, (l, g, h, L, G, H) , que é un sistema canónico (sistema de variables coas que as ecuación de movemento toman forma hamiltoniana), definido como

$$\begin{aligned} l &= M, & g &= \omega, & h &= \Omega, \\ L &= \sqrt{\mu a}, & G &= L\sqrt{1-e^2}, & H &= G \cos i. \end{aligned}$$

Destacar tamén que estas ecuacións non son as únicas existentes para calcular a variación dos elementos. En [2] preséntase tamén outro sistema de ecuacións que permite obter estas variacións en función das compoñentes da forza perturbadora en vez do potencial perturbador. Estas ecuacións denominaranse ecuacións de Gauss.

Capítulo 2

A orbita dun satélite artificial

Nalgunhas ocasións, é bastante sinxelo obter a expresión do potencial perturbador que afecta a un movemento kepleriano (o potencial perturbador xerado pola atracción gravitacional doutros planetas que afecta á órbita da Terra), pero noutros casos coñecer este potencial perturbador non é inmediato, podendo chegar a ter unha expresión difícil de analizar. Neste capítulo imos establecer unha versión simplificada do potencial terrestre co obxecto de obter unha expresión sinxela pero realista da función perturbadora que desvía ao satélite artificial da órbita kepleriana, debido a falla de esfericidade da Terra. A idea é levar ditas funcións ás ecuacións de Lagrange (1.16) e establecer as perturbacións seculares que afecta ao movemento orbital do satélite.

2.1. Obtención do potencial terrestre

Consideremos un satélite artificial, P , cuxa masa pódese tomar por unidade e que está en movemento en torno á Terra [9]. Denotaremos por dm a masa dun elemento diferencial ou masa puntual da Terra. Nestas condicións, o potencial creado pola masa dm no satélite ven dada por

$$dV = -G \cdot \frac{dm}{\Delta}, \quad (2.1)$$

sendo $\Delta = \|\mathbf{\Delta}\| = \|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}\|$ a distancia entre o elemento de masa e mais o satélite. Na Figura 2.1, vemos que $\boldsymbol{\rho}$ é o

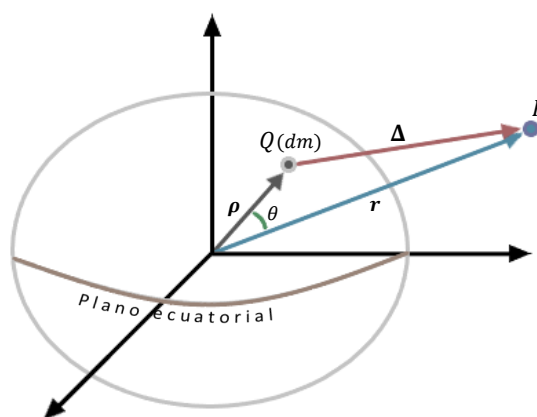


Figura 2.1: Vectores de posición que manexamos no estudo do movemento do satélite.

vector de posición da masa $Q(dm)$ e \mathbf{r} denota o vector de posición do satélite, en ámbolos casos con respecto ao centro de masas da Terra. Entón, esta claro que o potencial xerado pola Terra, é dicir, por todos os elementos de masa dm que a conforman, pode escribirse como

$$V = -G \int_M \frac{dm}{\Delta}, \quad (2.2)$$

onde M representa a masa do noso planeta.

Se lle chamamos agora θ ao ángulo que forman os vectores $\boldsymbol{\rho}$ e \mathbf{r} , temos que

$$\Delta^2 = \|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}\|^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta = r^2 (1 - 2h\alpha + h^2),$$

onde $h = \rho/r$ e $\alpha = \cos \theta$. Dado que sempre se cumprirá $\rho \ll r$, podemos poñer

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2h\alpha + h^2}}. \quad (2.3)$$

O segundo termo deste produto adoitase escribir nunha serie de potencias tal que os coeficientes sexan polinomios de Legendre, de forma que a integral (2.2) pode transformarse en

$$V = -\frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{M} \int_M P_n(\alpha) h^n \cdot dm. \quad (2.4)$$

Demostrándose que os primeiros termos son

$$V_0 = -\frac{GM}{r}, \quad V_1 = 0,$$

neste último caso, se a orixe de coordenadas coincide co centro de masas da Terra [9]. Entón chegamos á expresión

$$V = -\frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{M} \int_M P_n(\alpha) h^n \cdot dm \right]. \quad (2.5)$$

Agora, co obxectivo de obter unha forma máis simplificada do potencial, pasaremos o sistema a coordenadas polares, de forma que

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(r, \phi, \lambda), \quad \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\rho, \phi', \lambda'),$$

sendo (ϕ, λ) as coordenadas planetográficas do satélite e (ϕ', λ') as dun punto da Terra, polo que se poñemos $\alpha = \cos \theta$, obtense

$$\alpha = \sin \phi \sin \phi' + \cos \phi \cos \phi' \cos(\lambda - \lambda').$$

Así, levando esta expresión aos polinomios de Legendre en α , obtemos a igualdade

$$P_n(\alpha) = P_n(\sin \phi) P_n(\sin \phi') + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^k(\sin \phi) P_n^k(\sin \phi') \cos k(\lambda - \lambda'), \quad (2.6)$$

sendo P_n^k os polinomios asociados de Legendre.

Co cal, aplicando a ecuación (2.6) no potencial (2.5) conseguimos unha nova expresión desta función escalar, de forma que

$$V = -\frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R_e^n}{r^n} \left(J_n P_n(\text{sen } \phi) - \sum_{k=1}^n P_n(\text{sen } \phi) (C_n^k \cos k\lambda + S_n^k \text{sen } k\lambda) \right) \right], \quad (2.7)$$

sendo

$$\begin{aligned} J_n &= -\frac{1}{M} \int_M \frac{\rho^n}{R_e^n} P_n(\text{sen } \phi') \cdot dm, \\ C_n^k &= \frac{2}{M} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_M \frac{\rho^n}{R_e^n} P_n(\text{sen } \phi') \cos k\lambda' \cdot dm, \\ S_n^k &= \frac{2}{M} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_M \frac{\rho^n}{R_e^n} P_n(\text{sen } \phi') \text{sen } k\lambda' \cdot dm. \end{aligned}$$

Os coeficientes J_n denomínanse harmónicos zonais, mentres que os coeficientes C_n^k, S_n^k , con $k \neq 0$ ¹, chamámoslos harmónicos teserais.

Chegados a este punto, podemos asumir certas hipóteses que simplificarán a expresión (2.7).

- I. Se consideramos que o sólido (neste caso, a Terra) ten unha simetría de revolución, isto implica que o potencial sexa independente de λ' , a lonxitude planetográfica da Terra, e consecuentemente, as integrais que definen os harmónicos teserais sexan todas cero, é dicir, que $C_n^k = S_n^k = 0$.
- II. Podemos supoñer que a Terra ten tamén unha simetría ecuatorial, polo que os polinomios de Legendre avaliados en $\text{sen } \phi$, $P_n(\text{sen } \phi)$, con n impar tamén se anularán, por seren antisimétricos.

Polo tanto, atendendo as simplificacións anteriores, para este problema conseguimos unha función potencial mais sinxela, que estará definida como

$$V = -\frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_e^{2n}}{r^{2n}} J_{2n} P_{2n}(\text{sen } \phi) \right], \quad (2.8)$$

onde o primeiro termo do potencial fai referencia ao potencial kepleriano, que correspondería co potencial terrestre de ser unha esfera homoxénea, mentres que o resto de termos forman parte do potencial perturbador, xerado pola forma non esférica da Terra. Por tanto, a función perturbadora do movemento kepleriano do satélite, que denotaremos por R , é

$$\mathcal{R} = \frac{GM}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_e^{2n}}{r^{2n}} J_{2n} P_{2n}(\text{sen } \phi), \quad (2.9)$$

¹Cando $k = 0$, verificase $C_n^0 = -J_n$ e $S_n^0 = 0$

2.2. Dedución dunha función perturbadora simplificada

Como comentamos ao inicio do capítulo, a nosa idea é conseguir unha función perturbadora que nos permita analizar as perturbacións na órbita do satélite, pero a función perturbadora que conseguimos é bastante complicada de analizar. Ademais, nesta función non aparecen explicitamente os elementos orbitais. Entón, para poder estudar cales son os efectos das perturbacións debemos

1. Reducir a función perturbadora \mathcal{R} noutra función análoga, mais manexable.
2. Reformular a nova función, de xeito que a poidamos levar ás ecuacións de Lagrange.

Para simplificalo, tomaremos como nova función perturbadora o termo $V_2 = V_{|n=2}$ do potencial, e dicir, consideraremos

$$\mathcal{R} = -V_2 = -V_{|n=2} = -\frac{GM R_e^2}{r^3} J_2 P_2(\text{sen } \phi). \quad (2.10)$$

Ten sentido considerar o termo asociado ao coeficiente J_2 pois, aparte de ser o coeficiente de maior magnitude, esta estreitamente relacionado co achatamento da Terra. Isto podemos observalo se redefinimos J_2 nos momentos de inercia respecto dos eixos. Matematicamente, podemos definir as compoñentes tensoriais en coordenadas rectangulares [2]

$$I_{ij} = \int_M (\rho^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \cdot dm \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (2.11)$$

sendo $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ e

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

a delta de Kronecker. Tal e como definimos o coeficiente zonal J_2 , e considerando $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, teremos que

$$\begin{aligned} J_2 &= -\frac{1}{M} \int_M \frac{\rho^2}{R_e^2} P_2(\text{sen } \phi') \cdot dm = -\frac{1}{MR_e^2} \int_M \rho^2 \frac{1}{2} (3 \text{sen}^2 \phi' - 1) \cdot dm \\ &= -\frac{1}{2MR_e^2} \int_M \rho^2 (2 \text{sen}^2 \phi' - \cos^2 \phi') \cdot dm = \frac{1}{2MR_e^2} \int_M (\rho^2 \cos^2 \phi' - 2\rho^2 \text{sen}^2 \phi') \cdot dm \\ &= \frac{1}{2MR_e^2} \int_M (x^2 + y^2 - 2z^2) \cdot dm = \frac{1}{2MR_e^2} \int_M ((\rho^2 - x^2) + (\rho^2 - y^2) - 2(\rho^2 - z^2)) \cdot dm \\ &= \frac{1}{2MR_e^2} (2I_{33} - I_{11} - I_{22}). \end{aligned}$$

Entón, o coeficiente J_2 é unha medida da diferenza dos momentos de inercia entre o eixo de rotación Oz cos outros eixes (directrices do plano ecuatorial), é dicir, J_2 nos indicará o achatamento da Terra.²

²Se a Terra fora unha esfera homoxénea, entón $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ e, polo tanto, teríamos que $J_2 = 0$ (non existiría un achatamento no planeta).

Agora, simplificada a función perturbadora, reescribiremos tal que aparezan os elementos orbitais para, así, poder aplicarlle as ecuacións de Lagrange. En primeiro lugar, consideraremos o triángulo esférico da Figura 2.2, onde i será a inclinación da órbita e u a suma do ángulo do periastro, ω , e a anomalía verdadeira, f .

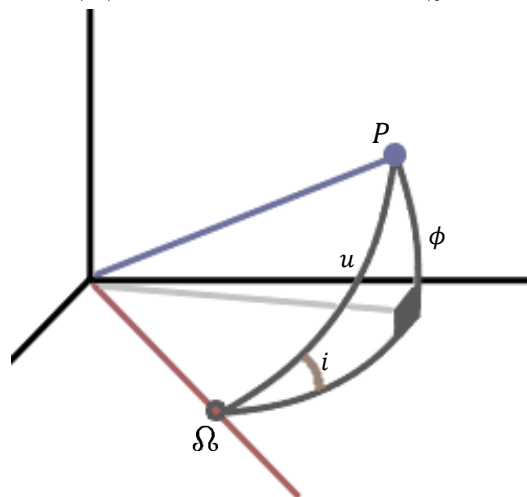


Figura 2.2: Triángulo de posición dun satélite, respecto do centro de masas do planeta.

Ao ser un triángulo esférico rectángulo, temos a igualdade $\sin \phi = \sin i \sin u$ e, polo tanto, obtemos por identidades trigonométricas

$$\sin^2 \phi = (1 - \cos^2 i) \frac{1 - \cos 2u}{2},$$

e considerando que $u = \omega + f$, temos que a función perturbadora queda

$$\mathcal{R} = \frac{GM J_2 R_e^2}{4r^3} [(3 \cos^2 i - 1) - 3(\cos^2 i - 1)(\cos 2\omega \cos 2f - \sin 2\omega \sin 2f)]. \quad (2.12)$$

Observamos que aínda temos \mathcal{R} en función de r e f , que a súa vez veñen definidos polos elementos orbitais. Entón, para evitar complicacións na aplicación das ecuacións de Lagrange imos partir de que procuramos obter perturbacións significativas na traxectoria do satélite, é dicir, as que se acumulen nun tempo considerable e non as que suceden dentro dun período (que poden ser periódicas ou de magnitude pequena), polo que o seguinte paso será "promediar" as perturbacións que suceden nun período P de tempo. En tal caso, a nova función perturbadora será un promedio da función perturbadora anterior ao completar unha revolución, e dicir,

$$\mathcal{R}' = \int_0^{2\pi} \mathcal{R} \cdot dM \quad (2.13)$$

(a integral pode realizarse en función da anomalía media, M , dado que tanto r como f poden definirse en función desta anomalía). Polo tanto, podemos chegar a que

$$\mathcal{R}' = \frac{GM J_2 R_e^2}{4a^3} [(3 \cos^2 i - 1) K_1 - 3(\cos^2 i - 1) (K_2 \cos 2\omega - K_3 \sin 2\omega)]. \quad (2.14)$$

sendo

$$K_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cdot dM = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} \quad (2.15)$$

$$K_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2f \cdot dM = 0 \quad (2.16)$$

$$K_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2f \cdot dM = 0. \quad (2.17)$$

Con isto podemos concluír finalmente nunha función perturbadora simplificada, na que só están presentes os elementos orbitais, que ven definida como

$$\mathcal{R}' = \frac{GM J_2 R_e^2}{4a^3 (1-e^2)^{3/2}} (3 \cos^2 i - 1). \quad (2.18)$$

Así, xa podemos facer uso das ecuacións de Lagrange para comprobar como se ve alterada a órbita kepleriana á que se aproxima o movemento do satélite.

★ Primeiramente, vemos que $\mathcal{R}' = \mathcal{R}'(a, e, i)$ e, polo tanto, temos que

$$\frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial M} = \frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial \Omega} = \frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial \omega} = 0.$$

Con isto, podemos dicir que o semieixe maior da elipse e a súa excentricidade, así como a inclinación da órbita, son valores constantes pois

$$\frac{da}{dt} = \frac{de}{dt} = \frac{di}{dt} = 0, \quad (2.19)$$

xa que estas derivadas temporais dependen das derivadas parciais anteriores.

★ Agora, calcularemos as derivadas parciais de \mathcal{R}' respecto das variables a, e, i . Entón,

$$\frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial a} = -\frac{3GM J_2 R_e^2}{4a^4 (1-e^2)^{3/2}} (3 \cos^2 i - 1) \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial e} = \frac{3GM J_2 R_e^2}{4a^3 (1-e^2)^{5/2}} e (3 \cos^2 i - 1) \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial i} = -\frac{GM J_2 R_e^2}{4a^3 (1-e^2)^{3/2}} 6 \cos i \sin i. \quad (2.22)$$

Co cal, obtemos as ecuacións

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3n J_2 R_e^2}{2a^2(1-e^2)^2} \cos i, \quad (2.23)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3n J_2 R_e^2}{4a^2(1-e^2)^2} (5 \cos^2 i - 1), \quad (2.24)$$

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{3n J_2 R_e^2}{4a^2(1-e^2)^{3/2}} (3 \cos^2 i - 1). \quad (2.25)$$

Podemos observar que as variacións veñen determinadas por constantes e polos elementos orbitais a, e, i , que xa deduciramos que son constantes, polo tanto, chegamos a que a variación dos elementos orbitais Ω, ω, T (este ultimo, concluímos pola última ecuación) será constante, podendo ser nula nalgúns casos concretos.

Capítulo 3

O comezo da teoría de perturbacións: as teorías da Lúa

Hoxe en día xa sabemos con certeza que os movementos orbitais da Terra arredor do Sol ou da Lúa en torno ao noso planeta non son movementos keplerianos perfectos. Aínda que resultan unha aproximación aceptable da súa orbita, non achegan a explicar na súa totalidade o comportamento que se observa, como é o caso do movemento do perihelio en sentido directo ou a rotación dos nodos da Lúa. Para poder explicar estes sucesos é necesario teren en conta que a atracción gravitacional mutua dos corpos non é a única causa que provoca e afecta ao movemento, como comentáramos no capítulo anterior. Aquí comezaría un novo estudo de cales son os fenómenos que provocan estes cambios nas órbitas, como as afectan e en que medida se producen. Todo este estudo concéntrase na teoría de perturbacións, que na Mecánica Celeste engloba todos os métodos e procedementos que nos permiten aproximar o movemento de corpos celeste dos que non podemos integrar exactamente a través das súas ecuacións. Nos sistemas dinámicos, a aplicación desta teoría nos Problemas perturbados de dous corpos encontrase nun punto bastante avanzado, en particular cando as perturbacións son produto de forzas externas que modifican o movemento kepleriano.

Actualmente esta teoría utilízase implicitamente cando analizamos un problema de Mecánica Celeste, como poden ser determinar os cambios de movemento dun corpo polo efecto doutro coñecido ou esclarecer cal é o causante das perturbacións (o planeta Neptuno foi descuberto a raíz das perturbacións que exercía no movemento de Urano). Pero como todo, esta teoría debeu xurdir dunha motivación previa para comezar o estudo deste campo. Onde se orixinou o interese por estudar o efecto das perturbacións no movemento dos astros? Cal foi a motivación que desencadeou esta teoría? A resposta encontrase no problema máis estudado da mecánica celeste: o movemento da Lúa.

Antes de proceder coas teorías sobre o movemento da Lúa que motivou a teoría de perturbacións nos sistemas dinámicos dos corpos celestes, primeiro imos introducir matematicamente o problema xeral de tres corpos e, posteriormente, estableceremos as ecuacións necesarias para estudar o problema do movemento da Lúa, que concluiremos como un movemento de dous corpos perturbado.

3.1. O problema de n corpos

Aínda que o problema de interese é o problema de tres corpos, en particular o sistema Sol-Terra-Lúa, este non deixa de ser unha particularización dun problema mais xeral, aínda sen resolver, que é o famoso *Problema de n corpos*, que foi definido e formulado de xeito preciso por Newton. Supoñendo n corpos con certa masa involucrados nun sistema dinámico illado e que poden ser considerados como masas puntuais (partículas con masa), podemos definir o problema de n corpos como unha extensión do de dous corpos, é dicir, é o "estudo do movemento de n masas puntuais ou puntos materiais que se atraen entre de acordo coa Lei de Gravitación Universal", ou sexa

Dadas as posicións e velocidades de tres ou máis partículas con masa nun certo instante movéndose baixo a influencia mutua das forzas gravitacionais, coñecidas as súas masas, trátase de calcular as súas posicións e velocidades en calquera outro instante de tempo.

Entón, considerando n partículas con masas m_i , sendo $i = 1, 2, \dots, n$, e con vectores de posición \mathbf{r}_i que teñen unha orixe, O , fixa ou, canto menos, sen aceleración (podendo ser o centro de masas do sistema), e denotando os seus vectores de posición relativos como $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$. A partires da ley de gravitación e da mecánica clásica, ámbalas dúas formuladas e establecidas por Newton, temos as seguintes ecuacións de movemento para o problema de n corpos [9],

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = G \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij}, \quad (j \neq i, \quad i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

onde G é a constante de gravitación universal. Deste problema xeral podemos obter 10 constantes de integración, as cales participan no movemento do centro de masas, na descrición dun plano invariante propio do sistema e na determinación da súa enerxía mecánica.

- Sumando ecuacións (3.1) obtemos a igualdade

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

a cal, integrando dúas veces, conclúe coa expresión do movemento do centro de masas

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{A} t + \mathbf{B}, \quad (3.3)$$

sendo $M = \sum_{i=1}^n m_i$. Con isto, obtemos que o centro de masa pode permanecer en repouso ou seguir un movemento rectilíneo uniforme, e se definimos as ecuacións respecto a un sistema de referencia tridimensional fixo pasando pola orixe O , a partir das condicións iniciais obtemos as seis constantes $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$, que son as compoñentes dos vectores \mathbf{a} e \mathbf{b} , respectivamente.¹

- Agora, realizando o produto vectorial de \mathbf{r}_i e $\ddot{\mathbf{r}}_i$ nas ecuacións (3.1) e sumándoas, obtemos as igualdades

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i = G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_{ij}, \quad j \neq i. \quad (3.4)$$

Como $\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j$ e, polas propiedades de produto vectorial, $\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_{ji} = -\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j$, entón

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{0}, \quad (3.5)$$

e, integrando respecto do tempo, chegamos á igualdade

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{C}, \quad (3.6)$$

que non é mais que a verificación de que a suma dos momentos angulares das masas do sistema é constante. Nun sistema de referencia rectangular fixo de orixe O , cada compoñente deste vector é unha constante de integración que sumamos ás seis anteriores, que veñen das integrais

$$\sum_{i=1}^n m_i (y_i \dot{z}_i - \dot{y}_i z_i) = C_x, \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i (x_i \dot{z}_i - \dot{x}_i z_i) = C_y, \quad (3.8)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i (x_i \dot{y}_i - \dot{y}_i x_i) = C_z, \quad (3.9)$$

e verifican que $\mathbf{C} = C_x^2 + C_y^2 + C_z^2$.

¹No caso de que a orixe do sistema de referencia sexa o centro de masas, temos que as constantes obtidas son todas nulas, pois $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

- A última constante que podemos obter ven dada pola integral de enerxía, demostrando que, ao estar tratando cun sistema conservativo, a enerxía total do sistema é constante. Para obter esta integral, primeiramente realizaremos o produto escalar entre os vectores $\dot{\mathbf{r}}_i$ e $\ddot{\mathbf{r}}_i$ e sumamos, obtemos a ecuación

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i = G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_{ij}, \quad j \neq i. \quad (3.10)$$

Sabendo que $\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_{ij} + \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \mathbf{r}_{ji} = -(\dot{\mathbf{r}}_j - \dot{\mathbf{r}}_i) \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = -\dot{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ji}$, ao integrar a igualdade anterior chegaremos á ecuación

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i - G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = E, \quad j \neq i, \quad (3.11)$$

onde o primeiro termo desta a expresión da enerxía cinética, que podemos denotar por T , e o segundo termo a referente á enerxía potencial, que denotaremos por V , de xeito que obtemos a igualdade $T + V = E$, onde E e a constante de integración que representa á enerxía mecánica do sistema.

Desafortunadamente, as 10 constantes de integración que determinamos anteriormente serán as únicas integrais alxebricamente independentes que podemos conseguir para caso xeral, demostrado por Bruns [4]. Para un problema de n corpos, con $3n$ ecuacións diferenciais de orden 2 que describen o movemento, necesitamos alo menos $6n$ constantes de integración que sexan independentes para resolver o problema. Por tanto, aínda necesitaríamos $6n - 10$ constantes independentes máis para integrar completamente o sistema, as cales non coñecemos.

3.1.1. Ecuacións do movemento de tres corpos

Centrándonos nos sistemas onde só participan tres corpos, é dicir, cando $n = 3$, podemos conseguir as ecuacións para o problema xeral de tres corpos a partires das ecuacións (3.1), de xeito que

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} + G \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13}, \quad (3.12)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = G \frac{m_2 m_1}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21} + G \frac{m_2 m_3}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23}, \quad (3.13)$$

$$m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 = G \frac{m_3 m_1}{r_{31}^3} \mathbf{r}_{31} + G \frac{m_3 m_2}{r_{32}^3} \mathbf{r}_{32}. \quad (3.14)$$

Entón, considerando as constantes de integración xa coñecidas para o problema de n corpos, particularizando ao caso de tres corpos, aínda debemos achar 8 novas constantes de integración para resolver este sistema e que sexan independentes ás 10 anteriormente

determinadas, que aínda non son coñecidas. En conclusión, para o problema xeral de tres corpos é imposible actualmente obter unha solución analítica e completa do problema.

Isto non significa que non poidamos obter solucións analíticas particulares para este problema e para o resto de problemas de n corpos, e máis grazas á análise numérica podemos conseguir integrar problemas tan complexos de resolver analiticamente como estes. Non obstante, cómpre resaltar que esta resolución non é exacta, senón que é froito dunha aproximación en maior ou menor grao, segundo o procedemento numérico que esteamos a utilizar e en que medida.

3.1.2. O problema de tres corpos xerarquizado

A pesar da limitación das constantes independentes no procedemento de resolución, se centramos os esforzos en casos máis específicos, que sexan mais restritivos pero que poidan ser resoltos, é posible integrar o problema de tres corpos, aínda que dita resolución, aproximadas na meirande parte dos casos, só poderá ser aplicable se se verifican esas condicións.

Algúns destes foron o problema lagrangiano de tres corpos, onde a configuración central dos tres corpos forman un triángulo equilátero, que Lagrange estudou e chegou a unha solución para o caso no que as distancias relativas permanecían constantes, e posteriormente Euler tamén acadou unha solución para o caso onde as distancias relativas podían variar, pero mantendo o ratio de variación constante; ou o problema de tres corpos unidimensional, onde consideramos unha configuración central colineal e os corpos describen tres orbitas keplerianas homotéticas co mesmo foco atractor no centro de masas. Pero o caso que máis nos será de interese, e posiblemente o mais estudado ao longo do tempo, é o problema de tres corpos xerarquizado [10], que se fundamenta no estudo do movemento de tres corpos, ou partículas con masas en xeral, no cal un dos tres corpos encóntrase máis afastado respecto ós outros dous corpos. Debido a esta característica, podemos tratar de resolver este problema transformándoo nun problema equivalente que consta de dúas partes. Considerando os corpos con masa m_1 e m_2 aqueles que se encontran máis próximos e o corpo con masa m_3 como o corpo afastado dos outros, temos que

- Debido á distancia do corpo afastado fronte á distancia dos outros máis próximos, sería factible tratar como problema dous corpos, nunha primeira aproximación, ao movemento que describe o corpo afastado co centro de masas dos corpos que están próximos, que podemos considerar un punto material con masa. Non obstante, se calculamos as ecuacións do movemento relativo para o terceiro corpo respecto do centro de masas do sistema binario, formado polos corpos que están próximos entre

sí, nin sequera son parecidas ou análogas ás do problema de dous corpos, dado que obtemos

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G(m_1 + m_3)\frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}^3} - Gm_2\frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} - G\frac{m_2m_3}{m_1 + m_2}\left(\frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} - \frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}^3}\right), \quad (3.15)$$

sendo $\mathbf{r} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_{cm}$, onde o vector \mathbf{r}_{cm} fai referencia á posición do centro de masas dos corpos que están próximos.

A aproximación deste movemento cun problema de dous corpos ven determinada precisamente pola distancia relativa deste corpo ao sistema binario. Para unha distancia suficientemente grande, poderíamos considerar as igualdades $r_{13} = r_{23} = r$ e así, reaxustando os termos na ecuación de movemento, conseguir obter a ecuación

$$\ddot{\mathbf{r}} + G(m_1 + m_2 + m_3)\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{0},$$

que si determina un movemento de dous corpos kepleriano. Por desgraza, esta suposición só é factible se as diferenzas de módulos entre estes vectores son suficientemente pequenos como para consideralos desprezables.

- Respecto ao movemento dos dous corpos máis próximos, como xa coñecemos o movemento do centro de masas, calculado a partires do movemento relativo do terceiro corpo respecto deste punto, fáltanos saber como é o movemento relativo destes corpos. As ecuacións de movemento que obtemos son as seguintes:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} + G(m_1 + m_2)\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = Gm_3\left(\frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} - \frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}^3}\right) \quad (3.16)$$

onde podemos observar que este movemento relativo de dous corpos é un problema de dous corpos perturbado debido ao efecto do corpo lonxano, que exerce unha atracción gravitacional sobre estes corpos.

Este problema de tres corpos ten unha importancia moi relevante na evolución da Mecánica Celeste, en especial no efecto das perturbacións dun corpo na orbita doutro. En particular, cómpre destacar un exemplo deste problema, que foi esencial no desenvolvemento da teoría de perturbacións: o sistema de tres corpos Sol-Terra-Lúa.

3.2. As teorías da Lúa

Dende que se comezou a estudar o movemento dos corpos celestes, a Lúa foi un dos astros que máis se estudou debido a súa proximidade e ás múltiples observacións que tiñamos e podiamos realizar. Neste momento, coñécese moi ben o seu movemento orbital

e, grazas ao estudo de numerosos matemáticos, conseguiuase ampliar o seu caso particular a situacións máis xerais. Toda esta contribución á Mecánica Celeste pasou primeiro por tratar de establecer e resolver o problema do movemento lunar, que podemos chamar *Teoría lunar* ou *Teoría da Lúa*, e no seu desenvolvemento podemos destacar personaxes importantes como Delaunay, Laplace, Lagrange, Hill ou Brown, aparte do famoso Newton.

3.2.1. Modelos tradicionais do movemento lunar

A órbita lunar está nun plano que presenta unha inclinación de 5° aproximadamente con respecto ao plano da eclíptica, sendo o seu movemento sensiblemente elíptico, cun semieixe maior cun valor medio de 384.400 km e unha excentricidade que oscila en torno a 0.0549. O modelo grego era moi similar ao presentado, pero en vez de considerar que o movemento relativo como unha elipse, este foi representado mediante círculos excéntricos (órbitas circulares onde o planeta rodeado non se encontra no centro deste círculo).

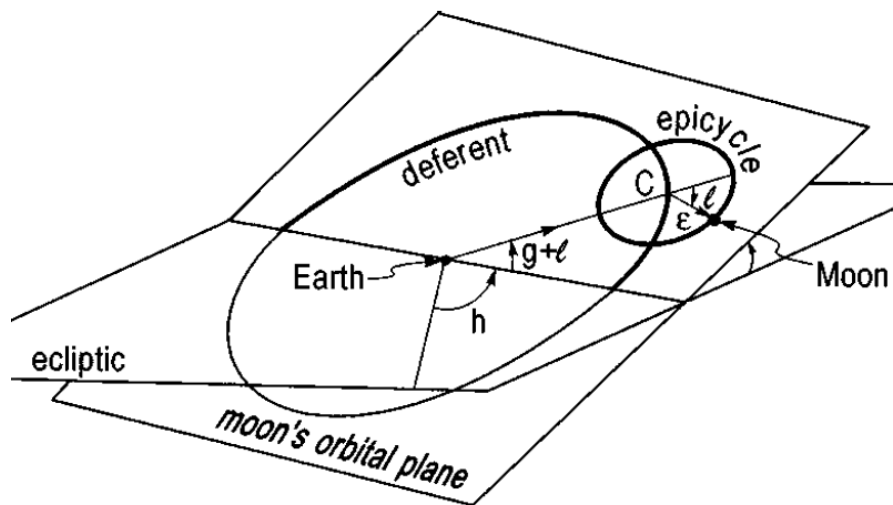


Figura 3.1: O modelo lunar básico na Antigüidade, onde o círculo excéntrico principal denomínase deferente e o círculo menor é chamado epíclito (imaxe recollida do artigo [11]).

Xa desde as civilizacións antigas eran coñecidos os períodos lunares así como o fenómeno da *evección*, que naquel momento era unha desigualdade periódica da traxectoria da Lúa respecto ao seu movemento medio xerada polo efecto do Sol. Tycho Brahe, mestre de Kepler, tamén conseguiu obter catro desigualdades máis durante o seu estudo do problema lunar, onde se destaca a *variación*, que é un efecto periódico que implica un retroceso das cuadraturas e un adianto dos plenilunios e novilunios dentro do mes lunar.

3.2.2. Newton e a teoría lunar

Esta teoría foi o primeiro caso onde a intuición xa non era suficiente para avanzar coa precisión, cada vez maior, das observacións. Newton intentou estudar e verificar algunhas posibles explicacións para o movemento lunar, como que o movemento segue unha órbita kepleriana elíptica rotando a unha velocidade uniforme. Tamén ou considerando que o movemento lunar provocado pola atracción mutua da Terra e do Sol achegárase á idea de Kepler se consideramos que a Terra pode moverse baixo a atracción gravitacional do Sol e da Lúa, en vez de forzala a permanecer estática. Pero non será ata que se estableza a Lei de Gravitación Universal que poderemos obter as ecuacións de movemento do sistema Sol-Terra-Lúa. Son as ecuacións obtidas para o problema de tres corpos xerarquizado (establecidas na sección anterior, cunha formulación máis actual), e así pódese establecer o chamado *Problema principal da teoría lunar*, que ven sendo "encontrar o movemento da Lúa relativa á Terra, supoñendo que o centro de masas da Terra e da Lúa móvese nunha elipse kepleriana fixa arredor do Sol e as tres masas concéntranse no seu centro de masas".

Ao mesmo tempo, outros matemáticos como Laplace ou Clairaut tamén andaban na procura dunha aproximación do movemento lunar, pero diferenciábanse de Newton na utilización da variable independente: preferían tomar a anomalía verdadeira por outorgar, nese momento, máis precisión nos posteriores cálculos empíricos. Con isto, Laplace conseguiu elaborar unha teoría lunar partindo de que o movemento correspondía cun movemento kepleriano modificado en tres dimensións. Ademais de validar a afirmación de Newton de que toda a astronomía no Sistema Solar pode reducirse as tres leis de movemento e á lei de Gravitación Universal, conseguiu chegar a unhas ecuacións diferenciais de movemento similares as newtonianas, partindo de coordenadas polares, e coa súa teoría conseguiu resultados precisos e próximos aos reais.

3.2.3. Desenvolvemento das teorías da Lúa

Coa chegada do século XIX, a Mecánica Celeste ten novos problemas para resolver cos novos descubrimentos desa época. En canto a teoría lunar, o seu desenvolvemento é cada vez máis pronunciado, comezan a realizarse novos avances e, coa chegada do formalismo canónico, tamén novos modelos para as teorías da Lúa. Achegamos aquí algúns destes fitos:

- A principal contribución de Lagrange foron as súas famosas ecuacións, (1.16), onde se expresaba nun contexto analítico os cambios que sufrían as órbitas mediante os elementos orbitais, coas que se alixeraron cálculos e obtiveron mellores correccións e resultados para explicar as perturbacións causadas. Aínda que para levalas á práctica, debeuse reescribir a función perturbadora en base a estes elementos orbitais.

- Delaunay tratou o problema mediante transformacións canónicas. Estableceu unhas novas variables, que constan de tres variables angulares e os seus respectivos momentos conxugados, coas que estableceu as ecuacións en forma hamiltoniana

$$\begin{aligned} \frac{d\ell}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial L}, & \frac{dg}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial G}, & \frac{dh}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial H}, \\ \frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial W}{\partial \ell}, & \frac{dG}{dt} &= -\frac{\partial W}{\partial g}, & \frac{dH}{dt} &= -\frac{\partial W}{\partial h}, \end{aligned}$$

sendo W a suma da enerxía cinética e a potencial dividido por μ , as cales utilizou na teoría da Lúa. Xunto con estas ecuacións, introduciu outro par de ecuacións para ter en conta o movemento do Sol ao considerar unha cuarta variable angular, $k = M'$ (anomalía media do Sol), xunto co seu momento conxugado, que denotaremos K .

- Hill, por outra banda formulou o problema considerando coordenadas rotatorias, en vez das sempre utilizadas cartesianas, e desenvolveu un método propio no que consideraba que a traxectoria da Lúa achegábase a unha orbita periódica co período correcto, que chamou "órbitas variacionais". Tamén foi utilizado para calcular o movemento do perixeo e os nodos lunares.

Posteriormente, xa a partires do século XX, coa concordancia dos resultados nos diferentes traballos realizados, tanto teóricos como empíricos e de cálculo, podíase dicir que o problema de tres corpos, Sol-Terra-Lúa estaba resolto con certa precisión. non obstante, aínda seguía existindo un certo erro na súa obtención que, a medida que pasaba o tempo, incrementaba coas novas observacións. Isto debíase a que esta resolución do problema estaba completa, pero non se traballou por conseguir unha aproximación mediante un enfoque analítico mais directo, o cal repercutía nas variacións destas aproximacións coas observacións realizadas (cun orde de segundos de arco). A creación de novos métodos e a aplicación dos novos avances nas matemáticas, como a as transformacións de Lie ou a xeometría simpléctica, conseguiu achegar máis precisión aos cálculos así como na mellora dunha aproximación analítica á Teoría da lúa, ratificando resultados xa obtidos e podendo establecer novas afirmacións deste movemento.

Mentres era resolto este problema, en paralelo andaban na procura de integrar outros problemas de tres corpos, como o problema restrinxido en dúas dimensión, pero víronse moi solapado polo estudo da teoría lunar, pois coa súa proximidade era posible realizar comprobacións empíricas para refutar a teoría proposta. Pero grazas a isto evolucionaron as técnicas de cálculo e a teoría orbital coñecida hoxe en día. Actualmente a distancia Terra-Lúa pode calcularse cun erro de só centímetros.

Capítulo 4

O problema restrinxido circular de tres corpos

Como xa explicamos no capítulo anterior, o problema de tres corpos non ten na actualidade unha solución analítica xeral debido a que non podemos integralo completamente, pero si encontráronse solucións para casos particulares deste. En todos estes casos, as tres masas en acción no sistema son comparables, é dicir, encóntranse arredor do mesmo orde de magnitude. Pero, que pasaría se unha das masas non fora comparable respecto das outras? Esta cuestión será a hipótese de partida para comezar a falar sobre un novo problema de tres corpos, que denominaremos como *Problema restrinxido de tres corpos*.

4.1. Motivación e formulación do problema

Podemos pensar en varios exemplos de movementos de tres corpos onde un deles conta cunha masa moito menor se a comparamos co resto. Algúns exemplos nos que podemos aplicar esta hipótese poden ser:

- O movemento de asteroides ou satélites pouco masivos arredor dun planeta do Sistema Solar, como poden ser os asteroides do cinto de Saturno.
- O efecto dalgún planeta no movemento de nubes de asteroides no Sistema Solar. Aquí destacamos a nube de asteroides Troianos, onde o seu movemento ven influenciado polo planeta Xúpiter.
- O movemento de corpos de masa infinitesimal controlados por atracción gravitacional dun sistema binario masivo, como son os satélites artificiais ou sondas espaciais no sistema Terra-Lúa.

- Mesmo se ten estudado o movemento da Lúa considerando esta con masa desprezable fronte ao Sol e a Terra.

Nestes casos, ao corpo pouco masivo considerarémolo con masa nula ou tan pequena que poderemos desprezala. Esta hipótese formúlase co obxecto de simplificar o movemento dos tres corpos que participan no sistema. Con isto, caracterizamos que os dous corpos portadores de practicamente toda a masa do sistema, e que denominaremos como *corpos primarios*, non ven afectadas as súas órbitas polo terceiro corpo, mentres que o movemento deste último sí se ve completamente determinado polos primarios. Esta será a característica fundamental que diferencie o problema restrinxido do resto de problemas de tres corpos. Agora, o obxectivo centrarase no estudo do movemento relativo deste terceiro corpo, que denominaremos como corpo ou masa *infinitesimal*.

Como o problema restrinxido non deixa de ser un problema de tres corpos, imos considerar as ecuacións de movemento deste como punto de partida e aplicalas ao caso que nos ocupa. O obxecto principal do estudo é acadar unhas ecuacións que describan o movemento relativo do corpo menos masivo, que asociaremos ao corpo con masa m_3 , en torno aos corpos primarios, que consideraremos os corpos de masas m_1 e m_2 . Na ecuación (3.16) considerando a masa m_3 desprezable ou nula, é dicir, supoñendo que $m_3 = 0$, obtemos a ecuación

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} + G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = \mathbf{0}, \quad (4.1)$$

que nos confirma o movemento kepleriano dos corpos primarios, que non se ve afectado polo terceiro corpo. Tendo en conta a mesma suposición, as ecuacións (3.15) permítenos describir o movemento do corpo infinitesimal a partir do movemento relativo respecto do centro de masas dos corpos primarios, que neste caso equivale ao centro de masas do sistema. Entón, considerando o vector \mathbf{r}_3 como o vector de posición respecto do centro de masas, que podemos tomar como orixe do sistema de referencia, dedúcese a ecuación

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -G m_1 \frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}^3} - G m_2 \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3}, \quad (4.2)$$

obtendo, xunto coas ecuacións de movemento do centro de masas do sistema, un sistema de 9 ecuacións diferenciais de segunda orde co que podemos describir o movemento restrinxido de tres corpos. O estudo deste sistema podémolo desgregar en dúas partes: unha primeira, coas ecuacións do centro de masas e as ecuacións (4.1), centrado en calcular o movemento kepleriano dos primarios (problema do que xa temos solución), e unha segunda parte, coa ecuación (4.2), centrada na integración do movemento relativo do corpo infinitesimal. Co cal, chegados a este punto, podemos formular o Problema restrinxido de tres corpos como:

Dadas as posicións e velocidades de tres partículas nalgún instante de tempo, con masas coñecidas, e unha delas sendo infinitesimal respecto das outras, que se moven baixo a influencia mutua das forzas de atracción gravitacionais, calcular a posición e velocidade da masa infinitesimal influída polas masas primarias, as cales presentan un movemento kepleriano de dous corpos.

4.2. O caso restrinxido circular plano

Podemos observar que a hipótese engadida do problema restrinxido como tal, non determina cal é o movemento de dous corpos que seguen ou deben seguir os primarios, é dicir, contempla que as súas órbitas sexan circulares, elípticas, parabólicas, hiperbólicas... e, ademais, non particulariza as dimensións de movemento do terceiro corpo (lineal, plano ou tridimensional), polo que podemos clasificar moitos tipos diferentes de problemas restrinxidos dependendo das orbitas segundo o movemento dos primarios e do terceiro corpo.

Centrarémonos no estudo nun dos casos de problema restrinxido que foi moi estudado, como é o caso circular plano, onde os primarios móvense en órbitas circulares ao redor do centro de masas e o movemento do corpo infinitesimal está contido no plano orbital dos primarios. Este problema é interesante na medida en que podemos acadar unha nova constante de integración que nos permite estudar cualitativamente o movemento do terceiro corpo, a integral de Jacobi (da que falaremos na sección 4.3), aparte de poder reducir o número de constantes necesarias para integrar o problema ao supoñer que o movemento concentrase no mesmo plano orbital ca os primarios, o cal nos permitirá reducir o número de ecuacións de movemento e, por conseguinte, o número de constantes.

4.2.1. Establecendo as ecuacións de movemento

Para poder realizar unha análise do problema, debemos primeiro coñecer as súas ecuacións de movemento, pero antes de establecelas compre realizar unha serie de modificacións nas magnitudes para simplificar o análise e integración deste problema. En moitas, por non dicir todas, as obras onde se trata este tema adóitanse realizar estas suposicións (como en [6], [17], [20], [21] e [22]). Estas modificacións son:

- Consideraremos como unidade de masa (*u.m.*) a suma das masas dos primarios.
- Dado que supoñemos circulares as órbitas dos primarios, tomaremos como unidade de lonxitude (*u.d.*) a distancia de separación destes, que será constante ao longo do tempo.

- A unidade de tempo (*u.t.*) será tomada de tal forma que a constante gravitacional G sexa unha unidade, é dicir, que verifique $G = 1(u.d.)^3/(u.t.)^2(u.m.)$.

Con estas hipóteses, conseguimos que a velocidade angular media dos corpos primarios, n , sexa unha unidade, dado que esta ven dada pola igualdade $n^2 a^3 = G(m_1 + m_2)$.

Agora, como as ecuacións de movemento (4.2) definen o vector aceleración en función dos vectores relativos aos corpos primarios, realizaremos unha transformación no sistema de referencia que nos permita reformular as ecuacións de xeito que só veñan definidas polo propio vector de posición. Entón, considerando as posicións dos corpos primarios con masas m e $1 - m$ respectivamente, sendo $m \leq 1/2$, segundo sistema de referencia fixo $\{\xi, \eta, \zeta; \mathbf{O}\}$ sendo a orixe o centro de masas do sistema, temos que as coordenadas da masa infinitesimal, sexan (ξ, η, ζ) , seguen as ecuacións de movemento

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = m \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + (1 - m) \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \\ \ddot{\eta} = m \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + (1 - m) \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \\ \ddot{\zeta} = m \frac{\zeta_1 - \zeta}{r_1^3} + (1 - m) \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3}, \end{cases} \quad (4.3)$$

onde (ξ_1, η_1, ζ_1) e (ξ_2, η_2, ζ_2) son as coordenadas dos corpos con masas m e $1 - m$ respectivamente, polo que

$$r_1^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2,$$

$$r_2^2 = (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 + (\zeta_2 - \zeta)^2.$$

Como tomamos o eixe ζ segundo a dirección perpendicular do plano de rotación dos primarios, temos que $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$.

Agora, se tomamos un sistema de referencia rotatorio co mesmo orixe de coordenadas cao sistema fixo anterior, $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}; \mathbf{O}\}$, verificando que o plano de coordenadas xy rote cunha certa velocidade angular respecto ao eixe z , que coincidirá co eixe ζ . O eixe x será determinado de tal forma que os dous primarios encóntrense sempre nel, polo que as coordenadas destes corpos no sistema serán $(x_1, 0, 0)$ e $(-x_2, 0, 0)$ verificando que $x_1 - x_2 = 1$. Polo tanto, nas novas coordenadas, onde a orixe é o centro de masas dos corpos, temos a igualdade

$$\mathbf{O} = (0, 0, 0) = \frac{m(x_1, 0, 0) + (1 - m)(x_2, 0, 0)}{m + (1 - m)},$$

e, entón, verificase $x_1 = 1 - m$, $x_2 = -m$ e, ademais, sabemos que

$$r_1^2 = (x_1 - x)^2 + y^2 + z^2, \quad r_2^2 = (x_2 - x)^2 + y^2 + z^2.$$

onde (x, y, z) son as coordenadas da partícula con masa infinitesimal respecto dos eixes rotatorios, que relaciónanse coas coordenadas anteriores mediante a transformación

$$\begin{cases} \xi = x \cos t - y \sin t \\ \eta = x \sin t + y \cos t \\ \zeta = z. \end{cases} \quad (4.4)$$

As coordenadas dos primarios no sistema de referencia fixo tamén poden relacionarse mediante esta transformación coas súas coordenadas correspondentes no sistema rotatorio.

Derivando dúas veces as ecuacións da transformación (4.4), e considerando as ecuacións de movemento (4.3), tendo en conta a transformación de coordenadas (4.4), chegamos finalmente ás igualdades

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - x = - \left[m \frac{x - x_1}{r_1^3} + (1 - m) \frac{x - x_2}{r_2^3} \right] \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y = -y \left(\frac{m}{r_1^3} + \frac{1 - m}{r_2^3} \right) \\ \ddot{z} = -z \left(\frac{m}{r_1^3} + \frac{1 - m}{r_2^3} \right). \end{cases} \quad (4.5)$$

Estas serán as ecuacións de movemento da masa infinitesimal respecto das coordenadas rotatorias, que forman un sistema de tres ecuacións diferenciais lineais de segundo orde. No que respecta ao problema restrinxido circular, só necesitaremos as dúas primeiras ecuacións do sistema, pois ao considerar que a masa infinitesimal moveuse no mesmo plano orbital dos primarios, temos que $z = 0$ e, polo tanto, que $\ddot{z} = 0$. Entón, as ecuacións de movemento do corpo infinitesimal para un problema restrinxido circular plano son

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - x = - \left[m \frac{x - x_1}{r_1^3} + (1 - m) \frac{x - x_2}{r_2^3} \right] \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y = -y \left(\frac{m}{r_1^3} + \frac{1 - m}{r_2^3} \right), \end{cases} \quad (4.6)$$

onde $x_1 = 1 - m$, $x_2 = -m$ e, ademais, tense que $r_1^2 = (x_1 - x)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x_2 - x)^2 + y^2$.

4.3. Unha nova constante: a integral de Jacobi

Coas ecuacións de movemento obtidas anteriormente, que describen o comportamento da masa infinitesimal respecto das coordenadas rotatorias, podemos conseguir unha nova integral primeira, análoga á integral de enerxía do problema de tres corpos. Esta integral será bastante relevante debido a que, xunto coas coordenadas rotatorias, permítenos realizar un estudo cualitativo do comportamento do corpo infinitesimal dunha forma sinxela. Aínda que estamos a estudar o problema restrinxido circular plano, utilizaremos as

ecuacións (4.5) para obter unha expresión máis xeral da integral, particularizando esta expresión no problema circular plano ao considerar $z = \dot{z} = 0$.

Para obter esta integral, faremos uso dunha nova función que denotaremos por U , introducida por Jacobi, que se define como

$$U = U(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{m}{r_1} + \frac{1-m}{r_2}, \quad (4.7)$$

que ven sendo á función de enerxía potencial do sistema, onde se inclúe a enerxía producida polos sistema de referencia rotatorio. Podemos observar que as súas derivadas parciais veñen dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= x - \left[m \frac{x - x_1}{r_1^3} + (1-m) \frac{x - x_2}{r_2^3} \right], \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= y - y \left(\frac{m}{r_1^3} + \frac{1-m}{r_2^3} \right), \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= -z \left(\frac{m}{r_1^3} + \frac{1-m}{r_2^3} \right), \end{aligned}$$

polo que é inmediato chagar ao sistema

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (4.8)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (4.9)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (4.10)$$

Se multiplicamos as ecuacións (4.8), (4.9), (4.10) polos termos $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ respectivamente, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \dot{z} = (\ddot{x} - 2\dot{y})\dot{x} + (\ddot{y} + 2\dot{x})\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} = \\ &= \ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

conseguindo ao integrar respecto do tempo que

$$v^2 = 2U - C, \quad (4.12)$$

onde $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ é a velocidade tanxencial da masa infinitesimal. Con esta integral, non só estamos engadindo unha constante máis para a integración do problema, tamén estamos a relacionar o módulo da velocidade do corpo en función da posición na que se encontre.

4.4. Singularidades do sistema: os puntos de Lagrange

Unha parte importante da análise dun sistema diferencial é o estudo dos seus puntos de equilibrio. Estes puntos de equilibrio, que serán cinco, denotarémolos por L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 e reciben o nome de *puntos de libración* ou *puntos de Lagrange*. Estableceremos estes puntos no espazo e analizaremos a súa estabilidade.

En primeiro lugar, por seren puntos de equilibrio, ou singularidades, a velocidade e aceleración neses puntos é nula, é dicir, que se verifica $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ e $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$. En consecuencia, as ecuacións de movemento (4.5) quedan

$$x - m \frac{x - x_1}{r_1^3} - (1 - m) \frac{x - x_2}{r_2^3} = 0, \quad (4.13)$$

$$y - y \left(\frac{m}{r_1^3} + \frac{1 - m}{r_2^3} \right) = 0, \quad (4.14)$$

$$-z \left(\frac{m}{r_1^3} + \frac{1 - m}{r_2^3} \right) = 0. \quad (4.15)$$

Por unha parte, observamos que a ecuación (4.15) só se verificaría se $z = 0$. Esta condición xa se encontra implícita no problema circular plano, pero isto indícanos que, para calquera outro tipo de movementos que realice o corpo infinitesimal, os puntos de Lagrange non van variar. Polo que podemos afirmar que os puntos de equilibrio do sistema sempre estarán no plano de rotación, que coincide co plano orbital dos primarios e, no problema circular plano, tamén coa masa infinitesimal. Por outra banda, a ecuación (4.14) verificase cando $y = 0$, ou se se cumpre a igualdade

$$1 - \frac{m}{r_1^3} - \frac{1 - m}{r_2^3} = 0.$$

A segunda igualdade só será posible cando $r_1 = r_2 = 1$ e, dado que $x_1 = 1 - m$ e $x_2 = -m$, a ecuación (4.13) xa sería verdadeira de ter dita condición. Polo tanto, temos que as tres partículas formarían unha configuración de triángulo equilátero no que as distancias entre eles é unha unidade. Estes puntos serán os que denotemos como os puntos de Lagrange L_4 e L_5 , que se moven de xeito que, vistos dende o corpo grande, o primeiro deles precede ao corpo pequeno cun ángulo de 60° , mentres que o segundo xira detrás do corpo pequeno cun atraso de 60° . No sistema de referencia no que estamos a traballar, os puntos L_4, L_5 terán coordenadas

$$L_4 \equiv \left(1/2 - m, \sqrt{3}/2, 0 \right), \quad L_5 \equiv \left(1/2 - m, -\sqrt{3}/2, 0 \right)$$

No caso de que se verifique $y = 0$, entón determinamos que os puntos de equilibrio restantes son colineais aos corpos primarios e verifican a ecuación

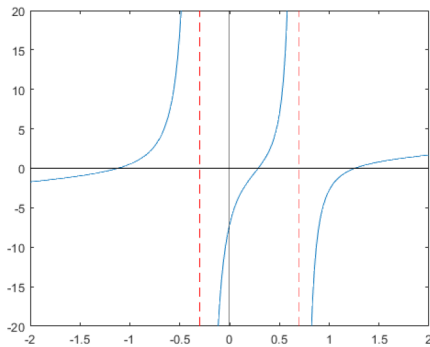
$$x - m \frac{x + m - 1}{|x + m - 1|^3} - (1 - m) \frac{x + m}{|x + m|^3} = 0, \tag{4.16}$$

que ven sendo a ecuación (4.13) cando $y = z = 0$ e considerando

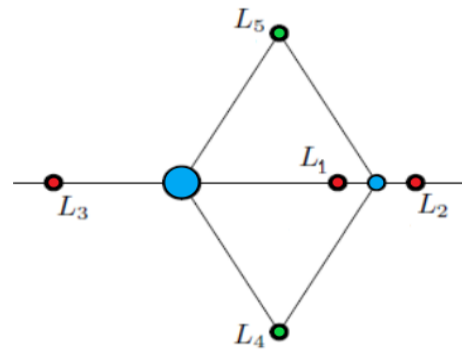
$$r_1 = \sqrt{(x - (1 - m))^2} = |x + m - 1|, \quad r_2 = \sqrt{(x - (-m))^2} = |x + m|.$$

Esta ecuación é equivalente a un polinomio de grado 3, onde as raíces representan os valores da coordenada x nos puntos de Lagrange que buscamos. Estes puntos denotaranse por

- L_1 ao punto de equilibrio que se atopa entre aos dous corpos primarios, estando máis próximo ao menos masivo. É o máis intuitivo dos tres puntos, pois nel as forzas atracción xeradas polos primarios compénsanse.
- L_2 ao punto que se encontra mais aló da masa menor. Nel a atracción gravitacional dos dous corpos masivos compensa a forza centrífuga da masa infinitesimal. A orbita ten o mesmo período có corpo primario de menor masa, pero o recorrido da órbita será maior.
- L_3 é análogo ao punto L_2 no corpo mais masivo, coa diferenza de que describe unha órbita máis próxima á do corpo menos masivo.



(a) Gráfica da ecuación (4.16), coa que determinamos as coordenadas dos puntos de Lagrange L_1, L_2, L_3 (considerando $m = 0,3$).



(b) Esquema das posicións dos puntos de Lagrange.

Figura 4.1: Imaxes relacionadas coas posicións dos Puntos de Lagrange

4.4.1. Estabilidade dos puntos de Lagrange

O concepto de estabilidade, no seu contexto máis analítico, fai referencia ao comportamento dunha traxectoria que parte dun punto do espazo próximo a un punto de equilibrio dun sistema de ecuacións diferenciais, que describe o movemento no espazo. No contexto da Mecánica Celeste, interézanos identificar os puntos de equilibrio que sexan *estables*, é dicir, aqueles onde as órbitas con posición inicial próxima a estes puntos de equilibrio seguen manténdose próximas no tempo. Os puntos de equilibrio que estudaremos serán os puntos de Lagrange, e o noso obxectivo é coñecer a súa estabilidade nos seus entornos. En moitos libros e traballos sobre movemento orbital ([2], [6], [17], [20]) estúdase a estabilidade destes puntos no espazo tridimensional, pero aquí centraremos o estudo da estabilidade no plano, pois supoñemos que o sistema réxese polo Problema restrinxido de tres corpos circular plano.

Considerando unha partícula que se despraza dun punto de Lagrange, (x_0, y_0) , a un punto próximo de coordenadas $(x_0 + \bar{x}, y_0 + \bar{y})$, cunha velocidade $(\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{y}})$, podemos analizar o seu movemento linealizando o sistema, é dicir, realizando unha primeira aproximación lineal das ecuacións de movemento (4.6) facendo uso da súa matriz xacobiana.

Dado que no punto de equilibrio as ecuacións de movemento anuláanse, e pola linealidade da derivada, obtemos o sistema lineal

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}} - 2\dot{\bar{y}} = \bar{x} U_{xx} + \bar{y} U_{xy} \\ \ddot{\bar{y}} + 2\dot{\bar{x}} = \bar{x} U_{yx} + \bar{y} U_{yy} \end{cases} \quad (4.17)$$

onde

$$U_{xx} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0, \quad U_{yy} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_0, \quad U_{xy} = U_{yx} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_0, \quad \text{etc.}$$

son as derivadas parciais segundas de (4.7) avaliadas no punto de Lagrange a considerar.

Para os puntos de Lagrange L_1, L_2, L_3 , que teñen coordenadas $(x_0, 0, 0)$, onde x_0 é raíz da ecuación (4.16), as ecuacións (4.17) poden reescribirse como

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}} - 2\dot{\bar{y}} = (1 + 2\alpha) \bar{x} \\ \ddot{\bar{y}} + 2\dot{\bar{x}} = (1 - \alpha) \bar{y} \end{cases} \quad (4.18)$$

sendo

$$\alpha = \frac{m}{r_1^3} + \frac{1-m}{r_2^3}.$$

Dado que estamos ante un sistema lineal de ecuacións diferenciais con coeficientes constantes, ás solucións xerais do movemento veñen determinadas polas raíces da ecuación característica do sistema. Entón, para coñecer a estabilidade destes puntos debemos

analizar as raíces da ecuación

$$\lambda^4 + (2 - \alpha)\lambda^2 + (1 + 2\alpha)(1 - \alpha) = 0, \quad (4.19)$$

Para garantir esta estabilidade debemos verificar que as posibles raíces de λ sexan puramente imaxinarias. Así, as órbitas que describirá a masas infinitesimal serán periódicas en torno ao punto de equilibrio, concluíndo na súa estabilidade. Neste caso, que só existan raíces λ puramente imaxinarias en (4.19) é igual a que só admita raíces λ^2 con valor negativos. Para que isto ocorra, debe cumprirse que $(1 + 2\alpha)(1 - \alpha) > 0$, que nos indicará o signo das raíces λ^2 . Esta condición pódese simplificar na condición $1 - \alpha > 0$. Como os puntos de Lagrange a estudar compren que as súas coordenadas x deben verificar a ecuación (4.16), polo que se denotamos x_0 como o valor da coordenada x do punto de Lagrange, conseguimos a igualdade

$$1 - \alpha = \frac{m(1 - m)}{x_0} \left\{ \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right\} \quad (4.20)$$

Esta igualdade ten sentido se $x_0 \neq 0$, que unicamente non é certo no caso onde os dous corpos teñen masas iguais, onde $m = 1 - m = 1/2$. Entón, se x_0 é non nula, pode tomar

- Un valor positivo maior que x_1 , sendo r_2 maior que r_1 .
- Un valor positivo entre x_1 e x_2 , sendo r_2 maior que r_1 .
- Un valor negativo menor que x_2 , sendo r_1 maior que r_2 .

Nos tres casos, conclúese que $1 - \alpha < 0$, polo que podemos afirmar que existirá algunha raíz positiva. No caso onde $x_0 = 0$ é mais sinxelo, dado que $r_1 = r_2 = 1/2$ e, polo tanto, chegamos a que $\alpha = 8$. Co cal, obtemos tamén que $1 - \alpha < 0$, concluíndo inestabilidade. Polo tanto, obtemos que (4.19) admite alo menos unha raíz real positiva, co que podemos concluír a inestables dos puntos de Lagrange L_1, L_2, L_3 no plano rotatorio xy .

Agora, para os puntos de Lagrange L_4, L_5 , como xa sabemos que as coordenadas, obtemos das ecuacións de estabilidade (4.17) o sistema

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{3}{4}\bar{x} + \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2m)\bar{y} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2m)\bar{x} + \frac{9}{4}\bar{y} \end{cases} \quad (4.21)$$

Por analogía, a estabilidade deste sistema ven determinada polas raíces da súa ecuación característica, que ven dada por

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}m(1 - m) = 0. \quad (4.22)$$

Como no caso anterior, determinar a estabilidade dos puntos dependerá de se a ecuación característica só ten raíces λ imaxinarias, i.e., se só admite raíces λ^2 negativas. Isto último verificase dado que

$$\text{tr}(A) = -1 < 0, \quad \det A = \frac{27}{4} m(1 - m) > 0,$$

sendo A a matriz asociada á ecuación característica (4.22).

Polo tanto, podemos garantir que as raíces λ^2 , de existir, son reais negativas e, en consecuencia, as raíces λ son todas imaxinarias. Agora, só nos queda establecer algunha condición que nos garanta a existencia destas raíces. Dita condición será a non negatividade do discriminante da ecuación bicadrada, é dicir,

$$1 - 4 \cdot \frac{27}{4} m(1 - m) \geq 0,$$

e obtemos unha condición en m para poder garantir a estabilidade dos puntos L_4, L_5 , que será

$$m \leq \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{108}} = 0,0385\dots$$

Un exemplo que verifica este tipo de estabilidade son os asteroides Troianos que encontramos orbitando arredor dos puntos de Lagrange do caso Sol-Xúpiter ($m \approx 0,001$, entra na condición de estabilidade) [19].

4.5. Contornos de velocidade cero

Na sección 4.3, obtivemos unha nova integral primeira e, en consecuencia, unha constante máis que nos permite determinar as posicións e velocidades que pode adoptar a masa infinitesimal. É inmediato que se debe verificar $v^2 \geq 0$ para que a integral teña sentido, pois o módulo da velocidade non pode tomar valores imaxinarios. No caso de que existisen puntos ou rexións no espazo onde $v^2 < 0$, conclúese que o movemento é imposible. Por outra banda, se consideramos que a velocidade da partícula é nula, é dicir, que temos $v^2 = 0$, a integral de Jacobi fica na igualdade $2U = C$. Con esta igualdade, unha vez coñecido o valor da constante, determinada polas condicións iniciais, podemos delimitar a rexión do espazo onde se pode mover a masa infinitesimal, aínda que non nos indica cal é a súa traxectoria nin como evoluciona. Consideremos os diferentes casos que nos podemos encontrar en función do valor da constante de integración C , coñecido o valor do parámetro m , axudándonos graficamente da Figura 4.2:

- Se a constante C ten un valor alto, como sería no caso da constante C_1 na gráfica, temos tres rexións de movemento posibles segundo o valor da constante:

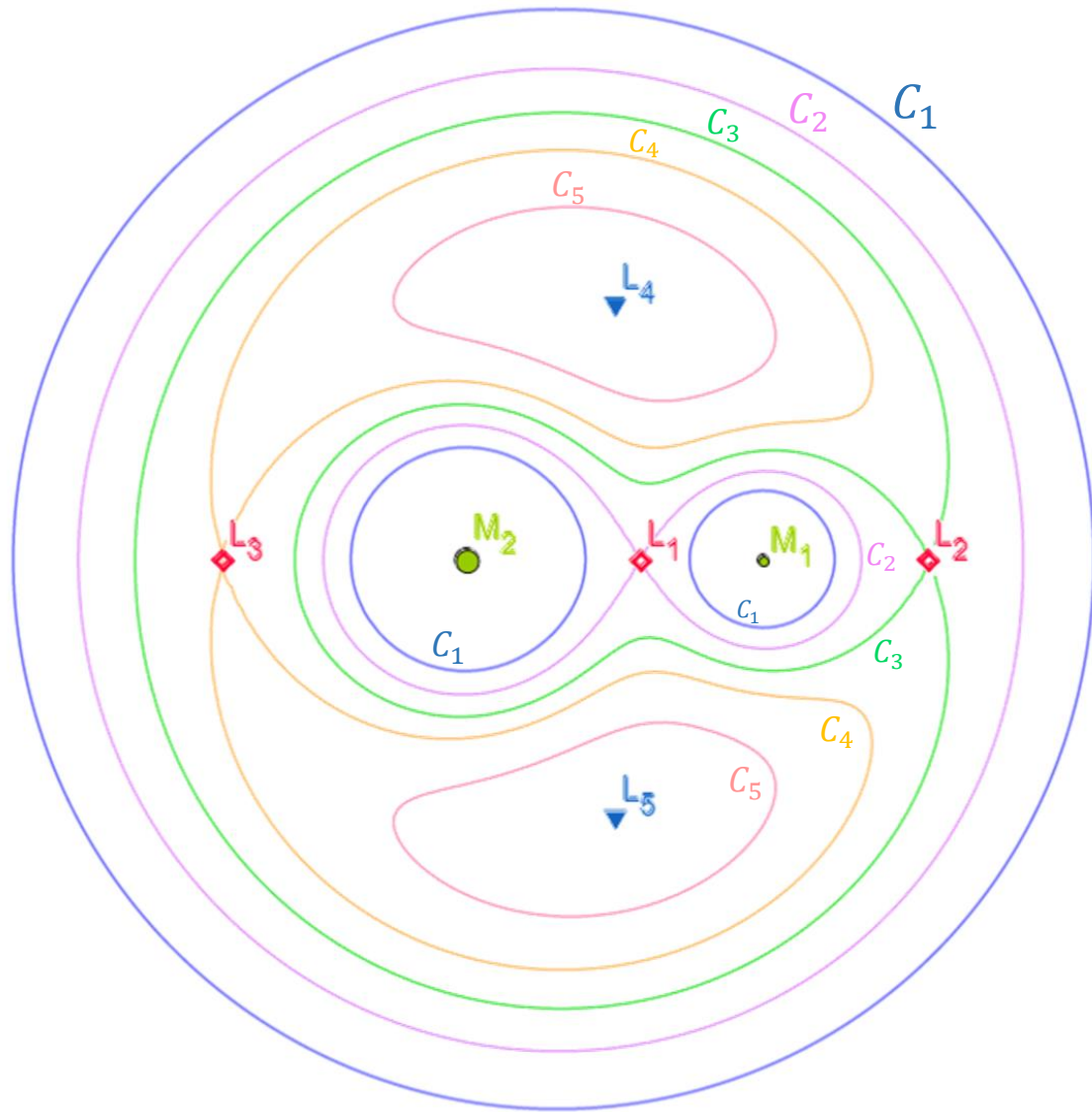


Figura 4.2: Gráfica dos contornos de velocidade zero para as constantes de Jacobi $C_1 = 4,50$, $C_2 = 3,9201$, $C_3 = 3,5564$, $C_4 = 3,2914$, $C_5 = 3,00$, considerando que $m = 0,3$. (xerado polo autor co programa Geogbra)

- Se a constante aproxímase ao valor de $x^2 + y^2$, é dicir, que $x^2 + y^2 \sim C$, significa que un dos contornos aproxímase a unha circunferencia de radio e , polo tanto, na rexión que verifique $2U > C$ a partícula se moverá sen atravesar esta circunferencia, lonxe dos outros corpos e sen ningunha posibilidade de aproximarse.
 - Se algún dos módulos dos vectores radiais r_1, r_2 é pequeno, isto implicaría que $1/r_1 C$ ou $1/r_2$ sexa grande, achegándose ao valor da constante C . Isto determina que a partícula orbitará arredor dun dos corpos primarios, cuxo movemento encontrase contido nun dos dous óvalos disxuntos, e verificando $2U > C$.
- Se reducimos o valor da constante, á area de movemento dos óvalos que rodean os corpos primarios expándese, de tal xeito que para certo valor (na imaxe, sería o valor C_2) estes óvalos intersecan nun punto do espazo, que coincidirá co punto de Lagrange L_1 . Así mesmo, podemos observar que o contorno exterior, que se aproxima a unha circunferencia, ve diminuído o seu radio. Isto provoca que a rexión de movemento posible aumenta a medida que diminuímos o valor da constante de Jacobi.
 - Se seguimos diminuíndo o valor da constante de Jacobi, observaremos que xa unicamente temos dúas rexións de movemento, e non tres, posto que os óvalos unificáronse nun só contorno. Chegados a certo valor de C (o valor C_3 representado na gráfica) as rexións de movemento xa son suficientemente amplas para que os contornos de velocidade cero intersequen nun novo punto, que marcará o nexo de unión entre rexión interior (onde se encontran os primarios) e a rexión exterior (afastada dos primarios, na que resultaba imposible que o corpo se achegara a estes). Este punto será o punto de Lagrange L_2 . A partires deste valor da constante, os contornos de velocidade cero, unifícanse nunha soa curva, así como a unificación nunha soa rexión de movemento.
 - Se seguimos diminuíndo o valor de C , vemos que a rexión delimitada polo contorno de velocidade cero vai diminuíndo, ata que produce unha unha autointersección (representada na imaxe, a curva asociada ao valor C_3), que dividirá en dúas a rexión de movemento imposible. Este punto de autointersección corresponderá co punto de Lagrange L_3 .
 - Se aínda reducimos mais o seu valor, chegaremos a que as únicas dúas zonas onde non é posible o movemento vanse reducindo ata converterse en dúas pequenas rexións que van concentrando as súas áreas en dous puntos especiais, que teñen a particularidade de formar un triángulo equilátero cos primarios. Estes puntos, efectivamente, son os puntos de Lagrange L_4 e L_5 . Estas rexións se concentrarán completamente nestes puntos cando a constante de Jacobi verifique $C = 3 - m(1 - m)$.

4.6. Reducindo a orde de integración

Ata este momento, conseguimos reducir o número de constantes necesarias para integrar o Problema restrinxido circular grazas á integral de Jacobi e á limitación do movemento da masa infinitesimal no plano orbital dos primarios. En concreto, só necesitamos tres constantes de integración máis. Jacobi [13], partindo dende redución da orde, conseguiu encontrar unha relación entre estas tres constantes, é dicir, non eran independentes. Polo tanto, aínda necesitamos unha constante de integración máis para poder definir o movemento completamente de xeito analítico, pero xa comentamos que Bruns demostrou a non existencia de máis integrais alxébricas. Entón, actualmente concluímos que nos é imposible integrar analiticamente o problema de tres corpos restrinxido.

Con todo, a redución da orde de integración (que equivale ao número de constantes) do problema sen necesidade de achar máis constantes é posible. Se procuramos reformular as ecuacións de movemento tal que o tempo deixe de aparecer no sistema dinámico, entón podemos reducir a orde do problema en dous. Loxicamente, a variable independente que era o tempo é substituída por unha das coordenadas espaciais (neste caso, adoitase escoller a coordenada que representa o eixe x). Szebehely [21] describe na súa obra como proceder para chegar esta redución da orde.

Capítulo 5

Conclusións

O movemento kepleriano perturbado é algo natural no Universo, pero para abordalo é preciso utilizar ferramentas matemáticas robustas. Tras o establecemento empírico das tres Leis de Kepler, que determinan o movemento planetario no Sistema Solar, e do posterior descubrimento de Newton sobre a forza que as explica, xorde o ben coñecido Problema de dous corpos como base do que sería a Mecánica Celeste. Polo tanto, esta teoría tivo que adaptarse aos feitos que se observaban, e un exemplo disto foi a evolución da Teoría da Lúa, pois o modelo kepleriano non se axustaba ao movemento observado e, polo tanto, houbo que traballar na materia para darlle unha explicación científica.

Xunto cos novos descubrimentos na materia da Mecánica Celeste por parte desta teoría, cómpre destacar que o seu desenvolvemento implicou que na actualidade, indo da man doutras ciencias, se puideran realizar logros tan transcendentais como o a posta en órbita de satélites artificiais que utilizamos para as comunicacións, esenciais no día a día, ou no ámbito científico; ou como o éxito da navegación interplanetaria, que nos permitiu facer realidade o soño humano de poder “tocar” a Lúa.

Neste Traballo Fin de Grao tratouse polo miúdo este tipo de movemento, que desvíase do puramente kepleriano, pola presenza de potenciais perturbadores que actúan sobre os dous corpos e, á postre, dan lugar a movementos rexidos por sistemas de ecuacións diferenciais que se deben tratar coa adecuada metodoloxía matemática, para nada sinxela. Por iso, foi preciso armarse de novos coñecementos e logo poñelos en práctica. Aquí foi fundamental a invitación do profesor Docobo para asistir de xeito presencial ás clases de Astrodinámica do Mestrado de Matemáticas no curso 2020-21. Todo o aprendido alí, máis a consulta de diversa bibliografía especializada, fixo posible que este traballo propiciado puidera levarse a cabo nas mellores condicións.

No terreo persoal, coido que escribir sobre temas dos que previamente tiña certo coñecemento pero non sobre como abordalos matematicamente, como o movemento dun satélite, a Teoría da Lúa, o Problema restrinxido de tres corpos, ou o movemento kepleriano perturbado en xeral; colmou as aspiracións que tiña propoñer un TFG desta índole aos meus titores, aínda antes de ter cursado a materia de Fundamentos de Astronomía.

Bibliografía

- [1] Abad, A. (1984). *Estudio de sistemas estelares múltiples* (Tese de doutoramento). Universidad de Zaragoza.
- [2] Abad, A. (2012). *Astrodinámica*. Zaragoza: Editorial Bubok.
- [3] Andrade, M. (2006). *O Problema de Gyldén-Mescerskij em Cenários Perturbados. Métodos e Aplicações* (Tese de doutoramento). Universidade de Santiago de Compostela.
- [4] Bruns, H. (1887). Über die Integrale des Vielkörper-Problems. *Acta Mathematica* 11, 25-96
- [5] Cerviño, H. (2019). *O Problema de dous corpos con masa variable* (Trabalho Fin de Grao). Facultade de Matemáticas. Universidade de Santiago de Compostela.
- [6] Danby, J. (1988). *Fundamentals of celestial mechanics*. Richmond: Willman-Bell.
- [7] Docobo, J. A. (1977). *Aplicación de la teoría de perturbaciones al estudio de sistemas estelares triples* (Tese de doutoramento). Universidad de Zaragoza.
- [8] Docobo, J.A. (Curso 2020-21). *Apuntamentos da materia de Fundamentos de Astronomía*. Grao en Matemáticas. Universidade de Santiago de Compostela.
- [9] Docobo, J.A. (Curso 2020-21). *Apuntamentos da materia de Astrodinámica*. Mestrado en Matemáticas. Universidade de Santiago de Compostela.
- [10] Docobo, J. A., Piccotti, L., Abad, A. e Campo, P. P. (2021). A Study about the Secular Evolution of the Hierarchical Three-body Problem Using the Numerical Integrator TIDES. *The Astronomical Journal*, 161(1), 43-63.
- [11] Gutzwiller, M. C. (1998). Moon-Earth-Sun: The oldest three-body problem. *Reviews of Modern Physics*, 70(2), 589-639.
- [12] Hagihara, Y. (1975). *Celestial mechanics. Volume IV, Part 1: Periodic and quasi-periodic solutions*. Japan Society of Promotion Science.

- [13] Jacobi, C. G. J. (1884). *Vorlesungen über Dynamik*. Berlin: G. Reimer
- [14] Kovalevsky, J. (1967). *Introduction to celestial mechanics*. Netherlands: Springer.
- [15] Ling, J. F. F. L. (1989). *Aplicación del método estroboscópico al problema estelar de tres cuerpos* (Tese de doutoramento). Universidade de Santiago de Compostela.
- [16] Marchal, C. (1990). *The three-body problem*. Amsterdam: Elsevier.
- [17] McCuskey, S. W. (1963). *Introduction to celestial mechanics*. Addison-Wesley Educational Publishers.
- [18] Prieto, C. (1995). *Soluciones analíticas del Problema de Dos Cuerpos con Masa Lentamente Decreciente* (Tese de doutoramento). Universidade de Santiago de Compostela.
- [19] Robutel, P. e Souchay, J. (2010). An introduction to the dynamics of Trojan asteroids. *In Dynamics of Small Solar System Bodies and Exoplanets* (195-227). Berlin: Springer.
- [20] Roy, A. E. (1988). *Orbital motion*. (3^a ed.) Adam Hilger.
- [21] Szebehely, V. (1967). *Theory of orbit: The restricted problem of three Bodies*. Londres: Academic Press.
- [22] Valtonen, M. y Karttunen, H. (2006). *The three-body problem*. Cambridge University Press.