Topoloxía dos espazos euclidianos

José Carlos Díaz Ramos

Topoloxía dos espazos euclidianos

José Carlos Díaz Ramos

28 de febreiro do 2023

Prefacio

Este traballo correspóndese cos apuntes da materia "Topoloxía dos espazos euclidianos" do Grao de Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela. A versión máis actualizada pode atoparse en liña na dirección

`http://xtsunxet.usc.es/carlos/topoloxia1/`

Índice xeral

Capítulo 1

Os espacios euclidianos

O espacio euclidiano de dimensión n, denotado por $\mathbb{R}^n$, é o conxunto das n-tuplas de números reais coa estructura natural de espacio vectorial. Máis concretamente,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n\},$$

onde se definen a suma e o producto por un escalar mediante

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),\\ \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),\end{aligned}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Os elementos do espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ denotaranse mediante $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Ditos elementos chámanse vectores. Un elemento distinguido dun espacio vectorial é o vector cero, aquel que ten tódalas compoñentes nulas: $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.

Obviamente, se $n = 1$ obtemos simplemente a recta real $\mathbb{R}$. Para $n = 2$ e $n = 3$ adoptamos unha notación un pouco máis relaxada cando conveña e poremos (x, y) e (x, y, z) para un vector xenérico de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

1.1. Producto escalar e norma euclidiana

Definición 1.1. Defínese o **producto escalar** $\langle\, , \rangle$ no espacio euclidiano como a aplicación

$$\begin{aligned}\langle\, , \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.\end{aligned}$$

Proposición 1.2. *O producto escalar ten as seguintes propiedades:*

- *É unha aplicación* multilinear*:*

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle,\\ \langle \mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle,\\ \langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{y} \rangle.\end{aligned}$$

- *É unha aplicación* simétrica*:* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$.

- *É unha aplicación* definida positiva*:* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$*, e* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ *se e só se* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(para todo $\mathbf{x}$*,* $\mathbf{y}$*,* $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*.)*

Demostración. A multilinearidade séguese facilmente da propiedade distributiva para os números reais. A simetría é consecuencia da propiedade conmutativa. O feito de que o producto escalar sexa definido positivo é evidente, pois calquera número real elevado ó cadrado é non negativo, e a suma de números non negativos só pode ser cero cando tódolos sumandos son cero. □

A continuación empregámo-lo producto escalar para defini-la norma ou módulo dun vector.

Definición 1.3. Defínese a **norma** dun vector como

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\| &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} \\ &= \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.\end{aligned}$$

Proposición 1.4. *A norma ten as seguintes propiedades:*

- Desigualdade triangular*:* $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.
- $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$.
- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$*, e* $\|\mathbf{x}\| = 0$ *se e só se* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(para todo $\mathbf{x}$*,* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*.)*

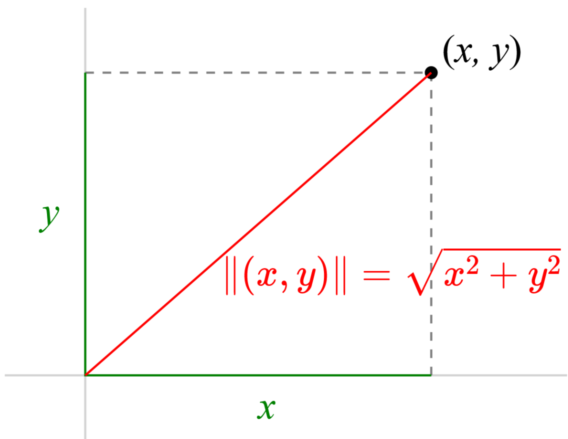


Figura 1.1: Norma dun vector

A primeira desigualdade probarémola na sección seguinte. Coñécese tamén como a desigualdade de Minkowski (Teorema 1.7).

Cómpre recordar o seguinte feito. Se $x \in \mathbb{R}$ é un número real, entón

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Neste curso empregaremos sempre o convenio de que cando tomémo-la raíz cadrada dun número, entenderemos sempre que nos referimos ó seu valor positivo.

Recórdese tamén que a raíz cadrada é unha función estrictamente monótona crecente, o cal implica que conserva tanto desigualdades como desigualdades estrictas.

1.2. Desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Minkowski

Nesta sección demostraremos dúas propiedades do producto escalar e da norma euclidiana que serán importantes para o resto da materia.

En matemáticas, a desigualdade de Cauchy-Schwarz é unha desigualdade moi útil encontrada en diferentes áreas, tales como o álxebra lineal (aplicada a vectores) ou a análisise matemática (aplicada a series infinitas e integración de productos).

Teorema 1.5. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Para calquera* $\mathbf{x}$*,* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *verifícase que*

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \cdot \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle.$$

Equivalentemente, tomando a raíz cadrada en ambos lados, e referíndose á norma dos vectores, a desigualdade escríbese como

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

Demostración. Sexa $\lambda \in \mathbb{R}$ un número real arbitrario. Polas propiedades do producto escalar (Proposición 1.2) temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \\ &= \langle \lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}, \lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}\rangle \\ &= \lambda^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + 2\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle. \end{aligned}$$

Dado que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq 0$, como función de λ, a expresión anterior expresa o feito de que estamos considerando unha parábola coas ramas cara arriba e que sempre está porriba do eixo Y. En consecuencia, tal parábola terá, como moito, unha solución real. Deste xeito, o seu discriminante será non positivo, o que quere dicir que

$$4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2 - 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \leq 0,$$

feito que é equivalente á ecuación que queriamos probar. □

Exercicio 1.6. Probar que os dous lados na desigualdade de Cauchy-Schwarz son iguais se e só se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son linearmente dependentes.

Unha aplicación da desigualdade de Cauchy-Schwarz permite medi-lo ángulo θ entre dous vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ como

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos\theta.$$

De feito, a desigualdade de Cauchy-Schwarz implica que, para vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, con $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$,

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

Agora ben, como todo número no intervalo $[-1, 1]$ é acadado, de xeito único, polo coseno dun ángulo en $[0, \pi]$, defínese o *ángulo* entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ como o único elemento $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos\theta$.

A continuación pasamos á desigualdade triangular ou desigualdade de Minkowski, que establece que, para cada triángulo, a lonxitude dun lado debe ser menor cá suma das lonxitudes dos outros dous lados.

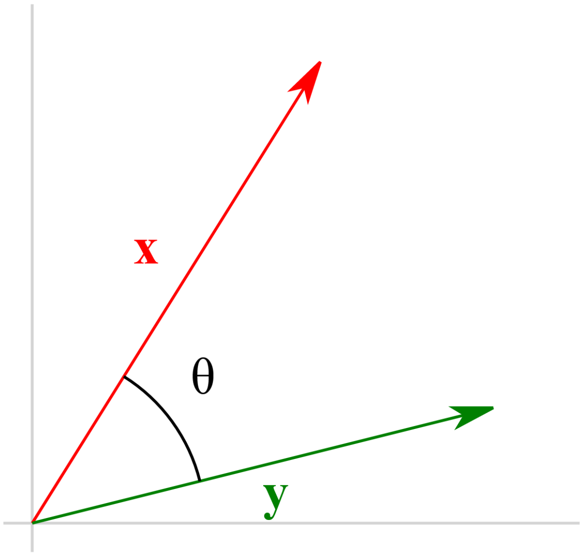


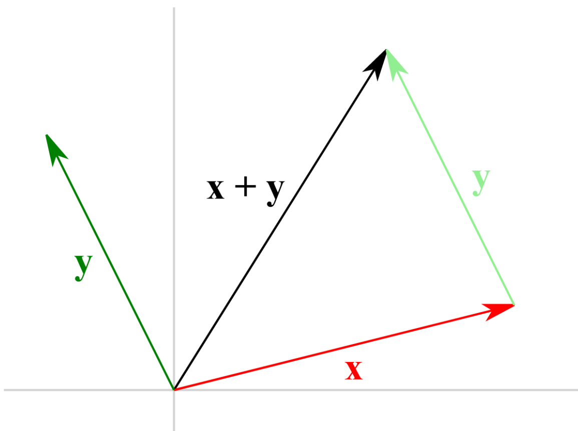
Figura 1.2: Ángulo entre dous vectores

Teorema 1.7. (Desigualdade de Minkowski) *Para calquera* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *verifícase que*

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Obsérvese que para $n = 1$ obtemos a desigualdade triangular para o valor absoluto.

Demostración. Sexan pois $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios.



A demostración consiste en emprega-la definición da norma en termos do producto escalar, e aplica-las propiedades (Proposición 1.2) deste último xunto coa desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 1.5):

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2,
\end{aligned}$$

e simplemente hai que extraer raíces cadradas de número non negativos. □

Exercicio 1.8. Proba-la desigualdade triangular inversa:

$$\Big| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \Big| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Resulta interesante enfatiza-lo feito de que nas demostracións anteriores das desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Minkowsi en ningún momento se empregou a definición de producto escalar ou norma, se non simplemente as propiedades que foron establecidas xusto a continuación da súa definición. En contextos máis xerais, que van máis aló do contido deste curso, poden definirse aplicacións similares ó producto escalar e á norma, que permiten probar resultados importantes en espacios máis complicados, incluso de dimensión infinita.

1.3. Distancia euclidiana

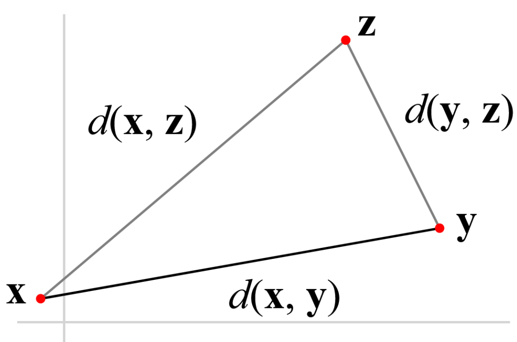
A distancia euclidiana é a distancia habitual entre dous puntos do espacio deducida a partir do teorema de Pitágoras.

Definición 1.9. Chámase **distancia euclidiana** entre dous puntos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ó número

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}. \end{aligned}$$

Proposición 1.10. *A distancia euclidiana ten as seguintes propiedades:*

- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$.
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ *se e só se* $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- *Simetría:* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
- Desigualdade triangular*:* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.



Estas propiedades séguense inmediatamente das propiedades da norma euclidiana (Proposición 1.4) sen máis que aplica-la definición de distancia.

Intuitivamente, a desigualdade triangular dinos que a distancia entre dous puntos sempre é menor que pasando primeiro por un terceiro. Xunto coa desigualdade de Cauchy-Schwarz esta é unha das desigualdades que empregaremos en repetidas ocasións ó longo deste curso.

Observación 1.11. Aínda que non será de interés para esta materia, diremos que un par (X, d), onde X é un conxunto e $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ é unha aplicación satisfacendo as propiedades da distancia euclidiana (Proposición 1.10), é un *espacio métrico*; a aplicación d chámase distancia ou métrica. Grande parte dos conceptos e resultados que se presentarán nesta materia son aplicables a espacios métricos.

De fundamental importancia na materia son as bólas abertas, que corresponden cos puntos do espacio que distan dun punto dado menos cá un número fixado chamado radio.

De xeito máis preciso. Sexan $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$.

Definición 1.12. A **bóla aberta** de $\mathbb{R}^n$ de centro $\mathbf{x}_0$ e radio r é o conxunto

$$B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{z}, \mathbf{x}_0) < r\}.$$

Analogamente,

Definición 1.13. A **bóla pechada** de $\mathbb{R}^n$ de centro $\mathbf{x}_0$ e radio r é o conxunto

$$B_{\mathbb{R}^n}[\mathbf{x}_0, r] = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{z}, \mathbf{x}_0) \leq r\}.$$

Cando non exista posibilidade de confusión escribiráse simplemente $B(\mathbf{x}_0, r)$ ou $B[\mathbf{x}_0, r]$.

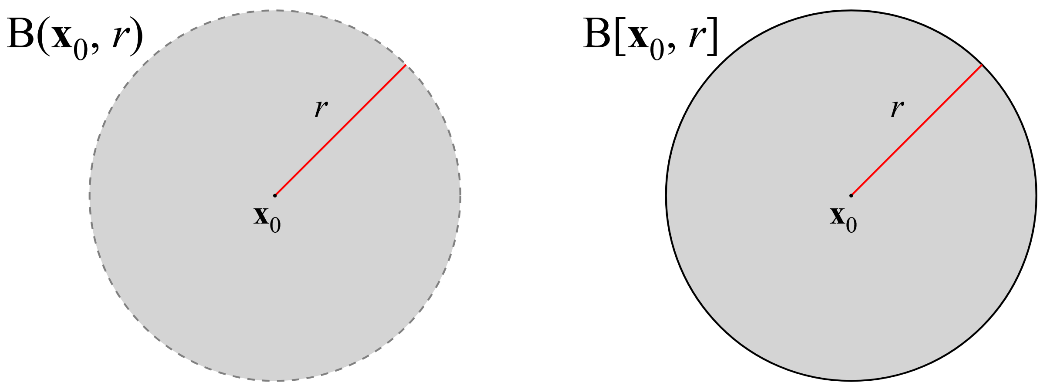


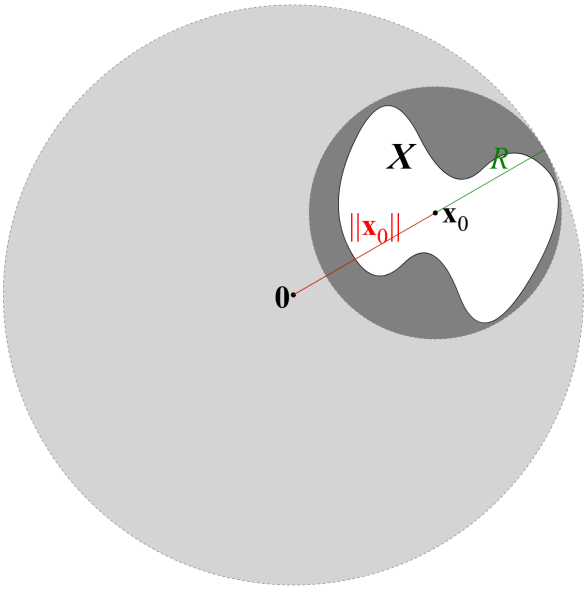
Figura 1.3: As bólas abertas non conteñen o seu borde, mentres que as pechadas si.

En $\mathbb{R}$ as bólas correspóndense cos seguintes intervalos

$$B_{\mathbb{R}}(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r),$$
$$B_{\mathbb{R}}[x_0, r] = [x_0 - r, x_0 + r].$$

Definición 1.14. Un conxunto $X \subset \mathbb{R}^n$ dise **limitado** se está contido nalgunha bóla, é dicir, se existe $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$ tal que $X \subset B(\mathbf{x}_0, R)$.

O seguinte lema asegura que o punto onde estea centrado a bóla e o seu carácter aberto ou pechado son irrelevantes.



Lema 1.15. *Sexa $X \subset \mathbb{R}^n$. Entón, X é un conxunto limitado se e só se existe $M > 0$ tal que $\|\mathbf{x}\| \leq M$ para todo $\mathbf{x} \in X$.*

Demostración. Supoñamos primeiro que X é limitado.

Sexan $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$ tales que $X \subset B(\mathbf{x}_0, R)$. Tomemos $M = \|\mathbf{x}_0\| + R$ e vexamos que entón $\|\mathbf{x}\| \leq M$ para todo $\mathbf{x} \in X$. En efecto, se $\mathbf{x} \in X$, como $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, R)$ temos que, pola desigualdade triangular (Proposición 1.10),

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\| &= d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \\ &\leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + d(\mathbf{x}_0, \mathbf{0}) \\ &< R + \|\mathbf{x}_0\| = M,\end{aligned}$$

como queriamos ver.

Supoñamos agora que existe $M > 0$ tal que $\|\mathbf{x}\| \leq M$ para todo $\mathbf{x} \in X$. Entón $X \subset B(\mathbf{0}, M + 1)$. En efecto, se $\mathbf{x} \in X$, por hipótese temos que $d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \|\mathbf{x}\| \leq M < M + 1$, de onde $\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, M + 1)$. □

No caso dun subconxunto A de $\mathbb{R}$, dicimos que A é limitado superiormente se existe $M > 0$ tal que $x \leq M$ para todo $x \in A$. O concepto de subconxunto de números reais limitado inferiormente defínese de xeito análogo.

Definición 1.16. O *supremo* dun subconxunto A de $\mathbb{R}$, limitado superiormente, é o número $M \in \mathbb{R}$ que satisfai:

- $\forall x \in A$, $x \leq M$
- $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in A$ tal que $x > M - \epsilon$

Denotarémo-lo supremo de A como $\sup A$.

O supremo non ten por que acadarse.

Para un conxunto limitado pode definirse o concepto de diámetro, que se entende intuitivamente coma a maior distancia á que se poderían atopar dous dos seus puntos. En xeral, como veremos, tal distancia non ten por que realizarse (é dicir, non ten por que haber dous puntos que estean a unha distancia exactamente igual ó diámetro).

Definición 1.17. Sexa X un conxunto limitado de $\mathbb{R}^n$. Defínese o **diámetro** de X como o número

$$\delta(X) = \sup\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X\}.$$

É consecuencia da desigualdade triangular (Proposición 1.10) que se un conxunto é limitado, entón o seu diámetro existe. En caso de que o conxunto non sexa limitado o supremo anterior non existe e dirase que o conxunto ten diámetro infinito.

1.4. Problemas resoltos

Problema 1.18. Calcular $\delta\Big(B_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{x}_0, r)\Big)$.

Solución. Vexamos que o diámetro (Definición 1.17) é $\delta\Big(B_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{x}_0, r)\Big) = 2r$.

Sexan $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in B_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{x}_0, r)$ arbitrarios. Pola desigualdade triangular (Proposición 1.10) temos que

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \\ &< r + r = 2r, \end{aligned}$$

co que $\delta\Big(B_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{x}_0, r)\Big) \leq 2r$.

Sexa agora $\epsilon > 0$ arbitrario, e supoñamos, sen perda de xeneralidade, que $\epsilon < 4r$. Tomemos $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + (-r + \epsilon/4, 0)$ e $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + (r - \epsilon/4, 0)$. Temos que

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) &= \|(-r + \epsilon/4, 0)\| \\ &= r - \frac{\epsilon}{4} < r, \end{aligned}$$

co que $\mathbf{x} \in B_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{x}_0, r)$. Analogamente, $\mathbf{y} \in B_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{x}_0, r)$. Por outra banda,

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \|(2r - \epsilon/2, 0)\| \\ &= 2r - \epsilon/2 > 2r - \epsilon, \end{aligned}$$

o que proba, de acordo coa definición de supremo (Definición 1.16), que $\delta\Big(B_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{x}_0, r)\Big) = 2r$. □

Problema 1.19. Dados dous conxuntos A, $B \subset \mathbb{R}^n$, defínese a distancia entre A e B como

$$d(A, B) = \text{ínf}\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in A,\ \mathbf{y} \in B\}.$$

Sexan

$$\begin{aligned} A &= \{0\} \times \mathbb{R}, \\ B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y = 1/x\}. \end{aligned}$$

Calcular $d(A, B)$.

Solución. Vexamos que $d(A, B) = 0$. En particular isto implica que a distancia entre conxuntos non é unha distancia (Definición 1.9) propiamente dita, xa que $A \neq B$ (de feito, $A \cap B = \emptyset$).

Obviamente, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ se $\mathbf{x} \in A$ e $\mathbf{y} \in B$ polas propiedades da distancia (Proposición 1.10). Sexa pois $\epsilon > 0$ arbitrario. Tomámo-los puntos $(0, 2/\epsilon) \in A$ e $(\epsilon/2, 2/\epsilon) \in B$. Entón,

$$\begin{aligned} d((0, 2/\epsilon), (\epsilon/2, 2/\epsilon)) &= \sqrt{\left(-\frac{\epsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{\epsilon} - \frac{2}{\epsilon}\right)} \\ &= \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \end{aligned}$$

co que $d(A, B) = 0$. $\square$

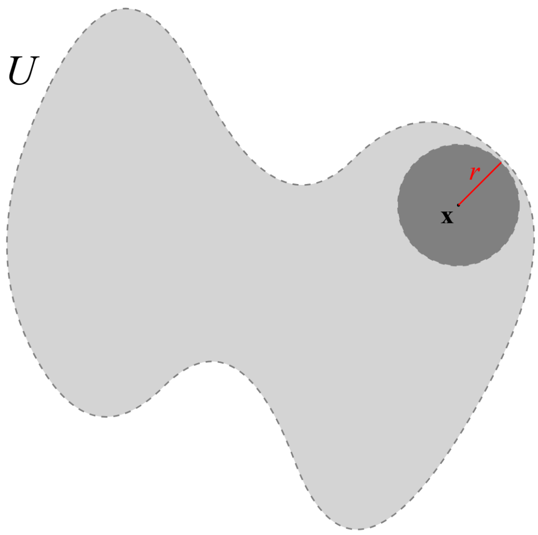
Capítulo 2

A topoloxía dos espacios euclidianos

O obxectivo deste tema é introducir as nocións de conxunto aberto e pechado, que en certa medida serán o eixo central da asignatura. Introduciremos os conceptos de aberto e pechado relativo co fin de estudar a topoloxía dos subespacios topolóxicos de $\mathbb{R}^n$.

2.1. Conxuntos abertos

Definición 2.1. Sexa $U \subset \mathbb{R}^n$. Diremos que U é **aberto** en $\mathbb{R}^n$ se para cada $\mathbf{x} \in U$ existe $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subset U$.

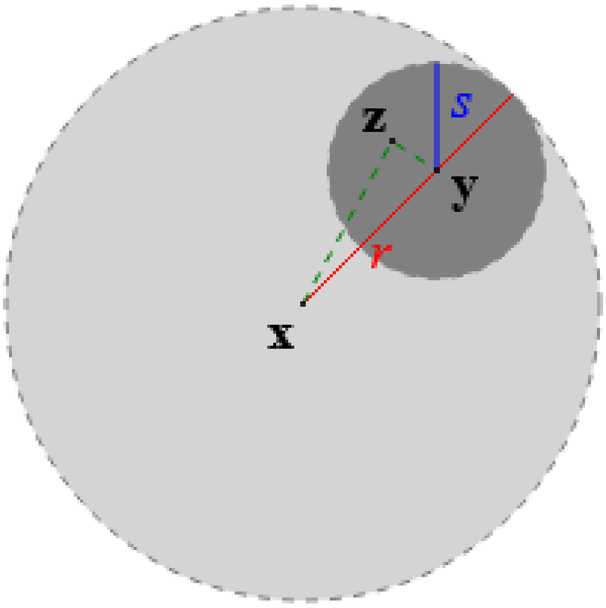


Nótese que o radio r da definición anterior dependerá do punto $\mathbf{x}$ considerado, como se porá de manifesto nos exemplos. Ademais, cando non fagamos referencia explícita, se dicimos que $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, entenderemos que U é aberto en $\mathbb{R}^n$. En xeral, hai que especificar onde é (ou non é) aberto ou pechado un conxunto, xa que tamén ten sentido falar de subconxuntos abertos de conxuntos distintos de $\mathbb{R}^n$, como se verá, por exemplo, máis adiante cando falemos de topoloxía relativa (Sección 2.3).

As bólas abertas son conxuntos abertos, pero esta afirmación, aínda que non é difícil de probar, non é obvia.

Proposición 2.2. *Toda bóla aberta é un conxunto aberto.*

Demostración. Sexan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Vexamos que $B(\mathbf{x}, r)$ é aberta (Definición 2.1).



Para iso tomemos $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r)$ arbitrario. Agora definimos $s = r - d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e comprobemos que $B(\mathbf{y}, s) \subset B(\mathbf{x}, r)$.

Dado $\mathbf{z} \in B(\mathbf{y}, s)$ tense que

$$\begin{aligned} d(\mathbf{z}, \mathbf{x}) &\leq d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \\ &< s + d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r, \end{aligned}$$

de onde se segue que $\mathbf{z} \in B(\mathbf{x}, r)$ como queriamos ver. □

O seguinte resultado é fundamental para esta materia, xa que permite afirmar que os abertos de $\mathbb{R}^n$ forman unha topoloxía, concepto do que falaremos a continuación.

Teorema 2.3. *O conxuntos abertos cumpren as seguintes propiedades:*

- *$\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ son abertos en $\mathbb{R}^n$.*
- *A unión arbitraria de conxuntos abertos en $\mathbb{R}^n$ é aberto en $\mathbb{R}^n$.*
- *A intersección finita de conxuntos abertos en $\mathbb{R}^n$ é aberto en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. O baleiro é un conxunto obviamente aberto (Definición 2.1), xa que satisfai vacuamente a definición. Tamén é evidente que $\mathbb{R}^n$ é aberto (Definición 2.1) en $\mathbb{R}^n$, xa que as bólas son subconxuntos de $\mathbb{R}^n$.

Sexa $\{U_i\}_{i \in I}$ unha familia arbitraria de abertos. Temos que ver que $U = \cup_{i \in I} U_i$ tamén é aberto (Definición 2.1) en $\mathbb{R}^n$.

Pois ben, sexa $\mathbf{x} \in U$. Entón existe algún $i_0 \in I$ de xeito que $\mathbf{x} \in U_{i_0}$. Dado que U_{i_0} é aberto, existe $r > 0$ de forma que $B(\mathbf{x}, r) \subset U_{i_0}$. Como $U_{i_0} \subset \cup_{i \in I} U_i = U$, obtemos que $B(\mathbf{x}, r) \subset U$. Xa que $x \in U$ é arbitrario, obtemos que U é aberto (Definición 2.1).

Para proba-la terceira afirmación, basta con facelo para dous conxuntos, xa que para un número finito arbitrario procederíase simplemente aplicando a propiedade asociativa da intersección de conxuntos.

Sexan pois U e V abertos en $\mathbb{R}^n$. Tomemos $\mathbf{x} \in U \cap V$ arbitrario. Entón

- Como U é aberto, existe $s > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, s) \subset U$.
- Como V é aberto, existe $t > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, t) \subset V$.

Definimos entón $r = \text{mín}\{s, t\} > 0$. Así, $B(\mathbf{x}, r) \subset B(\mathbf{x}, s) \subset U$ e $B(\mathbf{x}, r) \subset B(\mathbf{x}, t) \subset V$, de onde se deduce que $B(\mathbf{x}, r) \subset U \cap V$. Logo $U \cap V$ é aberto (Definición 2.1), como queriamos ver. □

Exemplo 2.4. Os intervalos abertos son abertos en $\mathbb{R}$. En efecto, un intervalo do xeito (a, b) é aberto xa que pode escribirse como

$$\begin{aligned}(a, b) &= \left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}, \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right) \\ &= B_{\mathbb{R}}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right).\end{aligned}$$

É dicir, todo intervalo é unha bóla en $\mathbb{R}$ centrada no seu punto medio e de radio a semidistancia entre os seus extremos. Como as bólas abertas son abertos (Proposición 2.2), tamén o son os intervalos da forma (a, b).

Un intervalo da forma $(a, +\infty)$ tamén é aberto en $\mathbb{R}$ xa que se pode escribir como

$$(a, +\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a, a+n),$$

e por ser unión de abertos (Teorema 2.3), $(a, +\infty)$ é aberto.

Para intervalos da forma $(-\infty, b)$ procédese de xeito análogo.

Exemplo 2.5. A intersección arbitraria de abertos non é necesariamente un aberto, como pon de manifesto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}.$$

O problema que aparece ó intentar reproducir a proba do terceiro apartado do teorema anterior (Teorema 2.3) é que precisamos encontrar o mínimo dunha cantidade infinita de radios positivos. Tal mínimo non ten que existir, a pesar de que exista o ínfimo (que tan so verificará a desigualdade ≥ 0).

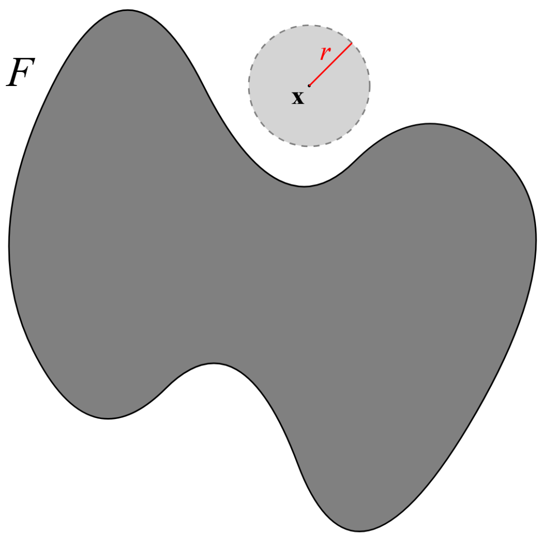
Observación 2.6. Dado un conxunto X e unha familia τ de subconxuntos de X, dicimos que τ define unha *topoloxía* en X se os subconxuntos de τ satifán os enunciados do teorema anterior (Teorema 2.3), isto é, $\emptyset$, $X \in \tau$, a unión de elementos de τ está en τ, e a intersección finita de elementos de τ está en τ. O par (X, τ) chámase entón un *espacio topolóxico*. Tendo isto en conta, $\mathbb{R}^n$ xunto coa colección dos seus subconxuntos abertos, é un espacio topolóxico.

A topoloxía é a rama das matemáticas que estuda os espacios topolóxicos. Os espacios topolóxicos son unha abstracción dos espacios euclidianos que é necesaria para estudar un conxunto no que cómpre determinar cando os elementos dese conxunto están preto ou non. A definición de topoloxía é o producto de moitos refinamentos ó longo da primeira metade do século XX. A definición actual non pon de manifesto de xeito claro o seu obxectivo: unha topoloxía é un criterio para determinar se os elementos dun espacio están ou non preto. No transcurso da materia iremos vendo que a distancia (un concepto que si permite medir cercanía) non é fundamental para moitas definicións, e o concepto elemental subxacente que se necesita é o de topoloxía.

Exercicio 2.7. Sexan U aberto en $\mathbb{R}^n$ e V aberto en $\mathbb{R}^m$. Probar que $U \times V$ é aberto en $\mathbb{R}^{n+m}$.

2.2. Conxuntos pechados

Definición 2.8. Un conxunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é **pechado** en $\mathbb{R}^n$ se e só se o seu complementario $\mathbb{R}^n \setminus F$ é un conxunto aberto en $\mathbb{R}^n$.



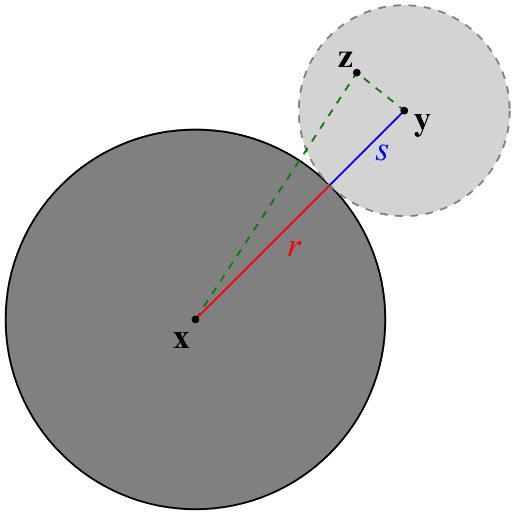
Ser aberto e ser pechado non son propiedades excluíntes. Un conxunto pode ser aberto e pechado ó mesmo tempo como veremos a continuación con $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$. Un conxunto pode ser aberto e non pechado ou non aberto e pechado. Ademais, un conxunto non ten porque ser aberto ou pechado, como é o caso dos intervalos $[a, b)$.

Veremos agora que as bólas pechadas son, en efecto, conxuntos pechados. Como sucedía coas bólas abertas, este resultado non é evidente.

Lema 2.9. *As bólas pechadas son conxuntos pechados.*

Demostración. Sexan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Vexamos que $B[\mathbf{x}, r]$ é pechado, é dicir, que $\mathbb{R}^n \setminus B[\mathbf{x}, r]$ é aberto (Definición 2.1).

Sexa pois $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus B[\mathbf{x}, r]$, é dicir, $d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) > r$. Tomemos $s = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - r > 0$, e vexamos que $B(\mathbf{y}, s) \subset \mathbb{R}^n \setminus B(\mathbf{x}, r)$.



Para iso tomemos $\mathbf{z} \in B(\mathbf{y}, s)$, co que $d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) < s$. Entón utilizando a desigualdade triangular (Proposición 1.10), $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$, tense que

$$\begin{aligned} d(\mathbf{z}, \mathbf{x}) &\geq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ &> d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - s = r, \end{aligned}$$

polo que $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \setminus B[\mathbf{x}, r]$, como queriamos probar. Como $\mathbf{y}$ foi elexido arbitrariamente, deducimos que $\mathbb{R}^n \setminus B[\mathbf{x}, r]$ é aberto (Definición 2.1), e polo tanto, $B[\mathbf{x}, r]$ é pechado (Definición 2.8). □

De xeito moi similar pode probarse tamén

Lema 2.10. *Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ entón o conxunto $\{\mathbf{x}\}$ é pechado en $\mathbb{R}^n$.*

O seguinte resultado é análogo ó establecido para conxuntos abertos anteriormente.

Proposición 2.11. *Os conxuntos pechados cumpren as seguintes propiedades:*

- *$\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ son pechados en $\mathbb{R}^n$.*
- *A intersección arbitraria de conxuntos pechados en $\mathbb{R}^n$ é pechado en $\mathbb{R}^n$.*
- *A unión finita de conxuntos pechados en $\mathbb{R}^n$ é pechado en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. O resultado obtense facilmente das propiedades dos abertos (Teorema 2.3), simplemente empregando as leis de De Morgan. [1]

En primeiro lugar, $\emptyset = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \setminus \emptyset$, co cal $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ son abertos e pechados en $\mathbb{R}^n$.

[1] *Leis de De Morgan.* Para $\{A_i\}_{i \in I}$, unha familia de subconxuntos de X:

$$\begin{aligned} \cup_{i \in I}(X \setminus A_i) = X \setminus (\cap_{i \in I} A_i), \\ \cap_{i \in I}(X \setminus A_i) = X \setminus (\cup_{i \in I} A_i). \end{aligned}$$

Se $\{F_i\}_{i\in I}$ é unha familia de pechados, entón $\mathbb{R}^n \setminus F_i$ é aberto para cada $i \in I$. Por tanto,

$$\mathbb{R}^n \setminus (\cap_{i\in I} F_i) = \cup_{i\in I}(\mathbb{R}^n \setminus F_i)$$

é aberto por ser unión de abertos (Teorema 2.3). O seu complementario, $\cap_{i\in I} F_i$, é en consecuencia, pechado (Definición 2.8).

Finalmente, se F e G son pechados,

$$\mathbb{R}^n \setminus (U \cup V) = (\mathbb{R}^n \setminus U) \cap (\mathbb{R}^n \setminus V)$$

é aberto por ser intersección finita de abertos (Teorema 2.3). Así, o seu complementario $U \cup V$ é aberto (Definición 2.1). □

Corolario 2.12. *Todo conxunto finito é pechado.*

Demostración. Simplemente nótese que $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} = \cup_{i=1}^k \{\mathbf{x}_i\}$. Como os conxuntos formados por un só punto son pechados (Lema 2.10) e a unión finita de pechados é pechado (Proposición 2.11), deducimos que $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ é pechado. □

Exemplo 2.13. A unión arbitraria de conxuntos pechados non é necesariamente pechada, como sucede no caso

$$(0,1) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right].$$

2.3. Topoloxía relativa

Con frecuencia non se traballa con todo o espacio, senón tan só cunha parte do mesmo (que ben pode se-lo dominio da aplicación que se está a estudar). Así, convén estender as nocións anteriores para o caso no que se traballe nun subconxunto $X \subset \mathbb{R}^n$. De feito, nun espacio métrico (Observación 1.11) os conceptos de bóla, conxunto aberto, pechado e similares definiríanse seguindo a terminoloxía desta sección.

En primeiro lugar, a distancia d_X en X defínese a partir da distancia en $\mathbb{R}^n$ simplemente por restricción: $d_X(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in X$. Como non hai diferencia entre as dúas cando collemos puntos de X, poremos simplemente $d_X = d$.

Definición 2.14. Sexa $X \subset \mathbb{R}^n$ un subconxunto.

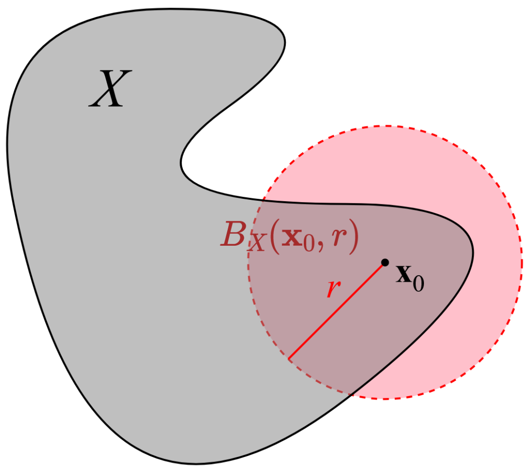
Dado un punto $\mathbf{x}_0 \in X$ chamaremos **bóla aberta** en X de centro $\mathbf{x}_0$ e radio $r > 0$ a

$$\begin{aligned} B_X(\mathbf{x}_0, r) &= \{\mathbf{x} \in X : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < r\} \\ &= B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, r) \cap X. \end{aligned}$$

Cando estea claro en que subconxunto de $\mathbb{R}^n$ estamos traballando, a miúdo escribiremos simplemente $B(\mathbf{x}_0, r)$. Nótese, non obstante, que as bólas sempre son relativas a algún subconxunto de $\mathbb{R}^n$, posiblemente todo $\mathbb{R}^n$.

Cando tomemos bólas abertas nun subconxunto de $\mathbb{R}^n$ diremos que son bólas relativas, por analoxía a outros conceptos de topoloxía relativa que consideraremos a continuación.

Exemplo 2.15. Podemos pensar a recta real $\mathbb{R}$ como o subconxunto $\mathbb{R} \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^2$. Neste caso, as bólas relativas centradas nun punto $(x, 0)$ de radio r son da forma $(x - r, x + r) \times \{0\}$.

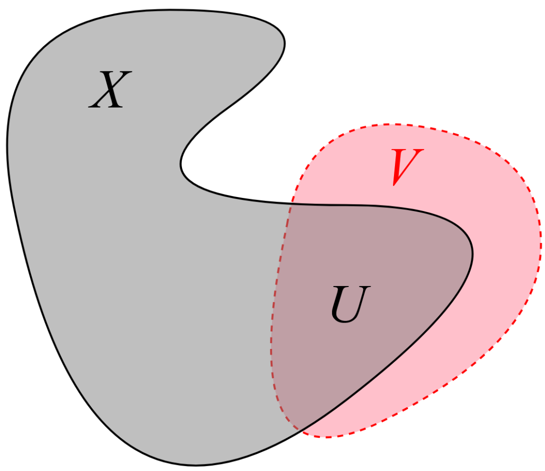


Definición 2.16. Un conxunto $U \subset X$ dise que é **aberto** en X se para cada punto $\mathbf{x} \in U$ existe $r > 0$ tal que $B_X(\mathbf{x}, r) \subset U$.

Como vemos, formalmente a definición de conxunto aberto relativo é a mesma que para $\mathbb{R}^n$, salvo polo feito de que agora tódolos puntos considerados deben de estar en X.

Proposición 2.17. *Sexa $X \subset \mathbb{R}^n$. Un conxunto $U \subset X$ é aberto en X se e só se existe un aberto V de $\mathbb{R}^n$ de forma que $U = V \cap X$.*

Demostración. Supoñamos primeiro que U é aberto (Definición 2.16) en X.



Para cada $\mathbf{x} \in U$ tomemos pois $r_{\mathbf{x}} > 0$ tal que $B_X(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}) \subset U$. Definimos

$$V = \bigcup_{\mathbf{x} \in U} B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}).$$

Pois ben, empregando a propiedade distributiva da intersección con respecto da unión temos

$$\begin{aligned} V \cap X &= \left(\bigcup_{\mathbf{x} \in U} B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}) \right) \cap X \\ &= \bigcup_{\mathbf{x} \in U} \left(B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}) \cap X \right) \\ &= \bigcup_{\mathbf{x} \in U} B_X(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}) = U, \end{aligned}$$

onde a última igualdade se segue de que $B_X(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}) \subset U$ e de que cada bóla contén sempre ó seu centro.

Reciprocamente, supoñamos que $U = V \cap X$ onde V é aberto de $\mathbb{R}^n$ e vexamos que entón U é aberto en X.

Sexa pois $\mathbf{x} \in U$. Como $\mathbf{x} \in V$ e V é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r) \subset V$. Por tanto,

$$\begin{aligned} B_X(\mathbf{x}, r) &= B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r) \cap X \\ &\subset V \cap X = U. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{x} \in U$ foi escollido arbitrariamente, deducimos que U é aberto (Definición 2.16) en X. □

A definición anterior, no contexto dos espacios topolóxicos (Observación 2.6), tómase precisamente como definición de aberto relativo. No futuro, cando tratemos de probar que un conxunto é aberto en X empregarase indistintamente a definición de aberto relativo (Definición 2.16) ou esta caracterización (Proposición 2.17).

Definición 2.18. Un conxunto $F \subset X$ é **pechado** en X se o seu complementario en X, $X \backslash F$, é aberto en X.

Exemplo 2.19. Sexa $X = [2, 5) \subset \mathbb{R}$. Entón o conxunto $U = [2, 3)$ é un aberto en X malia non ser un aberto en $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.20. Sexa $X = \{3, 5\} \cup [7, 10) \subset \mathbb{R}$. Entón

- X é aberto en X, pero non o é en $\mathbb{R}$,
- $\{3\}$ é aberto en X, xa que $\{3\} = B_X(3, 1)$
- $(7, 9)$ é aberto en X e en $\mathbb{R}$.

Proposición 2.21. *Un conxunto $F \subset X$ é pechado en X se e só se existe un pechado G en $\mathbb{R}^n$ de forma que $F = G \cap X$.*

Demostración. Faremos esta demostración empregando as leis de De Morgan, xunto coa caracterización de conxuntos abertos relativos (Proposición 2.17).

O conxunto F é pechado (Definición 2.18) en X se e só se $X \setminus F$ é aberto en X.

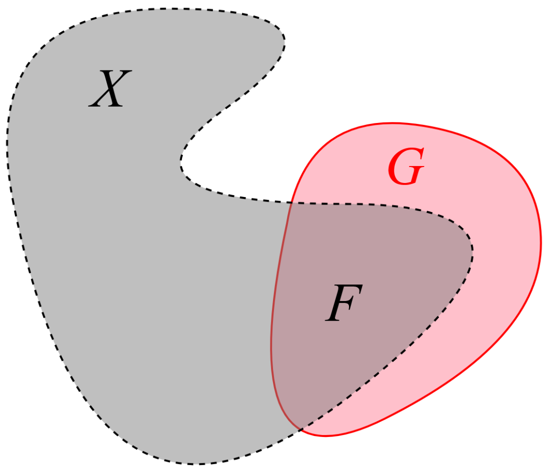
Pola caracterización de abertos relativos (Proposición 2.17), isto é así se e só se existe V aberto en $\mathbb{R}^n$ tal que $X \setminus F = V \cap X$. Equivalentemente,

$$F = X \setminus (V \cap X) = (\mathbb{R}^n \setminus V) \cap X,$$

co que basta tomar

$$G = \mathbb{R}^n \setminus V,$$

que é pechado en $\mathbb{R}^n$. □



Os abertos relativos (Definición 2.16) dun conxunto X forman unha topoloxía (Teorema 2.3) en X. Este resultado enúnciase a continuación, pero a súa demostración non se inclúe xa que é análoga á que se fixo para $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.22. *Os abertos de X satisfán as seguinte propiedades:*

- *$\emptyset$ e X son abertos en X.*
- *A unión de abertos de X é aberto en X.*
- *A intersección finita de abertos de X é aberto en X.*

O resultado análogo para as propiedades dos conxuntos pechados (Proposición 2.11) enúnciase e demóstrase de forma similar.

Proposición 2.23. *Os conxuntos pechados de X cumpren as seguintes propiedades:*

- *$\emptyset$ e X son pechados en X.*
- *A intersección arbitraria de conxuntos pechados en X é pechado en X.*
- *A unión finita de conxuntos pechados en X é pechado en X.*

Finalmente facemos nota-lo seguinte feito. Supoñamos $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset X$. Entón $U \subset Y$ é aberto en Y se e só se existe V aberto en X tal que $U = V \cap X$. Este resultado obtense de xeito análogo á caracterización de abertos relativos (Proposición 2.17) que se fixo arriba. O correspondente enunciado para pechados tamén se consegue de xeito similar. De feito, todo o anterior podería terse establecido para un espacio topolóxico (Observación 2.6) arbitrario (X, τ). A demostración déixase como exercicio.

En particular, se X é aberto en Y, e Y é aberto en Z, entón X é aberto en Z. En efecto, como X é aberto en Y, pola caracterización de abertos relativos (Proposición 2.17) existe U aberto en Z tal que $X = U \cap Y$. Pero agora X é intersección de dous abertos (Proposición 2.22) de Z, e por tanto é aberto en Z. Analogamente, funcionaría para pechados.

2.4. Outros conceptos topolóxicos

Para rematar este capítulo definiremos algúns conceptos topolóxicos relacionados cos puntos dun conxunto.

No que segue, X é un subconxunto de $\mathbb{R}^n$ e A é un subconxunto de X. As definicións danse relativas á topoloxía de X aínda que non se fai explícito na notación. Non obstante, neste curso pensaremos soamente nestes conceptos para $X = \mathbb{R}^n$.

Definición 2.24. Un punto $\mathbf{x} \in A$ dise **punto interior** de A se e só se existe $r > 0$ tal que $B_X(\mathbf{x}, r) \subset A$.

Chámase **interior** de A ó conxunto $\mathrm{Int}(A)$ (ou $\mathring{A}$) de puntos interiores de A.

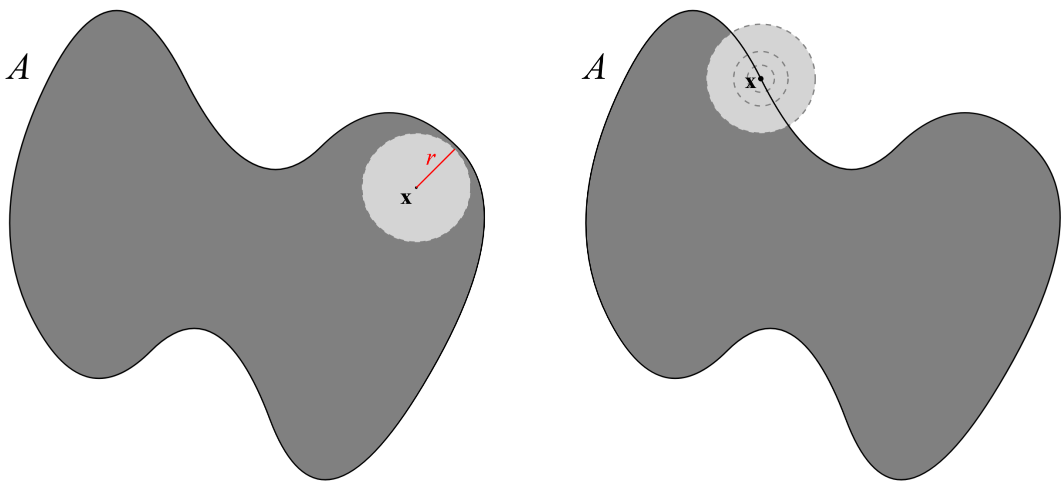


Figura 2.1: Á esquerda, un punto interior. Á dereita, un punto non interior.

Exercicio 2.25. Proba-las seguintes propiedades do interior:

- $\mathrm{Int}(A)$ é o maior aberto que está contido en A.
- A é aberto se e só se $\mathrm{Int}(A) = A$.

Definición 2.26. Un punto $\mathbf{x} \in X$ dise **punto clausura** ou adherente de A se e só se para todo $r > 0$ se ten que $B_X(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \emptyset$.

A **clausura** de A é o conxunto $\mathrm{Cl}(A)$ (ou $\bar{A}$) de puntos da clausura de A.

Exercicio 2.27. Proba-las seguintes propiedades da clausura:

- $\mathrm{Cl}(A)$ é o menor pechado que contén a A.
- A é pechado se e só se $\mathrm{Cl}(A) = A$.
- $\mathrm{Cl}(X \setminus A) = X \setminus \mathrm{Int}(A)$ e $\mathrm{Int}(X \setminus A) = X \setminus \mathrm{Cl}(A)$.

Definición 2.28. Un punto $\mathbf{x} \in X$ dise **punto fronteira** de A se e só se para todo $r > 0$ temos que $B_X(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \emptyset$ e $B_X(\mathbf{x}, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

A **fronteira** de A é o subconxunto ∂A de puntos da fronteira de A.

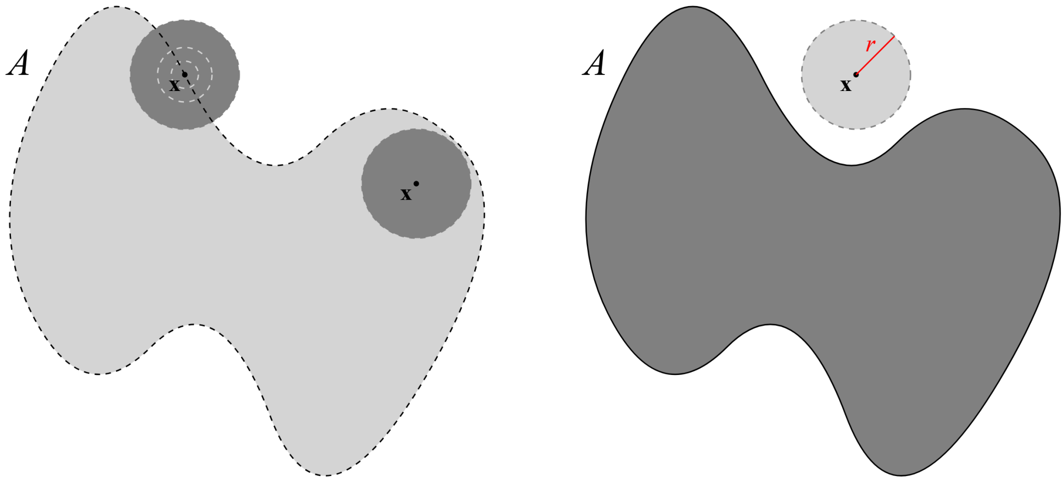


Figura 2.2: Á esquerda, puntos adherentes ou da clausura. Á dereita, un punto que non é da clausura.

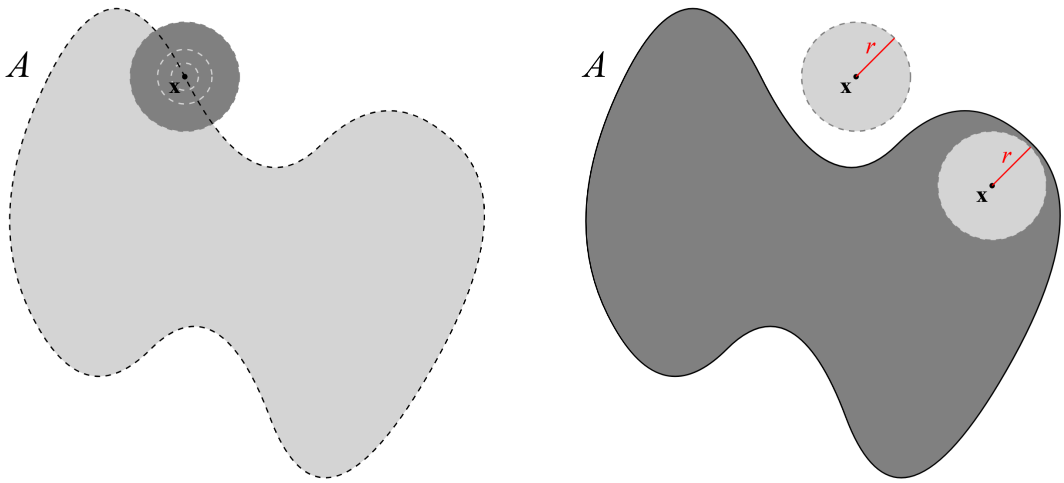


Figura 2.3: Á esquerda, un punto da fronteira. Á dereita, puntos que non son da fronteira.

Exercicio 2.29. Proba-las seguintes propiedades da fronteira:

- ∂A é un conxunto pechado.
- A é aberto se e só se $\partial A \subset X \setminus A$.
- A é pechado se e só se $\partial A \subset A$.
- A é aberto e pechado se e só se $\partial A = \emptyset$.
- $\partial A = \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A)$.
- $\partial A = \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)$.

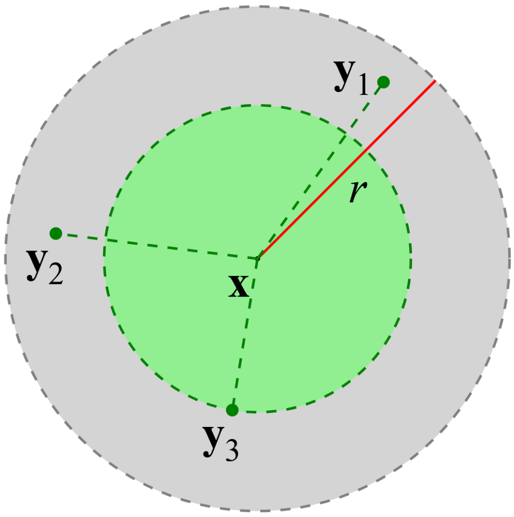
Definición 2.30. Un punto $\mathbf{x} \in X$ dise **punto de acumulación** de A se e só se para todo $r > 0$ se ten que $(B_X(\mathbf{x}, r) \setminus \{\mathbf{x}\}) \cap A \neq \emptyset$.

Ó conxunto de puntos de acumulación de A chámaselle **conxunto derivado** de A e denótase por A'.

O seguinte resultado é unha caracterización dos puntos de acumulación que será necesaria máis adiante neste curso.

Proposición 2.31. *Tense que* $\mathbf{x} \in A'$ *se e só se toda bóla* $B_X(\mathbf{x}, r)$ *centrada en* $\mathbf{x}$ *ten infinitos puntos de* A.

Demostración. Sexa $\mathbf{x} \in A'$ un punto de acumulación (Definición 2.30) de A e $r > 0$ arbitrario. Vexamos que $B(\mathbf{x}, r)$ ten infinitos puntos de A.



Pola contra supoñamos que en $B(\mathbf{x}, r)$ só houbese unha cantidade finita de puntos de A. Nese caso podemos escribir $(B(\mathbf{x}, r) \setminus \{\mathbf{x}\}) \cap A = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$. Tomemos agora $s = \text{mín}\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1), \dots, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k)\}$. Claramente, $s > 0$ pois $\mathbf{y}_i \neq \mathbf{x}$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Para este novo radio, como $s < r$, verifícase que

$$\begin{aligned}(B(\mathbf{x}, s) \setminus \{\mathbf{x}\}) \cap A &\subset (B(\mathbf{x}, r) \setminus \{\mathbf{x}\}) \cap A \\ &= \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}.\end{aligned}$$

Non obstante, para $i \in \{1, \dots, k\}$, satisfaise que $\mathbf{y}_i \notin (B(\mathbf{x}, s) \setminus \{\mathbf{x}\}) \cap A$ pois $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) \geq s$. Isto quere dicir que $(B(\mathbf{x}, s) \setminus \{\mathbf{x}\}) \cap A = \emptyset$, o cal é unha contradicción con que $\mathbf{x} \in A'$. □

Definición 2.32. Un punto $\mathbf{x} \in A$ dise **illado** en A se existe $r > 0$ tal que $B_X(\mathbf{x}, r) \cap A = \{\mathbf{x}\}$.

O conxunto de puntos illados de A denotarase $\text{Ill}(A)$.

Exemplo 2.33. Sexa $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Tódolos puntos de A son illados, e por tanto ningún é de acumulación. O punto $0 \in \mathbb{R}$ é un punto de acumulación de A.

Exercicio 2.34. Probar que $A' = \text{Cl}(A) \setminus \text{Ill}(A)$.

2.5. Problemas resoltos

Problema 2.35. Sexan U e V subconxuntos de $\mathbb{R}^2$ tales que $U \cup V$ é aberto en $\mathbb{R}^2$. ¿Son U e V abertos en $\mathbb{R}^2$?

Solución. Falso. Por exemplo, tomemos $U = \mathbb{Q}\times\mathbb{R}$ e $V = (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\times\mathbb{R}$. Obviamente U e V non son abertos (Definición 2.1) en $\mathbb{R}^2$, pois $\mathbb{Q}$ non é aberto (Definición 2.1) nin pechado (Definición 2.8) en $\mathbb{R}$, pero $U\cup V = \mathbb{R}^2$ si é aberto (Definición 2.1) en $\mathbb{R}^2$.

Outro xeito sinxelo de velo é o seguinte: tomemos $U = \mathbb{R}^2$ e V calquera subconxunto de $\mathbb{R}^2$ que non sexa aberto (Definición 2.1). Entón $U\cup V = \mathbb{R}^2$, pero V non é aberto (Definición 2.1). □

Problema 2.36. Dise que un conxunto A é denso en $\mathbb{R}^n$ se $\bar{A} = \mathbb{R}^n$. Sexan agora X e Y abertos densos de $\mathbb{R}^n$. ¿É certo que $X\cap Y \neq \emptyset$?

Solución. Verdadeiro. Obviamente, como $\bar{X} = \bar{Y} = \mathbb{R}^n$, temos que $X, Y \neq \emptyset$. Sexa $\mathbf{x}\in X$. Como X é aberto (Definición 2.1), existe $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subset X$. Como $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n = \bar{Y}$ é da clausura (Definición 2.26) de Y, para o radio anterior temos que $B(\mathbf{x}, r)\cap Y \neq \emptyset$, co que basta tomar calquera punto de $B(\mathbf{x}, r)\cap Y$. □

Problema 2.37. Probar que se A, $B \subset \mathbb{R}^n$ entón $\overline{A}\cup\overline{B} = \overline{A\cup B}$.

Solución. Vexamos que a unión das clausuras (Definición 2.26) é a clausura (Definición 2.26) da unión.

($\subset$) Sexa $\mathbf{x}\in\overline{A}\cup\overline{B}$ e vexamos que $\mathbf{x}\in\overline{A\cup B}$. Para iso sexa $r > 0$ arbitrario. Se $\mathbf{x}\in\overline{A}$ entón $B(\mathbf{x}, r)\cap A \neq \emptyset$ e por tanto $B(\mathbf{x}, r)\cap(A\cup B)\neq\emptyset$. Se $\mathbf{x}\in\overline{B}$ entón $B(\mathbf{x}, r)\cap B\neq\emptyset$ e por tanto $B(\mathbf{x}, r)\cap(A\cup B)\neq\emptyset$. En calquera caso $B(\mathbf{x}, r)\cap(A\cup B)\neq\emptyset$, e como $r > 0$ era arbitrario, deducimos que $\mathbf{x}\in\overline{A\cup B}$.

($\supset$) Reciprocamente, sexa $\mathbf{x}\in\overline{A\cup B}$ e vexamos que $\mathbf{x}\in\overline{A}\cup\overline{B}$. Supoñamos que $\mathbf{x}\notin\overline{A}$, é dicir, que existe $s > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, s)\cap A = \emptyset$. Temos que probar que $\mathbf{x}\in\overline{B}$. Para iso sexa $r > 0$ arbitrario, e supoñamos, sen perda de xeneralidade que $r < s$. Como $\mathbf{x}\in\overline{A\cup B}$, temos $B(\mathbf{x}, r)\cap(A\cup B)\neq\emptyset$. Logo, $B(\mathbf{x}, r)\cap A\neq\emptyset$ ou $B(\mathbf{x}, r)\cap B\neq\emptyset$. O primeiro caso non pode darse xa que $B(\mathbf{x}, s)\cap A = \emptyset$ e $B(\mathbf{x}, r)\subset B(\mathbf{x}, s)$. Por tanto, ten que darse o segundo, $B(\mathbf{x}, r)\cap B\neq\emptyset$, é dicir, $\mathbf{x}\in\overline{B}$. En definitiva, $\mathbf{x}\in\overline{A}\cup\overline{B}$, como queriamos ver. □

Problema 2.38. Dados A, $B\subset\mathbb{R}^n$, ¿que relación de contido existe entre $\overline{A}\cap\overline{B}$ e $\overline{A\cap B}$?

Solución. Vexamos que a intersección e a clausura (Definición 2.26) se relacionan mediante $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$.

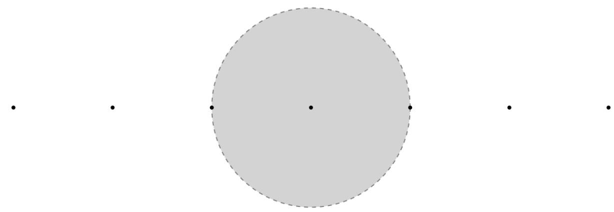
Sexa $\mathbf{x}\in\overline{A\cap B}$ e vexamos que $\mathbf{x}\in\overline{A}\cap\overline{B}$. Sexa $r > 0$ arbitrario. Por hipótese, $B(\mathbf{x}, r)\cap(A\cap B)\neq\emptyset$, o que implica, xa que $A\cap B\subset A$, que $B(\mathbf{x}, r)\cap A\neq\emptyset$. Por tanto, $\mathbf{x}\in\overline{A}$. Analogamente $\mathbf{x}\in\overline{B}$. Logo, $\mathbf{x}\in\overline{A}\cap\overline{B}$, e en consecuencia, $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$.

O recíproco non ten por que ser certo. En efecto, $\overline{\mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, mentres que $\overline{\mathbb{Q}}\cap\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}\cap\mathbb{R} = \mathbb{R}$. □

Problema 2.39. Considerémo-lo conxunto

$$X = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}\cup\Big(\mathbb{Z}\times\{0\}\Big).$$

Calcula-lo seu interior, a súa clausura, a súa fronteira, os seus puntos de acumulación e os seus puntos illados.



Solución. Resolveremos este exercicio empregando directamente as definicións. Máis adiante haberá outros métodos para facer algúns pasos con máis rapidez.

Vexamos que o interior (Definición 2.24) de X é

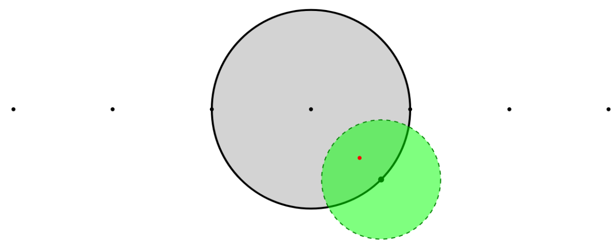
$$\mathrm{Int}(X) = B((0,0),1).$$

($\supset$) Como $B((0,0),1)$ é aberta (Proposición 2.2), e está contida en X, séguese inmediantamente que todo punto de $B((0,0),1)$ é interior a X.

($\subset$) Como os puntos interiores pertencen ó conxunto, bastará con probar que ningún punto da forma $(x,0)$ con $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ é interior a X. En efecto, para calquera $r > 0$ tense que $B((x,0),r) \cap X \neq \emptyset$, pois $(x,r/2) \in B((0,0),r)$, pero $|x| \geq 1$ e $r/2 \neq 0$.

Vexamos agora que a clausura (Definición 2.26) de X é

$$\mathrm{Cl}(X) = B[(0,0),1] \cup \Big(\mathbb{Z} \times \{0\}\Big).$$



($\supset$) Como $X \subset \mathrm{Cl}(X)$ bastará con ver que se $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ satisfai $x^2 + y^2 = 1$, entón $(x,y) \in \mathrm{Cl}(X)$. Sexa $r > 0$ dado e supoñamos $r < 2$. Vexamos que $B((x,y),r) \cap X \neq \emptyset$. En efecto, $(1 - r/2)(x,y) \in B((x,y),r)$ pois

$$d((1 - r/2)(x,y),(x,y)) = r/2 < r,$$

e $(1 - r/2)(x,y) \in B((0,0),1) \subset X$ pois

$$d((1 - r/2)(x,y),(0,0)) = 1 - r/2 < 1.$$

($\subset$) Vexamos en primeiro lugar que $\mathbb{Z}\times\{0\}$ é pechado (Definición 2.8). Sexa $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. [2]

[2] Sexa $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (\operatorname{sen} \pi x, y)$. Entón, $\mathbb{Z} \times \{0\} = f^{-1}(\{(0,0)\})$, e por ser imaxe recíproca dun pechado por unha función continua (Teorema 4.10), $\mathbb{Z} \times \{0\}$ é pechado.

Se $y \neq 0$, tomando $r = |y| > 0$ temos que $B((x,y),r) \subset \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{Z} \times \{0\})$, xa que se $(a,b) \in B((x,y),r)$ entón

$$\begin{aligned} |b-y| &\leq \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} \\ &< r = |y|, \end{aligned}$$

o que significa $-|y| < b - y < |y|$, e por tanto $b \neq 0$.

Se $y = 0$ e $x \notin \mathbb{Z}$, poñamos $n < x < n+1$ con $n \in \mathbb{Z}$, tomamos $r = \text{mín}\{x-n, n+1-x\}$. Neste caso, $B((x,0),r) \subset \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{Z} \times \{0\})$ pois se $(a,b) \in B((x,0),r)$ entón

$$|a-x| \leq \sqrt{(a-x)^2 + b^2} < r,$$

o que significa

$$n - x < -r < a - x < r < n + 1 - x,$$

de onde $n < a < n+1$. Logo $a \notin \mathbb{Z}$, e en consecuencia, $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{Z} \times \{0\})$. Xuntando estes dous casos deducimos entón que $\mathbb{Z} \times \{0\}$ é pechado.

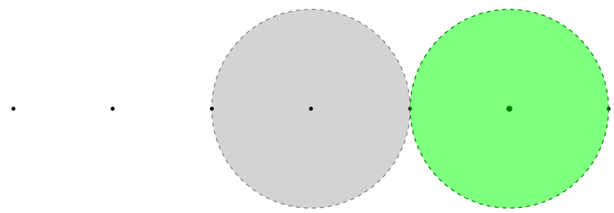
Para remata-lo cálculo da clausura observamos entón que $B[(0,0),1] \cup (\mathbb{Z} \times \{0\})$ é pechado por ser unión de dous pechados (Proposición 2.11). Logo calquera punto do complementario de $B[(0,0),1] \cup (\mathbb{Z} \times \{0\})$ é interior a dito complementario. Isto implica que ningún punto de fóra de $B[(0,0),1] \cup (\mathbb{Z} \times \{0\})$ é da clausura de X, que é o que faltaba por ver.

Dado que $\partial X = \text{Cl}(X) \setminus \text{Int}(X)$, deducimos que a fronteira (Definición 2.28) de X é

$$\partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \Big((\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times \{0\} \Big).$$

A continuación veremos que o conxunto de puntos illados (Definición 2.32) é

$$\text{Ill}(X) = (\mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}) \times \{0\}.$$



($\supset$) Sexa $(x,0) \in \mathbb{R}^2$ con $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq -1, 0, 1$. Entón $B((x,0),1) \cap X = \{(x,0)\}$. En efecto, se $(a,b) \in B((x,0),1)$ temos

$$|a-x| \leq \sqrt{(a-x)^2 + b^2} < 1,$$

co que $a \in (x-1, x+1)$. Como $|x| \geq 2$, obtemos $|a| > 1$, e por tanto, $(a,b) \notin B((0,0),1)$. Logo, se $(a,b) \in X$ terá que ser $(a,b) = (x,0)$, como queriamos ver.

($\subset$) O mesmo argumento que vimos anteriormente para a clausura implica que os puntos de $B((0,0),1) \cup \{(-1,0),(1,0)\}$ son de acumulación. Por tanto non hai máis puntos illados cós de $(\mathbb{Z} \setminus \{-1,0,1\}) \times \{0\}$.

Finalmente, como $X' = \mathrm{Cl}(X) \setminus \mathrm{Ill}(X)$ deducimos que o conxunto de puntos de acumulación (Definición 2.30) de X vén dado por

$$X' = B[(0,0),1].$$

□

Problema 2.40. Sexa $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1\}$. ¿É $B((0,0),1)$ pechada en X?

Solución. Verdadeiro. Resulta que $B[(0,0),1] \cap X = B((0,0),1)$ co que, ó ser intersección dun pechado en $\mathbb{R}^2$ con X, pola caracterización dos pechados relativos (Proposición 2.21), $B((0,0),1)$ é un subconxunto pechado de X. □

Capítulo 3

Sucesións

O obxectivo deste tema é introducir a noción de converxencia de sucesións e utilizar dita propiedade para o estudio da topoloxía.

3.1. Sucesións e converxencia

Sexa X un subconxunto de $\mathbb{R}^n$. Unha sucesión en X é unha enumeración de elementos de X. Máis concretamente,

Definición 3.1. Unha **sucesión** nun conxunto X é unha aplicación $\mathbf{x}\colon \mathbb{N} \to X$.

Normalmente designaremos por $\mathbf{x}_k$ á imaxe pola aplicación $\mathbf{x}$ do natural k, é dicir, $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k)$. Á propia sucesión denotarémola $\{\mathbf{x}_k\}$, e o conxunto imaxe da sucesión excribirémolo explicitamente como $\{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\}$. Non obstante, aínda empregarémo-la notación $\{\mathbf{x}_k\} \subset A$ para expresar que $\{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\} \subset A$. A cada elemento $\mathbf{x}_k$ denomínaselle *termo* da sucesión.

O esencial dunha sucesión non é tanto o conxunto imaxe, senón o xeito no que se ordean os termos. Por exemplo, as sucesións $\mathbf{x}_k = (-1)^k$, e $-1, 1, 1, 1, ...$ posúen o mesmo conxunto imaxe, pero os seus comportamentos son moi diferentes.

Definición 3.2. Unha sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ dise que **converxe** a un punto $\mathbf{x}_0$ se toda bóla aberta arredor de $\mathbf{x}_0$ contén a tódolos termos da sucesión a partir dun momento dado, é dicir, se

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \mathbf{x}_k \in B_X(\mathbf{x}_0, \epsilon),\ \forall k \geq N.$$

En tal caso dirase que a sucesión é **converxente**, e que $\mathbf{x}_0$ é o seu **límite**.

Equivalentemente, a condición de converxencia a $\mathbf{x}_0$ tamén se pode escribir como

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \epsilon,\ \forall k \geq N.$$

En xeral representaremos a condición de converxencia anterior como

$$\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0, \qquad \text{ou} \qquad \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0.$$

Se unha sucesión non converxe a ningún punto diremos que é diverxente ou que diverxe. Os conceptos de "diverxer a infinito" non están definidos para sucesións en $\mathbb{R}^n$.

O seguinte resultado é importante non tanto polas súas consecuencias prácticas, senón polo feito de que nun espacio topolóxico (Observación 2.6) esta sería a definición de converxencia.

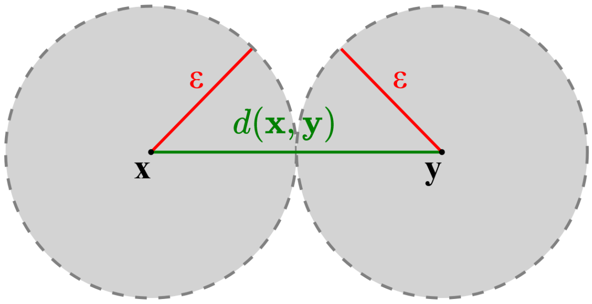
Proposición 3.3. *Sexa $\{\mathbf{x}_k\}$ unha sucesión en X. Entón $\{\mathbf{x}_k\}$ converxe a $\mathbf{x}_0$ se e só se para todo aberto U contendo a $\mathbf{x}_0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_k \in U$ para todo $k \geq N$.*

Demostración. Supoñamos $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0$, e sexa U aberto de X tal que $\mathbf{x}_0 \in U$. Como U é aberto (Definición 2.1), existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\mathbf{x}_0, \epsilon) \subset U$. Por definición de límite (Definición 3.2), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, \epsilon) \subset U$ para todo $k \geq N$, como queriamos.

Reciprocamente, dado $\epsilon > 0$ arbitrario, como $U = B(\mathbf{x}_0, \epsilon)$ é un aberto contendo a $\mathbf{x}_0$, por hipótese existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in B(\mathbf{x}_0, \epsilon)$ para todo $k \geq N$, o que é a definición de límite (Definición 3.2). □

Proposición 3.4. *O límite dunha sucesión, se existe, é único.*

Demostración. Supoñamos pola contra que a sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ ten dous límites (Definición 3.2) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Tomemos $\epsilon = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})/2 > 0$.



Como $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}$, para o ϵ anterior existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}, \epsilon)$ para todo $k \geq N_1$.

Similarmente, como $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{y}$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{y}, \epsilon)$ para todo $k \geq N_2$.

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$ e $k \geq N$ temos que $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}, \epsilon) \cap B(\mathbf{y}, \epsilon)$, o que non é posible xa que pola desigualdade triangular (Proposición 1.10)

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) + d(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}) \\ &< \epsilon + \epsilon = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Por tanto, o límite, se existe, ten que ser único. □

O seguinte exercicio dá un criterio para un espacio topolóxico que aseguraría a existencia de límite único cunha demostración similar á da anterior proposición.

Exercicio 3.5. Proba que todo subconxunto de X de $\mathbb{R}^n$ é *Hausdorff*, é dicir, que para calquera par de puntos distintos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in X$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, existen abertos U e V de X tales que $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{y} \in V$, e $U \cap V = \emptyset$.

No caso de $n = 1$ temos sucesións de números reais, e tendo en conta que a distancia en $\mathbb{R}$ é o valor absoluto da diferencia, obtemos o concepto de converxencia de sucesión de números reais. Neste curso suporemos certos os resultados de converxencia de sucesións de números reais. Entre eles cabe resaltar o *lema do sandwich*:

Lema 3.6. *Sexan $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ e $\{z_k\}$ sucesións de números reais tales que $x_k \leq y_k \leq z_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $\{x_k\} \to t$ e $\{z_k\} \to t$, entón $\{y_k\}$ é converxente e $\{y_k\} \to t$.*

Demostración. Sexa $\epsilon > 0$ arbitrario.

Como $\{x_k\} \to t$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_k - t| < \epsilon$ para todo $k \geq N_1$.

Como $\{z_k\} \to t$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_k - t| < \epsilon$ para todo $k \geq N_2$.

Tomemos $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ e $k \geq N$. Entón

$$y_k - t \leq z_k - t \leq |z_k - t| < \epsilon,$$
$$t - y_k \leq t - x_k \leq |x_k - t| < \epsilon,$$

de onde se deduce $|y_k - t| < \epsilon$ como queriamos probar. □

Exercicio 3.7. Sexa $\{\mathbf{x}_k\}$ unha sucesión nun conxunto X. Entón a sucesión converxe a un punto $\mathbf{x}_0$ se e só se a sucesión de números reais $\{d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0)\}$ converxe a 0.

Como resultado importante que permite aplica-los resultados coñecidos en $\mathbb{R}$ para o cálculo de límites de sucesións de vectores de $\mathbb{R}^n$ temos a seguinte equivalencia.

Teorema 3.8. *Sexa $\{\mathbf{x}_k\} = \{(x_{k1}, \dots x_{kn})\}$ unha sucesión en $X \subset \mathbb{R}^n$. Entón, $\{\mathbf{x}_k\}$ converxe a $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ se e só se $\{x_{ki}\}$ converxe a x_i para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Dito doutro xeito:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \left(\lim_{k\to\infty} x_{k1}, \dots, \lim_{k\to\infty} x_{kn}\right),$$

sempre que os límites existan.

Demostración. Supoñamos primeiro que $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}$.

Sexa $i \in \{1, \dots, n\}$ e vexamos que $\{x_{ki}\}$ converxe (Definición 3.2) a x_i.

Sexa $\epsilon > 0$ dado. Como $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}) < \epsilon$ para todo $k \geq N$. Pois ben, se $k \geq N$ entón

$$\begin{aligned}
|x_{ki} - x_i| &= \sqrt{(x_{ki} - x_i)^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_{kj} - x_j)^2} \\
&= d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}) < \epsilon,
\end{aligned}$$

de onde $\{x_{ki}\} \to x_i$.

Reciprocamente, supoñamos que $\{x_{ki}\} \to x_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, e vexamos que entón $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}$.

Sexa pois $\epsilon > 0$ dado. Como $\{x_{ki}\} \to x_i$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{ki} - x_i| < \epsilon/\sqrt{n}$ para todo $k \geq N_i$.

Tomemos entón $N = \text{máx}\{N_1, \dots, N_n\}$ e sexa $k \geq N$. Así,

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}) &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_{kj} - x_j)^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \text{máx}\{(x_{kj} - x_j)^2 : j = 1, \dots, n\}} \\
&= \sqrt{n}\, \text{máx}\{|x_{kj} - x_j| : j = 1, \dots, n|\} \\
&< \sqrt{n} \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} = \epsilon,
\end{aligned}$$

de onde $\{\mathbf{x}_k\}$ converxe (Definición 3.2) a $\mathbf{x}$, como queriamos ver. □

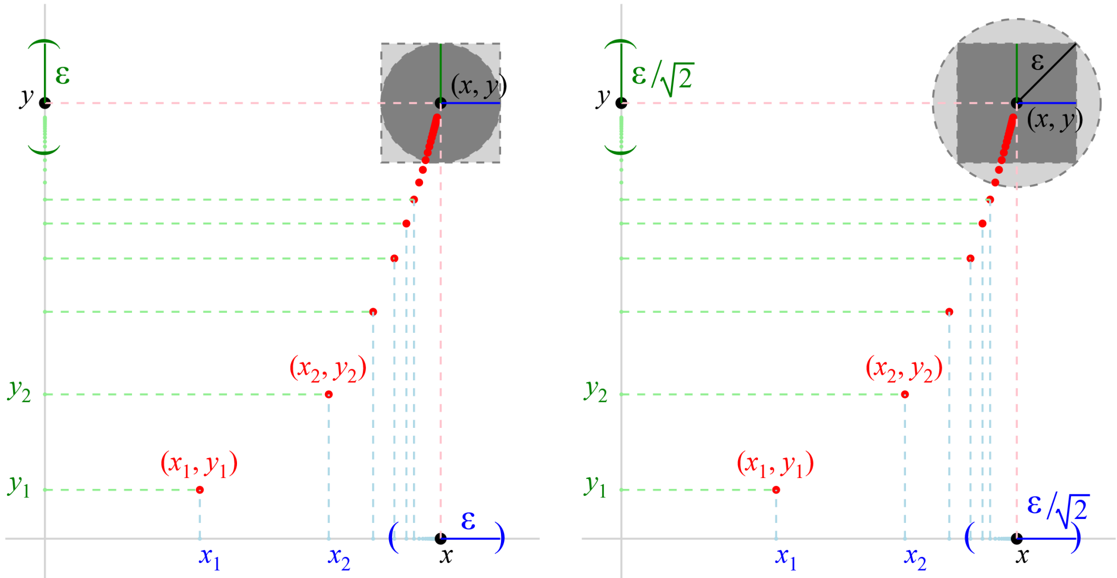


Figura 3.1: Ilustración das dúas implicacións da demostración

En cursos máis avanzados verase que a idea fundamental da anterior demostración consiste en resolve-lo seguinte exercicio.

Exercicio 3.9. Para un vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ definimos

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Probar que $\|\cdot\|_\infty$ satisfai as propiedades dunha norma (Proposición 1.4). Probar ademais as seguintes desigualdades:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|, \quad \|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty.$$

O seguinte exercicio é doado de resolver coa propia definición de converxencia. En todo caso, esta afirmación tamén se segue de que toda sucesión converxente é de Cauchy (Proposición 3.19), e de que toda sucesión de Cauchy é limitada (Proposición 3.23).

Exercicio 3.10. Toda sucesión converxente é limitada.

3.1.1. Subsucesións

Unha subsucesión dunha sucesión dada consiste nunha escolla dos termos da sucesión mantendo a súa orde. Recalcamos que non é suficiente con que os termos sexan un subconxunto da sucesión orixinal, e que o feito de que estean ben ordeados, é dicir mantendo a orde da sucesión orixinal, é un requerimento fundamental da definición. [1]

De xeito máis preciso:

[1]Unha aplicación $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é *estrictamente crecente* se e só se para calquera naturais k, $\ell \in \mathbb{N}$,

$$k < \ell \Rightarrow \phi(k) < \phi(\ell).$$

Isto implica, por exemplo, que $\phi(k) \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definición 3.11. Sexa $\{\mathbf{x}_k\}$ unha sucesión e $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ unha aplicación estrictamente crecente. Entón a aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}\circ\phi\colon \mathbb{N} & \to & X \\ k & \mapsto & \mathbf{x}_{\phi(k)} \end{array}$$

dise que é unha **subsucesión** da sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$.

Exemplo 3.12. Toda sucesión ten infinitas subsucesións. Por exemplo:

- A subsucesión $\{\mathbf{x}_{2k}\}$ dos termos de orde par en $\{\mathbf{x}_k\}$.
- A subsucesión $\{\mathbf{x}_{2k+1}\}$ dos termos de orde impar en $\{\mathbf{x}_k\}$.
- A subsucesión $\{\mathbf{x}_{3k}\}$ dos múltiplos de tres...

Cómpre recalcar que é necesario mante-la orde. Por exemplo, $\mathbf{x}_5$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_{10}$, $\mathbf{x}_7$, $\mathbf{x}_{13}$,... non é unha subsucesión de $\{\mathbf{x}_k\}$.

Proposición 3.13. *Se unha sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ é converxente, tamén o son tódalas súas subsucesións e ademais todas converxen ó mesmo límite.*

Demostración. Supoñamos $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}$ e sexa $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ unha función estrictamente crecente. Temos que ver que $\{\mathbf{x}_{\phi(k)}\} \to \mathbf{x}$. Para iso sexa $\epsilon > 0$ arbitrario.

Como $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}, \epsilon)$ para todo $k \geq N$.

Entón, se $k \geq N$, tamén temos que $\phi(k) \geq k \geq N$, de xeito que $\mathbf{x}_{\phi(k)} \in B(\mathbf{x}, \epsilon)$ como queriamos ver. □

Exemplo 3.14. Unha sucesión pode posuír subsucesións converxentes sen que ela mesma o sexa. Por exemplo, a sucesión

$$\{\mathbf{x}_k\} = \left\{(-1)^k\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right\}$$

non é converxente. Non obstante, as subsucesións

$$\{\mathbf{x}_{2k}\} = \left\{1 + \frac{1}{2k}\right\},$$
$$\{\mathbf{x}_{2k+1}\} = \left\{-\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)\right\},$$

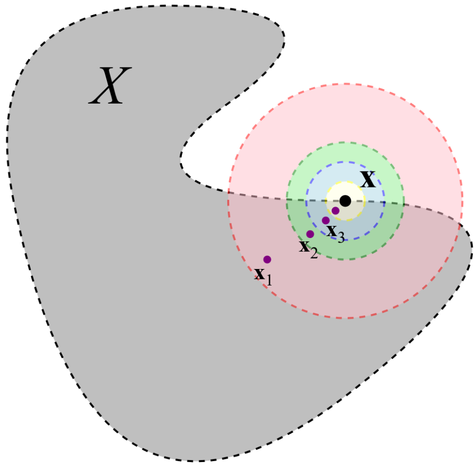
converxen: $\{\mathbf{x}_{2k}\} \to 1$, $\{\mathbf{x}_{2k+1}\} \to -1$.

3.1.2. Caracterización secuencial de conceptos topolóxicos

Algúns dos conceptos topolóxicos introducidos no tema anterior (Sección 2.4) poden ser caracterizados en termos de sucesións.

Sexa $X \subset \mathbb{R}^n$ e $A \subset X$.

Proposición 3.15. *Un punto $\mathbf{x} \in X$ é adherente (Definición 2.26) a A se e só se existe unha sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ de puntos de A tal que $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}$.*



Demostración. Supoñamos primeiro que $\mathbf{x} \in \bar{A}$. Vexamos que existe unha sucesión de puntos de A que converxe a $\mathbf{x}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, por definición de punto clausura (Definición 2.26), e en vista de que $B_X(\mathbf{x}, 1/k) \cap A \neq \emptyset$, podemos tomar $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}, 1/k) \cap A$. Temos por tanto unha sucesión $\{\mathbf{x}_k\} \subset A$ tal que $0 \leq d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}) \leq 1/k$. Como $\{1/k\} \to 0$, o lema do sandwich (Lema 3.6) implica entón que $d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}) \to 0$, ou equivalentemente, $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}$, como queriamos ver.

Reciprocamente, supoñamos que existe $\{\mathbf{x}_k\} \subset A$ tal que $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}$, e probemos entón que $\mathbf{x} \in \bar{A}$.

Sexa $r > 0$ arbitrario. Como $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_k \in B_X(\mathbf{x}, r)$ para todo $k \geq N$. En particular, $\mathbf{x}_N \in B_X(\mathbf{x}, r) \cap A$, co que $B_X(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \emptyset$, o que proba que $\mathbf{x}$ é un punto da clausura (Definición 2.26) de A. □

A correspondente afirmación para puntos de acumulación próbase de xeito similar. A segunda afirmación da seguinte proposición déixase como exercicio.

Proposición 3.16. *Sexa $\mathbf{x} \in X$. Entón temos as seguintes caracterización dos puntos de acumulación (Definición 2.30):*

- $\mathbf{x} \in A'$ *se e só se existe unha sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ de puntos de A, todos distintos de $\mathbf{x}$, tal que $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}$.*
- $\mathbf{x} \in A'$ *se e só se existe unha sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ de puntos de A, todos distintos entre si, tal que $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}$.*

Demostración. Supoñamos primeiro que $\mathbf{x} \in A'$. Vexamos que existe unha sucesión de puntos de A, todos distintos de $\mathbf{x}$, que converxe a $\mathbf{x}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, por definición de punto de acumulación (Definición 2.30), dado que $\big(B_X(\mathbf{x}, 1/k) \setminus \{\mathbf{x}\}\big) \cap A \neq \emptyset$, podemos tomar $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}, 1/k) \cap A$ con $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}$. Temos por tanto unha sucesión $\{\mathbf{x}_k\} \subset A$, con $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}$, tal que $0 \leq d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}) \leq 1/k$. Como $\{1/k\} \to 0$, o lema do sandwich (Lema 3.6) implica entón que $d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}) \to 0$, ou equivalentemente, $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}$, como faltaba por ver.

Reciprocamente, supoñamos que existe $\{\mathbf{x}_k\} \subset A$, con $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tal que $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}$, e probemos entón que $\mathbf{x} \in A'$.

Sexa $r > 0$ arbitrario. Como $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_k \in B_X(\mathbf{x}, r)$ para todo $k \geq N$. Por hipótese, $\mathbf{x}_N \neq \mathbf{x}$, e así $\mathbf{x}_N \in \Big(B_X(\mathbf{x}, r) \setminus \{\mathbf{x}\}\Big) \cap A$, co que $\Big(B_X(\mathbf{x}, r) \setminus \{\mathbf{x}\}\Big) \cap A \neq \emptyset$. En consecuencia, $\mathbf{x}$ é un punto de acumulación (Definición 2.30) de A. □

De xeito parecido, podemos tamén obter unha caracterización dos conxuntos pechados, como aqueles que conteñen tódolos límites das súas sucesións converxentes.

Proposición 3.17. *Un conxunto $A \subset X$ é pechado (Definición 2.18) en X se e só se para toda sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ de puntos de A que converxa en X a un punto, digamos $\mathbf{x} \in X$, se ten que $\mathbf{x} \in A$.*

Demostración. Supoñamos que A é pechado (Definición 2.8), e sexa $\{\mathbf{x}_k\} \subset A$ unha sucesión tal que $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x} \in X$. Vexamos que $\mathbf{x} \in A$.

Pola contra supoñamos que $x \in X \setminus A$. Como $X \setminus A$ é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_X(\mathbf{x}, r) \subset X \setminus A$. Para este radio, como $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_k \in B_X(\mathbf{x}, r) \subset X \setminus A$, para todo $k \geq N$, o que é absurdo pois $\{\mathbf{x}_k\} \subset A$. Logo $\mathbf{x} \in A$ como queriamos ver.

Supoñamos agora que A non é pechado e vexamos que hai unha sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ de puntos de A que non converxe a un punto de A.

Como A non é pechado (Definición 2.8), existe $\mathbf{x} \in X \setminus A$ tal que para todo $r > 0$ se ten que $B_X(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \emptyset$. En particular, para $r = 1/k$ existirá $\mathbf{x}_k \in B_X(\mathbf{x}, 1/k) \cap A$. Construímos así unha sucesión $\{\mathbf{x}_k\} \subset A$. Ademais, como $0 \leq d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}) < 1/k$, polo lema do sandwich (Lema 3.6) dedúcese que $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x} \in X \setminus A$, como queriamos ver. □

Esta caracterización dos conxuntos pechados é útil sobre todo para probar que un conxunto non é pechado, xa que bastará con atopar unha sucesión de puntos do conxunto que non converxe a un punto do conxunto.

3.2. Completitude

Nesta sección introduciremos o concepto de sucesión de Cauchy e de completitude dun conxunto. Estes dous conceptos non son puramente topolóxicos, senón que están asociados á distancia. Non obstante interesa coñecelos xa que aparecen en moitos lugares das matemáticas.

3.2.1. Sucesións de Cauchy

Falando informalmente, nunha sucesión de Cauchy preténdese defini-lo concepto de converxencia sen facer referencia ó límite. Así, unha sucesión será de Cauchy cando "converxe", pero no espacio no que está incluída pode falta-lo seu límite. Vexamos a continuación estas afirmacións de xeito máis riguroso.

Definición 3.18. Unha sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ é **de Cauchy** se

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : d(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) < \epsilon,\ \forall p, q \geq N.$$

Equivalentemente, $\{\mathbf{x}_k\}$ é de Cauchy se e só se

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+m}) < \epsilon,\ \forall k \geq N,\ \forall m \geq 0.$$

Cómpre sinalar que se $\{\mathbf{x}_k\}$ é unha sucesión de Cauchy en X, e $\{\mathbf{x}_k\} \subset A \subset X$, entón $\{\mathbf{x}_k\}$ tamén é sucesión de Cauchy en A. É dicir, que se unha sucesión é de Cauchy en X, tamén será de Cauchy en calquera conxunto que o conteña. Nótese que a definición depende só da distancia d e as distancias relativas (Sección 2.3) en subconxuntos obtéñense simplemente por restricción.

Unha consecuencia inmediata da desigualdade triangular é o seguinte:

Proposición 3.19. *Toda sucesión converxente é de Cauchy.*

Demostración. Supoñamos que $\{\mathbf{x}_k\} \subset X$ converxe a un punto $\mathbf{x} \in X$. Vexamos que $\{\mathbf{x}_k\}$ é de Cauchy (Definición 3.18). Sexa $\epsilon > 0$ dado.

Como $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}) < \epsilon/2$ para todo $k \geq N$.

Logo, se p, $q \geq N$ entón, pola desigualdade triangular (Proposición 1.10),

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_q) &\leq d(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_q) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

co que $\{\mathbf{x}_k\}$ é de Cauchy (Definición 3.18). □

Exemplo 3.20. O recíproco do anterior non é necesariamente certo, polo que as condicións de converxencia (Definición 3.2) e de ser de Cauchy (Definición 3.18) non son equivalentes. Este feito depende do espacio que se considere:

- A sucesión $\{1/k\}$ é converxente (Definición 3.2) no conxunto $X = [0, \infty)$.
- A sucesión $\{1/k\}$ é de Cauchy (Definición 3.18) no conxunto $X = (0, \infty)$, pero non é converxente, dado que o límite da mesma non está en X. Argumentamos de xeito máis preciso. Temos que a sucesión $\{1/k\}$ é converxente en $\mathbb{R}$, por tanto é de Cauchy en $\mathbb{R}$, e en consecuencia en X, como vimos anteriormente. Non obstante, non pode ser converxente en X, pois se o fose, xa que $X \subset \mathbb{R}$, como sucesión de $\mathbb{R}$ tería outro límite en X distinto de 0, o cal non é posible pola unicidade de límite (Proposición 3.4).

Enunciamos a continuación un par de resultados que teñen unha demostración moi similar á correspondente para sucesións converxentes.

Proposición 3.21. *Sexa $\{\mathbf{x}_k\} = \{(x_{k1}, \dots x_{kn})\}$ unha sucesión en $X \subset \mathbb{R}^n$. Entón, $\{\mathbf{x}_k\}$ é de Cauchy se e só se $\{x_{ki}\}$ é de Cauchy para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Demostración. Supoñamos primeiro que $\{\mathbf{x}_k\}$ é de Cauchy. Sexa $i \in \{1, \dots, n\}$ e vexamos que $\{x_{ki}\}$ é de Cauchy (Definición 3.18).

Sexa $\epsilon > 0$ dado. Como $\{\mathbf{x}_k\}$ é de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) < \epsilon$ para todo $p, q \geq N$. Pois ben, se $p, q \geq N$ entón

$$\begin{aligned} |x_{pi} - x_{qi}| &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_{pj} - x_{qj})^2} \\ &= d(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) < \epsilon, \end{aligned}$$

de onde se segue que $\{x_{ki}\}$ é de Cauchy.

Reciprocamente, supoñamos que $\{x_{ki}\}$ é de Cauchy para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, e vexamos que entón $\{\mathbf{x}_k\}$ tamén é de Cauchy.

Sexa pois $\epsilon > 0$ dado. Como $\{x_{ki}\}$ é de Cauchy, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{pi} - x_{qi}| < \epsilon/\sqrt{n}$ para todo $p, q \geq N_i$. Tomemos entón $N = \text{máx}\{N_1, \dots, N_n\}$ e sexan $p, q \geq N$. Entón,

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_{pj} - x_{qj})^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \text{máx}\{(x_{pj} - x_{qj})^2 : j = 1, \dots, n\}} \\ &= \sqrt{n}\, \text{máx}\{|x_{pj} - x_{qj}| : j = 1, \dots, n|\} \\ &< \sqrt{n} \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} = \epsilon, \end{aligned}$$

de onde $\{\mathbf{x}_k\}$ é de Cauchy (Definición 3.18), como queriamos ver. □

Proposición 3.22. *Toda subsucesión dunha sucesión de Cauchy é de Cauchy.*

Demostración. Supoñamos que $\{\mathbf{x}_k\}$ é de Cauchy e sexa $\phi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ unha función estrictamente crecente. Temos que ver que $\{\mathbf{x}_{\phi(k)}\}$ é de Cauchy (Definición 3.18). Para iso sexa $\epsilon > 0$ arbitrario.

Como $\{\mathbf{x}_k\}$ é de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) < \epsilon$ para todo $p, q \geq N$.

Entón, se $p, q \geq N$, tamén temos que $\phi(p) \geq p \geq N$ e $\phi(q) \geq q \geq N$. Por tanto, $d(\mathbf{x}_{\phi(p)}, \mathbf{x}_{\phi(q)} < \epsilon)$ como queriamos ver. □

O conxunto de puntos dunha sucesión de Cauchy é limitado, tal e como amosa a seguinte proposición.

Proposición 3.23. *Toda sucesión de Cauchy é limitada (Definición 1.14).*

Demostración. Supoñamos que $\{\mathbf{x}_k\}$ é unha sucesión de Cauchy. Dado $\epsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) < 1$ para todo p, $q \geq N$. Tomemos

$$M = \text{máx}\{1, d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_N), \dots, d(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{x}_N)\}.$$

Entón $\{\mathbf{x}_k\} \subset B[\mathbf{x}_N, M]$. □

Ademais, tamén témo-la seguinte relación entre sucesión de Cauchy, subsucesións, e converxencia.

Proposición 3.24. *Se unha sucesión de Cauchy $\{\mathbf{x}_k\}$ posúe unha subsucesión converxente a un punto $\mathbf{x}$, entón a propia sucesión converxe a $\mathbf{x}$.*

Demostración. Sexa $\{\mathbf{x}_k\}$ unha sucesión de Cauchy (Definición 3.18), $\phi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ unha función estrictamente monótona crecente, e supoñamos que a subsucesión $\{\mathbf{x}_{\phi(k)}\}$ converxe (Definición 3.2) a un punto $\mathbf{x} \in X$. Vexamos que entón $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}$.

Sexa $\epsilon > 0$ dado.

Como $\{\mathbf{x}_k\}$ é de Cauchy (Definición 3.18), existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) < \epsilon/2$ para todo p, $q \geq N_1$.

Com $\{\mathbf{x}_{\phi(k)}\}$ converxe (Definición 3.2) a $\mathbf{x}$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(\mathbf{x}_{\phi(k)}, \mathbf{x}) < \epsilon/2$ para todo $k \geq N_2$.

Tomemos $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, e sexa $k \geq N$. Entón, como $\phi(N) \geq N$,

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}) &\leq d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{\phi(N)}) + d(\mathbf{x}_{\phi(N)}, \mathbf{x}) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

co que $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}$, como queriamos ver. □

Exemplo 3.25. Para que unha sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ sexa de Cauchy (Definición 3.18) non é suficiente a condición

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) < \epsilon,\ \forall k \geq N.$$

É dicir, non chega con que termos consecutivos estean suficientemente próximos.

Por exemplo, tomémo-la sucesión $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, onde

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Obviamente $|x_{n+1} - x_n| = 1/(n+1)$, que se pode facer tan pequeno como se queira para n suficientemente grande.

Non obstante,

$$\begin{aligned} |x_{2n} - x_n| &= \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\geq \frac{1}{2n} + \overset{n \text{ veces}}{\cdots} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

co que evidentemente, a sucesión $\{x_n\}$ non pode ser de Cauchy.

A continuación introducimos a condición de completitude dun espacio métrico.

Definición 3.26. Un conxunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é **completo** se toda sucesión de Cauchy en X é converxente en X.

Os seguintes resultados proporcionan un criterio para decidi-la completitude dun subconxunto. O primeiro deles di que os conxuntos completos son pechados.

Proposición 3.27. *Sexa $X \subset \mathbb{R}^n$. Se $Y \subset X$ é completo, entón Y é pechado en X.*

Demostración. Supoñamos que Y é completo (Definición 3.26), e vexamos que é pechado (Definición 2.8) empregando a caracterización secuencial de conxuntos pechados (Proposición 3.17).

Sexa pois $\{\mathbf{x}_k\} \subset Y$ unha sucesión tal que $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x} \in X$. Vexamos que $\mathbf{x} \in Y$. En efecto, como $\{\mathbf{x}_k\}$ é converxente, en particular é de Cauchy (Proposición 3.19) en Y, e por ser Y completo (Definición 3.26), resulta que ten un límite $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{y} \in Y$. Por unicidade de límite (Proposición 3.4), $\mathbf{x} = \mathbf{y} \in Y$. □

A continuación probamos que un conxunto pechado dentro dun completo é completo.

Proposición 3.28. *Se X é un conxunto completo e $Y \subset X$ é pechado en X, entón Y é completo.*

Demostración. Supoñamos que X é completo (Definición 3.26) e que Y é pechado (Definición 2.8) en X. Sexa $\{\mathbf{x}_k\} \subset Y$ unha sucesión de Cauchy (Definición 3.18) en Y. Obviamente, $\{\mathbf{x}_k\}$ tamén é de Cauchy en X, e como X é completo (Definición 3.26), ten un límite $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x} \in X$. Agora ben, Y é pechado en X, co que, pola caracterización secuencial dos conxuntos pechados (Proposición 3.17), $\mathbf{x} \in Y$, e por tanto a sucesión converxe en Y. □

Como consecuencia das dúas proposicións anteriores deducimos que, nun completo, os conxuntos pechados e os completos coinciden.

3.2.2. A completitude de $\mathbb{R}^n$

Antes de comezar esta sección necesitamos recordar un axioma fundamental que satisfán os números reais.

Observación 3.29. O conxunto dos números reais $\mathbb{R}$ é un corpo cunha relación de orde compatible que satisfai o **axioma do supremo**:

Todo conxunto non baleiro de números reais limitado superiormente ten supremo (Definición 1.16).

O seguinte teorema amosa que $\mathbb{R}$ é completo empregando o *principio dos intervalos encaixados*: toda sucesión contractiva de intervalos pechados e limitados ten intersección non baleira. No transcurso da demostración probaremos unha versión axeitada deste resultado.

Teorema 3.30. $\mathbb{R}$ *é completo.*

Demostración. Sexa $\{x_k\}$ unha sucesión de Cauchy (Definición 3.18) de números reais. Vexamos que $\{x_k\}$ é converxente (Definición 3.2).

Como toda sucesión de Cauchy é limitada (Proposición 3.23), podemos poñer $\{x_k\} \subset [a_0, b_0]$ para certo intervalo $[a_0, b_0] \subset \mathbb{R}$. Sexa $A_0 = \mathbb{N}$.

Definimos $c_0 = (a_0 + b_0)/2$ e considerámo-los subconxuntos $\{k \in \mathbb{N} : x_k \in [a_0, c_0]\}$ e $\{k \in \mathbb{N} : x_k \in [c_0, b_0]\}$. Como $A_0 = \mathbb{N}$ é infinito, algún dos dous conxuntos anteriores tamén o é (pois a unión deles é $\mathbb{N}$). Chamamos A_1 ó correspondente conxunto infinito (ou calquera deles se os dous son infinitos) e tomámo-lo intervalo correspondente a A_1, que denotaremos por $[a_1, b_1]$. É dicir, facemos $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$ se $\{k \in \mathbb{N} : x_k \in [a_0, c_0]\}$ é infinito, ou $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$ se $\{k \in \mathbb{N} : x_k \in [c_0, b_0]\}$ é infinito.

Agora definimos $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ e considerámo-los subconxuntos $\{k \in A_1 : x_k \in [a_1, c_1]\}$ e $\{k \in A_1 : x_k \in [c_1, b_1]\}$. Como A_1 é infinito, algún dos dous conxuntos anteriores tamén o é e chamamos a un que o sexa A_2. Sexa $[a_2, b_2]$ o intervalo correspondente a A_2.

De xeito inductivo construímos unha sucesión de intervalos $[a_n, b_n]$ de forma que $A_n = \{k \in \mathbb{N} : x_k \in [a_n, b_n]\}$ é un conxunto infinito. Ademais, por construcción, para cada $n \in \mathbb{N}$,

- $b_n - a_n = (b_{n-1} - a_{n-1})/2 = (b_0 - a_0)/2^n$ (inducción),
- $a_n \geq a_{n-1}$ (é dicir, $\{a_n\}$ é crecente),
- $b_n \leq b_{n-1}$ (é dicir, $\{b_n\}$ é decrecente).

O conxunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente (por b_0, por exemplo). Como $\mathbb{R}$ *satisfai o axioma do supremo (Observación 3.29)*, dito conxunto terá un supremo $x \in \mathbb{R}$. Imos ver que x é o límite de $\{x_k\}$. Sexa pois $\epsilon > 0$ dado.

Como $\{x_k\}$ é de Cauchy, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_p - x_q| < \epsilon/3$ para todo $p, q \geq N_1$.

Como $\{(b_0 - a_0)/2^n\} \to 0$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ de xeito que $b_n - a_n = (b_0 - a_0)/2^n < \epsilon/3$ para todo $n \geq N_2$.

Por definición de supremo, $a_n \leq x$ e, para $\epsilon/3 > 0$, existe $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{N_3} > x - \epsilon/3$. De feito, como $\{a_n\}$ é crecente, $a_n \geq a_{N_3} > x - \epsilon/3$ para todo $n \geq N_3$.

Pois ben, definimos $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Sexa $n \geq N$ arbitrario.

Como A_N é un conxunto infinito, existe, $p \geq N$ tal que $x_p \in [a_N, b_N]$. Entón,

$$\begin{aligned}|x_n - x| &\leq |x_n - x_p| + |x_p - a_N| + |a_N - x| \\ &\leq |x_n - x_p| + \frac{b_0 - a_0}{2^N} + (x - a_n) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,\end{aligned}$$

co que efectivamente $\{x_n\} \to x$, como queriamos ver. □

Resulta que o producto cartesiano de espacios completos é completo. A demostración deste resultado é basicamente o que se emprega para o caso particular de $\mathbb{R}^n$.

Corolario 3.31. $\mathbb{R}^n$ *é completo.*

Demostración. Sexa $\{\mathbf{x}_k\} = \{(x_{k1}, \ldots x_{kn})\}$ unha sucesión en $\mathbb{R}^n$. Entón, as súas coordenadas (Proposición 3.21) $\{x_{ki}\}$ son de Cauchy para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $\mathbb{R}$ é completo (Teorema 3.30), cada $\{x_{ki}\}$ é converxente, e por tanto a correspondente sucesión dos vectores (Teorema 3.8) tamén o é. □

3.3. Problemas resoltos

Problema 3.32. Probar que a clausura dunha bóla aberta en $\mathbb{R}^n$ é a pechada correspondente.

Solución. Sexa $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Vexamos que $\overline{B(\mathbf{x}_0, r)} = B[\mathbf{x}_0, r]$.

($\supset$) Sexa $\mathbf{x} \in B[\mathbf{x}_0, r]$. Tomámo-la sucesión $\{\mathbf{x}_0 + (1 - \frac{1}{n})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\}$. Temos que

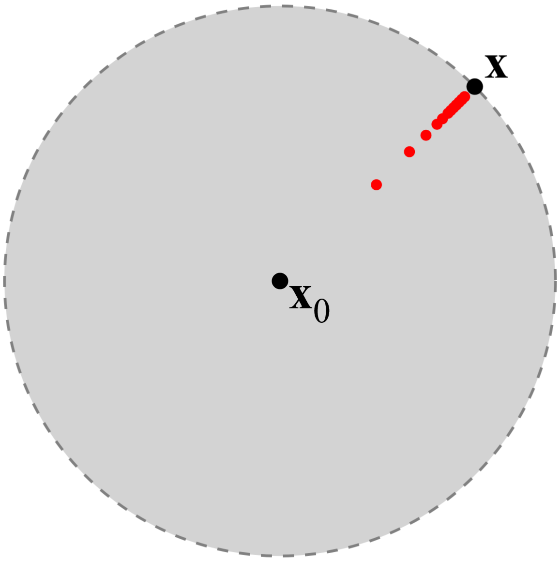
$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{x}_0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\right\| &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) r < r,\end{aligned}$$

co que dita sucesión está contida en $B(\mathbf{x}_0, r)$. Ademais, $\{\mathbf{x}_0 + (1 - \frac{1}{n})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\} \to \mathbf{x}$. Logo, pola caracterización secuencial da clausura (Proposición 3.15), $\mathbf{x} \in \overline{B(\mathbf{x}_0, r)}$.

($\subset$) Sexa $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus B[\mathbf{x}_0, r]$. Como $B[\mathbf{x}_0, r]$ é pechada (Lema 2.9), existe $s > 0$ tal que

$$\begin{aligned}B(\mathbf{x}, s) &\subset \mathbb{R}^n \setminus B[\mathbf{x}_0, r] \\ &\subset \mathbb{R}^2 \setminus B(\mathbf{x}_0, r).\end{aligned}$$

Logo $\mathbf{x} \notin \overline{B(\mathbf{x}_0, r)}$, como queriamos ver. □



Problema 3.33. Sexa $E = S^1 \setminus \{(0,1)\}$. Probar que $(0,1) \in \bar{E}$.

Solución. A sucesión $\{(\cos(\pi/2 - 1/n), \mathrm{sen}(\pi/2 - 1/n)\} \subset E$ converxe a $(0,1)$. Pola caracterización secuencial dos puntos clausura (Proposición 3.15), $(0,1) \in \bar{E}$. □

Problema 3.34. Sexa $X = (0,1)$. ¿É certo que todo conxunto pechado en X é completo?

Solución. Falso. O propio X é pechado (Definición 2.18) en X. Non obstante, X non é completo, pois non é pechado en $\mathbb{R}$ (recordemos que un subconxunto de $\mathbb{R}$ é completo se e só se é pechado (Proposición 3.28)). □

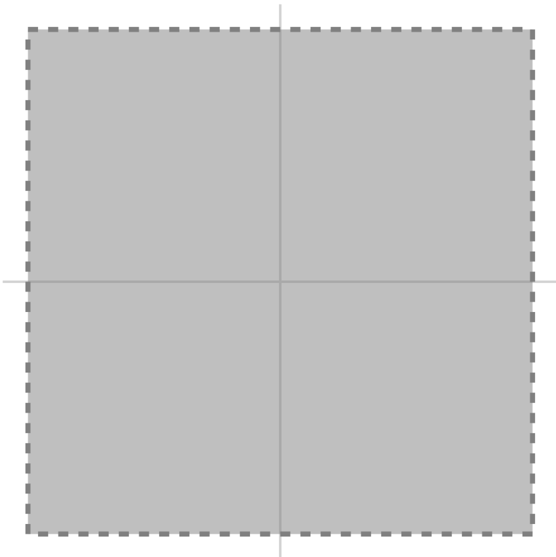
Problema 3.35. Decidir se $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \text{máx}\,\{|x|,|y|\} \leq 1 - \frac{1}{n}\right\}$ é completo.

Solución. Vexamos que o conxunto X non é completo empregando os resultados de caracterización vistos neste capítulo.

A sucesión $\{(1-\frac{1}{n}, 0)\}$ está contida en X pois $\text{máx}\{|1-\frac{1}{n}|, |0|\} = 1-\frac{1}{n}$. Dita sucesión converxe a $(1,0)$ que non é un punto de X porque $\text{máx}\{|1|,|0|\} = 1 > 1 - \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pola caracterización secuencial dos conxuntos pechados (Proposición 3.17), chegamos a que X non é pechado, e como os conxuntos completos son pechados (Proposición 3.27), séguese que X tampouco pode ser completo.

En resumo, X non é completo. □



Capítulo 4

Continuidade

O obxectivo deste tema é introduci-lo concepto de continuidade dunha función, tanto desde o punto de vista puntual como global. Tamén se falará de homeomorfismos e propiedades topolóxicas.

4.1. Continuidade puntual

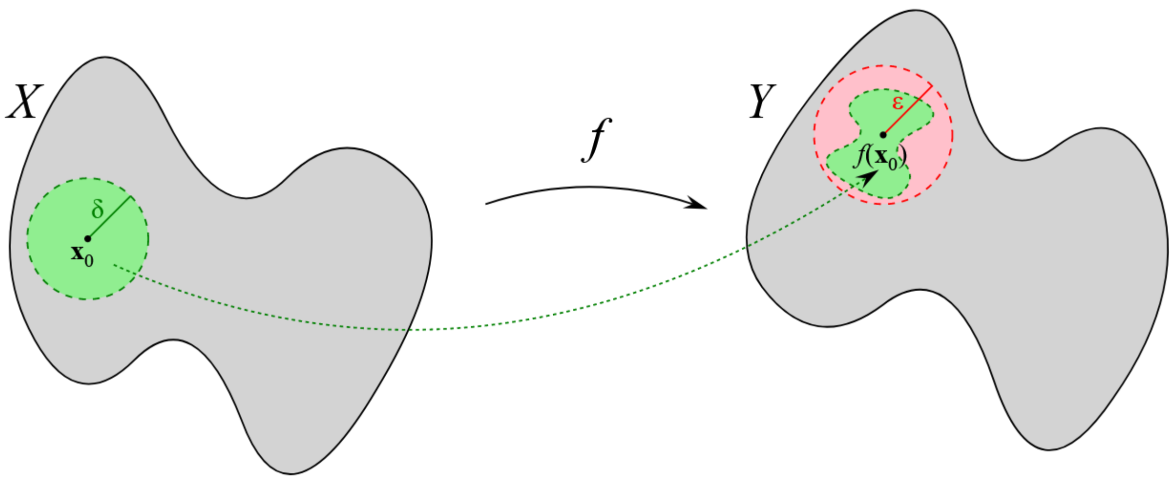
Nesta sección X denotará un subconxunto de $\mathbb{R}^n$, e Y será un subconxunto de $\mathbb{R}^m$.

Definición 4.1. Unha función $f\colon X \to Y$ dise que é **continua** en $\mathbf{x}_0 \in X$ se

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta \implies d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}_0)) < \epsilon.$$

Equivalentemente, f é continua en $\mathbf{x}_0$ se e só se

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : f(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset B_Y(f(\mathbf{x}_0), \epsilon).$$



Exemplo 4.2. As seguintes funcións son continuas en calquera punto:

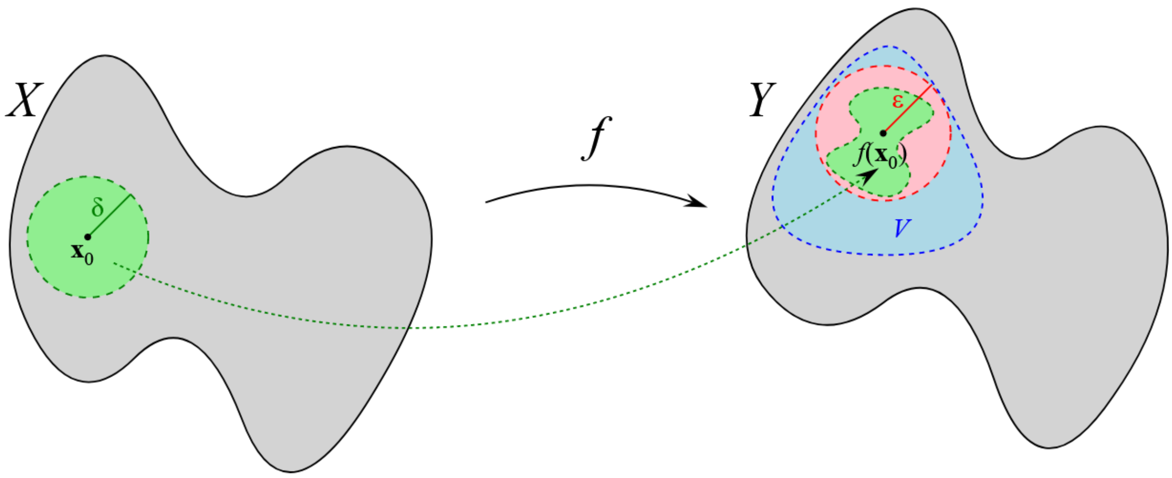
- As funcións constantes, a identidade $id_X\colon X \to X$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$, e a inclusión $i_X\colon X \to Y$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$, sendo $X \subset Y$, son funcións continuas.

- Aceptaremos, sen demostración, que as funcións elementais típicas do cálculo nunha variable son continuas. Por exemplo, os polinomios, as funcións trigonométricas (onde estean definidas), a exponencial e o logaritmo son continuas.
- Tamén aceptamos que a suma, resta, multiplicación, división (cando o denominador é non cero), potencias e radicales (de números positivos) de números reais son funcións continuas.

A definición de continuidade pode establecerse de tal xeito que só involucra a topoloxía dun conxunto (Observación 2.6).

Proposición 4.3. *Unha función $f\colon X \to Y$ é continua en $\mathbf{x}_0 \in X$ se e só se para calquera aberto V de Y contendo a $f(\mathbf{x}_0)$ existe un aberto U de X contendo a $\mathbf{x}_0$ tal que $f(U) \subset V$.*

Demostración. Supoñamos que f é continua en $\mathbf{x}_0 \in X$. Sexa V aberto en Y tal que $f(\mathbf{x}_0) \in V$. Por definición de aberto (Definición 2.1), existe $\epsilon > 0$ tal que $B_Y(f(\mathbf{x}_0), \epsilon) \subset V$. Como f é continua (Definición 4.1) en $\mathbf{x}_0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset B_Y(f(\mathbf{x}_0), \epsilon)$. Por tanto, tomando $U = B_X(\mathbf{x}_0, \delta)$ obtemos $f(U) \subset B_Y(f(\mathbf{x}_0), \epsilon) \subset V$.

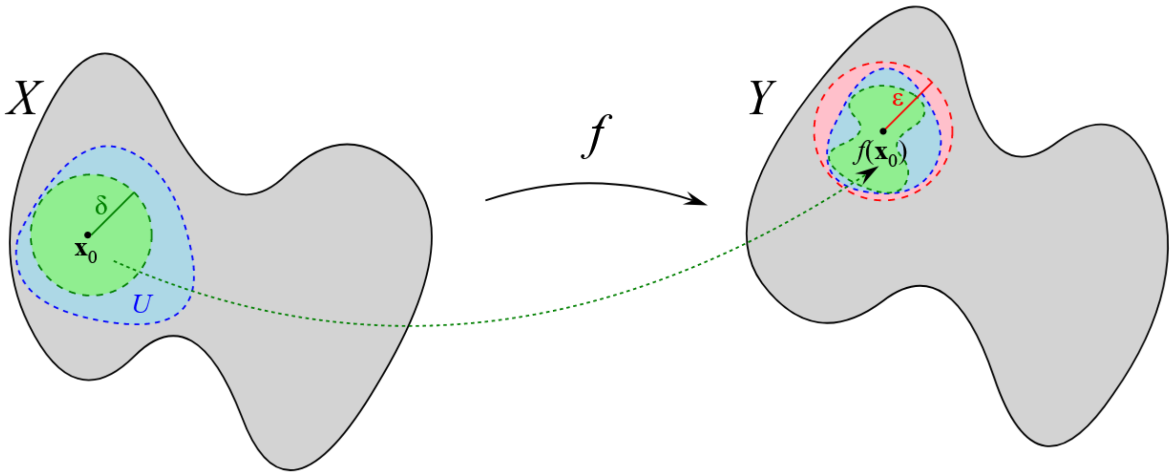


Recíprocamente, supoñamos que para calquera aberto V de Y contendo a $f(\mathbf{x}_0)$ existe un aberto U de X contendo a $\mathbf{x}_0$ tal que $f(U) \subset V$. Sexa $\epsilon > 0$ dado. Como $B_Y(f(\mathbf{x}_0), \epsilon)$ é un aberto en Y contendo a $f(\mathbf{x}_0)$ existe, por hipótese, un aberto U de X tal que $\mathbf{x}_0 \in U$ e $f(U) \subset B_Y(f(\mathbf{x}_0), \epsilon)$. Por definición de aberto (Definición 2.1), existe $\delta > 0$ tal que $B_X(\mathbf{x}_0, \delta) \subset U$. En consecuencia, $f(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset f(U) \subset B_Y(f(\mathbf{x}_0), \epsilon)$, como queriamos ver.

□

O seguinte resultado afirma que a composición de aplicacións continuas é unha aplicación continua.

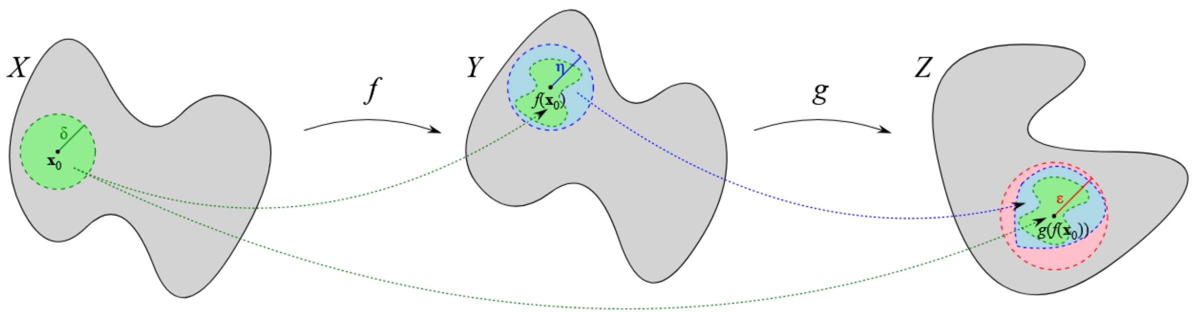
Teorema 4.4. *Sexan $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ e $Z \subset \mathbb{R}^p$. Consideremos $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ aplicacións, e $\mathbf{x}_0 \in X$. Se f é continua en $\mathbf{x}_0$ e g é continua en $f(\mathbf{x}_0)$, entón $g \circ f$ é continua en $\mathbf{x}_0$.*



Demostración. Sexa $\epsilon > 0$ dado. Como g é continua (Definición 4.1) en $f(\mathbf{x}_0) \in Y$, existe $\eta > 0$ tal que $g(B_Y(f(\mathbf{x}_0), \eta)) \subset B_Z(g(f(\mathbf{x}_0)), \epsilon)$. Como f é continua (Definición 4.1) en $\mathbf{x}_0 \in X$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset B_Y(f(\mathbf{x}_0), \eta)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)) &= g(f(B_X(\mathbf{x}_0, \delta))) \\ &\subset g(B_Y(f(\mathbf{x}_0), \eta)) \\ &\subset B_Z((g \circ f)(\mathbf{x}_0), \epsilon),\end{aligned}$$

como queriamos ver.



□

O seguinte resultado coñecese como a *caracterización secuencial da continuidade.*

Proposición 4.5. *Unha función $f\colon X \to Y$ é continua en $\mathbf{x}_0 \in X$ se e só se para toda sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ de puntos de X tal que $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0$ se ten que $\{f(\mathbf{x}_k)\} \to f(\mathbf{x}_0)$.*

Dito dun xeito máis impreciso, f é continua se e só se

$$\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = f\left(\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k\right),$$

onde $\{\mathbf{x}_k\}$ é unha sucesión converxente ó punto onde estamos mirando a continuidade.

Demostración. Supoñamos que f é continua en $\mathbf{x}_0$ e sexa $\{\mathbf{x}_k\} \subset X$ unha sucesión tal que $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0$. Vexamos que $\{f(\mathbf{x}_k)\} \to f(\mathbf{x}_0)$. Sexa V un aberto contendo a $f(\mathbf{x}_0)$ arbitrario.

Como f é continua (Proposición 4.3) en $\mathbf{x}_0$, existe U aberto en X con $\mathbf{x}_0 \in U$ tal que $f(U) \subset V$.

Por ser converxente (Proposición 3.3) $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_k \in U$ para todo $k \geq N$.

Pois ben, se $k \geq N$, entón $f(\mathbf{x}_k) \in f(U) \subset V$, co que $\{f(\mathbf{x})\} \to f(\mathbf{x}_0)$.

Reciprocamente, supoñamos que f non é continua en $\mathbf{x}_0$. Vexamos que existe unha sucessión $\{\mathbf{x}_k\}$ en X tal que $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0$, pero tal que $\{f(\mathbf{x}_k)\}$ non converxe a $f(\mathbf{x}_0)$.

Como f non é continua (Proposición 4.3) en $\mathbf{x}_0$, existe $\epsilon > 0$ tal que para calquera $\delta > 0$ se ten que $f(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \not\subset B_Y(f(\mathbf{x}_0), \epsilon)$.

En particular, collendo $\delta = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, podemos atopar $\mathbf{x}_k \in B_X(\mathbf{x}_0, 1/k)$ tal que $f(\mathbf{x}_k) \notin B_Y(f(\mathbf{x}_0), \epsilon)$.

Polo lema do sandwich (Lema 3.6), como $0 \leq d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < 1/k$ obtemos que $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0$. Non obstante, $d(f(\mathbf{x}_k), f(\mathbf{x}_0)) \geq \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$, co que $\{f(\mathbf{x}_k)\}$ non converxe a $f(\mathbf{x}_0)$, como queriamos ver. □

Observación 4.6. Defínense as *proxeccións* de $\mathbb{R}^n$, como as aplicacións $\pi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas pola expresión

$$\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i,$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Tendo en conta que para calquera $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ obtemos

$$\begin{aligned} |\pi_i(\mathbf{x}) - \pi_i(\mathbf{y})| &= |x_i - y_i| \\ &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned}$$

é doado deducir que as proxeccións son continuas en calquera punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Se agora temos $f \colon X \to Y$ con $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$, definímo-las *compoñentes* ou *coordenadas* de f como as funcións $f_i = \pi_i \circ f \colon X \to \mathbb{R}$, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Por tanto, podemos escribir

$$f(x_1, \dots, x_n) = \Big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\Big).$$

Resulta que unha función é continua se e só se o son tódalas súas compoñentes.

Proposición 4.7. *Unha función $f \colon X \to Y$ é continua en $\mathbf{x}_0 \in X$ se e só se as súas compoñentes $f_i \colon X \to \mathbb{R}$ son continuas en $\mathbf{x}_0$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.*

Demostración. Se f é continua en $\mathbf{x}_0$, como as proxeccións (Observación 4.6) π_i son continuas en todo punto, obtemos que $f_i = \pi_i \circ f$ é continua por ser composicion de continuas (Teorema 4.4).

Reciprocamente, supoñamos que as compoñentes $f_1, \dots, f_m$ de f son continuas en $\mathbf{x}_0$ e vexamos que entón f tamén é continua (Definición 4.1) en $\mathbf{x}_0$. Sexa $\epsilon > 0$ dado.

Dado $i \in \{1, \dots, m\}$, como f_i é continua en $\mathbf{x}_0$, existe $\delta_i > 0$ tal que se $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta_i$ entón $|f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x}_0)| < \epsilon/\sqrt{m}$.

Tomemos pois $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ e sexa $\mathbf{x} \in X$ tal que $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta$. Entón,

$$\begin{aligned} d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}_0)) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \Big(f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x}_0)\Big)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\max_{j\in\{1,\dots,m\}} \left\{ \Big(f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x}_0)\Big)^2 \right\} \right)} \\ &= \sqrt{m} \left(\max_{j\in\{1,\dots,m\}} \Big\{ |f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x}_0)| \Big\} \right) \\ &< \sqrt{m} \frac{\epsilon}{\sqrt{m}} = \epsilon, \end{aligned}$$

como queriamos probar. □

Exemplo 4.8. Simplemente observando a definición, é sinxelo ver que o producto escalar (Definición 1.1), a norma (Definición 1.3) e a distancia (Definición 1.9) de $\mathbb{R}^n$ son funcións continuas en todo punto.

4.2. Continuidade global

Nesta materia estaremos sobre todo interesados en funcións que son continuas en tódolos puntos. Non empregarémo-la denominación "globalmente continua" para unha función que sexa continua en tódolos puntos a menos que queiramos enfatizar este feito.

Como sempre, tomaremos $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$.

Definición 4.9. Dicimos que f é **continua** en X se f é continua en $\mathbf{x}$ (Definición 4.1) para todo $\mathbf{x} \in X$.

O seguinte teorema é fundamental en topoloxía. De feito, a segunda equivalencia é o que habitualmente se toma como definición de aplicación continua entre espacios topolóxicos (Observación 2.6).

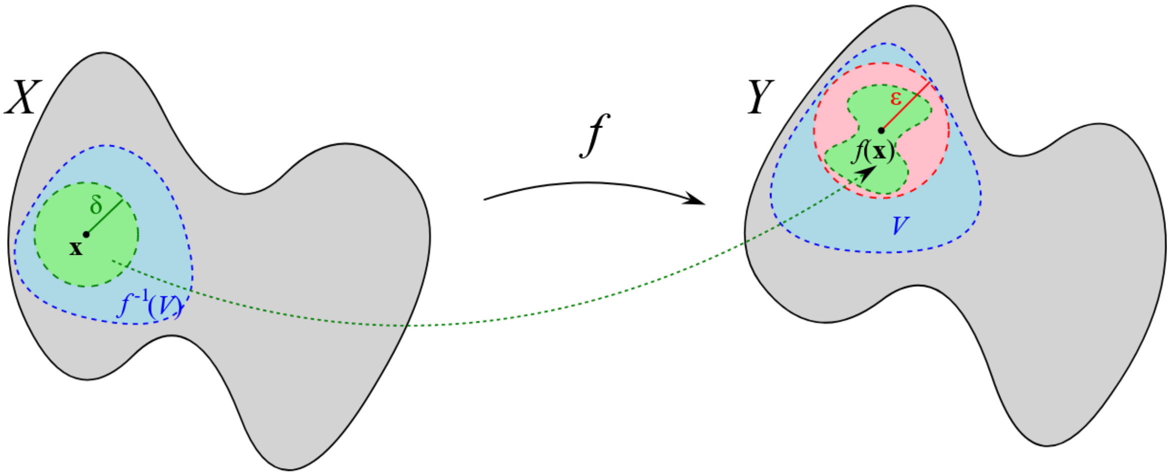
Teorema 4.10. *Sexa $f\colon X \to Y$ unha aplicación. Entón, as seguintes afirmacións son equivalentes*

- *f é continua en X.*
- *Para cada subconxunto V aberto en Y, a súa imaxe recíproca, $f^{-1}(V)$, é aberto en X.*
- *Para cada subconxunto F pechado en Y, a súa imaxe recíproca, $f^{-1}(F)$, é pechado en X.*

Demostración. Supoñamos que f é continua en X (Definición 4.9) e sexa V aberto en Y. Vexamos entón que $f^{-1}(V)$ é aberto (Definición 2.16) en X. Sexa pois $\mathbf{x} \in f^{-1}(V)$ arbitrario.

Como $f(\mathbf{x}) \in V$ e V é aberto (Definición 2.16), existe $\epsilon > 0$ tal que $B_Y(f(\mathbf{x}), \epsilon) \subset V$. Como f é continua en $\mathbf{x}$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B_X(\mathbf{x}, \delta)) \subset B_Y(f(\mathbf{x}), \epsilon)$. Por tanto,

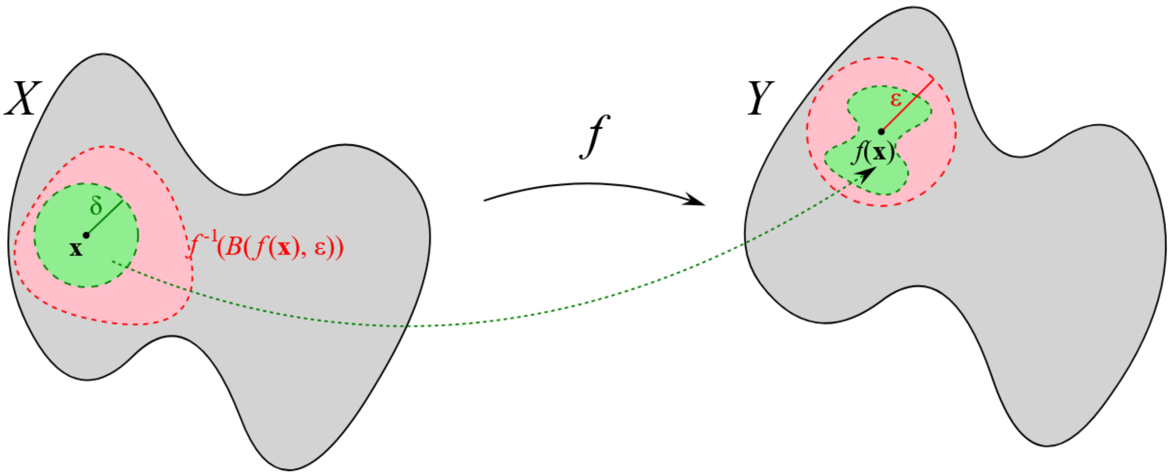
$$\begin{aligned} B_X(\mathbf{x}, \delta) &\subset f^{-1}(f(B_X(\mathbf{x}, \delta))) \\ &\subset f^{-1}(B_Y(f(\mathbf{x}), \epsilon)) \subset f^{-1}(V), \end{aligned}$$



de onde se deduce que $f^{-1}(V)$ é aberto. [1]

O segundo e o terceiro enunciado son equivalentes xa que $f^{-1}(Y \setminus G) = X \setminus f^{-1}(G)$ e os pechados son os complementarios dos abertos.

Finalmente, supoñamos que a imaxe recíproca dun aberto en Y é aberto en X e vexamos que entón f é continua (Definición 4.9). Sexa $\mathbf{x} \in X$ arbitrario, e vexamos pois que f é continua en $\mathbf{x}$ (Definición 4.1). Sexa $\epsilon > 0$ dado.



Como $B_Y(f(\mathbf{x}), \epsilon)$ é aberto en Y (por ser unha bóla aberta (Proposición 2.2)), por hipótese $f^{-1}(B_Y(f(\mathbf{x}), \epsilon))$ é aberto (Definición 2.16) en X. Ademais, $\mathbf{x} \in f^{-1}(B_Y(f(\mathbf{x}), \epsilon))$ co que existe $\delta > 0$ tal que $B_X(\mathbf{x}, \delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(\mathbf{x}), \epsilon))$. Pois ben,

$$\begin{aligned} f(B_X(\mathbf{x}, \delta)) &\subset f(f^{-1}(B_Y(f(\mathbf{x}), \epsilon))) \\ &\subset B_Y(f(\mathbf{x}), \epsilon)), \end{aligned}$$

de modo que f é continua en $\mathbf{x}$. $\square$

[1]Sexa $f \colon X \to Y$ unha función. Entón:

- Para calquera $A \subset X$, $A \subset f^{-1}(f(A))$.
- Para calquera $B \subset Y$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Exemplo 4.11. O teorema anterior pode ser empregado para probar, de xeito moi sinxelo, o carácter aberto ou pechado de moitos subconxuntos. Consideremos por exemplo os números reais a, b, $c \in \mathbb{R}$ e definamos $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $f(x,y) = ax + by + c$. Resulta que a función f é continua, xa que provén de compoñer funcións continuas como son as proxeccións, as constantes, sumas e produtos. Tendo en conta isto,

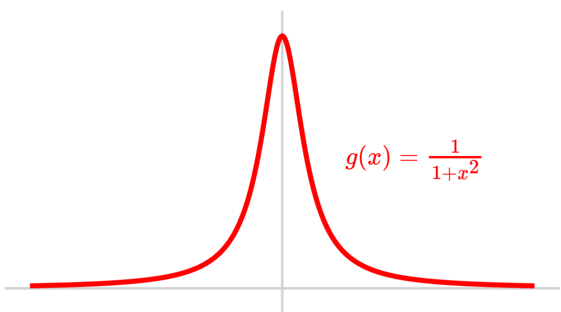
- O conxunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c > 0\}$ é aberto. En efecto, temos que $A = f^{-1}((0,\infty))$ e sabemos que $(0,\infty)$ é aberto en $\mathbb{R}$ e que f é continua. Logo, pola caracterización da continuidade (Teorema 4.10), $A = f^{-1}((0,\infty))$ é aberto en $\mathbb{R}^2$. É dicir, os semiplanos abertos son conxuntos abertos de $\mathbb{R}^2$.
- De xeito similar, o conxunto $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax+by+c \geq 0\}$ é pechado. En efecto, pois $B = f^{-1}([0,\infty))$, $[0,\infty)$ é pechado en $\mathbb{R}$, e f é continua, e simplemente empregámo-la terceira equivalencia da caracterización da continuidade (Teorema 4.10).
- Analogamente, as rectas tamén son pechadas, xa que se satisfai que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ e $\{0\}$ é pechado en $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.12. Cómpre sinalar que non hai, en xeral, relación entre a continuidade (é dicir, que a imaxe recíproca de abertos ou pechados sexa aberto ou pechado, respectivamente), e que a imaxe directa dun aberto ou un pechado sexa aberto ou pechado. Poñemos algún exemplo.

Considerámo-la función $f\colon \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Claramente f non é continua en ningún punto de $\mathbb{R}$, xa que toda bóla centrada nun punto de $\mathbb{R}$ ten puntos racionais e irracionais. Non obstante, f leva calquera subconxunto de $\mathbb{R}$ nun aberto de $\{0,1\}$. Isto é así porque calquera subconxunto de $\{0,1\}$ é aberto en $\{0,1\}$. En efecto, $\{0\} = \{0,1\} \cap (-1/2, 1/2)$, e $\{1\} = \{0,1\} \cap (1/2, 3/2)$; pola caracterización dos abertos relativos (Proposición 2.17) de $\mathbb{R}$ temos pois que $\{0\}$ e $\{1\}$ son abertos en $\{0,1\}$. Como tódolos subconxuntos de $\{0,1\}$ son abertos en $\{0,1\}$, é claro que entón todo subconxunto de $\{0,1\}$ tamén é pechado en $\{0,1\}$. En particular, f leva abertos en abertos e pechados en pechados.



Sexa agora $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, que é unha función continua (por ser composición de continuas (Teorema 4.4)). Non obstante, non leva necesariamente abertos en abertos, nin pechados en pechados. Por exemplo,

$$g((-1,1)) = (1/2,1],$$
$$g([1,\infty)) = [1,0).$$

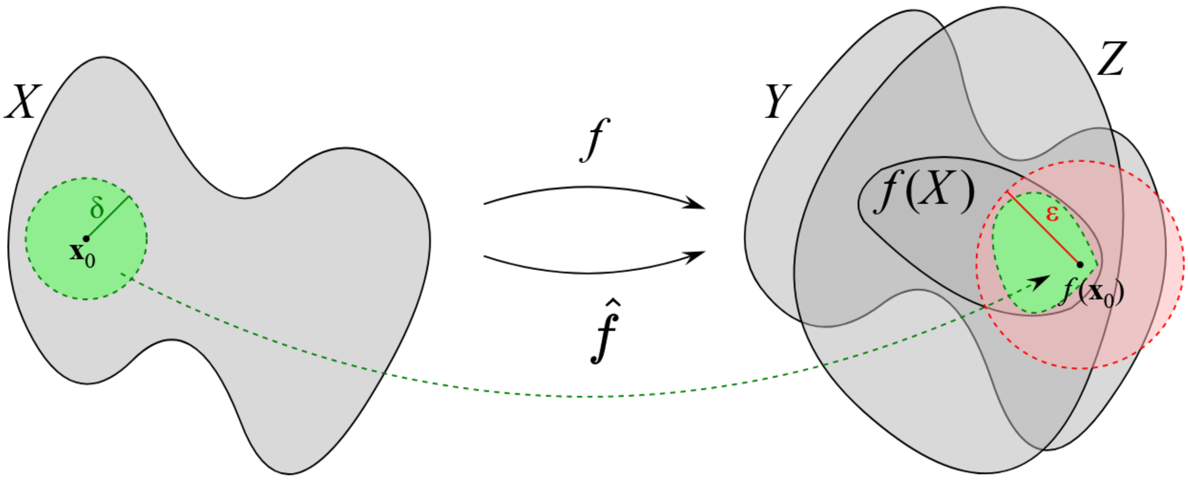
4.2.1. Restricción de funcións continuas

Sexan $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$.

En primeiro lugar veremos que *a continuidade non depende do rango.*

Proposición 4.13. *Sexa $f\colon X \to Y$ unha aplicación. Sexa $Z \subset \mathbb{R}^m$ un conxunto tal que $f(X) \subset Z$ e denotemos $\hat{f}\colon X \to Z$ á función definida como $\hat{f}(x) = f(x)$, $x \in X$. Entón, f é continua en $\mathbf{x}_0 \in X$ se e só se $\hat{f}$ é continua en $\mathbf{x}_0$.*

Demostración. Supoñamos que f é continua en $\mathbf{x}_0 \in X$, e vexamos que $\hat{f}$ tamén o é. Sexa $\epsilon > 0$ dado.



Como f é continua (Definición 4.1) en $\mathbf{x}_0$, existe $\delta > 0$ de xeito que $f(B_X(\mathbf{x}_0),\delta) \subset B_Y(f(\mathbf{x}_0,\epsilon))$. Agora ben, como $f(\mathbf{x}) = \hat{f}(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in X$, e $f(X) \subset Y \cap Z$, obtemos, por definición de bóla relativa (Definición 2.14), que $\hat{f}(B_X(\mathbf{x}_0,\delta)) \subset B_Z(f(\mathbf{x}_0),\epsilon)$, co que $\hat{f}$ é continua en $\mathbf{x}_0$.

Como os papeis de $f\colon X \to Y$ e $\hat{f}\colon X \to Z$ son intercambiables, dedúcese o resultado. □

De feito, a partir de agora non faremos distinción coa notación entre as funcións f e $\hat{f}$ da proposición anterior (Proposición 4.13), e simplemente denotarémo-las dúas por f.

Ademais de $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ tomemos agora $A \subset X$.

Dada unha aplicación $f\colon X \to Y$, denomínase *restricción* de f a A á composición

$$f_{|_A} = f \circ i_A\colon A \xrightarrow{i_A} X \xrightarrow{f} Y,$$

é dicir, á función f considerada como definida soamente no conxunto A.

Dado que a inclusión i_A é continua, é obvio que

Proposición 4.14. *A restricción dunha función continua a calquera subconxunto segue a ser continua.*

Exemplo 4.15. O recíproco do anterior resultado non é certo. Tomemos por exemplo a función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

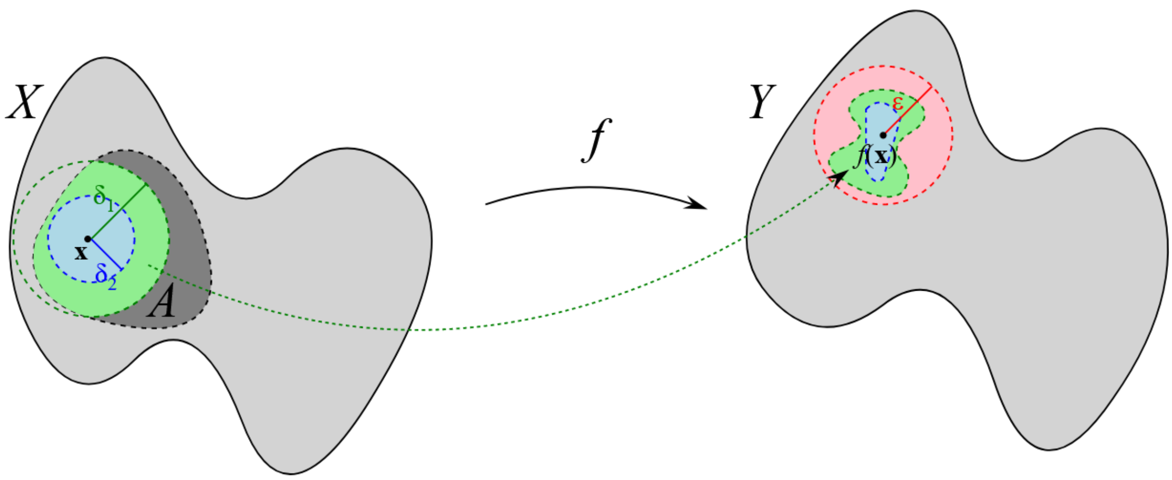
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

É claro que $f_{|\mathbb{Q}}$ e $f_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ son continuas por ser constantes. Non obstante, f non é continua en ningún punto de $\mathbb{R}$, xa que toda bóla centrada nun punto de $\mathbb{R}$ ten puntos racionais e irracionais.

Agora ben, se o conxunto ó que nos restrinximos é aberto, entón si que podemos garantiza-la continuidade.

Proposición 4.16. *Sexa $f\colon X \to Y$ unha aplicación, A aberto en X, e supoñamos que $f_{|A}$ é continua. Entón, f é continua en tódolos puntos de A.*

Demostración. Sexa $\mathbf{x} \in A$ e vexamos que f é continua (Definición 4.1) en $\mathbf{x}$. Sexa $\epsilon > 0$ dado.



Como $f_{|A}$ é continua (Definición 4.1) en $\mathbf{x} \in A$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $f_{|A}(B_A(\mathbf{x}, \delta_1)) \subset B_Y(f(\mathbf{x}), \epsilon)$.

Como A é aberto (Definición 2.16) en X, existe $\delta_2 > 0$ tal que $B_X(\mathbf{x}, \delta_2) \subset A$.

Tomemos pois $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Entón $B_X(\mathbf{x}, \delta) \subset A$ o que implica, pola definición de bóla relativa (Definición 2.14), que $B_A(\mathbf{x}, \delta) = B_X(\mathbf{x}, \delta)$. Así

$$\begin{aligned} f(B_X(\mathbf{x}, \delta)) &= f_{|A}(B_A(\mathbf{x}, \delta)) \\ &\subset B_Y(f(\mathbf{x}), \epsilon). \end{aligned}$$

Por tanto, f é continua en $\mathbf{x}$, como queriamos ver. $\square$

Supoñamos agora que $X = A \cup B$ e que temos dúas funcións $g\colon A \to Y$ e $h\colon B \to Y$ de xeito que $g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in A \cap B$. Defínese a *función combinada* de g e h como a función $f\colon X \to Y$ dada por

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} g(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \in A, \\ h(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \in B. \end{cases}$$

Como vimos no exemplo anterior (Exemplo 4.15), a combinada de dúas funcións continuas non ten por que ser continua. Non obstante,

Proposición 4.17. *Se $f\colon X = A \cup B \to Y$ é a función combinada de $g\colon A \to Y$ e $h\colon B \to Y$, e tanto g como h son continuas, entón:*

- *Se A e B son abertos en X, entón f é continua.*
- *Se A e B son pechados en X, entón f é continua.*

Demostración. Supoñamos que A e B son pechados en X. Sexa F un pechado arbitrario de Y. Entón

$$\begin{aligned} f^{-1}(F) &= \{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) \in F\} \\ &= \{\mathbf{x} \in A : g(\mathbf{x}) \in F\} \cup \{\mathbf{x} \in B : h(\mathbf{x}) \in F\} \\ &= g^{-1}(F) \cap h^{-1}(F). \end{aligned}$$

Como g e h son continuas e a imaxe recíproca dun pechado por unha función continua (Teorema 4.10) é un pechado, deducimos que $g^{-1}(F)$ é pechado en A, e que $h^{-1}(F)$ é pechado en B. Agora ben, como A e B son pechados en X, pola caracterización da topoloxía relativa (Proposición 2.17), resulta que $g^{-1}(F)$ e $h^{-1}(F)$ son pechados en X. Como a intersección finita de pechados é pechado (Proposición 2.11), deducimos que $f^{-1}(F)$ é pechado en X. Por tanto, f é continua (Teorema 4.10). □

4.3. Continuidade uniforme

O concepto de continuidade uniforme é un concepto máis forte có da continuidade que se emprega a miúdo nas matemáticas. Non é un concepto puramente topolóxico, pero introducímolo aquí xa que será importante no futuro.

Definición 4.18. Sexa $f\colon X \to Y$ unha aplicación. Dicimos que f é **uniformemente continua** se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \implies d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < \epsilon.$$

A diferencia entre a continuidade e a continuidade uniforme é que o δ que aparece na definición, no caso da continuidade, depende do punto onde se estudie a continuidade, mentres que para a continuidade uniforme, δ é independente do punto. Ademais, por propia definición, a continuidade uniforme é un concepto global e non existe versión puntual do mesmo.

Exemplo 4.19. Obviamente, toda función uniformemente continua é continua. Non obstante, o recíproco non ten por que ser certo. Tomemos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

Obviamente, f é continua (Definición 4.9). Vexamos que non é uniformemente continua (Definición 4.18). Sexa $\epsilon = 1$ e tomemos $\delta > 0$ arbitrario. Entón se $x > 1/\delta$ temos que

$$\begin{aligned}|f(x + \delta/2) - f(x)| &= \left|\left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2\right| \\ &= \delta x + \frac{\delta^2}{4} \geq \delta \frac{1}{\delta} = 1,\end{aligned}$$

co que f non pode ser uniformemente continua. Nótese ademais, que como $\mathbb{R}$ é completo (Teorema 3.30), a función f leva sucesións de Cauchy (Definición 3.18) en sucesións de Cauchy.

Aínda máis chamativo é o exemplo seguinte.

Exemplo 4.20. Considerémo-la función $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0, \\ 1, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

En primeiro lugar, a función f é continua (Definición 4.9). En efecto, o conxunto $(-\infty, 0)$ é aberto en $\mathbb{R}$ e $f_{|(-\infty,0)} \equiv -1$. Logo, por se-la restricción a un aberto unha función continua (Proposición 4.16), f é continua en tódolos puntos de $(-\infty, 0)$. Análogamente, $(0, \infty)$ é aberto en $\mathbb{R}$ e f restrinxida a $(0, \infty)$ é constante, co que f é continua en tódolos puntos de $(0, \infty)$. En resumo, f é continua.

Non obstante, a función f non é uniformemente continua (Definición 4.18). Dado $\delta > 0$ arbitrario, tomémo-los puntos $x_0 = -\delta/4 < 0$ e $y_0 = \delta/4 > 0$ que distan $|x_0 - y_0| = \delta/2 < \delta$. Agora ben,

$$\begin{aligned}|f(x_0) - f(y_0)| &= |f(\delta/4) - f(-\delta/4)| \\ &= |1 - (-1)| = 2,\end{aligned}$$

o que proba que f non é uniformemente continua.

Proposición 4.21. *Se $f\colon X \to Y$ é uniformemente continua e $\{\mathbf{x}_k\} \subset X$ é unha sucesión de Cauchy, entón $\{f(\mathbf{x}_k)\}$ é unha sucesión de Cauchy.*

Demostración. Supoñamos que $f\colon X \to Y$ é uniformemente continua e sexa $\{\mathbf{x}_k\}$ unha sucesión de Cauchy en X. Vexamos que $\{f(\mathbf{x}_k)\}$ é unha sucesión de Cauchy. Sexa $\epsilon > 0$ dado.

Como f é uniformente continua (Definición 4.18), existe $\delta > 0$ tal que se $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$ entón $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < \epsilon$.

Por ser $\{\mathbf{x}_k\}$ de Cauchy (Definición 3.18), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) < \delta$ para todo $p, q \geq N$.

Logo, se $p, q \geq N$, temos que $d(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) < \delta$, e por tanto, $d(f(\mathbf{x}_p), f(\mathbf{x}_q)) < \epsilon$, como queriamos ver. □

Como acabamos de ver (Exemplo 4.19), o recíproco a esta proposición non ten por que ser certo.

Pasamos agora a introduci-los conceptos necesarios para enuncia-lo Teorema do punto fixo de Banach (Teorema 4.24).

Definición 4.22. Unha función $f\colon X \to Y$ dise **Lipschitziana** se existe $M \geq 0$ tal que

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq M\, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in X$. A constante M chámase *constante de Lipschitz*.

É sinxelo ver que toda función Lipschitziana é uniformemente continua (Definición 4.18). Como caso particular, temos

Definición 4.23. Dise que $f\colon X \to X$ é **contractiva** se é Lipschitziana (Definición 4.22) con constante de Lipschitz $M < 1$.

O seguinte teorema, que se enuncia para subconxuntos de $\mathbb{R}^n$, pode xeneralizarse, con practicamente a mesma demostración, a espacios métricos (Observación 1.11), resultando ser un dos teoremas máis útiles das matemáticas.

Dise que $\mathbf{x}$ é un *punto fixo* para unha función $f\colon X \to X$ se $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Teorema 4.24. (Teorema do punto fixo de Banach) *Sexa X un conxunto completo, e $f\colon X \to X$ unha función contractiva. Entón f ten un único punto fixo. Dito punto fixo pode obterse como o límite da sucesión:*

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 \in X \ \textit{arbitrario}, \\ \mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k),\ \ k \geq 0. \end{cases}$$

Demostración. Sexa pois $\mathbf{x}_0 \in X$ arbitrario, e definamos inductivamente $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k)$ con $k \geq 0$. Vexamos que a sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ é de Cauchy (Definición 3.18).

Para $k \geq 1$, como f é contractiva (Definición 4.23), temos que

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k) &= d(f(\mathbf{x}_k), f(\mathbf{x}_{k-1})) \\ &\leq M d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}) \\ &= M d(f(\mathbf{x}_{k-1}, f(\mathbf{x}_{k-2})) \\ &\leq M^2 d(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k-2}) \\ &\leq \cdots \leq M^k d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

Por tanto, se $p > 0$, aplicando a desigualdade triangular (Proposición 1.10),

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}_{k+p}, \mathbf{x}_k) &\leq d(\mathbf{x}_{k+p}, \mathbf{x}_{k+p-1}) + d(\mathbf{x}_{k+p-1}, \mathbf{x}_{k+p-2}) \\ &\quad + \cdots + d(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k) \\ &\leq d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0)\left(M^{k+p-1} + M^{k+p-2} + \cdots + M^k\right) \\ &= d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) M^k \sum_{\alpha=0}^{p-1} M^\alpha \\ &< d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) M^k \sum_{\alpha=0}^{\infty} M^\alpha \\ &= \frac{M^k}{1-M} d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

que converxe (Definición 3.2) a 0 cando k tende a infinito (xa que $0 \leq M < 1$). Isto proba que efectivamente a sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ é de Cauchy (Definición 3.18), como afirmabamos.

Como X é completo (Definición 3.26), a sucesión de Cauchy $\{\mathbf{x}_k\}$ é converxente, poñamos $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x} \in X$. Pola continuidade (secuencial) (Proposición 4.5) de f temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k \\ &= \lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_{k-1}) \\ &= f\left(\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_{k-1}\right) = f(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

de modo que $\mathbf{x}$ é un punto fixo de f.

Finalmente, se $\mathbf{y} \in X$ é outro punto fixo de f,

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \\ &\leq M d(\mathbf{x},\mathbf{y}), \end{aligned}$$

e por ser $0 \leq M < 1$, deducimos que $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$, e en consecuencia, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, que é o que faltaba por probar. □

Exemplo 4.25. Unha aplicación sinxela do teorema do punto fixo de Banach é para aproxima-la solución dalgunhas ecuacións.

Por exemplo, a ecuación

$$\cos(x) = x$$

non pode resolverse de xeito elemental. Agora ben, a función $\cos : [-1,1] \to [-1,1]$ é contractiva (Definición 4.23) xa que, aplicando o teorema do valor medio do cálculo diferencial,

$$\begin{aligned} |\cos(x) - \cos(y)| &= |\mathrm{sen}(c)(x-y)| \\ &\leq \mathrm{sen}(1)|x-y|, \end{aligned}$$

para calquera x, $y \in [-1,1]$, sendo c un punto entre x e y, e tendo en conta que a función sen é crecente en $[-1,1]$. [2]

Como $[-1,1]$ é pechado (Definición 2.8) en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ é completo (Teorema 3.30) e os pechados dos completos son completos (Proposición 3.28), $[-1,1]$ é completo, e así, a sucesión

$$\begin{cases} x_0 \in [-1,1], \\ x_{k+1} = \cos(x_k), \ k \geq 0, \end{cases}$$

converxe, de acordo co Teorema do punto fixo de Banach (Teorema 4.24), á solución de $\cos(x) = x$.

4.4. Homeomorfismos

A continuación definímo-lo concepto de homeomorfismo, que nos permite establece-la equivalencia entre dous espacios topolóxicos.

Definición 4.26. Unha función $f\colon X \to Y$ dise que é un **homeomorfismo** se f é bixectiva, e tanto ela como a súa inversa f^{-1}, son continuas.

En tal caso, dise que os conxuntos X e Y son **homeomorfos**.

[2] *Teorema do valor medio*: Sexa $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ unha función continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b). Entón existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Como a composición de funcións continuas é continua (Teorema 4.4), é obvio que a composición de homeomorfismos é un homeomorfismo. En particular, isto significa que a relación *"ser homeomorfo a"* é unha relación de equivalencia.

Exemplo 4.27. As seguintes aplicacións son homeomorfismos:

- As *traslacións* con respecto a un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$: $T_\mathbf{v} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto T_\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{v}$. É doado ver que $d(T_\mathbf{v}(\mathbf{x}), T_\mathbf{v}(y)) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, co cal $T_\mathbf{v}$ é continua; ademais, $T_\mathbf{v}^{-1} = T_{-\mathbf{v}}$.
- As *homotecias* de razón $\lambda > 0$: $H_\lambda \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto H_\lambda(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. Neste caso temos $d(H_\lambda(\mathbf{x}), H_\lambda(\mathbf{y})) = \lambda d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, e $H_\lambda^{-1} = H_{1/\lambda}$.
- As *rotacións* de ángulo $\theta \in \mathbb{R}$:

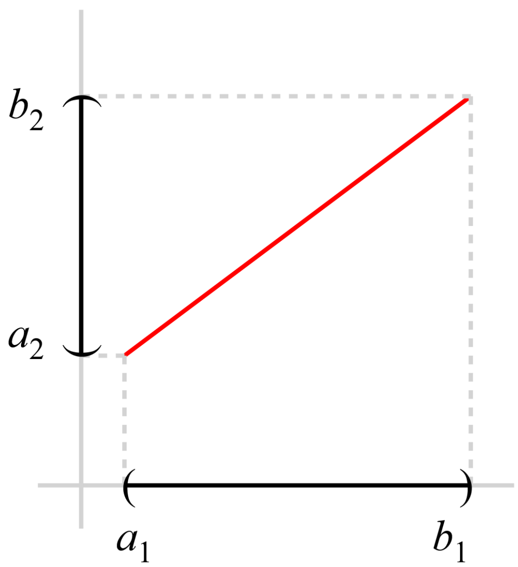
$$\begin{aligned} R_\theta \colon\ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) \mapsto R_\theta(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ & \qquad\qquad\qquad = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta,\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta). \end{aligned}$$

  Tamén se satisfai que R_θ conserva as distancias (e por tanto é continua), e a súa inversa é $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

A estas alturas non será sinxelo dar exemplos interesantes de conxuntos que non sexan homeomorfos. Non obstante, si hai varios exemplos elementales que podemos probar agora que son homeomorfos.

Proposición 4.28. *Tódolos intervalos abertos de* $\mathbb{R}$ *son homeomorfos entre si.*

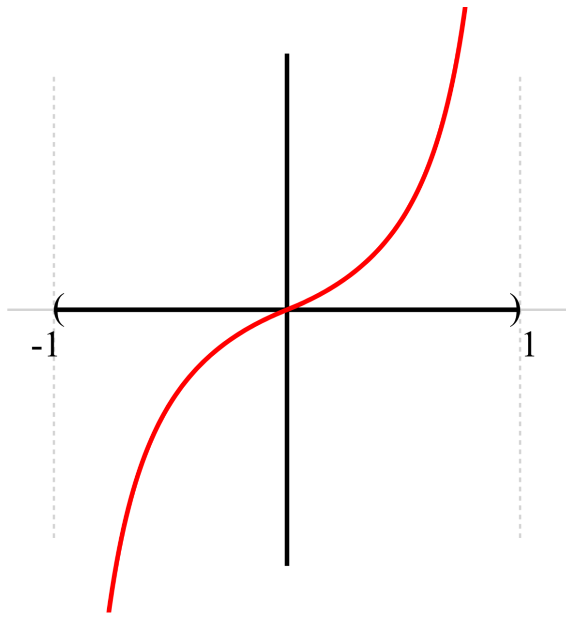
Demostración. Non daremos tódolos detalles desta demostración e só presentaremos algúns dos homeomorfismos necesitados, deixando o resto para o lector.



Dous intervalos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) son homeomorfos (Definición 4.26). Para probar isto basta con toma-la aplicación $f\colon (a_1, b_1) \to (a_2, b_2)$ definida mediante

$$f(t) = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(t - a_1) + a_2.$$

É sinxelo ver que esta aplicación é un homeomorfismo.



Vemos por exemplo que $(-1, 1)$ é homeomorfo (Definición 4.26) a $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ definindo, neste caso, a función $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ como

$$f(t) = \frac{t}{1 - |t|},$$

que é continua por ser composición de continuas (Teorema 4.4) (nótese que o denominador non se anula), e ten inversa continua

$$f^{-1}(s) = \frac{s}{1 + |s|}.$$

Tamén son homeomorfos $(0, 1)$ e $(0, \infty)$ sendo a función logaritmo un posible homeomorfismo (Definición 4.26) entre eles.

Outras posibles combinacións de intervalos abertos tamén serán homeomorfas, e déixanse estas como exercicio. □

Exemplo 4.29. Un argumento similar ó anterior sirve para ver que dous intervalos como $[a_1, b_1]$ e $[a_2, b_2]$ son homeomorfos. Intervalos como $[a, \infty)$ e $(-\infty, b]$ tamén son homeomorfos, aínda que non homeomorfos ós limitados. Ningún intervalo pechado é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Proposición 4.30. *Tódalas bólas abertas de $\mathbb{R}^n$ son homeomorfas a $\mathbb{R}^n$.*

En particular, tódalas bólas de $\mathbb{R}^n$ son homeomorfas entre si. Non obstante, bólas de distintas dimensións non son homeomorfas, aínda que a demostración desta afirmación tan xeral está máis aló dos obxectivos deste curso.

Demostración. Vexamos primeiro que $B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{0},1)$ é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Para iso, basta con defini-la aplicación $f\colon B(\mathbf{0},1) \to \mathbb{R}^n$, mediante

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{1-\|\mathbf{x}\|}.$$

É claro que f é continua, e pode verse que a súa inversa vén dada por

$$f^{-1}(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}}{1+\|\mathbf{y}\|},$$

que tamén é continua. Logo f é un homeomorfismo (Definición 4.26).

A continuación, para ver que dúas bólas calquera $B(\mathbf{x},r)$ e $B(\mathbf{y},s)$ son homeomorfas, basta con compoñer traslacións e homotecias (que son homeomorfismos). En efecto, sexa $f = T_y \circ H_{s/r} \circ T_{-x}$. Entón, $f_{|B(\mathbf{x},r)}\colon B(\mathbf{x},r) \to B(\mathbf{y},s)$ é un homeomorfismo (Definición 4.26). □

Un argumento similar ó do teorema anterior valería tamén para ver que dúas bólas pechadas de $\mathbb{R}^n$ son homeomorfas entre si. Non obstante, veremos que unha bóla pechada de $\mathbb{R}^n$ non é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

4.4.1. Propiedades topolóxicas

Denotaremos xenericamente por $\mathcal{P}$ a unha propiedade que poida satisfacer un conxunto (máis concretamente un espacio topolóxico (Observación 2.6)).

Definición 4.31. Unha propiedade $\mathcal{P}$ dise que é **topolóxica** se é invariante por homeomorfismos (Definición 4.26), é dicir, que se X satisfai a propiedade $\mathcal{P}$, e Y é homeomorfo a X, entón Y tamén satisfai a propiedade $\mathcal{P}$.

Por tanto, se X e Y son homeomorfos, entón terán as mesmas propiedades topolóxicas.

Exemplo 4.32. Propiedades topolóxicas básicas:

- *"Ser finito"* é unha propiedade topolóxica (Definición 4.31). En efecto, se X é un conxunto finito, e Y é homeomorfo (Definición 4.26) a X, entón, como os homeomorfismos son aplicacións bixectivas, Y tamén é finito.

- Analogamente, *"ser numerable"* ou *"ser non numerable"* tamén son propiedades topolóxicas (Definición 4.31), xa que os homeomorfismos conservan o cardinal.

- A completitude (Definición 3.26) *non* é unha propiedade topolóxica (Definición 4.31). Por exemplo, vimos que $(-1,1)$ e $\mathbb{R}$ son homeomorfos (Proposición 4.28), pero $(-1,1)$ non é completo (por non ser pechado en $\mathbb{R}$ (Proposición 3.27)), mentres que $\mathbb{R}$ si é completo (Teorema 3.30).

O obxectivo do que queda de curso é definir dúas propiedades topolóxicas, conexión e compacidade, que, entre outras cousas, nos permitirán determinar nalgunhas situacións se dous conxuntos son ou non homeomorfos.

4.5. Problemas resoltos

Problema 4.33. Sexa $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 + 1\}$. Probar que toda sucesión de Cauchy de puntos de A converxe a un punto de A.

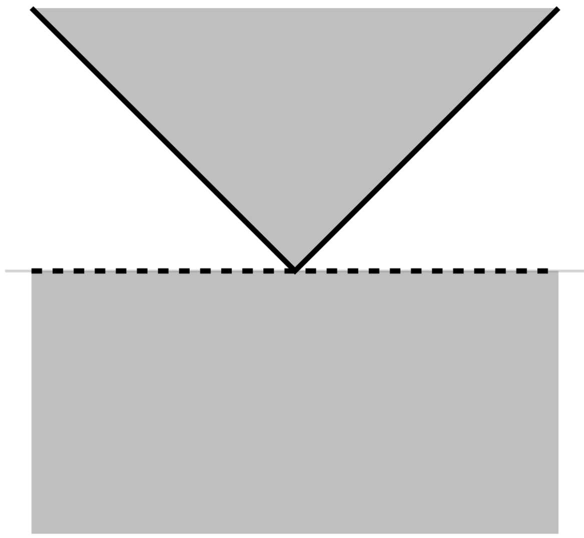
Solución. Considerámo-la aplicación $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = y - x^2 - 1$, que claramente é unha función continua. Entón $A = f^{-1}(\{0\})$, e por tanto, A é pechado en $\mathbb{R}^2$ por ser imaxe recíproca dun pechado por unha aplicación continua. Logo, A é completo, e en consecuencia toda sucesión de Cauchy de A é converxente en A. □

Problema 4.34. Sexa $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x| \text{ ou } y < 0\}$. Calcula-lo interior de A.

Solución. Sexa

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x| \text{ ou } y < 0\}$$

e vexamos que $\operatorname{Int}(A) = B$.

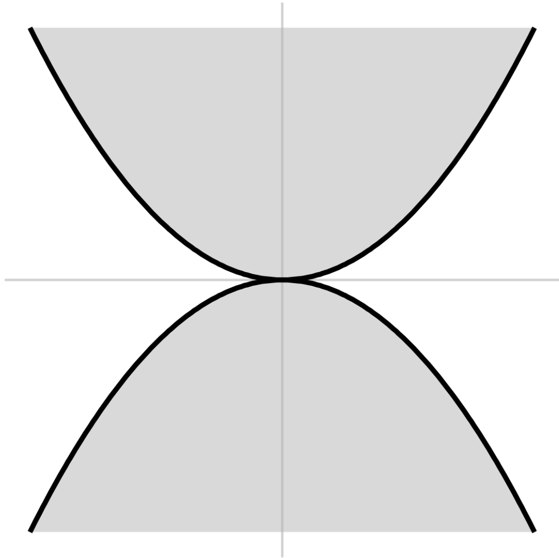


Considerámo-la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = y - |x|$, que claramente é continua por ser composición de aplicacións continuas. Como $B = f^{-1}((0, \infty)) \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, temos que B é aberto por ser unión de abertos (o primeiro conxunto é imaxe recíproca dun aberto por unha aplicación continua, mentres que o segundo é un semiplano aberto). Xa que o interior é o maior aberto contido no conxunto, temos que $B \subset \operatorname{Int}(A)$. Falta por ver que se $(x, y) \in A \setminus B$ entón $(x, y) \notin \operatorname{Int}(A)$. Tomemos pois $(x, y) \in A \setminus B$, é dicir, $y = |x|$. Sexa $r > 0$ arbitrario e tomemos $z = \text{mín}\{r/2, |x|\} > 0$. Entón $(x, |x| - z) \in B((x, |x|), r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A)$, pois

$$d((x, |x|), (x, |x| - z)) = z \leq r/2 < r,$$

$|x| - z < |x|$, e $|x| - z \geq 0$. □

Problema 4.35. Sexa $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \geq x^2\}$. Calcula-lo interior de A.



Solución. Sexa
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > x^2\}.$$
e vexamos que $\mathrm{Int}(A) = B$.

Considerámo-la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = |y| - x^2$, que claramente é continua por selo as proxeccións, o valor absoluto, a resta e a composición de aplicacións continuas. Como $B = f^{-1}((0, \infty))$, temos que B é aberto por ser imaxe recíproca dun aberto por unha aplicación continua. Xa que o interior é o maior aberto contido no conxunto, temos que $B \subset \mathrm{Int}(A)$. Falta por ver que se $(x, y) \in A \setminus B$ entón $(x, y) \notin \mathrm{Int}(A)$. Tomemos pois $(x, y) \in A \setminus B$, é dicir, $|y| = x^2$. Sexa $r > 0$ arbitrario. Supoñamos $x \geq 0$, sendo o caso $x \leq 0$ análogo a este. Neste caso tomémo-lo punto $(x + r/2, y) \in B((x, y), r)$, que non obstante satisfai $(x + r/2, y) \notin A$ xa que $|y| = x^2 < x^2 + r/2$. □

Problema 4.36. Decidir se o conxunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \geq x^2\}$ é completo.

Solución. Vexamos que A é completo.

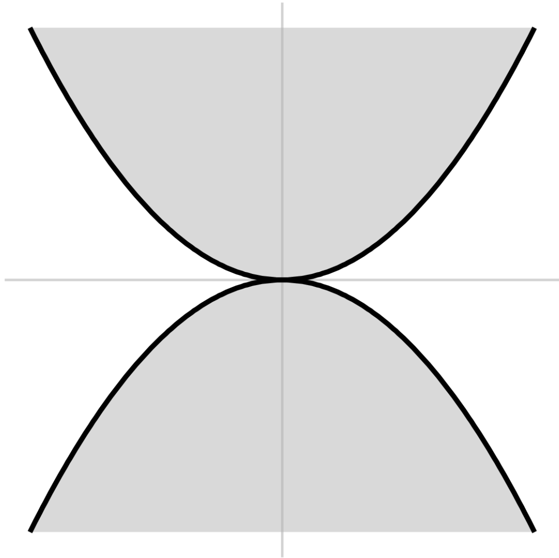
Considerámo-la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante $f(x, y) = |y| - x^2$.

Claramente é continua por selo as proxeccións, o valor absoluto, a resta e a composición de aplicacións continuas.

Como $A = f^{-1}([0, \infty))$, temos que A é pechado por ser imaxe recíproca dun pechado por unha aplicación continua. Como en $\mathbb{R}^2$, que é completo, os pechados e os completos coinciden, A é pechado. □

Problema 4.37. Sexa $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ unha función arbitraria. ¿É f unha función continua?

Solución. Verdadeiro. Como $\{\frac{1}{n}\} = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right) \cap X$, $n \geq 2$, e $\{1\} = \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \cap X$, deducimos que tódolos subconxuntos formados por un punto de X son abertos en X. Como a unión arbitraria de abertos de X é aberto en X deducimos que tódolos subconxuntos de X son abertos. Se $f\colon X \to Y$ é unha función arbitraria e V é aberto en Y, entón $f^{-1}(V)$ é aberto en X (pois tódolos subconxuntos de X o son). Logo, f é continua. □



Problema 4.38. Considerémo-la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} (4xy, 2|x|) & \text{se } y > |x|, \\ \\ (2y, 2x^2) & \text{se } y \leq |x|. \end{cases}$$

estudia-la continuidade de f.

Solución. Considerémo-la aplicación $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = y - |x|$. Claramente g é continua, e por tanto os conxuntos $U = g^{-1}((0,\infty)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x|\}$ e $V = g^{-1}((-\infty,0)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < |x|\}$ son abertos por seren imaxe recíproca dun aberto por una aplicación continua. Como $f_{|U}\colon (x,y) \in U \mapsto f(x,y) = (4xy, 2|x|) \in \mathbb{R}^2$ é continua e U é aberto en $\mathbb{R}^2$ concluímos que f é continua nos puntos de U. Analogamente, $f_{|V}\colon (x,y) \in V \mapsto f(x,y) = (2y, 2x^2) \in \mathbb{R}^2$ é continua e V é aberto, co que f tamén é continua nos puntos de V. En conclusión, f é continua nos puntos de $U \cup V$.

Estudámo-la continuidade en $\mathbb{R}^2 \setminus (U \cup V) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\}$. Sexa $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, e estudemos por tanto a continuidade en $(x,|x|) \in \mathbb{R}^2$. Tomámo-la sucesión $\{(x, |x| + \frac{1}{n})\}$, que obviamente converxe a $(x,|x|)$. Por unha banda, $f(x,|x|) = (2|x|, 2x^2)$, e pola outra, $\{f(x, |x| + \frac{1}{n})\} = \{(4x(|x| + \frac{1}{n}), 2|x|)\}$, que converxe a $(4x|x|, 2|x|)$. Como $x \neq 0$, claramente $(2|x|, 2x^2) \neq (4x|x|, 2|x|)$ e en consecuencia f non é continua en $(x,|x|)$, $x \neq 0$.

Finalmente estudámo-la continuidade no punto $(0,0)$. Sexa $\epsilon > 0$ dado. Tomemos $\delta = \text{mín}\{1, \frac{\epsilon}{4}\} > 0$. Consideremos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $d((x,y),(0,0)) < \delta$. En particular temos

$$\begin{aligned} |x| &\leq \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= d((x,y),(0,0)) < \delta \leq 1, \end{aligned}$$

e así $|x| < x^2 < 1$. Se $y > |x|$, entón

$$\begin{aligned} d(f(x,y), f(0,0)) &= d((4xy, 2|x|), (0,0)) \\ &= \sqrt{16x^2y^2 + 4x^2} \\ &< \sqrt{16y^2 + 4x^2} \\ &\leq \sqrt{16x^2 + 16y^2} \\ &= 4d((x,y),(0,0)) \\ &< 4\delta \leq 4\frac{\epsilon}{4} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por outra banda, se $y \leq |x|$, entón

$$\begin{aligned} d(f(x,y), f(0,0)) &= d((2y, 2x^2), (0,0)) \\ &= \sqrt{4y^2 + 4x^4} \\ &\leq \sqrt{4y^2 + 4x^2} \\ &= 2d((x,y),(0,0)) \\ &< 2\delta \leq 2\frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

Isto proba que f é continua en $(0,0)$.

En consecuencia, f é continua no conxunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq |x|\} \cup \{(0,0)\}$ e non continua no resto dos puntos. □

Problema 4.39. Considera-la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} (y, x+1) & \text{se } y > x+1, \\ \\ (2x, y) & \text{se } y \leq x+1. \end{cases}$$

estudia-la continuidade de f.

Solución. Considerémo-la aplicación $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = y - x - 1$. Claramente g é continua, e por tanto os conxuntos $U = g^{-1}((0,\infty)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x+1\}$ e $V = g^{-1}((-\infty, 0)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x+1\}$ son abertos por seren imaxe recíproxa dun aberto por una aplicación continua. Como $f_{|U}\colon (x,y) \in U \mapsto f(x,y) = (y, x+1) \in \mathbb{R}^2$ é continua e U é aberto en $\mathbb{R}^2$ concluímos que f é continua nos puntos de U. Analogamente, $f_{|V}\colon (x,y) \in V \mapsto f(x,y) = (2x, y) \in \mathbb{R}^2$ é continua e V é aberto, co que f tamén é continua nos puntos de V. En conclusión f é continua nos puntos de $U \cup V$.

Estudámo-la continuidade no conxunto $\mathbb{R}^2 \setminus (U \cup V) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x+1\}$. Sexa $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ e estudemos por tanto a continuidade en $(x, x+1) \in \mathbb{R}^2$. Tomámo-la sucesión $\{(x, x+1+1/n)\}$, que obviamente converxe a $(x, x+1)$. Por unha banda, $f(x, x+1) = (2x, x+1)$, e pola outra, xa que $x+1+1/n > x+1$ temos $\{f(x, x+1+1/n)\} = \{(x+1+1/n, x+1)\}$, que converxe a $(x+1, x+1)$. Como $x \neq 1$, claramente $(2x, x+1) \neq (x+1, x+1)$ e en consecuencia f non é continua en $(x, x+1)$, $x \neq 1$.

Finalmente estudámo-la continuidade en $(1,2)$. Sexa $\epsilon > 0$ dado. Tomemos $\delta = \epsilon/2 > 0$. Consideremos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $d((x,y),(1,2)) < \delta$. Se $y > x+1$ entón temos

$$\begin{aligned} d(f(x,y), f(1,2)) &= d((y, x+1), (2,2)) \\ &= \sqrt{(y-2)^2 + (x-1)^2} \\ &= d((x,y),(1,2)) \\ &< \delta = \epsilon/2 < \epsilon. \end{aligned}$$

Por outra banda, se $y \leq x+1$ entón

$$\begin{aligned} d(f(x,y), f(1,2)) &= d((2x, y), (2,2)) \\ &= \sqrt{(2x-2)^2 + (y-2)^2} \\ &\leq \sqrt{4(x-1)^2 + (y-2)^2 + 3(y-2)^2} \\ &= 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \\ &= 2d((x,y),(1,2)) \\ &< 2\delta = \epsilon. \end{aligned}$$

Isto proba que f é continua en $(1,2)$.

En consecuencia, f é continua no conxunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x+1\} \cup \{(1,2)\}$ e non continua no resto dos puntos. $\square$

Problema 4.40. Determinar se o conxunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \cos(x) + y = x^3, -\pi \leq x \leq \pi\}$$

é completo.

Solución. Vexamos que si que é completo. A aplicación $f\colon [-\pi,\pi] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \cos(x) + y - x^3$ é claramente continua. Entón o conxunto

$$f^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) \in [-\pi,\pi] \times \mathbb{R} : \cos(x) + y - x^3 = 0\} = A$$

é pechado en $[-\pi,\pi] \times \mathbb{R}$ por ser imaxe recíproca dun pechado por unha aplicación continua, e por tanto tamén é pechado en $\mathbb{R}^2$, xa que $[-\pi,\pi] \times \mathbb{R}$ é pechado en $\mathbb{R}^2$. Dado que en $\mathbb{R}^2$, que é completo, os pechados e os completos coinciden, deducimos que A é completo. $\square$

Problema 4.41. Considera-la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x - y, 4y) & \text{se } y > 2x, \\ \\ (0, 3x) & \text{se } y \leq 2x. \end{cases}$$

estudia-la continuidade de f.

Solución. Considerémo-la aplicación $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = y-2x$. Claramente a función g é continua, e por tanto os conxuntos $U = g^{-1}((0,\infty)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 2x\}$ e $V = g^{-1}((-\infty,0)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 2x\}$ son abertos por seren imaxe recíproxa dun aberto por una aplicación continua. Como $f_{|U}\colon (x,y) \in U \mapsto f(x,y) = (2x-y, 4y) \in \mathbb{R}^2$ é continua e U é aberto en $\mathbb{R}^2$ concluímos que f é continua nos puntos de U. Analogamente, $f_{|V}\colon (x,y) \in V \mapsto f(x,y) = (0,3x) \in \mathbb{R}^2$ é continua e V é aberto, co que f tamén é continua nos puntos de V. En conclusión f é continua nos puntos de $U \cup V$.

Estudámo-la continuidade en $\mathbb{R}^2 \setminus (U \cup V) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$. Sexa $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ e estudemos por tanto a continuidade en $(x,2x) \in \mathbb{R}^2$. Tomámo-la sucesión $\{(x-1/n, 2x)\}$, que obviamente converxe a $(x,2x)$. Por unha banda, $f(x,2x) = (0,3x)$, e pola outra, xa que $2x > 2(x-1/n)$ temos $\{f(x-1/n,2x)\} = \{(-2/n, 8x)\}$, que converxe a $(0,8x)$. Como $x \neq 0$, claramente $(0,3x) \neq (0,8x)$ e en consecuencia f non é continua en $(x,2x)$, $x \neq 0$.

Finalmente estudámo-la continuidade en $(0,0)$. Sexa $\epsilon > 0$ dado. Tomemos $\delta = \epsilon/5 > 0$. Consideremos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $d((x,y),(0,0)) < \delta$. En particular, $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ o que implica $-\delta < x, y < \delta$ e por tanto,

$$-3\delta = -2\delta - \delta < 2x - y < 2\delta + \delta = 3\delta.$$

Se $y > 2x$ entón temos

$$\begin{aligned} d(f(x,y), f(0,0)) &= d((2x-y, 4y), (0,0)) \\ &= \sqrt{(2x-y)^2 + 16y^2} \\ &< \sqrt{(3\delta)^2 + 16\delta^2} \\ &= 5\delta = \epsilon. \end{aligned}$$

Por outra banda, se $y \leq 2x$ entón

$$\begin{aligned} d(f(x,y), f(0,0)) &= d((0,3x), (0,0)) \\ &= 3|x| < 3\delta \\ &= 3\epsilon/5 < \epsilon. \end{aligned}$$

Isto proba que f é continua en $(0,0)$.

En consecuencia, f é continua no conxunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 2x\} \cup \{(0,0)\}$ e non continua no resto. □

Problema 4.42. Considera-la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} (1-y, x+1) & \text{se } y - x \geq 1, \\ \\ (x,1) & \text{se } y - x < 1. \end{cases}$$

Estudia-la continuidade de f.

Solución. Considerámo-la función $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = y-x$, que claramente é continua. Por tanto, temos que os conxuntos $U = g^{-1}((1,+\infty)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x > 1\}$ e $V = g^{-1}((-\infty,1)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x < 1\}$ son abertos por ser imaxe recíproca dun aberto por unha función continua. Obviamente, a función $f_{|U}\colon U \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (1-y, x+1)$ é continua; como U é aberto, concluímos que f é continua en tódolos puntos de U. Analogamente, $f_{|V}\colon V \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x,1)$ é continua, e como V é aberto, obtemos que f é continua en tódolos puntos de V.

Falta ve-la continuidade no conxunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y-x=1\}$. Collamos por tanto un punto da forma $(x, x+1)$, $x \in \mathbb{R}$, e estudiémo-la continuidade nese punto. Considerémo-la sucesión $\{(x+1/n, x+1)\}$. Claramente $\{(x+1/n, x+1)\} \to (x, x+1)$. Agora ben, $f(x, x+1) = (-x, x+1)$, mentres que, como $(x+1)-(x+1/n) = 1-1/n < 1$, temos $\{f(x+1/n, x+1)\} = \{(x+1/n, 1)\} \to (x,1)$. Logo, se $x \neq 0$ temos $(-x, x+1) \neq (x,1)$ de onde se deduce que f non é continua nos puntos $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y-x=1, x \neq 0\}$.

Para rematar, estudiámo-la continuidade en $(0,1)$. Sexa pois $\epsilon > 0$ dado. Tomemos $\delta = \epsilon$. Consideremos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $d((x,y),(0,1)) < \delta$.

Se $y - x \geq 1$ temos que

$$\begin{aligned} d(f(x,y), f(0,1)) &= d((1-y, x+1), (0,1)) \\ &= \sqrt{(1-y)^2 + x^2} \\ &= d((x,y),(0,1)) < \delta = \epsilon. \end{aligned}$$

Se $y - x < 1$, verifícase que

$$\begin{aligned} d(f(x,y), f(0,1)) &= d((x,1),(0,1)) \\ &= |x| \leq \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \\ &= d((x,y),(0,1)) < \delta = \epsilon. \end{aligned}$$

En calquera caso obtivemos $d(f(x,y), f(0,1)) < \epsilon$ e por tanto a función f é continua en $(0,1)$.

En conclusión, f é continua no conxunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y-x \neq 1\} \cup \{(0,1)\}$, e non continua no resto de $\mathbb{R}^2$. □

Problema 4.43. Considera-la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+1, 2) & \text{se } y \geq x, \\ \\ (2x, 2y) & \text{se } y < x. \end{cases}$$

Estudia-la continuidade de f.

Solución. Considerámo-la función $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = y-x$, que claramente é continua. Entón, os conxuntos $U = g^{-1}((0,+\infty)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$ e $V = g^{-1}((-\infty,0)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}$ son abertos por ser imaxe recíproca dun aberto por unha función continua. Obviamente, a función $f_{|U}\colon U \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+1,2)$ é continua; como U é aberto, concluímos que f é continua en tódolos puntos de U. Analogamente, $f_{|V}\colon V \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (2x,2y)$ é continua, e como V é aberto, obtemos que f é continua en tódolos puntos de V.

Falta ve-la continuidade no conxunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$. Collamos por tanto un punto da forma (x,x), $x \in \mathbb{R}$, e estudiémo-la continuidade nese punto. Considerémo-la sucesión $\{(x+1/n, x)\}$. Claramente $\{(x+1/n, x)\} \to (x,x)$. Agora ben, $f(x,x) = (x+1,2)$, mentres que, como $x < x + 1/n$, $\{f(x + 1/n, x)\} = \{(2(x + 1/n), 2x)\} \to (2x, 2x)$. Logo, se $x \neq 1$ temos $(x + 1, 2) \neq (2x, 2x)$ de onde se deduce que f non é continua nos puntos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x, x \neq 1\}$.

Para rematar, estudiámo-la continuidade en $(1, 1)$. Sexa pois $\epsilon > 0$ dado. Tomemos $\delta = \epsilon/2$. Consideremos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $d((x, y), (1, 1)) < \delta$.

Se $y \geq x$ temos que

$$\begin{aligned} d(f(x,y), f(1,1)) &= d((x+1,2),(2,2)) \\ &= |x-1| \\ &\leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \\ &= d((x,y),(1,1)) \\ &< \delta = \epsilon/2 < \epsilon. \end{aligned}$$

Se $y < x$, temos

$$\begin{aligned} d(f(x,y), f(1,1)) &= d((2x,2y),(2,2)) \\ &= \sqrt{(2x-2)^2 + (2y-2)^2} \\ &= 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \\ &= 2d((x,y),(1,1)) \\ &< 2\delta = \epsilon. \end{aligned}$$

En calquera caso obtivemos $d(f(x, y), f(1, 1)) < \epsilon$, e por tanto, a función f é continua en $(1, 1)$.

En conclusión, f é continua no conxunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x\} \cup \{(1, 1)\}$, e non continua no resto de $\mathbb{R}^2$. □

Problema 4.44. ¿Se X é un conxunto completo e $f : X \to Y$ é continua, é $f(X)$ completo?

Solución. Falso. De feito $(0, 1)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$, pero $(0, 1)$ non é completo e non obstante $\mathbb{R}$ si o é. □

Problema 4.45. Considera-la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,1) & \text{se } y \geq e^x, \\ \\ (\operatorname{sen} x, y) & \text{se } y < e^x. \end{cases}$$

Estudia-la continuidade de f. (Axuda: $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$, para calquera $x \in \mathbb{R}$.)

Solución. Considerámo-la función continua $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = y - e^x$. Entón, os conxuntos $U = g^{-1}((0, +\infty)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > e^x\}$ e $V = g^{-1}((-\infty, 0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < e^x\}$ son abertos por ser imaxe recíproca dun aberto por unha función continua. Obviamente, a función $f_{|U} : U \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x, 1)$ é continua; como U é aberto concluímos que f é continua en tódolos puntos de U. Analogamente, $f_{|V} : V \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (\operatorname{sen} x, y)$ é continua, e como V é aberto, obtemos que f é continua en tódolos puntos de V.

Falta ve-la continuidade no conxunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^x\}$. Collamos por tanto un punto da forma (x, e^x) e estudiémo-la continuidade nese punto. Considerémo-la sucesión $\{(x + 1/n, e^x)\}$. Claramente $\{(x + 1/n, e^x)\} \to (x, e^x)$. Agora ben, $f(x, e^x) = (x, 1)$, mentres que, como $e^x < e^{x+1/n}$, $\{f(x + 1/n, e^x)\} = \{\operatorname{sen}(x + 1/n), e^x\} \to (\operatorname{sen} x, e^x)$ pola continuidade da función sen. Logo, se $x \neq 0$ temos $e^x \neq 1$, e así $(x, 1) \neq (\operatorname{sen} x, e^x)$, de onde se deduce que f non é continua nos puntos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^x, x \neq 0\}$.

Para rematar estudiámo-la continuidade en $(0, 1)$. Sexa $\epsilon > 0$ dado. Tomemos $\delta = \epsilon$. Consideremos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $d((x, y), (0, 1)) < \delta$.

Se $y \geq e^x$ temos que

$$\begin{aligned} d(f(x, y), f(0, 1)) &= d((x, 1), (0, 1)) \\ &= |x| \leq \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \\ &= d((x, y), (0, 1)) < \delta = \epsilon. \end{aligned}$$

Se $y < e^x$, dado que $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$, chegamos a que

$$\begin{aligned} d(f(x, y), f(0, 1)) &= d((\operatorname{sen} x, y), (0, 1)) \\ &= \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + (y - 1)^2} \\ &\leq \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \\ &= d((x, y), (0, 1)) < \delta = \epsilon. \end{aligned}$$

En calquera caso obtivemos $d(f(x, y), f(0, 1)) < \epsilon$, e por tanto a función f é continua en $(0, 1)$.

En conclusión, f é continua no conxunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq e^x\} \cup \{(0, 1)\}$, e non continua no resto de $\mathbb{R}^2$. □

Problema 4.46. Considera-la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x + y}{x}, \dfrac{x - y}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ (1, 1) & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Estudia-la continuidade de f.

Solución. En primeiro lugar, definímo-lo conxunto $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Vexamos que U é aberto. Para iso considerámo-la proxección na primeira variable $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \pi_1(x, y) = x$. Entón resulta evidente que $U = \pi_1^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, e como π_1 é continua, e $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é aberto en $\mathbb{R}$ (por ser $\{0\}$ pechado), deducimos que efectivamente U é aberto en $\mathbb{R}^2$. Agora observamos que $f_{|U}$ vén definida como

$$f_{|U}(x, y) = \left(\frac{x + y}{x}, \frac{x - y}{x}\right),$$

de modo que por ser $f_{|U}$ un cociente de polinomios onde o denominador non se anula, concluímos que $f_{|U}$ é continua en U. Agora ben, como U é aberto, deducimos que f é continua en tódolos puntos de U.

A continuación estudiámo-la continuidade en $A = \mathbb{R}^2 \setminus U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}$. Sexa $(0, y) \in A$ un punto arbitrario. Considerámo-la sucesión $\{(\frac{1}{n}, y + \frac{1}{n})\}$, que obviamentemente converxe a $(0, y)$. É claro que $\{(\frac{1}{n}, y + \frac{1}{n})\} \subset U$ pois $\frac{1}{n} \neq 0$, co cal

$$\begin{aligned}\left\{f\left(\frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right)\right\} &= \left\{\left(\frac{\frac{1}{n} + y + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}, \frac{\frac{1}{n} - y - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)\right\} \\ &= \{(2 + ny, -ny)\}\,.\end{aligned}$$

Se $y \neq 0$, a sucesión anterior diverxe, e por tanto f non pode ser continua en $(0, y) \in A$, con $y \neq 0$. Por outra banda, se $y = 0$, a sucesión anterior converxe a $(2, 0)$; como $f(0, y) = (1, 1) \neq (2, 0)$, concluímos que f tampouco pode ser continua en $(0, 0)$.

En definitiva, f é continua no conxunto $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, e non continua en $\mathbb{R}^2 \setminus U = \{0\} \times \mathbb{R}$. □

Problema 4.47. Considera-la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2, 3y) & \text{se } y > x^2 + 1, \\ (y - 1, 3x + 3) & \text{se } y \leq x^2 + 1. \end{cases}$$

Estudia-la continuidade de f.

Solución. Considerémo-la aplicación $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = y - x^2 - 1$. Claramente g é continua, e por tanto os conxuntos $U = g^{-1}((0, \infty)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 + 1\}$ e $V = g^{-1}((-\infty, 0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2 + 1\}$ son abertos por seren imaxe recíproxa dun aberto por una aplicación continua. Como $f_{|U}\colon (x, y) \in U \mapsto f(x, y) = (x^2, 3y) \in \mathbb{R}^2$ é continua e U é aberto en $\mathbb{R}^2$, concluímos que f é continua nos puntos de U. Analogamente, $f_{|V}\colon (x, y) \in V \mapsto f(x, y) = (y - 1, 3x + 3) \in \mathbb{R}^2$ é continua e V é aberto, co que f tamén é continua nos puntos de V. En conclusión, f é continua nos puntos de $U \cup V$.

Estudámo-la continuidade en $\mathbb{R}^2 \setminus (U \cup V) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 + 1\}$. Sexa $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0, 1$, e estudiemos por tanto a continuidade en $(x, x^2 + 1) \in \mathbb{R}^2$. Tomámo-la sucesión $\{(x, x^2 + 1 + \frac{1}{n})\}$, que obviamente converxe a $(x, x^2 + 1)$. Por unha banda, $f(x, x^2 + 1) = (x^2, 3x + 3)$, e pola outra, $\{f(x, x^2 + 1 + \frac{1}{n})\} = \{(x^2, 3x^2 + 3 + 3/n)\}$, que converxe a $(x^2, 3x^2 + 3)$. Como $x \neq 0, 1$, claramente $(x^2, 3x + 3) \neq (x^2, 3x^2 + 3)$, e en consecuencia, f non é continua en $(x, x^2 + 1)$, $x \neq 0, 1$.

Falta por estudia-la continuidade en $(0, 1)$ e $(1, 2)$. Empezamos por $(0, 1)$. Sexa $\epsilon > 0$ dado. Tomemos $\delta = \text{mín}\{1, \epsilon/3\} > 0$. Consideremos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $d((x, y), (0, 1)) < \delta$. En particular, $|x| \leq \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = d((x, y), (0, 1)) < \delta \leq 1$, o que implica $x^2 < 1$, e por tanto, $x^4 < x^2$. Se $y > x^2 + 1$ entón

$$\begin{aligned} d(f(x, y), f(0, 1)) &= d((x^2, 3y), (0, 3)) \\ &= \sqrt{x^4 + (3y - 3)^2} \\ &< \sqrt{x^2 + 9(y - 1)^2} \\ &\leq \sqrt{9x^2 + 9(y - 1)^2} \\ &= 3\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \\ &= 3d((x, y), (0, 1)) < 3\delta \leq 3\epsilon/3 = \epsilon. \end{aligned}$$

Se $y \leq x^2 + 1$ entón

$$\begin{aligned}
d(f(x,y), f(0,1)) &= d((y-1, 3x+3), (0,3)) \\
&= \sqrt{(y-1)^2 + 9x^2} \\
&\leq \sqrt{9(y-1)^2 + 9x^2} \\
&= 3\sqrt{x^2 + (y-1)^2} \\
&= 3d((x,y),(0,1)) < 3\delta \leq 3\epsilon/3 = \epsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto, f é continua en $(0,1)$.

Finalmente estudiámo-la continuidade no punto $(1,2)$. Sexa $\epsilon > 0$ dado. Tomemos neste caso $\delta = \text{mín}\{1, \epsilon/3\} > 0$. Consideremos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $d((x,y),(1,2)) < \delta$.

Sexa $y > x^2 + 1$. Como $|x-1| \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \leq 1$ temos que $0 < x < 2$, e por tanto, $-3 < 1 < x+1 < 3$; logo $|x+1| < 3$. Isto implica $|x^2 - 1| = |x+1||x-1| < 3|x-1|$. Tendo isto en conta verifícase que

$$\begin{aligned}
d(f(x,y), f(1,2)) &= d((x^2, 3y), (1,6)) \\
&= \sqrt{(x^2-1)^2 + (3y-6)^2} \\
&< \sqrt{9(x-1)^2 + 9(y-2)^2} \\
&= 3\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \\
&= 3d((x,y),(1,2)) < 3\delta \leq 3\epsilon/3 = \epsilon.
\end{aligned}$$

Por outra banda, se $y > x^2 + 1$, entón

$$\begin{aligned}
d(f(x,y), f(0,0)) &= d((y-1, 3x+3), (1,6)) \\
&= \sqrt{(y-2)^2 + (3x-3)^2} \\
&\leq \sqrt{9(x-1)^2 + (y-2)^2} \\
&\leq \sqrt{9(x-1)^2 + 9(y-2)^2} \\
&= 3\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \\
&= 3d((x,y),(1,2)) < 3\delta \leq 3\epsilon/3 = \epsilon.
\end{aligned}$$

Isto proba que f é continua en $(1,2)$.

En consecuencia, f é continua no conxunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2 + 1\} \cup \{(0,1),(1,2)\}$ e non continua no resto dos puntos. □

Problema 4.48. Estudia-la continuidade da seguinte función: $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x,y)}{\|(x,y)\|} & \text{se } \|(x,y)\| \geq 1, \\ (x,-y) & \text{se } \|(x,y)\| < 1. \end{cases}$$

Solución. Considerémo-los subconxuntos

$$\begin{aligned}
U &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\} = \mathbb{R}^2 \setminus B[(0,0),1], \\
V &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} = B((0,0),1).
\end{aligned}$$

Está claro que U é aberto, por se-lo complementario dunha bóla pechada, e V é aberto, xa que é unha bóla aberta. Como

$$f_{|U}\colon U \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x,y)/\sqrt{x^2+y^2}$$

é continua (nótese que o denominador non se anula en U), e U é aberto, deducimos que f é continua nos puntos de U. Analogamente,

$$f_{|V}\colon V \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x,-y)$$

é continua e V é aberto, co que f é continua nos puntos de V. Por tanto, ata agora probamos que f é continua nos puntos de $U \cup V$.

Estudiámo-la continuidade en $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$. Sexa $(x,y) \in S^1$, con $y \neq 0$. Considerémo-la sucesión $\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)(x,y)\right\}$. Obviamente,

$$\begin{aligned}\left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)(x,y)\right\| &= \left|1-\frac{1}{n}\right| \|(x,y)\| \\ &= 1-\frac{1}{n} < 1,\end{aligned}$$

co que tal sucesión está contida en V. Claramente $\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)(x,y)\right\} \to (x,y)$. Agora ben,

$$f(x,y) = (x,y)/\|(x,y)\| = (x,y),$$

mentres que

$$\left\{f\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)(x,y)\right)\right\} = \left\{\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)x, -\left(1-\frac{1}{n}\right)y\right)\right\}$$

converxe a $(x,-y)$. Como $y \neq 0$, temos que $(x,y) \neq (x,-y)$ e por tanto a función f non é continua no punto $(x,y) \in S^1$, $y \neq 0$. En consecuencia, f non é continua en $S^1 \backslash \{(\pm 1, 0)\}$.

Finalmente estudiámo-la continuidade en $(\pm 1, 0)$. Sexa $\epsilon > 0$ dado. Tomemos $\delta = \epsilon$. Consideramos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $d((x,y),(\pm 1,0)) < \delta$, é dicir, $(x \mp 1)^2 + y^2 < \delta^2$.

Se $\|(x,y)\| < 1$ entón,

$$\begin{aligned}d(f(x,y), f(\pm 1,0)) &= d((x,-y),(\pm 1,0)) \\ &= \sqrt{(x \mp 1)^2 + y^2} \\ &< \delta = \epsilon.\end{aligned}$$

Supoñamos agora que $\|(x,y)\| \geq 1$. Neste caso a acotación resulta máis complicada. En primeiro lugar,

$$\begin{aligned}d(f(x,y), f(\pm 1,0))^2 &= d\left(\frac{(x,y)}{\|(x,y)\|}, (\pm 1, 0)\right)^2 \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \mp 1\right)^2 + \frac{y^2}{x^2+y^2} \\ &= 2\left(1 \mp \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).\end{aligned}$$

Recordemos que $x^2+y^2 \geq 1$, e observemos que, como $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, temos $\pm 2x/\sqrt{x^2+y^2} \geq -2$. Isto implica

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}+1 \pm \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \geq 0,$$

xa que os dous factores son non negativos. Operando,

$$\begin{aligned} 0 &\leq x^2+y^2-1 \mp 2x \pm \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= (x \mp 1)^2 + y^2 - 2\left(1 \mp \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$2\left(1 \mp \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \leq (x \mp 1)^2 + y^2.$$

En definitiva,

$$\begin{aligned} d(f(x,y), f(\pm 1, 0))^2 &= 2\left(1 \mp \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ &\leq (x \mp 1)^2 + y^2 \\ &< \delta^2 = \epsilon^2, \end{aligned}$$

co que f é continua en $(\pm 1, 0)$.

En conclusión f é continua no conxunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 1\} \cup \{(1,0), (-1,0)\}$ e non continua no resto. $\square$

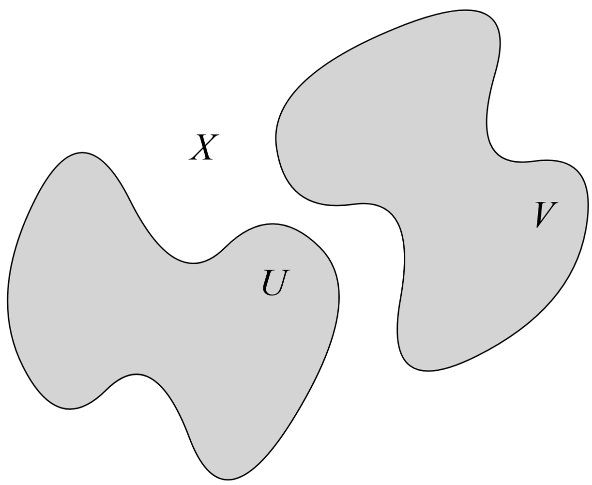
Capítulo 5

Conexión

Unha das propiedades topolóxicas máis útiles para descartar que dous conxuntos sexan homeomorfos é a conexión. Ademais, neste capítulo tamén empregarémo-la conexión por camiños, outra propiedade topolóxica relacionada, que na práctica a veces resulta máis doada de manexar.

5.1. Conxuntos conexos

Intuitivamente, unha separación dun conxunto consiste en exhibir a este como unión de dous anacos.



O concepto de "anaco", non obstante, cómpre definilo con precisión. A primeira idea sería exhibir ó conxunto X como unión disxunta de dous subconxuntos complementarios, é dicir, $X = U \cup V$ con $U \cap V = \emptyset$. Claramente, isto non é suficiente, xa que hai moitas formas de escribir un conxunto deste xeito. Agora ben, debemos esixir que estes dous anacos do conxunto estean "separados", ou máis precisamente, que non sexan adherentes o un ó outro. A nova condición será por tanto, $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$, onde a clasura se refire á clasura relativa en X. É sinxelo ver que esta última condición é equivalente a dicir que para cada $\mathbf{x} \in X$ existe $r > 0$ tal que $B_X(\mathbf{x}, r) \cap U = \emptyset$ ou $B_X(\mathbf{x}, r) \cap V = \emptyset$. Xa que $X = U \cup V$, isto quere dicir, $B_X(\mathbf{x}, r) \subset V$ ou $B_X(\mathbf{x}, r) \subset U$, ou o que é o mesmo, que U e V son abertos en X. Isto xustifica a definición habitual da bibliografía:

Definición 5.1. Sexa $X \subset \mathbb{R}^n$. Dicimos que $U \mid V$ é unha **separación de** X se

- U e V son abertos en X (Definición 2.16),
- $X = U \cup V$,
- $U \cap V = \emptyset$.

Todo conxunto X admite a separación $\emptyset \mid X$, que é a que se chama **separación trivial**.

Un conxunto será conexo cando non se pode separar en varios anacos. É dicir,

Definición 5.2. Dise que $X \subset \mathbb{R}^n$ é **conexo** se a única separación que admite é a trivial.

Equivalentemente, temos a seguinte caracterización.

Proposición 5.3. *Un conxunto X é conexo se e só se os únicos subconxuntos de X que son á vez abertos e pechados en X son $\emptyset$ e X.*

Demostración. Supoñamos que X é conexo, e supoñamos que U é aberto (Definición 2.16) e pechado (Definición 2.18) en X. Entón $V = X \setminus U$ é aberto e pechado en X, e por tanto, $U \mid V$ é unha separación de X (Definición 5.1). Como X é conexo (Definición 5.2), a separación é trivial, e por tanto, $U = \emptyset$ ou $U = X$.

Reciprocamente, se $U \mid V$ é separación (Definición 5.1) de X, como U e V son abertos en X (Definición 2.16) e un é o complementario do outro, entón U e V son tamén pechados (Definición 2.18). Por hipótese, $U = \emptyset$ ou $U = X$, o cal significa que a separación $U \mid V$ é trivial. □

Observación 5.4. Antes de continuar convén face-la seguinte precisión. Sexa X un conxunto e $U \mid V$ unha separación de X. Tomemos agora $Y \subset X$. Entón $U \cap Y \mid V \cap Y$ é unha separación de Y.

En efecto,

$$\begin{aligned}(U \cap Y) \cup (V \cap Y) &= (U \cup V) \cap Y \\ &= X \cap Y = Y,\end{aligned}$$

$$(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset \cap Y = \emptyset,$$

e pola caracterización dos abertos relativos (Proposición 2.17), $U \cap Y$ e $V \cap Y$ son abertos en Y. Eventualmente referirémonos a esta separación como a separación de Y *inducida* pola separación $U \mid V$ de X.

O feito de que a separación $U \cap Y \mid V \cap Y$ sexa trivial quere dicir que $U \cap Y = \emptyset$ ou $U \cap Y = Y$, o cal é equivalente, respectivamente, a que $Y \subset V$ ou $Y \subset U$.

Cómpre resaltar que non toda separación de Y vén inducida por unha separación de X. Ademais, se X é conexo, Y non ten por que selo, e reciprocamente, se Y é conexo tampouco ten por que selo X.

Exemplo 5.5. Presentamos algúns exemplos elementais:

- Un conxunto cun só punto, $\{\mathbf{x}\}$ é conexo, xa que a única separación posible de $\{\mathbf{x}\}$ é $\emptyset \mid \{\mathbf{x}\}$.

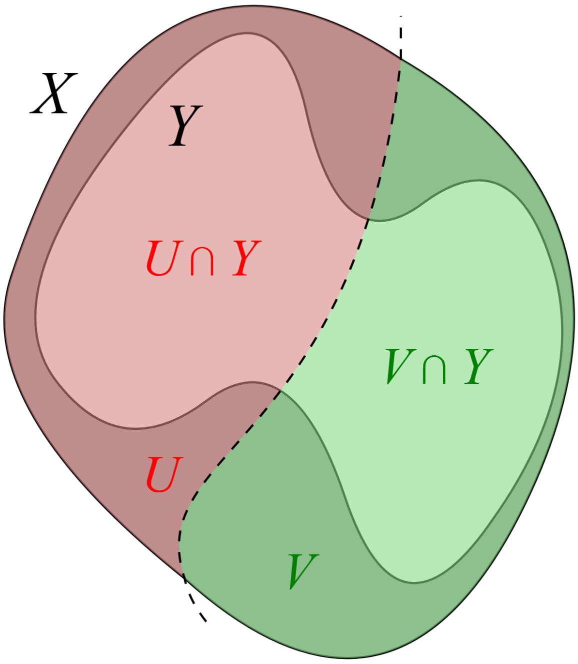


Figura 5.1: Separación inducida

- O conxunto $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, non é conexo. Isto séguese do feito de que calquera subconxunto de $\mathbb{R}^n$ é Hausdorff (Exercicio 3.5).
- En xeral, todo conxunto finito de $\mathbb{R}^n$ con máis dun punto é non conexo.
- $\mathbb{Q}$ non é conexo: por exemplo, $(-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} \mid (\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$ é unha separación non trivial de $\mathbb{Q}$.
- Máis xeralmente, se $X \subset \mathbb{Q}$, entón os únicos subconxuntos conexos de X son os formados por un único punto. En efecto, supoñamos que X ten polo menos dous puntos x, $y \in X$, $x < y$, e sexa $r \in \mathbb{R} \setminus X$ un número *irracional* con $x < r < y$. Entón $(-\infty, r) \cap X \mid (r, \infty) \cap X$ é unha separación non trivial de X.

Probar que un conxunto é conexo non é sinxelo en xeral. Empezaremos por tanto determinando os conxuntos conexos da recta real.

Definición 5.6. Un subconxunto $A \subset \mathbb{R}$ dise un **intervalo xeneralizado** se para calquera x, $y \in A$ con $x < y$ se satisfai que se $x < z < y$ entón $z \in A$.

Noutras palabras, os intervalos (xeneralizados) son os subconxuntos de $\mathbb{R}$ que satisfán que, dados dous puntos calquera do conxunto, tódolos puntos intermedios tamén están no conxunto. É un sinxelo exercicio ver que os intervalos xeneralizados de $\mathbb{R}$ son precisamente:

$$\begin{array}{lll} \emptyset, & \{a\} = [a, a], & \mathbb{R} = (-\infty, \infty) \\ (a, b), & (a, \infty), & (-\infty, b), \\ [a, b], & [a, \infty), & [b, \infty), \\ [a, b), & (a, b]. & \end{array}$$

con a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Teorema 5.7. *Os conxuntos conexos de $\mathbb{R}$ son xustamente os intervalos xeneralizados.*

En particular, $\mathbb{R}$ é conexo.

Demostración. Supoñamos primeiro que $A \subset \mathbb{R}$ non é un intervalo xeneralizado (Definición 5.6). Entón existen x, $y \in A$ e $z \in \mathbb{R}$ con $x < z < y$ tal que $z \notin \mathbb{R}$. Sexan $U = (-\infty, z) \cap A$ e $V = (z, \infty) \cap A$. Obviamente, U e V son abertos en X (Proposición 2.17), $A = U \cup V$, e $U \cap V = \emptyset$. Logo, $U \mid V$ é unha separación (Definición 5.1) de A, e como $x \in U$ e $y \in V$, dita separación é non trivial. Por tanto A non é conexo (Definición 5.2).

Reciprocamente, supoñamos que I é un intervalo xeneralizado (Definición 5.6) de $\mathbb{R}$, e vexamos que I é conexo. Pola contra, supoñamos que $U \mid V$ é unha separación (Definición 5.1) non trivial de I. Sexan $a \in U$ e $b \in V$, e supoñamos que $a < b$. Como I é un intervalo xeneralizado (Definición 5.6), en particular $[a, b] \subset I$.

Definimos $A = \{x \in \mathbb{R} : [a, x] \subset U\}$. Claramente $U \neq \emptyset$, pois $a \in A$ xa que $\{a\} = [a, a] \subset U$. Ademais, A é limitado superiormente, pois b é unha cota superior de A xa que $[a, b] \not\subset U$. Polo axioma do supremo (Observación 3.29) de $\mathbb{R}$, sexa $z = \sup A$. Como I é un intervalo xeneralizado (Definición 5.6), e $a \leq z \leq b$, temos que $z \in I$.

Supoñamos $z \in U$; en particular, $z < b$.

Se $z = a$, como U é aberto en I, existe $r > 0$ tal que $a + r < b$ e $(a - r, a + r) \cap I \subset U$. Como I é un intervalo xeneralizado (Definición 5.6) e $[a, b] \subset I$, en particular, $[a, a + r) \subset U$. Pero entón $[a, a + r/2] \subset U$, o que significa que $a + r/2 \in A$, contradicindo que $a = \sup A$.

Logo $z > a$. Como U é aberto en I (Proposición 2.17), existe $r > 0$ de xeito que $a < z - r < z + r < b$ e $(z - r, z + r) \cap I \subset U$. Como $[a, b] \subset I$, $(z - r, z + r) \subset U$. Por definición de supremo (Definición 1.16), existe $t \in A$ tal que $t > z - r$. Entón,

$$\left[a, z + \frac{r}{2}\right] \subset [a, t] \cup (z - r, z + r) \subset U,$$

o que contradí que z é o supremo de A.

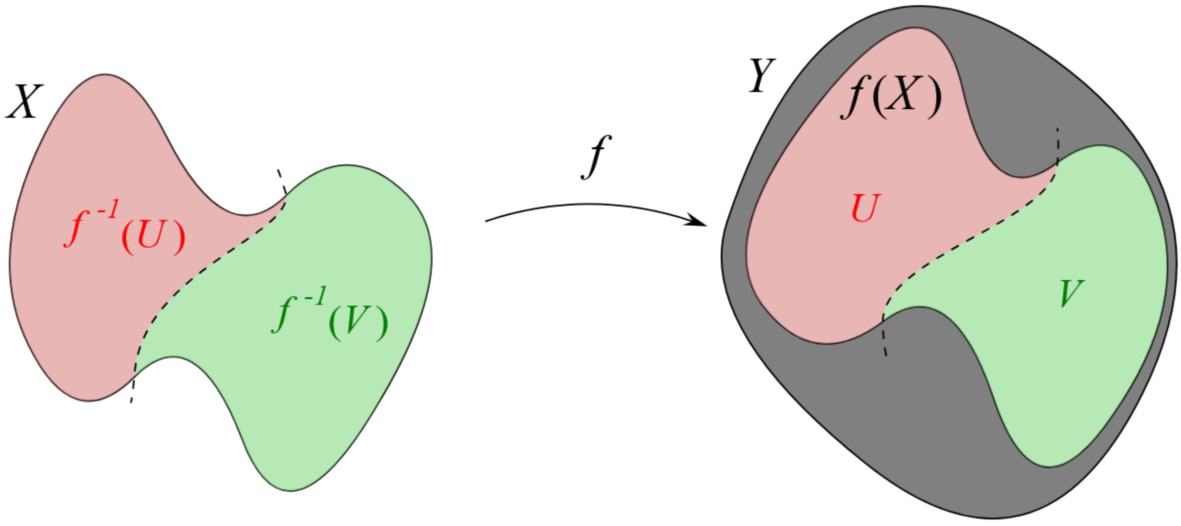
Por tanto, $z \in V$; en particular, $a < z$. Como V é aberto en I (Proposición 2.17), existe $r > 0$ tal que $a < z - r$ e $(z - r, z + r) \cap I \subset V$. Nótese que $[a, b] \subset I$ e $z \leq b$, co que $(z - r, z] \subset V$. Como $z = \sup A$, por definición de supremo (Definición 1.16), existe $t > z - r$ tal que $t \in A$, é dicir, $[a, t] \subset U$. Isto é absurdo pois entón $t \in U \cap V = \emptyset$.

Chegamos por tanto a unha contradicción tanto se $z \in U$ como se $z \in V$. Dado que $I = U \cup V$, a separación $U \mid V$ non pode ser non trivial, o que proba que I é conexo. $\square$

O seguinte resultado exprésase de xeito sucinto dicindo que a imaxe continua dun conexo é conexo.

Teorema 5.8. *Sexa $X \subset \mathbb{R}^n$ un subconxunto conexo e $f\colon X \to Y$ unha aplicación continua. Entón o conxunto imaxe $f(X)$ é conexo.*

Demostración. Sexa $U \mid V$ unha separación de $f(X)$. Vexamos que $f^{-1}(U) \mid f^{-1}(V)$ é unha separación de X.



En primeiro lugar,

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) &= f^{-1}(U \cup V) \\ &= f^{-1}(f(X)) = X. \end{aligned}$$

Tamén,

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) &= f^{-1}(U \cap V) \\ &= f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \end{aligned}$$

así que $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ son unión disxunta de X. [1]

Por último, como f é continua (Teorema 4.10), $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ son abertos en X. Logo, $f^{-1}(U) \mid f^{-1}(V)$ é efectivamente unha separación (Definición 5.1) de X, e como X é conexo (Definición 5.2), deducimos que $f^{-1}(U) = \emptyset$ ou $f^{-1}(V) = \emptyset$, o que implica $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$, é dicir, que $f(X)$ é conexo. □

En particular, como os homeomorfismos son continuos e sobrexectivos, se X e Y son homeomorfos, X é conexo se e só se Y é conexo. É dicir,

Corolario 5.9. *A conexión é unha propiedade topolóxica.*

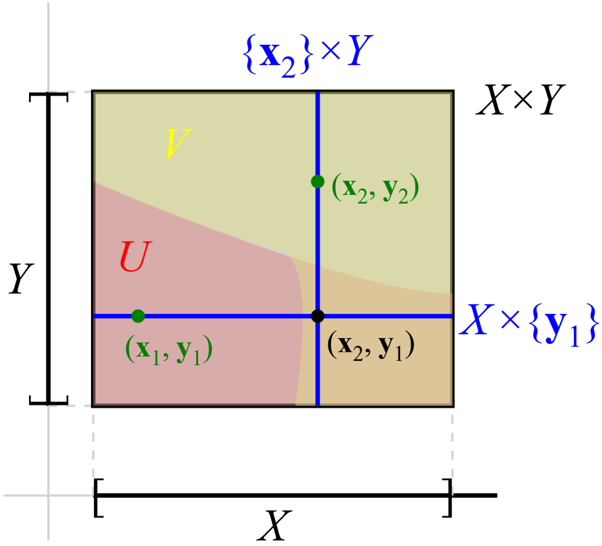
Combinado co resultado anterior, a seguinte proposición permitirá probar que unha ampla gama de conxuntos son conexos.

Proposición 5.10. *Sexan X e Y dous conxuntos conexos. Entón, o seu producto cartesiano $X \times Y$ é conexo.*

Demostración. Pola contra supoñamos que $X \times Y$ non é conexo. Entón existe unha separación (Definición 5.1) non trivial $U \mid V$ de $X \times Y$, é dicir, U e V son abertos en $X \times Y$, $U \cup V = X \times Y$, $U \cap V = \emptyset$ e U, $V \neq 0$. Así, sexan $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \in U$ e $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \in V$.

[1] Sexa $f\colon X \to Y$ unha función. Sexan $A, B \subset Y$. Entón:

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B)$$
$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B)$$



Como X é homeomorfo (Definición 4.26) a $X \times \{\mathbf{y}_1\}$, por se-la conexión unha propiedade topolóxica (Corolario 5.9), deducimos que $X \times \{\mathbf{y}_1\}$ é conexo. Sabemos que

$$U \cap (X \times \{\mathbf{y}_1\}) \mid V \cap (X \times \{\mathbf{y}_1\})$$

é unha separación (Observación 5.4) de $X \times \{\mathbf{y}_1\}$. Como $X \times \{\mathbf{y}_1\}$ é conexo e $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \in U \cap (X \times \{\mathbf{y}_1\})$ teremos que ter entón $U \cap (X \times \{\mathbf{y}_1\}) = X \times \{\mathbf{y}_1\}$ e $V \cap (X \times \{\mathbf{y}_1\}) = \emptyset$, é dicir, $X \times \{\mathbf{y}_1\} \subset U$.

Analogamente, como Y é homeomorfo (Definición 4.26) a $\{\mathbf{x}_2\} \times Y$, deducimos, por se-la conexión unha propiedade topolóxica (Corolario 5.9), que $\{\mathbf{x}_2\} \times Y$ é conexo. Sabemos que

$$U \cap (\{\mathbf{x}_2\} \times Y) \mid V \cap (\{\mathbf{x}_2\} \times Y)$$

é unha separación (Observación 5.4) de $\{\mathbf{x}_2\} \times Y$. Como $\{\mathbf{x}_2\} \times Y$ é conexo, e $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \in V \cap (\{\mathbf{x}_2\} \times Y)$, terá que ser $U \cap (\{\mathbf{x}_2\} \times Y) = \emptyset$ e $V \cap (\{\mathbf{x}_2\} \times Y) = \{\mathbf{x}_2\} \times Y$, é dicir, $\{\mathbf{x}_2\} \times Y \subset V$.

En consecuencia,

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1) &\in (X \times \{\mathbf{y}_1\}) \cap (\{\mathbf{x}_2\} \times Y) \\ &\subset U \cap V = \emptyset,\end{aligned}$$

o que non pode ser. Por tanto, $X \times Y$ é conexo (Definición 5.2). □

Aplicando a asociatividade do producto cartesiano, pode probarse que calquera producto cartesiano finito de conexos é conexo. En particular,

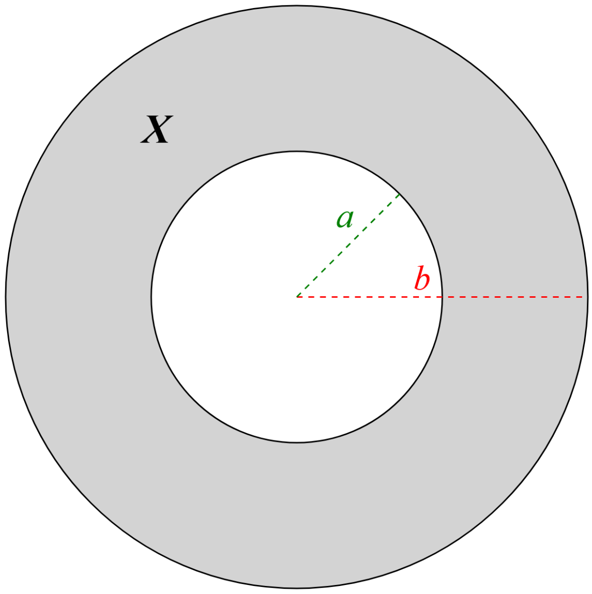
Corolario 5.11. $\mathbb{R}^n$ *é conexo.*

Presentamos agora unha aplicación dos últimos resultados.

Exemplo 5.12. Sexan a, $b \in \mathbb{R}$ con $0 \leq a \leq b$. Entón, un anel circular

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$$

é conexo.



Considerémo-la función $f\colon [a,b]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(r,\theta)=(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$.

Claramenté f é continua, pois as súas compoñentes son composición de funcións continuas (Teorema 4.4). Como os intervalos son conexos (Teorema 5.7), e o producto cartesiano de conexos é conexo (Proposición 5.10), $[a,b]\times[0,2\pi]$ é conexo.

Ademais $f([a,b]\times[0,2\pi])=X$, xa que $\theta\mapsto(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ parametriza unha circunferencia de radio r, e X é unión de circunferencias con radios variando entre a e b. Por ser imaxe continua dun conexo (Teorema 5.8), X é, por tanto, conexo.

Unha técnica útil para probar que un conxunto é conexo é expresalo como unión de conexos con intersección non baleira.

Proposición 5.13. *Sexa $\{X_i\}_{i\in I}$ unha familia de conxuntos conexos tal que $\cap_{i\in I}X_i\neq\emptyset$. Entón, $\cup_{i\in I}X_i$ é conexo.*

Demostración. Sexa $U\mid V$ unha separación (Definición 5.1) de $\cup_{i\in I}X_i$.

Como por hipótese $\cap_{i\in I}X_i\neq\emptyset$, podemos tomar $\mathbf{x}\in\cap_{i\in I}X_i$. Supoñamos por exemplo que $\mathbf{x}\in U$.

Dado $i\in I$, temos que $U\cap X_i\mid V\cap X_i$ é unha separación (Observación 5.4) de X_i, e como X_i é conexo (Definición 5.2), dita separación é trivial. Xa que $\mathbf{x}\in U\cap X_i$, concluímos $V\cap X_i=\emptyset$, é dicir, $X_i\subset U$.

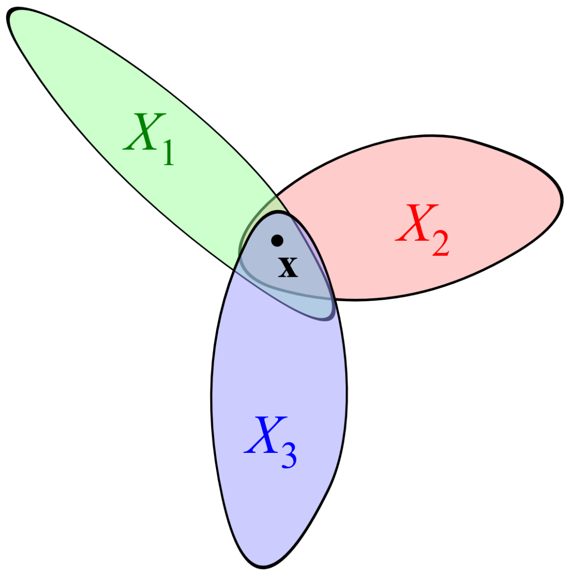
Pero como $i\in I$ foi tomado arbitrariamente, chegamos a que $\cup_{i\in I}X_i\subset U$, o que implica $V=\emptyset$ e por tanto a separación orixinal é trivial, como queriamos ver. □

O último resultado de utilidade que veremos para probar que un conxunto é conexo é

Proposición 5.14. *Sexa X un conxunto conexo. Se $X\subset Y\subset\bar{X}$, entón Y é conexo.*

En particular, a clausura dun conxunto conexo é outro conxunto conexo.

Demostración. Sexa $U\mid V$ unha separación (Definición 5.1) de Y. Entón, $U\cap X\mid V\cap X$ é unha separación de X. Como X é conexo, dita separación é trivial, e por tanto, podemos supoñer, por exemplo, que $U\cap X=\emptyset$, é dicir, $X\subset V$.



Sexa $\mathbf{x} \in U$. Como U é aberto en Y, existe $r > 0$ tal que $B_Y(\mathbf{x}, r) \subset U$. Como $\mathbf{x} \in Y \subset \bar{X}$, temos que $B_Y(\mathbf{x}, r) \cap X \neq \emptyset$. Pero entón, como $B_Y(\mathbf{x}, r) \subset U$ e $X \subset V$, obtemos $U \cap V \neq \emptyset$, contradicción. Por tanto, $U = \emptyset$, de modo que $U \mid V$ é trivial, e en consecuencia Y é conexo (Definición 5.2). □

Finalmente podemos probar unha xeneralización do coñecido teorema de Bolzano.

Teorema 5.15. (dos valores intermedios) *Sexa $X \subset \mathbb{R}^n$ conexo e $f \colon X \to \mathbb{R}$ unha aplicación continua. Sexan $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in X$ e $y \in \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbf{x}_1) < y < f(\mathbf{x}_2)$. Entón, existe $\mathbf{x} \in X$ tal que $f(\mathbf{x}) = y$.*

Demostración. Como a imaxe continua dun conexo é conexo (Teorema 5.8), resulta que $f(X)$ é un conexo de $\mathbb{R}$. Xa que os conexos de $\mathbb{R}$ son os intervalos (Teorema 5.7), $f(\mathbf{x}_1)$, $f(\mathbf{x}_2) \in f(X)$, e $f(\mathbf{x}_1) < y < f(\mathbf{x}_2)$, deducimos que $y \in f(X)$, de onde se deduce o resultado. □

5.2. Conxuntos conexos por camiños

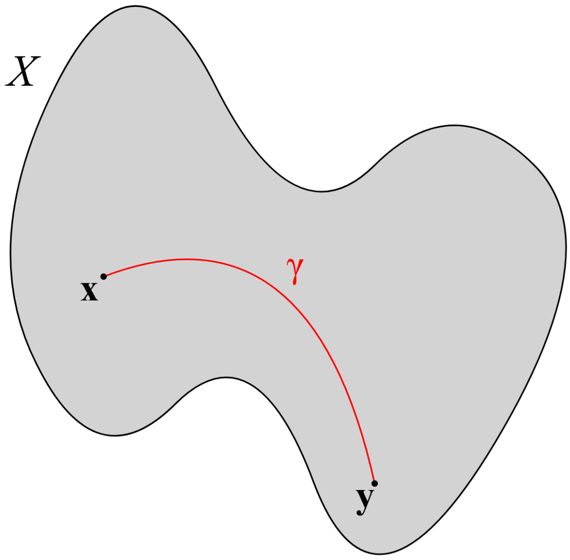
A conexión por camiños é outra propiedade topolóxica que implica a conexión, e que a miúdo é máis sinxela de manexar. Tamén ten un significado un pouco máis intuitivo.

A conexión por camiños podería ter sido introducida antes da conexión para xustifica-la última como unha xeneralización da primeira. Non obstante, os resultados relativos á conexión por camiños dependen esencialmente de ter demostrado previamente que os intervalos son conexos. Por outra banda, o concepto realmente útil é en xeral a conexión, non a conexión por camiños, sendo esta un método útil para probar que un conxunto é conexo.

Empezamos co concepto intuitivo de camiño.

Definición 5.16. Sexa $X \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in X$. Un **camiño en** X unindo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é unha aplicación continua $\gamma \colon [0, 1] \to X$ tal que $\gamma(0) = \mathbf{x}$ e $\gamma(1) = \mathbf{y}$.

En tal caso dise que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ están **conectados por un camiño en** X.



O interés da seguinte proposición non é tanto o seu enunciado, se non a súa demostración, que nos permite ver como se percorren camiños en sentido inverso ou como se concatenan camiños.

Proposición 5.17. *A relación* "estar conectado por un camiño en X" *é de equivalencia.*

Demostración. Dado $\mathbf{x} \in X$, é evidente que $\mathbf{x}$ está conectado con el mesmo por un camiño (Definición 5.16) en $\mathbf{X}$. Basta coller $\gamma\colon [0,1] \to X$ definido como $\gamma(t) = \mathbf{x}$, $t \in [0,1]$.

Supoñamos agora $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in X$, e que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ están conectados por un camiño (Definición 5.16) $\gamma\colon [0,1] \to X$ con $\gamma(0) = \mathbf{x}$ e $\gamma(1) = \mathbf{y}$. Vexamos que entón $\mathbf{y}$ está conectado con $\mathbf{x}$ mediante un camiño en X. Para iso basta toma-lo *camiño inverso* (percorrido en sentido contrario):

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}\colon [0,1] &\to X \\ t &\mapsto \bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t), \end{aligned}$$

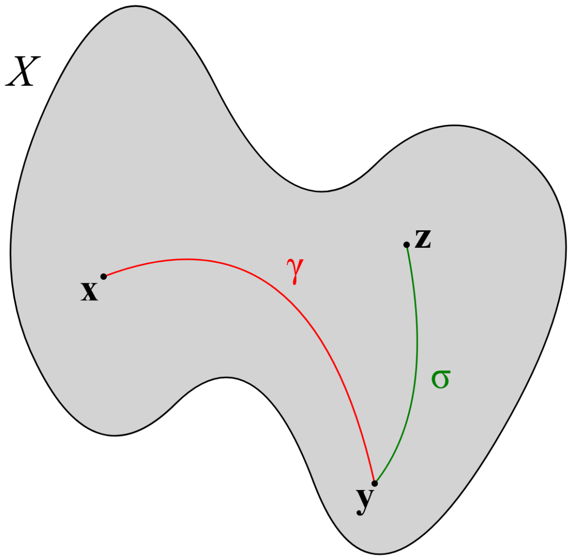
que é continuo por ser composición de aplicacións continuas (Teorema 4.4), a súa imaxe está en X porque coincide coa imaxe de γ, e satisfai $\bar{\gamma}(0) = \gamma(1) = \mathbf{y}$, $\bar{\gamma}(1) = \gamma(0) = \mathbf{x}$.

Finalmente sexa $\gamma\colon [0,1] \to X$ un camiño (Definición 5.16) entre $\mathbf{x} = \gamma(0)$ e $\mathbf{y} = \gamma(1)$, e $\sigma\colon [0,1] \to X$ un camiño (Definición 5.16) entre $\mathbf{y} = \sigma(0)$ e $\mathbf{z} = \sigma(1)$. Vexamos que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{z}$ están conectados por un camiño en X. Para isto basta con *concatena*-los camiños γ e σ mediante

$$\begin{aligned} \gamma * \sigma\colon [0,1] &\to X \\ t &\mapsto (\gamma * \sigma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \sigma(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Nótese que a aplicación está ben definida por $\gamma(1) = \sigma(0)$, e é continua por ser unha función combinada (Proposición 4.17). Finalmente $(\gamma * \sigma) = \gamma(0) = \mathbf{x}$ e $(\gamma * \sigma)(1) = \sigma(1) = \mathbf{z}$. □

Estamos agora en posición de da-la seguinte definición:

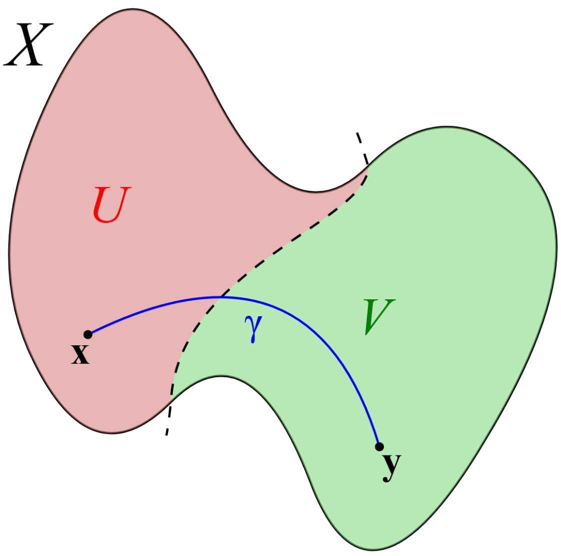


Definición 5.18. Un conxunto $X \subset \mathbb{R}^n$ dise **conexo por camiños** se todo par de puntos de X poden ser unidos por un camiño en X.

A conexión por camiños, ademais de ser un pouco máis intuitiva cá conexión, sirve como método para probar que un conxunto é conexo.

Teorema 5.19. *Se X é conexo por camiños, entón X é conexo.*

Demostración. Supoñamos que X é conexo por camiños e que, pola contra, X non é conexo. Entón existe unha separación (Definición 5.1) $U \mid V$ de X non trivial, é dicir, U e V son abertos non baleiros de X, $X = U \cup V$, e $U \cap V = \emptyset$.



Sexan $\mathbf{x} \in U$ e $\mathbf{y} \in V$. Como X é conexo por camiños (Definición 5.18) existe un camiño (Definición 5.16) $\gamma\colon [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = \mathbf{x}$ e $\gamma(1) = \mathbf{y}$. Vexamos que $\gamma^{-1}(U) \mid \gamma^{-1}(V)$ é unha separación non trivial de $[0,1]$.

Como γ é continua (Teorema 4.10), $\gamma^{-1}(U)$ e $\gamma^{-1}(V)$ son abertos en $[0,1]$. Ademais,

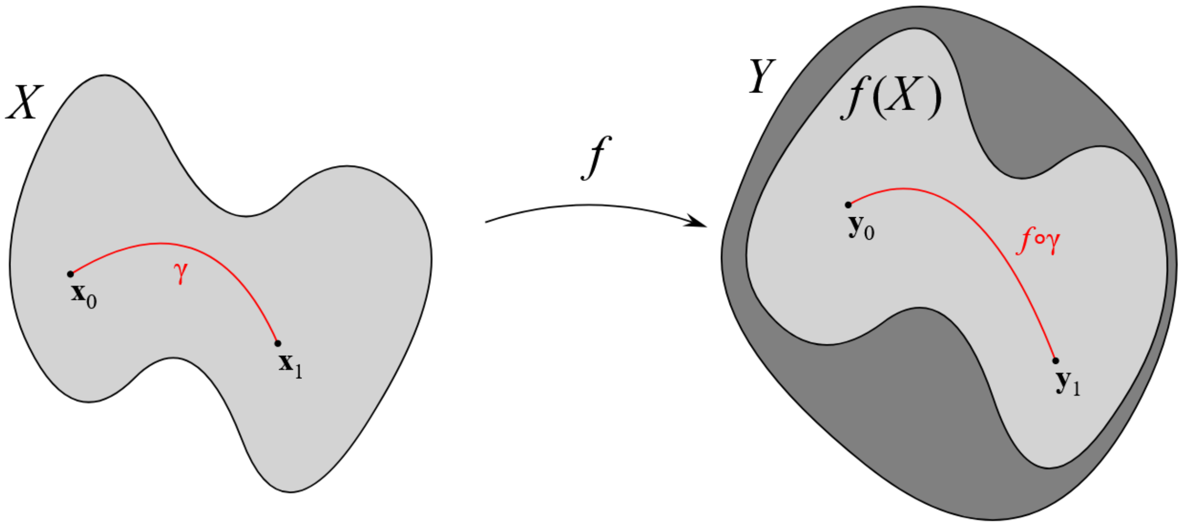
$$\begin{aligned}\gamma^{-1}(U)\cup\gamma^{-1}(V) &= \gamma^{-1}(U\cup V)\\ &= \gamma^{-1}(X) = [0,1]\\ \gamma^{-1}(U)\cap\gamma^{-1}(V) &= \gamma^{-1}(U\cap V)\\ &= \gamma^{-1}(\emptyset) = \emptyset.\end{aligned}$$

Finalmente, $0 \in \gamma^{-1}(U)$ pois $\gamma(0) = \mathbf{x} \in U$ e $1 \in \gamma^{-1}(V)$ pois $\gamma(1) = \mathbf{y} \in V$. Probamos entón que $\gamma^{-1}(U) \mid \gamma^{-1}(V)$ é unha separación non trivial de $[0,1]$ o cal é unha contradicción pois $[0,1]$ é conexo. Por tanto, X é conexo. $\square$

Ó igual que sucede cos conexos, a imaxe continua dun conxunto conexo por camiños é conexo por camiños.

Proposición 5.20. *Sexa $X \subset \mathbb{R}^n$ un subconxunto conexo por camiños e $f\colon X \to Y$ unha aplicación continua. Entón o conxunto imaxe $f(X)$ é conexo por camiños.*

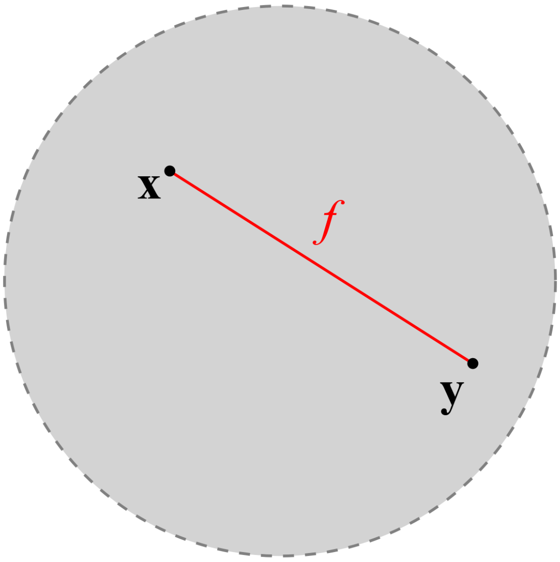
Demostración. Sexan $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}_1 \in f(X)$.



Entón existen $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1 \in X$ tales que $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ e $f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1$. Como X é conexo por camiños (Definición 5.18), existe un camiño (Definición 5.16) $\gamma\colon [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = \mathbf{x}_0$ e $\gamma(1) = \mathbf{x}_1$. Como a composición de aplicacións continuas é continua (Teorema 4.4), $f\circ\gamma\colon [0,1] \to f(X)$ é un camiño unindo $(f\circ\gamma)(0) = f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ e $(f\circ\gamma)(1) = f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1$, que é o que buscabamos. $\square$

Corolario 5.21. *A conexión por camiños é unha propiedade topolóxica.*

Á hora de probar que un conxunto é conexo por camiños, a dificultade non é tanto busca-lo camiño, se non máis ben probar que o camiño está, efectivamente, contido no conxunto. Para facer isto non hai ningunha técnica fixada: simplemente hai que emprega-la definición da aplicación e do conxunto, e utiliza-las técnicas típicas da teoría de conxuntos.



Exemplo 5.22. As bólas de $\mathbb{R}^n$ son conxuntos conexos por camiños.

De feito, probaremos que as bólas son *convexas*, é dicir, que calquera par de puntos dunha bóla poden ser unidos mediante un segmento contido na bóla.

Considerémo-la bóla $B(\mathbf{x}_0, r)$ de $\mathbb{R}^n$. Tomemos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}_0, r)$ arbitrarios. Considerámo-la función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ definida mediante $f(t) = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$. Claramenten f é continua, $f(0) = \mathbf{x}$ e $f(1) = \mathbf{y}$. Temos simplemente que ver que $f([0,1]) \subset B(\mathbf{x}_0, r)$.

Para ver esto último sexa $t \in [0,1]$. Entón, aplicando as propiedades da norma (Proposición 1.4),

$$\begin{aligned} d(f(t), \mathbf{x}_0) &= \|(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| \\ &= \|(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} - (1-t)\mathbf{x}_0 - t\mathbf{x}_0\| \\ &= \|(1-t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)\| \\ &\leq |1-t|\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + |t|\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| \\ &< (1-t)r + tr = r, \end{aligned}$$

co que $f(t) \in B(\mathbf{x}_0, r)$ como queriamos ver.

Para bólas pechadas a demostración sería análoga.

Finalmente, acabámo-lo tema exhibindo un exemplo dun conxunto que é conexo, pero que non é conexo por camiños.

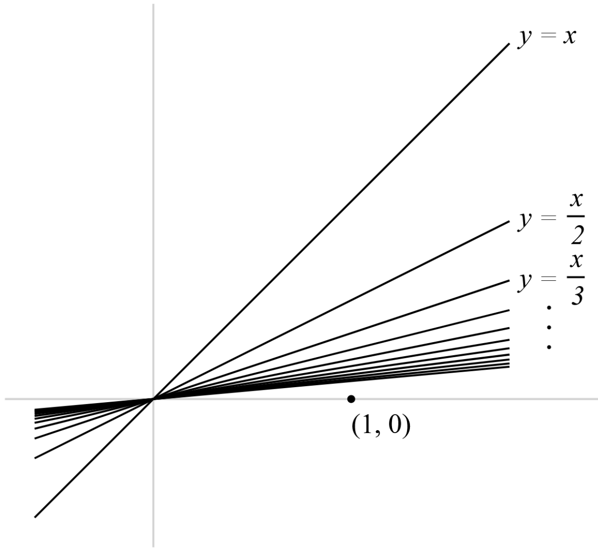
Exemplo 5.23. Non todo conxunto conexo é conexo por camiños. Para ver isto definimos en primeiro lugar

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \left(x, \frac{x}{n} \right) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vexamos primeiro que X é conexo. A aplicación $h\colon \mathbb{R} \to \{(x, x/n) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$, $x \mapsto (x, x/n)$ é claramente un homeomorfismo (Definición 4.26). Como $\mathbb{R}$ é conexo (Teorema 5.7), cada $\{(x, x/n) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ é conexo. Ademais,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \left(x, \frac{x}{n} \right) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \right\} = \{(0,0)\} \neq \emptyset,$$

co que, por ser unión de conexos con intersección non baleira (Proposición 5.13), X é conexo (Definición 5.2).



Sexa agora

$$Y = X \cup \{(1, 0)\}.$$

Como $\{(1, 1/n)\} \to (1, 0)$, pola caracterización secuencial dos puntos clausura (Proposición 3.15), resulta que $(1, 0) \in \bar{X}$. Como $X \subset Y \subset \bar{X}$, resulta que, por ser X conexo e Y estar comprendido entre un conexo e a súa clausura (Proposición 5.14), Y é conexo.

Vexamos finalmente que Y *non é conexo por camiños*.

Pola contra supoñamos que existe un camiño $\gamma\colon [0, 1] \to Y$ con $\gamma(0) = (1, 0)$ e $\gamma(1) = (0, 0)$.

Sexa $t_1 = \sup\{t \in [0, 1] : \gamma(t) = (1, 0)\}$. Entón $\gamma(t_1) = (1, 0)$, pois se $\gamma(t_1) \neq (1, 0)$, por continuidade de γ, existiría $\delta > 0$ tal que $\gamma((t_1 - \delta, t_1 + \delta) \cap [0, 1]) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$ e t_1 non sería supremo.

O conxunto $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ é aberto en $\mathbb{R}^2$ e $\gamma(t_1) \in U$, co que, por continuidade de γ, existe $\delta > 0$ tal que $\gamma([t_1, t_1 + \delta)) \subset U$. Sexa $t_2 = t_1 + \delta/2$.

Ata agora vimos entón que $\gamma([t_1, t_2]) \subset U$, $\gamma(t_1) = (1, 0)$ e $\gamma(t) \neq (1, 0)$ para todo $t \in (t_1, t_2]$.

Consideramos $\gamma_i = \pi_i \circ \gamma$ as compoñentes (Observación 4.6) de γ. Como $\gamma(t) \in U$ para todo $t \in [t_1, t_2]$, por definición de X, temos que para cada $t \in (t_1, t_2]$ existe $n_t \in \mathbb{N}$ de xeito que

$$\gamma(t) = \left(\gamma_1(t), \frac{\gamma_1(t)}{n_t}\right),$$

é dicir $\gamma_2(t) = \gamma_1(t)/n_t$.

Dado que $\gamma_1(t) > 0$ para todo $t \in [t_1, t_2]$, a función

$$\begin{aligned} f\colon [t_1, t_2] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t) = \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)}, \end{aligned}$$

é continua. Agora ben, acabamos de ver que $f(t) = 1/n_t \in \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ para todo $t \in (t_1, t_2]$. Como $(t_1, t_2]$ é conexo por ser un intervalo (Teorema 5.7) e os únicos subconxuntos non baleiros conexos de números racionais son os formados por un único punto (Exemplo 5.5), temos que f ten que ser constante, pois a imaxe continua dun conexo é conexo (Teorema 5.8). Por tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(t) = 1/n$ para todo $t \in (t_1, t_2]$, o cal contradí, por continuidade de f en t_1, que $f(t_1) = 0/1 = 0$.

En consecuencia, Y non é conexo por camiños.

5.3. Problemas resoltos

Problema 5.24. Proba-la veracidade ou falsedade das seguintes afirmacións:

1. $[0, 1]$ é homeomorfo á circunferencia S^1.
2. $[0, 1]$ é homeomorfo á esfera S^2.
3. $S^1 \setminus \{(0, 1)\}$ é homeomorfo a $[0, \infty)$.
4. $\mathbb{R}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.
5. $[0, +\infty)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$.
6. $S^1(1) \setminus \{punto\}$ é homeomorfo a $[a, b)$.
7. $[0, \infty)$ é homeomorfo a $(0, \infty)$.

Solución. Procedemos con cada unha das afirmacións.

1. Falso. Pola contra supoñamos que $f\colon [0, 1] \to S^1$ é un homeomorfismo. Entón, a función $f_{|[0,1]\setminus\{1/2\}}\colon [0, 1] \setminus \{1/2\} \to S^1 \setminus \{f(1/2)\}$ segue sendo un homeomorfismo por se-la restricción dun homeomorfismo coa súa imaxe. Isto é unha contradicción pois o conxunto $[0, 1] \setminus \{1/2\} = [0, 1/2) \cup (1/2, 1]$ non é conexo (por non ser un intervalo), mentres que $S^1 \setminus \{f(1/2)\}$ si é conexo (pois é homeomorfo a $\mathbb{R}$).

2. Falso. Pola contra supoñamos que $f\colon [0, 1] \to S^2$ é un homeomorfismo. Entón, a función $f_{|[0,1]\setminus\{1/2\}}\colon [0, 1] \setminus \{1/2\} \to S^2 \setminus \{f(1/2)\}$ tamén é un homeomorfismo, por ser restricción dun homeomorfismo. Isto é unha contradicción, pois $[0, 1] \setminus \{1/2\}$ non é conexo (por non ser un intervalo), mentres que $S^2 \setminus \{punto\}$ é conexo (por ser homeomorfo a $\mathbb{R}^2$).

3. Falso. A proxección estereográfica dinos que $S^1 \setminus \{(0, 1)\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$, co que bastará con ver que $\mathbb{R}$ e $[0, \infty)$ non son homeomorfos. Supoñamos pola contra que $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é un homeomorfismo. Entón, $f_{|(0,\infty)}\colon (0, \infty) \to \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ seguiría sendo un homeomorfismo, o cal é absurdo pois $(0, \infty)$ é conexo (por ser un intervalo), mentres que $\mathbb{R} \setminus \{punto\}$ non é conexo (pois non é un intervalo).

4. Falso. Pola contra supoñamos que $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é un homeomorfismo. Entón temos que $f_{|\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R} \setminus \{f(0, 0)\}$ tamén é un homeomorfismo. Isto é unha contradicción pois $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ é conexo, mentres que $\mathbb{R} \setminus \{punto\}$ non é conexo xa que non é un intervalo. Por tanto, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$ non son homeomorfos. Por completitude

probamos tamén que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ é conexo por camiños e por tanto conexo. Sexan $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ arbitrarios. Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son linearmente independentes, entón $\gamma\colon t \in [0,1] \mapsto \gamma(t) = (1-t)x + ty \in \mathbb{R}^2$ é un camiño unindo $\mathbf{x}$ con $\mathbf{y}$ contido en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, xa que unha combinación linear non trivial de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ non pode ser $(0,0)$ (nótese que $t = 1-t = 0$ non pode darse). Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son linearmente dependentes, entón tomamos $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ un vector linearmente independente de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ e facemos un camiño entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pasando por $\mathbf{z}$.

5. Falso. Supoñamos que $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ fose un homeomorfismo. Entón, a función $f_{|(0,+\infty)}\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ segue sendo un homeomorfismo por se-la restricción dun homeomorfismo coa imaxe. Isto é absurdo pois $(0,+\infty)$ é conexo (por ser un intervalo), e $\mathbb{R} \setminus \{punto\}$ non é conexo (pois non é un intervalo).

6. Falso. Supoñamos que $f\colon [a,b) \to S^1 \setminus \{punto\}$ é un homeomorfismo. Entón, a función $f_{|(a,b)}\colon (a,b) \to S^1 \setminus \{punto, f(a)\}$ segue sendo un homeomorfismo por se-la restricción dun homeomorfismo coa imaxe. Isto non é posible pois (a,b) é conexo (por ser un intervalo de $\mathbb{R}$), mentres que $S^1 \setminus \{punto, f(a)\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R} \setminus \{punto\}$ (por proxección estereográfica, por exemplo), que non é conexo por non ser un intervalo.

7. Falso. Pola contra supoñamos que $f\colon [0,\infty) \to (0,\infty)$ é un homeomorfismo. Entón, $f_{|(0,\infty)}\colon (0,\infty) \to (0,\infty) \setminus \{f(0)\}$ tamén é un homeomorfismo, por ser restricción dun homeomorfismo. Isto é unha contradicción, pois $(0,\infty)$ é conexo (por ser un intervalo), mentres que $(0,\infty) \setminus \{punto\}$ non é conexo (por non ser un intervalo).

□

Problema 5.25. Estudia-lo carácter conexo do seguinte subconxunto de $\mathbb{R}^2$:

$$E = \Big([-1,1] \times \{0\}\Big) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{\Big(x, \frac{x}{n}\Big) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1\Big\}\right).$$

Solución. Considerámo-la función $f\colon [-1,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida mediante $f(x,t) = (x, tx)$, que claramente é unha función continua.

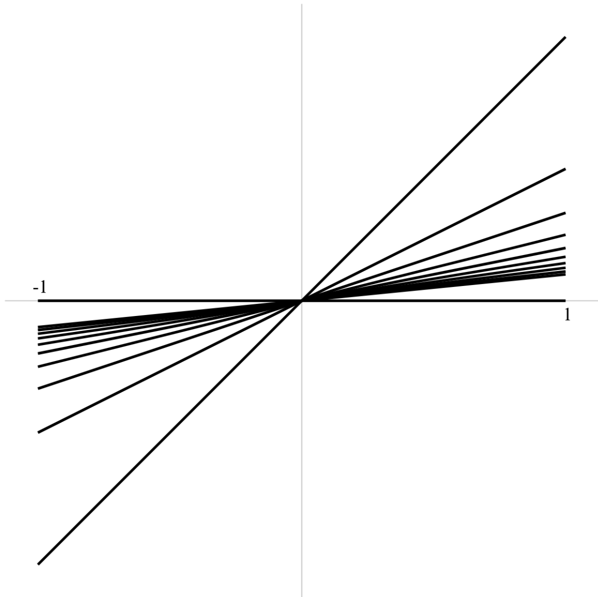
Definimos tamén

$$E_n = \Big\{\Big(x, \frac{x}{n}\Big) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1\Big\},$$

con $n \in \mathbb{N}$, e $E_0 = [-1,1] \times \{0\}$. Temos que $E_n = f([-1,1] \times \{1/n\})$, $n \in \mathbb{N}$. Xa que tanto $[-1,1]$ como $\{1/n\}$ son intervalos xeneralizados, os dous conxuntos son conexos. Como o producto de conexos é conexo, e a imaxe continua dun conexo é conexo, deducimos que cada E_n, con $n \in \mathbb{N}$, é conexo. Ademais, E_0 tamén é conexo por ser producto cartesiano de conexos. Dado que $(0,0) \in \cap_{n=0}^{\infty} E_n$, deducimos que $E = \cup_{n=0}^{\infty} E_n$ é conexo por ser unión de conexos con intersección non baleira. □

Problema 5.26. Sexa $A \subset \mathbb{R}^2$ un conxunto conexo. ¿É a súa fronteira ∂A necesariamente un conxunto conexo?

Solución. Falso. Tomemos por exemplo $A = [0,1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, que é conexo por ser producto cartesiano de dous intervalos xeneralizados. Entón $\partial A = \{0,1\} \times \mathbb{R}$ e este conxunto non é conexo pois $\{0\} \times \mathbb{R} \mid \{1\} \times \mathbb{R}$ é unha separación non trivial de ∂A. □



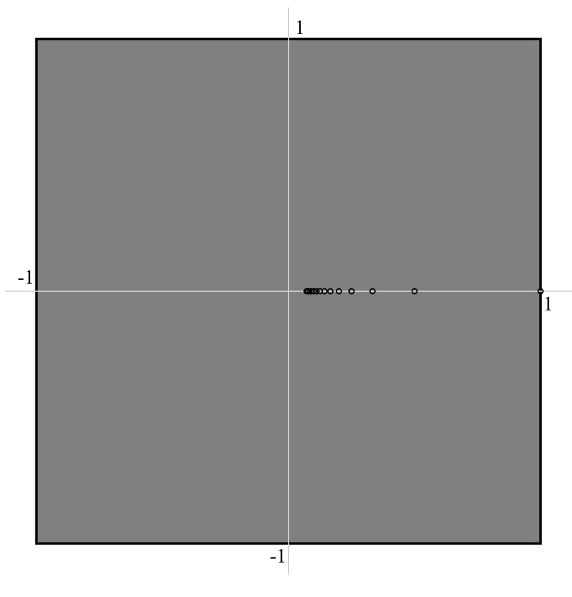
Problema 5.27. Sexa X conexo. ¿Existe unha función continua e sobrexectiva $f\colon X \to \{1,2,3\}$?

Solución. Falso. Como a imaxe continua dun conexo é un conexo, tería que ser $\{1,2,3\}$ conexo, o que non é certo, pois non é un intervalo de $\mathbb{R}$. $\square$

Problema 5.28. Estudia-lo carácter conexo do seguinte subconxunto de $\mathbb{R}^2$:

$$E = ([-1,1] \times [-1,1]) \setminus \{(1/n, 0) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}\}.$$

Solución. Vexamos que E é conexo.



Para iso consideremos $A_+ = [-1,1] \times (0,1]$ e $A_- = [-1,1] \times [-1,0)$. Estes dous conxuntos son conexos por ser producto cartesiano de intervalos. Consideremos tamén

$$B = ([-1,1] \times \{0\}) \setminus \{(1/n,0) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}\}.$$

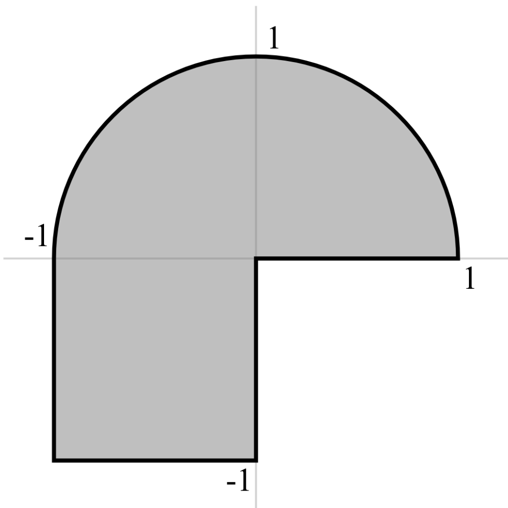
Está claro que os puntos de B pertencen á clausura de A_+ e A_- pois calquera punto $(x,0) \in B$, é límite da sucesión $\{(x, \pm 1/n)\} \subset A_\pm$, respectivamente. Temos pois $A_\pm \subset A_\pm \cup B \subset \overline{A_\pm}$, e como calquera subconxunto contido entre un conexo e a súa clausura é conexo, obtemos que $A_+ \cup B$ e $A_- \cup B$ son conexos. Ademais, $\emptyset \neq B \subset (A_+ \cup B) \cap (A_- \cup B)$, e como $E = (A_+ \cup B) \cup (A_- \cup B)$ é unión de conexos con intersección non baleira, deducimos que E é conexo. □

Problema 5.29. Estudia-lo carácter conexo do seguinte subconxunto de $\mathbb{R}^2$:

$$E = ([-1,0] \times [-1,0)) \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}.$$

Solución. Por comodidade considerémo-lo conxunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}.$$

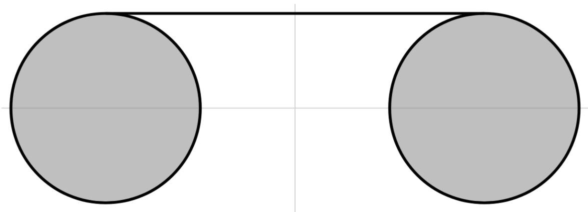


Notemos que $[-1,0] \times \{0\} \subset A$, co que podemos escribir $E = ([-1,0] \times [-1,0]) \cup A$. Con este novo xeito de escribir E, vexamos que E é conexo. En primeiro lugar $[-1,0] \times [-1,0]$ é conexo por ser producto de conexos. A aplicación $f\colon [0,1] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$ é continua. Sabemos que $f([0,1] \times [0,\pi]) = A$ pois $f(r,\theta)$ é un punto nunha circunferencia centrada na orixe de radio r formando un angulo θ co eixo X, e A é a unión das semi-circunferencias superiores de radio r variando entre 0 e 1. Como $[0,1] \times [0,\pi]$ é conexo por ser producto de conexos, deducimos que A é conexo por ser imaxe continua dun conexo. Por outra banda, como $([-1,0] \times [-1,0]) \cap A = [-1,0] \times \{0\} \neq \emptyset$ deducimos que $E = ([-1,0] \times [-1,0]) \cup A$ é conexo por ser unión de conexos con intersección non baleira. □

Problema 5.30. Estudia-lo carácter compacto e conexo do seguinte subconxunto de $\mathbb{R}^2$:

$$E = B[(-2,0),1] \cup B[(2,0),1] \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, y = 1\}.$$

Solución. Considerémo-la aplicación $f\colon [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida mediante a fórmula $f(r,\theta) = r(cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Sabemos que $f([0,1]\times[0,2\pi]) = B[(0,0),1]$ e que f é continua. Como $[0,1]\times[0,2\pi]$ é conexo por ser producto de conexos, deducimos que $B[(0,0),1]$ é conexa. Obviamente unha translación dános un homeomorfismo entre $B[(0,0),1]$ e $B[(-1,0),1]$ (ou $B[(1,0),1]$), co cal $B[(-1,0),1]$ e $B[(1,0),1]$ son tamén conexas.



Por outra banda,

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, y = 1\} = [-2,2] \times \{1\}.$$

Tanto $[-2,2]$ como $\{1\}$ son conexos. Como o producto de conexos é conexo, deducimos que A é conexo.

Vexamos que E é conexo. Como $B[(-1,0),1]$ e $[-2,2]\times\{1\}$ son conexos, e $B[(-1,0),1]\cap([-2,2] \times \{1\}) = \{(-2,1)\}$, entón $C = B[(-1,0),1] \cup ([-2,2] \times \{1\})$ é conexo por ser unión de conexos con intersección non baleira. A continuación, como C e $B[(1,0),1]$ son conexos e $C \cap B[(1,0),1] = \{(2,1)\}$, entón $E = C \cup B[(1,0),1]$ tamén é conexo por ser unión de conexos con intersección non baleira. □

Problema 5.31. Probar que se X, Y son conxuntos conexos por camiños e $X \cap Y \neq \emptyset$, entón $X \cup Y$ é conexo por camiños.

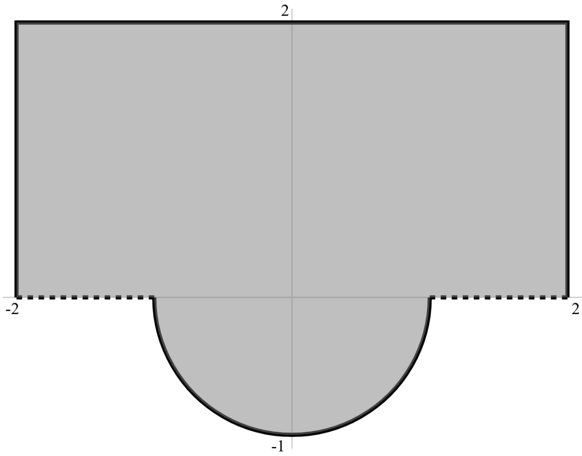
Solución. Sexa $z \in X \cap Y$. Veremos que se pode unir calquera punto de $X \cup Y$ con z, o cal, empregando o feito de que a relación "estar conectado por un camiño" é de equivalencia, chegaría para probar que $X \cup Y$ é conexo por camiños. Sexa pois $p \in X \cup Y$. Logo, $p \in X$ ou $p \in Y$. Se $p \in X$, como X é conexo por camiños, existe unha función continua $\gamma\colon [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = z$. En particular, $\gamma([0,1]) \subset X \subset X \cup Y$, co cal γ define un camiño en $X \cup Y$ unindo p e z. A demostración é análoga cando $p \in Y$. Por tanto, podemos unir calquera punto de $X \cup Y$ con $z \in X \cap Y$, e a demostración está finalizada. □

Problema 5.32. Estudia-lo carácter conexo do seguinte subconxunto de $\mathbb{R}^2$:

$$E = ([-2,2] \times (0,2]) \cup B[(0,0),1].$$

Solución. Vexamos que E é conexo.

En efecto, $[-2,2] \times (0,2]$ é conexo pois o producto cartesiano de conexos é conexo, e os intervalos son conexos. Por outra banda, $B[(0,0),1]$ é un conxunto conexo. Un xeito de ver isto é toma-la función continua $g\colon [0,1] \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $(r,\theta) \mapsto g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$

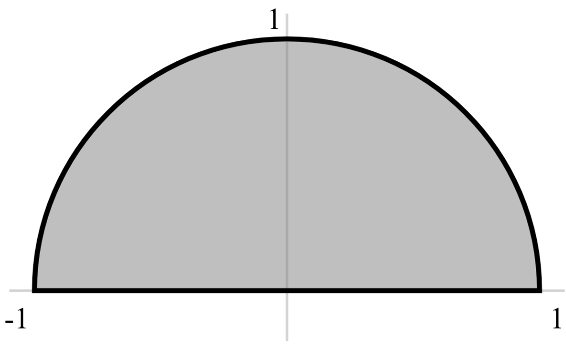


e observar que $B[(0,0),1] = g([0,1] \times [0,2\pi))$; por ser imaxe continua dun conexo (de novo o producto cartesiano de intervalos é conexo), deducimos que $B[(0,0),1]$ é conexo. Finalmente, $(0,1/2) \in ([-2,2] \times (0,2]) \cap B[(0,0),1]$, e como a unión de conexos con intersección non baleira é un conexo, deducimos que E é conexo. $\square$

Problema 5.33. Estudia-lo carácter conexo do seguinte subconxunto de $\mathbb{R}^2$:

$$E = \Big([-1,1] \times [0,1]\Big) \cap B[(0,0),1].$$

Solución. Definímo-la función $f\colon [0,1] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ mediante $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Sabemos que para r fixado, $\theta \mapsto f(r,\theta)$ parametriza un arco de circunferencia de radio r centrada na orixe para ángulos comprendidos entre 0 e π. Dado que E é unión de todos eses arcos para radios comprendidos entre 0 e 1, deducimos que $E = f([0,1] \times [0,\pi])$. Como os intervalos son conexos, e o producto cartesiano de conexos é conexo, deducimos que $[0,1] \times [0,\pi]$ é conexo. Como f é continua, e a imaxe continua de conexos é conexo, concluimos que E é conexo.



Solucións alternativas

No espírito da solución anterior, tamén se podería emprega-la aplicación $f\colon B[(0,0),1] \to \mathbb{R}^2$, definida por $f(x,y) = (x,|y|)$. Como $B[(0,0),1]$ é conexa e $f(B[(0,0),1]) = E$, deducimos que E é conexo.

Para ver que E é conexo tamén se pode facer empregando conexión por camiños. Sexan (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in E$ puntos arbitrarios. Considerámo-lo camiño $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definido por $\gamma(t) = (1-t)(x_0, y_0) + t(x_1, y_1)$. Claramente γ é unha función continua, $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ e $\gamma(1) = (x_1, y_1)$. Temos que ver entón que $\gamma(t) \in E$ para todo $t \in [0,1]$. En primeiro lugar, como (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in B[(0,0), 1]$ e $t > 0$, temos que

$$\begin{aligned} d(\gamma(t), (0,0)) &= \|(1-t)(x_0, y_0) + t(x_1, y_1)\| \\ &\leq (1-t)\|(x_0, y_0)\| + t\|(x_1, y_1)\| \\ &\leq (1-t) + t = 1, \end{aligned}$$

co que $\gamma(t) \in B[(0,0), 1]$ para todo $t \in [0,1]$. Por outra banda, (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in [-1,1] \times [0,1]$ tradúcese en $-1 \leq x_0, x_1 \leq 1$, e $0 \leq y_0, y_1 \leq 1$. Como $0 \leq t, 1-t \leq 1$ deducimos

$$\begin{aligned} -1 &= (1-t)(-1) + t(-1) \\ &\leq (1-t)x_0 + tx_1 \\ &\leq (1-t) \cdot 1 + t \cdot 1 = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (1-t) \cdot 0 + t \cdot 0 \\ &\leq (1-t)y_0 + ty_1 \\ &\leq (1-t) \cdot 1 + t \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Isto proba que $\gamma(t) \in [-1,1] \times [0,1]$ para todo $t \in [0,1]$, e xunto co probado arriba concluimos que $\gamma(t) \in E$, como queriamos demostrar.

Outra posibilidade para demostrar que E é conexo por camiños é emprega-lo feito de que a relación "estar conectado por un camiño contido en E" é unha relación de equivalencia, e probar que podemos unir calquera punto ó $(0,0)$ mediante un camiño contido en E. Para iso, sexa $(x, y) \in E$ un punto arbitrario, e construímo-lo camiño $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definido por $\gamma(t) = t(x, y)$. Entón, é claro que γ é unha función continua e que $\gamma(0) = (0,0)$, $\gamma(1) = (x, y)$. Vexamos pois que $\gamma([0,1]) \subset E$. En efecto, $d(t(x,y), (0,0)) = t\|(x,y)\| \leq t \leq 1$, e como $0 \leq t \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, tamén é certo que $-1 \leq tx \leq 1$, $0 \leq ty \leq 1$, co cal acabamos de probar que $\gamma(t) = t(x,y) \in E$ para todo $t \in [0,1]$. □

Problema 5.34. Decidir se $B((0,0),1) \cup \{(0,1)\}$ é conexo.

Solución. Verdadeiro.

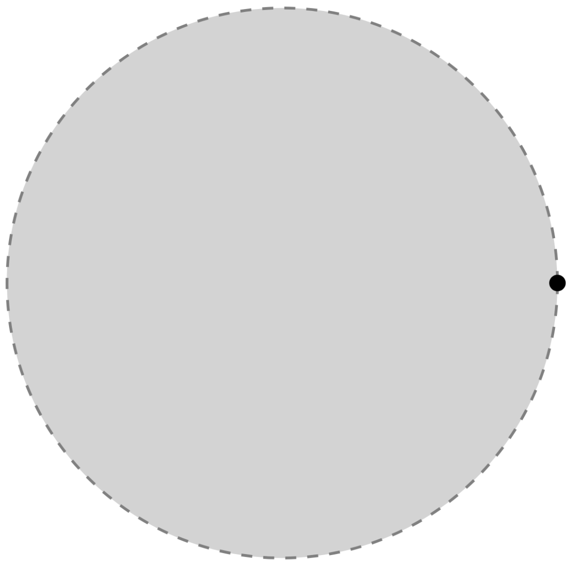
É evidente que, como a clausura dunha bóla aberta é a pechada correspondente (Problema 3.32),

$$\begin{aligned} B((0,0),1) &\subset B((0,0),1) \cup \{(0,1)\} \\ &\subset B[(0,0),1] \\ &= \overline{B((0,0),1)}. \end{aligned}$$

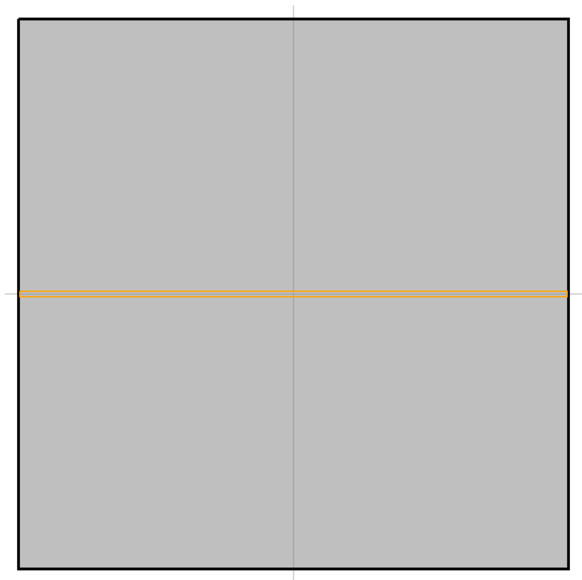
Como $B((0,0),1)$ é un conxunto conexo (por ser homeomorfo a $\mathbb{R}^n$), e $B((0,0),1) \cup \{(0,1)\}$ está contido entre $B((0,0),1)$ e a súa clausura, temos que $B((0,0),1) \cup \{(0,1)\}$ tamén é conexo. □

Problema 5.35. Estudia-lo carácter conexo do seguinte subconxunto de $\mathbb{R}^2$:

$$E = \Big\{[-2,2] \times [-2,2]\Big\} \setminus \Big\{\{0\} \times (-2,2)\Big\}.$$



Solución. Vexamos que E é conexo.



Consideramos

$$A = ([-2,0) \times [-2,2]) \cup \{(0,-2),(0,2)\},$$
$$B = ((0,2] \times [-2,2]) \cup \{(0,-2),(0,2)\}.$$

O conxunto $(-2,0) \times (-2,2)$ é conexo por ser producto de conexos, e a súa clausura é $[-2,0] \times [-2,2]$. Como $(-2,0) \times (-2,2) \subset A \subset [-2,0] \times [-2,2]$, concluímos que A é conexo. De xeito análogo podemos ver tamén que B é conexo. Agora ben, $A \cap B = \{(0,-2),(0,2)\} \neq \emptyset$, co cal $X = A \cup B$ é conexo por ser unión de conexos con intersección non baleira. $\square$

Problema 5.36. Considerémo-lo conxunto

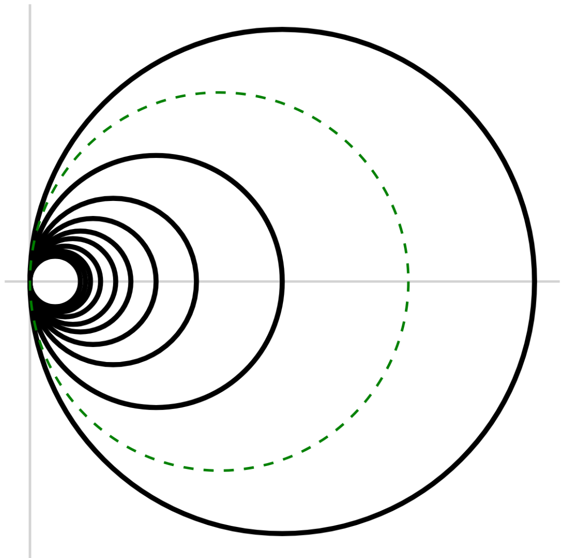
$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\}.$$

Estudia-lo carácter conexo de X e de $X \setminus \{(0,0)\}$.

Solución. Definimos

$$X_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\}.$$

Vexamos que X_n é conexo.



Para iso considerámo-la función

$$\begin{aligned} f_n \colon [0, 2\pi) &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto f_n(t) = \frac{1}{n}(\cos t, \operatorname{sen} t) + \left(0, \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

que é tal que

$$f_n = T_{\left(0,\frac{1}{n}\right)} \circ H_{1/n} \circ f,$$

onde $f \colon [0, 2\pi) \to S^1$, $t \mapsto f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Xa que f parametriza a circunferencia S^1, está claro, por definición de translación e de homotecia, que f_n parametriza unha circunferencia de centro $(0, 1/n)$ e radio $1/n$, é dicir, $X_n = f_n([0, 2\pi))$. Como a imaxe continua dun conexo é conexo (Teorema 5.8), concluímos que X_n é conexo.

Agora ben, $(0,0) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$, co que por ser unión de conexos con intersección non baleira (Proposición 5.13), $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ é conexo.

Vexamos agora que $Y = X \setminus \{(0,0)\}$ non é conexo. Tomemos

$$\begin{aligned} U &= B((3/4, 0), 3/4), \\ V &= \mathbb{R}^2 \setminus B[(3/4, 0), 3/4]. \end{aligned}$$

Vexamos que $U \cap Y \mid V \cap Y$ é unha separación (Definición 5.1) non trivial de Y.

En primeiro lugar, está claro que U e V son abertos en $\mathbb{R}^2$ (por ser unha bóla aberta (Proposición 2.2) e o complementario dunha bóla pechada (Lema 2.9)). Logo, $U \cap Y$ e $V \cap Y$ son abertos en Y pola caracterización de abertos relativos (Proposición 2.17). Ademais, $U \cap V = \emptyset$ co que $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}(U \cap Y) \cup (V \cap Y) &= (U \cup V) \cap Y \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + y^2 \neq \left(\frac{3}{4}\right)^2\right\} \cap Y = Y,\end{aligned}$$

onde a última igualdade se segue de que o sistema

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{3}{4}\right)^2, \\ \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{1}{n}\right)^2,\end{aligned}$$

ten a $x = y = 0$ como única solución. Finalmente, $(1,0) \in U \cap Y$ e $(2,0) \in V \cap Y$, co que, efectivamente, a separación é non trivial (Definición 5.1). □

Problema 5.37. Estudia-lo carácter conexo do conxunto

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq x^2 \text{ ou } x^2 \leq y \leq x\}.$$

Solución. Vexamos que o conxunto X é conexo por camiños (Definición 5.18), o que implicará que é conexo. Como a relación "estar conectado por un camiño en X" é de equivalencia (Proposición 5.17), será suficiente con atopar un camiño en X unindo o punto $(0,0) \in X$ con calquera $(x,y) \in X$.

Definímo-lo camiño

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \gamma(t) &= \begin{cases} 2t(x,x), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ (x, (2-2t)x + (2t-1)y), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Vexamos en primeiro lugar que γ é unha función continua. Como

$$2\frac{1}{2}(x,x) = (x,x) = \left(x, (2 - 2\frac{1}{2})x + (2\frac{1}{2} - 1)y\right),$$

e $\gamma_{|[0,1/2]}$ e $\gamma_{|[1/2,1]}$ son claramente función continuas, o teorema da función combinada para pechados (Proposición 4.17) permítenos concluír que γ é continua.

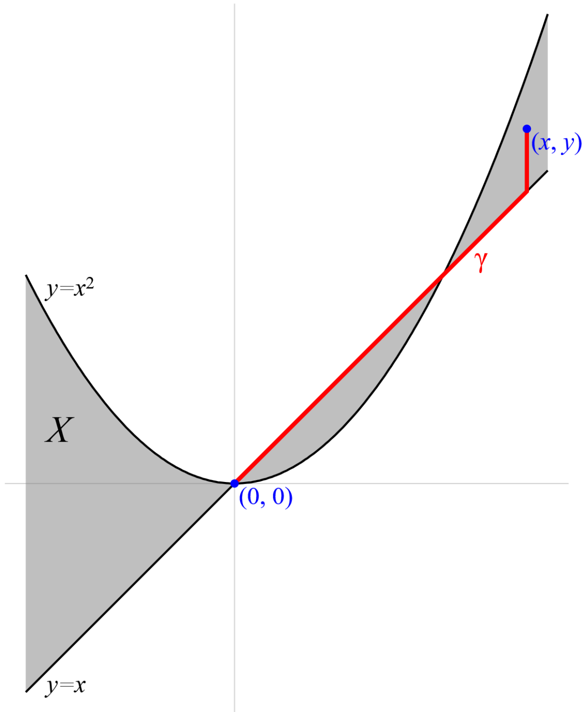
Claramente $\gamma(0) = (0,0)$ e $\gamma(1) = (x,y)$, así que só falta comprobar que $\gamma([0,1]) \subset X$. Distinguimos dous casos.

Se $0 \leq t \leq 1/2$, entón $\gamma_1(t) = 2tx = \gamma_2(t)$, e por tanto é tautolóxico que $\gamma_2(t) \leq \gamma_1(t)^2$ ou $\gamma_1(t)^2 \leq \gamma_2(t)$. Así, $\gamma(t) \in X$ para todo $t \in [0, 1/2]$.

Finalmente sexa $1/2 \leq t \leq 1$ e supoñamos $x \leq y \leq x^2$ (se $x^2 \leq y \leq x$ a demostración é análoga). Temos que $0 \leq 2 - 2t \leq 1$ e $0 \leq 2t - 1 \leq 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) = x &= (2-2t)x + (2t-1)x \\ &\leq (2-2t)x + (2t-1)y = \gamma_2(t) \\ &\leq (2-2t)x^2 + (2t-1)x^2 = x^2 = \gamma_1(t)^2,\end{aligned}$$

co que $\gamma(t) \in X$ para todo $t \in [1/2, 1]$. □



Problema 5.38. Sexan X e Y subconxuntos conexos de $\mathbb{R}^n$ tales que $\bar{X} \cap Y \neq \emptyset$. Probar que $X \cup Y$ é conexo.

Solución. Sexa $\mathbf{z} \in \bar{X} \cap Y$. Logo $X \subset X \cup \{\mathbf{z}\} \subset \bar{X}$, co que $X \cup \{\mathbf{z}\}$ é conexo por estar contido entre un conexo e a súa clausura (Proposición 5.14). Como $\mathbf{z} \in Y$ temos que $(X \cup \{\mathbf{z}\}) \cap Y \neq \emptyset$, e deducimos que $X \cup Y = (X \cup \{\mathbf{z}\}) \cup Y$ é conexo por ser unión de conexos con intersección non baleira (Proposición 5.13). $\square$

Problema 5.39. Estudia-lo carácter conexo do seguinte subconxunto de $\mathbb{R}^2$:

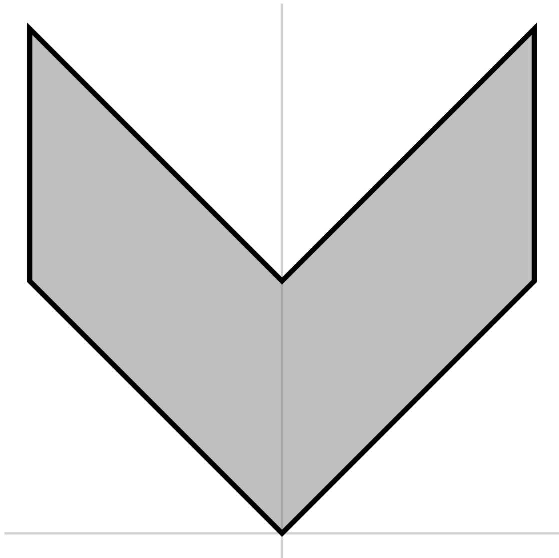
$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ |x| \leq y \leq |x| + 1\Big\}.$$

Solución. Considerémo-la función $f\colon [-1, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x, |x| + y)$. Claramente f é continua. Xa que $[-1, 1]$ e $[0, 1]$ son conexos e o producto cartesiano de conexos é conexo, deducimos que $[-1, 1] \times [0, 1]$ é conexo. Logo, para ver que E é conexo é suficiente con probar que $f([-1, 1] \times [0, 1]) = E$, pois a imaxe continua dun conxunto conexo é conexo.

En efecto, se $(x, y) \in f([-1, 1] \times [0, 1])$ existen $a \in [-1, 1]$ e $b \in [0, 1]$ tales que $x = a$ e $y = |a| + b$; logo $|x| = |a| \leq 1$ e como $0 \leq b \leq 1$ temos $|x| = |a| \leq |a| + b \leq |a| + 1 = |x| + 1$, é dicir, $(x, y) \in E$. Reciprocamente, se $(x, y) \in E$ entón $|x| \leq 1$ e $|x| \leq y \leq |x| + 1$; tomando $b = y - |x|$ temos que $0 \leq b \leq 1$ e que $(x, y) = f(x, b)$ de onde se segue que $(x, y) \in f([-1, 1] \times [0, 1])$, como faltaba por ver.

Solucións alternativas

Probemos que E é conexo por camiños. Para iso é suficiente con unir mediante un camiño o punto $(0, 0) \in E$ con calquera $(x, y) \in E$. Definimos $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mediante $\gamma(t) = t(x, y)$. Claramente γ é unha función continua, $\gamma(0) = (0, 0)$ e $\gamma(1) = (x, y)$.



Vexamos que $\gamma([0,1]) \subset E$. Dado $t \in [0,1]$ temos que $|tx| = t|x| \leq 1$. Ademais, como $|x| \leq y \leq |x|+1$, multiplicando por t obtemos

$$|tx| = t|x| \leq ty \leq t|x| + t \leq |tx| + 1,$$

co que $\gamma(t) \in E$ para todo $t \in [0,1]$. $\square$

Capítulo 6

Compacidade

A compacidade é outra propiedade topolóxica fundamental para determinar se dous conxuntos son homeomorfos ou non. Ademais, a compacidade é un concepto que resulta moi útil, e a partir do cal se poden deducir importantes consecuencias.

O concepto de compacidade foi evolucionando historicamente. Aquí presentaremos a definición de compacidade que se emprega en espacios topolóxicos. Non obstante, probaremos a súa equivalencia, nos espacios euclidianos, con outras máis manexables e que precederon historicamente á aquí presentada.

6.1. Recubrimentos e conxuntos compactos

Ó contrario que con outros conceptos, a compacidade é difícil de xustificar intuitivamente. Pódese pensar por analoxía que a compacidade é unha xeneralización do concepto de conxunto finito desde o punto de vista topolóxico. A definición aquí presentada reflicte isto en certo modo.

Definición 6.1. Sexa $X \subset \mathbb{R}^n$.

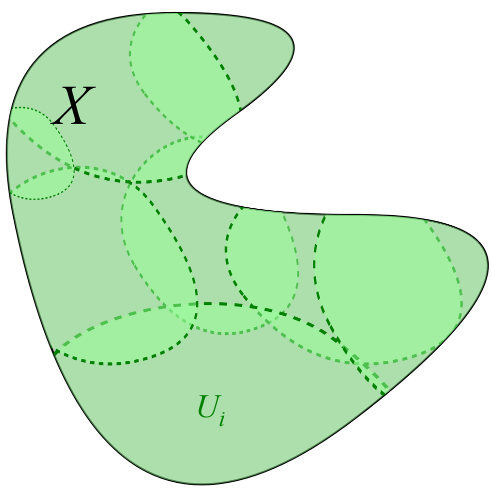


Figura 6.1: Recubrimento aberto

Un **recubrimento aberto** de X é unha familia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de subconxuntos abertos de X de xeito que

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

O recubrimento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ dise **finito** se a familia de índices (ou o número de abertos do recubrimento) é finita.

Se $\mathcal{V} = \{U_j\}_{j\in J}$, con $J \subset I$, é aínda un recubrimento de X, dicimos que $\mathcal{V}$ é un **subrecubrimento** de $\mathcal{U}$.

Agora xa podemos defini-lo concepto de compacidade.

Definición 6.2. Un conxunto $X \subset \mathbb{R}^n$ dise **compacto** se todo recubrimento aberto ten un subrecubrimento finito.

Dito máis explicitamente, X é compacto se e só se para calquera recubrimento aberto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de X existen $i_1, \dots, i_k \in I$ tal que $X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}$.

Observación 6.3. Sexa $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimento aberto de X, e supoñamos $X \subset Y$ (normalmente pensaremos $Y = \mathbb{R}^n$).

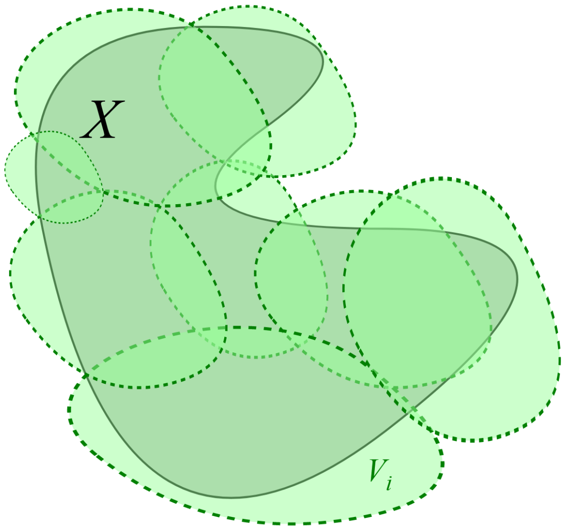


Figura 6.2: Recubrimento por abertos do espacio topolóxico ambiente

Pola caracterización da topoloxía relativa (Proposición 2.17), para cada $i \in I$ existe un aberto V_i en Y tal que $U_i = V_i \cap Y$. Temos por tanto $X \subset \bigcup_{i\in I} V_i$. Informalmente diremos que $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ é un recubrimento de X por abertos de Y.

Reciprocamente, se $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ é un recubrimento de X por abertos de Y, é dicir, se cada V_i é aberto en Y e

$$X \subset \bigcup_{i\in I} V_i,$$

entón, definindo $U_i = V_i \cap X$, $i \in I$, temos que $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ é un recubrimento aberto de X.

Nótese que se $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ é unha familia de abertos en X tal que $X \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, entón $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, xa que $U_i \subset X$ para todo $i \in I$.

Se $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ é un recubrimento de X por abertos de Y e $J \subset I$, entón $\{V_j\}_{j\in J}$ dirase un subrecubrimento de X por abertos de Y se $X \subset \bigcup_{j\in J} V_j$.

Esta equivalencia entre recubrimentos abertos de X e recubrimentos de X por abertos de Y implica o seguinte resultado.

Proposición 6.4. *Sexa $X \subset Y$. Entón X é compacto se e só se todo recubrimento de X por abertos de Y admite un subrecubrimento finito por abertos de Y.*

Como sucedía cos conxuntos conexos, salvo exemplos obvios, é moito máis sinxelo probar que un conxunto non é compacto ca que si que o é.

Exemplo 6.5. Algúns casos nos que se pode decidir facilmente se un conxunto é ou non compacto:

- Todo conxunto finito é compacto. Sexa $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ un conxunto e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimento de X. Como $X = \cup_{i\in I} U_i$, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ existe $i_j \in I$ tal que $\mathbf{x}_j \in U_{i_j}$. Entón $X \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}$, e en consecuencia, $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_k}\}$ é un subrecubrimento finito de $\mathcal{U}$.

- $\mathbb{R}^n$ non é compacto. En efecto, do recubrimento $\{B(\mathbf{0}, n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ non se pode extraer ningún subrecubrimento finito, pois
$$B(\mathbf{0}, n_1) \cup \cdots \cup B(\mathbf{0}, n_k) = B\Big(\mathbf{0}, \text{máx}\{n_1, \dots, n_k\}\Big) \subsetneq \mathbb{R}^n.$$

- $(0, 1)$ non é compacto, xa que do recubrimento $\{(1/n, 1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ non se pode extraer ningún subrecubrimento finito.

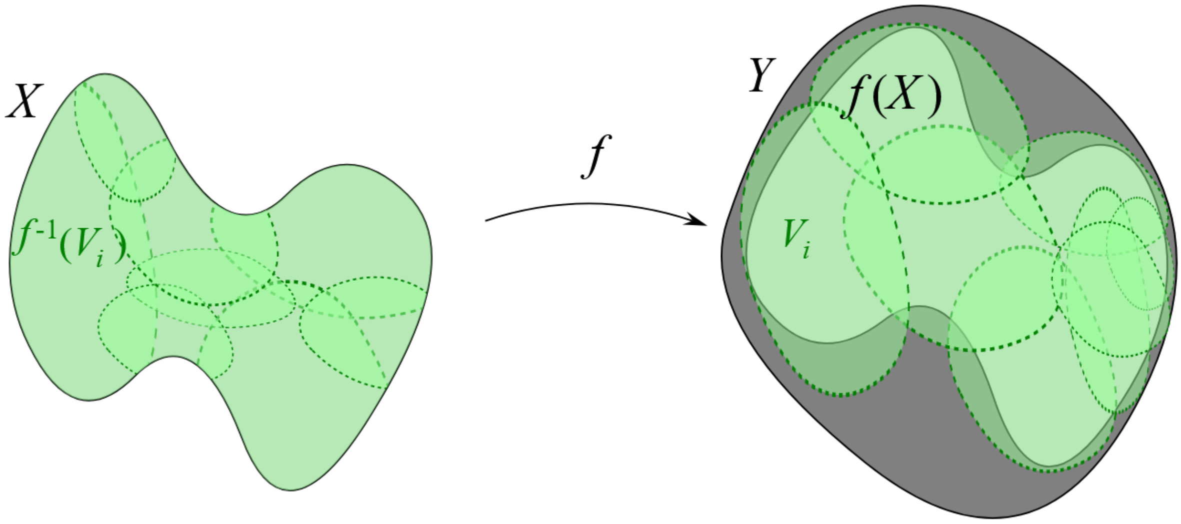
- Sexa $\{\mathbf{x}_k\}$ unha sucesión converxente a $\mathbf{x}_0$. Entón $X = \{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbf{x}_0\}$ é un conxunto compacto. En efecto, sexa $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimento aberto de X. En particular, existe $i_0 \in I$ tal que $\mathbf{x}_0 \in U_{i_0}$. Como $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0$, pola caracterización de converxencia mediante abertos (Proposición 3.3), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_k \in U_{i_0}$ para todo $k \geq N$. Para $k \in \{1, \dots, N-1\}$ tomamos un $i_k \in I$ de xeito que $\mathbf{x}_k \in U_{i_k}$. Así, acabamos de probar que
$$\begin{aligned} X &= \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}\} \cup \{\mathbf{x}_k : k \geq N\} \\ &\subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_{N-1}} \cup U_{i_0}, \end{aligned}$$
co que $\mathcal{U}$ admite un subrecubrimento finito.

A propiedade de ser Hausdorff pode estenderse para compactos tal e como se pide no seguinte

Exercicio 6.6. Sexa $X \subset \mathbb{R}^n$ un conxunto compacto e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus X$. Entón existen abertos U e V de $\mathbb{R}^n$ tal que $X \subset U$, $\mathbf{y} \in V$, e $U \cap V = \emptyset$.

Igual que sucedía cos conxuntos conexos, a imaxe continua dun compacto é un conxunto compacto.

Teorema 6.7. *Sexa $X \subset \mathbb{R}^n$ un conxunto compacto e $f\colon X \to Y$ unha aplicación continua. Entón o conxunto imaxe $f(X)$ é compacto.*



Demostración. Tomemos $\{V_i\}_{i\in I}$ un recubrimento de $f(X)$ por abertos de Y (Observación 6.3), é dicir, cada V_i é aberto en Y e $f(X) \subset \bigcup_{i\in I} V_i$. Temos que ver que $\{V_i\}_{i\in I}$ admite un subrecubrimento finito (Observación 6.3).

En primeiro lugar, vexamos que $\{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ é un recubrimento aberto de X. En efecto, xa que f é continua e V_i é aberto, como a imaxe recíproca dun aberto por unha aplicación continua é aberto (Teorema 4.10), resulta que $f^{-1}(V_i)$ é aberto en X. Ademais,

$$\begin{aligned} X &\subset f^{-1}(f(X)) \\ &\subset f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} V_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i), \end{aligned}$$

de modo que efectivamente $\{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ é un recubrimento aberto (Observación 6.3) de X. Como X é compacto (Definición 6.2), dito recubrimento admite un subrecubrimento finito (Definición 6.1), é dicir, existen índices $i_1, \dots, i_k \in I$ de xeito que $X \subset f^{-1}(V_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{i_k})$. Dedúcese entón que

$$\begin{aligned} f(X) &\subset f(f^{-1}(V_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{i_k})) \\ &= f(f^{-1}(V_{i_1})) \cup \dots \cup f(f^{-1}(V_{i_k})) \\ &\subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k}, \end{aligned}$$

que é o que queriamos probar. □

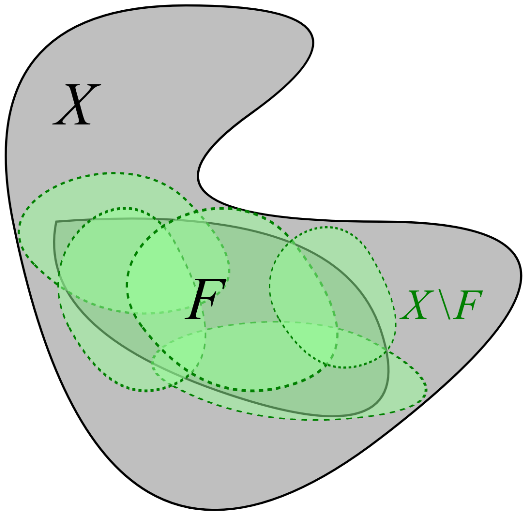
En consecuencia,

Corolario 6.8. *A compacidade é unha propiedade topolóxica.*

Un resultado interesante por si mesmo é o seguinte:

Proposición 6.9. *Se X é compacto e F é pechado en X, entón F é compacto.*

Demostración. Sexa $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimento de F por abertos de X (Observación 6.3).



Como F é pechado (Definición 2.8), $\{U_i\}_{i\in I} \cup \{X \setminus F\}$ é un recubrimento aberto (Definición 6.1) de X. Dado que X é compacto (Definición 6.2), existen $i_1, \dots, i_k \in I$ tales que

$$X \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k} \cup (X \setminus F).$$

(O conxunto $X \setminus F$ non tería por que estar non subrecubrimento, pero non molesta incluílo.)

En consecuencia, $F \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}$, e por tanto, F é compacto (Definición 6.2). □

Para rematar esta sección probaremos un resultado fundamental nas matemáticas que di que toda función continua nun compacto é uniformemente continua.

Teorema 6.10. *Sexa X compacto e $f\colon X \to Y$ unha función continua. Entón f é uniformemente continua.*

Demostración. Vexamos pois que f é uniformemente continua (Definición 4.18). Sexa $\epsilon > 0$ dado.

Dado $\mathbf{x} \in X$ arbitrario, como f é continua en $\mathbf{x}$ (Definición 4.1) existe $\delta_{\mathbf{x}} > 0$ tal que $d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) < \delta_{\mathbf{x}}$ implica $d(f(\mathbf{y}), f(\mathbf{x})) < \epsilon/2$.

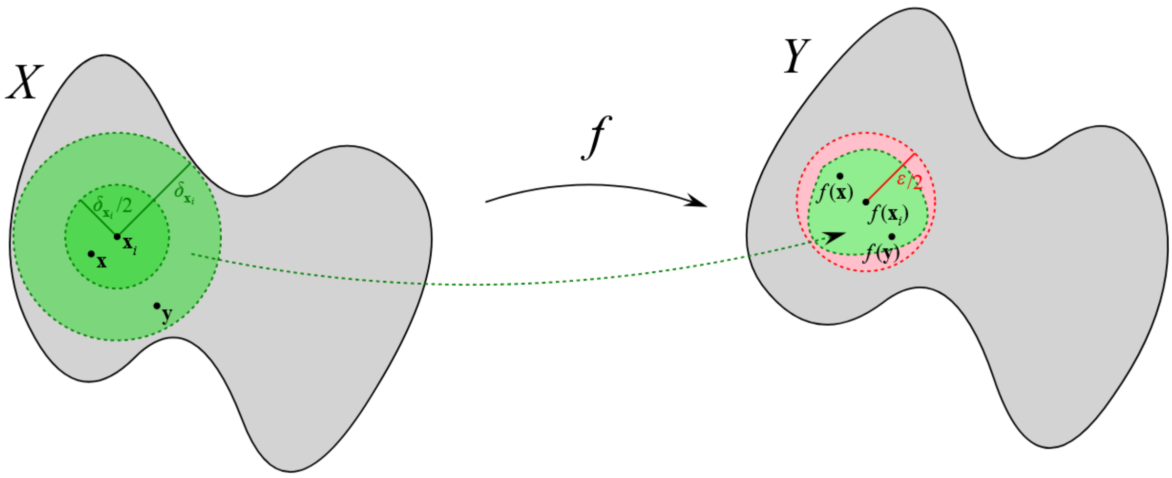
Evidentemente, $\{B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}}/2)\}_{\mathbf{x}\in X}$ é un recubrimento aberto (Definición 6.1) de X. Como X é compacto (Definición 6.2), existen $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in X$ tales que

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{k} B\Big(\mathbf{x}_i, \frac{\delta_{\mathbf{x}_i}}{2}\Big).$$

Definimos $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_{\mathbf{x}_1}, \dots, \delta_{\mathbf{x}_k}\}$. Tomemos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in X$ tales que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$.

En primeiro lugar, existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_i, \delta_{\mathbf{x}_i}/2)$. Ademais, pola desigualdade triangular (Proposición 1.10),

$$\begin{aligned} d(\mathbf{y}, \mathbf{x}_i) &\leq d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \\ &< \delta + \frac{\delta_{\mathbf{x}_i}}{2} \leq \delta_{\mathbf{x}_i}, \end{aligned}$$



o que implica que $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}_i, \delta_{\mathbf{x}_i})$. Por tanto, como $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}_i, \delta_{\mathbf{x}_i})$, empregando de novo a desigualdade triangular (Proposición 1.10),

$$\begin{aligned} d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) &\leq d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}_i)) + d(f(\mathbf{x}_i), f(\mathbf{y})) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

como queriamos ver. □

6.2. O Teorema de Heine-Borel

Aínda que o concepto de compacidade é bastante complicado, resulta que en $\mathbb{R}^n$ existe unha caracterización que é moito máis sinxela. Tal equivalencia será o que se coñece como o Teorema de Heine-Borel. O obxectivo desta sección é proba-lo Teorema de Heine-Borel e extraer algunhas consecuencias.

Comenzamos probando que os intervalos pechados e limitados son compactos.

Proposición 6.11. *O intervalo* $[0,1]$ *é compacto.*

Demostración. Sexa $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimento de $[0,1]$ por abertos de $\mathbb{R}$ (Observación 6.3). Vexamos que podemos extraer deste un subrecubrimento finito.

Definímo-lo conxunto

$$A = \{t \in [0,1] : [0,t] \text{ pode ser recuberto por unha familia finita de } U_i\text{'s}\}.$$

Resulta que $0 \in A$ pois existe $i_0 \in I$ tal que $0 \in U_{i_0}$. Ademais, por definición, A está limitado superiormente por 1. Polo axioma do supremo (Observación 3.29), sexa $x = \sup A \leq 1$. Vexamos que $x = 1 \in A$, o cal concluiría a demostración.

Como $x \in [0,1]$, podemos tomar $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$. Como U_{i_0} é aberto (Definición 2.1) en $\mathbb{R}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset U_{i_0}$. Por definición de supremo (Definición 1.16), existe $t \in A$ con $t > x - \epsilon$, e por definición de A, hai $i_1, \ldots, i_k \in I$ con

$[0,t] \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}$. Entón,

$$\begin{aligned}\left[0, x+\frac{\epsilon}{2}\right] &\subset [0,t] \cup (x-\epsilon, x+\epsilon) \\ &\subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k} \cup U_{i_0}.\end{aligned}$$

Isto quere dicir, en primeiro lugar, que $[0,x]$ está recuberto por un número finito de U_i's, e así $x \in A$. Ademais, $x = 1$, pois se $x < 1$, a ecuación anterior implicaría que x non é supremo (Definición 1.16) de A. Isto finaliza a demostración. □

Como un intervalo da forma $[a,b]$ é homeomorfo a $[0,1]$ (Exemplo 4.29), concluímos

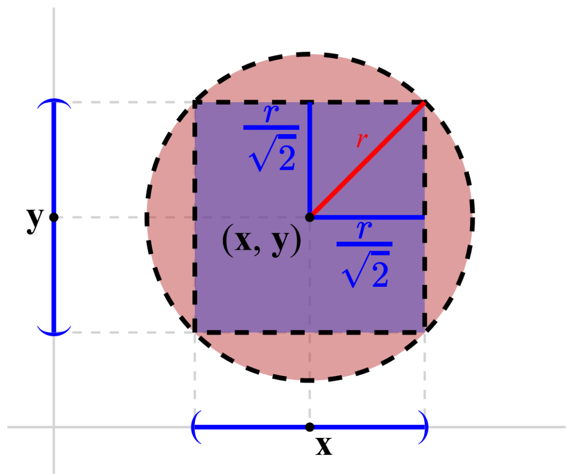
Corolario 6.12. *Todo intervalo da forma $[a,b]$ é compacto.*

O noso seguinte obxectivo é demostrar que o producto cartesiano de compactos é compacto. Para iso necesitamos probar primeiro dous lemas previos. O primeiro destes é elemental, pero inclúese aquí por completitude.

Lema 6.13. *Sexan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Entón,*

$$B_{\mathbb{R}^n}\left(\mathbf{x}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \times B_{\mathbb{R}^m}\left(\mathbf{y}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \subset B_{\mathbb{R}^{n+m}}\Big((\mathbf{x},\mathbf{y}), r\Big).$$

Demostración. Sexan $\mathbf{z} \in B_{\mathbb{R}^n}\left(\mathbf{x}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ e $\mathbf{w} \in B_{\mathbb{R}^m}\left(\mathbf{y}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$.



Entón,

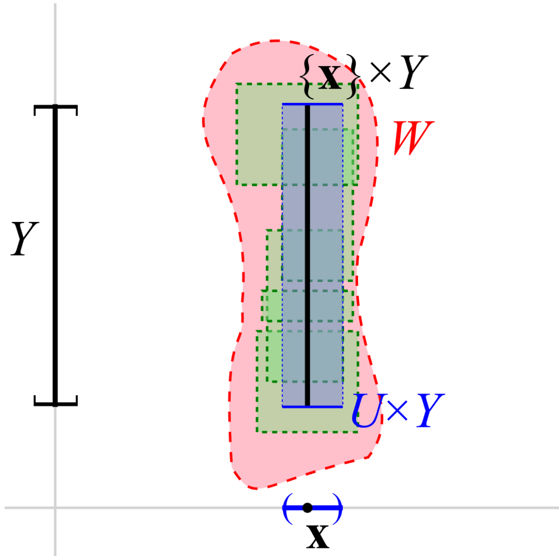
$$\begin{aligned} d((\mathbf{z},\mathbf{w}),(\mathbf{x},\mathbf{y}))^2 &= \sum_{i=1}^{n}(z_i - x_i)^2 + \sum_{j=1}^{m}(w_j - y_j)^2 \\ &= d(\mathbf{z},\mathbf{x})^2 + d(\mathbf{w},\mathbf{y})^2 \\ &< \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = r^2, \end{aligned}$$

como queriamos probar. □

O segundo destes lemas, habitualmente coñecido como o lema do tubo, contén a parte difícil da demostración.

Lema 6.14. *Sexa* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *e sexa* $Y \subset \mathbb{R}^m$ *un conxunto compacto. Sexa* W *aberto de* $\mathbb{R}^{n+m}$ *tal que* $\{\mathbf{x}\} \times Y \subset W$*. Entón, existe* U *aberto en* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $U \times Y \subset W$*.*

Demostración. Sexa $\mathbf{y} \in Y$ arbitrario.



Como $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W$ e W é aberto (Definición 2.1), existe $r > 0$ de xeito que se satisfai $B_{\mathbb{R}^{n+m}}((\mathbf{x}, \mathbf{y}), r) \subset W$. Polo lema anterior (Lema 6.13), existe $U_{\mathbf{y}}$ aberto en $\mathbb{R}^n$ e $V_{\mathbf{y}}$ aberto en $\mathbb{R}^m$ tales que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U_{\mathbf{y}} \times V_{\mathbf{y}} \subset W$. Nótese que $\{U_{\mathbf{y}} \times V_{\mathbf{y}}\}_{\mathbf{y} \in Y}$ é un recubrimento de $\{\mathbf{x}\} \times Y$ por abertos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ (Observación 6.3).

Dado que Y é compacto (Definición 6.2) e que $\{\mathbf{x}\} \times Y$ é homeomorfo (Definición 4.26) a Y, resulta que $\{\mathbf{x}\} \times Y$ é compacto, e por tanto existen $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k \in Y$ tales que

$$\{\mathbf{x}\} \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{k} \left(U_{\mathbf{y}_i} \times V_{\mathbf{y}_i}\right) \subset W.$$

Definimos

$$U = \bigcap_{i=1}^{k} U_{\mathbf{y}_i},$$

que é aberto por ser intersección finita de abertos (Teorema 2.3). Vexamos que $U \times Y \subset W$.

Sexa $(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \in U \times Y$. Como $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{\mathbf{x}\} \times Y \subset \cup_{i=1}^{k} (U_{\mathbf{y}_i} \times V_{\mathbf{y}_i})$, existe $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ tal que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U_{\mathbf{y}_{i_0}} \times V_{\mathbf{y}_{i_0}}$. Así, $\mathbf{z} \in U \subset U_{\mathbf{y}_{i_0}}$ e $\mathbf{y} \in V_{\mathbf{y}_{i_0}}$, e por tanto, $(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \in U_{\mathbf{y}_{i_0}} \times V_{\mathbf{y}_{i_0}} \subset W$, que é o que faltaba por ver. □

Finalmente, podemos probar que o producto cartesiano de compactos é compacto.

Proposición 6.15. *Sexan* X *e* Y *dous conxuntos compactos. Entón, o seu producto cartesiano* $X \times Y$ *é compacto.*

Demostración. Sexa $\{W_i\}_{i\in I}$ un recubrimento aberto (Definición 6.1) de $X \times Y$.

Dado $\mathbf{x} \in X$, como $\{\mathbf{x}\} \times Y$ é compacto (Definición 6.2), resulta que $\{\mathbf{x}\} \times Y$ está contido nunha unión finita de W_i's. Polo lema do tubo (Lema 6.14), existe $U_{\mathbf{x}}$ aberto tal que $U_{\mathbf{x}} \times Y$ está contido nesa unión finita.

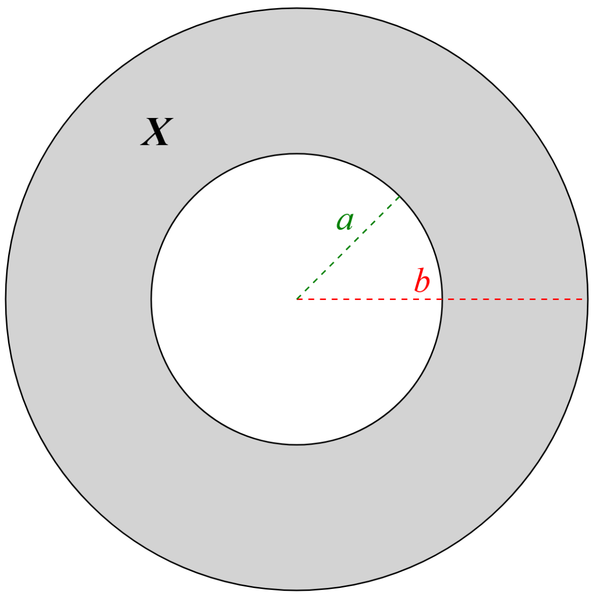
Como X é compacto (Definición 6.2), e pola construcción anterior $\{U_{\mathbf{x}}\}_{\mathbf{x}\in X}$ é un recubrimento aberto (Definición 6.1) de X, existen $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in X$ tales que $X \subset \cup_{i=1}^{k} U_{\mathbf{x}_i}$. Agora ben, cada $U_{\mathbf{x}_i} \times Y$ vimos que está recuberto por unha unión finita de W_i's, o cal significa que $X \times Y \subset \cup_{i=1}^{k}(U_{\mathbf{x}_i} \times Y)$ está recuberto por unha unión finita de W_i's. En consecuencia, $X \times Y$ é compacto (Definición 6.2). □

Ó igual que sucedía coa conexión, este resultado, xunto co que di que a imaxe continua dun compacto é compacto, permitirá proba-la compacidade de moitos conxuntos.

Exemplo 6.16. Sexan a, $b \in \mathbb{R}$ con $0 \le a \le b$. Entón, un anel circular

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2\}$$

é compacto (Definición 6.2).



A demostración é basicamente a mesma cá que vimos para probar que é conexo.

Considerémo-la función $f\colon [a, b] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Claramente f é continua, pois as súas compoñentes son composición de funcións continuas (Teorema 4.4). Como $[a, b]$ é compacto (Proposición 6.11) (por ser homeomorfo a $[0, 1]$), e o producto cartesiano de compactos é compacto (Proposición 6.15), $[a, b] \times [0, 2\pi]$ é compacto. Ademais $f([a, b] \times [0, 2\pi]) = X$. Por ser imaxe continua dun compacto (Teorema 6.7), X é, por tanto, compacto.

Estamos agora en condicións de demostra-lo teorema fundamental deste capítulo.

Teorema 6.17. (Teorema de Heine-Borel) *Sexa $X \subset \mathbb{R}^n$. Equivalen:*

1. *X é compacto.*

2. *Todo subconxunto infinito de X ten un punto de acumulación en X.*

3. *Todo sucesión en X ten unha subsucesión converxente en X.*

4. *X é pechado e limitado.*

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2) Supoñamos que X é compacto (Definición 6.2) e sexa A un subconxunto de X que non ten ningún punto de acumulación (Definición 2.30) en X. Entón, para cada $\mathbf{x} \in X$ existe $r_{\mathbf{x}} > 0$ tal que $\Big(B(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}) \setminus \{\mathbf{x}\}\Big) \cap A = \emptyset$. Claramente, $\{B(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}})\}_{\mathbf{x}\in X}$ é un recubrimento aberto de X. Como X é compacto (Definición 6.2), existen $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in X$ tales que $X \subset \cup_{i=1}^{k} B(\mathbf{x}_i, r_{\mathbf{x}_i})$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} A &= X \cap A \\ &\subset \left(\bigcup_{i=1}^{k} B(\mathbf{x}_i, r_{\mathbf{x}_i})\right) \cap A \\ &\subset \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}, \end{aligned}$$

o que implica que A é finito.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Supoñamos que todo subconxunto infinito de X ten un punto de acumulación (Definición 2.30). Sexa $\{\mathbf{x}_k\}$ unha sucesión en X. Vexamos que $\{\mathbf{x}_k\}$ ten unha subsucesión converxente.

Tomemos $A = \{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\}$. Se A é finito, hai un termo da sucesión que se repite infinitas veces, e ese termo dá lugar a unha subsucesión (Definición 3.11) converxente (Definición 3.2). Supoñamos por tanto que A é infinito. Por hipótese existe $\mathbf{x} \in A'$. Vexamos que $\{\mathbf{x}_k\}$ ten unha subsucesión converxente a $\mathbf{x}$.

Como $(B(\mathbf{x}, 1) \setminus \{\mathbf{x}\}) \cap A \neq \emptyset$, existe $\phi(1) \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_{\phi(1)} \in B(\mathbf{x}, 1)$.

Como $\mathbf{x} \in A'$, pola caracterización dos puntos de acumulación (Proposición 2.31), na bóla $B(\mathbf{x}, 1/2)$ hai infinitos puntos de A. Podemos por tanto tomar $\phi(2) \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(2) > \phi(1)$ e $\mathbf{x}_{\phi(2)} \in B(\mathbf{x}, 1/2)$.

De xeito inductivo, como $\mathbf{x} \in A'$, e pola caracterización dos puntos de acumulación (Proposición 2.31), na bóla $B(\mathbf{x}, 1/k)$ hai infinitos puntos de A. Podemos por tanto atopar $\phi(k) \in \mathbb{N}$ con $\phi(k) > \phi(k-1)$ de xeito que $\mathbf{x}_{\phi(k)} \in B(\mathbf{x}, 1/k)$.

Construímos por tanto unha subsucesión (Definición 3.11) $\{\mathbf{x}_{\phi(k)}\}$ de $\{\mathbf{x}_k\}$ de forma que $d(\mathbf{x}_{\phi(k)}, \mathbf{x}) < 1/k$. Polo lema do sandwich (Lema 3.6), $\{\mathbf{x}_{\phi(k)}\} \to \mathbf{x}$, como queriamos probar.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Supoñemos agora que toda sucesión en X ten unha subsucesión converxente, e vexamos que entón X é pechado (Definición 2.8) e limitado (Definición 1.14) en $\mathbb{R}^n$.

Sexa $\{\mathbf{x}_k\}$ unha sucesión en X tal que $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Por hipótese, existe unha subsucesión $\{\mathbf{x}_{\phi(k)}\}$ tal que $\{\mathbf{x}_{\phi(k)}\} \to \mathbf{y} \in X$. Como toda subsucesión dunha converxente converxe ó mesmo límite cá orixinal (Proposición 3.13), e por unicidade de límite (Proposición 3.4), temos que $\{\mathbf{x}_{\phi(k)}\} \to \mathbf{x} = \mathbf{y} \in X$. Pola caracterización secuencial dos conxuntos pechados (Proposición 3.17), X é pechado (Definición 2.8) en $\mathbb{R}^n$.

Supoñamos agora que X non é limitado (Definición 1.14). Entón, pola caracterización dos conxuntos limitados mediante a norma (Lema 1.15), para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\mathbf{x}_k \in X$ tal que $\|\mathbf{x}_k\| \geq k$. Por hipótese, hai unha subsucesión (Definición 3.11) converxente (Definición 3.2) $\{\mathbf{x}_{\phi(k)}\}$, digamos $\{\mathbf{x}_{\phi(k)}\} \to \mathbf{x} \in X$. Como $\|\mathbf{x}_{\phi(k)}\| \geq \phi(k) \geq k$, a sucesión de números reais $\{\|\mathbf{x}_{\phi(k)}\|\}$ non está limitada e por tanto diverxe (Exercicio 3.10), o cal contradí o feito de que o límite desa subsucesión ten que ser $\|\mathbf{x}\|$ pola continuidade da norma (Exemplo 4.8). Por tanto, X é limitado (Definición 1.14).

(4) $\Longrightarrow$ (1) Finalmente, supoñamos que X é pechado en $\mathbb{R}^n$ e limitado. Como X é limitado (Definición 1.14), existe $R > 0$ tal que

$$\begin{aligned} X &\subset B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{0}, R) \\ &\subset [-R, R] \times \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \times [-R, R]. \end{aligned}$$

Como o $[-R, R]$ é compacto (Proposición 6.11), o producto de compactos é compacto (Proposición 6.15), e un pechado dentro dun compacto é compacto (Proposición 6.9), deducimos que X é compacto (Definición 6.2). □

Exemplo 6.18. O Teorema de Heine-Borel (Teorema 6.17) deixa de ser certo en subconxuntos que non sexan de $\mathbb{R}^n$. Por exemplo, se $X = (0, 2)$ e $Y = (0, 1]$, resulta que Y é limitado e pechado en X (Proposición 2.21), xa que $Y = (-\infty, 1] \cap X$. Non obstante, Y non é compacto, porque como subconxunto de $\mathbb{R}$ non é pechado.

Unha consecuencia relativamente sinxela do Teorema de Heine-Borel é

Proposición 6.19. *Sexa X compacto e $f\colon X \to \mathbb{R}$ unha función continua. Entón f acada o seu máximo e o seu mínimo.*

Demostración. Como f é continua, X é compacto, e a imaxe continua dun compacto é compacto (Teorema 6.7), temos que $f(X)$ é un compacto de $\mathbb{R}$. Polo teorema de Heine-Borel (Teorema 6.17), $f(X)$ é pechado e limitado. Por ser limitado podemos tomar $m = \operatorname{ínf} f(X)$ e $M = \sup f(X)$. É por tanto suficiente con ver que $m, M \in f(X)$.

Agora ben, se por exemplo $m \notin f(X)$, como $f(X)$ é pechado (Definición 2.8) en $\mathbb{R}$, existiría $r > 0$ tal que $(m - r, m + r) \subset \mathbb{R} \setminus f(X)$, o que contradí a definición de ínfimo (Definición 1.16). Por tanto, $m \in f(X)$. Analogamente $M \in f(X)$, o que proba o resultado. □

6.3. Problemas resoltos

Problema 6.20. Estudia-lo carácter compacto do seguinte subconxunto de $\mathbb{R}^2$:

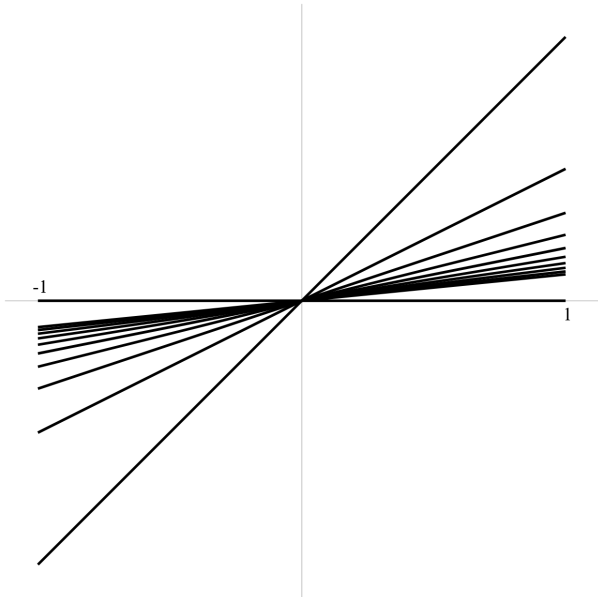
$$E = \Big([-1, 1] \times \{0\}\Big) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{\left(x, \frac{x}{n}\right) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\right\}\right).$$

Solución. Vexamos que E é compacto.

Considerámo-la función $f\colon [-1, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida mediante $f(x, t) = (x, tx)$, que claramente é unha función continua. Está claro que

$$E = f\left([-1, 1] \times \left(\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}\right)\right).$$

Agora ben, $[-1, 1]$ é compacto pois é un intervalo pechado e limitado, mentres que $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ é compacto pois é o conxunto de puntos dunha sucesión converxente xunto co seu límite. Como o producto cartesiano de compactos é compacto, e a imaxe continua dun compacto é compacto, deducimos que E é compacto. □

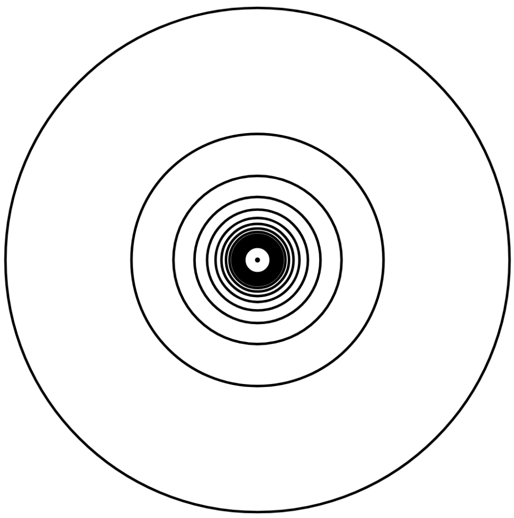


Problema 6.21. Determinar se o conxunto

$$X = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\} \Big) \cup \{(0,0)\}$$

é completo.

Solución. Verdadeiro.



Para velo bastará con probar que é pechado en $\mathbb{R}^2$, xa que un pechado dentro dun completo é completo. Para iso definimos a función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mediante $f(x,y) = x^2+y^2$, que claramente é continua. Ademais, o conxunto $A = \{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ é compacto pois consta dunha sucesión converxente e o seu límite. En particular, polo teorema de

Heine-Borel, é pechado en $\mathbb{R}$. Ademais, $X = f^{-1}(A)$, e por ser imaxe recíproca dun pechado mediante unha función continua deducimos que X é pechado.

Outro xeito de ver que X é pechado é o seguinte. Sexa $g\colon [0,\infty) \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida mediante $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Claramente g é continua e $X = g(A \times [0,2\pi])$, onde A é o conxunto definido anteriormente. Xa que g é continua e $A \times [0,2\pi]$ é compacto por ser producto cartesiano de compactos, deducimos que X é compacto por ser imaxe continua dun compacto. Polo teorema de Heine-Borel deducimos que X é pechado en $\mathbb{R}^2$. □

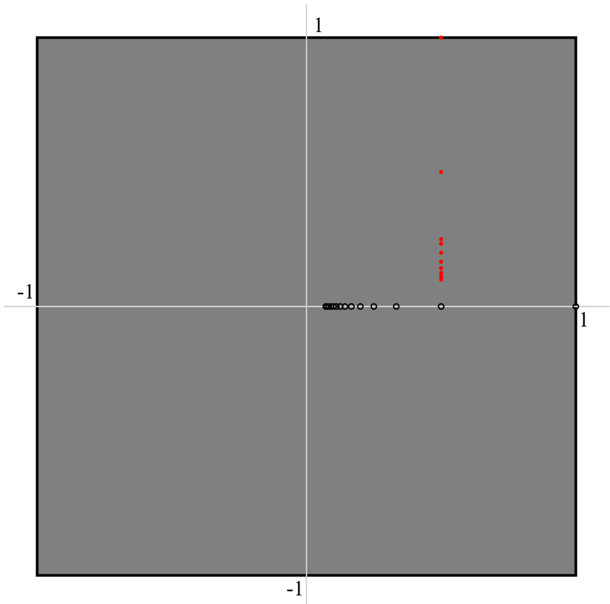
Problema 6.22. Sexa $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ unha función continua e $K \subset \mathbb{R}^2$ un subconxunto compacto. ¿É $g^{-1}(K)$ necesariamente un conxunto compacto?

Solución. Falso. Tomemos por exemplo $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante $g(x,y) = (0,0)$ e $K = \{(0,0)\}$. Obviamente g é continua por ser constante e K é compacto por ser finito. Non obstante $g^{-1}(K) = \mathbb{R}^2$ non é compacto (pois non é limitado). □

Problema 6.23. Estudia-lo carácter compacto do seguinte subconxunto de $\mathbb{R}^2$:

$$E = ([-1,1] \times [-1,1]) \setminus \{(1/n, 0) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}\}.$$

Solución. Vexamos que o conxunto E non é un conxunto compacto (Definición 6.2).



De feito, veremos que E non é pechado.

Consideramos, por poñer un exemplo, a sucesión $\{(1/2, 1/n)\} \subset E$. Esta sucesión converxe ó punto $(1/2, 0) \notin E$. Como o límite dunha sucesión converxente contida no conxunto non está no conxunto, pola caracterización secuencial de conxuntos pechados (Proposición 3.17), resulta que E non é pechado.

En virtude do teorema de Heine-Borel (Teorema 6.17), o conxunto E tampouco pode ser compacto. □

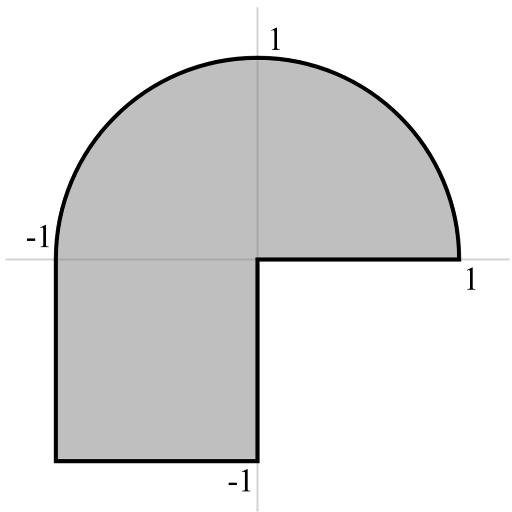
Problema 6.24. Sexa $f\colon X \to Y \subset \mathbb{R}^m$ unha función continua e bixectiva, e $X \subset \mathbb{R}^n$ un conxunto compacto. Probar que f é un homeomorfismo.

Solución. Basta con probar que $f^{-1}\colon Y \to X$ é continua, e para iso chegar con ver que a imaxe recíproca por f^{-1} dun pechado en X é pechado en Y (Teorema 4.10), é dicir, que para cada P subconxunto pechado de X, $f(P) = (f^{-1})^{-1}(P)$ é pechado en Y. Pois ben, se P é pechado en X, como X é compacto, sabemos que P tamén é compacto (por ser un pechado dentro dun compacto (Proposición 6.9)). Como f é continua, $f(P)$ é compacto en $\mathbb{R}^m$ por ser imaxe continua dun compacto (Teorema 6.7). Polo Teorema de Heine-Borel (Teorema 6.17), $f(P)$ é pechado, como queriamos probar. □

Problema 6.25. Estudia-lo carácter compacto do seguinte subconxunto de $\mathbb{R}^2$:

$$E = ([-1,0] \times [-1,0)) \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}.$$

Solución. Vexamos que E é compacto.



Por comodidade considerémo-lo conxunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}.$$

Notemos que $[-1,0] \times \{0\} \subset A$, co que podemos escribir $E = ([-1,0] \times [-1,0]) \cup A$. Con este novo xeito de escribir E, vexamos que E é compacto. En primeiro lugar $[-1,0]\times[-1,0]$ é compacto por ser producto de compactos. A aplicación $f\colon [0,1] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ é continua. Sabemos que $f([0,1] \times [0,\pi]) = A$ pois $f(r,\theta)$ é un punto nunha circunferencia centrada na orixe de radio r formando un angulo θ co eixo X, e A é a unión das semi-circunferencias superiores de radio r variando entre 0 e 1. Como $[0,1] \times [0,\pi]$ é compacto por ser producto de compactos, deducimos que A é compacto por ser imaxe continua dun compacto. Finalmente, como E é unión finita de compactos, deducimos que E é compacto. □

Problema 6.26. Probar que a unión finita de compactos de $\mathbb{R}^n$ é compacto.

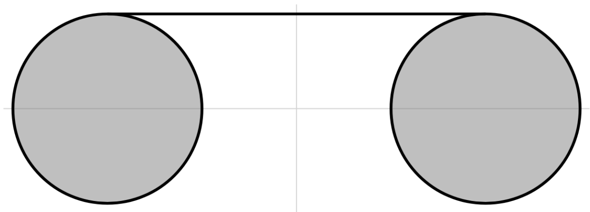
Solución. Sexan $X_1, \dots X_k$ conxuntos compactos. Sexa $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimento aberto de $X_1 \cup \dots \cup X_k$. Para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, $\{U_i\}_{i\in I}$ tamén é un recubrimento aberto de X_j pois os U_i son abertos e $X_j \subset X_1 \cup \dots \cup X_k \subset \cup_{i\in I} U_i$. Como X_j é compacto, X_j está contido nunha unión finita de U_i's. Como a unión finita de unións finitas segue sendo unha unión finita, $X_1 \cup \dots \cup X_k$ está contido nunha unión finita de U_i's e por tanto $X_1 \cup \dots \cup X_k$ é compacto.

Doutro xeito, empregando a caracterización de Heine-Borel, pode argumentarse que como os X_j son compactos, en particular son pechados e limitados. Por outra banda, sabemos que a unión finita de pechados é pechado. Tamén é sinxelo ver que a unión finita de limitados é limitados: en efecto, se $X_j \subset B[\mathbf{0}, r_j]$, entón $X_1 \cup \dots \cup X_k \subset B[\mathbf{0}, r]$ con $r = \text{máx}\{r_1, \dots, r_k\}$. En resumidas contas, $X_1 \cup \dots \cup X_k$ é pechado e limitado, e por tanto, compacto. □

Problema 6.27. Estudia-lo carácter compacto e conexo do seguinte subconxunto de $\mathbb{R}^2$:

$$E = B[(-2,0),1] \cup B[(2,0),1] \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, y = 1\}.$$

Solución. Considerémo-la aplicación $f\colon [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida mediante a fórmula $f(r,\theta) = r(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Sabemos que $f([0,1] \times [0,2\pi]) = B[(0,0),1]$ e que f é continua. Como $[0,1] \times [0,2\pi]$ é compacto por ser producto de compactos, deducimos que $B[(0,0),1]$ é compacta. Obviamente una translación dános un homeomorfismo entre $B[(0,0),1]$ e $B[(-1,0),1]$ (ou $B[(1,0),1]$), co cal $B[(-1,0),1]$ e $B[(1,0),1]$ son tamén compactas.



Por outra banda,

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, y = 1\} = [-2,2] \times \{1\}.$$

Tanto $[-2,2]$ como $\{1\}$ son compactos. Como o producto de compactos é compacto, deducimos que A é compacto.

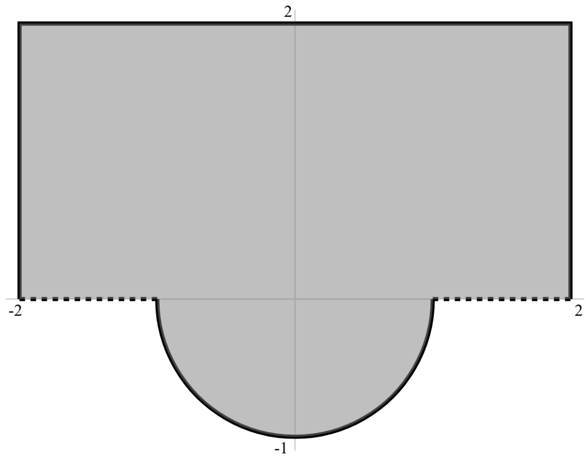
Agora ben, como a unión finita de compactos é compacto, concluímos que E é compacto. □

Problema 6.28. Estudia-lo carácter compacto do seguinte subconxunto de $\mathbb{R}^2$:

$$E = ([-2,2] \times (0,2]) \cup B[(0,0),1].$$

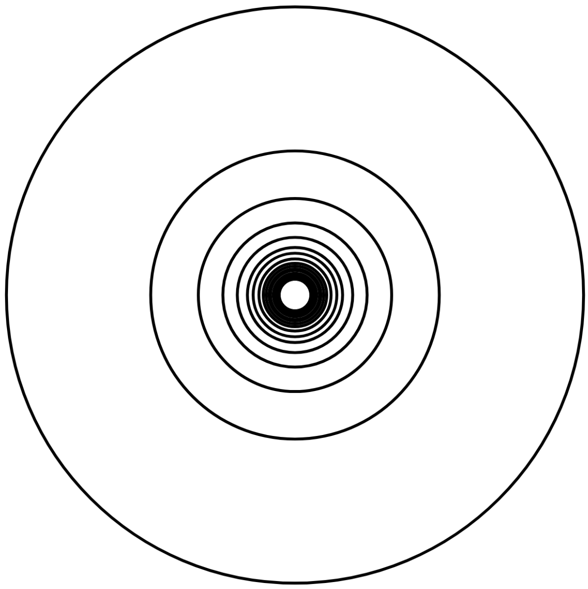
Solución. Vexamos que o conxunto E non é un conxunto compacto.

Para ver que non é pechado basta tomar, por exemplo, a sucesión $\{(2, 1/n\} \subset [-2,2] \times (0,2]$, que está continda en E, pero que ten por límite o punto $(2,0) \notin E$, que non pertence ó conxunto. Como o límite dunha sucesión converxente contida no conxunto non está no conxunto, pola caracterización secuencial de conxuntos pechados (Proposición 3.17), resulta que E non é pechado. En virtude do teorema de Heine-Borel (Teorema 6.17), o conxunto E tampouco pode ser compacto. □



Problema 6.29. Estudia-la compacidade de $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = \frac{1}{n}\right\}$.

Solución. Vexamos que o conxunto X non é un conxunto compacto.



Para ver que non é pechado basta tomar, por exemplo, a sucesión $\{(\sqrt{1/n}, 0)\} \subset X$, que está continda en X, pero que ten por límite o punto $(0,0) \notin X$, que non pertence ó conxunto.

Como o límite dunha sucesión converxente contida no conxunto non está no conxunto, pola caracterización secuencial de conxuntos pechados (Proposición 3.17), resulta que X non é pechado.

En virtude do teorema de Heine-Borel (Teorema 6.17), o conxunto X tampouco pode ser compacto. $\square$

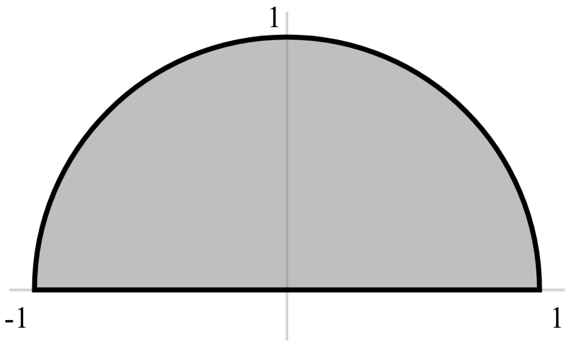
Problema 6.30. Determinar se a aplicación $f\colon [0,2\pi) \to S^1$, $t \mapsto f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ é un homeomorfismo de $[0,2\pi)$ sobre a circunferencia unidade.

Solución. Falso. $[0, 2\pi)$ non é compacto (por non ser pechado), e S^1 é compacto. □

Problema 6.31. Estudia-lo carácter compacto do seguinte subconxunto de $\mathbb{R}^2$:

$$E = \Big([-1, 1] \times [0, 1]\Big) \cap B[(0, 0), 1].$$

Solución. Definímo-la función $f\colon [0, 1] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ mediante $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Sabemos que para r fixado, $\theta \mapsto f(r, \theta)$ parametriza un arco de circunferencia de radio r centrada na orixe para ángulos comprendidos entre 0 e π. Dado que E é unión de todos eses arcos para radios comprendidos entre 0 e 1, deducimos que $E = f([0, 1]\times[0, \pi])$. Como os intervalos pechadoa e limitados son compactos, e o producto cartesiano de compactos é compacto, deducimos que $[0, 1]\times[0, \pi]$ é compacto. Como f é continua e a imaxe continua de compactosé compacto, concluimos que E é compacto.



Solucións alternativas

No espírito da solución anterior, tamén se podería emprega-la aplicación $f\colon B[(0, 0), 1] \to \mathbb{R}^2$, definida por $f(x, y) = (x, |y|)$. Como $B[(0, 0), 1]$ é compacta, e $f(B[(0, 0), 1]) = E$ deducimos que E é compacto.

Para ver que é compacto pódese emprega-lo teorema de Heine-Borel e ver que E é pechado e limitado. Como $[-1, 1] \times [0, 1]$ e $B[(0, 0), 1]$ son pechados e limitados por ser compactos, a súa intersección tamén o é, e por tanto E é pechado e limitado, e por tanto compacto. □

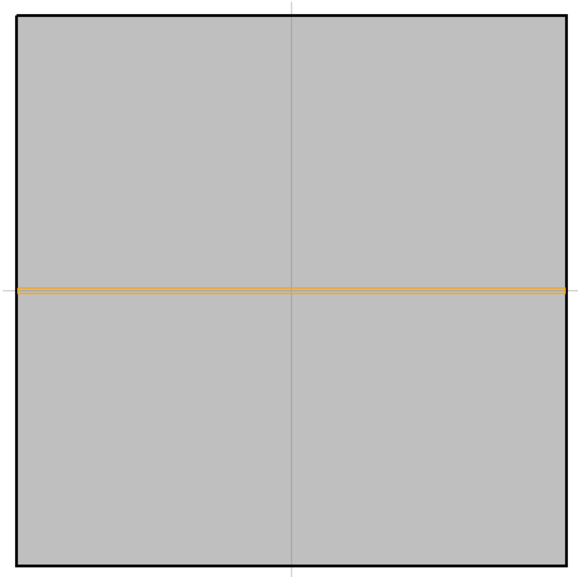
Problema 6.32. Estudia-lo carácter compacto do seguinte subconxunto de $\mathbb{R}^2$:

$$E = \Big\{[-2, 2] \times [-2, 2]\Big\} \setminus \Big\{\{0\} \times (-2, 2)\Big\}.$$

Solución. Vexamos que o conxunto E non é un conxunto compacto.

De feito, veremos que E non é pechado.

Para ver que E non é compacto podemos tomar, por exemplo, a sucesión $\{(\frac{1}{n}, 0)\}$ que está contida en E, pois $-2 \leq \frac{1}{n} \leq 2$ e $\frac{1}{n} \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $-2 \leq 0 \leq 2$. O seu límite é $(0, 0) \notin E$. Como o límite dunha sucesión converxente contida no conxunto non está no conxunto, pola caracterización secuencial de conxuntos pechados (Proposición 3.17), deducimos que E non pode ser pechado, e en consecuencia, polo Teorema de Heine-Borel (Teorema 6.17), tampouco é compacto. □



Problema 6.33. Probar que todo subconxunto non numerable de $\mathbb{R}^n$ ten un punto de acumulación.

Solución. Supoñamos que $X \subset \mathbb{R}^n$ non ten ningún punto de acumulación (Definición 2.30) e vexamos que X é como moito numerable.

Sexa $n \in \mathbb{N}$. Entón $X_n = X \cap B[\mathbf{0}, n]$ non ten ningún punto de acumulación en $B[\mathbf{0}, n]$. Como $B[\mathbf{0}, n]$ é compacto, o teorema de Heine-Borel (Teorema 6.17) implica que X_n é finito. Pero $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ é unión numerable de conxuntos finitos (non disxuntos), e polo tanto o seu cardinal é finito ou numerable. □

Problema 6.34. Estudia-lo carácter compacto do seguinte subconxunto de $\mathbb{R}^2$:

$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ |x| \leq y \leq |x| + 1\Big\}.$$

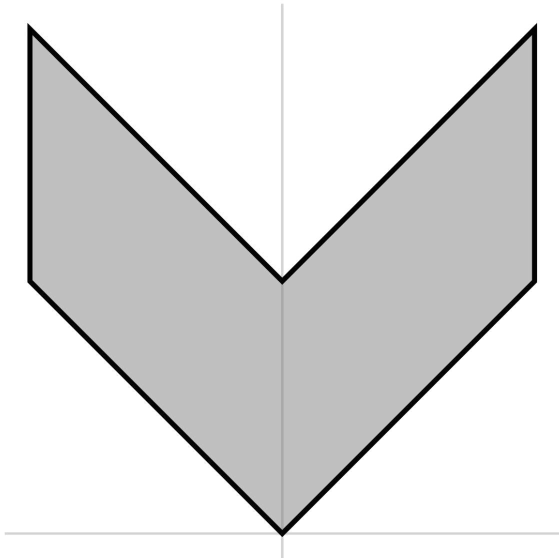
Solución. Considerémo-la función $f\colon [-1, 1]\times[0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definida como $f(x, y) = (x, |x|+y)$. Claramente f é continua. Xa que $[-1, 1]$ e $[0, 1]$ son compactos e o producto cartesiano de compactos é compacto, deducimos que $[-1, 1] \times [0, 1]$ é compacto. Logo, para ver que E é compacto é suficiente con probar que $f([-1, 1] \times [0, 1]) = E$, pois a imaxe continua dun conxunto compacto é compacto.

En efecto, se $(x, y) \in f([-1, 1] \times [0, 1])$ existen $a \in [-1, 1]$ e $b \in [0, 1]$ tales que $x = a$ e $y = |a|+b$; logo $|x| = |a| \leq 1$ e como $0 \leq b \leq 1$ temos $|x| = |a| \leq |a|+b \leq |a|+1 = |x|+1$, é dicir, $(x, y) \in E$. Reciprocamente, se $(x, y) \in E$ entón $|x| \leq 1$ e $|x| \leq y \leq |x| + 1$; tomando $b = y - |x|$ temos que $0 \leq b \leq 1$ e que $(x, y) = f(x, b)$ de onde se segue que $(x, y) \in f([-1, 1] \times [0, 1])$, como faltaba por ver.

Solucións alternativas

Vexamos que E é compacto empregando o teorema de Heine-Borel (Teorema 6.17). Definímo-la función $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante $g(x, y) = y - |x|$. Resulta que

$$\begin{aligned} A &:= g^{-1}([0, 1]) \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y - |x| \leq 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq |x| + 1\} \end{aligned}$$



é pechado por ser imaxe recíproca dun pechado por unha función continua. Ademais,

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1\} \cap A,$$

e como os semiplanos pechados son pechados, e a intersección finita de pechados é pechado, deducimos que E é pechado.

Para ver que E é limitado veremos que $E \subset B[(0,0), \sqrt{5}]$. En efecto, dado $(x, y) \in E$ temos que $|x| \leq 1$, e tamén, $y \leq |x| + 1 \leq 2$ e $-y \leq -|x| \leq 0 \leq 2$; isto implica $|y| \leq 2$, e por tanto, $d((x, y), (0, 0)) = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$, como queriamos ver. $\square$

Bibliografía

[1] X. M. Masa Vázquez, *Curso de topoloxía: dos números reais ao Grupo de Poincaré*. Servizo de Publicacións e Intercambio Científico da USC, USC Editora. Manuais, Santiago de Compostela, 2019.