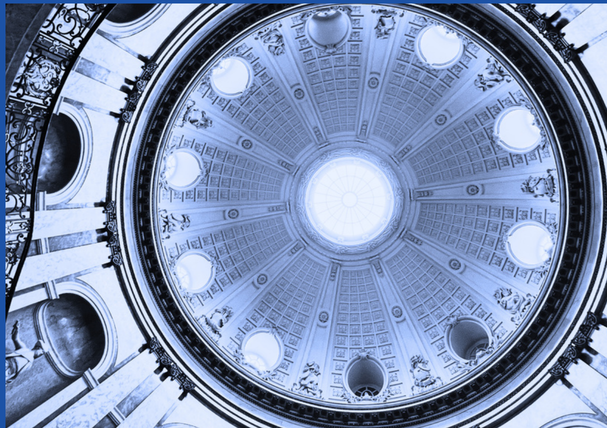
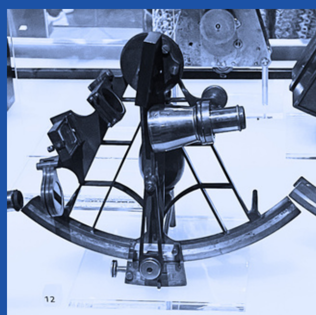
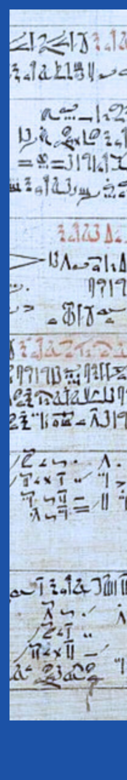
ÁIS MATES

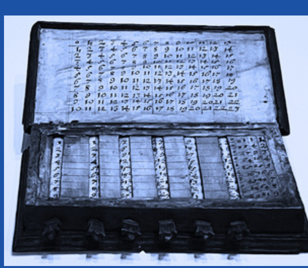
REVISTA ESTUDANTIL • Nº5. MARZO 2024 •

FACULTADE DE MATEMÁTICAS









USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Introdución

Dirección da Revista

Índice

Agradecementos

Queremos agradecer a todas as persoas colaboradoras na revista ata o momento: *Santiago González Gómez, Ignacio Garbayo Fernández, Carlos Cao López, Guillermos Arcos Salgado, Andrea Abad Montero, Francisco Estévez Lengua, Pedro Vidal Villalba, Sementeira, Javier Polo Noche, Ibai Otero Gómez*. En especial ás que fixeron posible que esta cuarta edición seguise adiante.

Dar unha forte aperta ás persoas que nos axudaron coa revisión lingüística da revista: a profesora *Carmen Rodríguez* e o profesor *Rafael Muñoz*.

Queriamos rematar esta introdución, cun verdadeiro recoñecemento ás persoas que nos apoian. Grazas de corazón por lernos, disfrutade desta revista tanto como facemos nós ao facela!

Wasan: Matemáticas no Xapón dos samurais

Santiago González Gómez

Disque os *kami*, os espíritos da relixión tradicional xaponesa, gustan moito dos cabalos. Porén, non todo o mundo se pode permitir ofrendar un cabalo ao seu deus de confianza. Por iso, era antigamente tradición en Xapón colgar nos templos pequenas taboíñas de madeira con imaxes de cabalos como regalo aos *kami*. No século XVII, outro tipo de representacións comezaron a aparecer colgadas nos templos xintoístas, non coma ofrendas, senón como pasatempo: os *sangaku*, problemas matemáticos, comunmente sobre xeometría, pintados a vivas cores, datados e asinados, que presumen da habilidade do autor e retan a calquera que os lea a resolvelos. [1] fai unha boa introdución ao tipo de problemas dos *sangaku*, e constata que algúns deles non son para nada triviais. O interesante é que, durante esta época, Xapón atopábase no medio dun período de 200 anos de total illamento do resto do mundo. Como se desenvolveron entón as matemáticas xaponesas neste período de desconexión das súas curmás occidentais, e como diferiron delas?

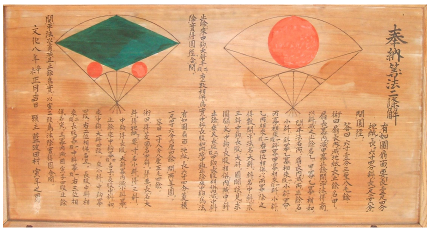


Fig. 1: Sangaku dun templo en Aimoto, prefectura de Sanda.

Camiño ao *sakoku*

Moi probablemente, o coñecemento matemático xaponés foi importado nun primeiro momento de China, unha potencia dominante científica e culturalmente que influíu en Xapón durante séculos. Mentres Europa atravesaba a Idade Media, Xapón adentrábase nunha idade escura na que o coñecemento quedou confinado aos mosteiros budistas, que non prestaron demasiada atención ás matemáticas: disque durante o shogunato Ashikaga (s. XIV-XVI) era tarefa case imposible atopar a un xaponés capaz de dividir.

Cara ao 1600 prodúcese o primeiro grande avance nas Matemáticas xaponesas da man de Mōri Kanbei e o seu discípulo Yoshida Mitsuyoshi (o apelido colócase antes có nome en Xapón). Ambos escribiron sobre o uso do *soroban*, o ábaco xaponés, e popularizárono en todo o país, sentando as bases da aritmética en Xapón e facilitando o traballo dos matemáticos que os sucederon. O traballo destes pioneiros reflíctese na importancia que os matemáticos xaponeses dos séculos seguintes lle deron á computación fronte á teoría, unha visión oposta á que temos actualmente. Un exemplo curioso: cando os *Elementos* de Euclides chegaron por vez primeira a Xapón a través dos chineses, os xaponeses consideraron que o traballo de Euclides non aportaba nada ao coñecemento matemático. Non quere isto dicir que os xaponeses renegasen da idea de demostración ou de argumentación, senón que daban menos importancia ás bases (como as definicións de punto ou recta) e máis a un proceso empírico e ao desenvolvemento de procedementos que considerasen irrefutables. Para un destes matemáticos, unha observación minuciosa que permitise atopar patróns e extrapolalos era xustificación suficiente.

En 1633, o panorama político xaponés mudou por completo. O shogunato Tokugawa, buscando incrementar o seu poder e diminuír o influxo das potencias coloniais europeas sobre Xapón, decretou o *sakoku*: o peche total das fronteiras. Esta medida suporía un illamento internacional que non remataría ata o 1854; neste tempo, ningunha persoa ou libro podía saír ou entrar do país, e o comercio exterior estaba altamente restrinxido. En contra do que poderiamos imaxinar, o *sakoku* non resultou prexudicial para as ciencias e a cultura xaponesa, senón que deu inicio a un renacemento intelectual que tamén afectou ao eido das Matemáticas.

O tempo do *wasan*

Durante o shogunato Togukawa desenvolveuse o *wasan*, que é a palabra que, tralo fin do *sakoku*, se lle deu ás Matemáticas nativas para diferencialas do *yosan*, as estranxeiras. O *wasan* centrouse principalmente no estudo da xeometría plana e de sólidos, e na teoría de ecuacións, especialmente de alto grao, disciplinas que parecen encaixar ben coa filosofía computacionalista dos *wasan'ka* (matemáticos).

A finais do século XVII viviu Seki Takakazu, unha figura capital considerada o Newton das matemáticas xaponesas. Traballou como funcionario para o clan Tokugawa, especializándose en contabilidade, pero chegou a ser mestre de cerimonias do shōgun. Seki modernizou a notación, introducindo nas matemáticas escritas conceptos como as fraccións, que poden ser difíciles de expresar na escritura vertical con *kanji*. En canto á súa obra, Seki publicou moi pouco en vida, pero grazas aos escritos gardados polos seus discípulos, sabemos que estudou en profundidade o que agora coñecemos como teorema chinés dos restos, desenvolveu métodos para a resolución de certas ecuacións de graos tan altos como 1458, descubriu os chamados números de Bernoulli e definiu o determinante anos antes cós europeos (aínda que razoou equivocadamente que a regra de Sarrus funcionaba para orde $n \geq 4$, o cal foi corrixido polos seus sucesores). Aínda que algúns textos modernos defenden que foi en realidade obra dun discípulo seu (Takebe Katahiro, do que falaremos máis adiante), Seki é tradicionalmente considerado o inventor do *enri* ("teoría do círculo"), un método para o cálculo de áreas circulares. O *enri* é similar ao método exhaustivo grego, que consistía en aproximar o círculo por n-ágonos; o *enri*, en cambio, dividía o círculo en rectángulos, achegándoo máis ao noso cálculo integral (sen posuír a noción de infinitesimais, por suposto). Seki conseguiu calcular π con 18 decimais de precisión (aínda que el só deu seguridade dos 11 primeiros); o chamativo é que despois de conseguilo decatouse da necesidade de obter, razoadamente, unha boa aproximación que usar nos seus cálculos. Atopouna en $\frac{355}{113}$.

Fig. 2: Non existe ningún retrato contemporáneo de Seki Takakazu; este aquí recollido é posterior á súa morte.

Seki tivo varios discípulos, como os dous irmáns Takebe, Katahiro e Kataakira, que recompilaron nunha especie de enciclopedia o seu traballo canda o do seu mestre. Entre os dous destaca Katahiro, o menor, que tamén traballou como funcionario para varios shōgun, cartografiando Xapón para un deles. Tamén conseguiu, por exemplo, que o shōgun Tokugawa Yoshimune flexibilizase as leis sobre os libros estranxeiros, despertando en Xapón certo interés pola ciencia europea, e chegou a posuír un telescopio traído dos Países Baixos. Os fitos acadados por Takebe Katahiro son diversos. Conseguiu calcular π con 40 díxitos de precisión empregando un método para acelerar a converxencia dunha sucesión. Este método coñécese actualmente como extrapolación de Richardson, pero os cálculos de Takebe precédeno dous séculos. Takebe tamén deu unha expansión en serie de potencias para calcular a lonxitude s dun arco de circunferencia de diámtero d apoiado nunha corda en función da súa frecha (a altura do arco sobre a corda) k. Os coeficientes que Takebe calculou son basicamente os da serie de Taylor de $\arcsin^2\left(\sqrt{k/d}\right)$, 17 anos antes de que Euler chegase ao mesmo resultado coas Matemáticas occidentais.

Dando paso ao *yosan*

A era dourada do *wasan*, aínda que ligada a un renacemento cultural transversal, veu seguramente impulsada por un interés xeral. As matemáticas eran útiles para o desenvolvemento do comercio, a agricultura ou a arquitectura, ou para tarefas burocráticas como a realización de censos. Por exemplo, Mitsuyoshi escribiu xa antes do *sakoku* un tratado sobre o comercio diario, mentres que xa cara ao 1720 Hosoi Kōtaku comentaba con entusiasmo que, durante a relaxación do control de libros no shogunato de Tokugawa Yoshimune, fora quen de conseguir traducións chinesas de libros occidentais sobre enquisas. Ao goberno tamén lle interesaba a realización de mapas e calendarios de calidade. Con respecto aos calendarios, a súa confección precisaba de coñecementos precisos de astronomía, outra razón de peso para convencer ao shogunato da necesidade de introducir libros estranxeiros.

Porén, a practicalidade non era o único motivo que movía aos *wasan'ka*. Moitos destes matemáticos pertencían á clase aristocrática dos samurai, que buscaba novos pasatempos nunha época menos belicosa. A finais do século XVIII, Fujita Sadasuke escribe: "as matemáticas teñen unha compoñente útil, unha non inmediatamente útil e outra totalmente inútil", e critica os *sangaku* por caer nesta última categoría.

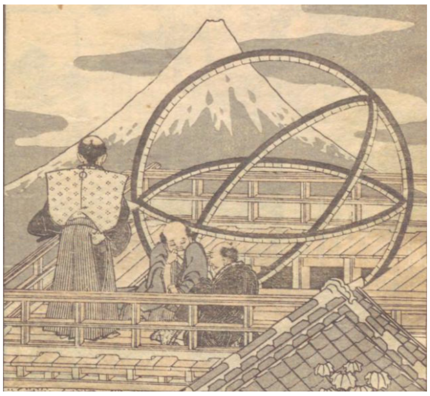


Fig. 3: Observatorio estelar en Asakusa. Gravado de Hokusai.

Co fin do *sakoku*, o chamado período Edo deu paso ao período Meiji, un tempo marcado pola modernización de Xapón e a adopción de tódolos avances internacionais. A introdución das Matemáticas occidentais nas escolas marcou o principio do fin do *wasan*: só se conservou o *soroban* para os cálculos porque non existía nada mellor. Algúns matemáticos xaponeses opuxéronse ao cambio, pero non puideron facer nada contra a tendencia a introducir unhas Matemáticas nas que se baseaban a ciencia e a tecnoloxía modernas. O carácter computacionalista e práctico do *wasan* foi posiblemente o que contribuíu á obtención de tantos resultados sorprendentes en tan pouco tempo, pero a longo prazo non axudou a unha fundamentación que si posuía o *yosan* e contra a que, en última instancia, non puido loitar.

Referencias

[1] Rothman, T., Fukagawa, H. (1998). Japanese temple geometry. *Scientific American*, 278(5), 84-91.

[2] Knobloch, E., Komatsu, H., Liu, D. (editores) (2013). *Seki, Founder of Modern Mathematics in Japan*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 39. Springer, Tokyo.

[3] Ogawa, T. (2001). A Review of the History of Japanese Mathematics. *Revue d'histoire des mathématiques*, 7(1), 137-155.

[4] *Japanese Mathematics in the Edo Period*. National Diet Library. Consultado o 16/3/2024, enlace: `www.ndl.go.jp/math/e/s1/1.html`

[5] *Biographies - MacTutor History of Mathematics* (consultado 10/12/2023), enlace: `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/`.

Matεmáticas grεgθs: Númεrθs e Xεθmεtría

Carlos Cao López

Falar de *mathematos* grega é falar de ciencia e filosofía. Na Antiga Grecia existían varias escolas privadas só abertas para os *polites* (cidadáns). Se a filosofía representa o paso do *mito* ao *logos*, a matemática grega representa o paso da práctica a abstración. Certamente foi usada con fins prácticos antes, basta considerar a orixe da palabra xeometría como *medida da terra*! Este pequeno paso para o cidadán representou un gran paso para a humanidade, pois trouxo consigo conceptos modernos coma "axioma", "teorema" ou "demostración".

A aritmética era ensinada ata os 14 anos, seguida da xeometría e astronomía ata os 18. Patente é a importancia da xeometría no plan de estudos coma acredita a famosa inscrición na entrada da academia de Platón "*que ninguén que non saiba xeometría entre aquí*".

Parece inevitábel pensar nalgunhas figuras coma Pitágoras, Euclides ou Arquímedes. Nembargantes, limitarnos só a estes nomes é limitar moito o noso horizonte. Neste artigo, a través de dúas figuras da matemática grega non tan míticas, adentrarémonos na súa rica cultura e historia, previo paso polos sistemas de numeración.

Numeración

Os gregos tiñan dúas formas de numeración e as dúas datan do `800-500 a. C.`.

Por un lado, na matemática Ateniense, usábanse trazos para os número do 1 ao 4 e para números máis grandes úsaban a primeira letra do nome do número. Por exemplo, Πεντε (*pente*) é cinco é a letra Π denotaba ao 5. Δεκα (*deca*) significaba dez, polo que Δ usabase coma 10. Animamos ao lector a que investigue sobre o significado de Η (*hekaton*), Χ (*khilias*) e Μ (*myrion/myriad*). Coma na numeración romana, combinacións destas letras producían outros números, ΧΗΗΠΙΙ = 1207 (unha pista!).

Por outro lado, na matemática Xónica, usaban o propio alfabeto grego como se pode ver na figura 1, un enfoque que probalemente tomaron do método hierático exipcio. Números máis grandes eran representados empregando un subíndice esquerdo para denotar milleiros ou M cun superíndice para 10000. Por exemplo: 35288 = ,λ,εσπη = M^{λ},εσπη. Neste caso, o ",λ" denota 30000 e ",ε" 5000. Finalmente, colocaba unha barra sobre os números para distinguilos das palabras.

1	α	10	ι	100	ρ
2	β	20	κ	200	σ
3	γ	30	λ	300	τ
4	δ	40	μ	400	υ
5	ε	50	ν	500	ϕ
6	ϛ	60	ξ	600	χ
7	ζ	70	ο	700	ψ
8	η	80	π	800	ω
9	θ	90	ϟ	900	ϡ

Fig. 1: Alfabeto grego e numeración jónica.

Matemáticas pre-euclideas: Tales de Mileto (624 a. C., 546 a. C.).

Considerado un dos pioneiros das matemáticas, sobre a súa figura cóntanse historias sobre como conseguíu desviar o río *Halys* (situado na actual Turquía) para que este fora cruzado polo exército de *Creso* ou, sobre como caeu nun pozo mentres estudaba as estrelas pola súa falta de atención ás cousas materiales.

O seu resultado máis famoso, coñecido como o Primeiro Teorema de Tales, establece que se nun triángulo se traza unha línea paralela a calquera dos seus lados, obténse un triángulo semellante ao triángulo orixinal. Non tan coñecida foi a orixinal aplicación que o mismo Tales déulle ao resultado. Usando o método de comparación de sombras, o milesio percatouse de que podería medir as pirámides exipcias se medía a sombra destas no momento en que fora do tamaño do seu corpo.

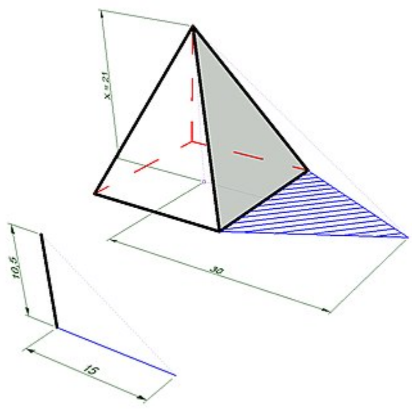


Fig. 2: Método das sombras.

MATEMÁTICAS POST-EUCLIDEAS. PAPPUS DE ALEXANDRÍA (C. 290 – C. 350).

Adentrámonos xa no último dos matemáticos dos que imos falar neste artigo. Considerado un dos últimos grandes matemáticos da Antigüidade, os seus datos bibliográficos resultan moi escasos. A pesares disto e, grazas a *Zeus*, a súa obra principal *Synagoge* (Colección) foi conservada en bastante bó estado. Esta contén unha relación ordenada e sistemática dos resultados obtidos polos seus predecesores así coma notas explicativas sobre os mesmos en ata 8 libros (aínda que o primeiro deles perdéuse).

Un dos resultados máis interesantes que podemos atribuírlle é o denominado *Teorema do hexágono de Pappus*, o cal, de maneira informal, resolve á cuestión de plantar 9 carballos de modo que formen 10 filas, cada unha formada por 3 árbores. Dito doutra forma, o teorema establece que se temos tres puntos A, B, C situados en calquer lugar dunha recta e outros tres puntos a, b, c noutra recta distinta, temos garantido que as interseccións X, Y, Z dos lados opostos dun hexágono cruzado A, a, B, b, C, c estén alineados.

Este resultado supón un acontecemento importate na historia da xeometría pois, en palabras de Max Dehn: "*aquí atopamos un resultado establecido desde a teoría ordinaria de medidas, pero liberado de todos os elementos de medida*". A demostración da existencia da figura mediante o uso de incidencias de líneas e puntos é considerado por algúns como a primeira configuración da **xeometría proxectiva**.

Poderiades pensar como exercicio se podemos quitar algunha condición, para se formen das 10 liñas. Debuxadas hai 9, logo falta unha, cal é?

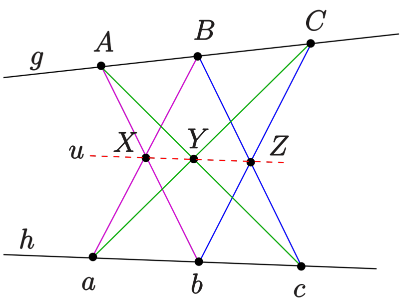


Fig. 3: Teorema do hexágono de Pappus.

REFERENCIAS

[1] *Lectures on History of Mathematics* (Spring '23), Neil Donaldson, enlace: https://www.math.uci.edu/ ndonalds/math184/greece.pdf

[2] *A history of Greek mathematics*, Thomas Heat, enlace: https://www.wilbourhall.org/pdfs/heath/HeathVolI.pdf

Unha historia da distribución Normal

Ignacio Garbayo Fernández

A función descrita pola expresión

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

é ben coñecida por todos. Presentada en primeira instancia por De Moivre, a superficie da campana é moi frecuentemente utilizada en toda clase de estudos estatísticos. Neste artigo, damos pequenas pinceladas sobre o seu descubrimento (ou invención). Para iso, basearémonos no contido de [1].

Como chegamos á expresión

Unha das aproximacións clásicas ao estudo da Teoría da Probabilidade e a repetición independente dun experimento que pode tomar dos resultados: éxito ou fracaso. É coñecido que, se realizamos esta proba n veces sen afectarse unhas execucións con outras, e consideramos que a probabilidade de ocurrencia do éxito é p, aparece a función de masa de probabilidade da distribución Binomial, que representa a probabilidade de que se dean i éxitos nun total de n repeticións:

$$\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

Un experimento que cumpre as condicións antes descritas é coñecido como experimento de Bernoulli, e a súa xeralización é o que resulta na distribución Binomial.

A probabilidade p da fórmula anterior é doada de aproximar mediante a lei de Laplace, que establece que a probabilidade de ocurrencia dun suceso X vén dada pola expresión

$$\frac{\text{\# casos favorables a } X}{\text{\# casos totales}}.$$

Por exemplo, se traballamos cunha baralla de cartas e X é «sae un 12», a probabilidade de que suceda X será $4/40 = 1/10$, pois a baralla española conta con 4 reis (un por cada pau).

O desenvolvemento

A suma da masa Binomial exposta na sección anterior presenta unha elevada complexidade de cálculo, ademais de crecer linearmente en termos coa cantidade dos datos. Para intentar atopar unha expresión que a aproxime, De Moivre comeza en 1721 a facer pequenos avances, probando 12 anos máis tarde as igualdades seguintes:

$$\binom{n}{n/2+d}\left(\frac{1}{2}\right)^n \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} e^{-2d^2/n},$$

$$\sum_{|x-n/2|\le d} \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^n \approx \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{d/\sqrt{n}} e^{-2y^2}\,dy.$$

Estes descubrimentos comezan a suxerir que a distribución das probabilidades dunha distribución Binomial (que recordemos, non é máis que varios experimentos de Bernoulli) de parámetros n e p pódese aproximar mediante unha curva exponencial. Este descubrimento de De Moivre resulta na coñecida **aproximación da Binomial á Normal**, estudada nas tres materias de Estatística do Grao, e que se pode enunciar como o seguinte.

Proposición 1 *Dada unha Binomial de parámetros n e p, as súas probabilidades acumuladas pódense aproximar por unha integral (a través dunha función de densidade) do seguinte xeito:*

$$\sum_{k=0}^{i} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \varphi\left(\frac{i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

onde:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\,dx$$

é a función de densidade dunha distribución Normal Estándar (de media nula e varianza unidade).

Este feito móstrase na seguinte Figura:

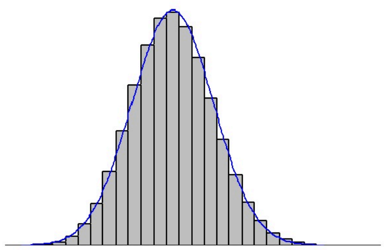


Fig. 1: Unha aproximación da Binomial á Normal

A integral anterior, que representa a fórmula para a función de densidade da distribución Normal pódese evaluar dunha forma sinxela mediante métodos numéricos e adoita ser recollida en táboas para un uso máis doado.

Un novo uso: a modelización de erros

A astronomía foi unha das primeiras ciencias nas que se comenzaron a rexistrar medicións de erros cometidos, pois a exactitude nos cálculos era para os practicantes desta displina moi relevante. Baseándose nestes problemas, Laplace propón en 1774 unha das primeiras **curvas de erro**. Denotando esta función por ϕ, establece que debe ser simétrica e monótona decrecente para valores positivos da variable.

Deu, ademais, outro argumento. Aparte das duas propiedades anteriores, non coñecemos nada de $\phi(x)$ nin de $\phi'(x)$. Polo tanto, seguindo a filosofía da navalla de Ockham, han de ser proporcionais. En concreto, el propon que «como non temos razón de supor unha diferente lei para as ordenadas que para as súas diferencias, disto se segue que, debemos, suxeitos ás regras da probabilidade, supor o cociente de dúas diferencias consecutivas infinitamente pequenas ser igual a aquelas das correspondentes ordenadas». Deste modo, temos:

$$\frac{d\phi(x+dx)}{d\phi(x)} = \frac{\phi(x+dx)}{\phi(x)} \Rightarrow \frac{d\phi(x)}{dx} = -m\phi(x),$$

onde m, un número real, é a constante de proporcionalidade que supoñemos. Deste xeito, resolvendo a ecuación diferencial, chegamos a que

$$\phi(x) = \frac{m}{2} e^{-m|x|}.$$

Isto resulta na seguinte curva de erro:

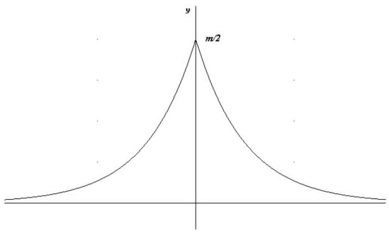


Fig. 2: Primeira curva do erro de Laplace

Malia que posteriormente Laplace refinaría esta curva, o avance máis significativo e final tomouno Gauss. Baseado en que «pequenos erros son máis probables que grandes erros», «erros de magnitude ε e $-\varepsilon$ son equiprobables» e «na presenza de varias medidas dunha cantidade, a medida máis probable destas é a súa media», formulou a expresión seguinte:

$$\phi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2},$$

sendo $h > 0$ a «precisión do proceso de medida».

Esta expresión gaussiana reflicte un dos usos máis estendidos da curva «Normal», empregado este termo para denotar unha das máis frecuentes curva da natureza.

REFERENCIAS

[1] STAHL, S. *The Evolution of the Normal Distribution*. Universidad Santo Tomás. Comunicaciones en Estadística Diciembre 2008, Vol. 1, No. 1.

Bandadas de paxaros

Francisco Estévez Lengua

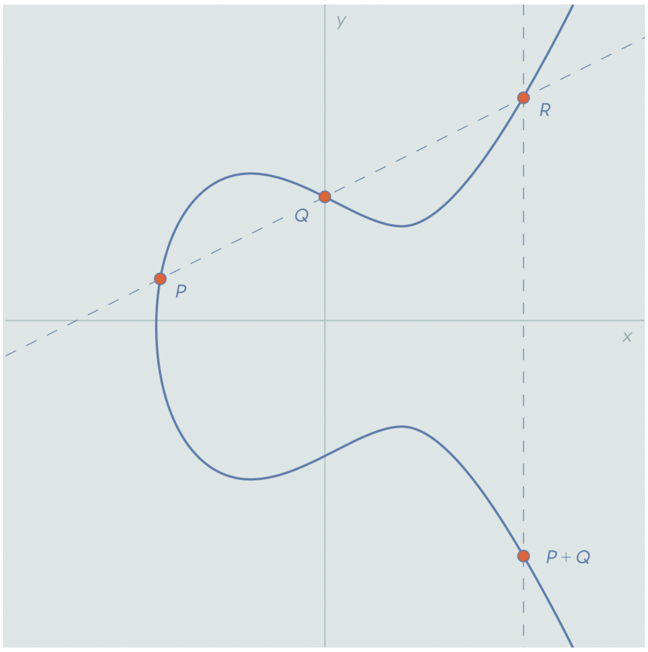
As curvas elípticas son obxectos matemáticos que se levan estudando dende xa hai algún tempo. Dende a súa aplicación na rama de Teoría de Números, para resolver o último Teorema de Fermat, intentar entender mellor os números primos, criptografía... ata para entender os patróns dos paxaros. E isto? Por que?

Na actualidade, ao investigar este tipo de curvas atopouse que tiñan moita relación con diversos fenómenos na natureza. De feito, nun estudo comezado en 2022 basado en técnicas estatísticas e intelixencia artificial descubríronse patróns que non se esperaban.

A estes patróns alcumáronos “murmurations”, o concepto que nos entendémos polas formas aéreas que describen as bandadas de paxaros.

Curvas elípticas

Daremos unha breve explicación teórica sobre este tipo de obxectos. Unha curva elíptica é o conxunto de puntos da forma $y(x)^2 = x^3 + ax + b$. Onde podemos tomar a parametrización con t en $\mathbb{R}$, en $\mathbb{C}$, ou de modo máis interesante en corpos de enteiros ($\mathbb{Z}_p$ con p enteiro primo). Sobre a curva C podemos definir unha operación interna suma. Dados dous puntos $P, Q \in C$, construímos a recta que pasa por P e Q, entón haberá outro punto R que sexa intersección da recta e C. No caso de que non existira tal punto entón tomaríase no infinito, pero non imos entrar en detalles disto. Agora, o punto simétrico de P respecto ao eixo das x será o resultado da operación. Con esta operación, $(C, +)$ é un grupo.



No caso de que traballemos en corpos de primos $\mathbb{Z}_p$, entra o papel do rango dunha curva, que se relaciona co número de solucións que ten. As curvas de rango 0 teñen un número finito de solucións e as de rango positivo teñen un número de solucións infinito.

Por outra banda, a curva ten asociada unha sucesión de números, a_p , que se relaciona co número de solucións. Aínda que o rango é difícil de calcular, a secuencia a_p é moito máis sinxela.

Investigacións Actuais

Despois do inicio da pandemia, Yang-Hui He , investigador do Instituto de Ciencias Matemáticas de Londres, e outros investigadores foron colaborando ata o que se coñece a día de hoxe [2]. En outubro de 2020, tiñan un documento que utilizaba información obtida dunhas funcións especiais para predicir unha propiedade particular das curvas elípticas. En novembro compartiron outro traballo que utilizaba a aprendizaxe automática para clasificar outros obxectos na teoría de números. En decembro, foron capaces de predicir os rangos de curvas elípticas con gran precisión.

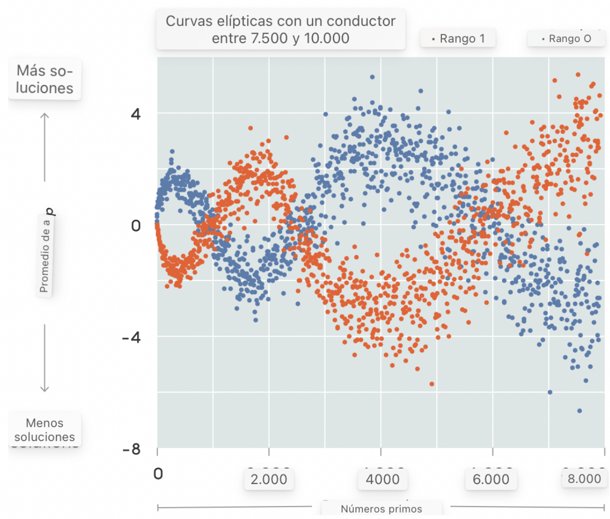
Pero non estaban seguros de por que os seus algoritmos de aprendizaxe automática funcionaban tan ben. Daquelas podían ordenar as curvas elípticas segundo unha cantidade chamada condutor, que resume a información sobre os primos para os que unha curva non se comporta ben. Entón, outro matemático, Pozdnyakov intentou mirar un gran número de curvas con condutores similares simultaneamente. Aproximadamente a metade destes tiña o rango 0 e a metade o rango 1.Despois fixo a media dos valores de a_p para todas as curvas de rango 0, e o mesmo para as de rango 1 e trazou o resultados. Os dous conxuntos de puntos formaron dúas ondas distintas e facilmente discernibles. E dende esta análise, a medida que aumentaban o número de curvas, percatáronse do efecto bandada.

Andrew Sutherland , un científico investigador do MIT tamén se puxo mans á obra. Decatouse de que 3 millóns de curvas elípticas non eran suficientes para os seus propósitos.

Entre os avances que se observaron foi o fenómeno chamado invarianza de escala, a forma mantívose igual aínda que miraba as curvas sobre números primos cada vez máis grandes. Sutherland tamén se decatou de que as murmuracións non son exclusivas das curvas elípticas, senón que tamén aparecen en funcións L (aquelas que dixemos especiais hai un cacho) máis xerais.

Máis recentemente, unha doutoranda, Zubrilina, presentou a súa investigación sobre patróns de bandadas en formas modulares, funcións complexas especiais que, como curvas elípticas, teñen funcións L asociadas . Nas formas modulares con grandes condutores, as bandadas conflúen nunha curva claramente definida, en lugar de formar un patrón discernible pero disperso. Nun artigo publicado o 11 de outubro de 2023, Zubrilina demostrou que este tipo de bandadas segue unha fórmula explícita que descubriu.

A súa fórmula é complicada, pero importante, comparable ás funcións de Airy que definen solucións de ecuacións diferenciais utilizadas en diversos contextos da física, que van desde a óptica ata a mecánica cuántica.



Referencias

[1] J.S. Milne, *Elliptic Curves* (Notas de Clase). *http://www.jmilne.org/math/*

[2] Yang-Hui He, Kyu-Hwan Lee, Thomas Oliver and Alexey Pozdnyakov *Murmurations of elliptic curves*

Retos Matemáticos

Sementeira
Clube Olímpico de Mates-USC

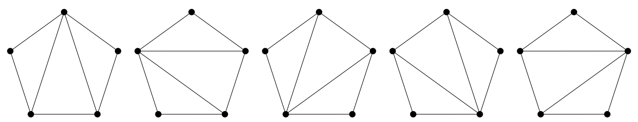
Números de Catalan

Hai moitas sucesións coñecidas de números naturas: os números de Fibonacci, os números triangulares, os números primos... Hoxe vemos os números de Catalan.

Dado un polígono regular (convexo) de n lados:

"De cantas formas podemos subdividir o polígono en triángulos conectando vértices con diagonais sen que ningunha se corte?"

Para un pentágono regular téñense 5 posibilidades:



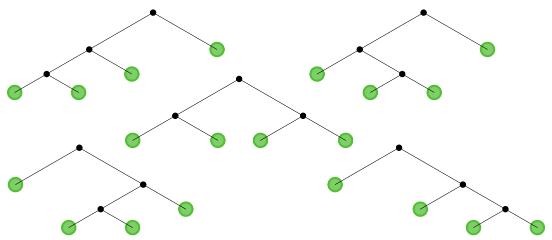
Outra pregunta interesante é a relativa ao número de *árbores binarias*. A aplicación sucesiva dun operador binario pode representarse en forma de árbore, de xeito que cada nodo ten 0 ou 2 fillos. Podémonos preguntar entón:

"De cantas formas podemos asociar n factores para aplicarlles un operador binario?"

Para 4 factores: a, b, c e d, temos as seguintes 5 posibilidades:

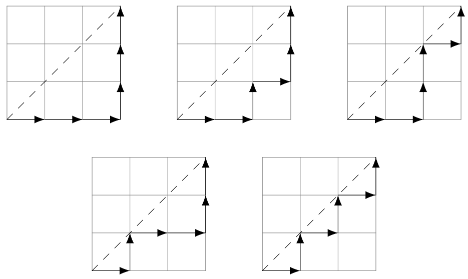
$$((ab)c)d, \quad (a(bc))d, \quad ((ab)(cd)), \quad a((bc)d), \quad a(b(cd)),$$

sendo a súa representación como árbore binaria:



"Cal é o número de camiños monótonos sobre as liñas dun taboleiro $n \times n$ de xeito que ningunha cruce á diagonal?"

Un *camiño monótono* comeza no $(0,0)$ e remata no (n,n) podendo avanzar só cara arriba ou cara a dereita. Por exemplo, para o caso de $n = 3$, as posibilidades serían as 5 seguintes:



Dándolle unha voltiña, isto está moi relacionado coas *palabras de van Dyck*, estas son palabras de lonxitude $2n$ formadas por n aparicións de dúas letras, X e Y, cumprindo que ningunha subpalabra formada polas k, con $1 \leq k \leq 2n$, primeiras letras teña máis Y's que X's.

Por exemplo, para o caso de $n = 3$, temos 5 posibilidades:

$$XXXYYY, \quad XXYXYY, \quad XXYYXY,$$
$$XYXXYY, \quad XYXYXY.$$

Todos estes problemas son realmente o mesmo, xa que todos se resolven empregando a sucesión dos números de Catalan, que é da forma:

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786...$$

Como era de esperar, algo de combinatoria tiña que haber en todo isto. O n-ésimo número de Catalan vén dado por:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Problemas Propostos

1. Existe un polinomio $P(x)$, de grao maior ou igual que 1, con coeficientes reais, tal que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, o número $P(n)$ sexa algún termo da sucesión de Fibonacci?

   Nota: A sucesión de Fibonacci $\{F_1, F_2 \dots\}$ defínese como $F_1 = F_2 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 1$.

2. Calcula
$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2^2} \cdots \cos\frac{x}{2^n}.$$

3. Dado G o baricentro dun triángulo ABC debuxamos unha recta que pasa por el e que corta ao lado AB no punto P e ao lado AC no punto Q. Proba que: $\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}$.

Solucións do mes pasado:

Cohomolo... que?

Ibai Otero Gómez

É ben coñecido que unha función real de variable real con derivada nula debe ser constante. Máis ou menos. Realmente isto non é de todo certo, porque se a nosa función está definida, por exemplo, en varios intervalos abertos disxuntos, o único que podemos afirmar sobre a función é que será constante en cada compoñente conexa do dominio de definición. Esta idea, aparentemente superflua, que relaciona a derivada dunha función coa topoloxía do dominio é unha das bases da cohomoloxía (de DeRham).

Consideremos agora un aberto $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2$ e unha función diferenciable $f : \mathscr{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida nel. Se supoñemos que o gradiente da función é nulo en todos os puntos do dominio, unha vez máis podemos afirmar que a función será constante en cada compoñente conexa de $\mathscr{U}$. O que estamos facendo realmente é considerar o espazo vectorial de funcións diferenciables e estudando o núcleo do operador gradiente. A función arbitraria que consideramos pertence a $\ker\nabla$ e como todas as funcións deste espazo veñen determinadas polos valores constantes que toman en cada compoñente conexa, este espazo vectorial é isomorfo a tantas copias de $\mathbb{R}$ como compoñentes conexas de $\mathscr{U}$. É dicir, a dimensión deste subespazo amosa o número de compoñentes conexas de $\mathscr{U}$.

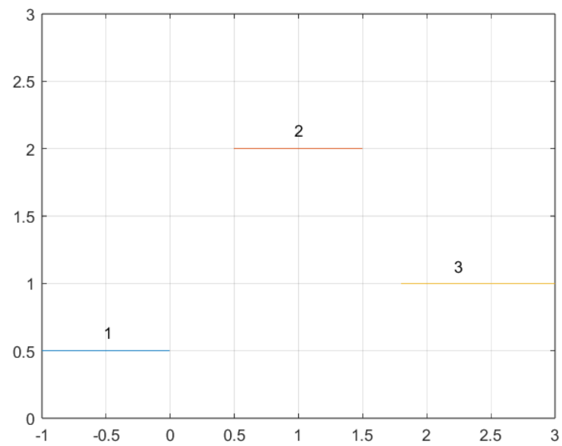


Fig. 1: Función con derivada nula nun dominio con tres compoñentes conexas.

Imos con outro exemplo. Dicimos que un campo vectorial $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ deriva dun potencial se existe $\phi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ de tal xeito que $f = \nabla\phi$. É un resultado de cálculo vectorial ben coñecido que unha función admite unha función potencial se e só se o seu rotacional é cero. Máis ou menos. O certo é que este resultado depende unha vez máis da topoloxía do dominio. Se a nosa función está definida, por exemplo, nun espazo simplemente conexo (ou “sen buratos”), entón estamos nas hipóteses do teorema. Porén, se temos algunha singularidade nalgún punto do aberto de definición, hai unha implicación que non ten porque cumprirse. É o caso da seguinte función

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \in \mathbb{R}^2$$

É sinxelo comprobar que o rotacional desta función é nulo. Non obstante, pódese probar tamén que esta función non deriva de ningún potencial. A existencia desta función avísanos de que hai un burato no noso $\mathscr{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$!

Unha vez máis imos tratar de estudar esta observación en termos de espazos de funcións. Que unha función f derive dun potencial é equivalente a dicir que f está na imaxe do operador gradiente. Por outro lado, estamos interesados en funcións cuxas rotacionais sexan cero, é dicir, que estean no núcleo do operador rotacional. Podemos representar esta información no diagrama 1.

$$\mathscr{C}^\infty(\mathscr{U},\mathbb{R}) \xrightarrow{\nabla} \mathscr{C}^\infty(\mathscr{U},\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\nabla\times} \mathscr{C}^\infty(\mathscr{U},\mathbb{R}^2) \tag{1}$$

Sabemos que rot $\circ$ grad é o operador nulo porque o rotacional dun campo conservativo sempre é cero, polo tanto temos a seguinte relación entre subespazos $\mathrm{Im}\{\nabla\} \subset \ker\{\nabla\times\}$. É dicir, o espazo vectorial asociado a $\mathscr{U}$ que cómpre estudar para detectar estes buratos de seu é o cociente do núcleo do rotacional pola imaxe do gradiente. No noso caso, esta estrutura, que coñecemos como primeiro grupo de cohomoloxía, ten dimensión un, que nos indica un burato no espazo. Tamén cuantifica dalgunha forma “canto falla” o teorema do que falabamos antes. No caso de $\mathscr{U} = \mathbb{R}^2$, por exemplo, o grupo de cohomoloxía, ou espazo vectorial neste caso, é o trivial; as hipóteses topolóxicas verifícanse plenamente.

Nótese que dentro do primeiro espazo do diagrama (1) poderíamos estudar o $\ker\{\nabla\}$ e contar as compoñentes conexas de $\mathscr{U}$ como antes. A cadea resume ben toda a información coa que nos gustaría contar.

Os diagramas como (1) coñécense como complexos de cadeas e son obxectos moi estudados. Permiten asociar unha estrutura alxébrica a un espazo topolóxico para agrupar toda a información topolóxica necesaria e poder comprendelo mellor. Existen diferentes formas de asociar estruturas a espazos. A teoría das formas diferenciais permite dar unha xeneralización a todas as ideas aquí expostas e constitúe a cohomoloxía de DeRham. Nela agrupamos os operadores diferenciais nun só, coñecido como a diferencial exterior, e estudamos en cada chanzo da cadea os cocientes entre núcleos e imaxes.

Por último, o teorema de DeRham permite relacionar esta teoría de cohomoloxía con outras de índole máis topolóxica, en troques de analítica, establecendo unha conexión entre estas áreas.

Referencias

[1] J. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds by John Lee.* Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer New York, New York, NY, 2nd ed. 2012. edition, 2012.

[2] I. Madsen and J. Tornehave. *From calculus to cohomology : de Rham cohomology and characteristic classes / Ib Madsen and Jorgen Tornehave*. Cambridge University Press, Cambridge (England), reprint 1999 edition, 1999 - 1997.

Euler foi un xenio das Matemáticas, pero aínda así, non tivo a sorte de ler Máis Mates antes de quedarse irremediablemente cego. Gauss posiblemente se aburría moito entre clases, algo que podería ter remediado se se lle ocorrese inventar Máis Mates. Hipatia tampouco a tivo nas súas mans, pero seguro que gozaría das cónicas da portada. Se cadra Galois podería ter achado a fórmula de Máis Mates, pero morreu demasiado novo... E ti? Ti tes Máis Mates ao alcance da man!

Máis Mates é un proxecto en forma de revista do alumnado para o alumnado, o proxecto co que todos eses egrexios persoeiros soñarían. Cada mes, traémosvos novos artigos con pequenas anécdotas da historia das matemáticas, as últimas novas, entrevistas, pasatempos, pequenos petiscos en diversos temas que ao mellor non se tratan en profundidade na carreira... En definitiva, todo o que esperta a nosa curiosidade como alumnas e alumnos, e que quizais esperte tamén a túa!

Estamos aí para que desconectes na metade dunha dura sesión de estudo, ou para todo o que se che ocorra. Lenos, coméntanos, compártenos, escríbenos e colabora con nós!

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Accede á revista!

revistamaismates@gmail.com

MÁIS MATES

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

FACULTADE DE MATEMÁTICAS