FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Clases de Schatten-von Neumann

Miguel Gómez Fernández

2019–2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Clases de Schatten-von Neumann

Miguel Gómez Fernández

Julio 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Análise Matemática

Título: Clases de Schatten-von Neumann

Breve descrición do contido

O obxectivo fundamental deste traballo é que o estudante coñeza a teoría básica das clases de Schatten-von Neumann. Así pois, se H é un espazo de Hilbert dado, para cada $1 \leq p \leq \infty$, estudaremos o espazo $\mathcal{S}_p(H)$ formado por todos os operadores compactos T cuxa sucesión de números singulares (é dicir, autovalores de $|T|$) pertence ao espazo de sucesións ℓ_p.

Esencialmente, o traballo consistirá en entender, coñecer e presentar:

1.- os resultados elementais de análise funcional que serán empregados;

2.- a teoría básica sobre as clases $\mathcal{S}_p(H)$, con especial inetrese nos casos $p = 2$ (operadores de Hilbert-Schmidt) e $p = 1$ (operadores traza);

3.- algunha aplicación dos resultados anteriores.

Este traballo podería ser de proveito para estudantes con especial interese ou gusto polas materias da área de análise matemática.

Recomendacións

Ter cursadas as materias *Cálculo vectorial e integración de Lebesgue* e *Topoloxía Xeral*. Empregaranse contidos propios da materia *Análise funcional en espazos de Hilbert*.

Índice general

Resumen

En este Trabajo Fin de Grado, presentamos una posible generalización del concepto de traza de una aplicación lineal (o matriz cuadrada de dimensión finita) al caso infinito dimensional.

Más exactamente, en el marco de los espacios de Hilbert separables y de dimensión infinita, estudiamos las famosas clases de Schatten-von Neumann $\mathcal{S}_p(H)$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Centramos nuestro interés en las familias $\mathcal{S}_2(H)$ —clase de Hilbert-Schmidt— y $\mathcal{S}_1(H)$ —clase traza u operadores nucleares—. Así mismo, empleando la generalización de traza, caracterizamos el espacio dual de la clase $\mathcal{S}_p(H)$ para cada $1 \leq p \leq \infty$.

Abstract

In this project work (TFG), we present a possible generalization of the concept of trace of a linear application (or finite dimension square matrix) to the infinite dimension case.

More precisely, within the framework of Hilbert's separable and non-finite dimensional spaces, we study the famous Schatten-von Nueman classes represented by $\mathcal{S}_p(H)$ with $1 \leq p \leq \infty$.

We focus our interest on the $\mathcal{S}_2(H)$ class of Hilbert-Schmidt operators and $\mathcal{S}_1(H)$ class of trace class or nuclear operators. Likewise, using the generalitation of trace, we characterize the dual espace of the $\mathcal{S}_p(H)$ class for every $1 \leq p \leq \infty$.

Introducción

Iniciamos este Trabajo Fin de Grado recordando las propiedades elementales de la *traza de una matriz cuadrada*, concepto introducido en el segundo curso del Grado en Matemáticas y definido en aquel momento como la suma de las entradas de la diagonal principal de dicha matriz. Es decir, si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_{n\times n}$, entonces

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Teniendo en cuenta que una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ define una aplicación lineal $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y que el valor de $\operatorname{tr} A$ es independiente de la base de $\mathbb{R}^n$ escogida, concluimos que —en el caso finito dimensional— podemos hablar de la *traza de una aplicación lineal*.

Partiendo de tal concepto, mostraremos una generalización de la idea de traza al caso infinito dimensional. Esto es, estudiaremos cuando podemos hablar de la traza de una "aplicación lineal" $T\colon X \longrightarrow X$ si X es un espacio vectorial de dimensión infinita que pretende generalizar al espacio euclidiano finito dimensional mencionado en el párrafo anterior.

Así pues, en la segunda sección del primer capítulo, hablaremos de *espacios de Hilbert* y *espacios de Banach*. Intentaremos justificar que el espacio de sucesiones ℓ_2 (separable pero de dimensión infinita) es la generalización más sencilla, natural e interesante del espacio euclidiano usual a dimensión infinita y también nos convenceremos de que ahora debemos considerar *aplicaciones lineales y continuas* (en dimensión finita, no basta sólo con la linealidad).

Por tanto, ahora ya podemos aclarar que el objetivo principal de este Trabajo Fin de Grado es caracterizar aquellos *operadores* (es decir, aplicaciones lineales y continuas) $T\colon \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ para los que podemos hablar de su traza y conocer —en tal caso— el significado y propiedades elementales de $\operatorname{tr} T$.

La diagonal de la "matriz infinita" que representa a un operador $T\colon \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ es una sucesión $(a_{ii})_{i\in\mathbb{N}}$ para la que la suma de sus entradas puede ser —tranquilamente— divergente; en efecto, pues ni tan siquiera se tiene que $a_{ii} \to 0$ cuando $i \to \infty$ (pensemos en el operador identidad). Es entonces cuando entran en juego las *clases de Schatten-von Neumann*; esencialmente, para cada $1 \leq p < \infty$, la clase $\mathcal{S}_p(\ell_2)$ estará formada por aquellos operadores $T\colon \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ para los que "la diagonal principal $(a_{ii})_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_p$". La discusión y aclaración del significado exacto de la condición anterior será una parte esencial de este Trabajo Fin de Grado.

Las clases $\mathcal{S}_p$ llevan el nombre de dos grandes personalidades: R. Schatten (1911–1977), matemático natural de Lwów (cuna del Análisis funcional) que desarrolló gran parte de su carrera científica en Estados Unidos y J. von Neumann (1903-1957), físico y matemático de origen húngaro que acabaría participando en el Proyecto Manhattan.

Es relativamente sencillo darse cuenta de que la condición $T \in \mathcal{S}_p(\ell_2)$ para cierto $1 \leq p \leq \infty$ implica que T es un operador compacto. Por tanto, en el Capítulo 2, centramos nuestro interés en los *operadores compactos* y su relación con los *operadores de rango finito*.

Lo natural y más didáctico (especialmente en el caso hilbertiano) sería partir de los operadores de rango finito y presentar luego los operadores compactos; ese fue el camino que seguimos en la materia de *Análisis funcional en espacios de Hilbert*. No obstante, en este caso y por aquello de explorar nuevos caminos, hemos preferido introducir los operadores compactos en espacios de Hilbert utilizando para ello técnicas propias de los espacios de Banach.

La *descomposición de Schmidt* de un operador compacto $T\colon \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ que probamos en este segundo capítulo será fundamental para obtener gran parte de los resultados de esta memoria; en ella, los *números singulares* jugarán un papel determinante.

El Capítulo 3 estará dedicado enteramente al estudio de la sucesión de números singulares de un operador T. Para ello, necesitaremos introducir y estudiar los *números de aproximación* y los *números de Gelfand*. Probaremos además varias desigualdades que involucran a estas sucesiones de números; concretamente, las *desigualdades de Weyl* y las *desigualdades de Ky Fan*.

Ya en el capítulo cuarto, introducimos con rigor y detalle el las *clases de Schatten-von Neumann* $\mathcal{S}_p(H)$. Aunque hablaremos de las familias $\mathcal{S}_p(H)$ con $1 \leq p \leq \infty$, nos centraremos especialmente en los casos $p = 2$ —operadores de Hilbert-Schmidt— y $p = 1$ —operadores de la clase traza u operadores nucleares—.

En el Capítulo 5, introducimos y estudiamos la *traza de un operador* $T \in \mathcal{S}_1(H)$, generalizando así al caso infinito dimensional el concepto de traza. Además, empleando el conocido como *funcional traza*, mostraremos que la clase de Schatten-von Neumann $\mathcal{S}_2(H)$ es un espacio de Hilbert y caracterizaremos el espacio dual de $\mathcal{S}_p(H)$ para cada $1 \leq p \leq \infty$, resultado éste último que mostrará cierta belleza de la escala de espacios de Banach formada por las clases de Schatten-von Neumann.

A modo de conclusión, en el sexto y último capítulo, mostraremos una generalización de las clases de Schatten-von Neumann a espacios de Banach (donde todo es más complicado).

Hablaremos también, muy brevemente y de forma esquemática, de *interpolación entre espacios de Banach*: "veremos que las clases de Schatten-von Neumann interpolan bien".

Para terminar, mencionaremos el conocido como *Problema de Lidskii*, directamente relacionado con cuestiones mencionadas al inicio de la memoria. También comentaremos algunos resultados obtenidos por el matemático francés A. Grothendieck.

Finalmente, me gustaría agradecer el apoyo de Jorge Losada Rodríguez y Venktesh, quienes me atendieron con paciencia durante muchas semanas.

Miguel Gómez Fernández
Santiago de Compostela, 10 de julio de 2020.

Capítulo 1

Motivación y conceptos básicos

Partiendo del concepto elemental de *traza de una matriz*, intentaremos mostrar en este primer capítulo la motivación e interés de los resultados centrales de este Trabajo Fin de Grado.

Así pues, la primera sección del mismo estará dedicada enteramente a la idea de traza: protagonista indiscutible de este Trabajo Fin de Grado y a quien pretendemos generalizar al caso infinito dimensional. Para ello, ya en la segunda sección, discutiremos y aclararemos que entendemos exactamente por *espacio de dimensión infinita*; es decir, hablaremos allí de *espacios de Hilbert* y *espacios de Banach*.

1.1. La traza de una matriz

Un importante resultado presentado y estudiado en la materia del segundo curso sobre *Espacios vectoriales y Cálculo matricial* es el siguiente:

fijada una base del espacio vectorial n-dimensional $\mathbb{R}^n$, existe una correspondencia biunívoca entre las matrices de dimensión $n \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$ y las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.

Así pues, si $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal, entonces T puede ser identificada con la matriz

$$A_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

donde

$$Te_i \equiv A_T {e_i}^t = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})^t, \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq n.$$

Conviene recordar ahora dos importantes conceptos relacionados con las matrices cuadradas (y por ende, con las aplicaciones lineales): el *determinante* y la *traza*.

En este Trabajo Fin de Grado, el concepto de traza jugará un importante papel. Es por ello que a continuación, recordamos brevemente su definición y propiedades más elementales.

La traza de una matriz $A = (a_{ij})_{1\leq i,\, j\leq n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es la suma de los elementos de su diagonal principal; es decir,

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \tag{1.1}$$

o equivalentemente, empleando la ortonormalidad de la base canónica de $\mathbb{R}^n$,

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} (Ae_i, e_i), \tag{1.2}$$

donde $(\cdot, \cdot)$ denota al producto escalar (euclidiano) usual de $\mathbb{R}^n$

A diferencia de (1.1), la expresión obtenida en (1.2) no depende de la matriz A, sino de como actúa la aplicación lineal —que define dicha matriz A— sobre los n elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Por tanto, tiene sentido preguntarnos si podremos definir la *traza de una aplicación lineal*; es decir, convendría saber si el valor que obtenemos en (1.1) o (1.2) es independiente de la base escogida para $\mathbb{R}^n$.

El siguiente resultado —cuya demostración es extremadamente sencilla y elemental— nos permitirá responder a la pregunta que acabamos de plantearnos.

Lema 1.1 (traza del producto de dos matrices)**.**

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \quad \textit{si } A,\ B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Demostración.
Sean $AB = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ y $BA = (d_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$; basta entonces observar que

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} d_{jj} = \operatorname{tr}(BA). \qquad \square$$

Si $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal y $A_1,\ A_2 \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ son las matrices que representan a T respecto de dos bases distintas de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$A_1 = UA_2U^{-1},$$

donde $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es la matriz de cambio de base.

En tal caso, en virtud del Lema 1.1 anterior,

$$\operatorname{tr} A_1 = \operatorname{tr}(UA_2U^{-1}) = \operatorname{tr}(U^{-1}UA_2) = \operatorname{tr}(IA_2) = \operatorname{tr} A_2;$$

de donde concluimos que el concepto de *traza de una aplicación lineal* $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ está bien definido.

En particular, escogiendo *la base adecuada para la aplicación lineal* T; es decir, diagonalizando y considerando los autovectores de T, deducimos que

$$\operatorname{tr} T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \tag{1.3}$$

donde λ_i, con $1 \leq i \leq n$, son los autovalores de la aplicación lineal T contados de acuerdo con su multiplicidad.

Los autovalores de la aplicación lineal T son las raíces de su *polinomio característico*, concepto introducido por Cauchy en 1829 (ver [13]) y que viene dado por

$$P_n(\lambda) = \det(\lambda I_n - A_T) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \cdots + d_{n-1}\lambda + d_n,$$

donde $I_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es la matriz identidad y $A_T \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es *una* representación matricial de T. Además, tal y como probó Jacobi en 1834 (ver [20]), se tiene que

$$\operatorname{tr} T = -d_1. \tag{1.4}$$

Por tanto, para una aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con representación matricial $A_T \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, tenemos que

$$\operatorname{tr} T = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (Te_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -d_1. \tag{1.5}$$

En todo lo comentado hasta ahora, la elección de $\mathbb{R}$ como cuerpo de escalares no juega ningún papel determinante; podríamos haber considerado tranquilamente como cuerpo de escalares los números complejos.

El término de *traza* se debe al matemático alemán R. Dedekind, quien introdujo dicha nomenclatura cuando estudiaba los cuerpos de grado n.

Sea Ω un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ sobre $\mathbb{Q}$ y $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de Ω. En tal caso, para cada $\theta \in \Omega$, existen coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{Q}$, con $1 \leq i, j \leq n$, de modo que

$$\begin{cases} \theta e_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n, \\ \theta e_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n, \\ \qquad \vdots \\ \theta e_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n; \end{cases}$$

o equivalentemente,

$$\theta(e_1, \ldots, e_n)^t = A(e_1, \ldots, e_n)^t, \quad \text{con } A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{Q}).$$

Así pues, es ahora claro que el polinomio característico $P_n(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ tiene otros $n-1$ ceros a mayores de θ: los conocidos como ceros conjugados, a quienes denotaremos por $\theta_2, \ldots, \theta_n$.

En tal caso, empleando el Lema 1.1 anterior, concluimos que cada $\theta \in \Omega$ deja una "traza" o marca en $\mathbb{Q}$:

$$S(\theta) = \theta + \theta_2 + \cdots + \theta_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \in \mathbb{Q}.$$

1.2. La traza de un operador

La generalización natural a dimensión infinita del espacio euclidiano finito dimensional $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) pasa por considerar sucesiones de números reales (o complejos) en lugar de n-tuplas de números (reales o complejos). Es decir, podemos considerar como "$\mathbb{K}^\infty$" (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) el espacio de sucesiones de número reales (o complejos) dado por

$$\ell_2 = \Big\{x = (x_n)_n \colon \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} < \infty\Big\}. \tag{1.6}$$

Tal y como probamos en la materia de *Análisis funcional en espacios de Hilbert*, el espacio ℓ_2 dotado de las operaciones suma y producto por un escalar definidas de modo natural es un espacio vectorial en el que

$$\operatorname{dist}(x,y) = \|x-y\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2}, \quad \text{para cada } x,\, y \in \ell_2,$$

define una distancia (invariante por traslaciones). Además, considerando la topología que define tal distancia, ℓ_2 es un espacio vectorial topológico (es decir, las operaciones suma y producto por un escalar son continuas) completo (es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente).

Por otra parte, conviene observar también que

$$\|x\|_2 = (x,x), \quad \text{para cada } x \in \ell_2,$$

donde $(\cdot,\cdot)\colon \ell_2 \times \ell_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ es el producto interior dado por

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, \overline{y_i}, \quad \text{para cada } x, y \in \ell_2,$$

que es la propuesta más sencilla e inmediata que podemos plantear si queremos generalizar al caso infinito dimensional el producto escalar euclidiano dado por

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \overline{y_i}, \quad \text{para cada } x, y \in \mathbb{K}^n.$$

Así pues, teniendo en cuenta (1.6), podemos decir que ℓ_2 es *el espacio de sucesiones que se encuentran a una distancia euclidiana finita de la sucesión origen* $0 = (0, 0, \dots)$.

Si H es un espacio vectorial dotado de un producto interior $(\cdot,\cdot)\colon H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ para el que la distancia asociada define una topología métrica completa sobre H, se dice entonces que H es un *espaacio de Hilbert*. En particular, los espacios $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ y ℓ_2 son ejemplos claros de espacios de Hilbert. No obstante,

todo espacio de Hilbert separable de dimensión infinita es isomorfo a ℓ_2,

resultado que nos vine a decir que la generalización más sencilla a dimensión infinita del espacio euclidiano finito dimensional es justamente el espacio de Hilbert ℓ_2.

En la materia de *Análisis funcional en espacios de Hilbert* nos convencimos de que las bases de Hamel (conjuntos linealmente independientes maximales) son de muy poca utilidad a la hora de estudiar el espacios de Hilbert, pues no existen espacios de Hilbert de dimensión infinita con base de Hamel numerable. Sin embargo, también probamos que todo espacio de Hilbert admite *base de Hilbert* (conjunto ortonormal maximal, repecto de la relación de ortogonalidad $x \perp y \Leftrightarrow (x,y) = 0$) y que dos bases de Hilbert distintas de un mismo espacio tienen el mismo cardinal, hecho que nos permite introducir el concepto de *dimensión de Hilbert* y obtener luego el siguiente resultado

todo espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita tiene dimensión de Hilbert $\aleph_0$, justificando así nuevamente la elección de ℓ_2 como generalización natural del espacio euclidiano al caso de dimensión infinita.

Dado $i \in \mathbb{N}$, denotaremos por $e_i \in \ell_2$ a la sucesión cuyas entradas son todas nulas excepto la i-ésima, que es un 1. En tal caso, en analogía clara con lo que ocurre en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, el conjunto (ordenado) $\{e_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ es una base de Hilbert de ℓ_2 (pero, obviamente, no es base de Hamel de ℓ_2).

A diferencia de lo que ocurre en el caso finito dimensional, en dimensión infinita la topología jugará un papel determinante. Basta siquiera observar que toda aplicación lineal $T \colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ es trivialmente continua. Sin embargo, no es difícil dar ejemplos de aplicaciones lineales $T \colon \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ que no son continuas.

Tal y como vimos en *Análisis funcional en espacios de Hilbert*, las aplicaciones lineales $T \colon \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ que son continuas son aquellas que llevan conjuntos acotados en conjuntos acotados, es decir, las aplicaciones lineales y acotadas. Por tanto, desde el punto de vista de las aplicaciones, nuestro interés en el caso infinito dimensional debe centrarse en el espacio de operadores

$$\mathcal{B}(\ell_2, \ell_2) \equiv \mathcal{B}(\ell_2) = \{T \colon \ell_2 \longrightarrow \ell_2 \ : \ T \text{ es una aplicación lineal y acotada}\},$$

donde podemos considerar las operaciones usuales de suma y producto por escalar.

Así pues, si $\{e_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ es base de Hilbert canónica de ℓ_2 y $T \colon \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ es una aplicación lineal y acotada, entonces T puede ser identificada con la "matriz infinita"

$$A_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

donde

$$Te_i \equiv A_T {e_i}^t = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ii}, \dots)^t, \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq n.$$

Conviene ahora recordar que no toda "matriz infinita" define una aplicación $T \colon \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ lineal y **continua**.

No obstante, a la vista de lo dicho hasta el momento, ya disponemos de algunos candidatos para ser la traza de nuestro operador $T \in \mathcal{B}(\ell_2)$:

$$\operatorname{tr} T = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ii}, \qquad \operatorname{tr} T = \sum_{i=1}^{\infty} (Te_i, e_i)e_i, \qquad \operatorname{tr} T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i,$$

donde $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sería la sucesión de autovalores de T contados de acuerdo con su multiplicidad. Las siguientes cuestiones surgen entonces de modo natural:

(a) ¿para qué operadores $T \in \mathcal{B}(\ell_2)$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ii} \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} (Te_i, e_i)e_i \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \in \mathbb{R}?$$

(b) ¿para qué operadores $T \in \mathcal{B}(\ell_2)$ el valor de

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ii} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{\infty} (Te_i, e_i)e_i$$

es independiente de la base de Hilbert $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de ℓ_2 escogida?

(c) ¿para qué operadores $T \in \mathcal{B}(\ell_2)$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ii} = \sum_{i=1}^{\infty} (Te_i, e_i)e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \text{ ?}$$

En este Trabajo Fin de Grado, daremos respuesta a los dos primeros interrogantes; para el tercero, nos conformaremos con una breve discusión al final del documento.

Otra opción más abstracta para generalizar el espacio euclidiano al caso infinito dimensional podría pasar por considerar espacios de Banach. Recordamos a continuación algunos conceptos y resultados elementales sobre espacios vectoriales normados.

Dado un espacio vectorial X sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, una norma en X es una aplicación $\|\cdot\|\colon X \longrightarrow X$ que satisface las siguientes propiedades:

(N1) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$, $\|x\| = 0 \iff x = 0 \in X$;

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ para todo $x \in X$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$;

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$.

En tal caso,

$$\operatorname{dist}(x, y) = \|x - y\|, \quad \text{para cada } x, y \in X,$$

define una distancia (invariante por traslaciones) que nos permite introducir una topología métrica en X. Si toda sucesión de Cauchy en $(X, \|\cdot\|)$ es convergente en $(X, \|\cdot\|)$, se dice que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. Es decir, un espacio de Banach no es más que un espacio vectorial normado completo.

En particular, todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach. No obstante, existen normas que no provienen de ningún producto escalar; luego existen espacios de Banach que no son espacios de Hilbert. Es más, se sabe (Teorema de Jordan-von Neumann) que una norma $\|\cdot\|$ está asociada a un producto escalar si y sólo si satisface ley del paralelogramo:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

La ausencia de una relación de ortogonalidad complica notablemente el estudio de la geometría de los espacio de Banach. La noción de base de Hilbert carece ahora de sentido y nos vemos obligados a hablar de bases de Schauder. Una base de Schauder de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es un conjunto ordenado $\{e_i \colon i \in \mathbb{N}\} \subset X$ tal que:

(i) $\|x_i\| = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

(ii) $\overline{\operatorname{span}\{e_i \colon i \in \mathbb{N}\}} = X$,

(ii) para cada $x \in X$ existe una única sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ de modo que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i, \quad \text{en } (X, \|\cdot\|).$$

Es fácil probar que todo espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ que admite base de Schauder es separable. No obstante, tal y como mostró Enflo, existen espacios de Banach separables sin base de Schauder. Es decir, a diferencia de lo que ocurre en espacios de Hilbert, donde siempre podremos hablar de coordenadas, para un espacio de Banach separable arbitrario, ya no disponemos de tal herramienta.

Conviene recordar aquí que para un espacio de Hilbert, los conceptos de base de Hilbert y base de Schauder son equivalentes.

Desde el punto de vista de las aplicaciones, al igual que ocurría en espacios de Hilbert, debemos considerar el espacio de operadores

$$\mathcal{B}(X,Y) = \{T\colon X \longrightarrow Y \ :\ T \text{ es una aplicación lineal y acotada}\},$$

que es un espacio vectorial normado (en realidad un espacio de Banach) si consideramos

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}, \quad \text{para cada } T \in \mathcal{B}(X,Y).$$

Dado un operador $T \in \mathcal{B}(X)$, la posible ausencia de base de Schauder para el espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ nos impide proponer una definición de $\operatorname{tr} T$ basada en la suma de los elementos de la diagonal de cierta "matriz infinita"; no obstante, siempre podremos buscar operadores $T \in \mathcal{B}(X)$ para los que sus autovalores formen una sucesión $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ de modo que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty.$$

Además, si el espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ admite una base de Schauder $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, entonces también podremos hablar de la "matriz infinita" asociada a T y, por consiguiente, de:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ii}, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} (Te_i, e_i)e_i \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i.$$

Surgen entonces cuestiones análogas a las planteadas anteriormente en $(a) - (b) - (c)$, para las que —tal y como comentaremos al final de este Trabajo Fin de Grado— encontrar respuesta es notablemente más difícil.

Un resultado fundamental de Análisis funcional (el conocido como Teorema de Riesz) afirma que $B(0,1) = \{x \in X\colon \|x\| \leq 1\}$ es un conjunto relativamente compacto en el espacio $(X, \|\cdot\|)$ si y sólo si X es un espacio vectorial de dimensión finita. Con la intención de intentar solventar esta dificultad, se introducen nuevas topologías sobre X; a continuación, comentaremos algunos detalles sobre dichas topologías. Para ello, debemos empezar hablando sobre el espacio dual.

Dado un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, se define el espacio dual X^* de X como

$$X^* = \{f\colon X \longrightarrow \mathbb{K} \ :\ f \text{ lineal y acotado}\} \equiv \mathcal{B}(X,\mathbb{K}).$$

Los siguiente resultados, conocidos en ocasiones como *los pilares del Análisis funcional*, fueron probados y estudiados como trabajo complementario en la materia de *Análisis funcional en espacios de Hilbert*; en aquel momento, empleamos como guía [8]. No obstante, dichos resultados aparecen en cualquier libro sobre análisis funcional en espacios de Banach.

Teorema 1.2 (Teorema de la Función Abierta).
Sean $(X, \|\cdot\|)$ e $(Y, \|\cdot\|)$ dos espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. En tal caso, si T es sobreyectivo, T es una aplicación abierta.

Teorema 1.3 (Teorema del Grafo cerrado).
Sean $(X, \|\cdot\|)$ *e* $(Y, \|\cdot\|)$ *dos espacios de Banach y* $T\colon X \longrightarrow Y$ *una aplicación lineal. En tal caso,* $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ *si y sólo si el conjunto* $\{(x,Tx) : x \in X\}$ *es cerrado en* $X \times Y$.

Teorema 1.4 (Teorema de extensión de Hanh-Banach).
Sea X *un espacio vectorial normado y* $M \subset X$ *un subespacio. Para todo* $\lambda \in M^*$, *existe* $\Lambda \in X^*$ *tal que* $\Lambda(x) = \lambda(x)$ *para todo* $x \in M$ *y* $\|\Lambda\| = \|\lambda\|$.

Teorema 1.5 (Teorema de Banach-Steinhaus o Principio de acotación uniforme).
Sea $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach,* $(Y, \|\cdot\|)$ *un espacio vectorial normado y* $A \subset \mathcal{B}(X,Y)$. *En tal caso,*

$$\sup\{\|Tx\| : T \in A\} < \infty \quad \textit{para todo } x \in X \implies \sup\{\|T\| : T \in A\} < \infty.$$

La topología débil de X es la topología que tiene por base la familia formada por conjuntos de la forma

$$\mathcal{O} = \{x \in X\colon |f_i(x - x_0)| < \varepsilon \text{ para } 1 \leq i \leq n\},$$

donde $x_0 \in X$, $f_i \in X^*$ para $1 \leq i \leq n$ y $\varepsilon > 0$. Así pues, dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se dice que $x_n \to x$ débilmente si

$$f(x_n) \to f(x), \quad \text{para todo funcional } f \in X^*.$$

Obviamente, $x_n \to x$ en $(X, \|\cdot\|)$ implica $x_n \to x$ débilmente.

Para introducir la topología débil* en X, necesitamos que X sea el predual de otro espacio de Banach; es decir, que exista $(Y, \|\cdot\|)$ espacio de Banach de modo que $Y^* = X$. En tal caso, la topología débil* de X es la topología que tiene por base la familia formado por los conjuntos de la forma

$$\mathcal{O} = \{x \in X\colon |(x - x_0)(y_i)| < \varepsilon \text{ para } 1 \leq i \leq n\},$$

donde $x_0 \in X$, $y_i \in Y$ para $1 \leq i \leq n$ y $\varepsilon > 0$.

El siguiente resultado muestra la "utilidad" de la topología débil*; será invocado más adelante en el Capítulo 2.

Teorema 1.6 (Teorema de Banach-Alaoglu).
El conjunto

$$B_{X^*}(0,1) = \{f \in X^*\colon \|f\| \leq 1\} \subset X^*$$

es débilmente compacto en* X^*.

Demostración.

Para probar el resultado enunciado, emplearemos el Teorema de Tijonov (ver [23, Theorem 7.4.1]) que afirma la compacidad del producto de una colección de espacios topológicos compactos.

En efecto, pues en virtud del Teorema de Tijonov, el espacio $[-1,1]^{B_X(0,1)}$ formado por todas las funciones definidas en $B_X(0,1)$ que toman valores en $[-1,1]$ dotado de la topología de la convergencia puntual ($f_n \to f \iff f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in B_X(0,1)$) es un espacio topológico compacto. Por tanto, basta probar que el conjunto formado por las restricciones de funciones $f \in B_{X^*}$ a B_X es cerrado.

Para ello, dada $\varphi \in [-1,1]^{B_X(0,1)} \setminus B_{X^*}(0,1)|_{B_X(0,1)}$, mostraremos que existen un entorno O de φ de modo que $\psi \in O$ implica $\psi \notin B_{X^*}(0,1)|_{B_X(0,1)}$. Es decir, probaremos que $[-1,1]^{B_X(0,1)} \setminus B_{X^*}(0,1)|_{B_X(0,1)}$ es un conjunto abierto.

La función φ mencionada anteriormente no puede ser una aplicación lineal y homogénea en $B_X(0,1)$, pues en ese caso tendríamos que $f \in B_{X^*}(0,1)|_{B_X(0,1)}$. Por tanto, existen $x_i \in B_X(0,1)$ y $\alpha_i \in \mathbb{R}$, con $1 \leq i \leq n$, de modo que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in B_X(0,1) \qquad \text{y} \qquad \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(x_i) \neq 0.$$

Por tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $\psi \in [-1,1]^{B_X(0,1)}$ satisface que

$$|(\psi - \varphi)(x_i)| < \varepsilon \quad \text{para } 1 \leq i \leq n, \qquad \text{y} \qquad \Big|(\psi - \varphi)\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big)\Big| < \varepsilon, \tag{1.7}$$

entonces

$$\psi\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi(x_i) \neq 0.$$

Así pues,

$$O = \Big\{\psi \in [-1,1]^{B_X(0,1)} \colon \psi \ \text{ satisface (1.7)}\Big\}$$

es el entorno abierto (en la topología débil* de X^*) de φ que buscábamos. □

Volviendo al marco de los espacios de Hilbert, donde todo es más simple y claro, conviene que recordemos los siguientes resultados

Teorema 1.7 (Teorema de Representación de Riesz)**.**
Sea H un espacio de Hilbert y $f \colon H \longrightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal y acotado. En tal caso, existe un único $y \in H$ de modo que:

$$f(x) = (x, y), \quad \textit{para todo } x \in H.$$

Es decir, para un espacio de Hilbert H, su dual H^* coincide con H y entonces, una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ converge débilmente a 0 si y solo si $(x_n, x) \to 0$ para todo $x \in H$.

Para el estudio de las propiedades geométricas de los espacios de Hilbert, el siguiente resultado es clave y exclusivo del caso hilbertiano.

Teorema 1.8 (Teorema de la Proyección Ortogonal)**.**
Sea $(H, (\cdot,\cdot))$ un espacio de Hilbert y $M \subset H$ un subespacio cerrado de H. En tal caso:

(a) *todo vector $x \in H$ admite una descomposición única de la forma $x = Px + Qx$, con $Px \in M$ y $Qx \in M^\perp$;*

(b) *Px y Qx son, respectivamente, la mejor aproximación de x en M y $M^\perp$;*

(c) *las aplicaciones $x \in H \longmapsto Px \in M$ e $x \in H \longmapsto Qx \in M^\perp$ son lineales y acotadas;*

(d) *$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$ para todo $x \in H$.*

Habitualmente, el operador P recibe el nombre de proyección ortogonal de H sobre el subespacio M.

Capítulo 2

Operadores compactos y operadores de rango finito

La primera sección de este capítulo versará sobre *operadores compactos* en espacios de Hilbert. Así pues, además de diversas caracterizaciones de la compacidad de un operador $T \in \mathcal{B}(H)$, presentaremos también dos *teoremas espectrales*: el primero de ellos tan sólo será válido para *operadores compactos y autoadjuntos*, pero será de gran utilidad a la hora de obtener el segundo, que nos proporcionará la *descomposición de Schmidt* de un operador compacto.

La segunda sección estará dedicada a una familia de operadores directamente relacionada con los operadores compactos: los *operadores de rango finito*, para quienes podremos introducir fácilmente los conceptos de *traza* y *determinante*.

Para la redacción de los contenidos de este capítulo, hemos segudo el esquema y orden considerado en [11]. No obstante, en [3] o [1], entre otras muchas refencias, pueden consultarse resultados similares.

2.1. Operadores compactos entre espacios de Hilbert

Sean H, H_1 y H_2 tres espacios de Hilbert separable de dimensión infinita.

La **bola cerrada unidad** de H, conjunto al que denotaremos por $B_H[0,1] \equiv B_H$, es el subconjunto formado por todos los vectores $x \in H$ para los que $\|x\| \leq 1$.

Definición 2.1 (operadores compactos).
Un operador $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ se dice **compacto** si $T(B_{H_1})$ es un conjunto compacto en H_2. Denotaremos por $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ al conjunto de todos los operadores compactos de H_1 en H_2; si $H = H_1 = H_2$, emplearemos la notación abreviada $\mathcal{K}(H)$.

En este Trabajo Fin de Grado estamos especialmente interesados en el espacio $\mathcal{K}(H)$, de ahí la especial relevancia de los resultados que siguen.

Proposición 2.2 (caracterización de operador compacto I).
Un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ es compacto si y solo si $\overline{T(B_H)}$ es un conjunto compacto en H.

Demostración.

La necesidad de la condición enunciada en la Definición 2.1 anterior es trivial. Probemos entonces la suficiencia de la misma.

Por ser $\overline{T(B_H)}$ un conjunto compacto, $T(B_H)$ es acotado; luego $T \in \mathcal{B}(H)$. Veamos ahora la compacidad del operador T. Para ello, observemos que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores de H que converge débilmente a $x \in H$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (Tx_n, y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, T^*y) = (x, T^*y) = (Tx, y), \quad \text{para todo } y \in H.$$

Así pues, T es débilmente continuo. Por otra parte, teniendo en cuenta el Teorema de Representación de Riesz y el Teorema de Alaoglu (Teorema 1.6 anterior), concluimos que B_H es débilmente compacto.

Por tanto, $T(B_H)$ es débilmente compacto. En particular, $T(B_H)$ es débilmente cerrado y entonces, $T(B_H)$ es $\|\cdot\|$-cerrado. Invocando ahora la compacidad de T, concluimos finalmente que $T(B_H)$ es $\|\cdot\|$-compacto. $\square$

Teorema 2.3 (caracterización de operadores compactos II).
Un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ es compacto si y solo si toda sucesión acotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores de H admite una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge en H.

Demostración.
Si $T \in \mathcal{B}(H)$ es un operador compacto, dado que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado, $\{Tx_n : n \in \mathbb{N}\}$ debe ser un conjunto compacto. Por tanto, en virtud de la caracterización de conjuntos compactos en espacios métricos completos, existe una subsucesión convergente $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Por otra parte, dado que en el ámbito de los espacios métricos completos un conjunto es compacto si y solo si toda sucesión tiene una subsucesión convergente, si T no fuese compacto, existiría una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_H$ para la que $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no admite ninguna subsucesión convergente. $\square$

Teorema 2.4 (caracterización de operadores compactos III).
Un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ es compacto si y solo si $Tx_n \to 0$ si $x_n \to 0$ débilmente.

Demostración.
Inicialmente, probaremos que si $T \in \mathcal{B}(H)$ es un operador compacto y $x_n \to 0$ débilmente, entonces $Tx_n \to 0$. Efectivamente, pues en caso contrario, podríamos asumir —sin pérdida alguna de generalidad— que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|Tx_n\| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$; condición que nos llevará a una contradicción.

Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos el funcional $T_n \colon H \longrightarrow \mathbb{C}$ definido como $T_n(x) = (x, x_n)$ para cada $x \in H$. Así, $\|T_n\| = \|x_n\|$ y además, por hipótesis,

$$\lim_{n\to\infty} T_n y = \lim_{n\to\infty} (y, x_n) = (y, 0) = 0, \quad \text{para todo } y \in H.$$

Por tanto,

$$\sup\{\|T_n y\| \colon n \in \mathbb{N}\} < \infty, \quad \text{para todo } y \in H,$$

y entonces, aplicando el Principio de Acotación Uniforme (Teorema 1.5 anterior), concluimos finalmente que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty.$$

Así pues, el Teorema 2.3 anterior afirma la existencia de una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $y_0 \in H$ tal que $Tx_{n_k} \to y_0$ cuando $k \to \infty$. En particular, $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a

y_0. Además, por la demostración de la Proposición 2.2 anterior, T es débilmente continuo, luego $x_{n_k} \to 0$ débilmente implica que $Tx_{n_k} \to 0$ débilmente. En tal caso, a partir de la unicidad del límite débil, deducimos que $y_0 = 0$ y llegamos así a que $Tx_{n_k} \to 0$, contradiciendo la condición $\|Tx_{n_k}\| \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Recíprocamente, si T no es un operador compacto, el Teorema 2.3 anterior afirma que existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_H$ de modo que ninguna subsucesión de $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Además, en virtud del Teorema de Alaoglu (Teorema 1.6 anterior), B_1 es un conjunto débilmenete-compacto; luego existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ débilmente-convergente para la que $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ no tiene ninguna subsucesión convergente. $\square$

Pasamos ahora a mostrar algunas propiedades sobre la estructura matemática de la familia de operadores $\mathcal{K}(H)$.

Teorema 2.5 ($\mathcal{K}(H)$ es ideal bilátero & $\mathcal{K}(H)$ es subespacio vectorial)**.**

(*a*) *$\mathcal{K}(H)$ es un ideal bilátero de $\mathcal{B}(H)$.*

(*b*) *$\mathcal{K}(H)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{B}(H)$.*

Demostración.
(*a*)
Dados $T \in \mathcal{K}(H)$ y $S \in \mathcal{B}(H)$, probaremos que TS, $ST \in \mathcal{K}(H)$. Más exactamente, mostraremos que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores de H tal que $x_n \to 0$ débilmente, entonces $STx_n \to 0$ y $TSx_n \to 0$. Así pues, el resultado enunciado será consecuencia directa del Teorema 2.4 anterior.

En virtud del Teorema 2.4, la compacidad de T implica que $Tx_n \to 0$. Además, como $S \in \mathcal{B}(H)$ es una aplicación continua, $STx_n \to 0$.

Por otra parte, en virtud la demostración de la Proposición 2.2 anterior, sabemos que la acotación de S implica la continuidad débil de S; luego $Sx_n \to 0$ débilmente en H y entonces la compacidad de T nos permite afirmar que $TSx_n \to 0$.

(*b*)
Si $T, S \in \mathcal{K}(H)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, la compacidad de los operadores $T + S$ y λT es una consecuencia directa del Teorema 2.4 anterior. $\square$

Teorema 2.6 ($\mathcal{K}(H)$ es autoadjunto)**.**
$T \in \mathcal{B}(H)$ es compacto si y solo si T^* es compacto.

Demostración.
Dado que $(T^*)^* = T$, basta probar que "T compacto implica T^* compacto". Sea para ello $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores de H tal que $x_n \to 0$ débilmente; probaremos que $Tx_n \to 0$.

Por el Principio de Acotación Uniforme, sabemos que existe $C > 0$ tal que $\|x_n\| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, como T^* es débilmente-continuo —ver demostración de la Proposición 2.2—, tenemos entonces que $T^*x_n \to 0$ débilmente. Así pues, la compacidad de T, nos permite invocar el Teorema 2.4 anterior para afirmar que $TT^*x_n \to 0$.

Por tanto, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos finalmente que

$$\|T^*x_n\|^2 = (TT^*x_n, x_n) \leq C\|TT^*x_n\|, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

y entonces ahora es claro que $T^*x_n \to 0$. $\square$

Teorema 2.7 ($\mathcal{K}(H)$ es cerrado (luego completo))**.**
$\mathcal{K}(H)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(H)$.

Demostración.
Probaremos que si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de operadores compactos en H tal que $T_n \to T$ en $\mathcal{B}(H)$, entonces T es un operador compacto. Sea para ello $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores de H tal que $x_n \to 0$ débilmente; probaremos que $Tx_n \to 0$.

En primer lugar, observemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, la compacidad del operador T_k implica que $T_k x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por otra parte, por el Principio de Acotación Uniforme, podemos suponer —sin pérdida alguna de generalidad— que $\|x_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado ahora $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_k - T\| < \varepsilon$. Por tanto, escogiendo $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_k x_n\| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$, tenemos que

$$\|Tx_n\| \leq \|Tx_n - T_k x_n\| + \|T_k x_n\| < 2\varepsilon \quad \text{si } n \geq N;$$

esto es, ya hemos probado que $Tx_n \to 0$. □

Nota 2.8 (sobre la "unicidad del ideal $\mathcal{K}(H)$")**.**
Es más, puede probarse (ver [14, Corollary 5.11]) que el ideal $\mathcal{K}(H)$ es el único ideal cerrado en $(\mathcal{B}(H), \|\cdot\|)$.

Seguidamente, indicamos un ejemplo característico de operador compacto.

Ejemplo 2.9 (operador compacto)**.**
Sean $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos conjuntos ortonormales en el espacio de Hilbert H y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos. En tal caso, la aplicación T definida como

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n)\varepsilon_n, \quad \text{para cada } x \in H,$$

es un operador compacto si, y sólo si, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Solución.
Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión débilmente convergente a $0 \in H$; luego existe $C > 0$ tal que

$$\|x_k\| \leq C, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

y

$$\lim_{k\to\infty} (x_k, e_n) = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_n| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. En tal caso, empleando el Teorema de Pitágoras y teniendo en cuenta (2.1), concluimos que

$$\begin{aligned}\|Tx_k\|^2 &= \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2 |(x_k, e_n)|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |(x_k, e_n)|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2 |(x_k, e_n)|^2 + \varepsilon^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |(x_k, e_n)|^2 \leq \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2 |(x_k, e_n)|^2 + \varepsilon^2 C^2.\end{aligned}$$

Por tanto, teniendo en cuenta (2.2), concluimos finalmente que $Tx_k \to 0$; luego $T \in \mathcal{K}(H)$ en virtud del Teorema 2.4 anterior.

Por otra parte, si $\lambda_n \not\to 0$, entonces $\|Te_n\| = |\lambda_n| \not\to 0$. Así pues, en virtud del Teorema 2.4 anterior, T no es un operador compacto. □

2.1.1. Teorema espectral I: operadores compactos y autoadjuntos

El *Teorema espectral para operadores compactos y autoadjuntos* es bien conocido. No obstante, dada su importancia en este Trabajo Fin de Grado, preferimos indicar a continuación su demostración. Para ello, partimos del siguiente resultado auxiliar.

Proposición 2.10 (auxiliar para el Teorema 2.11).
Si $T \in \mathcal{B}(H)$ es un operador compacto y autoadjunto, $\|T\|$ o $-\|T\|$ es autovalor de T.

Demostración.
Supongamos que $T \neq 0$; en otro caso, el resultado enunciado es trivial. Comencemos por observar que, por ser $T \in \mathcal{B}(H)$ un operador autoadjunto no nulo,

$$\|T\| = \sup\{|(Tx, x)| : \ \|x\| = 1\} > 0.$$

Por tanto, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores de H tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $(Tx_n, x_n) \to \lambda$ con $|\lambda| = \|T\|$.

A continuación, probaremos que λ es un autovalor del operador T. Para ello, observemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \|(T - \lambda I)x_n\|^2 &= ((T - \lambda I)x_n, (T - \lambda I)x_n) = (Tx_n - \lambda x_n, Tx_n - \lambda x_n) \\ &= (Tx_n, Tx_n) - (Tx_n, \lambda x_n) - (\lambda x_n, Tx_n) + \lambda^2 (x_n, x_n) \\ &= \|Tx_n\|^2 - 2\lambda(Tx_n, x_n) + \lambda^2 \|x_n\|^2 \\ &= \|Tx_n\|^2 - 2\lambda(Tx_n, x_n) + \lambda^2 \to \lambda^2 - 2\lambda \cdot \lambda + \lambda^2 = 0; \end{aligned}$$

de donde deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} (T - \lambda I)x_n = 0, \quad \text{en } H.$$

Por otra parte, dado que T es compacto y $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} Tx_{n_k} = y \in H$. Por tanto,

$$\begin{aligned} (T - \lambda I)y &= (T - \lambda I)(\lim_{k\to\infty} Tx_{n_k}) = (T - \lambda I)T(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) \\ &= T(T - \lambda I)(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} T(T - \lambda I)(x_{n_k}) = T(\lim_{k\to\infty} (T - \lambda I)x_{n_k}) = 0, \end{aligned}$$

o equivalentemente, $Ty = \lambda y$. Además, dado que

$$\|y\| = \|\lim_{k\to\infty} Tx_{n_k}\| = \|\lim_{k\to\infty} \lambda x_{n_k}\| = \lim_{k\to\infty} \|\lambda x_{n_k}\| = |\lambda| \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}\| = |\lambda| = \|T\| > 0,$$

concluimos finalmente que $y \in H$ es un vector no nulo de H. $\square$

Teorema 2.11 (Teorema espectral para operadores compactos y autoadjuntos).
Sea $T \in \mathcal{B}(H)$ un operador compacto y autoadjunto. En tal caso, existe un conjunto ortonormal $\{e_1, e_2, \dots\} \subset H$ formado por autovectores de T con autovalores correspondientes $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ de modo que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n, \quad \textit{para cada } x \in H.$$

Además, si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión infinita, entonces $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Demostración.

Sea $H_1 = H$ y $T_1 = T$. Entonces, en virtud de la Proposición 2.10 anterior, existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ autovalor de T_1 con autovector asociado e_1 de modo que $\|e_1\| = 1$ y $|\lambda_1| = \|T_1\|$.

Sea ahora $H_2 = \{e_1\}^\perp$. En tal caso, H_2 es subespacio cerrado de H_1 y además, $T(H_2) \subset H_2$. Sea entonces $T_2 = T_{|H_2}$. Así, $T_2 \in \mathcal{B}(H_2)$ es un operador compacto y autoadjunto. Nuevamente, en virtud de la Proposición 2.10, existe $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ autovalor de T_2 con autovector asociado $e_2 \in H_2$ de modo que: $\|e_2\| = 1$, $|\lambda_2| = \|T_2\| \leq \|T_1\| = |\lambda_1|$ y $e_2 \perp e_1$.

Sea ahora $H_3 = \{e_1, e_2\}^\perp$. En tal caso, H_3 es subespacio cerrado de H y además, $T(H_3) \subset H_3$. Sea luego $T_3 = T_{|H_3}$. Así, $T_3 \in \mathcal{B}(H_3)$ es un operador compacto y autoadjunto y entonces, en virtud de la Proposición 2.10, existe $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ autovalor de T_3 con autovector asociado $e_3 \in H_3$ de modo que: $\|e_3\| = 1$, $|\lambda_3| = \|T_3\| \leq \|T_2\| = |\lambda_2|$ y $e_3 \perp \{e_1, e_2\}$.

Procediendo de este modo, tal proceso acabará después de una cantidad finita de $n \in \mathbb{N}$ pasos si T_n es tal que $T_n = 0 \in \mathcal{B}(H_n)$ o bien, en otro caso, obtenemos una sucesión de autovalores $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ y una sucesión de autovectores unitarios $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$|\lambda_{n+1}| = \|T_{n+1}\| \leq \|T_n\| = |\lambda_n|, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

A continuación, probaremos que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n, \quad \text{para todo } x \in H.$$

Dado $x \in H$ arbitrario, distinguiremos dos casos:

(*a*) si $T_n = 0 \in \mathcal{B}(H_n)$ para cierto $n \in \mathbb{N}$, dado $x \in H$, tenemos que

$$x_n = x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k$$

satisface que $x_n \perp e_i$ para $1 \leq i \leq n$, es decir, $x_n \in H_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}^\perp$. Por tanto, dado que $T_n = 0$,

$$0 = T_n x_n = Tx - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) T e_k = Tx - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, e_k) e_k;$$

esto es,

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k, \quad \text{para todo } x \in H.$$

(*b*) si $T_n \neq 0 \in \mathcal{B}(H)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces —teniendo en cuenta que $\|T_n\| = \lambda_n$ y que, en virtud del Teorema de Pitágoras, $\|x_n\| \leq \|x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$— concluimos que

$$\left\| Tx - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, e_k) e_k \right\| = \|T_n x_n\| \leq \|T_n\| \, \|x_n\| = |\lambda_n| \, \|x_n\| \leq |\lambda_n| \, \|x\|;$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| Tx - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, e_k) e_k \right\| = 0, \quad \text{para todo } x \in H. \qquad \square$$

Nota 2.12 (sobre el Teorema espectral para op. compactos y autoadjuntos).
Tal y como comentamos en *Análisis funcional en espacios de Hilbert*, se tiene que

1.– si $\lambda \neq 0$ es autovalor de T, entonces $\lambda = \lambda_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$;

2.– si λ es un autovalor de T, entonces $\operatorname{mult}(\lambda, T) = \dim \ker(T - \lambda I)$, es decir, la multiplicidad algebraica de λ coincide con la dimensión de su respectivo autoespacio;

3.– todo autovalor λ_i de T se repite en la sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tantas veces como indica su multiplicidad;

4.– el conjunto $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $\overline{\operatorname{Im}(T)} = \ker(T)^{\perp}$ y además

$$x = P_0 x + \sum_n (x, e_n)e_n, \quad \text{para todo } x \in H,$$

donde P_0 es la proyección ortogonal sobre $\ker T$.

2.1.2. Teorema espectral II: operadores compactos

En esta sección, mostraremos un resultado similar al Teorema 2.11 anterior (Teorema espectral para operadores compactos y autoadjuntos), pero partiremos ahora únicamente de la hipótesis sobre la compacidad de T y prescindiremos así de condiciones geométricas adicionales (como, por ejemplo, “T autoadjunto”).

Para ello, necesitamos introducir antes los conceptos de: *operador positivo*, *raíz de un operador* y *operador valor absoluto*.

Definición 2.13 (operador positivo).
Un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ se dice **positivo** si $(Tx, x) \geq 0$ para todo $x \in H$.

Claramente, todo operador positivo es autoadjunto. Pasamos ahora a ver algunas caracterizaciones de los operadores positivos.

Proposición 2.14 (caracterización de operadores positivos).

$$T \in \mathcal{B}(H) \textit{ compacto y positivo } \iff [\lambda \textit{ autovalor de } T \implies \lambda \geq 0.]$$

Demostración.
Si existe $x \in H \setminus \{0\}$ y tal que $Tx = \lambda x$, entonces $(Tx, x) = \lambda \|x\|^2 \geq 0$ por ser T positivo, de donde deducimos que $\lambda \geq 0$.

Recíprocamente, aplicando el Teorema 2.11 (Teorema espectral para operadores compactos y autoadjuntos), tenemos que

$$Tx = \sum_n \lambda_n (x, e_n)e_n, \quad \text{para todo } x \in H,$$

y en tal caso,

$$\begin{aligned}(Tx, x) &= \Big(\sum_n \lambda_n (x, e_n)e_n, P_0 x + \sum_n (x, e_n)e_n\Big) \\ &= \sum_n \lambda_n (x, e_n)\overline{(x, e_n)} = \sum_n \lambda_n |(x, e_n)|^2 \geq 0, \quad \text{para todo } x \in H. \qquad \square\end{aligned}$$

A continuación, introducimos el operador raíz cuadrada de un operador compacto y positivo $T \in \mathcal{B}(H)$.

Proposición 2.15 (operador raíz cuadrada)**.**
Dado un operador compacto y positivo $T \in \mathcal{B}(H)$, existe un único operador compacto y positivo $S \in \mathcal{B}(H)$ tal que $SS = S^2 = T$.

Demostración.
Por el Teorema 2.11 (Teorema espectral para operadores compactos y autoadjuntos), sabemos que

$$Tx = \sum_n \lambda_n (x, e_n) e_n, \quad \text{para todo } x \in H.$$

Sea entonces

$$Sx = \sum_n \sqrt{\lambda_n} (x, e_n) e_n, \quad \text{para cada } x \in H.$$

Dado que T es un operador compacto, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ y entonces, también tenemos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\lambda_n} = 0$; luego S es compacto (ver Ejemplo 2.9 anterior). Además, en virtud de la Proposición 2.14 anterior, S es un operador positivo.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} S^2 x = S\Big(\sum_n \sqrt{\lambda_n}(x, e_n)e_n\Big) &= \sum_m \sqrt{\lambda_m}\Big(\sum_n \sqrt{\lambda_n}(x, e_n)e_n, e_m\Big)e_m \\ &= \sum_m \lambda_m (x, e_m) e_m = Tx, \quad \text{para todo } x \in H. \end{aligned}$$

Finalmente, veamos que $T^{\frac{1}{2}}$ es el único operador tal que $(T^{\frac{1}{2}})^2 = T$. Supongamos que existe un operador compacto y autiadjunto $R \in \mathcal{B}(H)$ tal que $R^2 = T$. En tal caso, dado $\lambda > 0$, tenemos que

$$(T^{\frac{1}{2}} + \lambda I)(T^{\frac{1}{2}} - \lambda I) = T - \lambda^2 I = (R + \lambda I)(R - \lambda I),$$

y como $-\lambda$ no es autovalor de $T^{\frac{1}{2}}$ ni de R (por ser éstos operadores positivos), pues entinces debe ser

$$\ker (T^{\frac{1}{2}} - \lambda I) = \ker (R - \lambda I), \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

Es decir, los operadores R y $T^{\frac{1}{2}}$ tienen los mismos autovectores y sus respectivos autovalores. Por tanto, en virtud del Teorema espectral para operadores compactos y autoadjuntos (Teorema 2.11) $T^{\frac{1}{2}} = R$. □

Definición 2.16 (operador raíz cuadrada & operador valor absoluto)**.**

(a) Dado un operador compacto y positivo $T \in \mathcal{B}(H)$, definimos la **raíz cuadrada** de T como el único operador $S \in \mathcal{B}(H)$ tal que $S^2 = T$;

(b) Dado un operador $T \in \mathcal{B}(H)$, definimos el **valor absoluto** de T como $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$.

Ahora sí, ya estamos en condiciones formular y probar el Teorema espectral para operadores compactos, resultado fundamental en este Trabajo Fin de Grado que nos permitirá introducir la sucesión de *números singulares* de un operador $T \in \mathcal{K}(H)$.

Teorema 2.17 (Teorema espectral para operadores compactos).
Sea $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ un operador compacto entre dos espacios de Hilbert H_1 y H_2. En tal caso, existen conjuntos ortonormales $\{e_1, e_2, \dots\} \subset H_1$ y $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\} \subset H_2$ y números reales $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0$ de modo que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) \varepsilon_n, \quad \textit{para todo } x \in H_1. \tag{2.3}$$

Además, si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión infinita, entonces $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Demostración.
Supongamos que $T \neq 0$; en otro caso, el resultado enunciado es trivial. Consideremos el operador T^*T, que —en virtud del Teorema 2.5 y el Teorema 2.6— es compacto. Además, T^*T es un operador positivo. En efecto, pues

$$(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2 \geq 0, \quad \text{para todo } x \in H_1.$$

En tal caso, en virtud del Teorema 2.11,

$$T^*Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (x, e_n) e_n, \quad \text{para todo } x \in H_1,$$

donde $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq 0$ y $\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\} \subset H_1$ es un conjunto ortonormal formado por autovectores de T^*T. Además, es claro que $\ker T = \ker T^*T$.

Sea ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\varepsilon_n = {\mu_n}^{-1/2} T e_n \in H_2$. En tal caso, $\{\varepsilon_n \colon n \in \mathbb{N}\} \subset H_2$ es un conjunto ortonormal. En efecto, pues para $n, m \in \mathbb{N}$,

$$(\varepsilon_n, \varepsilon_m) = \frac{1}{\sqrt{\mu_n \mu_m}} (Te_n, Te_m) = \frac{1}{\sqrt{\mu_n \mu_m}} (T^*Te_n, e_m) = \frac{\mu_n}{\sqrt{\mu_n \mu_m}} (e_n, e_m) = \delta_{nm}.$$

Por otra parte, para cada $x \in H_1$ existe un único $u_x \in \ker T^*T = \ker T$ tal que

$$x = u_x + \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n,$$

de donde deducimos finalmente que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) T e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\mu_n} (x, e_n) \varepsilon_n, \quad \text{para todo } x \in H_1. \qquad \square$$

Definición 2.18 (números singulares y representación de Schmidt).

(*a*) Dado un operador compacto $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, la sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (completada con ceros si fuese finita) que aprece en (2.3) recibe el nombre de sucesión de **números singulares** del operador T.

(*b*) Para cada $n \in \mathbb{N}$, diremos que λ_n es el n-ésimo **número singular** de T y emplearemos la notación $s_n(T) = \lambda_n$; obtenemos así la **representación de Schmidt** del operador T; esto es,

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) (x, e_n) \varepsilon_n, \quad \text{para cada } x \in H_1.$$

Nota 2.19. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el n-ésimo número singular de $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ es el n-ésimo autovalor del operador $|T| = (T^*T)^{1/2}$.

2.1.3. Descomposición polar

En este epígrafe, obtendremos la *descomposición polar* para operadores compactos entre espacios de Hilbert. Para ello, serán de gran utilidad la *isometrías parciales*, concepto que introducimos y estudiamos a continuación.

Definición 2.20 (isometría parcial)**.**
Sean H_1 y H_2 dos espacios de Hilbert, $M \subset H_1$ un subespacio cerrado, $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ y $N = V(M)$. En tal caso, decimos que V es una **isometría parcial** de M sobre N si

$$\|Vx\| = \|x\|, \quad \text{para todo } x \in M \qquad \text{y} \qquad Vx = 0, \quad \text{para todo } x \in M^{\perp}.$$

Lema 2.21 (caracterización de isometrías sobreyectivas)**.**
Sea $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. En tal caso, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) *V es una isometría sobreyectiva;*

(b) *V es sobreyectiva y $(Vx, Vy) = (x, y)$ para todo $x, y \in H_1$;*

(c) *V es invertible y $V^{-1} = V^*$.*

Demostración.
$(a) \Longrightarrow (b)$
Empleando la identidad de polarización, obtenemos que para todo $x, y \in H_1$,

$$\begin{aligned}(Vx, Vy) &= \frac{1}{4}\Big(\|Vx + Vy\|^2 - \|Vx - Vy\|^2 + i\|Vx + iVy\|^2 - i\|Vx - iVy\|^2\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\|V(x + y)\|^2 - \|V(x - y)\|^2 + i\|V(x + iy)\|^2 - i\|V(x - iy)\|^2\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\Big) = (x, y).\end{aligned}$$

$(b) \Longrightarrow (c)$
Basta con probar que $VV^* = I_{H_1}$ y $V^*V = I_{H_2}$. Para ello, observemos que $(V^*Vx, y) = (Vx, Vy) = (x, y)$ para todo $x, y \in H_1$. Por tanto,

$$(V^*Vx - x, y) = 0, \quad \text{para todo } y \in H_1,$$

de donde deducimos que $V^*Vx = x$ para todo $x \in H_1$.
Por otro lado, por ser V sobreyectiva, dado $z \in H_2$, existe $x \in H_1$ tal que $Vx = z$ y entonces

$$(VV^*y, z) = (VV^*y, Vx) = (V^*y, x) = (y, Vx) = (y, z), \quad \text{para todo } y \in H_2,$$

de donde deducimos finalmente que $V^*Vy = y$ para todo $y \in H_2$.
$(c) \Longrightarrow (a)$
Basta observar que

$$\|Vx\|^2 = (Vx, Vx) = (x, V^*Vx) = (x, x) = \|x\|^2, \quad \text{para todo } x \in H_1. \qquad \square$$

Proposición 2.22.
Si V es una isometría parcial (sobreyectiva o no), V^* también es una isometría parcial.

Demostración.

Sea $V : H_1 \longrightarrow H_2$ una isometría parcial sobre $M \subset H_1$ con $V(M) = N \subset H_2$. En tal caso, $V : M \longrightarrow N$ es una isometría sobreyectiva y entonces ${V_{|M}}^* : N \longrightarrow M$ también es una isometría parcial.

Sea Q la proyección ortogonal de H_2 sobre N y P la proyección ortogonal de H_1 sobre M. En tal caso, tenemos que ${V_{|M}}^* Q = V^*$. En efecto, pues

$$\begin{aligned}(x, V^*y) &= (Vx, y) = (VPx, y) = (QVPx, y) = (VPx, Qy) \\ &= (Px, {V_{|M}}^*Qy) = (x, P{V_{|M}}^*Qy) = (x, {V_{|M}}^*Qy), \quad \text{para todo } x, y \in H_1.\end{aligned}$$

Así pues, si $y \in N$ entonces $\|V^*y\| = \|{V_{|M}}^*Qy\| = \|{V_{|M}}^*y\| = \|y\|$, mientras que para $y \in N^\perp$, tenemos que $\|V^*y\| = \|{V_{|M}}^*Qy\| = \|{V_{|M}}^*0\| = 0$.

Además, dado que $V^*(M) = {V_{|M}}^*Q(M) = {V_{|M}}^*(M) = N$, ahora es claro que V^* es una isometría parcial. □

Teorema 2.23 (descomposición polar para operadores compactos)**.**
Sea $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ un operador compacto. En tal caso, existe una única isometría parcial $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ de $\ker T^\perp$ en $\overline{\operatorname{Im} T}$ tal que

$$T = V|T| \quad y \quad |T| = V^*T.$$

Demostración.

En virtud del Teorema 2.17 anterior,

$$T^*Tx = \sum_{n=1}^{\infty} {\lambda_n}^2 (x, e_n)e_n, \quad |T|x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n)e_n \quad \text{y} \quad Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n)\varepsilon_n,$$

con $\varepsilon_n = {\lambda_n}^{-1} T e_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y siendo $\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\} \subset H_1$ una base ortonormal de $\overline{\operatorname{Im} T^*T} = \ker T^*T^{\,\perp} = \ker T^{\,\perp}$. Por tanto,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)e_n, \quad \text{para todo } x \in \ker T^{\,\perp}.$$

Sea $V : H_1 \longrightarrow H_2$ la aplicaión lineal dada por

$$Vx = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)\varepsilon_n, \quad \text{para cada } x \in H_1.$$

Así pues, empleando la desigualdad de Bessel, obtenemos que

$$\|Vx\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \Big)^{1/2} \leq \|x\|, \quad \text{para todo } x \in H_1,$$

y deducimos entonces que $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Además, para $x \in \ker T^{\,\perp}$, tenemos que

$$\|Vx\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \Big)^{1/2} = \|x\|.$$

Por otra parte, si $x \in \ker T^{\perp\perp} = \ker T$, entonces $(x, e_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$; es decir, $Vx = 0$ para todo $x \in \ker T$. En tal caso, V es una isometría parcial de $\ker T^{\,\perp}$ en $\overline{\operatorname{span}\{\varepsilon_n \colon n \in \mathbb{N}\}} = \overline{\operatorname{Im} T}$.

Finalmente, veamos que $T = V|T|$ y que $|T| = V^*T$. Para ello, observemos que dados $x \in H_1$ e $y \in H_2$, tenemos que

$$(Vx, y) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)\varepsilon_n, y\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)\overline{(y, \varepsilon_n)} = \Big(x, \sum_{n=1}^{\infty}(y, \varepsilon_n)e_n\Big)$$

y entonces $V^*y = \sum_{n=1}^{\infty}(y, \varepsilon_n)e_n$ para todo $y \in H_2$. Por tanto, para cada $x \in H_1$,

$$V|T|x = V\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x, e_n)e_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x, e_n)\varepsilon_n = Tx,$$

$$V^*Tx = V^*\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x, e_n)\varepsilon_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x, e_n)e_n = |T|x. \qquad \square$$

Finalizamos esta sección con una nueva caracterización de los operadores compactos.

Teorema 2.24 (caracterización de operadores compactos IV).
Dado un operador $T \in \mathcal{B}(H)$, tenemos que

$$T \in \mathcal{K}(H) \iff TT^* \in \mathcal{K}(H) \iff |T| \in \mathcal{K}(H).$$

Demostración.
Si T es compacto, en virtud del Teorema 2.6 anterior, T^*T es compacto. Por otra parte, si $|T|$ es compacto, en virtud de la descomposición polar, T es compacto. Por tanto, falta únicamente probar que si T^*T es compacto, entonces $|T|$ es compacto.

Sea $S = |T|$, en tal caso $S^2 = T^*T$. Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ débilmente convergente a 0, la compacidad de S^2 implica que $\|S^2x_n\| \to 0$, mientras que —por el Principio de Acotación Uniforme— tenemos asegurado que $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\| < \infty$. Así pues, empleando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos que

$$\|Sx_n\|^2 = (Sx_n, Sx_n) = (S^2x_n, x_n) \leq \|x_n\|\,\|S^2x_n\|,$$

de donde se sigue que $\|Sx_n\| \to 0$; luego la compacidad de S se sigue a partir del Teorema 2.4 anterior. $\square$

2.2. Operadores de rango finito

Los operadores de *rango finito* son los ejemplos más sencillos que podemos considerar en el espacio $\mathcal{B}(H)$. Dedicamos a ellos esta última sección.

Definición 2.25 (operadores de rango finito).
Un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ se dice **de rango finito** si $\operatorname{Im} T = T(H)$ es un espacio vectorial finito-dimensional. Denotaremos por $\mathcal{F}(H)$ al espacio vectorial formado por todos los operadores de rango finito en H.

Claramente, todo operador de rango finito es compacto. No obstante, tal y como veremos en el siguiente resultado, la relación entre operadores de rango finito y operadores compactos es realmente estrecha en el caso hilbertiano.

Teorema 2.26 (operadores de rango finito & Operadores compactos).
Un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ es compacto si y solo si existe una sucesión de operadores de rango finito $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|T_n - T\| \to 0$.

Demostración.

Dado que todo operador de rango finito es claramente compacto, en virtud del Teorema 2.7 anterior, el límite de una sucesión de operadores de rango finito es un operador compacto.

Por otra parte, si $T \in \mathcal{B}(H)$ es un operador compacto, entonces —en virtud del Teorema 2.17 anterior— tenemos que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) \varepsilon_n, \quad \text{para todo } x \in H,$$

donde $\lambda_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos conjuntos ortonormales.

Dado $k \in \mathbb{N}$, sea $T_k \in \mathcal{B}(H)$ el operador de rango finito dado por

$$T_k x = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n (x, e_n) \varepsilon_n, \quad \text{para cada } x \in H.$$

En tal caso, $\|T_k - T\| \to 0$. En efecto, pues para todo vector unitario $x \in H$, tenemos que

$$\|(T_k - T)x\|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |(x, e_n)|^2 \leq \sup\{|\lambda_n|^2 : n > k\}.$$

Así, dado que el lado derecho de la desigualdad anterior es independiente de x y converge a 0 cuando $k \to \infty$, deducimos finalmente que $T_k \to T$ en $\mathcal{B}(H)$. □

Es decir, en el espacio topológico $(\mathcal{B}(H), \|\cdot\|)$, los operadores de rango finito son densos en $\mathcal{K}(H)$; esto es, $\overline{\mathcal{F}(H)} = \mathcal{K}(H)$.

Además, tal y como muestra el siguiente resultado (ya conocido de *Análisis funcional en espacios de Hilbert*), los operadores de rango finito entre espacios de Hilbert son especialmente sencillos.

Proposición 2.27 (Operadores de rango finito)**.**
Para un operador $T \in \mathcal{B}(H)$, son equivalentes:

(a) *$T \in \mathcal{F}(H)$;*

(b) *existe $n \in \mathbb{N}$ y $_i$, $v_i \in H$ con $1 \leq i \leq n$ de modo que*

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} (x, u_i) v_i, \quad \textit{para todo } x \in H.$$

Además, el conjunto $\{v_i : 1 \leq i \leq n\}$ puede ser escogido de modo que forme una base de $T(H)$.

Demostración.
$(a) \Longrightarrow (b)$

Sea $n = \dim T(H)$ y $\{v_i : 1 \leq i \leq n\}$ una base ortonormal de $T(H)$. En tal caso,

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} (Tx, v_i) v_i, \quad \text{para cada } x \in H.$$

Dado ahora $1 \leq i \leq n$, la aplicación $x \in H_1 \longmapsto (Tx, v_i) \in \mathbb{C}$ define un funcional lineal y acotado. Por tanto, en virtud del Teorema de representación de Riesz, existe $u_i \in H$ de modo que

$$(Tx, v_i) = (x, u_i), \quad \text{para todo } x \in H.$$

Así pues,

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} (Tx, v_i) = \sum_{i=1}^{n} (x, u_i) v_i, \quad \text{para todo } x \in H_1.$$

$(b) \Longrightarrow (a)$

Claramente, $n = \dim \operatorname{span}\{v_i : 1 \leq i \leq n\} = \dim T(H)$. Por tanto, es evidente que T es un operador de rango finito.

Por último, si nombramos $M = T(H)$, por el Teorema de la Proyección ortogonal se tiene que $H = M + M^{\perp}$, y es claro que $T(M) \subset M$ y $\ker T \subset M$. □

Dado un operador $T \in \mathcal{F}(H)$, considerando $M = \overline{T(H)} \equiv T(H)$ y empleando el *Teorema de la proyección ortogonal*, podemos descomponer el espacio de Hilbert H como la suma directa ortogonal

$$H = M \oplus M^{\perp}, \tag{2.4}$$

donde conviene observar que $T(M) \subset M$ y $\ker T \subset M^{\perp}$.

Así pues, dado ahora un operador $T \in \mathcal{B}(H)$, los operadores T e $I + T$ pueden identificarse, respecto de la descomposición (2.4) anterior, con las matrices

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad I + T = \begin{pmatrix} I_1 + T_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix},$$

donde $T_1 \equiv T_{|M} \colon M \longrightarrow M$ es la restricción del operador T al subespacio de dimensión finita M (es decir, T_1 es una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita) e I, I_1, I_2 son los operadores identidad en X, M y $M^{\perp}$ respectivamente.

Teniendo en cuenta dicha observación, podemos definir los conceptos de *traza* y *determinante* de un operador de rango finito.

Definición 2.28 (traza & determinante para operadores de rango finito)**.**
Dado un operador de rango finito $T \in \mathcal{F}(H)$, definimos:

(*a*) la *traza* de T como $\operatorname{tr} T = \operatorname{tr} T_1$;

(*b*) el *determinante* de $I + T$ como $\det T = \det (I_1 + T_1)$.

Nota 2.29 (sobre la Definición 2.28 anterior)**.**

Las nociones de traza y determinante que acabamos de definir no dependen de la elección del subespacio M. En efecto, pues

$$\operatorname{tr} T_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(T_1) \quad \text{y} \quad \det (I_1 + T_1) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i(T_1)),$$

donde $n = \dim M$ y $\lambda_i(T_1)$, con $1 \leq i \leq n$, son los autovalores de T_1 teniendo en cuenta su multiplicidad.

Observemos además, que los (posibles) autovalores nulos de T no provocan ninguna modificación o contribución en las identidades anteriores. Así pues, si $(\lambda_i(T))_{i \in \mathbb{N}}$ es la sucesión de autovalores de un operador $T \in \mathcal{F}(H)$, entonces podemos escribir

$$\operatorname{tr} T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(T) \quad \text{y} \quad \det (I + T) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \lambda_i(T)). \tag{2.5}$$

Capítulo 3

Números singulares

Iniciaremos este capítulo introduciendo los *números de aproximación* y los *números de Gelfand* de un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ entre dos espacios de Banach $(X, \|\cdot\|)$ e $(Y, \|\cdot\|)$. A continuación, ya en el marco de los espacios de Hilbert (separables y de dimensión infinita), estudiaremos la relación de éstos con los *números singulares*, que ya fueron presentados en el Capítulo 2 anterior.

Empleando dicha relación y algunas propiedades básicas de los *números de Gelfand* y de los *números de aproximación* que también serán probadas, obtendremos desigualdades elementales que involucran a la sucesión de *números singulares*. Más exactamente, probaremos la *desigualdad de Weyl* —que será de gran utilidad en el último epígrafe— y las *desigualdades de Ky Fan* —que nos permitirán introducir una primera familia de normas en $\mathcal{K}(H)$ y una norma en cierto subespacio de $\mathcal{K}(H)$. Tal subespacio, al que llamaremos *clase traza* y denotaremos por $\mathcal{S}_1(H)$, será uno de los protagonista de este Trabajo Fin de Grado.

Información mucho más detallada sobre los resultados que presentamos en este capítulo puede ser consultada en, por ejemplo, [6, 7, 14].

3.1. Números de aproximación y números de Gelfand

Sean $(X, \|\cdot\|)$ e $(Y, \|\cdot\|)$ dos espacios de Banach.

Definición 3.1 (números de aproximación & números de Gelfand).
Dado un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ y un número natural $n \in \mathbb{N}$, definimos:

(a) el n-ésimo **número de aproximación** de T como

$$a_n(T) = \text{ínf}\left\{\|T - T_n\| : T_n \in \mathcal{B}(X,Y) \text{ con rango}\, T_n < n\right\};$$

(b) el n-ésimo **número de Gelfand** de T como

$$c_n(T) = \text{ínf}\left\{\|T_{|X_n}\| : X_n \subset X \text{ con codim}\, X_n < n\right\}.$$

Nota 3.2 (sobre los números de aproximación y los números de Gelfand).
De la Definición 3.1 anterior, deducimos inmediatamente que

$$a_1(T) = \|T - \mathcal{O}\| = \|T\| \geq a_2(T) \geq a_3(T) \geq \cdots \geq 0$$

y

$$c_1(T) = \|T - \mathcal{O}\| = \|T\| \geq c_2(T) \geq c_3(T) \geq \cdots \geq 0.$$

Es decir, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones decrecientes de números no negativos y además, tenemos que

$$c_n(T) \leq a_n(T), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

En efecto, pues dado $T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ con $\operatorname{rango} T_n < n$ arbitrario, el subespacio $X_n = \ker T_n \subset X$ tiene codimensión menor que n y

$$c_n(T) \leq \|T_{|X_n}\| = \sup_{x\in X_n} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\in X} \frac{\|(T-T_n)x\|}{\|x\|} = \|T - T_n\|.$$

Por tanto, $c_n(T) \leq \|T - T_n\|$ para todo operador $T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ con $\operatorname{rango} T_n < n$, de donde se sigue ahora la veracidad de la desigualdad (3.1) anterior.

Observemos también que, para cada $n \in \mathbb{N}$, el valor del n-ésimo *número de aproximación* de un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ coincide con la distancia de T a la clausura del subespacio vectorial de $\mathcal{B}(X,Y)$ formado por todos los operadores de rango finito cuya imagen tiene dimensión menor que n.

Conviene recordar que si X e Y son espacios de Hilbert, el subespacio $\mathcal{F}(X,Y) \subset \mathcal{B}(X,Y)$ formado por todos los operadores de rango finito es denso en $\mathcal{K}(X,Y)$. Por tanto, en el marco de los espacios de Hilbert tenemos que

$$T \in \mathcal{K}(X,Y) \iff \lim_{n\to\infty} a_n(T) = 0.$$

Sin embargo, para X e Y espacios de Banach arbitrarios, la implicación "$\Longrightarrow$" de la equivalencia anterior no es necesariamente cierta (existen espacios de Banach que no satisfacen la *propiedad de aproximación*).

Teorema 3.3 (números singulares, de aproximación y de Gelfand en espacios de Hilbert)**.** *Sean H_1 y H_2 dos espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. En tal caso,*

$$c_n(T) = a_n(T) = s_n(T), \quad \textit{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración.

Inicialmente, probaremos que $a_n(T) = c_n(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ello, observemos que dado $n \in \mathbb{N}$, si $X_n \subset H_1$ es un subespacio arbitrario de H_1 con $\operatorname{codim} X_n < n$ y $P_n \colon H_1 \longrightarrow {X_n}^{\perp}$ es la proyección ortogonal de H_1 sobre ${X_n}^{\perp}$, entonces el operador $T_n = TP_n$ satisface que

$$\operatorname{rango} T_n < n \quad \text{y} \quad \|T - T_n\| \leq \|T_{|X_n}\|.$$

Por tanto, $a_n(T) \leq c_n(T)$ y entonces —teniendo en cuenta (3.1)— debe ser $a_n(T) = c_n(T)$.

Veamos ahora que $a_n(T) = s_n(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En virtud del Teorema representación de Schmidt (Teorema 2.17), existen conjuntos ortonormales $\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\} \subset H_1$ y $\{\varepsilon_n \colon n \in \mathbb{N}\} \subset H_2$ de modo que,

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)(x, e_i)\varepsilon_i, \quad \text{para cada } x \in H_1.$$

Sea entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$,

$$T_n x = \sum_{i=1}^{n-1} s_i(T)(x, e_i)\varepsilon_i, \quad \text{para cada } x \in H_1.$$

En tal caso, empleando la monotonía de la sucesión de números singulares $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y la desigualdad de Bessel, concluimos que

$$\begin{aligned} a_n(T) \leq \|T - T_n\| &= \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \Big\| \sum_{i=n}^{\infty} s_i(T)(x, e_i)\varepsilon_i \Big\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \sqrt{\sum_{i=n}^{\infty} s_i(T)^2 |(x, e_i)|^2} \\ &\leq s_n(T) \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \sqrt{\sum_{i=n}^{\infty} |(x, e_i)|^2} \leq s_n(T). \end{aligned}$$

Por otra parte, para $T_n \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ con $\operatorname{rango} T_n = m < n$ —empleando el Teorema de representación de Riesz— tenemos que

$$T_n x = \sum_{j=1}^{m} (x, v_j) w_j, \quad \text{para cada } x \in H_1,$$

donde $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es un conjunto ortonormal en H_1 y $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $T_n(H_2)$. Consideremos el sistema lineal de m ecuaciones y $n > m$ incógnitas dado por

$$\begin{cases} (e_1, v_1)\xi_1 + (e_2, v_1)\xi_2 + \cdots + (e_m, v_1)\xi_n = 0 \\ (e_1, v_2)\xi_1 + (e_2, v_2)\xi_2 + \cdots + (e_m, v_2)\xi_n = 0 \\ \vdots \\ (e_1, v_m)\xi_1 + (e_2, v_m)\xi_2 + \cdots + (e_m, v_m)\xi_n = 0 \end{cases}$$

Puesto que hay más incógnitas que ecuaciones, existe una solución no trivial $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} {\xi_k}^2 = 1.$$

Elegida dicha solución, definimos

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k.$$

En tal caso, tenemos que

$$\|x_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2} = 1 \quad \text{y} \quad T_n x_0 = \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k, v_j \Big) w_j = \sum_{j=1}^{m} w_j \sum_{k=1}^{n} (e_k, v_j)\xi_k = 0,$$

de donde deducimos que

$$\|T - T_n\| \geq \|(T - T_n)x_0\| = \|T x_0\| = \Big\| \sum_{i=1}^{n} s_i(T)\xi_i \varepsilon_i \Big\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} s_i^2(T)|\xi_i|^2} \geq s_n(T),$$

donde la última desigualdad es debida a la monotonía de la sucesión de números singulares. Por tanto, ahora es claro que $s_n(T) \leq a_n(T)$. $\square$

Nota 3.4 (sobre el Teorema 3.3 anterior).

Conviene observar que para probar la igualdad $a_n(T) = c_n(T)$ **no** hemos empleado la compacidad de T.

Sean ahora $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ y $(Z, \|\cdot\|)$ tres espacios de Banach. A continuación, partiendo de dos propiedades elementales de la sucesión de números de aproximación, deduciremos otras dos propiedades básicas para la sucesión de números singulares de un operador $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, siendo H_1 y H_2 espacios de Hilbert separables de dimensión infinita.

Lema 3.5 (propiedades de los números de aproximación).
Si $S, T \in \mathcal{B}(X, Y)$ y $R \in \mathcal{B}(Y, Z)$, entonces:

(a) $a_{k+l-1}(RS) \leq a_k(R)a_l(S)$, *para todo* k, $l \in \mathbb{N}$.

(b) $a_{k+l-1}(S+T) \leq a_k(S) + a_l(T)$, *para todo* k, $l \in \mathbb{N}$.

Demostración.
(a)

Dado $\varepsilon > 0$, teniendo en cuenta la Definición 3.1 (a), sabemos que existen operadores $S_1 \in \mathcal{B}(X, Y)$ y $R_1 \in \mathcal{B}(Y, Z)$ tales que rango $S_1 < l$, rango $R_1 < k$,

$$\|S - S_1\| < a_l(S) + \varepsilon \quad \text{y} \quad \|R - R_1\| < a_k(R) + \varepsilon.$$

Por otra parte, como rango $(R_1(S - S_1) + RS_1) < k + l - 1$, tenemos entonces que

$$a_{k+l-1}(RS) \leq \|RS - R_1(S - S_1) - RS_1\| \leq \|R - R_1\|\|S - S_1\| \leq (a_k(R) + \varepsilon)(a_l(S) + \varepsilon).$$

Así pues, dado que $\varepsilon > 0$ fue escogido de modo arbitrario, concluimos finalmente que

$$a_{k+l-1}(RS) \leq a_k(R)a_l(S).$$

(b)

Dado $\varepsilon > 0$, teniendo en cuenta la Definición 3.1 (a), sabemos que existen operadores $S_1, T_1 \in \mathcal{B}(X, Y)$ tales que rango $S_1 < k$, rango $T_1 < l$,

$$\|S - S_1\| < a_k(S) + \varepsilon \quad \text{y} \quad \|T - T_1\| < a_l(T) + \varepsilon.$$

Por otra parte, como rango $(S_1 + T_1) < k + l - 1$, tenemos entonces que

$$a_{k+l-1}(S+T) \leq \|S + T - S_1 - T_1\| \leq \|S - S_1\| + \|T - T_1\| \leq a_k(S) + a_l(T) + 2\varepsilon.$$

Así pues, dado que $\varepsilon > 0$ fue escogido de forma arbitraria, concluimos finalmente que

$$a_{k+l-1}(S+T) \leq a_k(S) + a_l(T). \qquad \square$$

Nota 3.6 (propiedades de los números singulares).

Teniendo en cuenta el Lema 3.5 y el Teorema 3.3, obtenemos las siguientes propiedades para los números singulares:

(a) si $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, $R \in \mathcal{B}(H_2, H_3)$ y $S \in \mathcal{B}(H_0, H_1)$, entonces

$$s_n(RST) \leq s_n(R)s_n(S)s_n(T) \leq \|R\|s_n(T)\|S\|, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(b) si $S, T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, entonces

$$s_{n+m-1}(S+T) \leq s_n(S) + s_m(T), \quad \text{para todo } n,\ m \in \mathbb{N}.$$

La desigualdad obtenida en la Nota 3.6 (b), a la que algunos autores se refieren como *desigualdad de Weyl*, jugará un importante papel en el siguiente epígrafe.

3.2. Algunas desigualdades

Sea H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita.

En esta sección, probaremos dos desigualdades de Weyl (Proposición 3.7 y Teorema 3.11) —que involucran, respectivamente, productos y sumas de autovalores y números singulares— y dos desigualdades de Ky Fan (Teoremas 3.14 y 3.15) —que recuerdan, respectivamente, a las de Hölder y a la desigualdad triangular—.

Proposición 3.7 (desigualdad de Weyl I; auxiliar para el Teorema 3.11).
Si $T \in \mathcal{K}(H)$ es un operador compacto, entonces

$$\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i(T)| \leq \prod_{i=1}^{n} s_i(T), \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En particular,

$$|\lambda_n(T)| \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} s_i(T)}, \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración.
Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Si $\lambda_n = 0$, el resultado enunciado es trivial. Supongamos luego que $\lambda_n \neq 0$; en tal caso, $\lambda_i \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Por tanto, si $H_n = \operatorname{span}\{v_i \colon 1 \leq i \leq n\}$, donde v_i es un autovector asociado a λ_i para cada $1 \leq i \leq n$, obtenemos que $H_n \subset H$ es un subespacio satisfaciendo que $\dim H_n = n$, $T(H_n) \subset H_n$,

$$T_n = T_{|H_n} : H_n \longrightarrow H_n \qquad \text{y} \qquad \lambda_i(T_n) = \lambda_i(T), \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq n.$$

Consideremos ahora la descomposición polar del operador T_n; esto es, $T_n = V|T_n|$. Entonces, por ser $H_n \subset H$ un subespacio de dimensión finita, los endomorfismos V y T_n se identifican con respectivas matrices de dimensión $n \times n$ para las que

$$\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i(T)| = \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i(T_n)| = |\det T_n| = |\det V|T_n|| = |\det V|\,|\det |T_n||.$$

Dado que V es una isometría, todos sus autovalores tienen módulo 1. Por tanto,

$$\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i(T)| = |\det|T_n|| = \prod_{i=1}^{n} s_i(T_n).$$

Si $i : H_n \longrightarrow H$ es la inclusión del subespacio H_n en H y $P : H \longrightarrow H_n$ es la proyección ortogonal de H sobre H_n, entonces $T_n = PTi$ y así, teniendo en cuenta la Nota 3.6 (a) anterior,

$$s_i(T_n) = s_i(PTi) \leq \|P\| s_i(T) \|i\| = s_i(T),$$

de donde concluimos finalmente que

$$\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i(T)| \leq \prod_{i=1}^{n} s_i(T). \qquad \square$$

Para obtener la segunda desigualdad de Weyl prometida, necesitamos invocar previamente algunas desigualdades elementales.

Lema 3.8 (desigualdad MA-MG ponderada; auxiliar para el Lema 3.10).
Sean α_i, $p_i > 0$ para $1 \leq i \leq n$ con $p_1 + \cdots + p_n = 1$. En tal caso,

$$\prod_{i=1}^{n} {\alpha_i}^{p_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i.$$

Demostración.
Es una consecuencia de la desigualdad de Jensen, cuyo enunciado recordamos a continuación.

Lema 3.9 (desigualdad de Jensen; auxiliar para el Lema 3.8).
Sean $\varphi\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y $x_i \in [a,b]$ para $1 \leq i \leq n$. En tal caso, si $a_i > 0$ para $1 \leq i \leq n$, entonces

$$\varphi\Big(\frac{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n}{a_1 + \cdots + a_n}\Big) \leq \frac{a_1 \varphi(x_1) + \cdots + a_n \varphi(x_n)}{a_1 + \cdots + a_n}.$$

Considerando la función convexa $\varphi(x) = -\log x$ y utilizando el Lema 3.9, obtenemos que

$$-\log\Big(\prod_{i=1}^{n} {\alpha_i}^{p_i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} p_i(-\log \alpha_i) \geq -\log\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i\Big),$$

es decir,

$$\log\Big(\prod_{i=1}^{n} {\alpha_i}^{p_i}\Big) \leq \log\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i\Big).$$

Además, como la función logaritmo es estrictamente creciente, deducimos finalmente que

$$\prod_{i=1}^{n} {\alpha_i}^{p_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i. \qquad \square$$

Proposición 3.10 (auxiliar para el Teorema 3.11).
Sean $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq 0$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ números no negativos arbitrarios tales que

$$\prod_{i=1}^{k} \alpha_i \leq \prod_{i=1}^{k} \beta_i, \quad \text{para todo } 1 \leq k \leq n.$$

En tal caso,

$$\sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^{p} \leq \sum_{i=1}^{n} {\beta_i}^{p}, \quad \text{para todo } p > 0.$$

Demostración.
Inicialmente, probaremos el resultado para $p = 1$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que α_i, $\beta_i > 0$ para $1 \leq i \leq n$.

Sean, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$p_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j} \quad \text{y} \quad a_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i}.$$

En tal caso, en virtud del Lema 3.8 anterior,

$$\prod_{i=1}^{n} \Big(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\Big)^{p_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j} \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}.$$

Por tanto, basta probar que

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right)^{p_i} \geq 1.$$

No obstante, tenemos que

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_i} = \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1-\alpha_2} \left(\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\right)^{\alpha_2-\alpha_3} \cdots \left(\frac{\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_n}{\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n}\right)^{\alpha_n-\alpha_{n+1}} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\beta_1 \ldots \beta_k}{\alpha_1 \ldots \alpha_k}\right)^{\alpha_k-\alpha_{k+1}},$$

con $\alpha_{n+1} = 0$ y así, como cada cociente es mayor o igual que 1 y todos los exponentes son positivos, el producto final es mayor o igual que 1.

Sea ahora $p > 0$ arbitrario. Puesto que

$$\prod_{i=1}^{k} \alpha_i \leq \prod_{i=1}^{k} \beta_i$$

implica

$$\prod_{i=1}^{k} {\alpha_i}^p \leq \prod_{i=1}^{k} {\beta_i}^p,$$

basta aplicar ahora lo probado anteriormente para concluír que

$$\sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^p \leq \sum_{i=1}^{n} {\beta_i}^p. \qquad \square$$

Teorema 3.11 (desigualdad de Weyl II).
Sea $T \in \mathcal{K}(H)$ un operador compacto y $p \in [1, \infty)$. En tal caso,

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(T)|^p \leq \sum_{i=1}^{n} s_i(T)^p, \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración.

En virtud de la Proposición 3.7 anterior, sabemos que

$$\prod_{i=1}^{k} |\lambda_i(T)| \leq \prod_{i=1}^{k} s_i(T), \quad \text{para todo } 1 \leq k \leq n.$$

En tal caso, empleando la Proposición 3.10, concluimos que

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(T)|^p \leq \sum_{i=1}^{n} s_i(T)^p. \qquad \square$$

Pasamos ahora a probar las desigualdades de Ky Fan mencionadas al inicio de la sección. Necesitaremos el siguiente resultado auxiliar.

Proposición 3.12 (auxiliar para el Teorema 3.14).
Sean $S, T \in \mathcal{K}(H)$ dos operadores compactos. En tal caso,

$$\prod_{i=1}^{n} s_i(ST) \leq \prod_{i=1}^{n} s_i(S)s_i(T), \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración.

Sea $n \in \mathbb{N}$ escogido de forma arbitraria. Si $s_n(ST) = 0$, el resultado enunciado es trivial. Supongamos entonces $s_n(ST) \neq 0$; en tal caso, debe ser $s_i(ST) \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Por la descomposición polar de ST, existe una isometría $V \in \mathcal{B}(H)$ tal que $|ST| = VST$. Consideremos ahora el subespacio $H_n = \operatorname{span}\{v_i : 1 \leq i \leq n\}$, donde v_i es un autovector asociado a $\lambda_i(|ST|) = s_i(ST)$ para cada $1 \leq i \leq n$. En tal caso, si P es la proyección ortogonal de H sobre H_n y Q es la proyección ortogonal de H sobre $T(H_n)$, empleando la Proposición 3.7 y la Nota 3.6, tenemos que

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} s_i(ST) &= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(|ST|) = \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i(VST)| = |\det(PVSTP)| \\ &= |\det(PVSQQTP)| = |\det(PVSQ)|\,|\det(QTP)| \\ &= \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i(PVSQ)| \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i(QTP)| \\ &\leq \prod_{i=1}^{n} s_i(PVSQ) \prod_{i=1}^{n} s_i(QTP) \leq \prod_{i=1}^{n} s_i(S) \prod_{i=1}^{n} s_i(T). \qquad \square\end{aligned}$$

Nota 3.13 (sobre los "determinantes" anteriores)**.**

En la demostración anterior, todos los determinantes que aparecen están bien definidos, pues son determinantes de operadores de rango finito (ver (2.5)).

Ahora ya estamos en condiciones de probar las desigualdades de Ky Fan.

Teorema 3.14 (desigualdad de Ky Fan I)**.**

Sean S, $T \in \mathcal{K}(H)$ dos operadores compactos. En tal caso, para $n \in \mathbb{N}$ y $r, p, q > 0$,

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} s_i(ST)^r\Big)^{\frac{1}{r}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} s_i(S)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{n} s_i(T)^q\Big)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{si} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Demostración.

En virtud de la Proposición 3.12, sabemos que

$$\prod_{i=1}^{k} s_i(ST) \leq \prod_{i=1}^{k} s_i(S)s_i(T), \quad \text{para todo } 1 \leq k \leq n.$$

En tal caso, la Proposición 3.10 nos permite afirmar que

$$\sum_{i=1}^{n} s_i(ST)^r \leq \sum_{i=1}^{n} s_i(S)^r s_i(T)^r.$$

Además, como $1/(p/r) + 1/(q/r) = 1$, aplicando la desigualdad de Hölder, concluimos finalmente que

$$\sum_{i=1}^{n} s_i(ST)^r \leq \sum_{i=1}^{n} s_i(S)^r s_i(T)^r \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} s_i(S)^p\Big)^{\frac{r}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{n} s_i(T)^q\Big)^{\frac{r}{q}}. \qquad \square$$

Teorema 3.15 (desigualdad de Ky Fan II).
Sean S, $T \in \mathcal{K}(H)$ dos operadores compactos. En tal caso,

$$\sum_{i=1}^{n} s_i(S+T) \leq \sum_{i=1}^{n} s_i(S) + \sum_{i=1}^{n} s_i(T), \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración.
En virtud del Teorema espectral para operadores compactos y autoadjuntos (Teorema 2.11), sabemos que existe un conjunto ortonormal $\{e_i \colon i \in I\} \subset H$ de modo que, por ser $|S+T|$ un operador positivo

$$|S+T|x = \sum_{i \in I} \lambda_i(|S+T|)(x, e_i)e_i = \sum_{i \in I} s_i(S+T)(x, e_i)e_i, \quad \text{para todo } x \in H.$$

Además, por la descomposición polar, existe una isometría parcial V sobre $\overline{\operatorname{span}\{e_i \colon i \in I\}}$ tal que

$$(S+T)x = V|S+T|x = \sum_{i \in I} s_i(S+T)(x, e_i)Ve_i, \quad \text{para todo } x \in H$$

y entonces

$$(S+T)e_i = s_i(S+T)Ve_i, \quad \text{para cada } i \in I,$$

de donde deducimos que, al ser V una isometría parcial,

$$((S+T)e_i, Ve_i) = s_i(S+T), \quad \text{para todo } i \in I. \tag{3.2}$$

Sea P la proyección ortogonal sobre $\overline{\operatorname{span}\{e_i \colon 1 \leq i \leq n\}}$. En tal caso, teniendo en cuenta (3.2),

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} s_i(S+T) &= \sum_{i=1}^{n}((S+T)e_i, Ve_i) = \sum_{i=1}^{n}((S+T)Pe_i, VPe_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(PV^*(S+T)Pe_i, e_i) = \operatorname{tr}(PV^*(S+T)P) \\
&= \operatorname{tr}(PV^*SP) + \operatorname{tr}(PV^*TP) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(PV^*SP) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(PV^*TP) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} s_i(PV^*SP) + \sum_{i=1}^{n} s_i(PV^*TP) \leq \sum_{i=1}^{n} s_i(S) + \sum_{i=1}^{n} s_i(T),
\end{aligned}$$

donde la penúltima desigualdad se obtiene aplicando la desigualdad de Weyl con $p = 1$. □

Nota 3.16 (sobre las "trazas" anteriores).
En la demostración anterior, todas las trazas que aparecen están bien definidos, pues son trazas de operadores de rango finito (ver (2.5)).

Nota 3.17 (Normas de Ky Fan).
Si H es un espacio de Hilbert (separable y de dimensión infinita) y $n \in \mathbb{N}$, la aplicación $\|\cdot\|_n^* \colon \mathcal{K}(H) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|T\|_n^* = \sum_{i=1}^{n} s_i(T), \quad \text{para cada } T \in \mathcal{K}(H),$$

define una norma en $\mathcal{K}(H)$. En efecto, pues se tiene que:

(N1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_i(T) \geq 0$ para todo $T \in \mathcal{K}(H)$ y $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_i(T) = 0 \Longleftrightarrow T = 0 \in \mathcal{K}(H)$;

(N2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_i(\lambda T) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda| s_i(T) = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} s_i(T)$, para todo $T \in \mathcal{K}(H)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$;

(N3) la desigualdad triangular de $\|\cdot\|_n^*$ es la desigualdad de Ky Fan II (Teorema 3.15).

Dado $n \in \mathbb{N}$, la norma $\|\cdot\|_n^*$ recibe el nombre de *norma n de Ky Fan*. Observemos además que $\|T\|_1^* = \|T\|$ para todo $T \in \mathcal{K}(H)$.

Nota 3.18 (hacia la clase traza)**.**
Una pregunta que surge ahora de modo natural es la siguiente:

¿existe algún subespacio $Y \subset \mathcal{K}(H)$ para el que la aplicación $\|\cdot\|_\infty^* \colon Y \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|T\|_\infty^* = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(T), \quad \textit{para cada } T \in Y,$$

esté bien definida y defina una norma en Y?

La respuesta es afirmativa. Tal y como veremos en el siguiente capítulo, $Y = \mathcal{S}_1(H) \neq \mathcal{K}(H)$, siendo $\mathcal{S}_1(H)$ la *clase traza* o clase 1 de Schatten-von Neumann.

Capítulo 4

Clases de Schatten-von Neumann

Introducimos ahora el concepto central de este Trabajo Fin de Grado: *las clases de Schatten-von Neumann*. Como veremos en la última sección, dichas clases (o familias) de operadores forman una "escala" de espacios de Banach; esto es, para cada "exponente" $1 \leq p \leq \infty$, tendremos asociada cierta familia de operadores: la clase de Schatten-von Neumann $\mathcal{S}_p$.

Los resultados que mostramos en este capítulo fueron obtenidos originalmente por R. Schatten en [9]. Podemos consultar versiones modernas de dichos resultados y numerosas generalizaciones en las obras del matemático alemán A. Piestesch (ver, por ejemplo, [7] y [6]). En [10], también se exponen de forma clara y didáctica muchos de los resultados que probaremos en este capítulo.

4.1. Clases de Schatten-von Neumann

Sea H un espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita.

Definición 4.1 (clases de Schatten-von Neumann)**.**
Para cada $1 \leq p < \infty$, la **clase de Schatten-von Neumann** $\mathcal{S}_p(H)$ es la familia formada por todos los operadores compactos cuya sucesión de valores singulares pertenece al espacio de sucesiones ℓ_p. Es decir,

$$\mathcal{S}_p(H) = \big\{T \in \mathcal{K}(H) : (s_n(T))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p\big\}.$$

Para $p = \infty$, consideraremos

$$\mathcal{S}_\infty(H) \equiv \big\{T \in \mathcal{K}(H) : (s_n(T))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty\big\} \equiv \mathcal{K}(H).$$

Es habitual emplear la siguiente notación:

(a) la clase $\mathcal{S}_1(H)$ es la familia de los **operadores nucleares** u **operadores de la clase traza**;

(b) la clase $\mathcal{S}_2(H)$ es la familia de los **operadores de Hilbert-Schmidt**;

(c) $\|T\|_p = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p\Big)^{1/p}$ para cada $1 \leq p < \infty$.

Nota 4.2 (ideales de operadores).

Teniendo en cuenta que, en virtud de la Nota 3.6, para $R, T, S \in \mathcal{B}(H)$ tenemos que

$$s_n(RTS) \leq \|R\| s_n(T) \|S\|, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

es entonces inmediato que la clase $\mathcal{S}_p(H)$ forma un **ideal bilátero** de $\mathcal{B}(H)$.

A continuación, centraremos nuestro interés en las clases de Schatten-von Neumann $\mathcal{S}_2(H)$ y $\mathcal{S}_1(H)$. Más concretamente, caracterizaremos aquellos operadores del espacio $\mathcal{B}(H)$ que pertenecen, bien a $\mathcal{S}_2(H)$, bien a $\mathcal{S}_1(H)$. Estos resultados, que también nos permitirán obtener expresiones para las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_1$, motivarán los contenidos y discusiones de los capítulos venideros. Son por tanto, resultados esenciales en este Trabajo Fin de Grado.

Más adelante, mostraremos resultados análogos (o, mejor dicho, *similares*, pues no serán tan informativos) para las clases de Schatten-von Neumann $\mathcal{S}_p(H)$ con $1 \leq p \leq \infty$.

4.1.1. La clase $\mathcal{S}_2$: operadores de Hilbert-Schmidt

Comencemos entonces estudiando la clase de los operadores de Hilbert-Schmidt.

Teorema 4.3 (caracterización de la clase $\mathcal{S}_2$).
Dado un operador $T \in \mathcal{B}(H)$, son equivalentes:

(a) *$T \in \mathcal{S}_2(H)$ (esto es, T es un operador de Hilbert-Schmidt);*

(b) *existe $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base de Hilbert de H de modo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$.*

Además, si $T \in \mathcal{S}_2(H)$ y $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Hilbert de H, entonces

$$\|T\|_2 = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.1}$$

Demostración.

Inicialmente, probaremos que para todo operador $T \in \mathcal{B}(H)$, el valor de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2$ no depende de la base de Hilbert $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ escogida. Para ello, si $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Hilbert de H arbitraria, basta observar que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |(Te_n, \varepsilon_m)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |(e_n, T^*\varepsilon_m)|^2 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, T^*\varepsilon_m)|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|T^*\varepsilon_m\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|T\varepsilon_m\|^2,\end{aligned}$$

donde no hemos empleado nada más que la identidad de Parseval.

Por otra parte, empleando la representación de Schmidt (Teorema 2.17), sabemos que existen conjuntos ortonormales $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en H de modo que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)(x, u_n)v_n, \quad \text{para todo } x \in H. \tag{4.2}$$

$(a) \Longrightarrow (b)$

Teniendo en cuenta (4.2), es inmediato que

$$\|Te_n\|^2 = (Te_n, Te_n) = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)(e_n, u_i)v_i, \sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)(e_n, u_i)v_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)^2 |(e_n, u_i)|^2$$

y entonces, empleando nuevamente la identidad de Parseval, concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)^2 \sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, u_i)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)^2 \|u_i\|^2 = \|T\|_2{}^2 < \infty,$$

quedando probada además la identidad (4.1) del enunciado.

$(b) \Longrightarrow (a)$

Veamos primero que $T \in \mathcal{K}(H)$. Para ello, basta probar que $a_n(T) \to 0$ cuando $n \to \infty$. En efecto, pues en tal caso T es límite de una sucesión de operadores de rango finito y entonces T es compacto.

Ahora bien, en virtud de la Proposición 3.12 anterior,

$$a_n(T) = c_n(T) = \text{ínf}\left\{\|T_{|X_n}\| : X_n \subset H,\ \operatorname{codim} X_n < n\right\} \leq \|T_{|\operatorname{span}\{e_i\colon 1 \leq i \leq n\}^{\perp}}\|.$$

Sea $x \in \operatorname{span}\{e_i\colon 1 \leq i \leq n\}^{\perp}$ con $\|x\| \leq 1$ arbitrario. En tal caso,

$$x = \sum_{i=n}^{\infty} (x, e_i)e_i \quad \text{y} \quad \|x\| = \Big(\sum_{i=n}^{\infty} |(x, e_i)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq 1.$$

Así pues, empleando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, concluimos que

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \Big\|\sum_{i=n}^{\infty} (x, e_i)Te_i\Big\| \leq \sum_{i=n}^{\infty} |(x, e_i)| \|Te_i\| \\ &\leq \Big(\sum_{i=n}^{\infty} |(x, e_i)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=n}^{\infty} \|Te_i\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\sum_{i=n}^{\infty} \|Te_i\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

y entonces ahora es claro que $a_n(T) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ahora, para probar que $T \in \mathcal{S}_2(H)$, tan sólo falta ver que $\|T\|_2 < \infty$. Para ello, completemos el conjunto ortonormal $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hasta obtener una base de Hilbert de H; es decir, añadimos a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Hilbert del espacio de Hilbert $\ker T \subset H$ para obtener así una base de Hilbert $(\hat{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H. En tal caso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T\hat{u}_n\|^2,$$

pero como $T\hat{u}_n = 0$ para todo $\hat{u}_n \in \ker T$, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T\hat{u}_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Tu_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|s_n(T)v_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^2.$$

Por tanto,

$$\|T\|_2 = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

□

4.1.2. La clase $\mathcal{S}_1$: operadores nucleares

Para los operadores nucleares tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.4 (caracterización de la clase $\mathcal{S}_1$).

(*a*) $\mathcal{S}_1(H) = \big\{T \in \mathcal{B}(H) : Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (x, u_k) v_k,\ \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k| \|u_k\| \|v_k\| < \infty \big\} =: N_1$;

(*b*) $\|T\|_1 = \text{ínf} \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k| \|u_k\| \|v_k\| : Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (x, u_k) v_k \Big\} =: \tau_1$.

Nota 4.5 (operadores nucleares).

Los operadores para los que disponemos de una representación como la indicada en (a) reciben el nombre de *operadores nucleares*. Así pues, la igualdad afirmada en (a) justifica la expresión "clase traza u operadores nucleares" para referirnos a $\mathcal{S}_1(H)$.

Demostración.

Dado $T \in \mathcal{S}_1(H)$, empleando la representación de Schmidt (Teorema 2.17), sabemos que existen conjuntos ortonormales $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en H de modo que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)(x, x_n) y_n, \quad \text{para todo } x \in H.$$

En tal caso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n(T)| \|x_n\| \|y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \|x_n\| \|y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) = \|T\|_1 < \infty,$$

de donde deducimos que $T \in N_1$ —luego $\mathcal{S}_1(H) \subset N_1$— y que $\tau_1(T) \leq \|T\|_1$.

Por otra parte, de la definición de N_1, se sigue que los operadores de rango finito son densos en N_1; luego $N_1 \subset \mathcal{K}(H)$. Por tanto, para probar que $N_1 \subset \mathcal{S}_1(H)$, basta observar que si $T \in N_1$ es de rango finito, entonces $\|T\|_1 \leq \tau_1(T) < \infty$.

No obstante, dados $T \in N_1$ y $\varepsilon > 0$, existen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conjuntos ortonormales en H de modo que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (x, u_n) v_n, \quad \text{para todo } x \in H$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n| \|u_n\| \|v_n\| \leq (1+\varepsilon)\tau_1(T).$$

Por la representación polar de T, existe una isometría V tal que $|T| = VT$, luego

$$\|T\|_1 = \sum_{n=1} s_n(T) = \sum_{n} \lambda_n(|T|) = \sum_{i=1}^{\infty} (|T| e_i, e_i),$$

para cierta base de Hilbert $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de H. Así, empleando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|T\|_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (e_i, u_n) V v_n, e_i \Big) = \Big| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \overline{(\overline{\mu_n} u_n, e_i)} (V v_n, e_i) \Big| = \Big| \sum_{n=1}^{\infty} (V v_n, \overline{\mu_n} u_n) \Big| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|V v_n\| \|\overline{\mu_n} u_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n| \|u_n\| \|v_n\| \leq (1+\varepsilon)\tau_1(T). \end{aligned}$$

Por tanto, debe ser $\tau_1(T) \leq \|T\|_1$.

Dado que ya hemos probado que $\tau_1(T) \leq \|T\|_1$ y $\tau_1(T) \geq \|T\|_1$, concluimos finalmente que $\tau_1(T) = \|T\|_1$. □

4.1.3. Más caracterizaciones

Veamos ahora algunos resultados similares a los Teoremas 4.3 y 4.4 anteriores para clases de Schatten-von Neumann $\mathcal{S}_p(H)$ con $1 \leq p < \infty$.

Conviene observar que en los tres teoremas que siguen asumimos como hipótesis la compacidad del operador T en cuestión. Por tanto, a diferencia de lo visto en los dos teoremas anteriores —donde caracterizábamos las clases $\mathcal{S}_1(H)$ y $\mathcal{S}_2(H)$ en el espacio $\mathcal{B}(H)$—, aquí tendremos que conformarnos con caracterizaciones de la correspondiente clase $\mathcal{S}_p(H)$ en el espacio de los operadores compactos $\mathcal{K}(H)$.

Para $p \geq 2$ podemos obtener un resultado *similar* al Teorema 4.3 anterior; es importante comparar (4.1) con (4.3).

Teorema 4.6 (caracterización I de la clase $\mathcal{S}_p$).
Sea $p \geq 2$. Dado un operador $T \in \mathcal{K}(H)$, son equivalentes:

(a) *$T \in \mathcal{S}_p(H)$;*

(b) *para toda base de Hilbert $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H se tiene que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^p < \infty.$

Además, si $T \in \mathcal{S}_p(H)$, entonces

$$\|T\|_p = \sup\Big\{\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} : (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ base de Hilbert de } H\Big\}. \tag{4.3}$$

Demostración.

Empleando la representación de Schmidt (Teorema 2.17), sabemos que existen conjuntos ortonormales $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en H de modo que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)(x, u_n)v_n, \quad \text{para todo } x \in H. \tag{4.4}$$

$(a) \implies (b)$

Sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Hilbert de H. En tal caso, empleando la desigualdad de Hölder (con exponente $p/2$) y la desigualdad de Bessel, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|Te_n\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)^2|(e_n, u_i)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)^2|(e_n, u_i)|^{\frac{4}{p}}|(e_n, u_i)|^{2-\frac{4}{p}} \\
&\leq \Big(\sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)^p|(e_n, u_i)|^2\Big)^{\frac{2}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |(e_n, u_i)|^2\Big)^{1-\frac{2}{p}} \\
&\leq \Big(\sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)^p|(e_n, u_i)|^2\Big)^{\frac{2}{p}} \|e_n\|^{2-\frac{4}{p}} = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)^p|(e_n, u_i)|^2\Big)^{\frac{2}{p}},
\end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\|Te_n\|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)^p|(e_n, u_i)|^2$$

y entonces, empleando ahora la identidad de Parseval, concluimos finalmente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)^p|(e_n, u_i)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)^p \sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, u_i)|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)^p \|u_i\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)^p = \|T\|_p < \infty. \tag{4.5}$$

$(b) \Longrightarrow (a)$

Teniendo en cuenta la hipótesis (b) y (4.4), obtenemos que

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \|Tu_n\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \|s_n(T)v_n\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p = \|T\|_p; \tag{4.6}$$

esto es, $T \in \mathcal{S}_p(H)$.

Además, teniendo en cuenta (4.6), ahora es claro que

$$\|T\|_p \leq \sup\Big\{\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} : (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ base de Hilbert de } H\Big\},$$

que junto con (4.5), nos permite concluir la veracidad de la identidad (4.3). □

Para $1 \leq p < \infty$, si $T \in \mathcal{B}(H)$ es un operador compacto y positivo (ver epígrafe 2.1.2), podemos probar un resultado similar al Teorema 4.6 anterior; conviene ahora observar las diferencias y analogías entre (4.3) y (4.7).

Teorema 4.7 (caracterización II de la clase $\mathcal{S}_p$)**.**
Sea $p \geq 1$. Dado un operador positivo $T \in \mathcal{K}(H)$, son equivalentes:

(a) *$T \in \mathcal{S}_p(H)$;*

(b) *para todo conjunto ortonormal $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} |(Tu_n, u_n)|^p < \infty$.*

Además, si $T \in \mathcal{S}_p(H)$ es un operador positivo, entonces

$$\|T\|_p = \sup\Big\{\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |(Tu_n, u_n)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ conjunto ortonormal}\Big\}. \tag{4.7}$$

Demostración.

Por ser T un operador positivo, T es autoadjunto y entonces, en virtud del Teorema espectral para operadores compactos y autoadjuntos (Teorema 2.11), sabemos que existe un conjunto ortonormal $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(T)(x, e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)(x, u_n)u_n, \quad \text{para cada } x \in H. \tag{4.8}$$

$(a) \Longrightarrow (b)$

Sea $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto ortonormal en H y P la proyección ortogonal de H sobre $\ker T$. En tal caso, para cada $m \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$(Tv_m, v_m) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)(v_m, u_n)u_n, Pv_m + \sum_{n=1}^{\infty}(v_m, u_n)u_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)|(v_m, u_n)|^2.$$

Sea ahora q tal que $1/p + 1/q = 1$; en tal caso, utilizando la desigualdad de Hölder,

$$
\begin{aligned}
|(Tv_m, v_m)| &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)|(v_m, u_n)|^{\frac{2}{p}}|(v_m, u_n)|^{\frac{2}{q}} \\
&\leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p|(v_m, u_n)|^2\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|(v_m, u_n)|^2\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p|(v_m, u_n)|^2\Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty}|(Tv_m, v_m)|^p &\leq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p|(v_m, u_n)|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p \sum_{m=1}^{\infty}|(v_m, u_n)|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p = \|T\|_p < \infty. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

$(b) \Longrightarrow (a)$

Teniendo en cuenta (4.8) y la hipótesis (b), obtenemos que

$$
\|T\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p = \sum_{n=1}^{\infty}|(Tu_n, u_n)|^p < \infty;
$$

es decir, $T \in \mathcal{S}_p(H)$.

Además, ahora es claro que

$$
\|T\|_p \leq \sup\Big\{\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|(Tu_n, u_n)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ conjunto ortonormal}\Big\},
$$

que junto con (4.9) nos permite concluír la veracidad de (4.8). □

Nota 4.8 (sobre la hipótesis "T operador positivo")**.**

En el resultado anterior es imprescindible la hipótesis "T operador positivo" y no es suficiente la condición "T autoadjunto", pues la igualdad (4.8) exige que $\lambda_i(T) \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Nota 4.9 (sobre el concepto de traza)**.**

Conviene observar que para $p = 1$, la igualdad (4.7) sería una generalización natural al caso infinito dimensional del concepto de traza introducido en el Capítulo 1 anterior (ver (1.2)).

Finalizamos este epígrafe con el resultado más general sobre clases de Schatten-von Neumann $\mathcal{S}_p(H)$ con $1 \leq p < \infty$. Es conveniente comparar ahora las hipótesis y tesis del Teorema 4.10 siguiente con las hipótesis y tesis del Teorema 4.7 anterior.

Teorema 4.10 (caracterización III de la clase $\mathcal{S}_p$)**.**
Sea $p \geq 1$. Dado un operador $T \in \mathcal{K}(H)$, son equivalentes:

(a) *$T \in \mathcal{S}_p(H)$;*

(b) *para todo par de conjuntos ortonormales $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|(Tu_n, v_n)|^p < \infty$.*

Además, si $T \in \mathcal{S}_p(H)$, entonces

$$\|T\|_p = \sup\Big\{ \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |(Tu_n, v_n)|^p \Big)^{\frac{1}{p}} : (u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ conjuntos ortonormales} \Big\}. \tag{4.10}$$

Demostración.

Empleando la representación de Schimdt (Teorema 2.17), sabemos que existen conjuntos ortonormales $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en H de modo que

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} s_n(T)(x, x_i)y_i, \quad \text{para todo } x \in H. \tag{4.11}$$

$(a) \Longrightarrow (b)$

Sean $T \in \mathcal{S}_p(H)$ y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conjuntos ortonormales en H. Inicialmente, probaremos (b) para el operador $|T|$. Para ello, observemos que

$$\begin{aligned} |(|T|u_n, v_n)|^2 &= |(|T|^{\frac{1}{2}}u_m, |T|^{\frac{1}{2}}v_n)|^2 \le \||T|^{\frac{1}{2}}u_n\|^2 \||T|^{\frac{1}{2}}v_n\|^2 \\ &= (|T|^{\frac{1}{2}}u_n, |T|^{\frac{1}{2}}u_n)(|T|^{\frac{1}{2}}v_n, |T|^{\frac{1}{2}}v_n) = (|T|u_n, u_n)(|T|v_n, v_n), \end{aligned}$$

luego

$$|(|T|u_n, v_n)| \le (|T|u_n, u_n)^{\frac{1}{2}}(|T|v_n, v_n)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

y por tanto, utilizando la desigualdad de Hölder, el Teorema 4.7 anterior y la hipótesis (b), concluimos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |(|T|u_n, v_n)|^p &\le \sum_{n=1}^{\infty} (|T|u_n, u_n)^{\frac{p}{2}}(|T|v_n, v_n)^{\frac{p}{2}} \\ &\le \Big(\sum_{n=1}^{\infty} (|T|u_n, u_n)^p \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} (|T|v_n, v_n)^p \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \|T\|_p{}^{\frac{p}{2}} \|T\|_p{}^{\frac{p}{2}} = \|T\|_p{}^p < \infty. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Ahora, teniendo en cuenta (4.12) y que $s_n(T) = s_n(|T|)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluimos finalmente que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |(Tu_n, v_n)|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |(V|T|u_n, v_n)|^p &= \sum_{n=1}^{\infty} |(|T|u_n, V^* v_n)|^p \\ &\le \sup\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} |(|T|u_n, v_n)|^p : (u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ conjuntos ortonormales} \Big\} \\ &\le \||T|\|_p{}^p = \|T\|_p{}^p < \infty. \end{aligned} \tag{4.13}$$

$(b) \Longrightarrow (a)$

En virtud de (4.11) y de la hipótesis (b), tenemos que

$$\begin{aligned} \|T\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p &= \sum_{n=1}^{\infty} |(Tx_n, y_n)|^p \\ &\le \sup\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} |(Tu_n, v_n)|^p : (u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ conjuntos ortonormales} \Big\} < \infty; \end{aligned} \tag{4.14}$$

luego $T \in \mathcal{S}_p(H)$.

La identidad (4.10) es consecuencia de (4.13) y (4.14). $\square$

4.2. Las clases $\mathcal{S}_p$ son espacios de Banach

Ahora ya estamos en condiciones de probar que, para $1 \leq p \leq \infty$, $(\mathcal{S}_p(H), \|\cdot\|_p)$ es un espacio vectorial normado completo (i.e., un espacio de Banach).

Para $p = \infty$, tal y como ya indicamos al principio de este capítulo, $\mathcal{S}_\infty(H) = \mathcal{K}(H)$ y además por el carácter decreciente de la sucesión de números singulares, concluimos que

$$\|T\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n(T) = s_1(T) \equiv \|T\|.$$

Así pues, dado que $\mathcal{K}(H)$ es un conjunto cerrado en $(\mathcal{B}(H), \|\cdot\|)$, la completitud de $(\mathcal{S}_\infty(H), \|\cdot\|_\infty) \equiv (\mathcal{K}(H), \|\cdot\|)$ es clara.

Por tanto, en lo que sigue, consideraremos $1 \leq p < \infty$. Inicialmente, veremos que $\|\cdot\|_p$ define una norma en $\mathcal{S}_P(H)$ —esto será una consecuencia del Teorema 4.10 anterior—, veremos que

Corolario 4.11 ($(\mathcal{S}_p(H), \|\cdot\|_p)$ es un espacio vectorial normado)**.**
Sea $1 \leq p < \infty$. En tal caso,

$$\|T + S\|_p \leq \|T\|_p + \|S\|_p, \quad \textit{para todo } \ T,\, S \in \mathcal{S}_p(H).$$

Demostración.
Dados dos conjuntos ortonormales arbitrarios $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, empleando la desigualdad de Minkowski, tenemos que

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |((T+S)u_n, v_n)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} &\leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \big(|(Tu_n, v_n)| + |(Su_n, v_n)|\big)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |(Tu_n, v_n)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |(Su_n, v_n)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

de donde deducimos el resultado enunciado a partir del Teorema 4.10. □

Teorema 4.12 ($(\mathcal{S}_p(H), \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach)**.**
Si $1 \leq p < \infty$, el espacio vectorial normado $(\mathcal{S}_p, \|\cdot\|_p)$ es completo.

Demostración.
Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy arbitraria en $(\mathcal{S}_p(H), \|\cdot\|_p)$. En tal caso, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{B}(H), \|\cdot\|)$. En efecto, pues

$$\|T\| = s_1(T) \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \|T\|_p, \quad \text{para todo } T \in \mathcal{S}_p(H).$$

Así pues, como $(\mathcal{B}(H), \|\cdot\|)$ es completo, existe $T \in \mathcal{B}(H)$ tal que $T_n \to T$ cuando $n \to \infty$ en $\mathcal{B}(H)$. Además, como $\mathcal{K}(H)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(H)$, sabemos que $T \in \mathcal{K}(H)$. Probaremos que $T \in \mathcal{S}_p(H)$.

Para ello, comencemos recordando que como $s_{i+j-1}(R+S) \leq s_i(R) + s_j(S)$ (ver Nota 3.6 (b)), entonces

$$s_i(A+B) = s_{i+1-1}(A+B) \leq s_i(A) + \|B\|$$

y así, escogiendo $A + B = T_n$ y $A = T_m$, tenemos que

$$|s_i(T_n) - s_i(T_m)| \leq \|T_n - T_m\|, \quad \text{para cada } i \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, ahora es fácil probar que

$$\lim_{n\to\infty} s_i(T_n) = s_i(T), \quad \text{para cada } i \in \mathbb{N}. \tag{4.15}$$

Además, como $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{S}_p(H)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N_\varepsilon$, entonces

$$\sum_{i=1}^{L} s_i(T_n - T_m)^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} s_i(T_n - T_m)^p = \|T_n - T_m\|_p{}^p < \varepsilon^p, \quad \text{para todo } L \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, tomando límite cuando $n \to \infty$ y teniendo en cuenta (4.14), concluimos que

$$\sum_{i=1}^{L} s_i(T - T_m)^p < \varepsilon^p,$$

y ahora, haciendo $L \to \infty$, obtenemos que $\|T - T_m\|_p < \varepsilon$. Así pues, dado que

$$\|T\|_p = \|T - T_n + T_n\|_p \leq \|T - T_n\| + \|T_n\|_p < \infty,$$

deducimos finalmente que $T \in \mathcal{S}_p(H)$ y $T_n \to T$ en $(S_p(H), \|\cdot\|)$. $\square$

Nota 4.13 (sobre la completitud de $\mathcal{S}_p(H)$)**.**
La completitud de la clase de Schatten-von Neumann $\mathcal{S}_p(H)$ no contradice el hecho de que, tal y como dijimos en la Nota 2.8, $\mathcal{K}(H)$ es el único ideal cerrado de $\mathcal{B}(H)$.
En efecto, pues $\mathcal{S}_p(H)$ es cerrado con su propia norma $\|\cdot\|_p$, pero no lo será con la norma usual $\|\cdot\|$ de $\mathcal{B}(H)$. De hecho, $\overline{\mathcal{S}_p(H)}^{\|\cdot\|} = \mathcal{K}(H)$, pues $\mathcal{F}(H) \subset \mathcal{S}_p(H)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Nota 4.14 (*"Lo bello es difícil"*)**.**
Una pregunta que surge ahora de modo natural es la siguiente:

¿existe algún $1 \leq p < \infty$ para el que la clase Schatten-von Neumann $(\mathcal{S}_p(H), \|\cdot\|_p)$ sea un espacio de Hilbert?

La intuición nos dice que la clase $(\mathcal{S}_2(H), \|\cdot\|_2)$ de **Hilbert**-Schmidt debe ser un espacio de Hilbert y quizás el producto interior podría venir dado por

$$\langle S, T\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(S) s_i(T), \quad \text{para } S,\, T \in \mathcal{K}(H),$$

pero como no se tiene que $s_i(T_1 + T_2) = s_i(T_1) + s_i(T_2)$ para T_1, $T_2 \in \mathcal{K}(H)$, no tendríamos la linealidad del "producto interior" $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Y entonces $\langle\cdot,\cdot\rangle$ no es un producto interior en $\mathcal{K}(H)$... pero, a lo mejor, el producto interior *es la traza*!
Para responder correctamente a la cuestión anterior, necesitaremos los resultados de la primera parte del Capítulo 5 (ver epígrafe 5.1.1).

Terminamos esta sección con un resultado sencillo, pero importante.

Lema 4.15 (densidad de los operadores de rango finito)**.**
Sea $1 \leq p \leq \infty$. En tal caso, los operadores de rango finito son densos en $(\mathcal{S}_p, \|\cdot\|_p)$.

Demostración.

Para $p=\infty$, tenemos que $(\mathcal{S}_\infty(H), \|\cdot\|_\infty) \equiv (\mathcal{K}(H), \|\cdot\|)$ y, en este caso el resultado es bien conocido. Sea entonces $1 \le p < \infty$ y $T \in \mathcal{S}_p$ siendo

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)(x, u_n)v_n, \quad \text{para cada } x \in H,$$

su representación de Schmidt (Teorema 2.17). En tal caso, considerando la sucesión de operadores de rango finito $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$T_n x = \sum_{i=1}^{n} s_i(T)(x, u_i)v_i, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

obtenemos que

$$\|T - T_n\|_p = \Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} |s_i(T)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \text{si } n >> 1. \qquad \square$$

$$\mathcal{S}_1(H) \subset \cdots \subset \mathcal{S}_2(H) \subset \cdots \subset \mathcal{S}_p(H) \subset \cdots \subset \mathcal{S}_\infty(H) = \mathcal{K}(H).$$

Figura 4.1: La escala de las clases de Schatten-von Neumann.

4.3. Operadores de Hilbert-Schmidt en $\mathsf{L}^2(0,1)$

Finalizamos este capítulo mostrando una caracterización de los operadores de la clase de Schatten-von Neumann (i.e. del espacio de Hilbert) $\mathcal{S}_2(H)$ cuando H es el espacio de Hilbert (y de Lebesgue!) $H = \mathsf{L}^2(0,1)$.

Teorema 4.16 (Caracterización de $\mathcal{S}_2(\mathsf{L}^2(0,1))$)**.**
Dado un operador $T \in \mathcal{K}(\mathsf{L}^2(0,1))$, son equivalentes:

(*a*) $T \in \mathcal{S}_2(\mathsf{L}^2(0,1))$;

(*b*) *existe una función $k \in \mathsf{L}^2((0,1)\times(0,1))$ tal que*

$$Tf(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)\,dy, \quad \textit{para casi todo } x \in (0,1) \ \textit{ y toda } \ f \in H.$$

Además, si $T \in \mathcal{S}_2(\mathsf{L}^2(0,1))$ y $k \in \mathsf{L}^2((0,1)\times(0,1))$ es la función núcleo asociada, entonces

$$\|T\|_2 = \|k\|_{\mathsf{L}^2} \quad y \quad (\lambda_n(T))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2. \tag{4.16}$$

Demostración.

Empleando la representación de Schmidt (Teorema 2.17), sabemos que existen conjuntos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y (g_n) ortonormales en $\mathsf{L}^2(0,1)$ de modo que

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)(f, f_n)g_n, \quad \text{para toda } f \in \mathsf{L}^2(0,1).$$

$(a) \Longrightarrow (b)$

Consideremos la expresión

$$k(x,y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} s_i(T)\overline{f_i(y)}g_i(x), \quad (x,y) \in (0,1)\times(0,1),$$

que define una función $k \in \mathsf{L}^2((0,1)\times(0,1))$. En efecto, pues

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|s_i(T)\overline{f_i(y)}g_i(x)\|_{\mathsf{L}^2(0,1)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)\|\overline{f_i}\|_{\mathsf{L}^2(0,1)}\,\|g_i\|_{\mathsf{L}^2(0,1)} = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(T) < \infty$$

y además,

$$\|k(x,y)\|_{\mathsf{L}^2(0,1)} = \lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{i=1}^{n} s_i(T)\overline{f_i(y)}g_i(x)\Big\|_{\mathsf{L}^2(0,1)} = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^{n} s_i(T)^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \|T\|_2,$$

quedando probada así la primera afirmación de (4.16).

Por otra parte, dado que

$$\lim_{n\to\infty} \Big\|Tf - \sum_{i=1}^{n} s_n(T)(f,f_i)g_i\Big\|_{\mathsf{L}^2(0,1)} = 0,$$

deducimos finalmente que, para casi todo $x \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 k(x,y)f(y)dy &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} s_i(T)g_i(x)\int_0^1 \overline{f_i(y)}f(y)dy\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} s_i(T)g_i(x)(f,f_i) = Tf(x).\end{aligned}$$

$(b) \Longrightarrow (a)$

Así definido, T es un operador acotado satisfaciendo que $\|T\| \leq \|k\|_{L^2}$. Además, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Hilbert de H y definimos

$$f_n \otimes \overline{f_m}(x,y) = f_n(x)\overline{f_m(y)}, \quad \text{para cada } (n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},$$

entonces $(f_n \otimes \overline{f_m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ es una base de Hilbert de $\mathsf{L}^2((0,1)\times(0,1))$.

En tal caso, empleando la identidad de Parseval, obtenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\|Tf_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|(Tf_n,f_m)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Big|\int_0^1\int_0^1 k(x,y)f_n(y)\,dy\,\overline{f_m(x)}\,dx\Big|^2\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Big|\int_0^1\int_0^1 k(x,y)f_n(y)\overline{f_m(x)}\,dx\,dy\Big|\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|(k, f_m\otimes\overline{f_n})|^2 = \|k\|_{\mathsf{L}^2}(0,1)^2 < \infty\end{aligned}$$

y así, en virtud del Teorema 4.3 anterior, $T \in \mathcal{S}_2$.

Además, por el Teorema 3.11 anterior (desigualdad de Weyl), es ahora claro que $(\lambda_n(T))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$, quedando entonces probado lo afirmado en (4.16). $\square$

Nota 4.17 (sobre la demostración del Teorema 4.16 anterior)**.**

La desigualdad $\|T\| \leq \|k\|_{\mathsf{L}^2(0,1)}$ y el hecho de que $(f_n \otimes \overline{f_m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ es una base de Hilbert de $\mathsf{L}^2((0,1)\times(0,1))$ son resultados conocidos de la materia *Análisis funcional en espacios de Hilbert*, por lo que no incluimos su demostración.

Capítulo 5

Traza y dualidad

En la primera sección de este capítulo, generalizaremos el concepto de *traza de una matriz* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Más exactamente, veremos que para todo operador $T \in \mathcal{S}_1(H)$ con H espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, podemos hablar de *la traza del operador* T. Además de introducir dicho concepto, también probaremos sus propiedades más elementales.

La segunda sección, en la que la traza jugará un papel determinante, estará dedicada al estudio del espacio dual de la clase de Schatten-von Neumann $\mathcal{S}_p(H)$ con $1 \leq p \leq \infty$. En particular, probaremos que la clase traza $(\mathcal{S}_1(H), \|\cdot\|)$ es el dual del espacio de los operadores compactos $(\mathcal{K}(H), \|\cdot\|)$ y el predual del espacio de operadores $\mathcal{B}(H)$.

Para el estudio y desarrollo de los contenidos de este capítulo, hemos utilizado las referencias [19] y [10]. Resultados más avanzados y generales pueden consultarse en [7, 16].

5.1. El funcional traza

Sea H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita.

En el Capítulo 4 anterior (ver Teorema 4.7 y Nota 4.9), ya fuimos capaces de generalizar el concepto de traza para un operador positivo $T \in \mathcal{S}_1(H) \subset \mathcal{K}(H)$. No obstante, como ya dijimos antes, lo que ahora pretendemos es definir *la traza de un operador* $T \in \mathcal{S}_1(H)$ (no necesariamente positivo).

El siguiente resultado, junto con la nota posterior que le acompaña, nos permitirán alcanzar nuestro objetivo.

Proposición 5.1 (acercándonos a la definición de traza).
Si $T \in \mathcal{S}_1(H)$ *y* $\{e_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ *es un conjunto ortonormal en* H*, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Te_n, e_n) \quad \textit{converge absolutamente.} \tag{5.1}$$

Demostración.
Empleando la representación de Schmidt (Teorema 2.17), sabemos que existen conjuntos ortonormales $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en H de modo que

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)(x, u_i)v_i, \quad \text{para todo } x \in H. \tag{5.2}$$

Por tanto, para probar la convergencia absoluta enunciada, basta observar que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|(Te_n,e_n)| &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big|\Big(\sum_{i=1}^{\infty}s_i(T)(e_n,u_i)v_i,e_n\Big)\Big| \leq \sum_{i=1}^{\infty}s_i(T)\sum_{n=1}^{\infty}|(e_n,u_i)(v_i,e_n)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty}s_i(T)\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|(e_n,u_i)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|(v_i,e_n)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty}s_i(T)\|u_i\|\|v_i\| = \sum_{i=1}^{\infty}s_i(T) < \infty,\end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad hemos empleado la desigualdad de Minkowski. □

Nota 5.2 (muy importante!).
Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Hilbert de H, el valor de la serie que aparece en (5.1) no depende, en realidad, de dicha base de Hilbert. En efecto, pues teniendo en cuenta (5.2),

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Te_n,e_n) = \sum_{i=1}^{\infty}s_i(T)\sum_{n=1}^{\infty}(e_n,u_i)(v_i,e_n)$$

y así, observando que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(e_n,u_i)(v_i,e_n) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}(v_i,e_n)e_n,\sum_{n=1}^{\infty}(u_i,e_n)e_n\Big) = (v_i,u_i),$$

concluimos finalmente que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Te_n,e_n) = \sum_{i=1}^{\infty}s_i(T)(v_i,u_i), \tag{5.3}$$

siendo ahora clara la independencia del valor de (5.1) respecto de la base de Hilbert $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Definición 5.3 (traza de un operador $T\in\mathcal{S}_1(H)$).
Dado $T\in\mathcal{S}_1(H)$, definimos la **traza** de T como

$$\operatorname{tr}T = \sum_{n=1}^{\infty}(Te_n,e_n),$$

donde $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base (cualquiera) de Hilbert de H.

Los siguientes resultados muestran propiedades elementales de la aplicación traza, que como acabamos de ver, está bien definida en $\mathcal{S}_1(H)$ y toma valores en $[0,+\infty)\subset\mathbb{R}$.

Proposición 5.4 (propiedades I de $\operatorname{tr}(T)$).

(a) *Para todo operador $T\in\mathcal{S}_1(H)$, tenemos que $|\operatorname{tr}(T)|\leq\|T\|_1$.*

(b) *Si para cada $x,y\in H$ definimos*

$$T_{x,y}z = (z,y)x, \quad \textit{para cada } z\in H,$$

entonces

$$\operatorname{tr}(T_{x,y}S) = (Sx,y), \quad \textit{para todo } S\in\mathcal{B}(H).$$

Demostración.
(*a*)
Partiendo de (5.3), obtenemos que

$$|\mathrm{tr}\,(T)| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty}(Te_n, e_n)\Big| \leq \sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)|(v_i, u_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} s_i(T) = \|T\|_1,$$

donde hemos empleado la desigualdad de Minkowski.
(*b*)
Basta observar que

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,(T_{x,y}S) &= \sum_{n=1}^{\infty}(T_{x,y}Se_n, e_n) = \sum_{n=1}^{\infty}((Se_n, y)x, e_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(Se_n, y)(x, e_n)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(e_n, S^*y)(x, e_n) = (x, S^*y) = (Sx, y).\end{aligned}$$

□

Proposición 5.5 (propiedades II de $\mathrm{tr}\, T$)**.**

(*a*) $\mathrm{tr}\,(\alpha T + \beta S) = \alpha\,\mathrm{tr}\, T + \beta\,\mathrm{tr}\, S$ *para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(*b*) $\mathrm{tr}\, T^* = \overline{\mathrm{tr}\, T}$ *para todo operador* $T \in \mathcal{S}_1(H)$.

(*c*) *Para* $1 \leq p \leq \infty$, $1/q + 1/p = 1$, $S \in \mathcal{S}_p(H)$ *y* $T \in \mathcal{S}_q(H)$ *tenemos que:*

$$TS,\ ST \in \mathcal{S}_1(H), \quad \mathrm{tr}\,(TS) = \mathrm{tr}\,(ST) \quad y \quad |\mathrm{tr}\,(TS)| \leq \|S\|_p\|T\|_q.$$

Demostración.
(*a*)
Consecuencia inmediata de la definición de traza.
(*b*)
En virtud del Teorema 2.17, sabemos que existen conjuntos ortonormales $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en H de modo que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)(x, u_n)v_n, \quad \text{para todo } x \in H.$$

En tal caso, para todo $x, y \in H$,

$$(Tx, y) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)(x, u_n)\overline{(y, v_n)} = \Big(x, \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)(y, v_n)u_n\Big)$$

y entonces,

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)(x, v_n)u_n, \quad \text{para cada } x \in H.$$

Por tanto, $\|T^*\|_1 = \|T\|_1 < \infty$; es decir, $T \in \mathcal{S}_1(H)$. Además,

$$\mathrm{tr}\,(T^*) = \sum_{n=1}^{\infty}(T^*e_n, e_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(e_n, Te_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{(Te_n, e_n)} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty}(Te_n, e_n)} = \overline{\operatorname{tr}(T)}.$$

(c)

Empleando la Nota 3.6 anterior y desigualdad de Hölder, obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} s_i(TS) \leq \sum_{i=1}^{n} s_i(T)s_i(S) \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} s_i(T)^q\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\sum_{i=1}^{n} s_i(S)^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \|T\|_q \|S\|_p < \infty, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, haciendo $n \to \infty$, concluimos que $\|TS\|_1 \leq \|T\|_q\|S\|_p$; luego $TS \in \mathcal{S}_1$. De forma completamente análoga, probamos que $ST \in \mathcal{S}_1$.

Además, teniendo en cuenta la Proposición 5.4 (b) anterior, deducimos que

$$|\operatorname{tr}(TS)| \leq \|TS\|_1 \leq \|T\|_q\|S\|_p.$$

Consideremos ahora la representación espectral de T; esto es,

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(S)(x, u_n)v_n, \quad \text{para todo} x \in H,$$

con $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conjuntos ortonormales en H. En tal caso, para cada $x \in H$,

$$TSx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(S)(x, u_n)Tv_n, \quad \text{y} \quad STx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(S)(Tx, u_n)v_n. \tag{5.4}$$

Por tanto, teniendo en cuenta la Definición 5.3 anterior y (5.4), deducimos ahora que

$$\operatorname{tr}(TS) = \sum_{n=1}^{\infty}(TSu_n, u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(S)(Tv_n, u_n)$$

y

$$\operatorname{tr}(ST) = \sum_{n=1}^{\infty}(STv_n, v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(S)(Tv_n, u_n);$$

es decir, $\operatorname{tr}(TS) = \operatorname{tr}(ST)$. □

Corolario 5.6 ($\operatorname{tr} \in \mathcal{S}_1(H)^*$)**.**
La aplicación traza, $\operatorname{tr} : \mathcal{S}_1(H) \longrightarrow \mathbb{C}$*, es un funcional lineal y acotado.*

Demostración.
La linealidad de la aplicación traza ha sido probada en la Proposición 5.4 (a) anterior. Por otra parte, su acotación ha sido probada en la Proposición 5.4 (a) anterior. □

5.1.1. La clase de Hilbert-Schmidt es un espacio de Hilbert

Para probar que la clase de Schatten-von Neumann $(\mathcal{S}_2(H), \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Hilbert, basta mostrar que la aplicación dada por

$$\langle S, T\rangle = \operatorname{tr} ST^*, \quad \text{para } S,\, T \in \mathcal{S}_2(H)$$

define un producto interior en $\mathcal{S}_2(H)$.

No obstante, tenemos que:

(PI1) en virtud de la Proposición 5.5 (a) anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle S_1+S_2,T\rangle &= \operatorname{tr}(S_1+S_2)T^* = \operatorname{tr}(S_1T^*+S_2T^*)\\ &= \operatorname{tr}(S_1T^*)+\operatorname{tr}(S_2T^*) = \langle S_1,T\rangle+\langle S_2,T\rangle\end{aligned}$$

y

$$\langle \lambda S,T\rangle = \operatorname{tr}(\lambda ST^*) = \lambda \operatorname{tr} ST^* = \lambda\langle S,T\rangle;$$

(PI2) en virtud de la Proposición 5.5 $(b)-(c)$ anterior, tenemos que

$$\langle S,T\rangle = \operatorname{tr} ST^* = \overline{\operatorname{tr}(ST^*)^*} = \overline{\operatorname{tr}(TS^*)} = \overline{\langle T,S\rangle};$$

(PI3) y finalmente, dado que

$$\langle T,T\rangle = \operatorname{tr} TT^* = \sum_{n=1}^{\infty}(TT^*e_n,e_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(T^*e_n,T^*e_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\|T^*e_n\|},$$

concluimos entonces que $\langle T,T\rangle \geq 0$ para todo $T\in\mathcal{S}_\infty(H)$ y $\langle T,T\rangle = 0$ si y sólo si $T^*e_n = 0$ para todo vector e_n de una base de Hilbert $\{e_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ de H, es decir, si y sólo si $T=0\in\mathcal{S}_1(H)$.

5.2. La clase dual de la clase $\mathcal{S}_p$

Una vez introducido el concepto de traza para un operador $T\in\mathcal{S}_1(H)$, para caracterizar el espacio dual de la clase $\mathcal{S}_p(H)$, con $1<p\leq\infty$, tan sólo necesitamos algunos resultados auxiliares que probaremos a continuación.

El primero de estos resultados nos proporciona una nueva expresión para el cálculo (teórico) de la norma $\|\cdot\|_p$.

Proposición 5.7 (otra expresión para $\|\cdot\|_p$)**.**
Sea $1\leq p\leq\infty$ y q su exponente conjugado. En tal caso,

$$\|T\|_p = \sup\{|\operatorname{tr}(ST)| : \|S\|_q = 1\} = \sup\{|\operatorname{tr}(ST)| : \|S\|_q=1,\ \text{rango}\, S<\infty\}.$$

Demostración.
En virtud de la Proposición 5.5 (c) anterior, ya sabemos que $|\operatorname{tr}(ST)| \leq \|T\|_p\|S\|_q$, luego

$$\sup\big\{|\operatorname{tr}(ST)| : \|S\|_q=1\big\} \leq \|T\|_p.$$

Para probar la desigualdad opuesta, necesitaremos la representación de Schmidt (Teorema 2.17) del operador T; sea entonces

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)(x,u_n)v_n, \quad \text{para cada } x\in H, \tag{5.5}$$

con $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conjuntos ortonormales. Distinguiremos tres casos:

Caso I: $1<p<\infty$.

Dado $N\in\mathbb{N}$, consideramos el operador S_N —de rango finito— definido como

$$S_Nx = \Big(\sum_{n=1}^{N} s_n(T)^p\Big)^{-\frac{1}{q}} \sum_{n=1}^{N} s_n(T)^{\frac{p}{q}}(x,v_n)u_n, \quad \text{para cada } x\in H.$$

En tal caso, es claro que $S_N \in \mathcal{S}_q(H)$ y

$$\|S_N\|_q = \Big(\sum_{n=1}^N s_n(T)^p\Big)^{-\frac{1}{q}} \Big(\sum_{n=1}^N s_n(T)^p\Big)^{\frac{1}{q}} = 1.$$

Además, teniendo en cuenta (5.5) y la ortonormalidad del conjunto $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned}
S_N Tx &= \Big(\sum_{n=1}^N s_n(T)^p\Big)^{-\frac{1}{q}} \sum_{n=1}^N s_n(T)^{\frac{p}{q}} (Tx, v_n) u_n \\
&= \Big(\sum_{n=1}^N s_n(T)^p\Big)^{-\frac{1}{q}} \sum_{n=1}^N s_n(T)^{\frac{p}{q}} \Big(\sum_{i=1}^\infty s_i(T)(x,u_i)v_i, v_n\Big) u_n \\
&= \Big(\sum_{n=1}^N s_n(T)^p\Big)^{-\frac{1}{q}} \sum_{n=1}^N s_n(T)^{\frac{p}{q}} \sum_{i=1}^\infty s_i(T)(x,u_i)(v_i, v_n) u_n \\
&= \Big(\sum_{n=1}^N s_n(T)^p\Big)^{-\frac{1}{q}} \sum_{n=1}^N s_n(T)^{\frac{p}{q}} s_n(T)(x,u_n) u_n \\
&= \Big(\sum_{n=1}^N s_n(T)^p\Big)^{-\frac{1}{q}} \sum_{n=1}^N s_n(T)^p (x,u_n) u_n, \quad \text{para cada } x \in H;
\end{aligned}$$

luego

$$\operatorname{tr}(S_N T) = \sum_{n=1}^N (S_N T u_n, u_n) = \Big(\sum_{n=1}^N s_n(T)^p\Big)^{-\frac{1}{q}} \sum_{n=1}^N s_n(T)^p = \Big(\sum_{n=1}^N s_n(T)^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Por tanto,

$$\sup\big\{|\operatorname{tr}(ST)| : \|S\|_q = 1\big\} \geq \Big(\sum_{n=1}^N s_n(T)^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para todo } N \in \mathbb{N};$$

es decir,

$$\sup\big\{|\operatorname{tr}(ST)| : \|S\|_q = 1\big\} \geq \Big(\sum_{n=1}^\infty s_n(T)^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Caso II: $p = 1$

Dado $N \in \mathbb{N}$, consideramos el operador S_N —de rango finito— definido como

$$S_N x = \sum_{n=1}^N (x, v_n) u_n, \quad \text{para cada } x \in H.$$

En tal caso, es claro que $\|S_N\|_\infty = \|S_N\| = 1$; además, teniendo en cuenta (5.5),

$$S_N T x = \sum_{n=1}^N s_n(T)(x, u_n) u_n, \quad \text{para cada } x \in H;$$

luego

$$\operatorname{tr}(S_N T) = \sum_{n=1}^N s_n(T), \quad \text{para cada } N \in \mathbb{N}.$$

Por tanto,

$$\sup\big\{|\mathrm{tr}\,(ST)| : \|S\|_\infty = 1\big\} \geq \sum_{n=1}^{N} s_n(T), \quad \text{para todo } N \in \mathbb{N};$$

es decir,

$$\sup\big\{|\mathrm{tr}\,(ST)| : \|S\|_\infty = 1\big\} \geq \|T\|_1.$$

Caso III: $p = \infty$

Sea $R_{x,y}$ el operador de rango 1 dado por

$$R_{x,y}z = (z, y)x, \quad \text{para cada } z \in H.$$

Si $\|x\| = \|y\| = 1$, entonces es claro que $\|R_{x,y}\|_1 = \|R_{x,y}\| = 1$; además, teniendo en cuenta la Proposición 5.1 (b) anterior, $|(Tx, y)| = |\mathrm{tr}\,(R_{x,y}T)|$. Por tanto,

$$\|T\| = \sup\big\{|(Tx, y)| : \|x\| = \|y\| = 1\big\} \leq \sup\big\{|\mathrm{tr}\,(ST)| : \|S\|_1 = 1\big\}. \qquad \square$$

Lema 5.8 (auxiliar para el Teorema 5.9)**.**
Sea $L(x, y)$ una aplicación lineal en x cuyo conjugado es lineal en y. Entonces, si existe una constante $C > 0$ tal que

$$|L(x, y)| \leq C\|x\|\|y\| \quad \textit{para todo } x, y \in H,$$

existe un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ tal que

$$L(x, y) = (Tx, y) \quad \textit{para todo } x, y \in H. \tag{5.6}$$

Demostración.

Dado $x \in H$, consideramos la aplicación $y \in H \longmapsto \overline{L(x, y)} \in \mathbb{C}$, que es un operador lineal y acotado. En tal caso, por el Teorema de Representación de Riesz, existe un único $Tx \in H$ tal que

$$\overline{L(x, y)} = (y, Tx), \quad \text{para todo } y \in H.$$

Si consideramos la aplicación $T\colon H \longrightarrow H$ que asocia a cada $x \in H$ el correspondiente $Tx \in H$, observamos que para todo $y \in H$,

$$\begin{aligned}(y, T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)) &= \overline{L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y)} = \overline{\lambda_1 L(x_1, y)} + \overline{\lambda_2 (x_2, y)} \\ &= \overline{\lambda_1}(y, Tx_1) + \overline{\lambda_2}(y, Tx_2) = (y, \lambda_1 Tx_1) + (y, \lambda_2 Tx_2) \\ &= (y, \lambda_1 Tx_1 + \lambda_2 Tx_2), \quad \text{para todo } \lambda_1,\, \lambda_2 \in \mathbb{C} \ \text{ y } \ x_1,\, x_2 \in H;\end{aligned}$$

luego

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 Tx_1 + \lambda_2 Tx_2, \quad \text{para todo } \lambda_1,\, \lambda_2 \in \mathbb{C} \ \text{ y } \ x_1,\, x_2 \in H;$$

esto es, T es lineal. Además, T también es acotado, pues

$$\|T\| = \sup\big\{|(Tx, y)| : \|x\| = \|y\| = 1\big\} \leq C.$$

Por tanto, ya hemos probado la existencia de un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ satisfaciendo (5.6). $\square$

Ahora ya estamos en condiciones de caracterizar el espacio dual $\mathcal{S}_p(H)$ para $1 < p \leq \infty$.

Teorema 5.9.
Sea $1 < p \leq \infty$ y q el exponente conjugado de p. En tal caso,

(*a*) *si $S \in \mathcal{S}_q(H)$, la aplicación $F\colon \mathcal{S}_p(H) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$F(T) = \operatorname{tr}(ST), \quad \textit{para cada } T \in \mathcal{S}_p(H);$$

define un funcional lineal y acotado en $\mathcal{S}_p(H)$.

(*b*) *si $F\colon \mathcal{S}_p(H) \longrightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal y acotado, existe $S \in \mathcal{S}_q(H)$ tal que*

$$F(T) = \operatorname{tr}(ST), \quad \textit{para todo } T \in \mathcal{S}_p(H).$$

Demostración.
(*a*)
Dado $S \in \mathcal{S}_q(H)$, consideramos la aplicación $F_S \in \mathcal{S}_p(H) \longmapsto \operatorname{tr}(ST) \in \mathbb{C}$. Ahora, en virtud de la Proposición 5.7, sabemos que F_S es un funcional lineal y acotado en $\mathcal{S}_p(H)$ con

$$\|F_S\| = \sup\left\{|\operatorname{tr}(ST)| : \|T\|_p = 1\right\} = \|S\|_q.$$

(*b*)
Sea $F : \mathcal{S}_p(H) \longrightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal y acotado; probaremos que existe $S \in \mathcal{S}_q(H)$ tal que $F = F_S$.
Dados $x, y \in H$, consideramos el operador $T_{x,y}\colon H \longrightarrow H$ de rango 1 definido como

$$T_{x,y}z = (z, y)x, \quad \text{para cada } z \in H.$$

Sea entonces $L\colon H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ la aplicación dada por

$$L(x, y) = F(T_{x,y}), \quad \text{para cada } x,\ y \in H.$$

En tal caso, L satisface las hipótesis del Lema 5.8 anterior. En efecto, pues si $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}$ y $x,\ y_1,\ y_2,\ z \in H$, entonces

$$T_{x,\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2}z = (z, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)x = \overline{\lambda_1}(z, y_1)x + \overline{\lambda_2}(z, y_2)x = \overline{\lambda_1}T_{x,y_1}z + \overline{\lambda_2}_{x,y_2}z,$$

y además,

$$|L(x, y)| \leq \|F\|\|T_{x,y}\|_p = \|F\|\|x\|\|y\|, \quad \text{para todo } x,\ y \in H.$$

Por tanto, en virtud del Lema 5.8, existe $S \in \mathcal{B}(H)$ tal que $L(x, y) = (Sx, y)$ para todo $x, y \in H$. Esto es, teniendo en cuenta la Proposición 5.4 anterior,

$$F(T_{x,y}) = (Sx, y) = \operatorname{tr}(ST_{x,y}),$$

de donde deducimos que $F(T) = \operatorname{tr}(ST)$ para todo operador $T \in \mathcal{B}(H)$ de rango finito. Así pues, teniendo en cuenta la definición de F y que los operadores de rango finito son densos en $\mathcal{S}_p(H)$, concluimos que

$$\begin{aligned}&\sup\left\{|\operatorname{tr}(ST)| : \|T\|_p = 1, \operatorname{rango} T < \infty\right\}\\ &= \sup\left\{|F(T)| : \|T\|_p = 1, \operatorname{rango} T < \infty\right\} = \|F\| < \infty;\end{aligned}$$

es decir, $S \in \mathcal{S}_q(H)$ y $F_S = F$ sobre los operadores de rango finito (y por lo tanto sobre todo $\mathcal{S}_p(H)$). $\square$

Nota 5.10.

Además, el operador S que representa a F es único. En efecto, pues si suponemos que existen operadores S, $\hat{S} \in \mathcal{S}_q$ de modo que $F = F_S = F_{\hat{S}}$, entonces

$$\begin{aligned}\|S - \hat{S}\|_q &= \sup \left\{|\mathrm{tr}\,((S - \hat{S})T| : \|T\|_p = 1\right\} \\ &= \sup \left\{|\mathrm{tr}\,(ST) - \mathrm{tr}\,(\hat{S}T)| : \|T\|_p = 1\right\} \\ &= \sup \left\{|F(T) - F(T)| : \|T\|_p = 1\right\} = 0.\end{aligned}$$

Corolario 5.11 (el dual de $(\mathcal{S}_p(H), \|\cdot\|_p)$ para $1 < p < \infty$)**.**
Si $1 < p < \infty$, el espacio $\mathcal{S}_p(H)^*$ es isométricamente isomorfo a $\mathcal{S}_q(H)$ con $1/p+1/q = 1$.

Corolario 5.12 (el dual de $(\mathcal{K}(H), \|\cdot\|)$)**.**
El espacio dual $\mathcal{S}_\infty(H)^* = \mathcal{K}(H)^*$ es isométricamente isomorfo a la clase traza $\mathcal{S}_1(H)$.

Demostración.

Considerando $(\mathcal{S}_p(H), \|\cdot\|_p) \equiv (\mathcal{K}(H), \|\cdot\|)$ y entendiendo $q = 1$ como el exponente conjugado de $p = \infty$, los argumentos detallados en el Teorema 5.9 y la Nota 5.10 nos permiten concluir que $\mathcal{S}_\infty(H)^*$ es isométricamente isomorfo a $\mathcal{S}_1(H)$. $\square$

Para probar que el dual de la clase traza es el espacio de los operadores lineales y acotados, necesitaremos el siguiente resultado auxiliar (ver [19]).

Lema 5.13 (auxiliar para el Teorema 5.14)**.**
Sean $S \in \mathcal{B}(H)$ y $T \in \mathcal{S}_1(H)$. Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto ortonormal en H tal que

$$|T|x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(|T|)(x, e_n)e_n, \quad \textit{para cada } x \in H,$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(STe_n, e_n)| \leq \|S\|\,\|T\|_1.$$

Demostración.

Sea $T = V|T|$ la descomposición polar del operador $T \in \mathcal{S}_1(H)$. En tal caso, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |(STe_n, e_n)| &= \sum_{n=1}^{\infty} |(SV|T|e_n, e_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)|(SVe_n, e_n)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\|S\|\,\|V\|\,\|e_n\|\,\|e_n\| = \|S\| \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) = \|S\|\,\|T\|_1.\end{aligned}$$ $\square$

Teorema 5.14 (el dual de $(\mathcal{S}_1(H), \|\cdot\|)$)**.**

(*a*) *si $S \in \mathcal{B}(H)$, la aplicación $F\colon \mathcal{S}_1(H) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$F(T) = \mathrm{tr}\,(ST), \quad \textit{para cada } T \in \mathcal{S}_1(H);$$

define un funcional lineal y acotado en $\mathcal{S}_1(H)$.

(*b*) *si $F\colon \mathcal{S}_1(H) \longrightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal y acotado, existe $S \in \mathcal{B}(H)$ tal que*

$$F(T) = \mathrm{tr}\,(ST), \quad \textit{para todo } T \in \mathcal{S}_1(H).$$

Demostración.
(*a*)

Dado $S \in \mathcal{B}(H)$, consideramos la aplicación $F_S \in \mathcal{S}_1(H) \longmapsto \operatorname{tr}(ST) \in \mathbb{C}$. Ahora, en virtud del Lema 5.13 anterior (completando el conjunto $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hasta obtener una base de Hilbert de H si es necesario), sabemos que

$$|\operatorname{tr} ST| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty}(STe_n, e_n)\Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|(STe_n, e_n)| \leq \|S\|\,\|T\|_1, \quad \text{para todo } T \in \mathcal{S}_1(H);$$

luego $\|F_S\| \leq \|S\|$; es decir, F_S es un funcional lineal y acotado en $\mathcal{S}_1(H)$.

Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in H$ tal que $\|Sx\| > (\|S\| - \varepsilon)\|x\|$. En tal caso, teniendo en cuenta la Proposición 5.4 (*b*), obtenemos que

$$\begin{aligned} F_S(T_{x,Sx}) &= \operatorname{tr}(ST_{x,Sx}) = \operatorname{tr}(T_{x,Sx}S) = (Sx, Sx) = \|Sx\|^2 \\ &> (\|S\| - \varepsilon)\|x\|\,\|Sx\| = (\|S\| - \varepsilon)\,\|T_{x,Sx}\|; \end{aligned}$$

luego debe ser $\|F_S\| \geq \|S\|$.

(*b*)

Para probar que si $F : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal y acotado, entonces existe un operador $S \in \mathcal{B}(H)$ tal que $F \equiv F_S$, se procede igual que en la demostración del apartado (*b*) del Teorema 5.9 anterior. □

Corolario 5.15 (el dual de $(\mathcal{S}_1(H), \|\cdot\|)$)**.**
El espacio dual $\mathcal{S}_1(H)^*$ es isométricamente isomorfo al espacio de operadores $\mathcal{B}(H)$.

Capítulo 6

Algunas generalizaciones

Dedicaremos la primera sección de este último capítulo al estudio de algunas generalizaciones de las clases de Schatten-von Neumann al caso de espacios de Banach; hablaremos entonces de *operadores nucleares* y *operadores p-sumantes*.

En la segunda sección, hablaremos de forma esquemática de *interpolación en espacios de Banach* e intentaremos explicar el significado de la expresión "las clases de Schatten-von Neumann interpolan bien".

Por último, en la tercera sección, presentaremos el *problema de Lidskii*, que nos retrotraerá al inicio de la memoria.

6.1. Operadores nucleares y operadores p-sumantes

Empleando alguna de las caracterizaciones vistas en el Capítulo 4 anterior, podemos considerar subfamilias de $\mathcal{B}(X)$ que generalizarían a las clases de Schatten-von Neumann cuando $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. Buen ejemplo de ello son las familias o clases de operadores que introducimos en la siguiente definición.

Definición 6.1 (generalización a espacios de Banach de la clase $\mathcal{S}_1$)**.**
Consideraremos las siguientes clases de operadores:

(*a*) para $0 < p < 1$, los **operadores p-nucleares** (introducidos por A. Grothendieck en [17])

$$N_p(X) = \Big\{Tx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)u_n \text{ para todo } x \in X \text{ con } \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|^p\|u_n\|^p < \infty\Big\},$$

donde para cada $T \in N_1(X)$,

$$\tau_1(T) = \text{ínf}\Big\{\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|^p\|u_n\|^p\Big)^{1/p} : Tx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)u_n \text{ para todo } x \in X\Big\};$$

(*b*) la clase $\mathcal{B}_p^a(X)$ (introducida por A. Pietsch en [6, Capítulo 14])

$$\mathcal{B}_p^a(X) = \Big\{T \in \mathcal{K}(X) : \|T\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)^p < \infty\Big\}, \quad \text{para cada } 1 \leq p < \infty;$$

(c) la clase $\mathcal{B}_p^c(X)$ (introducida por A. Pietsch en [6, Capítulo 14])

$$\mathcal{B}_p^c(X) = \Big\{T \in \mathcal{K}(X) : \|T\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(T)^p < \infty\Big\}, \quad \text{para cada } 1 \leq p < \infty.$$

Diremos que un operador T es nuclear si es 1-nuclear.

Nota 6.2 (caso hilbertiano)**.**
Si $X = H$ es un espacio de Hilbert (separable y de dimensión infinita), en virtud del Teorema 4.4, sabemos que

$$\mathcal{S}_1(H) \equiv N_1(H) = \Big\{T \in \mathcal{B}(H) : Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x, u_k)v_k, \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|\|u_k\|\|v_k\| < \infty\Big\}$$

y además, para cada $T \in N_1(H)$,

$$\|T\| \equiv \tau_1(T) = \operatorname{ínf}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|\|u_k\|\|v_k\| : Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x, u_k)v_k\Big\}.$$

Por otra parte, en virtud del Teorema 3.3, sabemos que en el caso hilbertiano no hay diferencia alguna entre números singulares, números de aproximación y números de Gelfand. Por tanto,

$$\mathcal{S}_1(H) \equiv \mathcal{B}_1^a(H) = \mathcal{B}_1^c(H) = \Big\{T \in \mathcal{K}(H) : \|T\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) < \infty\Big\}.$$

Es decir, en el caso hilbertiano, la clase de los operadores nucleares y las clases de Pietsch $\mathcal{B}_1^a$ y $\mathcal{B}_1^c$ son exactamente lo mismo que clase traza $\mathcal{S}_1$ de Schatten-von Neumann. Esto es,

$$N_1(H) = \mathcal{S}_1(H) = \mathcal{B}_p^a(H) = \mathcal{B}_p^c(H).$$

En general, si X es un espacio de Banach, ninguna de las igualdades anteriores es necesariamente cierta; tan sólo tendremos algunas inclusiones. Por ejemplo, tal y como mostraremos en el Teorema 6.4 siguiente, se tiene que $\mathcal{B}_1^a(X) \subset N_1(X)$.

Para probar dicha inclusión, necesitaremos el siguiente resultado auxiliar.

Lema 6.3 (auxiliar para el Teorema 6.4)**.**
Si $T \in \mathcal{B}(X)$ es un operador de rango (finito) $n \in \mathbb{N}$, entonces $\tau_1(T) \leq n\|T\|$.

Demostración.
Sea $\{w_i : 1 \leq i \leq n\}$ una base de $M = \operatorname{Im} T$ formada por vectores unitarios. En tal caso, empleando el Teorema de Hahn-Banach, podemos escoger un conjunto $\{f_i : 1 \leq i \leq n\} \subset X^*$ satisfaciendo que $f_j(w_i) = \delta_{i,j}$ y $\|f_i\| = 1$ para todo $1 \leq i, j \leq n$.

Dado $w \in M$, tenemos que

$$w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i, \quad \text{con } \mu_i \in \mathbb{C} \text{ si } 1 \leq i \leq n.$$

Por tanto,

$$f_j(w) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i f_j(w_i) = \mu_j, \quad \text{para cada } 1 \leq j \leq n,$$

y entonces

$$w = \sum_{i=1}^{n} f_i(w) w_i;$$

es decir,

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} f_i(Tx) w_i, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Así pues, ahora es claro que

$$\tau_1(T) \leq \sum_{i=1}^{n} \|f_i(T)\| \|w_i\| \leq \|T\| \sum_{i=1}^{n} \|f_i\| \|w_i\| = n\|T\|. \qquad \square$$

Teorema 6.4 (Pietsch & Grothendieck)**.**
$\mathcal{B}_1^a(X) \subset N_1(X)$.

Demostración.
Sea $T \in \mathcal{B}_1^a(X)$ arbitrario. Teniendo en cuenta la Definición 3.1 anterior, observamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $T_n \in \mathcal{B}(X)$ de rango $2^n - 2$ de modo que

$$\|T - T_n\| \leq 2a_{2^n-1}(T).$$

Observemos que $T \in \mathcal{B}_1^a(X)$ implica $a_n \to 0$; luego $T_n \to T$ en $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|)$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $S_n = T_n - T_{n-1}$ con $T_0 = 0$. En tal caso, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ converge absolutamente a T en $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|)$. En efecto, pues teniendo en cuenta la propiedad de monotonía de los números de aproximación, obtenemos que

$$\|T_n - T_{n+1}\| \leq \|T_n - T\| + \|T - T_{n+1}\| \leq 2a_{2^n-1}(T) + 2a_{2^{n+1}-1}(T) \leq 4a_{2^n-1}(T) \quad (6.1)$$

y entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|S_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n - T_{n-1}\| \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_{2^{n-1}-1}(T) < \infty.$$

Por tanto, dado que para cada $n \in \mathbb{N}$ el operador $T_n - T_{n-1}$ es de rango finito,

$$(T_n - T_{n-1})x = \sum_{i=1}^{R_n} f_i^n(x) u_i^n = f_n(x) u_n, \quad \text{para cada } x \in X,$$

donde $R_n = \text{rango}\,(T_n - T_{n-1})$, $f_n \in X^*$ y $u_n \in X$. Luego

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} (T_n - T_{n-1})x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) u_n, \quad \text{para cada } x \in X.$$

Por otra parte, es fácil ver que

$$\tau_1\Big(\sum_{i=1}^{n} S_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \tau_1(S_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau_1(S_i), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N};$$

luego tendremos que

$$\tau_1(T) = \tau_1\Big(\sum_{i=1}^{\infty} S_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau_1(S_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_1(T_i - T_{i-1}).$$

Además, teniendo en cuenta (6.1) y el Lema 6.3 anterior, concluimos que

$$\tau_1(T_n - T_{n+1}) \leq 4a_{2^n-1}(T)\,\text{rango}\,(T_n - T_{n+1}),$$

por lo que

$$\begin{aligned}\tau_1(T) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau_1(T_n - T_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{2^n-1}(T)\,\text{rango}\,(T_n - T_{n+1}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{2^n-1}(T)(2^n - 2 + 2^{n+1} - 2) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{2^n-1}(T)(6\cdot 2^{n-1}) \\ &= 24\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}a_{2^n-1}(T).\end{aligned}$$

Estudiemos ahora cada uno de los término de la última serie:

- para $n = 1$, sumamos $a_1(T)$;
- para $n = 2$, sumamos $2a_3(T) \leq a_2(T) + a_3(T)$;
- para $n = 3$, sumamos $4a_7 \leq a_4(T) + a_5(T) + a_6(T) + a_7(T)$;
- en general, para $n \in \mathbb{N}$, sumamos

  $$2^{n-1}a_{2^n-1}(T) \leq a_{2^{n-1}}(T) + a_{2^{n-1}+1}(T) + \cdots + a_{2^n-1}(T),$$

  mientras que para $n+1$,

  $$2^n a_{2^{n+1}-1}(T) \leq a_{2^n}(T) + a_{2^n+1}(T) + \cdots + a_{2^{n+1}-1}(T).$$

Por tanto,

$$\tau_1(T) \leq 24\sum_{n=1}^{\infty} a_n(T) = 24\|T\|_1,$$

luego ahora es claro que $T \in N_1(X)$. □

Otra posible generalización a espacios de Banach de las clases de Schatten-von Neumann pasa por considerar familias de operadores p-sumantes con $1 \leq p < \infty$.

Sean X_1 y X_2 dos espacios de Banach.

Definición 6.5 (operador p-sumante).
Dado $1 \leq p < \infty$, se dice $T \in \mathcal{B}(X_1, X_2)$ es p-**sumante** si existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \|Tx_i\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq c\Big[\sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|=1}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big], \quad \text{para toda suc. finita } (x_i)_{i=1}^n \subset X_1. \tag{6.2}$$

Denotaremos por $\Pi_p(T)$ a la menor de las constantes $c \in \mathbb{R}^+$ que satisfacen la propiedad (6.2) anterior y por $\Pi_p(X_1, X_2)$ al conjunto formado por todos los operadores $T \in \mathcal{B}(X_1, X_2)$ que son p-sumantes; si $X_1 = X_2$, emplearemos entonces la notación $\Pi_p(X) = \Pi_p(X_1, X_2)$.

Proposición 6.6 (estructura de $\Pi_p(X)$).

(a) $\Pi_p(X)$ *es un subespacio vectorial de* $\mathcal{B}(X)$*;*

(b) $\Pi_p(X)$ *es un ideal bilátero de* $\mathcal{B}(X)$*.*

Demostración.
(a)

Sean $T, S \in \Pi_p(X)$ dos operadores p-sumantes arbitrarios y $a \in \mathbb{K}$ un escalar también arbitrario. En tal caso,

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{i=1}^{n} \|(T+aS)x_i\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} &\leq \Big(\sum_{i=1}^{n} \|Tx_i\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i=1}^{n} \|aSx_i\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq c_1\Big[\sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|=1}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big] + |a|c_2\Big[\sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|=1}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big] \\
&\leq (c_1+|a|c_2)\Big[\sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|=1}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big] \\
&= c\Big[\sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|=1}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big],
\end{aligned}$$

donde para obtener la primera desigualdad hemos empleado la desigualdad triangular de la norma $\|\cdot\|$, monotonía de la función $t \in [0, +\infty) \longmapsto t^p$ y la desigualdad de Minkowski.

(b)

Dado $T \in \Pi_p(X)$ y $S \in \mathcal{B}(X)$, debemos probar que ST, $TS \in \Pi_p(X)$. Para ver que $ST \in \Pi_p(X)$, basta observar que

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \|STx_i\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \|S\|\Big(\sum_{i=1}^{n} \|Tx_i\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \|S\|c\Big[\sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|=1}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big].$$

Por otra parte, para demostrar que $TS \in \Pi_p(X)$, basta tener en cuenta que

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{i=1}^{n} \|TSx_i\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq c\Big[\sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|=1}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |f(Sx_i)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big] &= \|S\|c\Big[\sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|=1}} \Big(\sum_{i=1}^{n} \Big|f\Big(\frac{S}{\|S\|}x_i\Big)\Big|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big] \\
\leq \|S\|c\Big[\sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|\leq 1}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big] &= \|S\|c\Big[\sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|=1}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]. \qquad \square
\end{aligned}$$

Como veremos a continuación, en el caso hilbertiano todo operador p-sumante para algún $1 \leq p < \infty$ es compacto.

Sean entonces H_1 y H_2 dos espacios de Hilbert (separables de dimensión no finita); necesitaremos el siguiente resultado auxiliar.

Lema 6.7 (operadores compactos & p-sumantes; auxiliar para la Proposición 6.8)**.**
Si $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ *no es compacto, existe una sucesión ortonormal* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$\liminf_{n\to\infty} \|Te_n\| > 0. \tag{6.3}$$

Demostración.

Construiremos una sucesión ortonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaciendo (6.3).

Como $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ no es compacto, T no es límite de una sucesión de operadores de rango finito. Es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|T - P\| > \varepsilon$ para todo operador $P \in \mathcal{F}(H_1, H_2)$. En particular, tenemos que $\|T\| > \varepsilon$. Sea entonces e_1 en H_1 tal que $\|e_1\| = 1$ y $\|Te_1\| > \varepsilon$.

Supongamos ahora que para cierto $n \in \mathbb{N}$ ya tenemos escogidos $e_i \in H$ con $1 \le i \le n$ de forma que $\|Te_i\| > \varepsilon$ y $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ para todo $1 \le i,\, j \le n$; veamos como escoger e_{n+1}.

Sea $Q\colon H_1 \longrightarrow \operatorname{span}\{e_i\colon 1 \le i \le n\}$ la proyección ortogonal de H_1 sobre el subespacio cerrado $\operatorname{span}\{e_i\colon 1 \le i \le n\}$ y $P = TQ$. Así pues, dado que P es un operador de rango finito, debe ser $\|T - P\| > \varepsilon$. En tal caso, existe $e \in H_1$ tal que $\|e\| = 1$ y $\|(T - P)e\| > \varepsilon$. Luego $Te \neq Pe$ y por tanto $e - Qe \neq 0$. Sea entonces

$$e_{n+1} = \|(e - Qe)\|^{-1}(e - Qe).$$

Claramente, tenemos entonces que $\|e_{n+1}\| = 1$ y $Te_{n+1} = \|e - Qe\|^{-1}(T - P)e$. Además, como $\|e\| = 1$ y Q es una proyección ortogonal, $\|e - Qe\| \le \|e\| = 1$. Por tanto,

$$\|Te_{n+1}\| = \frac{\|(T - P)e\|}{\|e - Qe\|} \ge \|(T - P)e\| > \varepsilon.$$

Finalmente, observemos que como $Qe_{n+1} = 0$, el vector e_{n+1} es ortogonal a todo vector de Q. En particular, $(e_{n+1}, e_i) = 0$ para $1 \le i \le n$. □

Proposición 6.8 ($\Pi_p(H_1, H_2) \subset \mathcal{K}(H_1, H_2)$)**.**
Todo operador p-sumante $T \in \Pi_p(H_1, H_2)$ es un operador compacto.

Demostración.

Probaremos que si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ortonormal en H_1, entonces $\lim_{n\to\infty} Te_n = 0$. Así, el resultado enunciado será consecuencia directa del Lema 6.7 anterior.

Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos entonces que existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión ortonormal $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de modo que $\|Te_n\| > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En tal caso,

$$\Big(\sum_{n=1}^{N} \|Te_n\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} > N^{\frac{1}{p}}\varepsilon, \quad \text{para cada } N \in \mathbb{N}. \tag{6.4}$$

Por otra parte, debido a la ortonormalidad de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tenemos que

$$\Big(\sum_{n=1}^{N} |(e_n, x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le \|x\|, \quad \text{para todo } x \in H_1. \tag{6.5}$$

Así pues, teniendo en cuenta (6.5), concluimos que para $p \ge 2$,

$$\sup_{\|x\|=1} \Big(\sum_{n=1}^{N} |(e_n, x)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \sup_{\|x\|=1} \Big(\sum_{n=1}^{N} |(e_n, x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le 1, \tag{6.6}$$

mientras que para $1 \le p < 2$, empleando la desigualdad de Hölder, concluimos que

$$\sup_{\|x\|=1} \Big(\sum_{n=1}^{N} |(e_n, x)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \sup_{\|x\|=1} \Big(\Big(\sum_{n=1}^{N} 1^{1/(1-p/2)}\Big)^{1-p/2} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, x)|^2\Big)^{p/2}\Big)^{1/p}$$

$$\leq N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \sup_{\|x\|=1} \Big(\sum_{n=1}^{N} |(e_n, x)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \tag{6.7}$$

Las desigualdades (6.4), (6.6) y (6.7) impiden que existe $c \in \mathbb{R}^+$ satisfaciendo (6.2); luego $T \notin \Pi_p(H_1, H_2)$, en contradicción con la hipótesis inicial. $\square$

En realidad, si H es un espacio de Hilbert, entonces

$$\Pi_p(H) = \mathcal{S}_2(H), \quad \text{para todo } 1 \leq p < \infty.$$

Para $p = 2$, la demostración de dicha igualdad es relativamente elemental. Sin embargo, para $1 \leq p < \infty$, la prueba es más complicada: involucra funciones de Rademacher y emplea la desigualdad de Khinchin. Dicha prueba, debida al matemático polaco A. Pelczynski, puede consultarse en [5].

Teorema 6.9 ($\Pi_2(H) = \mathcal{S}_2(H)$)**.**
Tenemos que $\Pi_2(H) = \mathcal{S}_2(H)$ *y* $\|T\|_2 = \Pi_2(T)$ *para todo* $T \in \mathcal{S}_2(H)$.

Demostración.
$\mathcal{S}_2(H) \subset \Pi_2(H)$

Dado $T \in \mathcal{S}_2(H)$, consideremos su representación de Schmidt (Teorema 2.17); esto es

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)(x, u_n)v_n, \quad \text{para cada } x \in H,$$

para ciertos conjuntos ortonormales $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en H.

Sea ahora $(x_i)_{i=1}^k \subset H$ un conjunto finito arbitrario. En tal caso,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \|Tx_i\|^2 &= \sum_{i=1}^{k} \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)(x_i, u_n)v_n \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^2 |(x_i, u_n)|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^2 \sum_{i=1}^{k} |(x_i, u_n)|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^2 \sup_{\substack{f\in X^* \\ \|f\|=1}} \sum_{i=1}^{k} |f(x_i)|^2 \\ &= \|T\|_2{}^2 \sup_{\substack{f\in X^* \\ \|f\|=1}} \sum_{i=1}^{k} |f(x_i)|^2; \end{aligned}$$

luego ahora ya es claro que $T \in \Pi_2(H)$ y que $\Pi_2(T) \leq \|T\|_2$.

$\Pi_2(H) \subset \mathcal{S}_2(H)$

Sea ahora $T \in \Pi_2(H)$. En virtud de la Proposición 6.8 anterior, ya sabemos que T es compacto; basta entonces probar que $\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2 < \infty$ para alguna base de Hilbert $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de H.

Sea $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una base de Hilbert de H. En tal caso,

$$\sum_{i=1}^{n} \|Te_i\|^2 \leq \Pi_2(H)^2 \sup_{\substack{f\in X^* \\ \|f\|=1}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |f(e_i)|^2 \Big), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En particular, considerando $y \in H$ tal que $\|y\| = 1$ y el funcional $f\colon H \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $f(x) = (x, y)$ para cada $x \in H$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} |f(e_i)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(e_i, y)|^2 \leq \|y\|^2 = \|f\|^2 = 1$$

y entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} \|Te_i\|^2 \leq \Pi_2(T)^2, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

de donde dedducimos finalemnete que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2 \leq \Pi_2(T)^2;$$

es decir, $T \in \mathcal{S}_2(H)$ y

$$\|T\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Pi_2(T). \qquad \square$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por r_n a la n-ésima función de Rademacher; es decir,

$$r_n(t) = \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^k \chi_{(2^{-n}k, 2^{-n}(k+1))}(t), \quad \text{para cada } t \in [0, 1],$$

donde χ_A denota a la función característica del conjunto $A \subset \mathbb{R}$.

Teorema 6.10 (desigualdad de Khintchine).
Para $1 \leq p < \infty$ e $y_i \in \mathbb{C}$ con $1 \leq i \leq N$, se tiene (ver [4, Theorem 265]) que

$$A_p\Big(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^2\Big)^2 \leq \Big(\int_0^1 \Big|\sum_{n=1}^{N} r_n(t)\, y_n\Big|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} \leq B_p\Big(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^2\Big)^2,$$

donde A_p y B_p son las constantes de Haagerup (ver [18]). En particular, $A_1 = \sqrt{2}$.

Nota 6.11 (interpretación de la desigualdad de Khintchine).
Considerando cualquier partición $P \in \mathcal{P}([0, 1])$ más fina que la "partición uniforme del intervalo $[0, 1]$ de norma $1/2^N$", tenemos que

$$\int_0^1 \Big|\sum_{n=1}^{N} r_n(t)\, y_n\Big|^p dt = \frac{1}{2^N} \sum_{k=1}^{2^N} \Big|\sum_{n=1}^{N} r_n(t_k) y_n\Big|^p = \frac{1}{2^N} \sum_{k=1}^{2^N} \Big|\sum_{n=1}^{N} \pm y_n\Big|^p. \tag{6.8}$$

Es decir, la última expresión de (6.8) es el "valor esperado" de $|\theta_1 y_1 + \theta_2 y_2 + \cdots + \theta_N y_N|^p$ cuando escogemos los signos $\theta_i = \pm 1$ para $1 \leq i \leq n$ al azar.

Teorema 6.12.
$\mathcal{S}_2(H_1, H_2) = \Pi_p(H_1, H_2)$ para todo $1 \leq p < \infty$.

Demostración.

Dado $T \in \Pi_p(H_1, H_2) \cup \mathcal{S}_2(H_1, H_2)$, sabemos que $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. Consideremos entonces la representación de Schmidt (Teorema 2.17) de T,

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)(x, e_n)\varepsilon_n \quad \text{para cada } x \in H_1.$$

$\Pi_p(H_1, H_2) \subset \mathcal{S}_2(H_1, H_2)$

Dado $N \in \mathbb{N}$, para cada $0 \le k \le 2^N - 1$, definimos

$$x_k = \sum_{n=1}^{N} r_n^k e_n, \quad \text{con } r_n^k = r_n((2k+1)2^{-(N+1)}) \quad \text{si } 1 \le n \le N.$$

En tal caso,

$$\|Tx_k\| = \Big\| \sum_{n=1}^{N} r_n^k T e_n \Big\| = \Big\| \sum_{n=1}^{N} r_n^k \lambda_n \varepsilon_n \Big\| = \Big(\sum_{n=1}^{N} s_n(T)^2 \Big)^{\frac{1}{2}},$$

de donde concluimos que

$$\Big(\sum_{k=0}^{2^N-1} \|Tx_k\|^p \Big)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{N}{p}} \Big(\sum_{n=1}^{N} s_n(T)^2 \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.9}$$

Por otra parte,

$$|(x_k, x)|^p = \Big| \sum_{n=1}^{N} r_n^k \overline{(x, e_n)} \Big|^p = 2^N \int_{k2^{-N}}^{(k+1)2^{-N}} \Big| \sum_{n=1}^{N} r_n(t) \overline{(x, e_n)} \Big|^p dt$$

y entonces

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{k=0}^{2^N-1} |(x_k, x)|^p \Big)^{\frac{1}{p}} &= \Big(2^N \sum_{k=0}^{2^N-1} \int_{k2^{-N}}^{(k+1)2^{-N}} \Big| \sum_{n=1}^{N} r_n(T) \overline{(x, e_n)} \Big|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{\frac{N}{p}} \Big(\int_0^1 \Big| \sum_{n=1}^{N} r_n(t) \overline{(x, e_n)} \Big|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Así pues, en virtud de la desigualdad de Khinchin,

$$\Big(\sum_{k=0}^{2^N-1} |(x_k, x)|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \le 2^{\frac{N}{p}} A_p \Big(\sum_{n=1}^{N} |(x, e_n)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \le 2^{\frac{N}{p}} A_p \|x\|, \tag{6.10}$$

donde A_p es una constante que depende de p.

Comparando (6.9) y (6.10) con (6.2), concluimos que

$$2^{\frac{N}{p}} \Big(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \le c \sup_{\|x\|=1} \Big(\sum_{k=1}^{2^N-1} |(x_k, x)|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \le c A_p 2^{\frac{N}{p}};$$

es decir,

$$\Big(\sum_{n=1}^{N} s_n(T)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \le c A_p, \quad \text{para todo } N \in \mathbb{N},$$

de donde se sigue que $T \in \mathcal{S}_2(H_1, H_2)$.

$\mathcal{S}_2(H_1, H_2) \subset \Pi_p(H_1, H_2)$

Puesto que $T \in \mathcal{S}_2(H_1, H_2)$,

$$A = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Dada una sucesión $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de vectores de H_2, si

$$b(t) = A^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) s_n(T) e_n \in H_1, \quad \text{para cada } 0 \le t \le 1,$$

entonces $\|b(t)\| = 1$ para todo $t \in [0, 1]$; luego

$$\begin{aligned}
\sup_{\|x\|=1} \sum_{m=1}^{\infty} |(x_m, x)| \ge \sup_{0 \le t \le 1} \sum_{m=1}^{\infty} \Big| (x_m, b(t)) \Big| &\ge A^{-1} \int_0^1 \sum_{m=1}^{\infty} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) s_n(T)(x_m, e_n) \Big| \, dt \\
&= A^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \Big| \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) \lambda_n (x_m, e_n) \Big| \, dt \\
&\ge (\sqrt{2}A)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |(x_m, e_n)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= (\sqrt{2}A)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \|Tx_m\|, \qquad (6.11)
\end{aligned}$$

donde en la tercera línea hemos invocado desigualdad de Khintchine.

Por tanto, ya hemos probado que $\mathcal{S}_2(H_1, H_2) \subset \Pi_1(H_1, H_2)$.

Dado $p > 1$, si $q = p(p-1)^{-1}$, por dualidad

$$\Big(\sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^p \Big)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\sum_{m=1}^{\infty} |t_m|^q = 1} \sum_{m=1}^{\infty} |t_m c_m|;$$

luego, teniendo en cuenta (6.11),

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{m=1}^{\infty} \|Tx_m\|^p \Big)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{\sum_{m=1}^{\infty} |t_m|^q = 1} \sum_{m=1}^{\infty} \|T t_m x_m\| \\
&\le \sqrt{3}A \sup_{\sum_{m=1}^{\infty} |t_m|^q = 1} \sup_{\|x\|=1} \sum_{m=1}^{\infty} |(t_m x_m, x)| \\
&= \sqrt{3}A \sup_{\|x\|=1} \sup_{\sum_{m=1}^{\infty} |t_m|^q = 1} \sum_{m=1}^{\infty} |t_m (x_m, x)| \\
&= \sqrt{3}A \sup_{\|x\|=1} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} |(x_m, x)|^p \Big)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

de donde concluimos que $\mathcal{S}_2(H_1, H_2) \subset \Pi_p(H_1, H_2)$ para todo $p > 1$. $\square$

6.2. Interpolación de espacios de Banach

En análisis funcional, un *espacio de interpolación* es un espacio intermedio entre dos espacios de Banach dados. Para construir dichos espacios intermedios, hoy en día son conocidos numerosos métodos; uno de ellos es el conocido como *K-método* (ver [2]).

A continuación, probaremos que las clases de Schatten-von Neumann interpolan bien si empleamos el K-método.

Para ello, debemos comenzar por introducir el K-funcional de Peetre.

Definición 6.13. (K-funcional de Peetre & interpolación)
Sean $(A_0, \|\cdot\|_{A_0})$ y $(A_1, \|\cdot\|_{A_1})$ dos espacios de Banach tales que $A_0 \subset A_1$. Definimos entonces:

(a) el K-**funcional de Peetre** como la aplicación $K\colon (0, +\infty) \times A_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por,

$$K(t,a) \equiv K(t,a;A_0,A_1) = \operatorname{ínf}\{\|a - a_0\|_{A_1} + t\|a_0\|_{A_0} : a_0 \in A_0\};$$

(b) para cada $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$, el **espacio de interpolación** $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ como

$$(A_0,A_1)_{\theta,q} = \Big\{a \in A_1 : \|a\|_{\theta,q} = \Big(\int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,a))^q \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} < \infty\Big\}.$$

Para entender el comportamiento del K-funcional de Peetre, consideremos los espacios de Banach $A_0 = \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ y $A_1 = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, donde

$$\|f\|_{A_0} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty \quad \text{y} \quad \|f\|_{A_1} = \|f\|_\infty.$$

Así, si $f \in A_1$ es unha "función picuda" (por ejemplo, lineal a trozos), el valor de $\|f_0\|_{A_0}$ (a quien es habitual referirse como *regularización*) mide la curvatura (o regularidad) de f_0, mientras que el valor de $\|f - f_0\|_{A_1}$ (a quien es habitual referirse como *fidelidad*) mide la cercanía de f_0 a f en el espacio A_1.

Así, cuando en la Definición 6.13 (b) anterior introducimos el espacio de interpolación $(A_0, A_1)_{\theta,q}$, lo que estamos exigiendo es una condición sobre el comportamiento del K-funcional de Peetre cuando $t \to 0$.

Lema 6.14 (propiedades del K-funcional de Peetre)**.**

(a) *si A_0 es denso en A_1, entonces $K(0,a) = 0$;*

(b) *$K(t,a) \leq \|a\|_{A_1}$ para todo $a \in A_1$;*

(c) *para cada $a \in A_1$, la función $t \in (0,+\infty) \longmapsto K(t,a) \in \mathbb{R}$ es creciente.*

(d) *$t\,K(1,a) \leq K(t,a)$ para todo $t \in [0,1]$;*

(e) *para $1 < q \leq \infty$, tenemos que*

$$\int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,a))^q \frac{dt}{t} \geq \int_0^1 (t^{-\theta}tK(1,a))^q \frac{dt}{t} + \int_1^\infty (t^{-\theta}K(1,a))^q \frac{dt}{t}. \tag{6.12}$$

Demostración.

Las propiedades (a), (b) y (c) son una consecuencia inmediata de la definición del K-funcional de Peetre.

(d)

Para $t = 0$ el resultado enunciado es trivial. Para $t \in (0, 1]$ y $a_0 \in A_0$, tenemos que

$$K(1, a) \leq \|a - a_0\|_{A_1} + \|a_0\|_{A_0} \leq \frac{1}{t}(\|a - a_0\|_{A_1} + t\|a_0\|_{A_0}),$$

de donde deducimos que $tK(1, a) \leq K(t, a)$.

(e)

Consecuencia directa de las dos propiedades anteriores. □

Nota 6.15. Teniendo en cuenta la desigualdad (6.12), deducimos que una condición necesaria para la finitud de $\|a\|_{\theta,q}$ es que $1 - \theta < 0$ y $\theta > 0$, es decir, $0 < \theta < 1$.

El siguiente concepto juega un importante papel en la teoría de interpolación de espacios de Banach.

Definición 6.16 (reordenamiento no creciente)**.**
Dada una sucesión de escalares $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, escribiremos $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ para indicar su reordenamiento no-creciente. Es decir,

$$x_n^* = \text{ínf}\{\varepsilon \geq 0 : \#\{k \in \mathbb{N} : |x_k| \geq \varepsilon\} < n\}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Para probar un resultado sobre interpolación de clases de Schatten-von Neumann necesitaremos dos resultados auxiliares.

Lema 6.17 (K- funcional de Peetre)**.**

$$K(t, T; \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_\infty) = K(t, (s_n(T))_{n\in\mathbb{N}}, \ell_1, \ell_\infty), \quad \textit{para todo } t \in (0, \infty).$$

Demostración.

Sea $T \in \mathcal{S}_\infty$ y sea

$$Tx = \sum_n s_n(T)(x, u_n)v_n$$

su descomposición espectral.

A continuación, escribimos la sucesión de números singulares como $(s_n(T))_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} + (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ y $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$. Dicha factorización nos permite escribir $T = T_0 + T_1$, donde los operadores T_0 y $T_1 \in \mathcal{B}(H)$ están definidos, para cada $x \in H$, como

$$T_0x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x, u_n)v_n \quad \text{ y } \quad T_1x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(x, u_n)v_n.$$

En tal caso, $s_n(T_0) = |\alpha_n^*|$ y $s_n(T_1) = |\beta_n^*|$; esto es, $T_0 \in \mathcal{S}_1(H)$, $T_1 \in \mathcal{S}_\infty(H)$ y además,

$$\|T_0\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n^*| = \|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 \quad \text{ y } \quad \|T_1\|_\infty = \sup\{|\beta_n|\} = \|(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty.$$

Por tanto, ya hemos probado que para $t \in (0, +\infty)$,

$$K(t, T; \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_\infty) \leq K(t, (s_n(T))_{n\in\mathbb{N}}; \ell_1, \ell_\infty). \tag{6.13}$$

Por otra parte, si $T = T_0 + T_1$ con $T_0 \in \mathcal{S}_1(H)$ y $T_1 \in \mathcal{S}_\infty(H)$, considerando

$$\alpha_n = \text{mín}\{s_n(T), s_n(T_0)\} \quad \text{y} \quad \beta_n = \text{máx}\{0, s_n(T) - s_n(T_0)\},$$

obtenemos que $(s_n(T))_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} + (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, satisfaciéndose además que

$$\|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 \leq \|T_0\|_1, \quad \|(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \leq \|T_1\|$$

y

$$s_n(T) = s_n(T_0 + T_1) \leq s_n(T_0) + \|T_1\|.$$

Por tanto, para $t \in (0, +\infty)$,

$$K(t, (s_n(T))_{n\in\mathbb{N}}; \ell_1, \ell_\infty) \leq K(t, T; \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_\infty). \tag{6.14}$$

Así pues, la desigualdad enunciada se sigue ahora de (6.13) y (6.14). □

Lema 6.18.
Sea $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada tal que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq 0$. Entonces

$$K(n, (\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}; \ell_1, \ell_\infty) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i.$$

Demostración.
Factoricemos la sucesión $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ como $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} + (\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$, donde

$$(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\sigma_1 - \sigma_n, \sigma_2 - \sigma_n, \ldots, \sigma_{n-1} - \sigma_n, 0, 0, \ldots)$$

y

$$(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\sigma_n, \sigma_n, \ldots, \sigma_n, \sigma_{n+1}, \sigma_{n+2}, \ldots).$$

En tal caso,

$$K(n, (\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}; \ell_1, \ell_\infty) \leq \Big(\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i - (n-1)\sigma_n\Big) + n\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i.$$

Por otra parte, si $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} + (\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$, con $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ y $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i \leq \sum_{i=1}^{n} |\eta_i| + \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| \leq \|(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_1 + n\|(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty.$$ □

Teniendo en cuenta el Lema 6.17 y el Lema 6.18, concluimos que

$$K(n, T) = \sum_{i=1}^{n} s_i(T), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{6.15}$$

Ahora sí, ya estamos en condiciones de enunciar y probar el siguiente resultado.

Teorema 6.19 (interpolación y clases de Schatten-von Neumann)**.**
Sean $1 < p < \infty$ y $0 < \theta < 1$ con $1/p = 1 - \theta$. Entonces

$$(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_\infty)_{\theta,p} \subset \mathcal{S}_p(H)$$

con equivalencia de normas.

Demostración.

Para $T \in (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_\infty)_{\theta,p}$, tenemos que

$$\|T\|_{\theta,p} = \Big(\int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,T))^p \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \implies \Big(\int_1^\infty (t^{-\theta}K(t,T))^p \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

o equivalentemente,

$$\Big(\sum_{n=1}^\infty (n^{-\theta}K(n,T))^p n^{-1}\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Además, teniendo en cuenta que $-\theta = 1/p - 1$ y (6.15),

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{n=1}^\infty (n^{-\theta}K(n,T))^p n^{-1}\Big)^{\frac{1}{p}} &= \Big(\sum_{n=1}^\infty n\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n s_i(T)\Big)^p n^{-1}\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \Big(\sum_{n=1}^\infty \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n s_i(T)\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \geq \Big(\sum_{n=1}^\infty s_n(T)^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \|T\|_p,\end{aligned}$$

donde en la segunda línea hemos empleado la monotonía de la sucesión $(s_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$. □

En realidad, puede probarse que $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_\infty)_{\theta,p} \subset \mathcal{S}_p(H)$. Para más información sobre interpolación de espacios de Banach y resultados similares al que acabamos de probar, puede consultarse [12].

6.3. Dos problemas interesantes

Cerramos esta memoria comentando dos cuestiones realmente interesantes.

Problema 6.20 (Traza para operadores nucleares).
Sea X un espacio de Banach y $T \in N_1(X)$ un operador nuclear.

¿Podemos entonces definir la traza de T como

$$\operatorname{tr} T = \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|\,\|u_n\|$$

o depende dicho valor de la representación nuclear escogida?

Una respuesta parcial a la cuestión anterior fue dada por A. Grothendieck en [17], quien probó que la traza de todo operador $T \in N_1(X)$ está bien definida si y sólo si el espacio de Banach X satisface la "propiedad de aproximación":

para cada conjunto compacto $K \subset X$ y cada $\varepsilon > 0$, existe un operador de rango finito F tal que $\|x - Fx\| < \varepsilon$ si $x \in K$.

En su momento, dicha respuesta no solucionaba completamente el Problema 6.20 anterior, pues no se sabía si existían espacios de Banach X sin la propiedad de aproximación.

En 1972, el matemático sueco P. Enflo probó (ver [15]) que existían espacios de Banach que no satisfacen la propiedad de aproximación. Por tanto, ahora ya sabemos existen espacios de Banach en los que la traza de un operador nuclear no está bien definida.

Cabe mencionar que, tal y como probó el mismo Grothendieck, la existencia de espacios de Banach sin la propiedad de aproximación es equivalente a que el siguiente problema (propuesto originalmente por S. Mazur en 1936 en el *Libro Escocés*) tenga respuesta negativa. Para más información sobre el Problema 6.20 anterior, consultar [22].

Problema 6.21 (Problema 153 del Libro Escocés).
Sea $f \in \mathcal{C}([0,1] \times [0,1], \mathbb{R})$ *y* $\varepsilon > 0$.

¿Existen s_i, $t_i \in [0,1]$ *con* $1 \leq i \leq n$ *y* $c_i \in \mathbb{R}$ *con* $1 \leq i \leq n$ *de modo que*

$$\left|f(s,t) - \sum_{i=1}^{n} c_i f(s_i,t) f(s,t_i)\right| < \varepsilon \,?$$

Otra cuestión muy interesante es la siguiente.

Problema 6.22 (Problema de Lidskii).
Sean: H *un espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita,* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una base de Hilbert de* H*,* $T \in \mathcal{S}_1(H)$ *y* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la sucesión de autovalores de* T *contados de acuerdo con su multiplicidad.*

¿Es entonces cierto que

$$\operatorname{tr} T = \sum_{n=1}^{\infty} (Te_n, e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \,? \tag{6.16}$$

.

Por supuesto, si $T \in \mathcal{S}_1(H)$ es autoadjunto (o normal), entonces la respuesta es afirmativa, pues en tal caso —en virtud el Teorema espectral correspondiente— el operador diagonaliza. Sin embargo, responder a tal pregunta para operadores traza arbitrario es realmente complicado.

Nuevamente, el matemático francés A. Grothendieck fue capaz de probar en 1951 que si X es un espacio de Banach y $T \in N_{2/3}(X)$, entonces (6.16) es cierto. Posteriormente, se probó que la constante $2/3$ es óptima, pues en el espacio de sucesiones ℓ_1 (espacio de Banach con la propiedad de aproximación) existe un operador T para el que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \neq \operatorname{tr} T.$$

Resulta curioso que A. Grothendieck no estudiara el caso hilbertiano. Habría que esperar entonces a que el matemático ruso V. Lidskii probara (ver [21]) en 1950 que (6.16) es cierto para todo operador traza $T \in \mathcal{S}_1(H)$. Tal demostración emplea resultados avanzados de variable compleja.

Bibliografía

Bibliografía básica

[1] Dunford, N. y Schwartz, J.T., *Linear operators. Part I*, John Wiley & Sons, 1988.

[2] Gantumur, T,. *Peetre's K-method of interpolation.*
Disponible en: `www.math.mcgill.ca/gantumur/math765f13/Lecture09.pdf`
(Consultado por última vez en julio de 2020)

[3] Habala, P., Hájek, P. y Zizler, V., *Introduction to Banach Spaces I*, matfyzpress (Charles University), 1996.

[4] Habala, P., Hájek, P. y Zizler, V., *Introduction to Banach Spaces II*, matfyzpress (Charles University), 1996.

[5] Pelczynski, A., *A characterization of Hilbert-Schmidt operators*, Studia Mathematica **28** (1966), 355–360.

[6] Pietsch, A., *Operator ideals*, North-Holland Publishing Company, 1980.

[7] Pietsch, A., *Eigenvalues and s-numbers*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1987.

[8] Saxe, K., *Beginning Functional Analysis*, Springer-Verlag, 2002.

[9] Schatten, R., *Norm ideals of completely continuous operators*, Springer-Verlag, 1970.

[10] Segurado, A., *Números singulares, clases de Schatten-von Neumann, números de entropía y conceptos relacionados*, Publicaciones del Departamento de Análisis Matemático (Universidad Complutense de Madrid), 2013.
Disponible en: `www.ucm.es/data/cont/docs/193-2013-10-07-AlbaSegurado.pdf`
(Consultado por última vez en julio de 2020)

[11] Zhu, K., *Operator theory in function spaces*, 2ª Ed. American Mathematical Society, 2007.

Bibliografía complementaria

[12] Bergh, J. y Löfström, J., *Interpolation spaces: an introduction*, Springer-Verlag, 1976.

[13] Cauchy, A. L., *Sur lquation à l'aide de laquelle on détermine les inéqualités séculaires des mouvements des planetes*, Exercises de mathématiques **4** (1829), 174–195.

[14] Douglas, R.G., *Banach algebra techniques in operator theory*, 2ª Ed. Springer-Verlag, 1998.

[15] Enflo, P., *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Mathematica **130** (1973), 309–317.

[16] Gohber, I., Goldbberg, S. y Krupnik, N., *Traces and Determinants of Linear Operators*, Birkhäuser Verlag, 2000.

[17] Grothendieck, A., *Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires*, Séminaire Bourbaki **2** (1995), 193–200.

[18] Haagerup, U., *The best constants in the Khintchine inequality*, Studia Mathematica **70:3** (1981), 231–283.

[19] Hawthorne, C., *A brief introduction to trace class operators*.
Disponible en: `www.cdchawthorne.com/writings/trace_class_operators.pdf`
(Consultado por última vez en julio de 2020)

[20] Jacobi, C. G. J., *Di binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constant; una cum variis theorematis de transformatione et determinatione integralium multiplicium*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **12** (1834), 1–69.

[21] Lidskii, V. B., *Non-selfadjoint operators with a trace*, Doklady Akademii Nauk SSSR **125** (1959), 485–487.

[22] Pietsch, A., *Traces of operators and their history*, Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica **18** (2014), 51–64.

[23] Wilansky, A., *Topology for Analysis*, Ginn, 1970.