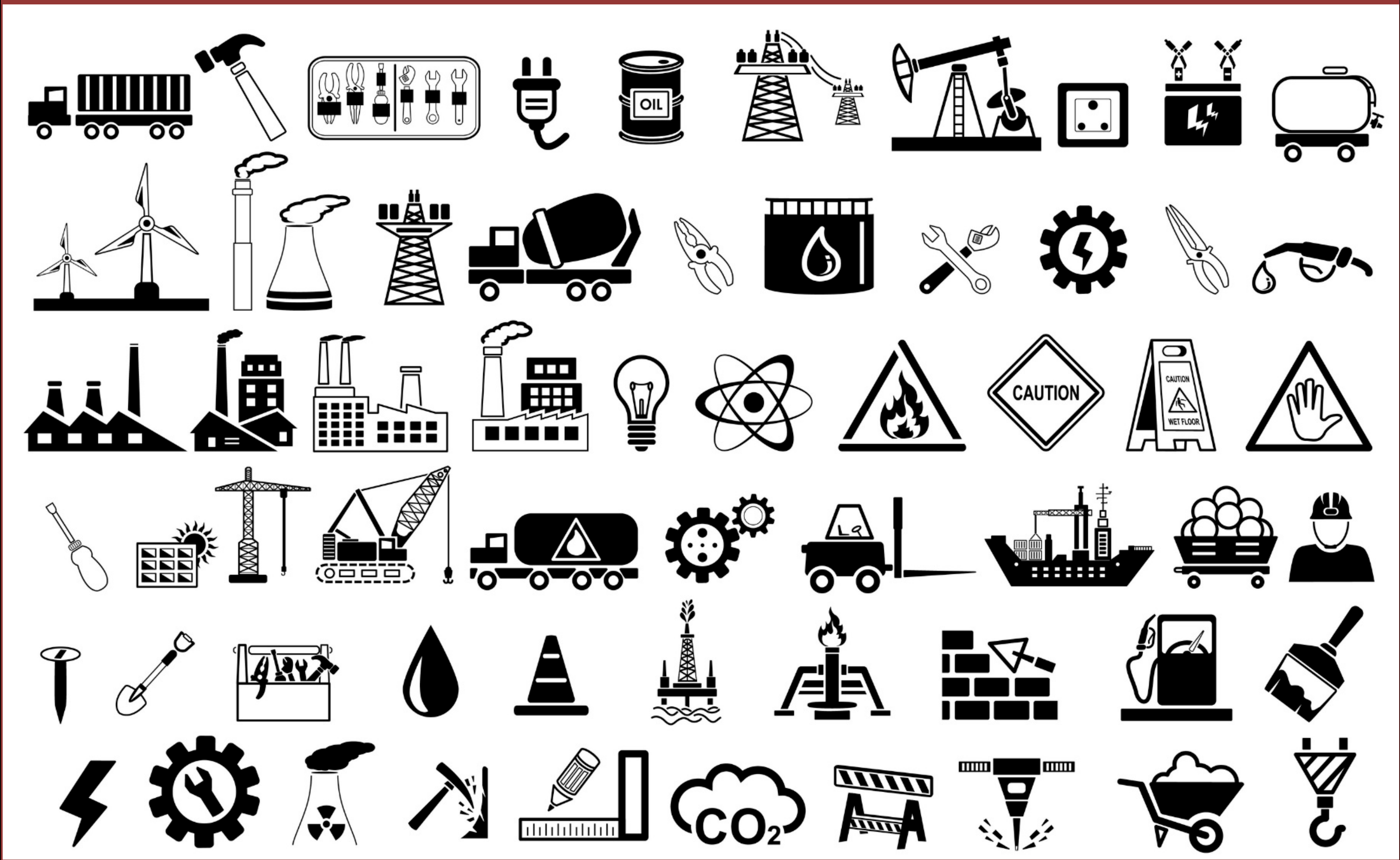
ANÁLISE DIMENSIONAL E MÓDULOS ADIMENSIONAIS

FUNDAMENTOS E CASOS PRÁCTICOS



Febreiro 2023

Autor

Gumersindo Feijoo
Grupo de Biotecnoloxía Ambiental. Departamento de Enxeñaría Química
Centro Interdisciplinar de Tecnoloxías Ambientais (CRETUS)
Universidade de Santiago de Compostela
Correo-e: gumersindo.feijoo@usc.gal
LinkedIn & Twitter: @feijoo_costa
Portal de Investigación: GUMERSINDO FEIJOO COSTA - Universidade de Santiago de Compostela (usc.gal)

Páxinas web:
Biogroup: www.usc.gal/biogroup
CRETUS: www.usc.gal/cretus

Índice

1 ~~3.3.~~ Análise dimensional.

O análise dimensional é o instrumento matemático que permite, unha vez coñecidas toda-las variabeis implicadas nun fenómeno, agrupalas nun reducido número de razóns ou números adimensionais, mediante os cales se simplifica ~~(menos laborioso e costoso)~~ e fai asequible a experimentación conducente a establecer a relación funcional entre as diferentes variableis.

Segundo Bridgman (1946), os principios fundamentais da análise dimensional son tres:

1) Todas as magnitudes físicas poden expresarse como funcións potenciais dun reducido número de magnitudes fundamentais.

2) As ecuacións que relacionan as magnitudes físicas son homoxéneas dende un punto de vista dimensional, esto é, todos seus termos teñen as mesmas dimensións, e polo tanto son independentes do sistema de unidades que se empregue.

3) Si unha ecuación é dimensionalmente homoxénea, pode reducirse a unha relación entre unha serie de razóns ou números adimensionais, nos que figuran toda-las variabeis que influen no fenómeno, as constantes dimensionais que poidan corresponder ó sistema de unidades elexido, e as constantes universais que poideran intervir no fenómeno de que se trate.

Palacios (1956) sinalou que só existen cinco constantes universais imprescindibeis: a constante gravitacional universal, G; a velocidade da luz, c; a constante de Planck, h; a constante dieléctrica, ε_0; e a constante de Boltzman, k.

1.1 ~~3.3.1.~~ *Método de Buckingham (Teorema π).*

Buckingham (1914) describeu o chamado Teorema π: *"O número de grupos adimensionais que forman unha ecuación representativa do fenómeno ven dado pola diferencia entre o número de variabeis independentes entre sí e o rango da matriz dimensional (orden do miaor determinante non nulo), ou dito doutra forma máis sinxela mais menos xeral, é a diferencia entre o número de variabeis independentes e o de unidades necesarias pra medir o conxunto"*, ou sexa:

$$i = n - h$$

sendo n o número de variabeis e h coincide moitas veces co número de magnitudes fundamentais do sistema de unidades elexido.

O pasos a seguir no método de Buchingham son os seguintes:

1) Identificació de toda-las variabeis que afecten o fenómeno.
2) Sustitución de cada variabel polas dimensións respectivas.

3) Si hai variabeis coas mesmas dimensións, teñense en conta soamente unha delas pro análise, engadindo ó final ós grupos adimensionais que resulten do mesmo, as razóns a que conduzan os cocientes das restantes variabeis das mesmas dimensións, que constituen os factores de forma.

$$f = \left(\Pi_1, \Pi_2 \ldots\ldots \Pi_i\right)$$

4) Formase a matriz dos exponentes a que quedan afectadas as magnitudes fundamentais nas ecuacións dimensionais das variabeis e constantes dimensionais

Magnitudes fundamentais	Variabeis e constantes dimensionais
	x_1 x_2...... x_n g_c
L M F t T	Cadro de exponentes

5) Determinase a característica h da matriz anterior.

6) Se forman i grupos adimensionais independentes, sendo n-h as variabeis que non forman cada grupo adimensional. Os grupos formanse engadindo unha das variabeis restantes (n-h) ós productos das h variabeis elevadas a expoñentes a determinar

$$\Pi_1 = x_1^{a_1} \cdot x_2^{b_1} \cdot x_3^{c_1} \cdot \ldots\ldots \cdot x_h^{p_1} \cdot x_{h+1}$$

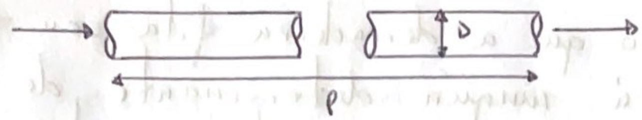
$$\Pi_2 = x_1^{a_2} \cdot x_2^{b_2} \cdot x_3^{c_2} \cdot \ldots\ldots \cdot x_h^{p_2} \cdot x_{h+2}$$

$$\Pi_i = x_1^{a_i} \cdot x_2^{b_i} \cdot x_3^{c_i} \cdot \ldots\ldots \cdot x_h^{p_i} \cdot x_{h+i=n}$$

7) As series de expoñentes, a_1, b_1,....p_1; a_2, b_2,....p_2; etc, deben ser tales, que os distintos grupos π_1, π_2,....π_i carezan de dimensións.

Exemplo: A pérdida de presión Δp, debida o rozamento que se produce entre duas seccións transversais dunha conducción cilíndrica pola que circula un fluido newtoniano, é función do diámetro da conducción, D; da distancia, l, entre ambalas duas seccións; da rugosidade das paredes da conducción, ε; das propiedades do fluido, densidade ρ e viscosidade μ; e da velocidade media do fluido. Determinar mediante o método de Buckingham as razóns adimensionasi en que poden agruparse todas estas variabeis, empregando o sistema enxeñeril e absoluto de magnitudes fundamentais.

Solución:



METODO DE BUCKINGHAM.

PASO 1. As variabeis involucradas no proceso son:

$$\Delta p,\ D,\ l,\ \varepsilon,\ \rho,\ \mu,\ v,\ g_c$$ SIST. ENXEÑERIL.

PASO 2.

$[\Delta P] = F \cdot L^{-2}$ $\qquad$ $[\rho] = M \cdot L^{-3}$

$[D] = L$ $\qquad$ $[\mu] = M\, L^{-1}\, t^{-1}$

$[l] = L$ $\qquad$ $[v] = L\, t^{-1}$

$[\varepsilon] = L$ $\qquad$ $[g_c] = M \cdot L \cdot t^{-2} \cdot F^{-1}$

PASO 3. Tres variabeis, D, l, ε, teñen a mesma dimensión, polo que so se considera D pro análise, definindo entón dous factores de forma:

$$\omega_1 = \frac{l}{D} \quad e \quad \omega_2 = \frac{\varepsilon}{D}$$

PASO 4 Construese a matriz dos exponentes das magnitudes fundamentais

6 FEIJOO

	ΔP	D	ρ	μ	v	g_c
L	-2	1	-3	-1	1	1
M	0	0	1	1	0	1
F	1	0	0	0	0	-1
t	0	0	0	-1	-1	-2
T	0	0	0	0	0	0

→ CADRO DOS EXPONENTES.

PASO 5. Dado que a derradeira fila son todos ceros non haberá ningún determinante de quinto orde non nulo. Dos determinantes de cuarto orde posibles, sólo un deles é nulo. Tomamos o que sinala coa liña de ptos. Por tanto, a matriz anterior é de característica

$h = 4$

PASO 6 O número de grupos adimensionais, segundo o teorema Π, será:

$$i = n - h = 6 - 4 = 2 \text{ razons adimensionais}$$

mais os dous factores de forma, pois si contasemos toda-las variabeis

$$i = 8 - 4 = 4$$
→ 2 factores de forma
→ 2 descoñecidos.

ou sexa:

$$\Pi_1 = \rho^{a_1} \cdot \mu^{b_1} \cdot v^{c_1} g_c^{d_1} \Delta P$$

$$\Pi_2 = \rho^{a_2} \mu^{b_2} \cdot v^{c_2} \cdot g_c^{d_2} D$$

PASO 7. cálculo dos exponentes $a_1, b_1, \ldots$

Π_1

$$0 = (M L^{-3})^{a_1} \cdot (M L^{-1} t^{-1})^{b_1} (L t^{-1})^{c_1} (M L t^{-2} F^{-1})^{d_1} (F L^{-2})$$

é dicer:

$$M: \quad 0 = a_1 + b_1 + d_1$$

$$L: \quad 0 = -3a_1 - b_1 + c_1 + d_1 - 2$$

$$F: \quad 0 = -d_1 + 1 \quad \Rightarrow \boxed{d_1 = 1}$$

$$t: \quad 0 = -b_1 - c_1 - 2d_1$$

entón:

$$0 = a_1 + b_1 + 1$$

$$0 = -3a_1 - b_1 + c_1 - 1$$

$$0 = -b_1 - c_1 - 2 \quad \Rightarrow \boxed{b_1 = -c_1 - 2 = 0}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= a_1 - c_1 - 1 \\ 0 &= -3a_1 + c_1 + 2 + c_1 - 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\boxed{a_1 = c_1 + 1 = -1} \\ &0 = -3c_1 - 3 + 2c_1 + 1 \\ &\boxed{c_1 = -2} \end{aligned}$$

por tanto:

$$\Pi_1 = \rho^{-1} \cdot \mu^{0} \cdot v^{-2} \cdot g_c \, \Delta p = \frac{\Delta p \, g_c}{\rho \, v^2}$$

chamado Módulo de Euler.

Π_2

$$0 = (M L^{-3})^{a_2} \cdot (M L^{-1} t^{-1})^{b_1} (L t^{-1})^{c_2} (M L t^{-2} F^{-1})^{d_2} L$$

$M: \quad 0 = a_2 + b_2 + d_2$

$L: \quad 0 = -3a_2 - b_2 + c_2 + d_2 + 1$

$F: \quad 0 = -d_2 \qquad \Rightarrow \boxed{d_2 = 0}$

$t: \quad 0 = -b_2 - c_2 - 2d_2 \qquad \Rightarrow \boxed{b_2 = -c_2}$

$0 = a_2 - c_2 \qquad \Rightarrow \boxed{a_2 = c_2}$

$0 = -3a_2 + c_2 + c_2 - 1$

$\Rightarrow \quad 0 = -3c_2 + 2c_2 + 1 \Rightarrow \boxed{c_2 = +1}$

$$\Pi_2 = \rho \cdot \mu^{-1} \cdot v^1 \cdot g_c^0 \cdot D = \frac{\rho v \cdot D}{\mu}$$

$\Rightarrow$ MÓDULO de Reynolds.

PASO 8

$$f\left(\frac{\Delta P\, g_c}{v^2 \rho}, \frac{vD\rho}{\mu}, \frac{l}{D}, \frac{\varepsilon}{D}\right) = 0 \quad ;; \quad f(E_v, Re, w_1, w_2) = 0$$

A función f deberá se atopar mediante experimentación, a cal nos conduciría a ecuación de FANNING.

$$\Delta p = \frac{1}{2} f \frac{L}{D} \frac{v^2 \cdot \rho}{g_c}$$

sendo f o factor de rozamento que é función do Re e da rugosidade ε.

1.2 ~~3.3.2.~~ *Método de Rayleigh.*

Rayleigh (1899) defineu un método pra análise dimensional cos seguintes pasos:

1) Identificación das variabeis que influen no fenómeno.
2) Exprésase unha das variabeis, xeneralmente á de maior interese, como función potencial das restantes e das posibles constantes dimensionais:

$$x_1 = K \cdot x_2^{a_1} \cdot x_3^{a_2} \cdot \ldots\ldots \cdot x_n^{a_n}$$

sendo K unha constante de proporcionalidade sin dimensións.
3) Sustituense as variabeis e posibeis constantes dimensionais da función anteriormente sinalada polas suas dimensión nun determinado sistema de magnitudes e se estabrecen as ecuacións de condicións de homoxeneidade pra cada unha das magnitudes fundamentais.
4) Si o sistema de magnitudes elexido ten p magnitudes fundamentais, as ecuacións de condición do paso anterior constituirán un sistema de p ecuacións, como máximo con (n-1) incógnitas. Se elixen (n-1-p) expoñentes ou incógnitas e se resolve o sistema indicado pra calcular o valor dos p expoñentes restantes en función dos elexidos. Si dous ou máis das ecuacións de condición foran idénticas, se sustituiría p por p´, número de ecuacións de condicións verdadeiramente independentes (p´<p).
5) Os valores dos p ou p´expoñentes do paso anterior sustituense na función definida e agrupanse as magnitudes elevadas ós mesmos expoñentes. Resultarán os grupos adimensionais.

A continuación aplicase este método o exemplo anteriormente citado.

SOLUCIÓN

PASO 1 As variabeis obxeto do problema son:

$\Delta P,\ D,\ l,\ \varepsilon,\ \rho,\ \mu,\ v$

e ademáis a cte. adimensional g_c

PASO 2 A variable de interese é a caída de presión ΔP, polo tanto:

$$\Delta P = k\, D^{a} \cdot l^{b} \cdot \varepsilon^{c} \cdot \rho^{d} \cdot \mu^{e} \cdot v^{f} \cdot g_c^{g}$$

PASO 3

$$F \cdot L^{-2} = L^{a} \cdot L^{b} \cdot L^{c} \left(M \cdot L^{-3}\right)^{d} \cdot \left(M L^{-1} \cdot t^{-1}\right)^{e} \cdot \left(L\, t^{-1}\right)^{f} \cdot \left(M \cdot L\, t^{-2} \cdot F^{-1}\right)^{g}$$

G FE1100

expresión que permite establecer as ecuacións de homoxeneidade dimensional:

$$L: \quad -2 = a + b + c - 3d - e + f + g$$
$$M: \quad 0 = d + e + g$$
$$F: \quad 1 = -g \Rightarrow \boxed{g = -1}$$
$$t: \quad 0 = -e - f - 2g$$

PASO 4 Pra resolver un sist. de 4 ecuacións e sete incógnitas temos que considerar $(n-1-p)$ pra que queden os outros en función deles:

$$\underset{\text{variables (Paso 1)}}{8} - 1 - \underset{\text{magnitudes fundamentais}}{4} = 3$$ " que consideraremos arbitrariamente: b, c, e

deste xeito calculamos os demáis en funcións deses 3.

$$a = -b - c - e$$
$$d = 1 - e$$
$$f = 2 - e$$
$$g = -1$$

PASO 5 Sustitúense estos valores na ecuación do paso 2

$$\Delta P = k \cdot D^{(-b-c-e)} \cdot L^{b} \cdot \varepsilon^{c} \cdot \rho^{(1-e)} \cdot \mu^{e} \cdot v^{(2-e)} \cdot g_c^{-1}$$

agrúpanse os termos con expoñentes semellantes:

$$\frac{\Delta p\ g_c}{v^2 \cdot \rho} = k \cdot \left(\frac{L}{D}\right)^b \cdot \left(\frac{\varepsilon}{D}\right)^c \cdot \left(\frac{\mu}{v \cdot D\rho}\right)^e$$

por tanto:

$$E_v = f\left(Re, w_1, w_2\right) \Leftrightarrow f\left(E_v, Re, w_1, w_2\right) = 0$$

2 ~~3.4~~ Teoría da semellanza.

Na Enx. Química o paso do laboratorio (síntese de novos productos) á produccion a escala industrial non é directo, senon que compre un paso intermedio que son as prantas piloto, ou prantas de pequena escala, cuios obxetivos son:

- Suministra datos de deseño e pequenas cantidades de producto.
- Estudar o comportamento dunha pranta industrial en funcionamento, da cal é unha réplica e cuia principal misión é mostrar os efeitos de cambios de forma ou operación de xeito máis rápido e económico do que resultaría na pranta industrial.

A teoría de semellanza ten como misión a interpretación e aplicación dos datos da pranta piloto no deseño e operación dunha pranta industrial. Dende o pto de vista da semellanza dos sist. complexos (sist. habituais na Enx. Química) soen ser tres as caracteristicas principais a ter en conta: tamaño, forma e composición. Compre ter en conta que o principio de semellanza refírese concretamente á forma, abstracción feita dos outros dous conceptos, pero entendendo como tal non só a xeometría correspondente as superficies, senon tamén as dos seus

6 FEIJOO

perfís de forza, velocidades, temperaturas e concentracións.

O principio de semellanza pódese expresar de forma xeral pola seguinte ecuación lineal homoxénea:

$$x' = k \cdot x$$

x: variable independente do ~~sistema~~ sistema tomado como modelo

k: factor de escala

x': variable independente do sistema a escala industrial ou prototipo

Si está relación lineal e homoxénea existe entre cada unha das variabeis independentes que configuran o sistema dise que a semellanza é total. Pola contra, si o número de ecuacións é menor que o de graos de liberdade temos unha semellanza parcial.

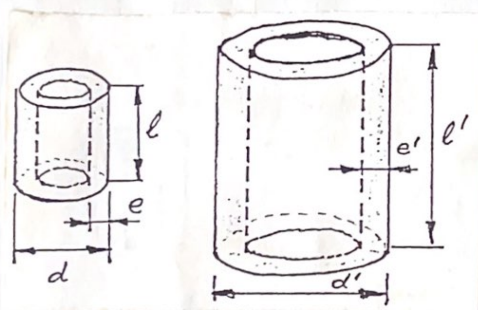
Na Enxeñería Química teñen interese os seguintes tipos de semellanza:

- Semellanza mecánica
- Semellanza xeométrica
- Semellanza térmica
- Semellanza química

2.1 SEMELLANZA XEOMETRIA.

"Dous corpos son xeometricamente semellantes si existe unha relación constante entre as dimensións correspondentes." Esta relación constante é o factor de escala ou forma (si x e xi son características intrínsecas do prototipo e do modelo). Así, a forma xeométrica dun corpo está determinada polas suas proporcións intrínsecas: razóns altura/ancho, ancho/espesor, etc. En corpos xeometricamente semellantes os factores de forma deben manterse iguais e os factores de escala deben ser ctes.

Consideremos un exemplo que explique mellor estos conceptos. Sexan dous aneis Rasching semellantes:



FACTOR DE ESCALA:

$$k = \frac{l'}{l} = \frac{d'}{d} = \frac{e'}{e}$$

FACTORES DE FORMA:

$$\frac{l'}{d'} = \frac{l}{d} \quad ; \quad \frac{l'}{e'} = \frac{l}{e} \quad ; \quad \frac{d'}{e'} = \frac{d}{e}$$

O factor de escala presenta a ventaxa de que unha soa razón sustitue a varios factores de forma. Os factores de forma son máis empregadas pra definir sistemas semellantes e se expresan por un número de factores de forma inferiores ó número de variábeis independientes do sistema. Se forman deste xeito grupos sin dimensións sinxelos formados por variabeis de xeito que só unha magnitude exista no numerador e denominador. Son estos módulos adimensionais os que nos permitiran establecer e predecir o comportamento dun sistema.

No exemplo anterior compre sinalar que os aneis Raschig caracterizanse por $l/d = 1$, polo que si $\frac{l}{d} > 1$ serán aneis alargados e $l/d < 1$ serán achatados.

2.2 SEMELLANZA MECÁNICA

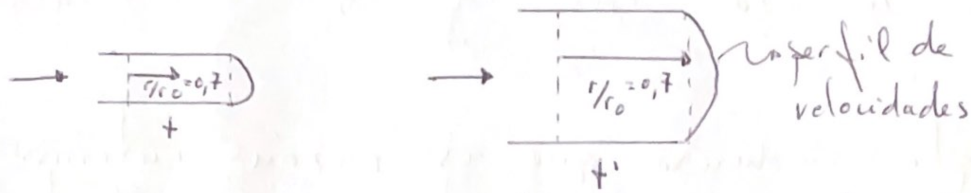
2.2.1 SEMELLANZA ESTATICA.

"Dous corpos xeometricamente semellantes son estáticamente semellantes cando sometidos a tensións iguais e constantes, as suas deformacións relativas son tales que permañecen xeometricamente semellantes (proporcionalidade das deformacións)." As semellanzas deste tipo son interesantes en Enx. Mecánica e Estructural.

2.2.2 SEMELLANZA CINEMÁTICA.

"Dous sistemas xeometricamente semellantes e en mov. son cinematicamente semellantes cando partículas correspondentes describen traxectorias semellantes en intervalos de tempo correspondentes (proporcionalidade de tempos)." Si o factor de escala de tempos

$t'/t > 1$ o prototipo realiza os mov. correspondentes máis lentamente que o modelo e viceversa.



Si hai proporcionalidade de velocidades (existe proporcionalidade lonxitude-xeométrica-temporal) os seus perfiles de fluxo son xeométricamente semellantes e as densidades de fluxo, así como as velocidades de transporte de calor e materia entre os dous sistemas terán unha relación sinxela.

2.2.3 SEMELLANZA DINAMICA

"Dous sistemas xeometricamente semellantes en mov. son dinamicamente semellantes cando as razóns de todalas forzas correspondentes son iguais (proporcionalidade de forzas)."

En sistemas fluidos ou en sistemas de partículas sólidas, a semellanza cinemática implica necesariamente a semellanza dinámica, pois os movementos do sistema son función das forzas aplicadas.

Si sobor dun punto dado actúan n tipos de forzas diferentes, denominando F_i as forzas de inercia, F_μ forzas de viscosidade, F_p forzas de presión, F_g forzas de gravedade e F_σ forzas de tensión superficial, compre que na semellanza se verifique:

$$\frac{F_i'}{F_i} = \frac{F_\mu'}{F_\mu} = \frac{F_p'}{F_p} = \frac{F_g'}{F_g} = \frac{F_\sigma'}{F_\sigma} = cte \text{ (factor de escala)}$$

Disto dedúcese que as razóns intrínsecas (factores de forma) entre forzas distintas nambos sistemas teñen que ser iguais:

$$\frac{F_\mu'}{F_i'} = \frac{F_\mu}{F_i} \;,\; \frac{F_p'}{F_i'} = \frac{F_p}{F_i} \;,\; \frac{F_i'}{F_g'} = \frac{F_i}{F_g} \;,\; \frac{F_i'}{F_\sigma'} = \frac{F_i}{F_\sigma}$$

Estas razóns intrínsecas determinan a forma dinámica dun sistema, constituindo unha serie de módulos adimensionais que son os criterios de semellanza. Entre os máis destacados:

- Módulo de Reynolds:

$$\left[\frac{F_\mu}{F_i} = \frac{\mu \cdot A \cdot \overbrace{\frac{v}{L}}^{\text{gradiente de } v}}{m \cdot a} = \frac{\mu \frac{L^2 \cdot v}{L}}{\rho \cdot V \cdot a^*} = \frac{\mu \frac{L^2 \cdot v}{L}}{\rho \cdot L^3 \cdot \frac{v^2}{L}} = \frac{\mu}{L \rho \cdot v} = \frac{1}{Re}\right]$$

$$^*a = \frac{L}{T^2} = \frac{L^2}{T^2} \cdot \frac{1}{L} = \frac{v^2}{L}$$

- Módulo de Euler

$$\left[\frac{F_p}{F_i} = \frac{\Delta P \cdot A}{m \cdot a} = \frac{\Delta P \cdot L^2}{\rho L^3 \frac{v^2}{L}} = \frac{\Delta P}{\rho v^2} = E_u\right]$$

- Módulo de Froude.

$$\left[\frac{F_i}{F_g} = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} = \frac{\rho L^3 \frac{v^2}{L}}{\rho L^3 \cdot g} = \frac{v^2}{g L} = F_r \right]$$

- Módulo de Weber

$$\left[\frac{F_\sigma}{F_i} = \frac{\overset{*}{\sigma} \cdot L}{m \cdot a} = \frac{\sigma \cdot L}{\rho L^3 \cdot \frac{v^2}{L}} = \frac{\sigma}{\rho L \cdot v^2} = \frac{1}{W_e} \right]$$

$^*\ \sigma = \frac{F}{L} = \frac{\text{dinas}}{\text{cm}}$ „ defínese como a razón da forza superficial á lonxitude normal a forza ó longo da cal actúa

A semellanza dinámica total é practicamente inalcanzabel e pra conquerir unha semellanza parcial temos que ver cales das características son as predominantes.

Sinalar por último que naqueles sistemas en axitación con vórtice ademáis de F_i e F_μ existe F_g. Si non no hai, entón so temos F_i e F_μ.

3.4.4 SEMELLANZA TERMICA.

Esta semellanza é importante en sistemas nos que hai fluxo de calor e introduce a temperatura como dimensión adicional. O calor pode fluir dun punto a outro por condución, convección e radiación debido a unha diferencia de temperaturas entre dous ptos, dependendo a intensidade desa diferencia. Tamén pode fluír por mov. másico do fluído debido a un gradiente de presión (convección forzada), dependendo do perfil de fluxo do sistema. De aquí que en sist. dinámicos a semellanza térmica exixa semellanza cinemática.

"Dous sist. xeometricamente semellantes son termicamente semellantes cando as razóns das diferencias de temperaturas correspondentes son iguais, e nos sistemas dinámicos, si ademais son cineticamente semellantes."

Representando por Q_q, Q_c, Q_r e Q_m as intensidades transmitidas por condución, convección, radiación e convección forzada, teremos na semellanza:

$$\frac{Q_q'}{Q_q} = \frac{Q_c'}{Q_c} = \frac{Q_r'}{Q_r} = \frac{Q_m'}{Q_m} = cte \text{ (factor de escala)}$$

por ende:

$$\frac{Q_m'}{Q_q'} = \frac{Q_m}{Q_q} \quad ; \quad \frac{Q_m'}{Q_r'} = \frac{Q_m}{Q_r} \quad ; \quad \frac{Q_c'}{Q_q'} = \frac{Q_c}{Q_q}$$

e tamén:

$$\frac{Q_{TOTAL}'}{Q_q'} = \frac{Q_{TOTAL}}{Q_q}$$

onde:

$$Q_{TOTAL} = Q_q + Q_c + Q_r + Q_m.$$

G FEIJOO

20/4/19

Os módulos máis empregados son:

- Módulo de Nusselt:

$$\left[\frac{Q_c}{Q_q} = \frac{h\, L^2 \cdot \Delta T}{k\, L^2\, \frac{\Delta T}{L}} = \frac{h\,L}{k} = N_u \right]$$

$Q_c = h \cdot A \cdot \Delta T$ (*Lei de Newton) (conv)

h. coef. de convección

*mais ben coef. de Newton, xa que empregase o nome pra de cant. de mov.

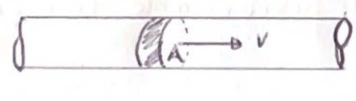
$Q_q = k \cdot A\, \frac{\Delta T}{\Delta x}$ (Lei de Fourier) (cond)

k. conductividade termica

- Módulo de Stanton:

$$\left[\frac{Q_c}{Q_m} = \frac{h\, L^2 \cdot \Delta T}{\rho\, L^2 \cdot v\, c_p\, \Delta T} = \frac{h}{\rho\, v\, c_p} = St \right]$$

$$Q_m = \frac{m}{t}\, c_p\, \Delta T = \frac{\rho V}{t}\, c_p\, \Delta T = \rho\, A \cdot v \cdot c_p\, \Delta T = \rho\, L^2 \cdot v\, c_p\, \Delta T$$



v: distancia desprazada na unidade de tempo (velocidade)

v·A: volumen desprazado na unidade de tempo = $\frac{V}{t}$

- Módulo de Thring:

$$\left[\frac{Q_m}{Q_r} = \rho \frac{L^2 v c_p \Delta T}{\sigma \varepsilon \cdot L^2 \cdot T^4} = \frac{\rho v c_p}{\sigma \varepsilon T^3} = Th.\right]$$

$$Q_r = \sigma \cdot \varepsilon \cdot A \cdot T^4$$

σ. cte. de STEFAN-BOLTZMAN
ε. Emisividad.

- Módulo de Peclet: non é independente dos xa deducidos pero ten un interese alto en sistemas cuia conductividade térmica sexa moi elevada; por exemplo, no fluxo ne metais fundidos. Nestos casos é comparable en orde de magnitude o calor transmitido por conducción e convección forzada.

$$\left[\frac{Nu}{St} = \frac{Q_m}{Q_q} = \rho \frac{L^2 \cdot v\, c_p\, \Delta T}{k\, L^2\, \frac{\Delta T}{L}} = \rho \frac{L\, v\, c_p}{k} = \frac{v L}{\frac{k}{\rho c_p}} = Pe\right]$$

onde:

$$a = \text{difusividade térmica} = \frac{k}{\rho c_p} = [L^2 T^{-1}]$$

$$\left[\frac{Nu}{St} = \frac{v \cdot L}{a} = Pe\right]$$

- Módulo de Prandtl: este módulo ten o interese na relación da transmisión de calor (semellanza térmica) coas forzas existentes nun sistema no que haia fluxo (semellanza dinámica):

$$\left[P_r = \frac{P_e}{R_e} = \frac{\rho L v c_p}{k} \cdot \frac{\mu}{v L \rho} = \frac{\mu c_p}{k} \right]$$

ou ben, si dividimos todo pola densidade:

$$\left[P_r = \frac{\mu/\rho}{k/\rho c_p} = \frac{\nu}{a} \right]$$

"só relaciona prop. do fluido, non aparecen consideracións do fluxo e xeométricas"

ν: viscosidade cinemática $= \frac{\mu}{\rho}$ $[L^2 \cdot T^{-1}]$

Tanto ν como a son coef. de difusión de cant. de mov. e de enerxía, respectivamente:

$$\mathbb{D} = \text{coef. difusión} = [L^2 \cdot T^{-1}]$$

~~3.3~~ 2.5. SEMELLANZA QUÍMICA

Esta semellanza ten a súa importancia en sistemas onde se desenvolven reaccións químicas e nos que a composición varía de pto. a pto. nos sistemas continuos e en cada instante pros sistemas por cargas.

A conc. dun reaccionante nun elemento dado de volumen nun instante determinado, depende da conc. inicial, da velocidade de reacción, da velocidade de difusión e da velocidade de transporte debido ó mov. másico global:

Reacción química: $M_r = r_i \cdot L^3$

velocidade de reacción $\equiv$ nº moles/volumen

Difusión: $M_D = D \cdot L^2 \cdot \frac{\Delta\rho}{\Delta x}$ (Lei de Fick)

Fluxo másico: $M_m = \rho_i \cdot \frac{V}{t} = \rho_i \cdot v \cdot A = \rho_i \cdot v \cdot L^2$.

A velocidade de reacción depende da temperatura, a velocidade de transf. do gradiente de conc. e a velocidade másica do perfil do fluxo. Por conseguinte, a semellanza química exixe a semellanza térmica e a cinemática e depende da diferenciande conc., e non dos seus valores absolutos.

"Dos sist. xeométrica e termicamente semellantes son químicamente semellantes cando as razóns de diferencias de conc. correspondentes son iguais, e nos sist. dinámicos si son ademáis dinámicamente semellantes."

Entón:

$$\frac{M_r'}{M_r} = \frac{M_D'}{M_D} = \frac{M_m'}{M_m} = cte \quad \text{(factor de escala)}$$

Por tanto, as razóns intrínsecas que definen a semellanza química, ademais das requeridas pola semellanza dinámica e térmica son:

6 FEB 00

$$\frac{M_r'}{M_m'} = \frac{M_r}{M_m} \quad ; \quad \frac{M_r'}{M_D'} = \frac{M_r}{M_D} \quad ; \quad \frac{M_m'}{M_D'} = \frac{M_m}{M_D}$$

- Para sistemas reactivos temos dous módulos, que nos relacionan a reacción química co fluxo por difusión e por transporte másico, son os chamados DANKÖHLER:

$$\boxed{\frac{M_r}{M_m} = \frac{r \cdot L^3}{\rho v \cdot L^2} = \frac{r\,L}{\rho\,v} = Da_I}$$

$$\boxed{\frac{M_r}{M_D} = \frac{r \cdot L^3}{\mathbb{D} \rho L} = \frac{r\,L^2}{\mathbb{D}\,\rho} = Da_{II}}$$

- Modulo de Peclet másico: empregase en sist. non reactivos onde si existe difusión e fluxo másico:

$$\boxed{\frac{M_m}{M_D} = \frac{Da_{II}}{Da_{I}} = \frac{L\,v}{\mathbb{D}} = Pe_{másica}}$$

- Módulo de Schimidt: nos sistemas dinámicos se emprega un módulo que relacione o transporte de materia co de cant. de movemento (semellanza dinámica):

$$\boxed{\frac{Pe_{másico}}{Re} = \frac{v \cdot L}{\mathbb{D}} \, \frac{\mu}{v \cdot L \cdot \rho} = \frac{\mu}{\rho\,\mathbb{D}} = \frac{\nu}{\mathbb{D}} = S_c}$$

"só depende de prop. físicas do fluido"

- Si dividimos o Sc polo Pr obtemos un módulo que nos relaciona coa semellanza térmica, dependendo das prop. físicas do fluido:

$$\left[\text{Módulo de Lewis} = Le = \frac{S_c}{P_r} = \frac{a}{D} \right]$$

- Ademais existen outros dous módulos de Dankökler que teñen en conta o calor nunha reacción, xunto co calor asociado a difusión e a un transporte másico

$$\left[\frac{Q_{rq}}{Q_m} = \frac{r \cdot L^3 \cdot \Delta H}{\rho L^2 v c_p \Delta T} = \frac{\Delta H r L}{\rho v c_p T} = Da_{III} \right]$$

$$\left[\frac{Q_{rq}}{Q_q} = \frac{\Delta H r L^3}{k L^2 \frac{\Delta T}{L}} = \frac{\Delta H r L^2}{k T} = Da_{IV} \right]$$

3.4.5. *Semellanza restringida. Mecanismos e réximenes controlantes.*

2.6

Os criterios de semellanza entre dous sistemas consisten sempre na igualdade pros mesmos dunha serie completa de razóns ou números adimensionais. Conquerir tal igualdade, e con ela a semellanza que se desexe soe ser moi díficil, practicamente imposible, pois existen incompatibilidades das semellanzas dos diferentes módulos. Así, si consideramos a máis sinxela das semellanzas, a dinámica, indispensable pra calquera das outras, resulta imposible de conquerir incluso pra sistemas homólogos. Aínda que se supoñan despreciables as forzas convectivas a igualdade do Reynolds, Froude e Weber nos dous sistemas implica que a variación da velocidade coa lonxitude sexa proporcional ás potencias -1, 1/2 e -1/2, da última, respectivamente.

Polo tanto, si se desexa construir un modelo pro estudo dun proceso físico ou químico, con miras a sua extrapolación ó prototipo, teremos que estabrecer unha semellanza coa sinxela igualdade dun grupo adimensional, ou ca de dous como máximo, é a chamada *semellanza restrinxida*.

Así, no caso da semellanza dinámica, sempre indispensable, procurárase que os efectos das forzas convectivas, de gravedade e de tensión superficial sexan despreciables frentes ás que corresponden ás de viscosidade ou rozamento; de xeito que a igualdade do Reynolds nos dous sistemas sexa suficientes pra que tamén sexan os números de Euler e atinxir deste xeito a semellanza. Neste caso, o mecanismo de transporte de cantidade de movemento, que implicaría só o número de Reynolds, denominariase como *mecanismo controlante*.

Acotío, nos procesos que se desenrrolan por varias etapas, resulta admisibel supor que unha delas, suficientemente máis lenta que as demáis, controla o proceso global, esto é, determina a velocidade coa que se desenvolve, podendo aceptarse que as restantes, moito máis rápidas, atinxen o equilibrio. Segúndo sexa a natureza desta etapa asi sería o *réximen controlante*, a saber: réxime dinámico, réxime térmico ou réxime de concentracións.

En consecuencia, o emprego dun reducido número de módulos adimensionais permite estabrecer unha serie de analoxías entre os fenómenos de transporte que teñen lugar nos sistemas químicos (complexos): a transferencia de materia, calor e cantidade de movemento; que van a permitir extrapolar o comportamento do modelo ó prototipo.

3.4.6. *Efectos de parede.*

2.7

Todo-los sistemas limitan cos aredores por unha ou varias paredes. A razón (superficie das paredes/volumen interno) é sempre moito maior no modelo que no prototipo. Por elo, a semellanza interna entre unha e outra non presupón a externa, presentándose os chamados efectos de parede, que de non controlarse axeitadamente poden imposibilitar a predicción do comportamento do prototipo a partires do comportamento do modelo. Os efectos de parede máis frecuentes son:

- Influencia sobor o perfil de velocidades e rozamento.
- Transmisión de calor ó traverso das paredes.
- Efectos de adsorción e desorción.
- Catálise positivas ou negativas das reaccións químicas.

Xeralmente, os efectos de parede non poden eliminarse, pero sí neutralizarse en gran parte gracias a dispositivos experimentais axeitados.

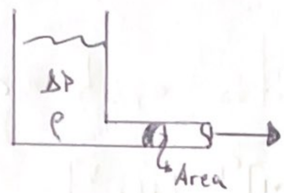
6 FE1300

13 ~~15.~~ O caudal de saída dun líquido dun depósito ó traverso dun tubo suponse función do área da sección do tubo, da diferencia de presións e da densidade do líquido. Atopar unha relación entre estas magnitudes pro cálculo do caudal.

SOLUCIÓN

ANALISE DIMENSIONAL. METODO DE BUCKINGHAM

Paso 1 Def. e identificación das variabeis.



$Q = A \cdot V$ — V: queda def. polas outras

Q: caudal
A: sección tubo saída
v: velocidade
ΔP: diferencia de presións

Paso 2 Dimensións no sist. absoluto.

$Q = \frac{V}{t} = [L^3 \cdot T^{-1}]$,, $\rho = [M L^{-3}]$

$A = [L^2]$,, $\Delta P = \frac{F}{S} = \frac{m \cdot a}{S} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L^2} = [M L^{-1} T^{-2}]$

Paso 3 Posto que non hai variabeis con dimensións iguais non se define ningún factor de forma

Paso 4 Matriz dos expoñentes

	ΔP	A	Q	ρ
M	1	0	0	1
L	-1	2	3	-3
T	-2	0	-1	0

Paso 5 O maior determinante non nulo é de orde 3, polo tanto, a caracteristica da

matriz é $h = 3$

Paso 6 Segundo th. π Buckingham o número de módulos adimensionais

$$i = \underset{\text{variabeis}}{n} - \underset{\substack{\text{caracteristica} \\ \text{da matriz}}}{h} = 4 - 3 = 1$$

$$\pi_1 = \Delta P^{a_1} \cdot A^{b_1} \cdot Q^{c_1} \cdot \rho$$

Paso 7 cálculo dos expoñentes a_1, b_1 e c_1

$$0 = [M \cdot L^{-1} T^{-2}]^{a_1} \cdot [L^2]^{b_1} \cdot [L^3 \cdot T^{-1}]^{c_1} \cdot [M L^{-3}]$$

$M: \quad 0 = a_1 + 1 \quad \Rightarrow \boxed{a_1 = -1}$

$L: \quad 0 = -a_1 + 2b_1 + 3c_1 - 3 \quad \Rightarrow \boxed{b_1 = -2}$

$T: \quad 0 = -2a_1 - c_1 \quad \Rightarrow \boxed{c_1 = 2}$

$$\pi_1 = \Delta P^{-1} \cdot A^{-2} \cdot Q^2 \cdot \rho = \frac{Q^2 \cdot \rho}{\Delta p\, A^2} \equiv \boxed{\frac{v^2 \cdot \rho}{\Delta P} = \frac{1}{Eu}}$$

Paso 8 A función define o sistema

$$\frac{Q^2 \cdot \rho}{\Delta p\, A^2} = \underset{\substack{\text{cte} \\ \text{adimensional}}}{\text{cte}} \Rightarrow \boxed{Q = k \cdot A \cdot \left(\frac{\Delta p}{\rho}\right)^{1/2}}$$

6 FEIJOO

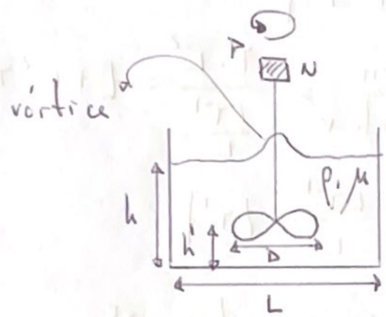
14 ~~16.~~ Un factor importante no deseño dun tanque axitado é a potencia necesaria pra mover o axitador. Esta potencia non pode calcularse teoricamente aínda nos casos máis sinxelos, senon que compre determinala experimentalmente. Sexa un tanque cheo até un nivel dado cun líquido de densidade e viscosidade coñecidas e que o axitador xira cunha velocidade de N revolucións por minuto. Asimesmo, coñecense toda-las dimensións do misturador, diámetro do tanque, diámetro do axitador, distancia do axitador ó fondo do tanque, altura do líquido, etc.

Mediante a análise dimensional (empregar o sistema enxeñeril) compre atopar unha relación entre a potencia e as restantes variabeis, considerando que ás velocidades empregadas parte do líquido ascende con respeito ó nivel medio sin axitación creando un vórtice. Con este modelo, ¿sería posibel coñecer a velocidade de xiro pra un axitador semellante a maior escala?.

SOLUCIÓN

ANALISE DIMENSIONAL. METODO DE RAYLEIGH.

Paso 1 Identificación das variabeis que influen no sist. obxeto de estudo



P: potencia do motor
N: rev por minuto
h: altura do líquido
h': distancia do axitador ó fondo do misturador.

Paso 2 A variabel de maior interese é a Potencia, polo que a función obxetivo será:

$$P = f(N, h, h', D, \rho, \mu, g, g_c)$$

g: introducese pola existencia dun vortice

g_c: sist. enxeñeril

Dado que h, h', D, e L teñen todas a mesma dimensión e considerando delas D pro análise, podremos definir tres factores de forma xeométrica.

$$\frac{h}{D} \, , \; \frac{L}{D} \, , \; \frac{h'}{D}$$

por tanto:

$$P = k \cdot D^a \mu^b \rho^c g^d N^e g_c^f$$

k: cte. adimensional.

Paso 3 Sustitúense ás variabeis polas suas dimensións:

$$\text{Potencia} = \frac{W}{t} = [F \cdot L \cdot T^{-1}]$$

$$\text{viscosidade} = \mu = \frac{\text{Tensión}}{\text{gradiente } v} = \frac{F \cdot L^{-2}}{\frac{LT^{-1}}{L}} = [F L^{-2} T]$$

$$\text{Velocidade de xiro} = \frac{v}{r} = \frac{LT^{-1}}{L} = [T^{-1}]$$

$$[F \cdot L T^{-1}] = L^a [F L^{-2} T]^b [M L^{-3}]^c [L T^{-2}]^d [T^{-1}]^e [M L T^{-2} F^{-1}]^f$$

expresión que permite establecer as ecuacións de homoxeneidade dimensional seguintes:

$$F: \quad 1 = b - f$$
$$M: \quad 0 = c + f$$
$$L: \quad 1 = a - 2b - 3c + d + f$$
$$T: \quad -1 = b - 2d - e - 2f.$$

G FEIJOO

Paso 4 Pra resolver un sist de 4 ecuacións e 6 incognitas temos que considerar $(n-1-p)$ variabeis ou mellor dito expoentes, de xeito que os demais queden como función deles:

$$(n-1-p) = 7-1-4 = 2$$ „ eleximos "b" e "d".

nº variabeis (Paso 2)

nº ecuacións ≡ magnitudes fundamentais

deste xeito a solución será:

$$1 = b - f \Rightarrow \boxed{f = b-1}$$

$$0 = c + f \Rightarrow c = -f \Rightarrow \boxed{c = 1-b}$$

$$1 = a - 2b - 3(1-b) + d + b - 1 \Rightarrow \boxed{a = 5-2b-d}$$

$$-1 = b - 2d - e - 2(b-1) \Rightarrow \boxed{e = 3-b-2d}$$

Paso 5 Sustitúvense os valores na ecuación do paso 2

$$P = k \cdot D^{(5-2b-d)} \cdot \mu^{b} \cdot \rho^{(1-b)} \cdot g^{d} \cdot N^{(3-b-2d)} \cdot g_c^{(b-1)}$$

agrúpanse os termos con expoñentes semellantes co que poderemos ter "3 módulos":

$$\frac{P\, g_c}{D^5 \rho N^3} = K \cdot D^{(-2b-d)} \cdot \mu^{b} \cdot \rho^{-b} \cdot g^{d} \cdot N^{(-b-2d)} \cdot g_c^{b}$$

$$\frac{P\, g_c}{D^5 \rho N^3} = k \cdot \left(\frac{\mu\, g_c}{\rho \, N \cdot D^2} \right)^{b} \left(\frac{g}{D \cdot N^2} \right)^{d}$$

agora ben:

$$N = \frac{v}{r} \Rightarrow v = N \cdot r$$

velocidade lineal — velocidade angular

por tanto:

$$N \cdot D^2 = N \cdot D \cdot D = v \cdot D$$

$$\frac{1}{D \cdot N^2} = \frac{1}{D \cdot N \cdot N} = \frac{1}{N \cdot v} = \frac{D \cdot 1}{D \cdot N \cdot v} = \frac{D}{v^2}$$

en consecuencia:

$$\left(\frac{P\, g_c}{D^5 \rho N^3} \right) = k \cdot \left(\frac{\mu\, g_c}{D \rho v} \right)^{b} \cdot \left(\frac{D g}{v^2} \right)^{d}$$

Módulo da potencia

$$\frac{1}{Re} \left\{ \frac{F_i}{F_\mu} \right\} \qquad \frac{1}{Fr} \left\{ \frac{F_i}{F_g} \right\}$$

$$N_p = f\left(Re, Fr, w_1, w_2, w_3 \right)$$

factores de forma xeométricos.

Polo tanto, mediante a análise dimensional conquerimos reducir o noso sistema a análise de diferentes módulos ou factores de forma, co que mediante o emprego da semellanza poderemos extrapolar datos de comportamento a sist. de maior escala.

SEMELLANZA DINÁMICA

Dado que o problema indica que o prototipo é semellante xeometricamente ó noso modelo, entón:

$$N_p = f(Re, Fr)$$

A semellanza dinámica obterase si:

(a) $(Re)_{modelo} = (Re)_{prototipo}$

(b) $(Fr)_{modelo} = (Fr)_{prototipo}$

a partir destas ecuacións poderemos establecer a velocidade de xiro do prototipo:

$$\frac{N \cdot D^2 \cdot \rho}{\mu \cdot g_c} = \frac{N' \cdot D'^2 \cdot \rho'}{\mu' \cdot g_c'} \quad (a)$$

$$\frac{N^2 \cdot D}{g} = \frac{N'^2 \cdot D'}{g'} \quad (b)$$

- Como o fluido non troca:

$$\mu = \mu' \quad ; \quad \rho = \rho'$$

- e por suposto: $g_c = g_c'$ e $g = g'$

- entón:

$$(a) \quad N \cdot D^2 = N' \cdot D'^2 \Rightarrow N' = N \cdot \left(\frac{D}{D'}\right)^2$$

$$(b) \quad N^2 \cdot D = N'^2 \cdot D' \Rightarrow N' = N \cdot \left(\frac{D}{D'}\right)^{1/2}$$

Temos duas relacións incompatibeis, polo que temos que falar de semellanza parcial ou restrinxida, de xeito que tomar partido por un ou outro criterio dependerá da importancia das forzas.

A experiencia indica:

$$N' = N \cdot \left(\frac{D}{D'}\right)^n$$

$n = 1$ sistemas con igual mov. de líquido

$n = \frac{3}{4}$ suspensión de sólidos

$n = \frac{2}{3}$ igualdade na velocidade de transf. de materia

$n = 0$ igual t^a na mistura

$n = 1/2$ igual mov. superficial (vórtice)

$n = \frac{2}{3}$ igual potencia por unidade de volumen

6 FEI 100

4. REFERENCIAS

Buckingham, E. (1914). On physcially similar systems: Ilustrations of the use o dimensional equations. *Physical Review* 4(4): 345-376

Churchill, S.W. (1997). A new approach to teaching dimensional analysis. *Chemical Engineering Education* 31(3): 158-165.

Costa Novella y col. (1983). Ingeniería Química, Vol. 1: Conceptos generales. Alambra, Madrid.

Rayleigh, L. (1915). The principle of similitude. Nature 95(2368): 66-68