



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Homología y cohomología simpliciales

Alejandro Omar Majadas Moure

2021/2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Homología y cohomología simpliciales

Alejandro Omar Majadas Moure

07/2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Trabajo propuesto

<b>Área de Coñecemento:</b> Geometría y topología
<b>Título:</b> Homología y cohomología simpliciales
<b>Breve descripción do contido:</b>
Se estudiarán las teorías de homología y cohomología simpliciales siguiendo, fundamentalmente, la referencia (1). Dependiendo de los intereses del alumno el trabajo podrá tomar diferentes direcciones. Algunas de ellas pudieran ser: el estudio de la Dualidad de Poincaré desde un enfoque combinatorio, el estudio de anillos de cohomología y sus operaciones, aplicaciones de la homología y cohomología, la relación entre ambas teorías, su relación con la (co)homología de variedades o la conexión con otras teorías de (co)homología.
<b>Recomendacións:</b>
Manejar adecuadamente los contenidos de las materias Topología General y Topología de Superficies. Puede ser recomendable cursar Topología Algebraica.
<b>Otras observacións</b>



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. Complejos simpliciales y homología</b>	<b>1</b>
1.1. Complejos simpliciales y homología . . . . .	1
<b>2. Aplicaciones en homología</b>	<b>7</b>
2.1. Aplicaciones simpliciales . . . . .	7
2.2. Propiedades de la homología simplicial . . . . .	8
<b>3. Herramientas homológicas</b>	<b>13</b>
3.1. Cohomología . . . . .	13
3.2. Homología singular . . . . .	17
<b>4. Isomorfismo en homología y cohomología</b>	<b>23</b>
4.1. Isomorfismo entre homologías . . . . .	23
4.2. Isomorfismo entre cohomologías . . . . .	27
<b>5. Homología celular</b>	<b>33</b>
5.1. Homología celular . . . . .	33
<b>6. Variedades homológicas</b>	<b>39</b>
6.1. Variedades homológicas y la esfera homológica de Poincaré . . . . .	39
6.2. Dualidad de Poincaré . . . . .	48
<b>Bibliografía</b>	<b>53</b>



## Resumen

En este trabajo probamos la *Dualidad de Poincaré* en el contexto de *complejos simpliciales*. Este enfoque permite aplicar el resultado a una familia de espacios más amplia que las variedades diferenciables. Además, exhibimos un ejemplo de tal familia de espacios, el cual construimos a partir de la *Esfera homológica de Poincaré*.

## Abstract

In this dissertation we prove the *Poincaré Duality* in the setting of *simplicial complexes*. This approach allows to apply the result to a wider family of spaces than just smooth manifolds. Moreover, we exhibit an example of such family of spaces, which we build from the *Poincaré homology Sphere*.



# Introducción

La topología algebraica nace como rama de las matemáticas a finales del Siglo XIX, cuando matemáticos como Henri Poincaré, Camille Jordan o Enrico Betti comienzan a emplear invariantes algebraicos para el estudio de espacios topológicos. Estos invariantes derivarían con el tiempo hacia los grupos de homotopía y homología, razón por la cual, desde los años 30 del siglo pasado, comenzó a aumentar el interés por el cálculo de dichos grupos.

Si bien en el ámbito de la homotopía, no tardaron en surgir aportaciones de suma importancia, como el Teorema de van Kampen [18, Capítulo 3], aún permanecen abiertas a día de hoy numerosas incógnitas, entre las cuales destaca el cálculo de los grupos de homotopía de las esferas, un resultado que todavía continúa incompleto, a pesar de los grandes avances de Jean-Pierre Serre ([16], [17]).

De la misma forma que ocurre con los grupos de homotopía, es posible asociar a un espacio topológico  $X$  una sucesión de grupos de homología  $\{H_i(X)\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Sin embargo, al contrario de lo que sucede con los primeros, la definición de los segundos es más complicada, si bien su cálculo resulta en gran parte de ocasiones más sencillo que en el caso de los grupos de homotopía. El estudio de estos grupos de homología prosperó a un ritmo vertiginoso durante la primera mitad del Siglo XX. Herramientas como la sucesión exacta de Mayer-Vietoris (Teorema 3.29) o el Teorema de escisión (Teorema 3.25) resultaron fundamentales para el cómputo de una teoría homológica que, en primera instancia, fue formulada a partir de símlices. Aun así, la homología simplicial, pese a resultar de gran utilidad para realizar ciertos cálculos (tal y como algunos que veremos más adelante en este trabajo), no tardó en ser substituída por otra teoría equivalente pero más general: la homología singular. No obstante, en la última década, la teoría homológica simplicial ha resurgido debido a las facilidades que presenta a la hora implementar en un ordenador los cálculos de los grupos de homología.

En relación con la homología, se encuentra la cohomología, construida mediante una modificación algebraica de la definición de homología. Sin embargo, a pesar de esta aparente similitud entre ambos conceptos, la cohomología puede ser dotada a través del producto

*cup* de una estructura de anillo, mucho más rica que la estructura de grupo abeliano de la homología.

El punto de unión de ambas teorías resultó ser la Dualidad de Poincaré (formulada por Henri Poincaré en términos de números de Betti en 1893), la cual permite relacionar la homología y la cohomología de ciertos espacios topológicos. De este modo, la Dualidad de Poincaré pronto constituyó el principal puente de conexión entre ambas teorías, equiparándose en importancia al teorema de Hurewicz ([6]), el cual establece una relación entre los grupos de homotopía y los de homología.

Además, cabe mencionar que la Dualidad de Poincaré no es en absoluto un problema ya concluido, pues aún a día de hoy siguen apareciendo nuevas formulaciones del resultado que emplean hipótesis menos restrictivas u otras teorías de homología y cohomología diferentes de la simplicial ([2], [15]).

Este trabajo se ha organizado como sigue. En el Capítulo 1 introduciremos la homología simplicial (la cual visualizaremos además con un ejemplo al que recurriremos en numerosas ocasiones a lo largo del trabajo) y presentaremos una noción de orientación de símlices poco frecuente en los libros de topología algebraica pero que evitará tener que hablar de la homología simplicial ordenada en el Capítulo 4.

Por su parte, en el Capítulo 2 demostramos algunas propiedades de gran importancia a la hora de calcular la homología de determinados complejos simpliciales.

En lo que respecta al Capítulo 3, en él se comienza introduciendo la noción de cohomología. Destaca en esta parte la aparición del producto *cup*, pero, sobre todo un ejemplo propio en la demostración del Teorema 3.8 que emplea este producto para probar que el isomorfismo entre la homología simplicial y singular (que demostraremos en el Capítulo 4) no viene inducido por un isomorfismo a nivel de cadenas. Más adelante, en la Sección 3.2 se introducirá la homología singular, así como algunas de sus propiedades.

En el Capítulo 4 comenzamos por probar la existencia de un isomorfismo entre la homología simplicial y la singular. Luego, combinando de un modo ingenioso las referencias [5] y [10], extendemos este isomorfismo a las cohomologías simpliciales y singulares.

Más adelante, en el Capítulo 5 se introduce la homología celular (la homología de los *CW* complejos), que resultará fundamental en la demostración de la Dualidad de Poincaré en el Capítulo 6, además de constituir, por sí sola, uno de los objetivos de este trabajo.

Finalmente, en el Capítulo 6, concentraremos los principales resultados de este trabajo. Comenzaremos por introducir el concepto de variedad homológica, en cuyos términos será enunciada la Dualidad de Poincaré. A continuación presentaremos la Esfera de Poincaré ([7]), un ejemplo en absoluto trivial, aunque en el fondo natural, a partir del cual se obtiene una variedad homológica que no es variedad topológica y que, a su vez, guarda

cierta relación con la formulación de la Conjetura de Poincaré, el célebre problema del milenio resuelto en 2003 por Grigori Perelman. Nosotros presentaremos este ejemplo desde un punto de vista más algebraico, aunque su versión más conocida se formula de un modo geométrico a partir del dodecaedro ([7]). Por último, enunciaremos y demostraremos la Dualidad de Poincaré en su versión simplicial, la cual generaliza la versión más común, en el contexto de variedades.



# Capítulo 1

## Complejos simpliciales y homología

En este capítulo introduciremos los conceptos de símplice y complejo simplicial, así como la noción de orientación de un complejo simplicial, la cual presentaremos tanto del modo habitual como de una manera original y más sencilla. La alternación de ambas definiciones aportará cierta originalidad al trabajo, pues permitirá simplificar diversos resultados. Finalmente, en este capítulo terminaremos por definir los grupos de homología de un complejo simplicial, todo ello ilustrado con un ejemplo que iremos desarrollando a medida que este trabajo vaya avanzando. Seguiremos principalmente la referencia [10].

### 1.1. Complejos simpliciales y homología

Comenzamos presentando los complejos simpliciales, que, en cierto modo, pueden pensarse como espacios topológicos construidos combinando espacios elementales, que reciben el nombre de símplices.

**Definición 1.1.** Sea  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^m$  una colección de puntos. Diremos que son *afínmente independientes* si para todo conjunto de números reales  $\{t_i\}_{i=0}^n$  satisfaciendo:

$$\sum_{i=0}^n t_i a_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^n t_i = 0,$$

se verifica que  $t_i = 0$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n$ .

**Definición 1.2.** Sean  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^m$  puntos afínmente independientes. Definimos el  $n$ -símplice  $\sigma$  generado por  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  como:

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i a_i : t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}.$$

En tal caso, diremos que los  $a_0, a_1, \dots, a_n$  son los *vértices* de  $\sigma$  y que  $n$  es su *dimensión*.

**Definición 1.3.** Sea  $\sigma = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  un  $n$ -símplice. Se llamará una *cara* de  $\sigma$  a cualquier símplice generado por un subconjunto no vacío de  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ .

En particular, se llamará *cara opuesta* a  $a_i$  a la generada por  $\{a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n\}$ , donde por  $\hat{a}_i$  denotamos la ausencia del vértice  $a_i$ . Se dirá que una cara es *propia* si es distinta de  $\sigma$ , y se llamará *borde* de  $\sigma$  a la unión de caras propias del símplice. Por su parte, el *interior* de  $\sigma$  designará a los puntos de  $\sigma$  que no se incluyen en su borde.

**Definición 1.4.** Un *complejo simplicial finito*  $K \subset \mathbb{R}^m$  es una colección finita y no vacía de símplices de  $\mathbb{R}^m$  verificando:

- Si  $\sigma$  está en  $K$ , entonces todas sus caras también lo están.
- Si  $\sigma$  y  $\beta$  son símplices de  $K$ , entonces  $\sigma \cap \beta$  es una cara de ambos o bien es el vacío.

Si  $K' \subset K$  es un subconjunto de  $K$  que cumple las propiedades anteriores, diremos que  $K'$  es un subcomplejo simplicial de  $K$ . En general, salvo que se indique lo contrario, cuando nos hablemos de *complejos simpliciales* deberá entenderse que hablamos de *complejos simpliciales finitos*.

**Ejemplo 1.5.** Durante todo el trabajo recurriremos a menudo al siguiente complejo simplicial para ejemplificar en él las nociones que vayan apareciendo. Consideremos  $W$  como el complejo simplicial formado por las caras

$$\begin{aligned} & \{[v_0], [v_1], [v_2], [v_3], [v_4], [v_5], [v_6], [v_7], [v_0, v_1], [v_0, v_2], [v_0, v_3], [v_1, v_3], [v_1, v_2], [v_2, v_3], \\ & [v_0, v_1, v_2], [v_0, v_1, v_3], [v_0, v_2, v_3], [v_1, v_2, v_3], [v_2, v_6], [v_2, v_7], [v_6, v_7], \\ & [v_3, v_4], [v_3, v_5], [v_4, v_5]\} \end{aligned}$$

que vemos en la figura 1.1. Se puede comprobar en efecto que se trata de un complejo

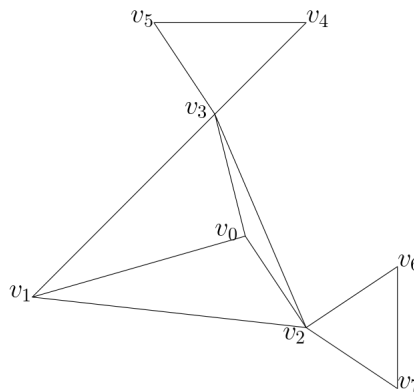


Figura 1.1: Complejo W

simplicial.

**Definición 1.6.** Dado un complejo simplicial  $K$ , se llama *p-esqueleto* (denotado  $K^{(p)}$ ) al subcomplejo formado por las caras de  $K$  de dimensión menor o igual que  $p$ .

**Ejemplo 1.7.** Al no haber en el complejo  $W$  presentado en el Ejemplo 1.5 caras de dimensión 3, se tiene que  $W^{(2)} = W$ .

**Definición 1.8.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Entonces  $|K|$  denotará a  $K$  como subespacio topológico de  $\mathbb{R}^m$ . Se dirá que  $|K|$  es el *politopo* de  $K$ .

**Definición 1.9.** Un complejo simplicial se dirá *localmente finito* si cada uno de sus vértices pertenece únicamente a una cantidad finita de simplices de  $K$ .

La demostración del siguiente lema se puede consultar en [10, Lema 2.6].

**Lema 1.10.** *Un complejo  $K$  será localmente finito si y solo si su politopo es localmente compacto.*

A continuación introducimos la noción de orientabilidad. Primero presentamos la definición más común (Definición 1.11), que se puede consultar en [10, sección 5], [14] o [18], y luego presentamos una definición de cadenas orientadas equivalente en homología, más intuitiva y con la que trabajaremos hasta el penúltimo teorema de esta memoria. Sin embargo, aunque las definiciones de cadenas orientadas sean equivalentes en homología, no lo serán las de simplices orientados (toda orientación del tipo mencionado en 1.14 induce una del tipo mencionado en 1.11, pero no al revés). Como ya hemos dicho, nosotros emplearemos la definición 1.14 hasta la demostración de la Dualidad de Poincaré, donde tendremos que recurrir a la diversidad de orientaciones que nos proporciona la Definición 1.11.

**Definición 1.11** (Primera definición de orientación de un simplex). Dado un  $n$ -simplex, podemos fijar un orden de sus vértices. Dos órdenes serán *equivalentes* si uno de ellos resulta de aplicar un número par de trasposiciones al otro. De este modo, si  $n > 0$ , los posibles órdenes del simplex se agrupan en dos clases de equivalencia, a las que llamaremos *orientaciones*. Un simplex se dirá *orientado* si se le ha asignado una de las posibles orientaciones. Denotaremos de nuevo por  $[a_0, a_1, \dots, a_p]$  la clase dada por la orientación  $a_0 < a_1 < \dots < a_p$  del simplex  $a_0 a_1 \dots a_p$ .

**Definición 1.12.** Dado un complejo simplicial  $K$ , se define una *p-cadena* en  $K$  sobre un anillo conmutativo  $R$  como una función  $c$  que asigna a cada  $p$ -simplex orientado  $\sigma$  de  $K$  un elemento del anillo de manera que:

- Si  $\sigma$  y  $\sigma'$  tienen orientaciones opuestas entonces  $c(\sigma) = -c(\sigma')$ .

- $c(\sigma) = 0$  para casi todo  $\sigma$ .

*Observación 1.13.* Con la definición anterior, las  $p$ -cadenas, que denotaremos por  $C_p(K; R)$  (o por simplemente por  $C_p(K)$ ), definen un  $R$ -módulo libre si escogemos en cada símplice una orientación. Esta idea de módulo libre nos sugiere la segunda definición de orientación de un símplice. Para ello utilizamos que cualquier conjunto (en particular un conjunto de vértices) admite un buen orden (teorema de Zermelo [20, 1.18]), que, en particular, proporciona un orden total.

**Definición 1.14** (Segunda definición de orientabilidad de un complejo simplicial). Llamamos *orientación* de un complejo simplicial (ahora ya no es de un símplice) a un orden de sus vértices que induzca un orden total en los vértices de cada símplice. Diremos que un símplice está *orientado* si el orden que presentan sus vértices es el mismo que el inducido por el orden parcial en el símplice.

Se definen las  $p$ -cadenas de  $K$  sobre un anillo conmutativo  $R$ , denotadas de nuevo como  $C_p(K; R)$  como el módulo libre ([8, Sección 7]) sobre los  $p$ -símplices orientados. En particular, se puede entender esta definición como el resultado de orientar el complejo  $K$  con un orden total de sus vértices.

**Definición 1.15.** Definimos el *operador borde* como el homomorfismo de  $R$ -módulos  $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ , determinado por

$$\partial_p([a_0, a_1, \dots, a_n]) = \sum_{i=0}^n (-1)^i [a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n].$$

*Observación 1.16.* Con la Definición 1.11, el operador borde está bien definido: si dos  $n$ -símplices tienen la misma orientación entonces el resultado del operador borde sobre ambos símplices es el mismo. La demostración de este hecho puede consultarse en [10, Sección 5].

**Ejemplo 1.17.** En el Ejemplo 1.5, podemos dotar a cada una de sus  $n$ -caras (con  $n \in \{0, 1, 2\}$ ) de la orientación inducida por el orden  $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7$ . De este modo, las 0-cadenas sería el módulo libre generado por  $[v_0], [v_1], [v_2], [v_3], [v_4], [v_5], [v_6]$  y  $[v_7]$ , es decir  $R^7$ , donde, recordemos,  $R$  denota el anillo sobre el que vayamos a trabajar. Por su parte las 1-cadenas tendrían como base a

$$\begin{aligned} & \{[v_0, v_1], [v_0, v_2], [v_0, v_3], [v_1, v_2], [v_1, v_3], [v_2, v_3], \\ & [v_2, v_6], [v_2, v_7], [v_6, v_7], [v_3, v_4], [v_3, v_5], [v_4, v_5]\}, \end{aligned}$$

con lo cual  $C_1(W) \cong R^{12}$ . Finalmente, las 2-cadenas estarían generadas por

$$[v_0, v_1, v_2], [v_0, v_1, v_3], [v_0, v_2, v_3] \quad \text{y} \quad [v_1, v_2, v_3],$$

con lo que serían isomorfas a  $R^4$ .

Por su parte, la cadena  $[v_0, v_1] + [v_1, v_3] - [v_0, v_3]$  sería igual al borde de  $[v_0, v_1, v_3]$ , mientras que la cadena  $[v_3, v_4] + [v_4, v_5] - [v_3, v_5]$  no sería borde de ninguna 2-cadena.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [10, Lema 5.3].

**Lema 1.18.**  $\partial^2 = 0$ .

**Definición 1.19.** Se definen los  $p$ -ciclos de un complejo simplicial  $K$  como:

$$Z_p(K; R) = Z_p := \text{Ker } \partial_p \subset C_p(K)$$

*Observación 1.20.* Existe una interpretación geométrica para los ciclos. Podemos considerar por ejemplo  $R = \mathbb{Z}_2$  a fin de poder prescindir de los signos que aparezcan en la expresión del operador borde. Entonces, vemos que los  $p$ -ciclos se corresponden con las sumas de los  $p$ -símplices que encierran la *frontera* ([20, 3.15]) de un poliedro de dimensión  $p + 1$ .

**Definición 1.21.** Se define el *borde* de un complejo simplicial como:

$$B_p(K, R) := \text{Im } \partial_{p+1} .$$

En particular, como consecuencia del lema 1.18, se tiene que  $B_p \subset Z_p$  y por tanto cobra sentido la siguiente definición.

**Definición 1.22.** Se define el  $p$ -ésimo *grupo de homología* como:

$$H_p(K; R) := \frac{Z_p}{B_p} .$$

**Teorema 1.23.** *Aunque no toda orientación de los símplices de un complejo está inducida por un orden total de los vértices del complejo, la homología del complejo sí que será la misma independientemente de la orientación que escojamos. En particular, si lo orientamos siguiendo la Definición 1.11 o la Definición 1.14, los grupos de homología que obtendremos serán los mismos.*

*Demostración.* Para probar que la homología de un complejo no depende de las orientaciones, basta verlo con dos orientaciones que se diferencien únicamente en un  $p$ -símplice  $\sigma$  compuesto por los vértices  $v_0, v_1, \dots, v_p$  (piénsese, por ejemplo, que en el primer caso se toma la orientación  $[v_0, v_1, v_2, \dots, v_p]$  y en el segundo  $[v_1, v_0, v_2, \dots, v_p]$ ). Si denotamos por  $C$  las cadenas con el primer orden y por  $C'$  las cadenas con el segundo orden, resultará que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial} & C_p & \xrightarrow{\partial} & C_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \sigma & & \downarrow \text{id} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{p+1} & \xrightarrow{\partial} & C'_p & \xrightarrow{\partial} & C'_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

conmuta, donde  $\sigma$  denota la aplicación que lleva  $[v_0, v_1, v_2, \dots, v_p]$  en  $-[v_1, v_0, v_2, \dots, v_p]$  y deja fijos los demás símlices. El resultado se sigue entonces del hecho de que tengamos un isomorfismo a nivel de cadenas. □

*Observación 1.24.* Denotaremos por  $A \cong B$  el hecho de que dos módulos (o grupos) sean isomorfos.

**Ejemplo 1.25.** Calculemos en el Ejemplo 1.5 los ciclos, los bordes y los grupos de homología. Trabajemos con  $R = \mathbb{Z}$ .

Para empezar,  $Z_0(W) = C_0(W) = \mathbb{Z}^7$ . Ahora bien,  $B_0(W)$  será el subgrupo de  $C_0(W)$  generado por las cadenas

$$\{[v_1] - [v_0], [v_2] - [v_0], [v_3] - [v_0], [v_2] - [v_1], [v_3] - [v_1], [v_3] - [v_2], \\ [v_6] - [v_2], [v_7] - [v_2], [v_7] - [v_6], [v_4] - [v_3], [v_5] - [v_4], [v_5] - [v_3]\}.$$

Como veremos dentro de poco, al ser  $W$  conexo por caminos, se tiene que  $H_0(W) = \mathbb{Z}$ . Para dar una breve idea de por qué ocurre esto hacemos notar que, dada una 0-cadena cualquiera, por ejemplo  $[v_1] + [v_2] - [v_6]$ , ésta será homóloga a un múltiplo de  $v_0$ :

$$[v_1] + [v_2] - [v_6] = [[v_0] + ([v_1] - [v_0])] + [[v_0] + ([v_2] - [v_0])] + [v_0 + (v_2 - v_0) + (v_6 - v_2)] \\ = [v_0] + \partial[v_0, v_1] + [v_0] + \partial[v_0, v_2] - ([v_0] + \partial[v_0, v_2] + \partial[v_2, v_6]).$$

Por su parte,  $Z_1(w)$  estará generado por

$$\{[v_3, v_4] + [v_4, v_5] - [v_3, v_5], [v_2, v_6] + [v_6, v_7] - [v_2, v_7], \\ [v_0, v_1] + [v_1, v_2] - [v_0, v_2], [v_0, v_1] + [v_1, v_3] - [v_0, v_3], \\ [v_0, v_2] + [v_2, v_3] - [v_0, v_3], [v_1, v_2] + [v_2, v_3] - [v_1, v_3]\}.$$

Asimismo,  $B_1(W)$  estará generado por

$$\{[v_0, v_1] + [v_1, v_3] - [v_0, v_3], [v_0, v_2] + [v_2, v_3] - [v_0, v_3], \\ [v_0, v_1] + [v_1, v_2] - [v_0, v_2], [v_1, v_2] + [v_2, v_3] - [v_1, v_3]\}.$$

Así pues, vemos que  $H_1(W) \cong \mathbb{Z}^2$ .

Finalmente,

$$H_2(W) = Z_2(W) \cong \mathbb{Z},$$

pues  $Z_2(W)$  está generado por  $[v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2]$  y  $B_2(W)$  es nulo por definición.

## Capítulo 2

# Aplicaciones simpliciales.

# Aplicaciones entre grupos de homología y propiedades de la homología simplicial

En este capítulo comenzaremos por construir categorías (ver [13, Capítulo 1]) a partir de los complejos simpliciales, las cadenas, o los grupos de homología. Para ello, nos preocuparemos por definir los morfismos entre los distintos objetos (complejos simpliciales, cadenas o grupos de homología) y terminaremos por definir funtores entre las distintas categorías. En la segunda sección, nos centraremos en presentar el cono de un complejo y algunas propiedades de gran utilidad para el cómputo de la homología simplicial.

Seguiremos la línea de la referencia [10], sirviéndonos a menudo también de [13] para las cuestiones más algebraicas. No obstante, en algunos resultados como 2.16, sacamos a la luz la idea de la demostración, no tan clara en [10]. De nuevo, ilustraremos los nuevos conceptos geométricos que vayan surgiendo con ejemplos clarificadores.

### 2.1. Aplicaciones simpliciales

**Definición 2.1.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales y  $f$  una aplicación entre  $K^{(0)}$  y  $L^{(0)}$  (es decir, entre los conjuntos de vértices de ambos complejos). Se dirá que  $f$  induce una *aplicación simplicial* entre los complejos  $K$  y  $L$  (la cual denotaremos de nuevo por  $f$ ) si para cualquier subconjunto de vértices de  $K^{(0)}$  que formen un símplice en  $K$ , sus imágenes forman un símplice de  $L$ . La aplicación inducida entre símplices será por consiguiente la

aplicación afín inducida por la aplicación  $f$  entre los conjuntos de vértices. En particular,  $f$  será siempre continua al ser una extensión afín.

*Observación 2.2.* Si  $f$  es una aplicación biyectiva entre  $K^{(0)}$  y  $L^{(0)}$  tal que cualquier subconjunto de vértices de  $K$  forman un simplejo de  $K$  si y solo sus imágenes forman un simplejo de  $L$ , entonces  $f$  induce un homeomorfismo entre los complejos  $K$  y  $L$ , que se llamará homeomorfismo simplicial.

**Definición 2.3.** Sea  $f$  una aplicación simplicial entre los complejos  $K$  y  $L$ . Entonces,  $f$  induce una aplicación entre  $C_p(K)$  y  $C_p(L)$  determinada por:

$$f_{\#}([v_0, v_1, \dots, v_p]) = \begin{cases} [f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_p)] & \text{si } f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_p) \text{ son distintos} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La demostración del siguiente resultado se puede consultar en [10, Lema 12.1].

**Proposición 2.4.** *Se tiene que  $f_{\#}$  conmuta con  $\partial$ .*

*Observación 2.5.* De este modo,  $f_{\#}$  pasa al cociente e induce un homomorfismo de módulos  $f_*$  bien definido entre los grupos de homología (ver [8, Capítulo 1]).

*Observación 2.6.* Si  $f$  y  $g$  son aplicaciones simpliciales entre  $K$  y  $L$  y entre  $L$  y  $M$  respectivamente, se tiene que  $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$  y que  $\text{id}_* = \text{id}$  (ver [10, Teorema 12.2]). Esto demuestra que tenemos un funtor entre las categorías de complejos simpliciales (donde los morfismos son las aplicaciones simpliciales con las composiciones definidas de un modo natural) y la de los grupos abelianos con los homomorfismos. Esto implica, por ejemplo, que un homeomorfismo simplicial induce un isomorfismo en homología (ver [13, Capítulo 1]).

## 2.2. Propiedades de la homología simplicial

Veamos ahora algunas propiedades útiles que permiten simplificar el cálculo de los grupos de homología. Comencemos por caracterizar los grupos de homología en grado cero en función de las componentes conexas del complejo.

**Teorema 2.7.** *Dado un complejo simplicial  $K$ , se tiene que  $H_0(K)$  es un grupo abeliano libre. Además, si  $\{v_{\alpha}\}$  es una colección de vértices con un elemento  $v_{\alpha}$  por cada componente conexas de  $|K|$ , entonces las clases de homología de los  $v_{\alpha}$  forman una base de  $H_0(K)$ .*

*Demostración.* Seguiremos en un principio la demostración propuesta en el [10, Teorema 7.1], dividiendo la prueba en varios pasos:

- **PASO 1.** Para vértices  $v$  y  $w$  de  $K$ , definimos la relación de equivalencia  $v \sim w$  si existe una colección finita de vértices,  $v = a_0, a_1, \dots, a_n = w$ , tales que cada  $[a_{i-1}, a_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , es un 1-símplice de  $K$ . Consideremos ahora  $C_v$  como la unión de las *estrellas* de los vértices relacionados con  $v$ , es decir,

$$C_v = \bigcup_{w \sim v} St(w)$$

donde cada  $St(w)$  se define como la unión de los interiores de las caras de  $K$  que contienen a  $w$ .

Veamos que las  $C_v$  se corresponden con las componentes conexas de  $|K|$ .

- Los  $C_v$  son abiertos en  $K$  porque  $St(w)$  es abierto en  $|K|$ .
- Cada  $C_v$  es conexo por caminos y por consiguiente conexo ([20] [20, Teorema 27.2]):

Dado un vértice  $v$ , sea  $w \sim v$  y  $x \in St(w)$ . Por definición de la relación de equivalencia, existen vértices  $v = a_0, a_1, \dots, a_n = w$  que cumplen la condición antes enunciada. Son precisamente los 1-símplices  $[a_0, a_1], \dots, [a_{n-1}, a_n]$  los que garantizan la existencia de un camino entre  $v$  y  $w$ . Por su parte, como camino entre  $w$  y  $x$  basta tomar la recta que une ambos puntos, la cual estará contenida en  $K$  debido al carácter afín de un símplex presentado en la Definición 1.2.

- Si  $C_v \neq C_{v'}$  entonces  $C_v \cap C_{v'}$  será el vacío:

Supongamos que existe un  $x \in C_v \cap C_{v'}$ . Entonces

$$x \in St(w) \cap St(w'),$$

con  $w \sim v$  y  $w' \sim v'$ . Si  $w = w'$ , entonces  $v \sim w = w' \sim v'$ , lo cual resulta una contradicción. Por el contrario, si  $w \neq w'$ , tenemos que existe una cara  $A$  con  $w$  como vértice que contiene a  $x$  en su interior y que existe una cara  $B$  con  $w'$  como vértice que contiene a  $x$  en su interior. Supongamos que la dimensión de  $A$  es menor o igual que la de  $B$ . Entonces, como la intersección de dos caras es una cara y  $x$  pertenece al interior de  $A$ , tenemos que  $A \subset B$ , y por tanto el 1-símplice  $[w, w']$  está en  $K$ . En consecuencia,  $v \sim w \sim w' \sim v'$ , lo cual nos lleva a una contradicción.

- **PASO 2.** Sea  $v_\alpha$  una colección de vértices de  $K$  con  $v_\alpha \in C_\alpha$ . Sea  $w$  un vértice de  $K$ . Se tendrá  $w \in C_\alpha$  para algún  $\alpha$ . Por definición, existe una sucesión de vértices  $v_\alpha = a_0, a_1, \dots, a_n = w$  tal que los 1-símplices  $[a_i, a_{i+1}]$  están en  $K$ . Consideremos la 1-cadena

$$c = [a_0, a_1] + [a_1, a_2] + \dots + [a_{n-1}, a_n].$$

Se tiene

$$\partial c = a_n - a_0 = w - v_\alpha ,$$

con lo cual la cadena  $w$  es homóloga a la cadena  $v_\alpha$ . De este modo, cualquier 0-cadena en  $K$  es homóloga a una cadena de la forma  $\sum n_\alpha v_\alpha$ .

Llegados a este punto, para ver que las clases de homología de los  $v_\alpha$  forman una base de  $H_0(K)$ , tenemos que ver el siguiente y último paso de la demostración.

- **PASO 3.** Veamos que una 0-cadena de la forma  $c = \sum n_\alpha v_\alpha$  es borde si y solo si  $n_\alpha = 0$  para todo  $\alpha$ .

Supongamos para ello que  $c = \partial d$ . Podemos expresar la 2-cadena  $d$  como un sumatorio de 1-cadenas donde cada sumando tiene soporte en una componente conexa de  $K$ . Es decir,  $d = \sum d_\alpha$ , donde cada  $d_\alpha$  tiene como soporte a  $C_\alpha$ .

De este modo,  $\partial d = \sum \partial d_\alpha$ , donde  $\partial d_\alpha$  es una 0-cadena soportada por  $C_k$ . Por la definición de  $C_0(K)$  como módulo libre, esto implica que  $\partial d_\alpha = n_\alpha v_\alpha$  para todo  $\alpha$ .

Veamos ahora que esto implica que  $n_\alpha = 0$ :

Definimos la aplicación

$$\epsilon : C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad c = \sum m_v v \mapsto \sum m_v . \quad (2.1)$$

(Si construimos nuestras cadenas sobre otro módulo la definición de esta aplicación no cambia, solo varía el rango de la misma). En particular tenemos que

$$\epsilon(\partial[v, w]) = \epsilon(w - v) = \epsilon(w) - \epsilon(v) = 0 ,$$

de donde se deduce que  $\epsilon(\partial d_\alpha) = 0$ , lo cual nos lleva a que

$$n_\alpha = \epsilon(n_\alpha v_\alpha) = \epsilon(\partial d_\alpha) = 0 ,$$

tal y como queríamos demostrar. □

*Observación 2.8.* Este teorema ha sido enunciado considerando  $C_0(K)$  como un  $\mathbb{Z}$ -módulo. Recordemos que un  $\mathbb{Z}$ -módulo es lo mismo que un grupo abeliano (ver [1, Capítulo 2]). El resultado con un dominio conmutativo arbitrario nos daría que  $H_0(K)$  es suma directa de tantas copias del dominio como componentes conexas tuviera  $|K|$ , y su demostración es análoga a la que acabamos de ver.

La aplicación  $\epsilon : C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$  que aparece en la demostración anterior nos permite definir los siguientes módulos.

**Definición 2.9.** Dado un complejo simplicial  $K$ , se define el  $i$ -ésimo grupo de *homología reducida* como:

$$\tilde{H}_i(K) = H_i(K), \text{ si } i > 0; \quad \tilde{H}_i(K) = \frac{\text{Ker } \epsilon}{\text{Im } \partial_1}, \text{ si } i = 0.$$

El grupo de homología reducida tiene algunas propiedades interesantes que estudiaremos a continuación. Sin embargo, antes precisaremos introducir la noción de cono.

**Definición 2.10.** Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  un complejo simplicial y  $w \in \mathbb{R}^n$  un punto fuera de  $K$  tal que cualquier semirrecta con extremo  $w$  corta a  $K$  a lo sumo en un punto. Definimos el *cono* sobre  $K$  con vértice  $w$  como la colección de símplices de la forma  $w, wa_0a_1 \dots a_p$  o  $a_0a_1 \dots a_p$ , siempre que  $a_0a_1 \dots a_p$  sea un símplice de  $K$ . Se denotará por  $w * K$ .

La demostración del siguiente lema se puede consultar en [10, Sección 8]

**Lema 2.11.**  $w * K$  es un complejo simplicial.

*Demostración.* La demostración se puede consultar en [10, Sección 8]. □

**Ejemplo 2.12.** Si  $a_0a_1 \dots a_p$  es un símplice entonces  $a_0a_1 \dots a_p = a_0 * a_1 \dots a_p$  (Figura 2.1).



Figura 2.1: Símplice como cono sobre una de sus caras

*Observación 2.13.* Sea  $c \in C_p(K)$ , con  $c = \sum n_i \sigma_i$ . Entonces se define  $w * c = \sum n_i w * \sigma_i$ . Además, tal y como aparece en [10, Sección 8], se tiene que:

$$\partial w * \sigma = \sigma - w * \partial \sigma.$$

Esto nos lleva a que

$$\partial w * c = c - \epsilon(c)w \quad \text{si } c \in C_0(K); \quad \partial w * c = c - w * \partial c \quad \text{si } c \in C_i(K), \quad \text{con } i > 0.$$

Los grupos de homología reducida resultan de gran utilidad en el estudio de la homología. Tal y como veremos a continuación, el grupo de homología reducida en grado cero de un complejo simplicial conexo es trivial, algo de lo que se puede sacar gran provecho cuando tenemos sucesiones exactas en homología (ver [13, Capítulo 1]). La demostración del siguiente resultado se puede consultar en [10, Teorema 7.2].

**Teorema 2.14.** *Se tiene que  $\tilde{H}_0(K)$  es abeliano libre y  $\tilde{H}_0(k) \oplus \mathbb{Z} \cong H_0(K)$ . Además, el grupo de homología reducido de orden 0 tiene por base las clases de los  $v_\alpha - v_{\alpha_0}$ , con  $\alpha \neq \alpha_0$  y donde cada  $v_\alpha$  es un vértice por una componente conexas de  $K$ .*

*Observación 2.15.* La manera más sencilla (y generalizable a otras homología con coeficientes enteros) de demostrar  $\tilde{H}_0(k) \oplus \mathbb{Z} \cong H_0(K)$  consiste en romper (ver [13, Ejercicio 2.22]) la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Ker } \epsilon \hookrightarrow C_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

con una sección  $j : \mathbb{Z} \rightarrow C_0$  de  $\epsilon$ . Así,

$$C_0 = \text{Ker } \epsilon \oplus j(\mathbb{Z}),$$

y, en consecuencia,

$$H_0 \cong \tilde{H}_0(k) \oplus \mathbb{Z}.$$

**Teorema 2.16.** *La homología reducida de un cono es trivial en todos los grados:*

$$\tilde{H}_p(w * K) = 0.$$

*Demostración.* Como  $|w * K|$  es conexo, entonces  $\tilde{H}_0(K) = 0$  por el teorema anterior. Consideremos un  $p > 0$ . Sea  $z_p$  un  $p$ -ciclo del cono. Veamos que es un borde. Si separamos en  $z_p$  los sumandos en los cuales interviene  $w$  de los demás sumandos tenemos que:

$$z_p = c_p + [w, d_{p-1}].$$

Luego, si  $z_p$  es un ciclo, entonces, aplicando la Observación 2.13, resulta que

$$0 = \partial z_p = \partial(c_p + [w, d_{p-1}]) = \partial c_p + d_{p-1} - [w, \partial d_{p-1}].$$

Ahora bien, como el soporte de  $\partial c_p$  y de  $d_{p-1}$  está en  $|K|$ , entonces tenemos que  $[w, \partial d_{p-1}] = 0$  y, en consecuencia,  $-\partial c_p = d_{p-1}$ . De este modo,

$$z_p = c_p - [w, \partial c_p] = \partial[w, c_p]. \quad \square$$

Finalmente, como corolario del teorema anterior y del Ejemplo 2.12, tenemos el siguiente resultado, el cual se puede consultar en [10, Teorema 8.3].

**Teorema 2.17.** *Dado un  $n$ -símplice  $\sigma$  con  $n > 0$ , sea  $K_\sigma$  el complejo formado por  $\sigma$  y sus caras. Sea  $\Sigma^{n-1}$  el subcomplejo de  $K_\sigma$  formado por los símplices de  $K_\sigma$  distintos de  $\sigma$ . Entonces  $\tilde{H}_{n-1}(\Sigma^{n-1})$  es cíclico infinito generado por la clase de  $\partial\sigma$  y  $\tilde{H}_i(\Sigma^{n-1}) = 0$  si  $i \neq n-1$ .*

## Capítulo 3

# Cohomología. Producto *cup*. Homología singular

Este capítulo es el más fructífero, y tal vez más intenso, de todo el trabajo. Guiándonos de la referencia [10], comenzaremos por presentar el dual de la homología: la cohomología. Ésta puede ser dotada de una estructura de anillo gracias al producto *cup*. Conocer esta estructura es de por sí uno de los objetivos del trabajo, y lo afrontaremos en las páginas sucesivas con la teoría simplicial, algo bastante novedoso, pues en la bibliografía suele tratarse el caso singular.

Presentaremos también la teoría singular, muy útil para obtener ciertas propiedades homológicas ya que esta homología es isomorfa a la homología simplicial.

Todo el capítulo irá ilustrado con el desarrollo del Ejemplo 1.5, así como con un curioso contraejemplo de cierta relevancia teórica.

Nos apoyaremos en los desarrollos presentes en [10], así como en la referencia [5] para las cuestiones más formales.

En lo sucesivo, trabajaremos siempre sobre  $\mathbb{Z}$ .

### 3.1. Cohomología

**Definición 3.1.** Se define el *i*-ésimo *módulo de cocadenas* de un complejo simplicial  $K$  como:

$$C^i(K) = \text{Hom}(C_i(K), \mathbb{Z}),$$

donde  $\text{Hom}(C_i(K), \mathbb{Z})$  denota al módulo de homomorfismos de  $C_i(K)$  en  $\mathbb{Z}$ . Del mismo modo, definimos el *operador coborde* como del homomorfismo de módulos libres determinado

por

$$\delta^i(\sigma^*) = \sum_{\tau} \sigma^*(\partial\tau)\tau^*, \quad (3.1)$$

donde  $\tau$  recorre los  $(i+1)$ -símplices del complejo  $K$  y  $\sigma^*$  representa la aplicación dual inducida por  $\sigma$  (ver [11, Leçon 4]).

*Observación 3.2.* Se tiene que  $\delta$  es la aplicación dual de  $\partial$ , pues  $\delta(\sigma^*)$  lleva cada  $(i+1)$ -símplice  $\tau$  en  $\sigma^*(\partial\tau)$ . De aquí se sigue que  $\delta^2 = 0$  (ver [10, Sección 42]).

**Definición 3.3.** Como  $\delta^2 = 0$ , podemos definir, igual que hacíamos en el caso de homología, los *módulos de cohomología* de un complejo simplicial  $K$  como

$$H^i(K) = \frac{\text{Ker } \delta^i}{\text{Im } \delta^{i-1}}.$$

**Ejemplo 3.4.** Al igual que en el caso de la homología,  $H^0(K)$  estará dado por la suma directa de tantas copias de  $\mathbb{Z}$  como componentes conexas tenga  $K$  (ver [10, Teorema 42.1]). En el caso particular del Ejemplo 1.5, tenemos que la cohomología en grado cero va a ser  $\mathbb{Z}$ .

Estudiemos también en este caso la cohomología de grado dos. Dado que el complejo  $W$  tiene dimensión 2, tenemos que

$$\delta^2 : C^2(W) \rightarrow C^3(W)$$

es la aplicación nula. En consecuencia,  $\text{Ker } \delta^2 = C^2(W)$ . Ahora,  $\text{Im } \delta$  va a estar generado por las imágenes por  $\delta^1$  de

$$\begin{aligned} &\{[v_0, v_1]^*, [v_0, v_2]^*, [v_0, v_3]^*, [v_1, v_2]^*, [v_1, v_3]^*, [v_2, v_3]^*, \\ &[v_2, v_6]^*, [v_2, v_7]^*, [v_6, v_7]^*, [v_3, v_4]^*, [v_4, v_5]^*, [v_3, v_5]^*\}. \end{aligned}$$

Ahora bien, si aplicamos la Fórmula 3.1,

$$\begin{aligned} \delta[v_0, v_1]^* &= [v_0, v_1, v_2]^* + [v_0, v_1, v_3]^*, & \delta[v_0, v_2]^* &= [v_0, v_2, v_3]^* - [v_0, v_1, v_2]^* \\ \delta[v_0, v_3]^* &= -[v_0, v_1, v_3]^* - [v_0, v_2, v_3]^*, & \delta[v_1, v_2]^* &= [v_1, v_2, v_3]^* + [v_0, v_1, v_2]^* \\ \delta[v_1, v_3]^* &= [v_0, v_1, v_3]^* - [v_1, v_2, v_3]^*, & \delta[v_2, v_3]^* &= [v_0, v_2, v_3]^* + [v_1, v_2, v_3]^* \\ \delta[v_2, v_6]^* &= \delta[v_2, v_7]^* = \delta[v_6, v_7]^* = \delta[v_3, v_4]^* = \delta[v_4, v_5]^* = \delta[v_3, v_5]^* = 0. \end{aligned}$$

Así pues,

$$H^2(W) \cong \langle a, b, c, d \mid a + b, c - a, -b - c, d + a, b - d, c + d \rangle_{\text{ab}} = \mathbb{Z}.$$

Llegados a este punto, podría interesarnos dotar al grupo abeliano graduado de cohomología, definido por  $H^*(K) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^n(K)$ , de una estructura de anillo. Para ello necesitamos presentar el producto *cup*. En lo que queda de sección, para facilitar la notación, escribiremos  $\langle c^p, [v_0, \dots, v_p] \rangle$  para referirnos a la imagen de  $[a_0, \dots, a_p]$  por  $c^p$ .

**Definición 3.5.** Dado un complejo  $K$  ordenado, definimos el producto *cup* entre cocadenas como:

$$\cup : C^p(K) \times C^q(K) \rightarrow C^{p+q}(K)$$

con

$$\langle c^p \cup c^q, [v_0, \dots, v_{p+q}] \rangle = \langle c^p, [v_0, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle c^q, [v_{p+1}, \dots, v_{p+q}] \rangle ,$$

si  $v_0 < \dots < v_{p+q}$ .

Una propiedad indispensable de este producto es la que se enuncia a continuación.

**Teorema 3.6.** *El producto cup cumple las propiedades de bilinealidad y de asociatividad. Por otra parte, la cadena  $z^0$  que asigna el valor uno a cada vértice de  $K$  resulta ser el elemento neutro para esta operación. Se satisface también la siguiente fórmula para el cómputo del coborde:*

$$\delta(c^p \cup c^q) = (\delta c^p) \cup c^q + (-1)^p c^p \cup (\delta c^q). \quad (3.2)$$

*Demostración.* Las tres primeras afirmaciones se deducen de las propiedades distributiva, asociativa y de neutro de  $\mathbb{Z}$ . Veamos la Fórmula 3.2. Apliquemos cada uno de sus tres sumandos a un símplice  $[v_0, v_1, \dots, v_r]$  de dimensión  $r = p + q + 1$ .

$$\begin{aligned} \langle \delta c^p \cup c^q, [v_0, v_1, \dots, v_r] \rangle &= \langle \delta c^p, [v_0, v_1, \dots, v_{p+1}] \rangle \cdot \langle c^q, [v_{p+1}, \dots, v_r] \rangle = \\ &= \langle c^p, \partial[v_0, v_1, \dots, v_{p+1}] \rangle \cdot \langle c^q, [v_{p+1}, \dots, v_r] \rangle = \\ &= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \langle c^p, [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{p+1}] \rangle \cdot \langle c^q, [v_{p+1}, \dots, v_r] \rangle . \end{aligned}$$

Por su parte,

$$\begin{aligned} (-1)^p \langle c^p \cup \delta c^q, [v_0, v_1, \dots, v_r] \rangle &= \\ &= (-1)^p \langle c^p, [v_0, v_1, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle \delta c^q, [v_p, v_{p+1}, \dots, v_r] \rangle \\ &= (-1)^p \langle c^p, [v_0, v_1, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle c^q, \partial[v_p, v_{p+1}, \dots, v_r] \rangle \\ &= (-1)^p \langle c^p, [v_0, v_1, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle c^q, \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i [v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+i}, \dots, v_r] \rangle \\ &= \sum_{i=p}^r (-1)^i \langle c^p, [v_0, v_1, \dots, v_p] \rangle \cdot \langle c^q, [v_p, v_{p+1}, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_r] \rangle . \end{aligned}$$

Ahora bien, si nos fijamos, el término correspondiente a  $i = p + 1$  de

$$\langle \delta c^p \cup c^q, [v_0, v_1, \dots, v_r] \rangle$$

y el correspondiente a  $i = p$  de

$$(-1)^p \langle c^p \cup \delta c^q, [v_0, v_1, \dots, v_r] \rangle ,$$

se cancelan, de manera que al sumar ambas expresiones obtenemos precisamente

$$\langle \delta(c^p \cup c^q), [v_0, v_1, \dots, v_r] \rangle .$$

□

Este resultado, como ya hemos dicho, es fundamental. Sirve, por ejemplo para extender a la cohomología el producto cup de cocadenas.

**Teorema 3.7.** *El producto cup induce una operación entre módulos de cohomología*

$$\cup : H^p(K) \times H^q(K) \rightarrow H^{p+q}(K) .$$

*Demostración.* Tan solo tenemos que demostrar que esta aplicación está bien definida y lleva cociclos en cociclos. Ahora bien, si  $\delta c^p = 0 = \delta c^q$  entonces, por la Fórmula 3.2 tenemos que

$$\delta(c^p \cup c^q) = (\delta c^p \cup c^q) + (-1)^p c^p \cup \delta c^q = 0 + 0 .$$

Por otro lado, si  $c_1^p, c_2^p$  y  $c^q$  son cociclos y  $c_1^p - c_2^p = \delta c^{p-1}$ , entonces

$$c_1^p \cup c^q - c_2^p \cup c^q = (\delta c^{p-1}) \cup c^q = (-1)^p c^{p-1} \cup (\delta c^q) + \delta(c^{p-1} \cup c^q) = \delta(c^{p-1} \cup c^q) ,$$

donde la última igualdad se deduce de que  $c^q$  es un cociclo. Comprobar que la aplicación está bien definida con respecto a la segunda variable es idéntico a hacerlo con la primera. □

**Teorema 3.8.** *Sea  $h : K \rightarrow L$  una aplicación simplicial. Entonces la aplicación inducida por  $h$  en homología ( $h^*$ ) es compatible con el producto cup. Sin embargo, la aplicación inducida por  $h$  en las cocadenas ( $h^\#$ ) no tiene por qué serlo.*

*Demostración.* En cohomología singular, el producto cup se define de un modo análogo al caso simplicial. Los detalles aparecen en [10, Sección 48]. Además, como veremos en 4.16, la compatibilidad ocurre ya a nivel de aplicaciones inducidas en cadenas por una aplicación continua  $h$  entre espacios topológicos.

No obstante, en el caso simplicial, aunque  $h^*$  sí que vaya a conservar el producto cup a nivel de la cohomología (pues el isomorfismo que obtenemos en 4.14 entre la (co)homología

simplicial y singular va a ser canónico y por lo tanto respetar el producto *cup*),  $h^\#$  (es decir, la aplicación inducida por  $h$  a nivel de cadenas) no va a tener por qué respetarlo.

Veamos entonces un contraejemplo a nivel de cadenas simpliciales.

Considérense los complejos simpliciales

$$K = \{[v_0], [v_1], [v_2], [v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_0, v_2], [v_0, v_1, v_2]\} \quad L = \{[a], [b], [a, b]\} .$$

Definamos una aplicación simplicial  $h : K \rightarrow L$  dada por

$$h(v_0) = a ; \quad h(v_1) = b ; \quad h(v_2) = a$$

Definamos por otro lado

$$c^1 : C_1(L) \rightarrow \mathbb{Z}$$

como la aplicación que lleva el 1-símplice  $[a, b]$  a 1. Entonces  $h_\#([v_0, v_1, v_2]) = 0$ , ya que  $h(v_0) = h(v_2)$  (véase 2.3). De este modo,

$$h^\#(c^p \cup c^q)([v_0, v_1, v_2]) = (c^1 \cup c^1)h_\#([v_0, v_1, v_2]) = 0$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned} (h^\#c^1 \cup h^\#c^1)([v_0, v_1, v_2]) &= \langle c^1, h_\#([v_0, v_1]) \rangle \cdot \langle c^1, h_\#([v_1, v_2]) \rangle = \\ \langle c^1, [a, b] \rangle \cdot \langle c^1, -[a, b] \rangle &= 1 \cdot (-1) = -1 . \end{aligned} \quad \square$$

Tal y como veremos en 4.16, cuando pasemos a homología, el producto *cup* sí que va a ser compatible con las aplicaciones inducidas por aplicaciones simpliciales, con lo que se concluye que el producto *cup* induce una estructura de anillo adecuada en el módulo graduado de cohomología.

## 3.2. Homología singular

Llegados a este punto, necesitamos presentar otra teoría de homología, más reciente que la simplicial pero, pese a su aparente abstracción, con gran cantidad de aplicaciones en las matemáticas. Es la llamada homología singular. Gran parte de su importancia recae en que esta nueva homología es isomorfa a la homología simplicial y además, si trabajamos con  $R = \mathbb{Z}$  o un dominio de ideales principales cualquiera, resultará que el isomorfismo se puede extender también a la cohomología.

En esta sección nos centraremos en presentar la definición de homología singular, sin detenernos demasiado en la misma, e iremos adquiriendo cierta competencia en el manejo de la misma, algo necesario para cuando vayamos a demostrar el isomorfismo entre la homología simplicial y la homología singular. Seguiremos principalmente la referencia [10]

Al igual que en el Capítulo 1, aquí comenzaremos también por introducir la noción de *símplice singular*.

**Definición 3.9.** Sea  $\Delta_p$  un  $p$ -símplice (que en nuestro caso se considerará contenido en  $\mathbb{R}^p$ ) con vértices  $(0, 0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$  (nótese que denotamos a este símplice por  $\Delta$  en lugar de por  $\sigma$  ya que, debido a sus vértices, es un símplice muy particular). Si  $X$  es un espacio topológico, se define un  *$p$ -símplice singular* como una aplicación continua  $T$  de  $\Delta$  en  $X$ .

En el caso singular, no tenemos el problema de orientaciones. Por ello, podemos definir las cadenas de un modo análogo al que conllevaba la Definición 1.14.

**Definición 3.10.** Se definen las  *$p$ -cadenas singulares* del espacio  $X$ , denotadas por  $S_p(X)$ , como el grupo abeliano libre ([8, Sección 7]) generado por los  $p$ -símplices singulares de  $X$ .

**Definición 3.11.** Sea  $T$  un símplice singular. Denotemos por  $l(\epsilon_0, \dots, \hat{\epsilon}_i, \dots, \epsilon_p)$  el homeomorfismo lineal que lleva  $\Delta_{p-1}$  en la cara de  $\Delta_p$  que resulta de no considerar el vértice con un 1 en la posición  $i$ -ésima. Entonces se define  $T \circ l(\epsilon_0, \dots, \hat{\epsilon}_i, \dots, \epsilon_p)$  como la  $i$ -ésima cara de  $T$ .

Exactamente igual de cómo hacíamos en el caso simplicial, aquí definimos también un operador borde de un modo muy similar al del caso simplicial.

**Definición 3.12.** Definimos el *operador borde* entre  $S_p(X)$  y  $S_{p-1}(X)$  como el único homomorfismo de grupos que lleva cada  $p$ -símplice singular  $T$  de  $X$  en:

$$\partial_p T = \sum_{i=0}^p (-1)^i T \circ l(\epsilon_0, \dots, \hat{\epsilon}_i, \dots, \epsilon_p).$$

*Observación 3.13.* De nuevo,  $\partial \circ \partial = 0$  (ver [10, Teorema 29.1]). Así, al igual que hacíamos en el caso simplicial, podemos definir los *grupos de homología* como

$$H_p(X) = \frac{\text{Ker } \partial_p}{\text{Im } \partial_{p+1}}.$$

*Observación 3.14.* En la teoría singular, las aplicaciones continuas entre espacios topológicos serán las que adquieran el papel que tenían en la homología simplicial las aplicaciones simpliciales. El hecho de que las aplicaciones simpliciales sean continuas nos permitirá ver la teoría singular como una generalización de la teoría simplicial.

**Definición 3.15.** Sea  $(X, A)$  un par de espacios topológicos, con  $A \subset X$ . Se define:

$$S_p(X, A) = \frac{S_p(X)}{S_p(A)}.$$

*Observación 3.16.* En la homología singular tenemos también una clase de espacios cuya homología reducida es siempre cero. Son los espacios estrellados, espacios en  $\mathbb{R}^n$  con un punto central sobre el cual se pueden trazar segmentos que lo unan al resto de puntos del espacio sin salirse del mismo. La demostración de este hecho se hará evidente cuando veamos la propiedad de invariancia homotópica de la homología, pero puede consultarse una demostración similar a 2.16 en [10, Teorema 29.6].

Pasamos a definir la *subdivisión baricéntrica* de un símlice.

**Definición 3.17.** La *subdivisión baricéntrica* de un  $p$ -símlice de  $X$  es una aplicación de  $S_p(X)$  en  $S_p(X)$ , definida por recurrencia en  $p$ . Si  $p = 0$ , se define la *subdivisión baricéntrica* (que se denotará por  $\text{sd}_X$ ) como la identidad en  $S_0(X)$ . Si la suponemos definida para  $X = \Delta_q$  y  $q < p$ , definimos

$$\text{sd}_{\Delta_p}(i_p) = (-1)^p [\text{sd}_{\Delta_{p-1}}(\partial i_p), \hat{\Delta}_p],$$

donde  $\hat{\Delta}_p$  denota el baricentro geométrico del símlice (ver [12, Capítulo 2, Sección 3]). Dado ahora un símlice general  $T$  con valores en  $X$  se define

$$\text{sd}_X T = T_{\#}(\text{sd}_{\Delta_p} i_p).$$

La demostración del siguiente resultado se puede consultar en [10, Lema 31.1].

**Lema 3.18.** *Dada  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua, se tiene*

$$f_{\#} \circ \text{sd}_X = \text{sd}_Y \circ f_{\#}.$$

*Además,  $\text{sd}_X$  es un homomorfismo de cadenas (i.e.)  $\text{sd}_X \partial = \partial \text{sd}_X$  y conserva la aumentación, esto es,*

$$\epsilon(\text{sd}_X) : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z} \text{ es igual a } \epsilon.$$

**Definición 3.19.** Sea  $X$  un espacio topológico. Sea  $\mathcal{A}$  una colección de subespacios de  $X$  tales que la unión de sus interiores recubre  $X$ . Diremos que una  $p$ -cadena  $c$  es  $\mathcal{A}$ -pequeña si para cada símlice que la forma, su imagen está contenida en algún elemento de  $\mathcal{A}$ .

La demostración del siguiente teorema se deduce del número de Lebesgue (ver [20, Teorema 22.5]), teniendo en cuenta que  $\Delta_p$  es un compacto de  $\mathbb{R}^N$  para cierto  $N$  ([10, Teorema 31.3]).

**Teorema 3.20.** *Sea  $\mathcal{A}$  una colección de subconjuntos de  $X$  tales que la unión de sus interiores recubre  $X$ . Entonces, para todo  $p$ -símlice  $T$  existe un  $m$  natural tal que  $\text{sd}^m T$  es  $\mathcal{A}$ -pequeño.*

**Teorema 3.21.** *Sea  $m$  un natural dado y  $X$  un espacio topológico. Entonces existe un homomorfismo*

$$D_X : S_p(X) \rightarrow S_{p+1}(X)$$

tal que, para todo  $p$ -símplice  $T$  en  $X$  se tiene

$$\partial D_X T + D_X \partial T = \text{sd}^m T - T .$$

Además,  $D_X$  es natural, es decir, para todo espacio  $Y$  y toda función continua  $f : X \rightarrow Y$  el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} S_p(X) & \xrightarrow{D_X} & S_{p+1}(X) \\ \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} \\ S_p(Y) & \xrightarrow{D_Y} & S_{p+1}(Y) . \end{array}$$

*Demostración.* Procedemos por inducción en  $p$ . Si  $p = 0$ ,

$$\text{sd}^m T = T \quad \text{y} \quad D_X(\partial T) = 0 .$$

Tomamos entonces  $D_X(T) = 0$ , definición que satisface además la naturalidad.

Suponemos ahora cierto para  $q < p$  y, para que se satisfaga la naturalidad, tomemos primero  $X = \Delta_p$  y extendámoslo luego a los demás casos de un modo natural. Sea

$$c_p = \text{sd}^m(i_p) - i_p - D_{\Delta_p}(\partial i_p) ,$$

donde  $i_p$  es la identidad en  $\Delta_p$ . Ahora bien, como  $\partial i_p$  tiene dimensión  $p - 1$ , aplicando la hipótesis de inducción llegamos a que  $\partial c_p = 0$ . Como  $\Delta_p$  es un conjunto estrellado, su homología es trivial (ver 3.16) y así, existirá un cierto elemento  $D_{\Delta_p} i_p$  perteneciente a  $S_{p+1}$  tal que

$$\partial D_{\Delta_p} i_p = c_p .$$

Definimos ahora el caso general como

$$D_X T = T_{\#} D_{\Delta_p}(i_p) .$$

Entonces

$$\partial D_X T = \partial T_{\#} D(i_p) = T_{\#} \partial D(i_p) = T_{\#} (\text{sd}^m(i_p) - i_p - D \partial i_p) = \text{sd}^m(T) - T - D \partial T .$$

Además esta aplicación será natural debido precisamente al modo en que la hemos extendido de  $\Delta_p$  a un espacio  $X$  cualquiera.  $\square$

*Observación 3.22.* Este teorema en realidad nos viene a decir que existe entre  $\text{sd}^m$  e  $\text{id}_X$  lo que recibe el nombre de una homología de cadenas (ver [5, Definición 3.1]). En particular,  $\text{sd}_*^m = (\text{id}_X)_*$  ([5, Proposición 3.4]).

Veamos algunas aplicaciones de este hecho. El siguiente teorema se puede consultar en [10, Teorema 31.5].

**Teorema 3.23.** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{A}$  una colección de subconjuntos como en 3.20. Entonces la inclusión entre  $S^{\mathcal{A}}(X)$  y  $S(X)$  induce un isomorfismo en homología, donde  $S^{\mathcal{A}}(X)$  denota las cadenas  $\mathcal{A}$ -pequeñas en  $X$ .*

**Teorema 3.24.** *La inclusión entre  $S_p^{\mathcal{A}}(X, B)$  y  $S(X, B)$  induce también un isomorfismo en homología.*

*Demostración.* Resulta inmediato aplicando el lema de los cinco (ver [5, Lema 2.9]) al diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_p(S_p^{\mathcal{A}}(B)) & \longrightarrow & H_p(S_p^{\mathcal{A}}(X)) & \longrightarrow & H_p\left(\frac{S_p^{\mathcal{A}}(X)}{S_p^{\mathcal{A}}(B)}\right) & \longrightarrow & H_{p-1}(S_{p-1}^{\mathcal{A}}(B)) & \longrightarrow & H_{p-1}(S_{p-1}^{\mathcal{A}}(X)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_p(S_p(B)) & \longrightarrow & H_p(S_p(X)) & \longrightarrow & H_p\left(\frac{S_p(X)}{S_p(B)}\right) & \longrightarrow & H_{p-1}(S_{p-1}(B)) & \longrightarrow & H_{p-1}(S_{p-1}(X)), \end{array}$$

teniendo en cuenta los isomorfismos que el Teorema 3.23 nos proporciona entre  $H_*(S^{\mathcal{A}}(B))$  y  $H_*(S(B))$  y entre  $H_*(S^{\mathcal{A}}(X))$  y  $H_*(S(X))$ .  $\square$

**Teorema 3.25** (Escisión para teoría singular). *Sea  $X$  un espacio topológico y  $A$  y  $U$  subconjuntos tales que*

$$\mathring{U} \subset \bar{A} \subset X. \quad (3.3)$$

*Entonces la inclusión entre  $(X - U, A - U)$  y  $(X, A)$  induce un isomorfismo en homología.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{C} = \{X - U, A\}$  una colección de subconjuntos de  $X$ . Debido a 3.3, sus interiores recubren  $X$ . De este modo, obtenemos la siguiente sucesión:

$$\frac{S_p(X - U)}{S_p(A - U)} \rightarrow \frac{S_p^{\mathcal{C}}(X)}{S_p^{\mathcal{C}}(A)} \rightarrow \frac{S_p(X)}{S_p(A)}.$$

La segunda flecha acabamos de ver que induce isomorfismo en homología. No obstante, la primera es isomorfismo ya a nivel de cadenas. Veámoslo.

Buscando aplicar el primer teorema de isomorfía (ver [8, Sección 3]), definimos

$$\phi : S_p(X - U) \rightarrow \frac{S_p^{\mathcal{C}}(X)}{S_p^{\mathcal{C}}(A)}$$

como la aplicación inducida por la inclusión. Es sobreyectiva, pues si  $c \in S_p^C(X)$ , entonces existen  $c' \in S_p(X - U)$  y  $c'' \in S_p(A)$  tales que

$$c = c' + c'' .$$

Además,

$$\text{Ker } \phi = S_p(X - U) \cap S_p^C(A) = S_p((X - U) \cap A) = S_p(A - U) .$$

El resultado se sigue entonces, como ya hemos dicho, de aplicar el primer teorema de isomorfía.  $\square$

La demostración del siguiente teorema se puede consultar en [10, Lema 30.6].

**Teorema 3.26.** *La homología es un invariante homotópico. En particular, también es invariante por homeomorfismos.*

*Observación 3.27.* Un punto tiene homología reducida nula ([10, Teorema 30.3]).

Como adelantábamos al principio de esta sección, los conjuntos estrellados tienen homología reducida nula, pues son homótopos a un punto.

**Corolario 3.28.** *Los conjuntos estrellados tienen homología reducida nula.*

**Teorema 3.29** (Sucesión de Mayer-Vietoris). *Sea  $\mathcal{A} = \{U_1, U_2\}$  un par escisivo de  $X$  (es decir,  $H(X) = H^{\mathcal{A}}(X)$ ). Entonces se tiene una sucesión exacta larga:*

$$\dots \longrightarrow H_p(U_1 \cap U_2) \longrightarrow H_p(U_1) \oplus H_p(U_2) \longrightarrow H_p(X) \longrightarrow H_{p-1}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \dots$$

*Demostración.* Basta considerar la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow S(U_1 \cap U_2) \longrightarrow S(U_1) \oplus S(U_2) \longrightarrow S(U_1) + S(U_2) \longrightarrow 0 . \quad \square$$

**Corolario 3.30.** *Se tiene la siguiente relación:*

$$\tilde{H}_p(S^n) \cong \tilde{H}_{p-1}(S^{n-1}) .$$

*En consecuencia,*

$$\tilde{H}_p(S^m) \cong \mathbb{Z} \quad \text{si } p = m \quad \text{y} \quad \tilde{H}_p(S^m) = 0 \quad \text{en otro caso} .$$

*Demostración.* Basta considerar  $U_1 = S^n - N$  y  $U_2 = S^n - S$ , siendo  $N$  y  $S$  los polos norte y sur de la esfera respectivamente. En consecuencia, tanto  $U_1$  como  $U_2$  son homótopos a un punto y su homología reducida se anula. Además,

$$U_1 \cap U_2 \simeq S^{n-1} ,$$

con lo que, sustituyendo en la sucesión de Mayer-Vietoris obtenemos el resultado deseado.  $\square$

## Capítulo 4

# Isomorfismo entre la teoría simplicial y la singular

La demostración de este isomorfismo acostumbra a ser el capítulo más técnico en los manuales de topología algebraica. En algunos casos, por ejemplo, se requiere el manejo de una nueva homología (ver [10, Sección 13]). No obstante, en nuestro caso, la definición de orientabilidad 1.14 nos permitirá simplificar enormemente la demostración de [10].

Además, en la segunda parte del capítulo, extenderemos este isomorfismo a la cohomología, siguiendo principalmente las ideas que aparecen en [5].

### 4.1. Isomorfismo entre homologías

La gran importancia de la Definición 1.14 es que intervienen clases de equivalencia, por consiguiente, vamos a poder definir una aplicación de cadenas  $\theta$  entre  $C_p(K)$  y  $S_p(|K|)$ . Esta aplicación  $\theta$  es además canónica, en el sentido de que al aplicarla a los vértices del símple  $\Delta_p$  introducido al comienzo de la sección 3.2, nos dará la identidad en  $\Delta_p$ .

**Definición 4.1.** Definimos un homomorfismo  $\theta$  entre  $C_p(K)$  y  $S_p(|K|)$  como la aplicación que lleva cada símple  $[v_0, v_1, \dots, v_p]$  en

$$\theta([v_0, v_1, \dots, v_p]) = l(v_0, v_1, \dots, v_p) ,$$

donde

$$l(v_0, v_1, \dots, v_p) : \Delta_p \rightarrow |K|$$

lleva  $(t_0, t_1, \dots, t_p)$  en  $\sum_{i=0}^p t_i v_i$ .

**Lema 4.2.** *Se tiene que  $\theta$  es un homomorfismo de cadenas.*

*Demostración.* Tenemos que ver que  $\theta$  conmuta con el borde. Denotemos por  $\partial$  el borde del complejo de cadenas singular y por  $\partial'$  el del complejo de cadenas simplicial. Se tiene:

$$\begin{aligned} \partial(\theta([v_0, \dots, v_p])) &= \partial(l(v_0, \dots, v_p)) = \sum_{i=0}^p (-1)^i l(v_0, \dots, v_p) l(\epsilon_0, \dots, \hat{\epsilon}_i, \dots, \epsilon_p) = \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i l(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p) = \theta\left(\sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p]\right) = \theta(\partial'[v_0, \dots, v_p]). \quad \square \end{aligned}$$

Así pues,  $\theta$  inducirá también un homomorfismo  $\theta_*$  entre  $H_p(K)$  y  $H_p(|K|)$ .

Antes de probar que  $\theta_*$  es un isomorfismo, debemos introducir el siguiente lema. Lo demostraremos por un procedimiento de álgebra homológica, diferente del que se suele emplear en la bibliografía habitual. Aun así, la manera más frecuente de demostrarlo consiste en escribir  $C_0 \cong \text{Ker}(\epsilon) \oplus \mathbb{Z}$ , y se basa en la existencia de una sección de  $\mathbb{Z}$  a  $C_0$  en la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \text{Ker}(\epsilon) \hookrightarrow C_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

**Lema 4.3.** *Dado  $\psi : C \rightarrow C'$  una aplicación de cadenas entre complejos aumentados, entonces  $\psi_* : \tilde{H}_*(C) \rightarrow \tilde{H}_*(C')$  es un isomorfismo si y solo si  $\psi_* : H_*(C) \rightarrow H_*(C')$  es isomorfismo.*

*Demostración.* Las siguientes sucesiones exactas cortas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \epsilon & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

inducirán una sucesión exacta larga de homología

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_1(C_1) \longrightarrow H_1(C_1) \longrightarrow 0 \longrightarrow \tilde{H}_0(C_0) \longrightarrow H_0(C_0) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Si repetimos el proceso para el complejo  $C'$ , obtendremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_1(C_1) & \longrightarrow & H_1(C_1) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_0(C_0) & \longrightarrow & H_0(C_0) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_1(C'_1) & \longrightarrow & H_1(C'_1) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_0(C'_0) & \longrightarrow & H_0(C'_0) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array}$$

en el cual el resultado que buscamos es consecuencia de aplicar el lema de los cinco (ver [5, Lema 2.9]) a los cinco primeros términos de este diagrama para resolver la implicación hacia la derecha y los cinco últimos para la implicación hacia la izquierda.  $\square$

**Teorema 4.4.** *Dado un complejo simplicial finito  $K$  y un subcomplejo  $K_0$ , entonces, para todo  $p$  se tienen isomorfismos:*

$$\theta_* : \tilde{H}_p(K) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_p(|K|) \quad (4.1)$$

$$\theta_* : H_p(K) \xrightarrow{\cong} H_p(|K|) \quad (4.2)$$

$$\theta_* : H_p(K, K_0) \xrightarrow{\cong} H_p(|K|, |K_0|) \quad (4.3)$$

*Demostración.* La equivalencia entre (4.1) y (4.2) ha sido probada en el lema anterior. Por su parte, aplicando el lema de los cinco a las sucesiones:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \rightarrow & H_{p+1}(K_0) & \rightarrow & H_{p+1}(K) & \rightarrow & H_{p+1}(K, K_0) & \rightarrow & H_p(K_0) & \rightarrow & H_p(K) & \rightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \rightarrow & H_{p+1}(|K_0|) & \rightarrow & H_{p+1}(|K|) & \rightarrow & H_{p+1}(|K|, |K_0|) & \rightarrow & H_p(|K_0|) & \rightarrow & H_p(|K|) & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

obtenemos (4.2)  $\Rightarrow$  (4.3).

Por último, (4.3)  $\Rightarrow$  (4.2) resulta de considerar  $K_0 = \emptyset$ . Así pues, centrémonos en demostrar (4.1).

Hacemos inducción en  $n$  el número de simplices.

Si  $n = 1$ , esto implica que  $K$  consiste en un único vértice, en cuyo caso el resultado es trivial. Supongamos entonces que (4.1) es cierto para complejos simpliciales de hasta  $n - 1$  simplices y consideremos  $K$  un complejo formado por  $n$  simplices. Consideremos a su vez un simplejo  $\sigma$  de  $K$  de dimensión máxima (recordemos que estamos en el caso de un complejo finito) y sea  $K_0$  el conjunto de todos los simplices de  $K$  distintos de  $\sigma$ . Se tiene que  $K_0$  es un complejo simplicial formado por  $n - 1$  simplices.

Por otra parte, sea  $\Sigma$  el complejo simplicial formado por  $\sigma$  y todas sus caras.

Finalmente, denotemos por  $\text{Bd}(\Sigma)$  el complejo formado por las caras propias de  $\sigma$ . Se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_p(K) & \xrightarrow{\theta_*} & \tilde{H}_p(|K|) \\ \downarrow i_* & & \downarrow i_* \\ \tilde{H}_p(K, \Sigma) & \xrightarrow{\theta_*} & \tilde{H}_p(|K|, |\Sigma|) \\ \uparrow j_* & & \uparrow j_* \\ \tilde{H}_p(K_0, \text{Bd}(\Sigma)) & \xrightarrow{\theta_*} & \tilde{H}_p(|K_0|, |\text{Bd}(\Sigma)|) \end{array}$$

Como los enunciados (4.1) y (4.3) eran equivalentes, por inducción tenemos que

$$\theta_* : \tilde{H}_p(C'(K_0, \text{Bd}(\Sigma))) \rightarrow \tilde{H}_p(|K_0|, |\text{Bd}(\Sigma)|)$$

es un isomorfismo. En vista de la conmutatividad del diagrama, basta ver que las  $i_*$  y las  $j_*$  son isomorfismos para obtener que las  $\theta_*$  (y en particular la que nos interesa) también lo son.

Ahora bien, la homología simplicial reducida de  $\Sigma$  es siempre nula al ser  $\Sigma$  un cono. Asimismo, la homología singular reducida de  $|\Sigma|$  será nula al ser  $|\Sigma|$  un conjunto estrellado. De este modo, debido a las sucesiones exactas largas en homología inducidas por las sucesiones exactas cortas

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow C_p(\Sigma) \longrightarrow C_p(K) \longrightarrow C_p(K, \Sigma) \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow S_p(|\Sigma|) \longrightarrow S_p(|K|) \longrightarrow S_p(|K|, |\Sigma|) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

se deduce que las  $i_*$  son isomorfismos.

Veamos ahora que

$$j_* : \tilde{H}_p(|K_0|, |\text{Bd}(\Sigma)|) \rightarrow \tilde{H}_p(|K|, |\Sigma|)$$

es un isomorfismo. Sea  $\hat{\sigma}$  el baricentro de  $\sigma$ . Ahora bien, aplicando el Teorema de escisión 3.25, se tiene que

$$\tilde{H}_p(|K| - \hat{\sigma}, |\Sigma| - \hat{\sigma}) = \tilde{H}_p(|K|, |\Sigma|)$$

Además  $(|K_0|, |\text{Bd}(\Sigma)|)$  es un retracto por deformación fuerte de  $(|K| - \hat{\sigma}, |\Sigma| - \hat{\sigma})$ , con lo que, al ser la homología una invariante homotópica (teorema 3.26), resulta que

$$\tilde{H}_p(|K|, |\Sigma|) = \tilde{H}_p(|K| - \hat{\sigma}, |\Sigma| - \hat{\sigma}) = \tilde{H}_p(|K_0|, |\text{Bd}(\Sigma)|).$$

Así pues, tan solo queda por probar el último isomorfismo:

$$j_* : \tilde{H}_p(K_0, \text{Bd}(\Sigma)) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_p(K, \Sigma).$$

Ahora bien, esto resulta de que la aplicación a nivel de cadenas:

$$j_{\#} : C(K_0, \text{Bd}(\Sigma)) \longrightarrow C(K, \Sigma)$$

ya es un isomorfismo. Veámoslo aplicando el primer teorema de isomorfía.

Sea  $c_p + C(\text{Bd}(\Sigma))$  la clase de una cadena que va en el cero, esto es que  $c_p$  tiene su soporte en  $\Sigma$ . Ahora bien,  $c_p$  es por definición una cadena de  $C(K_0)$ . De este modo, como  $K_0 \cap \text{Int}(\sigma) = \emptyset$ , se obtiene

$$c_p \in C(K_0 \cap \Sigma) = C(\text{Bd}(\Sigma)).$$

Veamos ahora la sobreyectividad. Consideremos la clase de un

$$c_p + C(\Sigma) \in C(K, \Sigma).$$

Dado que cualquier símplice de  $K$  es un símplice de  $\Sigma$  o de  $K_0$ , podemos descomponer  $c_p$  en

$$c_p = c_p^1 + c_p^2, \quad c_p^1 \in C(\Sigma), \quad c_p^2 \in C(K_0).$$

Basta entonces considerar  $c_p^2$  como preimagen de  $c_p$ .  $\square$

## 4.2. Isomorfismo entre cohomologías

Llegados a este punto, nos interesa extender este isomorfismo entre la homología simplicial y la homología singular a un isomorfismo entre la cohomología simplicial y la cohomología singular. Un resultado así lo obtendremos siempre que trabajemos con módulos libres sobre un dominio de ideales principales ([1, Capítulo 1]). Para ello, seguiremos principalmente la referencia [5], aunque para el Teorema 4.6 seguiremos la referencia [10, Teorema 45.1]. Con esta original combinación, conseguiremos simplificar la demostración de [10] y completar la que presenta [5].

*Observación 4.5.* Una caza de diagramas nos permite ver que, si  $A$  y  $B$  son módulos libres sobre un dominio de ideales principales, con

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad 0 \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow C' \rightarrow 0$$

sucesiones exactas y  $\gamma : C \rightarrow C'$  es un homomorfismo de módulos, entonces existen

$$\alpha : A \rightarrow A' \quad \text{y} \quad \beta : B \rightarrow B'$$

que hacen que conmute el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

**Teorema 4.6.** Sean  $C$  y  $C'$  complejos de cadenas libres sobre  $\mathbb{Z}$ . Para cualquier homomorfismo:

$$\gamma : H_p(C) \rightarrow H_p(C')$$

existe una aplicación de cadenas  $\phi$  entre  $C$  y  $C'$  que induce  $\gamma$ .

*Demostración.* En primer lugar, consideramos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B_p & \longrightarrow & Z_p & \longrightarrow & H_p(C) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & B'_p & \longrightarrow & Z'_p & \longrightarrow & H_p(C') & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

donde ambas filas son exactas. Si aplicamos la Observación 4.5, tenemos que existen aplicaciones

$$\alpha : B_p \rightarrow B'_p \quad \text{y} \quad \beta : Z_p \rightarrow Z'_p$$

tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B_p & \longrightarrow & Z_p & \longrightarrow & H_p(C) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & B'_p & \longrightarrow & Z'_p & \longrightarrow & H_p(C') & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (4.4)$$

conmuta.

Veamos ahora que  $\beta$  se puede extender a una aplicación de cadenas que induzca  $\gamma$ . Para ello, consideramos el diagrama de filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_p & \longrightarrow & C_p & \xrightarrow{\partial_0} & B_{p-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \\ 0 & \longrightarrow & Z'_p & \longrightarrow & C'_p & \xrightarrow{\partial'_0} & B'_{p-1} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Ahora bien, como tanto  $Z_p$  como  $B_{p-1}$  son módulos libres al ser  $\mathbb{Z}$  un dominio de ideales principales ([5, Proposición 4.2]), se tendrá

$$C_p = Z_p \oplus U_p \quad \text{y} \quad C'_p = Z'_p \oplus U'_p$$

(ver [10, Teorema 45.1]), donde  $U_p$  y  $U'_p$  son, respectivamente, las imágenes de  $B_{p-1}$  y  $B'_{p-1}$  por las secciones de  $\partial_0$  y  $\partial'_0$ . Además, como consecuencia de ser sección y de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_p & \longrightarrow & C_p & \xrightarrow{\partial_0} & B_{p-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \text{id} & & \uparrow \text{id} & & \uparrow \partial_0 & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_p & \longrightarrow & C_p & \xrightarrow{p_2} & U_p & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

( $p_2$  denota la proyección sobre el segundo sumando directo), se sigue que

$$\partial_0 : U_p \rightarrow B_{p-1} \quad \text{y} \quad \partial'_0 : U'_p \rightarrow B'_{p-1}$$

son isomorfismos. Llegados a este punto, podemos definir una aplicación  $\phi : C_p \rightarrow C'_p$  definida como  $\beta$  en  $Z_p$  y como  $(\partial'_0)^{-1} \circ \alpha \circ \partial_0$  en  $U_p$ . Al definirla así, se puede ver que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_p & \longrightarrow & C_p & \xrightarrow{\partial_0} & B_{p-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow \phi & & \downarrow \alpha & & \\ 0 & \longrightarrow & Z'_p & \longrightarrow & C'_p & \xrightarrow{\partial_0} & B'_{p-1} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Esta conmutatividad, permitirá así que conmute el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} C_p & \xrightarrow{\partial_0} & B_{p-1} & \longrightarrow & Z_{p-1} & \longrightarrow & C_{p-1} \\ \downarrow \phi & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \phi \\ C'_p & \xrightarrow{\partial_0} & B'_{p-1} & \longrightarrow & Z'_{p-1} & \longrightarrow & C'_{p-1} \end{array},$$

de donde se deduce que  $\phi$  es una aplicación de cadenas (i.e., que conmuta con el borde).

El hecho de que  $\phi$  induzca  $\gamma$  se debe a que  $\phi$  restringido a  $Z_p$  está dado por la aplicación  $\beta$  y la aplicación inducida en homología por una aplicación de cadenas se construye, precisamente, en función de los valores que ésta toma en el núcleo. Basta entonces reparar en que, en el Diagrama 4.4,  $\gamma$  está inducido por  $\beta$ .  $\square$

**Definición 4.7.** Sea  $f : K \rightarrow L$  una aplicación entre dos complejos de cadenas. Definimos el *cono de esta aplicación*,  $C_f$ , como un nuevo complejo de cadenas:

$$(C_f)_n = L_n \oplus K_{n-1}, \quad \partial^{C_f}(y, x) = (\partial y + f(x), -\partial x).$$

*Observación 4.8.* Se tiene que  $\partial^{C_f} \circ \partial^{C_f} = 0$  ([5, Ejemplo 1.3]).

**Definición 4.9.** Cuando  $L = 0$ ,  $K^+ = C_f$  se llama *suspensión* de  $K$  (nótese que su comportamiento homológico recuerda al de la suspensión topológica). En particular, se tiene que

$$(K^+)_n = K_{n-1} \quad \text{y} \quad \partial^{K^+} = -\partial^K \tag{4.5}$$

Además,

$$H_n(K^+) = H_{n-1}(K). \tag{4.6}$$

*Observación 4.10.* Se tiene una sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow L \rightarrow C_f \rightarrow K^+ \rightarrow 0,$$

donde la primera flecha es la inclusión y la segunda la proyección. Además, esta sucesión exacta corta inducirá una sucesión exacta larga en homología:

$$\cdots \rightarrow H_n(L) \rightarrow H_n(C_f) \rightarrow H_n(K^+) \rightarrow H_{n-1}(L) \rightarrow \cdots, \tag{4.7}$$

la cual, por 4.6, se puede escribir también como

$$\cdots \rightarrow H_n(K) \rightarrow H_n(L) \rightarrow H_n(C_f) \rightarrow H_{n-1}(K) \rightarrow \cdots$$

Además, en este caso, el homomorfismo de conexión (ver [5, Definición 2.8]) en (4.7) es  $f_*$ , la aplicación inducida por  $f$  en homología ([5, Corolario 2.13]). De este modo, tendremos que  $f$  induce un isomorfismo en homología, si y solo si la homología del cono de  $f$  es nula.

A continuación enunciamos dos lemas técnicos que precisamos para continuar. Su demostración se puede consultar en [5, Proposición 3.6] y [5, Proposición 3.7].

En el resto de este capítulo, denotaremos por  $\simeq$  la equivalencia de homotopía en complejos de cadenas.

**Lema 4.11.** *Si  $K$  es un complejo de cadenas acíclico, entonces  $K \simeq 0$  si y solo si  $Z_n(K)$  es sumando directo de  $K_n$ .*

**Lema 4.12.** *Si  $C_f \simeq 0$ , entonces  $f$  es una equivalencia de homotopía.*

Finalmente, obtenemos los dos resultados que buscábamos.

**Teorema 4.13.** *Si  $f : K \rightarrow L$  es una aplicación de cadenas entre complejos de cadenas libres sobre  $\mathbb{Z}$  que induce un isomorfismo en homología, entonces también induce un isomorfismo en cohomología.*

*Demostración.* Nótese que para ver que  $f$  induce un isomorfismo en cohomología, basta ver que es una equivalencia de homotopía [10, teorema 44.1]. Por el lema anterior, si vemos que  $C_f \simeq 0$ , ya habremos terminado. Ahora bien, como  $f_*$  es un isomorfismo en homología, como ya vimos en 4.10 se tendrá que  $C_f$  es acíclico, en cuyo caso podemos aplicar el Lema 4.11. Como  $C_f$  es un módulo libre sobre  $\mathbb{Z}$ , entonces la sucesión

$$0 \rightarrow Z_n(C_f) \rightarrow (C_f)_n \rightarrow B_{n-1}(C_f) \rightarrow 0$$

rompe ([14, Ejercicio 2.22]), y así  $Z_n(C_f)$  es sumando directo de  $(C_f)_n$ . Por lo tanto se tiene que  $C_f$  es homótopo a cero, tal y como queríamos demostrar.  $\square$

**Teorema 4.14.** *Sean  $C$  y  $C'$  dos complejos de cadenas libres sobre  $\mathbb{Z}$ . Si sus grupos de homología son isomorfos, entonces también lo son los grupos de cohomología.*

*Demostración.* Si existe un isomorfismo entre los grupos de homología de  $C$  y de  $C'$ , entonces, aplicando el Teorema 4.6, obtenemos que este isomorfismo está inducido por una aplicación de cadenas  $f : C \rightarrow C'$ . En estas condiciones, podemos aplicar el Teorema 4.13 y se concluye el resultado.  $\square$

**Corolario 4.15.** *Las cohomologías simpliciales y singulares son isomorfas. Además, el isomorfismo entre ambas es canónico.*

*Demostración.* El hecho de que el isomorfismo sea canónico se deriva de que todo simple simplicial admita una interpretación singular canónica al aplicarle la aplicación  $\theta$  presentada en 4.1, así como que el isomorfismo entre ambas homologías y cohomologías esté inducido por esta misma  $\theta$ . En particular, se sigue que el isomorfismo respetará el producto *cup*.  $\square$

Además de resultar interesante por sí solo, este isomorfismo entre las teorías singulares y simpliciales tiene aplicaciones inmediatas. Veamos una de ellas.

**Teorema 4.16.** *Sea  $h : K \rightarrow L$  una aplicación simplicial. Entonces  $h^*$  es compatible con el producto cup.*

*Demostración.* Sea  $h$  es una aplicación simplicial. En particular, será una aplicación continua. Como avanzábamos en 3.8, dada la naturalidad del isomorfismo presentado en 4.15, podemos hacer la demostración para el caso singular, donde la compatibilidad ocurre ya a nivel de cadenas. Recordemos que la definición de producto cup en cohomología singular es análoga al caso simplicial y se puede consultar en [10, Sección 48]. Sea entonces  $T$  un  $(p + q)$ -símplice singular en  $K$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \langle h^\#(c^p \cup c^q), T \rangle &= \langle c^p \cup c^q, h \circ T \rangle = \\ \langle c^p, h \circ T \circ l(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_p) \rangle \langle c^q, h \circ T \circ l(\epsilon_p, \epsilon_{p+1}, \dots, \epsilon_{p+q}) \rangle &= \\ \langle h^\#(c^p), T \circ l(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_p) \rangle \langle h^\#(c^q), T \circ l(\epsilon_p, \epsilon_{p+1}, \dots, \epsilon_{p+q}) \rangle &= \langle h^\#(c^p) \cup h^\#(c^q), T \rangle . \end{aligned}$$

□



## Capítulo 5

# Homología celular

La homología celular (homología de los complejos celulares) es una teoría de homología que se construye a partir de una homología dada (como por ejemplo la simplicial o la singular) para estudiar la homología de los  $CW$  complejos (ver [10, Sección 38]), entre los que se incluyen los complejos simpliciales. El estudio de esta homología constituye por sí solo uno de los objetivos del trabajo, pero al mismo tiempo, se trata de un pilar ineludible a la hora de abordar la Dualidad de Poincaré desde el punto simplicial. Para estudiar esta homología, seguiremos las referencias [10] y [14]. Comenzaremos por introducir algunas definiciones básicas de los complejos celulares para pasar a continuación a caracterizar la homología de estos complejos. Aportamos en este capítulo, además de algunos ejemplos de complejos celulares, una ordenación que hace más visible el diagrama de la demostración de 5.12.

### 5.1. Homología celular

**Definición 5.1.** Un  $CW$  complejo es un espacio Hausdorff  $X$  y una colección de celdas abiertas  $e_\alpha$  recubriendo  $X$  de manera que:

- Para cada  $m$ -celda abierta  $e_\alpha$  existe una aplicación (se llamará *característica*) continua de  $D^m$  en  $X$  ( $D^m$  denota el disco en  $\mathbb{R}^m$ ) que restringida al interior del disco define un homeomorfismo con  $e_\alpha$ , y que lleva la frontera del disco en una unión finita de celdas abiertas de dimensión menor que  $m$ .
- Un conjunto  $A \subset X$  es cerrado si  $A \cap \overline{e_\alpha}$  es cerrado para todo  $\alpha$ .

**Ejemplo 5.2.** Cualquier complejo simplicial es un  $CW$  complejo. Por ejemplo, si consideramos el complejo  $\{[v_0], [v_1], [v_0, v_1]\}$ , basta con considerar para la 1-celda abierta formada

por el interior del segmento  $v_0v_1$  la restricción al disco de dimensión uno de la transformación lineal que lleva el  $-1$  en  $v_0$  y el  $1$  en  $v_1$ . En la Figura 5.1, ilustramos el proceso para un 2-símplice.

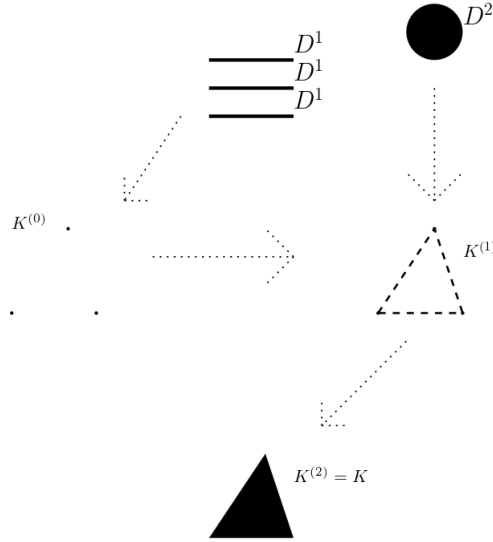


Figura 5.1: Un 2-símplice visto como  $CW$  complejo

*Observación 5.3.* Siguiendo la notación de [10], denotaremos por  $e$  la frontera de una celda y por  $\hat{e}$  la imagen del centro del disco por la aplicación característica.

Al igual que en el caso simplicial, aquí definimos también el  $p$ -esqueleto de un  $CW$  complejo.

**Definición 5.4.** El  $p$ -esqueleto de un  $CW$  complejo  $X$  (denotado  $X^p$ ) se define como el subespacio constituido por las celdas abiertas de dimensión menor o igual que  $p$ . En particular, si el  $CW$  complejo es un complejo simplicial, el  $p$ -esqueleto del complejo celular coincide con el del complejo simplicial.

*Observación 5.5.* El  $p$ -esqueleto de un complejo celular  $X$  se puede entender también como la adjunción de determinadas  $p$ -celdas a  $X^{p-1}$  (ver [9] y la Figura 5.1).

**Definición 5.6.** Sea  $X$  un  $CW$  complejo. Escribamos

$$D_p(X) = H_p(X^p, X^{p-1})$$

(recuérdese la Definición 3.15) y tomemos

$$\partial : D_p(X) \rightarrow D_{p-1}(X)$$

como la composición

$$H_p(X^p, X^{p-1}) \rightarrow H_{p-1}(X^{p-1}) \rightarrow H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2}),$$

donde la primera flecha es el homomorfismo de conexión de la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow S(X^{p-1}) \rightarrow S(X^p) \rightarrow S(X^p, X^{p-1}) \rightarrow 0$$

y la segunda es la aplicación inducida en homología por el paso al cociente. Este operador es un borde (ver [10, Sección 39]) y define un complejo de cadenas, que denotaremos por  $D(X)$  y llamaremos *complejo celular de cadenas*.

A continuación presentamos dos lemas sobre la homología relativa de las celdas y del  $p$ -esqueleto. Sus demostraciones son análogas, de modo que solo demostraremos el primero. La demostración del segundo puede consultarse en [10, Lema 39.2].

**Lema 5.7.** *Dada una  $p$ -celda abierta  $e_\alpha$  de  $X$  y una aplicación característica  $f_\alpha$ , la aplicación*

$$f_\alpha : (D^p, S^{p-1}) \rightarrow (\bar{e}_\alpha, \dot{e}_\alpha)$$

*induce un isomorfismo en homología.*

*Demostración.* Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} (D^p, S^{p-1}) & \longrightarrow & (D^p, D^p - 0) & \longleftarrow & (\text{Int } D^p, \text{Int } D^p - 0) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (\bar{e}_\alpha, \dot{e}_\alpha) & \longrightarrow & (\bar{e}_\alpha, \bar{e}_\alpha - \dot{e}_\alpha) & \longleftarrow & (e_\alpha, e_\alpha - \dot{e}_\alpha). \end{array}$$

La flecha vertical de la derecha es un homeomorfismo por definición de  $CW$  complejo, de modo que induce un isomorfismo en homología.

Por su parte, las flechas horizontales de la izquierda inducen isomorfismos en homología ya que los dominios de ambas aplicaciones son retractos por deformación de los rangos de las mismas. Asimismo, las flechas horizontales de la derecha inducen isomorfismo en homología debido al Teorema de escisión 3.25 (tomando respectivamente  $U = S^{p-1}$  y  $U = \dot{e}_\alpha$ ). En consecuencia, todas las flechas del diagrama, y en particular la que nos interesaba, inducen isomorfismos en homología.  $\square$

Este isomorfismo motiva el lema siguiente, cuya demostración se puede consultar, como ya hemos mencionado, en [10, Lema 39.2].

**Lema 5.8.** *Sea*

$$f : X^{p-1} \cup \sum_{\alpha} D_{\alpha}^p \rightarrow X^p$$

la aplicación que define el  $p$ -esqueleto como adjunción de  $p$  celdas. Entonces  $f$  induce un isomorfismo entre las homologías de  $(\sum_{\alpha} D_{\alpha}^p, \sum_{\alpha} S_{\alpha}^{p-1})$  y  $(X^p, X^{p-1})$ .

De este último resultado se deduce el siguiente teorema, fundamental en el estudio de la homología celular y que aparece desarrollado con detalle en [10, Teorema 39.3].

**Teorema 5.9.** *El grupo  $H_i(X^p, X^{p-1})$  es cero si  $i \neq p$  y es abeliano libre si  $i = p$ . En este último caso, tiene una base formada por los generadores de  $H_p(\overline{e_{\alpha}}, \dot{e}_{\alpha})$  con los  $e_{\alpha}$   $p$ -celdas abiertas, es decir,*

$$H_p(X^p, X^{p-1}) \cong \bigoplus_{\alpha} H_p(D_{\alpha}^p, S_{\alpha}^{p-1}).$$

*Observación 5.10.* Dados  $B \subset A \subset X$ , tenemos la siguiente sucesión exacta corta ([10, Sección 39]):

$$0 \rightarrow S_p(A, B) \rightarrow S_p(X, B) \rightarrow S_p(X, A) \rightarrow 0.$$

Ésta induce una sucesión exacta larga en homología, llamada *sucesión de un triple en homología* (ver [10, Sección 39]):

$$\cdots \rightarrow H_p(A, B) \rightarrow H_p(X, B) \rightarrow H_p(X, A) \rightarrow H_{p-1}(A, B) \rightarrow \cdots$$

Además, si

$$X = X^p; \quad A = X^{p-1}; \quad B = X^{p-2},$$

entonces el homomorfismo de conexión de esta sucesión exacta es el mismo que el borde del complejo  $D(X)$  ([10, Sección 39]).

**Definición 5.11.** Dado un espacio  $X$ , una *filtración* de  $X$  es una sucesión de subespacios

$$X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots$$

cuya unión es  $X$ .

En estas condiciones, podemos caracterizar la homología de los  $CW$  complejos.

**Teorema 5.12.** *Sea  $X$  un espacio filtrado por  $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X$ . Supongamos que  $H_i(X_p, X_{p-1}) = 0$  si  $i \neq p$  y que, dado un compacto  $C$  en  $X$ , existe un  $n$  tal que  $C \subset X^n$ . Entonces los complejos  $S(X)$  y  $D(X)$  tienen la misma homología.*

*Demostración.* Como avanzábamos en la introducción de este capítulo, la demostración es esencialmente la propuesta en [10, Sección 39]. Sin embargo, aquí el orden de los argumentos ha sido cambiado para facilitar el entendimiento del razonamiento. Además, se ha simplificado la notación del diagrama principal de la demostración.

Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_p(X^{p+1}, X^p) = 0 & \longrightarrow & 0 = H_p(X^{p+1}, X^p) & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 = H_p(X^{p-1}, X^{p-2}) & \longrightarrow & H_p(X^{p+1}, X^{p-2}) & \longrightarrow & H_p(X^{p+1}, X^{p-1}) & \longrightarrow & H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2}) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 = H_p(X^{p-1}, X^{p-2}) & \longrightarrow & H_p(X^p, X^{p-2}) & \longrightarrow & H_p(X^p, X^{p-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2}) \\
 & & \uparrow & & \uparrow \partial_* & & \\
 & & H_{p+1}(X^{p+1}, X^p) & \xrightarrow{id} & H_{p+1}(X^{p+1}, X^p) & & 
 \end{array}$$

Buscamos calcular  $\text{Ker } \partial_*/\text{Im } \partial_*$ . Fijémonos entonces en la tercera línea del diagrama. Como la aplicación central es inyectiva, tenemos que

$$\text{Ker } \partial_* \cong H_p(X^p, X^{p-2}).$$

Por otro lado, si cocientamos por la imagen del operador borde (ahora pensado en la segunda columna y no en la tercera ya que hemos pasado de  $\text{Ker } \partial_*$  a  $H_p(X^p, X^{p-2})$ ) obtenemos

$$H_p(D(X)) \cong \text{Ker } \partial_*/\text{Im } \partial_* \cong H_p(X^{p+1}, X^{p-2}),$$

pues la aplicación central de la sucesión de la segunda columna es sobreyectiva.

Veamos ahora que

$$H_p(X^{p+1}, X^{p-2}) \cong H_p(X^{p+1}).$$

Comencemos por ver que

$$H_p(X^{p+1}, X^{p-2}) \cong H_p(X^{p+1}, X^{p-3}).$$

Tenemos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow S(X^{p-2}, X^{p-3}) \rightarrow S(X^{p+1}, X^{p-3}) \rightarrow S(X^{p+1}, X^{p-2}) \rightarrow 0,$$

que induce una sucesión exacta larga en homología:

$$\dots \rightarrow H_p(X^{p-2}, X^{p-3}) \rightarrow H_p(X^{p+1}, X^{p-3}) \rightarrow H_p(X^{p+1}, X^{p-2}) \rightarrow H_{p-1}(X^{p-2}, X^{p-3}) \rightarrow \dots$$

Ahora bien, por hipótesis,

$$H_p(X^{p-2}, X^{p-3}) = 0 = H_{p-1}(X^{p-2}, X^{p-3}),$$

con lo cual

$$H_p(X^{p+1}, X^{p-2}) \cong H_p(X^{p+1}, X^{p-3}).$$

En general, para  $n < p - 2$ , repetimos el proceso considerando la sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow S(X^n, X^{n-1}) \rightarrow S(X^{p+1}, X^{n-1}) \rightarrow S(X^{p+1}, X^n) \rightarrow 0$$

hasta llegar a

$$H_p(X^{p+1}, X^{p-2}) \cong H_p(X^{p+1}).$$

Veamos ahora que  $H_p(X^{p+1}) \cong H_p(X)$ . Comencemos por ver que  $H_p(X^{p+1}) \cong H_p(X^{p+2})$ .

Construyamos por tanto la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow S(X^{p+1}) \rightarrow S(X^{p+2}) \rightarrow S(X^{p+2}, X^{p+1}) \rightarrow 0. \quad (5.1)$$

Induce una sucesión larga en homología:

$$\cdots \rightarrow H_{p+1}(X^{p+2}, X^{p+1}) \rightarrow H_p(X^{p+1}) \rightarrow H_p(X^{p+2}) \rightarrow H_p(X^{p+2}, X^{p+1}) \rightarrow 0.$$

Ahora bien, por hipótesis,

$$H_{p+1}(X^{p+2}, X^{p+1}) = 0 = H_p(X^{p+2}, X^{p+1}),$$

con lo cual se obtiene  $H_p(X^{p+1}) \cong H_p(X^{p+2})$ .

Además estos isomorfismos están inducidos por la inclusión (la primera flecha en la sucesión (5.1) es la inclusión). Podemos reiterar este proceso indefinidamente, llegando a que

$$H_p(X^{p+1}) \cong H_p(X^{p+1+n}) \quad \text{para todo } n > 0.$$

□

El siguiente corolario es consecuencia del Teorema 5.9.

**Corolario 5.13.** *Un CW complejo cumple la propiedad anterior. En particular, un complejo simplicial satisfará esta propiedad.*

Por su parte, aplicando los Teoremas 4.14 y 5.12 se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 5.14.** *En las condiciones del teorema anterior, se tiene que*

$$H^p(D(X)) \cong H^p(X).$$

## Capítulo 6

# Variedades homológicas

En este capítulo, gracias a los conocimientos que hemos ido adquiriendo en los apartados anteriores, abordaremos la demostración de la Dualidad de Poincaré, objetivo fundamental de este trabajo. Resultará sorprendente que la prueba del célebre resultado se limite a una demostración rutinaria en homología, pero en el fondo, hemos ido introduciendo las ideas fundamentales de la demostración desde el Capítulo 5.

La demostración de la Dualidad de Poincaré, la hemos realizado siguiendo la referencia [10]. Sin embargo, hemos modificado el caso  $p = n - 1$  para evitar el uso de dos lemas que no harían sino complicar aun más el entendimiento del resultado ([10, Teorema 63.2], [10, Corolario 63.3]).

Además, durante el desarrollo del presente capítulo, concluiremos el estudio del Ejemplo 1.5 al tiempo que introduciremos algunos ejemplos nuevos, entre los que destacará el de la esfera de Poincaré, un espacio que no es variedad topológica pero sí variedad homológica. Este último va a ser un concepto importante para nosotros, pues enunciaremos la Dualidad de Poincaré para variedades homológicas orientables, en lugar de, como se suele hacer, únicamente para variedades topológicas orientables. También se ha de notar que gran parte del interés de este capítulo reside en que realizaremos la prueba en términos de la teoría simplicial.

### 6.1. Variedades homológicas y la esfera homológica de Poincaré

Comenzamos por introducir algunas definiciones y resultados básicos, los cuales se pueden pensar en homología singular.

**Definición 6.1.** Dado un espacio topológico  $X$  y un punto  $x \in X$ , se definen los grupos

$H_p(X, X - x)$  como los grupos de *homología local* de  $X$  en  $x$ .

La demostración del siguiente lema resulta de aplicar el Teorema 3.25 tomando  $U = X - W$ .

**Lema 6.2.** *Sea  $W$  un entorno de  $X$  en  $x$ . Entonces*

$$H_p(X, X - x) \cong H_p(W, W - x) .$$

**Ejemplo 6.3.** Consideremos el plano  $\mathbb{R}^n$  para cierto  $n > 0$ . Buscamos calcular  $H_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - x)$ . Como la homología es invariante por homeomorfismo, podemos asumir  $x = 0$ . Consideremos ahora un entorno del cero en  $\mathbb{R}^n$ . Lo más natural es elegir el disco  $D^n$ . Así, como consecuencia del Lema 6.2, tenemos que

$$H_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - x) \cong H_p(D^n, D^n - 0) .$$

Ahora bien,  $D^n - 0$  es homótopo a la esfera  $S^{n-1}$  (sin más que abrir el disco perforado hasta su borde). En consecuencia,

$$H_p(D^n, D^n - 0) \cong H_p(D^n, S^{n-1}) .$$

Recordemos que en 3.30 ya habíamos visto cómo calcular la homología de las esferas. Como consecuencia de ello, veremos que  $H_p(D^n, S^{n-1})$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$  si  $n = p$  y nulo en los demás casos. Nos centraremos primero en el caso  $p > 0$ .

Tenemos la sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow S(S^{n-1}) \rightarrow S(D^n) \rightarrow S(D^n, S^{n-1}) \rightarrow 0 .$$

Como la homología reducida del disco es nula al ser éste homótopo a un punto (3.27), al estudiar la sucesión exacta larga que inducida por la anterior sucesión llegamos a:

$$0 \rightarrow \tilde{H}_p(D^n, S^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_{p-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0 .$$

Con lo cual, si  $p = n > 0$ ,

$$H_n(D^n, S^{n-1}) = \tilde{H}_n(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z} ,$$

y

$$\tilde{H}_p(D^n, S^{n-1}) = H_p(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_{p-1}(S^{n-1}) = 0 \quad \text{si } p > 0 \quad \text{y } p \neq n .$$

Si  $p = 0$ , si bien podríamos seguir razonando por medio de sucesiones exactas, haremos los cálculos directamente. Veremos que dado cualquier cadena  $c + S_0(S^{n-1})$  de  $S_0(D^n, S^{n-1})$ , podemos encontrar una cadena  $d + S_1(S^{n-1})$  cuya imagen por el borde coincida con la

## 6.1. VARIEDADES HOMOLÓGICAS Y LA ESFERA HOMOLÓGICA DE POINCARÉ

clase de  $c$ . En efecto, sea  $d$  el 1-símplice que lleva  $v_1$  a  $c$  y  $v_0$  a un punto  $c'$  de la esfera. Así,

$$\partial(d + S_1(S^{n-1})) = c - c' + S_0(S^{n-1}) = c + S_0(S^{n-1}).$$

En consecuencia,  $H_0(D^n, S^{n-1}) = 0$ .

Introduzcamos ahora la definición de variedad homológica.

**Definición 6.4.** Una  $n$ -variedad homológica es un espacio topológico  $X$  tal que para todo  $x \in X$  se tiene que

$$H_n(X, X - x) \cong \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad H_p(X, X - x) = 0 \quad \text{si} \quad p \neq n.$$

**Ejemplo 6.5** (Esfera de Poincaré). La esfera de Poincaré constituye un ejemplo muy interesante en topología algebraica. Sin recurrir a casos patológicos, su suspensión nos proporciona un ejemplo de variedad homológica que no es variedad topológica.

No obstante, para entender la construcción de este espacio necesitamos algunos conocimientos previos, gran parte de los cuales aparece en alguna asignatura del grado de matemáticas. Para tratarlos, seguiremos principalmente las referencias [3], [4], [6] y [14].

**Definición 6.6.** Dado un espacio  $X$  conexo por caminos y  $n$  un natural, se definen los grupos de homotopía  $(\pi_n(X, x_0))$  como las clases por homotopía de las aplicaciones continuas de  $D^n$  en  $X$  que llevan  $S^{n-1}$  en  $x_0$ . La operación será la cocatenación de estas aplicaciones. Se puede comprobar que, en efecto tiene estructura de grupo ([6, Sección 4.1]).

La demostración del siguiente teorema puede consultarse en [14, Teorema 4.29].

**Teorema 6.7** (Hurewicz). *El primer grupo de homología de un espacio  $X$  resulta ser el abelianizado de su primer grupo de homotopía.*

**Teorema 6.8.** *El cociente de una variedad diferenciable por una acción libre de un grupo finito admite una estructura de variedad diferenciable [3, Teorema 8.3].*

El resultado del siguiente lema es una consecuencia inmediata del teorema de van Kampen [18, Capítulo 3].

**Lema 6.9.** *El espacio topológico resultante de quitar una cantidad finita de puntos a una variedad topológica de dimensión mayor o igual que tres tiene el mismo grupo fundamental que la variedad original.*

Citamos un teorema cuya demostración y detalles pueden consultarse en [14, Teorema 10.27].

**Teorema 6.10.** *Sea  $X$  un espacio topológico conexo por caminos y  $G$  un grupo finito que actúa libremente en  $X$ . Sea  $B$  el cociente de  $X$  por la acción de  $G$  y denotemos por  $p : X \rightarrow B$  la aplicación conciente. Entonces,  $G$  se realiza como grupo de automorfismos de  $X$  y:*

$$\text{Aut}(X, p) \cong \frac{\pi_1(B, b_0)}{p_*(\pi_1(X, x_0))}.$$

Llegado este punto, definamos el *espacio de los cuaternios* como

$$\mathbb{H} = \{x + yi + zj + wk \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^4,$$

con el producto determinado por  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ,  $ij = k$ ,  $jk = i$  y  $ki = j$ . Asimismo, el conjugado de un punto  $q = x + yi + zj + wk$  será  $\bar{q} = x - yi - zj - wk$ . Por su parte, la norma de  $q$  será la raíz cuadrada del producto de  $q$  por su conjugado.

**Lema 6.11.** *Los cuaternios con el producto tienen estructura de grupo no conmutativo.*

**Lema 6.12.** *Si restringimos el homeomorfismo lineal canónico entre  $\mathbb{R}^4$  y  $\mathbb{H}$  a  $S^3$ , obtenemos un homeomorfismo entre la esfera y los cuaternios unitarios.*

**Definición 6.13.** Definimos  $I^*$  como el subgrupo de los cuaternios unitarios formado por los elementos:

- 16 cuaternios de la forma  $\pm 1/2 \pm i/2 \pm j/2 \pm k/2$ .
- 8 cuaternios de la forma  $0 \pm 0i \pm 0j \pm k$  con todas las permutaciones de los coeficientes.
- 96 cuaternios tomando las permutaciones pares de  $\pm 1 \pm \phi i \pm \phi^{-1} j \pm 0k$ , con  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Se puede comprobar que  $I^*$  es un grupo (finito por definición). Además,  $I^*$  define la siguiente acción libre sobre la esfera  $S^3$ :

$$I^* \times S^3 \rightarrow S^3, \quad (q, p) \mapsto q \cdot p.$$

En consecuencia, el espacio  $B = S^3/I^*$  admitirá una estructura de variedad diferenciable en virtud del Teorema 6.8, y en consecuencia será triangulable [3, Capítulo VI, Sección 2]. Además, será orientable debido a que la acción de  $I^*$  actúa por isometrías. El espacio  $B$  recibe el nombre de *Esfera homológica de Poincaré*.

Calculemos ahora los grupos de homología de  $B$ . Como  $B$  es una variedad de dimensión 3, los  $H_n$ , con  $n > 3$  serán triviales ([12, Sección 3.2]). Además, como  $B$  es conexo (imagen de un conexo por una aplicación continua), se tendrá que  $H_0(B) = \mathbb{Z}$ . Debido también a la conexión y orientabilidad, resultará aplicando la Dualidad de Poincaré 6.28 (nótese que nos encontramos en un ejemplo, por lo cual podemos utilizar lo que aún no hemos demostrado) que  $H_3(B) = \mathbb{Z}$  (pues al ser  $B$  conexo, por [10, Teorema 42.1],  $H^0(B) = \mathbb{Z}$ ).

- $H_1$ :

$$\text{Aut}(S^3, p) \cong I^* \cong \frac{\pi_1(B, b_0)}{p_*(\pi_1(S^3, p))} = \pi_1(B, b_0) ,$$

donde la última igualdad se desprende del hecho de que las esferas de dimensión superior a uno tengan sean simplemente conexas ([4, Capítulo 1. Sección 6]). Así,

$$\pi_1(B, b_0) \cong I^* ,$$

y como el conmutador (ver [8, Capítulo 1, Sección 3]) de  $I^*$  es él mismo, resulta que

$$H_1(B) = \text{Ab}(\pi_1(B, b_0)) = 0 .$$

- $H_2$ :

Si aplicamos la Dualidad de Poincaré 6.28, resulta que  $H_2(B) \cong H^1(B)$ . Ahora bien, si tenemos en cuenta [6, Corolario 3.3], obtenemos:

$$H_2(B) \cong H^1(B) \cong H_1(B) = 0 .$$

Ahora bien, si realizamos la suspensión de esta variedad (que pasaremos a denotar por  $\Sigma(B)$ ), ya no será una variedad topológica. En efecto, si  $\Sigma(B)$  fuese una variedad topológica (de dimensión 4), entonces, por el Lema 6.9, el grupo fundamental de  $\Sigma(B)$  coincidiría con el de  $\Sigma(B) - \{N, S\}$ , donde  $N$  y  $S$  denotan respectivamente los polos norte y sur de la suspensión. Ahora bien,  $\Sigma(B) - \{N, S\}$  es homotópicamente equivalente a la base de la suspensión, es decir, a  $B$ , con lo que

$$\pi_1(\Sigma(B)) = \pi_1(\Sigma(B) - \{N, S\}) \cong \pi_1(B) \cong I^* \neq 0 .$$

Sin embargo, esto supone una contradicción, ya que, si  $B$  es conexo, entonces su suspensión tiene grupo fundamental nulo.

Veamos ahora si  $\Sigma(B)$  es una variedad homológica. Para ello, tenemos que estudiar  $\tilde{H}(\Sigma(B), \Sigma(B) - x)$ . No obstante, debido a la invarianza homotópica de la homología, Teorema 3.26, podemos asumir que  $x$  es el polo norte de la suspensión. Asimismo, consideramos un entorno  $U$  de  $x$  en el cono superior de la suspensión, tal y como muestra la Figura 6.1. Estudiemos entonces los grupos  $\tilde{H}(U, U - x)$ .

Tenemos la sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow S(U - x) \rightarrow S(U) \rightarrow S(U, U - x) \rightarrow 0$$

Como  $U$  es un cono y  $U - x$  es homótopo a  $B$ , obtenemos que

$$H_p(U, U - x) = \tilde{H}_p(U, U - x) \cong \tilde{H}_{p-1}(U - x) \cong \tilde{H}_{p-1}(B) \quad \text{para todo } p > 0 .$$

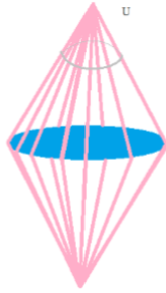


Figura 6.1: Frontera de U

Así pues,

$$H_1(U, U - x) = 0; \quad H_2(U, U - x) = 0; \quad H_3(U, U - x) = 0; \quad H_4(U, U - x) \cong \mathbb{Z} .$$

Además,  $H_0(U, U - x) = 0$  por el mismo razonamiento que hacíamos en 6.3. Asimismo, los demás grupos (para  $n > 4$ ) serán triviales debido a que la dimensión de  $\Sigma(B)$  es 4.

Introducimos a continuación el concepto de *join*. La idea de hacer el *join* de dos complejos simpliciales (cuando se pueda hacer) consiste en unir de manera afín ambos complejos. Por ejemplo, el *join* de dos puntos distintos es una recta; el de un 2-símplice y dos puntos situados al “norte” y al “sur” respectivamente es la suspensión del 2-símplice, etc.

**Definición 6.14.** Dados complejos simpliciales  $|K|$  y  $|L|$ , (con los símlices de  $|K|$  de la forma  $t = [w_0, w_1, \dots, w_i]$  y los de  $|L|$  de la forma  $s = [v_0, v_1, \dots, v_j]$ ) definimos el *join* de  $|K|$  y  $|L|$  (denotado por  $K * L$ ) como el complejo simplicial formado por los símlices de la forma:

$$d = [w_0, w_1, \dots, w_i, v_0, v_1, \dots, v_j]$$

siempre y cuando estos vértices sean afinmente independientes. Si no son afinmente independientes, el *join* no se puede definir.

A continuación presentamos una propiedad del *join*. Puede consultarse en [10, Teorema 62.5].

**Teorema 6.15.** Si se puede definir  $K * L$  y  $|L| \approx S^{n-1}$ , entonces:

$$\tilde{H}_{i+n}(K * L) \cong \tilde{H}_i(K) .$$

*Idea de la demostración.* Resulta de aplicar repetidas veces el Corolario 3.30. □

Llegado este punto, introducimos una serie de definiciones geométricas útiles para estudiar la homología local de complejos simpliciales, así como de triangulaciones de los mismos.

**Definición 6.16.** Sea  $s$  un símplice de un complejo simplicial  $K$ . Se define la *estrella* de  $s$ , que denotaremos por  $\text{St}(s)$  como la unión de los interiores de los símplices de  $K$  que tienen a  $s$  como cara.

*Observación 6.17.* La clausura de  $\text{St}(s)$ , que denotaremos por  $\overline{\text{St}}(s)$  y llamaremos *estrella cerrada*, coincide con la unión de todos los símplices de  $K$  que tienen a  $s$  como cara.

**Definición 6.18.** Se define el *link* de  $s$ , denotado por  $\text{Lk}(s)$  como la unión de todos los símplices de  $\overline{\text{St}}(s)$  disjuntos con  $s$ .

Estos tres conceptos están relacionados mediante las dos siguientes propiedades.

**Proposición 6.19.** Dada un símplice  $s$  de un complejo simplicial  $K$ , se tiene:

$$\overline{\text{St}}(s) = s * \text{Lk}(s) . \quad (6.1)$$

$$\overline{\text{St}}(s) - \text{St}(s) = \text{Bd}(s) * \text{Lk}(s) ,$$

donde  $\text{Bd}(s)$  denota al conjunto de caras propias de  $s$ .

El motivo por el cual hemos introducido las estrellas y el *link* de un símplice es porque nos permiten estudiar la homología local de una variedad homológica triangulable. Para ello, debemos introducir primero lo que es un espacio triangulable.

**Definición 6.20.** Un espacio topológico  $X$  se dice *triangulable* si existe un complejo simplicial  $K$  y un homeomorfismo:

$$f : |K| \rightarrow X .$$

*Observación 6.21.* Salvo homeomorfismo, es lo mismo estudiar una variedad triangulable que el complejo que la triangula.

**Teorema 6.22.** Sea  $\sigma$  un  $k$ -símplice de un complejo simplicial  $K$ . Denotemos por  $\hat{\sigma}$  su baricentro. Entonces:

$$H_i(|K|, |K| - \hat{\sigma}) \cong \begin{cases} \tilde{H}_{i-k-1}(\text{Lk}(\sigma)) & \text{si } \text{Lk}(\sigma) \neq \emptyset , \\ H_i(\sigma, \text{Bd}(\sigma)) & \text{si } \text{Lk}(\sigma) = \emptyset . \end{cases}$$

*Demostración.* Presentamos una demostración muy similar a la propuesta en [10, Lema 63.1], aunque hemos modificado la demostración del primer caso para dotarla de mayor rigor. Si  $\text{Lk}(\sigma) = \emptyset$ , entonces, por la Fórmula 6.1 se tiene que  $\overline{\text{St}}(\sigma) = \sigma$ . Así, aplicando el Teorema 6.2:

$$H_i(|K|, |K| - \hat{\sigma}) \cong H_i(\overline{\text{St}}(\sigma), \overline{\text{St}}(\sigma) - \hat{\sigma}) \cong H_i(\sigma, \sigma - \hat{\sigma}) \cong H_i(\sigma, \text{Bd}(\sigma)) ,$$

donde el último isomorfismo se deduce de la invariancia homotópica de la homología. Si, en cambio,  $\text{Lk}(\sigma) \neq \emptyset$ , entonces tenemos, aplicando de nuevo el lema 6.2 al entorno  $\overline{\text{St}}(\sigma)$ , tenemos:

$$H_i(|K|, |K| - \hat{\sigma}) \cong H_i(\overline{\text{St}}(\sigma), \overline{\text{St}}(\sigma) - \hat{\sigma}) .$$

Ahora bien, de la Fórmula 6.1 se deduce que  $\overline{\text{St}}(\sigma)$  es un cono, con lo que:

$$H_i(\overline{\text{St}}(\sigma), \overline{\text{St}}(\sigma) - \hat{\sigma}) \cong \tilde{H}_{i-1}(\overline{\text{St}}(\sigma) - \hat{\sigma}) \cong \tilde{H}_{i-1}(\text{Lk}(\sigma) * \text{Bd}(\sigma)) ,$$

donde el último isomorfismo se deduce también de la Fórmula 6.1. Finalmente, como  $\text{Bd}(\sigma) \cong S^{k-1}$ , aplicando el Teorema 6.15, resulta que:

$$\tilde{H}_{i-1}(\text{Lk}(\sigma) * \text{Bd}(\sigma)) \cong \tilde{H}_{i-1-k}(\text{Lk}(\sigma)) . \quad \square$$

Nos encontramos ya a un solo resultado de poder demostrar la Dualidad de Poincaré. Debemos ahora definir una especie de complejo simplicial dual a partir de un complejo simplicial dado, donde los nuevos vértices serán los baricentros de los símlices originales. El hecho de que invirtamos las dimensiones, unidos a la estructura celular de los complejos simpliciales (ver 5.2), constituirá la idea fundamental de la demostración de la Dualidad de Poincaré.

La construcción que realizaremos recibirá el nombre de complejo dual en bloques. Nosotros nos limitaremos a introducirlo y mencionar sus propiedades, cuya demostración, puramente geométrica, se puede consultar en [10, Sección 64]. Tan solo demostraremos la propiedad menos intuitiva, para la cual depuraremos la prueba propuesta en [10, Teorema 64.1].

**Definición 6.23.** Sea  $X$  un complejo simplicial. Recordemos que  $\text{sd}(X)$  denota a su subdivisión baricéntrica. Se denota por  $\sigma_1 \prec \sigma_2$  el hecho de que  $\sigma_1$  sea una cara propia de  $\sigma_2$ . Así, los símlices de  $\text{sd}(X)$  serán de la forma:

$$\hat{\sigma}_{i_1} \hat{\sigma}_{i_2} \dots \hat{\sigma}_{i_k}$$

con  $\sigma_{i_1} \succ \sigma_{i_2} \succ \dots \succ \sigma_{i_k}$ .

Si  $\sigma$  es un símlice de  $X$ , definimos el *bloque dual* de  $\sigma$ ,  $D(\sigma)$ , como la unión de los interiores de los símlices de  $\text{sd}(X)$  para los cuales  $\hat{\sigma}$  es el vértice final.

Definimos también el *bloque cerrado dual* de  $\sigma$ ,  $\overline{D}(\sigma)$  como la clausura de  $D(\sigma)$ .

Finalmente, definimos:

$$\dot{D}(\sigma) = \overline{D}(\sigma) - D(\sigma) .$$

**Teorema 6.24.** Sea  $X$  un complejo finito y  $\sigma$  un  $k$ -símlice de  $X$ . Entonces:

## 6.1. VARIEDADES HOMOLÓGICAS Y LA ESFERA HOMOLÓGICA DE POINCARÉ 47

- El bloque cerrado dual es un cono:  $|\overline{D}(\sigma)| = |\dot{D}(\sigma) * \hat{\sigma}|$ .
- Si  $H_i(X, X - \hat{\sigma}) = \mathbb{Z}$  si  $i = n$  (para cierto  $n$ ) y se anula en los demás casos, entonces  $(\overline{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma))$  tiene la homología relativa de un  $(n-k)$ -disco con respecto a su frontera.

*Demostración.* El primer resultado es puramente geométrico. Aparece demostrado en [10, Teorema 64.1].

Para el segundo, tengamos en cuenta que

$$\overline{\text{St}}(\hat{\sigma}, \text{sd } X) = \dot{D}(\sigma) * \text{sd}(\sigma) .$$

Esta relación es geométrica y su obtención se puede consultar en [10, Teorema 64.1]. Ahora bien, como  $\overline{\text{St}}(\hat{\sigma})$  es un entorno de  $\hat{\sigma}$ , entonces, por 6.2:

$$\begin{aligned} H_i(X, X - \hat{\sigma}) &\cong H_i(\overline{\text{St}}(\hat{\sigma}), \overline{\text{St}}(\hat{\sigma}) - \hat{\sigma}) \cong \tilde{H}_{i-1}(\overline{\text{St}}(\hat{\sigma}) - \hat{\sigma}) \cong \\ &\tilde{H}_{i-1}(\dot{D}(\sigma) * \text{sd}(\sigma) - \hat{\sigma}) \cong \tilde{H}_{i-1}(\dot{D}(\sigma) * \text{sd}(\text{Bd}(\sigma))) . \end{aligned}$$

Ahora, por el Teorema 6.15, tenemos que:

$$\tilde{H}_{i-1}(\dot{D}(\sigma) * \text{sd}(\text{Bd}(\sigma))) \cong \tilde{H}_{i-1-k}(\dot{D}(\sigma)) .$$

Finalmente, de la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow S(\dot{D}(\sigma)) \rightarrow S(\overline{D}(\sigma)) \rightarrow S(\overline{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma)) \rightarrow 0 ,$$

se deduce que

$$\tilde{H}_{i-1-k}(\dot{D}(\sigma)) \cong H_{i-k}(\overline{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma)) . \quad \square$$

Presentamos ahora el último resultado sobre la construcción del complejo dual en bloques. La primera afirmación se demuestra de forma análoga al Lema 5.7. Una demostración detallada puede consultarse en [10, Teorema 64.2]. Por su parte, la segunda afirmación resulta de aplicar el Teorema 5.12 al  $p$ -esqueleto del complejo dual.

**Teorema 6.25.** *Sea  $X$  un complejo simplicial localmente finito que es una  $n$ -variedad homológica. Sea  $X_p$  el  $p$ -esqueleto del complejo dual en bloques y denotemos por  $D_*(X)$  al complejo celular dual de cadenas de  $X$ . Entonces:*

- El grupo  $H_i(X_p, X_{p-1})$  es cero si  $i \neq p$  y es abeliano libre si  $i = p$ . Además, cuando  $i = p$ , los generadores de los  $H_p(\overline{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma))$  con  $D(\sigma)$  en los  $p$ -bloques de  $X$ , nos proporcionan una base de  $H_p(X_p, X_{p-1})$ .
- Los complejos de cadenas  $D_*(X)$  y  $C_*(\text{sd } X)$  tienen la misma homología.

## 6.2. Dualidad de Poincaré

En esta sección presentamos la Dualidad de Poincaré, que establece una relación entre homología y cohomología en ciertos espacios. Nótese que esta no es la versión más frecuente en la bibliografía, pues la enunciamos en el caso simplicial y para variedades homológicas. Para la demostración seguiremos esencialmente la referencia [10, Teorema 65.1], aunque, como ya avanzábamos al inicio de este capítulo, el caso  $n-1$  ha sido modificado para evitar ciertos lemas previos.

Recordemos que un espacio topológico se dice triangulado si está en correspondencia con un complejo simplicial por medio de un homeomorfismo. En este contexto, introducimos la definición de orientabilidad de una variedad homológica (de nuevo, recordemos que al hablar de símlices hacemos referencia a los símlices del complejo que triangula la variedad).

Por último, recordemos que es aquí donde no podemos emplear la definición de orientabilidad 1.14, por lo que debemos entender las orientaciones según la Definición 1.11.

**Definición 6.26.** Sea  $X$  una  $n$ -variedad homológica compacta y triangulable. Diremos que  $X$  es *orientable* si resulta posible orientar los  $n$ -símlices  $\sigma_i$  de  $X$  de modo que su suma sea un ciclo.

*Observación 6.27.* Nótese que en este caso, al ser un espacio compacto y Hausdorff es localmente compacto [20, 18.2]. La condición de compacidad será necesaria para garantizar que la suma de los  $n$ -símlices de  $X$  sea una suma finita.

**Teorema 6.28** (Dualidad de Poincaré). *Sea  $X$  una  $n$ -variedad homológica compacta y triangulable. Si  $X$  es orientable, entonces, para todo  $p$ , existe un isomorfismo entre  $H^p(X)$  y  $H_{n-p}(X)$ .*

*Demostración.* Para esta demostración, consideraremos el complejo de cocadenas simpliciales  $C^*(X)$  y el complejo celular dual de cadenas de  $X$ ,  $D_*(X)$ . Orientamos los  $n$ -símlices con la orientación que nos da la condición de orientabilidad. En las demás dimensiones, tomamos una orientación cualquiera.

Por el Teorema 6.25, tenemos que existe un isomorfismo entre  $C^p(X)$  y  $D_{n-p}(X)$ . Éste asigna a cada  $\sigma^* : C_p(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ , un generador de  $H_{n-p}(\bar{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma))$ . Además, al ser  $X$  orientable, veremos que el signo de este isomorfismo, al cual denotaremos por  $\phi$ , puede ser tomado para que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} C^{p-1}(X) & \xrightarrow{\phi} & D_{n-p+1}(X) \\ \downarrow \delta & & \downarrow \partial \\ C^p(X) & \xrightarrow{\phi} & D_{n-p}(X) . \end{array}$$

Esta conmutatividad significa que  $\phi$  es una aplicación de complejos de cadenas (las cocadenas son en particular un complejo de cadenas), por lo cual induce una aplicación entre las homologías (la homología de  $C^*(X)$  es la cohomología de  $C_*(X)$ ), la cual será un isomorfismo ya que  $\phi$  lo es.

La demostración se hace por inducción en  $p$ . Comenzaremos por  $p = n$  e iremos descendiendo de dimensión.

Si  $p = n$ , y  $\sigma$  es un  $n$ -símplice, entonces  $\phi(\sigma^*) = \hat{\sigma}$ , pues  $\bar{D}(\sigma) = \{\hat{\sigma}\}$ .

Hagamos ahora el caso  $p = n - 1$ . Sea  $s$  un  $(n - 1)$ -símplice. Por definición,

$$\delta(s^*) = \sum \epsilon_i \sigma^i,$$

donde  $\epsilon_i = s^*(\partial\sigma_i)$  y los  $\sigma_i$  representan los  $n$ -símplices de  $X$  de los cuales  $s$  es una cara. Nótese que, debido a la condición de orientabilidad,  $\sum \epsilon_i = 0$ . Se tiene también:

$$\phi(\delta s^*) = \sum \epsilon_i \phi(\sigma^i) = \sum \epsilon_i \hat{\sigma}_i.$$

Ahora bien, veamos que esto es un ciclo fundamental de la homología reducida de  $\dot{D}(s)$ . (Nótese que realizamos un pequeño abuso de notación con el rango de la aplicación  $\phi$ . Simplemente lo hacemos para no tener que considerar la composición de una aplicación intermedia  $\phi'$  y un paso al cociente.)

Por un lado se tiene que los  $\hat{\sigma}_i$  están en  $\dot{D}(s)$  al ser  $s$  una cara propia de cada  $\sigma_i$ . Además:

$$\epsilon(\phi(\delta s^*)) = \epsilon(\sum \epsilon_i \hat{\sigma}_i) = \sum \epsilon_i = 0,$$

con lo cual,  $\phi(\delta s^*)$  es un ciclo. Además, no puede ser múltiplo de otra cadena, pues los  $\hat{\sigma}_i$  son ciclos fundamentales de

$$H_0(\bar{D}(\sigma_i), \dot{D}(\sigma_i)) = H_0(\bar{D}(\sigma_i), \emptyset).$$

Tampoco puede ser un borde, pues  $H_1(\dot{D}(s)) = \emptyset$ . Finalmente, del hecho de que  $(\bar{D}(s), \dot{D}(s))$  sea una 1-esfera homológica módulo su frontera (ver Teorema 6.24), se tiene  $\tilde{H}_0(\dot{D}(s)) \cong \mathbb{Z}$ . Para ello tan solo basta tener en cuenta la sucesión exacta larga que induce en homología reducida la sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow C(\dot{D}(s)) \rightarrow C(\bar{D}(s)) \rightarrow C(\bar{D}(s), \dot{D}(s)) \rightarrow 0.$$

Así pues, debido precisamente a esta sucesión, tenemos que

$$\partial : H_1(\bar{D}(s), \dot{D}(s)) \rightarrow \tilde{H}_0(\dot{D}(s))$$

es un isomorfismo. En consecuencia, existirá un generador de  $H_1(\bar{D}(s), \dot{D}(s))$  que irá a  $\phi(\delta s^*)$  por el borde. Basta entonces considerar  $\phi(s^*)$  como este generador para tener la conmutatividad deseada.

Veamos ahora el caso general. Suponemos el diagrama conmutativo para dimensión mayor que  $p$  y estudiemos qué ocurre en dimensión  $p$ . La argumentación es esencialmente la misma que en el caso anterior. Sin embargo, debido a la complejidad de ambas, la repetiremos para dejar claros los escasos puntos en que se diferencian.

Sea  $s$  un  $p$  símplice. Al igual que antes,

$$\delta(s^*) = \sum \epsilon_i \sigma^i ,$$

donde las  $\sigma_i$  siguen siendo los símplices de una dimensión mayor que tienen a  $s$  como una de sus caras. Igual que antes,

$$\phi(\delta s^*) = \sum \epsilon_i \phi(\sigma^i) .$$

Veamos ahora también que  $\phi(\delta s^*)$  es un ciclo fundamental de  $H_{n-p-1}(\dot{D}(s))$ . Como los  $\phi(\sigma_i)$  son, por hipótesis de inducción, ciclos fundamentales de  $\overline{D}(\sigma_i)$  módulo  $\dot{D}(\sigma_i)$  y en consecuencia están en  $\dot{D}(s)$ , pues, como siempre,  $s$  es una cara propia de  $\sigma_i$ . También se deduce de la hipótesis de inducción que  $\phi(\delta s^*)$  es un ciclo, pues

$$\partial\phi(\delta s^*) = \phi(\delta\delta s^*) = \phi(0) = 0 .$$

Además, al igual que antes,  $H_{n-p}(\dot{D}(s)) = 0$ , por lo que  $\phi(\delta s^*)$  no puede ser un borde. Además, como los  $\phi(\sigma^i)$  son ciclos fundamentales de  $\overline{D}(\sigma_i)$  módulo  $\dot{D}(\sigma_i)$ , entonces  $\partial\phi(\delta s^*)$  no puede ser un múltiplo de otro ciclo, pues su restricción a  $\overline{D}(\sigma_i)$  es precisamente  $\phi(\sigma^i)$ .

Entonces,  $\phi(\delta s^*)$  es ciclo fundamental de  $H_{n-p-1}(\dot{D}(s))$ . Además, dada la sucesión exacta corta de cadenas

$$0 \rightarrow C(\dot{D}(s)) \rightarrow C(\overline{D}(s)) \rightarrow C(\overline{D}(s), \dot{D}(s)) \rightarrow 0 ,$$

y teniendo en cuenta que el bloque cerrado dual es un cono (Teorema 6.24) (y que por consiguiente tiene homología nula en grados positivos), resulta que

$$H_{n-p}(\overline{D}(s), \dot{D}(s)) \cong H_{n-p-1}(\dot{D}(s)) .$$

Pero entonces, como  $\phi(\delta s^*)$  es ciclo fundamental de  $H_{n-p-1}(\dot{D}(s))$ , hay un generador de  $H_{n-p}(\overline{D}(s), \dot{D}(s))$  que va a  $\phi(\delta s^*)$ . Basta tomar entonces como  $\phi(s^*)$  este generador para que resulte la conmutatividad del diagrama.  $\square$

**Ejemplo 6.29.** Calculemos de nuevo la homología del complejo  $W$ . No obstante, en esta ocasión, aplicaremos las técnicas simpliciales aprendidas en el Capítulo 2, así como la

Dualidad de Poincaré y el isomorfismo entre la homología simplicial y la homología singular. Utilizaremos dos nuevos complejos simpliciales auxiliares  $W'$  y  $W''$  que definiremos a continuación:

$$W' = \{[v_0], [v_1], [v_2], [v_3], [v_4], [v_5], [v_6], [v_7], [v_0, v_1], [v_0, v_2], [v_0, v_3], [v_1, v_3], [v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_0, v_1, v_2], [v_0, v_1, v_3], [v_0, v_2, v_3], [v_1, v_2, v_3], [v_0, v_1, v_2, v_3], [v_2, v_6], [v_2, v_7], [v_6, v_7], [v_3, v_4], [v_3, v_5], [v_4, v_5]\}.$$

$$W'' = \{[v_0], [v_1], [v_2], [v_3], [v_4], [v_5], [v_6], [v_7], [v_0, v_1], [v_0, v_2], [v_0, v_3], [v_1, v_3], [v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_0, v_1, v_2], [v_0, v_1, v_3], [v_0, v_2, v_3], [v_1, v_2, v_3]\}.$$

Representamos los complejos  $W'$  y  $W''$  en la Figura 6.2:

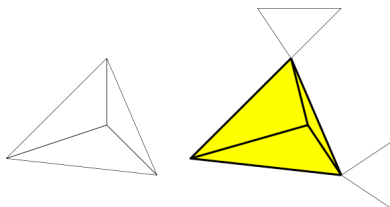


Figura 6.2: Complejos  $W''$  y  $W'$

Para empezar,  $H_0(W) = \mathbb{Z}$ , ya que  $W$  es conexo.

Si pensamos en el caso simplicial, a la hora de calcular el primer grupo de homología, no juegan ningún papel las 3-caras, de modo que el primer grupo de homología de los complejos  $W$  y  $W'$  es el mismo, pues el complejo  $W'$  consiste en rellenar el tetraedro del complejo  $W$ . En consecuencia, el complejo  $W'$  es homótopo a la unión de dos circunferencias por un punto. Aplicando el teorema de van Kampen (ver [18, Capítulo 3]), obtenemos que su grupo fundamental es  $\mathbb{Z}^2$ , con lo cual, como consecuencia del teorema de Hurewicz (Teorema 6.7), obtenemos que el primer grupo de homología (al aplicar la invariancia por homotopía hemos pasado a considerar la homología singular) es también  $\mathbb{Z}^2$ .

Con lo que respecta al segundo grupo de homología, por un razonamiento análogo al anterior, éste es el mismo para los espacios  $W$  y  $W''$  (notemos que  $W''$  es el tetraedro hueco). Ahora, este complejo es el resultado de quitar la cara de dimensión 3 a un 3-símplice, por lo que podemos aplicar el Teorema 2.17 y obtenemos que  $H_2(W) = H_2(W'') = \mathbb{Z}$ . Otra manera habría sido ver que  $W''$  es homeomorfo a la esfera  $S^2$  y usar la Dualidad de Poincaré aprovechando el hecho de que la cohomología en dimensión cero de un espacio conexo es cíclica infinita.



# Bibliografía

- [1] Atiyah, M. F. y Macdonald, I. G. (1973). *Introducción al álgebra conmutativa*, Editorial Reverté, Barcelona.
- [2] Basak, T. (2010). *Combinatorial cell complexes and Poincaré duality*, *Geom. Dedicata*, **147**, 357–387.
- [3] Boothby, W. M. (1975). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, Orlando.
- [4] Bourbaki, N. (2016). *Topologie Algébrique. Chapitres 1 à 4*, Springer, Berlín.
- [5] Dold, A. (1980). *Lectures on Algebraic Topology*, Springer, Berlín, Heidelberg, Nueva York.
- [6] Hatcher, A. (2002). *Algebraic Topology*, Cambridge University Press.
- [7] Kirby, R. C. y Scharlemann, M. G. (1979). *Eight faces of the Poincaré homology 3-sphere*, *Geometric topology, Proc. Conf., Athens/Ga. 1977*, 113–146, Academic Press, Nueva York, Londres.
- [8] Lang, S. (1993). *Algebra*, Addison Wesley, Nueva York.
- [9] May, J. P. (1999). *A Concise Course in Algebraic Topology*, The University of Chicago Press, Chicago.
- [10] Munkres, J. R. (1984). *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley, Cambridge Massachusetts.
- [11] Postnikov, M. (1981). *Leçons de géométrie. Algèbre linéaire et géométrie différentielle*, Éditions Mir Moscou, Moscú.
- [12] Prasolov, V. V. (2004). *Elements of Combinatorial and Differential Topology*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence.

- [13] Rotman, J. J. (1979). *An introduction to Homological Algebra*, Academic Press, Berlín.
- [14] Rotman, J. J. (1988). *An introduction to Algebraic Topology*, Springer, Nueva York.
- [15] Saralegi-Aranguren, M. y Tanré, D. (2020). *Poincaré duality, cap product and Borel-Moore intersection homology*, Q. J. Math., **71**, 943–958.
- [16] Serre, J. P. (1951). *Homologie singulière des espaces fibrés. Applications*, Ann. Math., **54**, 425–505.
- [17] Serre, J. P. (1953). *Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens*, Ann. Math., **58**, 258–294.
- [18] Spanier, E. H. (1966). *Algebraic Topology*, Springer, Berlín.
- [19] Whitehead, G. W. (1978). *Elements of Homotopy Theory*, Springer, Berlín, Heidelberg, Nueva York.
- [20] Willard, S. (1998). *General Topology*, Dover, Mineola, Nueva York.