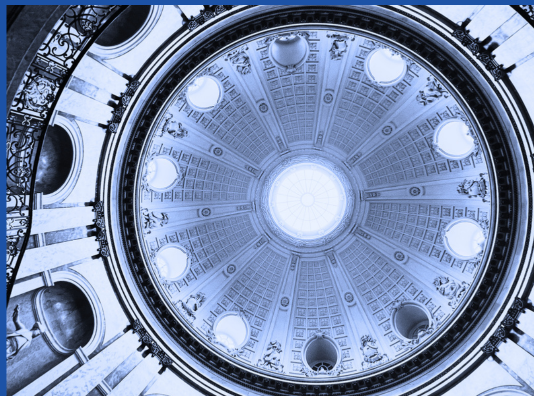
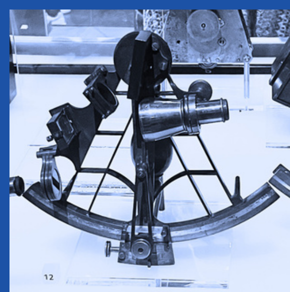
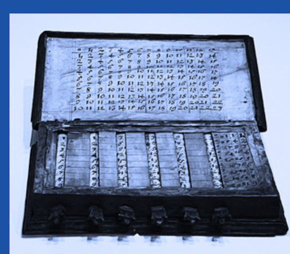
REVISTA ESTUDANTIL



ÁIS MATES





FACULTADE DE MATEMÁTICAS USC

Introdución. Un novo comezo

Francisco Estévez Lengua

Benvid@s a MÁIS MATES! Estimad@s compañeir@s, profesor@s e demais persoal relacionado coa nosa Facultade, estamos encantad@s de presentarvos esta iniciativa: unha revista estudiantil

PORQUE?

Esta revista nace como unha idea vaga, ata ser un desexo de investigar e colaborar dende a vista dos estudantes. Neste lenzo, poderedes ler artigos sobre historia das matemáticas, novas científicas e algunha achega máis.

Como ben podedes ler, esta revista ten o nome de MÁIS MATES! : MÁIS pois é moi de noso sumar, engadir, compartir e profundar; MATES obviamente porque esa é a nosa constante, a nosa elección de estudo. Para moit@s unha pasión, para outr@s unha virtude humana, en definitiva, unha linguaxe que nós coñecemos e compartimos.

INTENCIÓNS.

Buscamos compartir coñecemento ciéntifico, preparando artigos sobre acontecementos relacionados coas matemáticas, tanto pasados como presentes. Intentar conectar ideas e levar a cabo a posta en común das estudantes para recortar as nosas fronteiras.

Queremos participar activamente creando varios numeros desta revista durante o ano escolar 2023-2024. Tería unha frecuencia mensual e a súa visualización será vía electrónica, cunha pequena posibilidade de sacala en formato papel.

SECCIÓNS.

Historia

Tentaremos contar algún capítulo da historia dalgunha rama das Matemáticas, non pode faltar coñecer ben o pasado, para saber cara onde avanzar no futuro.

Actualidade

Existen temas actualmente candentes no noso campo de estudo, e diso vai esta sección. Pór en valor os avances feitos así como expor novidades relevantes para nós.

Sociedade

Gustaríanos investigar na nosa comunidade, disto tratará Sociedade, unha sección onde se poderán ler dende entrevistas, ata estudos pequeniños sobre temas que furlaremos ao longo do curso.

Retos

Esta última, Retos, consistirá no que a palabra indica, unha variedade de crebacabezas e problemas, cuxas solucións estarán dispoñibles na seguinte tirada correspondente. A produción desta sección ven a cargo de participantes do grupo “Sementeira”.

AUTORÍA.

A\os autores dos artigos son estudantes desta facultade, coa posibilidade de que calquera que desexe publicar algún artigo ou participar nesta revista o poida facer. Queremos fomentar esta actividade, facela de todo\as: para iso invitámosvos a colaborar.

COLABORACIÓNS.

Calquera persoa se interesa por afondar nos temas que lle interesan, pois ben, esta iniciativa é unha oportunidade para abrir frontes: enlazar diversas cabezas pensantes, chegar a vós e invitarvos a formar parte activa desta revista.

Queriamos dicirvos que queremos que participedes, que vos animedes a escribir o que vos pete, podendo compartir o voso traballo co resto de lectores.

AGRADECEMENTOS

Persoalmente, quero agradecer a axuda dos meus compañeiros e compañeiras que amosaron o seu interese por este proxecto e o fixeron posible.

Así tamén, agradecer ao Decanato da Facultade o seu apoio.

Dende a revista, esperamos que sexa ben acollida e teña un bo despegue, moitas grazas por lernos e aí vai esta tirada.

Problemas no Antigo Exipto: o papiro de Ahmes

Santiago González Gómez

Cando o historiador grego Heródoto volveu da súa visita a Exipto, defendeu que a xeometría se iniciara como disciplina no país do Nilo. Segundo el, cando a crecida anual do río anegaba os campos, era necesario medir novamente o tamaño das terras modificadas, o que propiciou o nacemento da xeometría como pura ferramenta práctica. A día de hoxe, é imposible constatar de forma exacta como xurdiron as disciplinas matemáticas na Antigüidade; porén, no caso do Antigo Exipto contamos con diversos textos que nos ofrecen unha pequena imaxe de como entendían e empregaban os exipcios as Matemáticas.

Os papiros sobre Matemáticas conservados son escasos, pero algúns deles son de grande extensión, como o de Ahmes, nome debido ao do escriba que o redactou no 1650 a.C. Neste rolo de dous metros e medio, Ahmes recompila diversos elementos útiles para a ensinanza das Matemáticas exipcias.

En primeiro lugar, Ahmes inclúe unha táboa expresando fraccións do tipo $\frac{2}{n}$ como suma doutras do tipo $\frac{1}{n}$; isto débese a que os exipcios só consideraban tres tipos de fraccións: precisamente as inversas dos enteiros (non tiñan coñecemento do cero), as súas complementarias $\frac{n-1}{n}$, e por outra banda, a fracción $\frac{2}{3}$. O resto de racionais eran considerados como contas a medio facer, pasos intermedios. Por exemplo, Ahmes escribe $\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$; por que prefire esta descomposición antes de $\frac{1}{101} + \frac{1}{101}$, non o sabemos. A continuación, Ahmes incorpora outra táboa descompoñendo $\frac{n}{10}$ con $n = 1, \dots, 9$.

Máis interesantes son os 84 problemas resoltos que seguen ás devanditas táboas e nos que Ahmes pretende dar ao lector un "completo e exhaustivo estudo de tódalas cousas", que neste caso fai referencia a problemas de aritmética e xeometría.

Os primeiros problemas recompilados por Ahmes tratan de aritmética. Por exemplo, o problema 6 pídenos dividir 9 barras de pan entre 10 homes. Ahmes asegura, grazas ás táboas, que a resposta é $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}$, e próbao da seguinte maneira: se a cada home damos dita cantidade, a dous daremos $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$, e polo tanto a catro $3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$, e entón a oito $7 + \frac{1}{5}$. Sumando o que lle toca a oito máis o que lle toca a dous, obtense que a 10 tócanlle 9, como queriamos obter. Nótese a estraña forma de multiplicar, cun proceso de duplicación completado con sumas.

A seguinte sección do papiro está dedicada a problemas de *aha*, que en exipcio vén a significar "montón" ou "cantidade", e se refire a ecuacións lineares. Por exemplo, no problema 24 pídese atopar un *aha* tal que el mesmo sumado á súa séptima parte dea 19. Ahmes resólveo por unha "regra do falso": primeiro asume que o *aha* é 7, e comproba que $7 + \frac{1}{7} \cdot 7$ é 8. Agora, calcula por canto hai que multiplicar 8 para obter 19, e multiplicando 7 por dita cantidade, obtén a solución, que logo comproba.

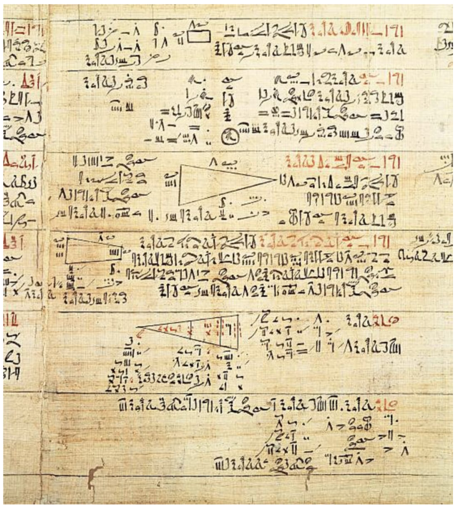


Fig. 1: Problema xeométrico do papiro de Ahmed

O último tipo de exercicios do papiro son os de corte xeométrico. O problema 41 pide achar o volume dun graneiro de base circular de diámetro $d = 9$ e de altura 10. A área da base é calculada coa fórmula $A = (d - d/9)^2$, o que é equivalente a tomar $\pi \approx 3{,}1605$. Este valor foi posiblemente obtido ao comparar o da apotema do octógono coa súa área; o que non sabemos é se Ahmes sabía que isto era unha aproximación, ou se pensaba que o valor obtido era exacto. No problema 51, Ahmes xustifica a fórmula para a área dun triángulo isósceles co clásico argumento de dividir o triángulo en dous e reordenalo para formar un rectángulo. Tamén son interesantes os problemas sobre pirámides, nos que dados altura e lado da base dunha pirámide, pídese calcular o *seqt*, que corresponde coa inversa do actual concepto de pendente. Estes cálculos deberon de ser relevantes para os exipcios, cuxas pirámides adoitaban ter un *seqt* nun rango determinado.

Aínda que todos estes coñecementos poidan parecernos básicos a día de hoxe, é innegable que aos exipcios bastáronlles para florecer como civilización durante milenios, e que todo pequeno avance na Antigüidade contribuíu á construción das Matemáticas que coñecemos a día de hoxe. [1]

Referencias

[1] CHACE, ARNOLD BUFFUM, *The Rhind mathematical papyrus: British museum 10057 and 10058*, 1927.

Unha abstracción histórica do pensamento xeométrico

Ignacio Garbayo Fernández

Din pola rúa que as Matemáticas non valen para entender o mundo real; mais, se hai unha rama que intenta entender as formas físicas da realidade na que vivimos, esa é a Xeometría. Como ben é sabido, esta tivo o seu máis sonado inicio formal coa escola euclidiana. Aínda que dunha forma máis abstracta da que estamos hoxe acostumados, os *Elementos* recollen as ideas de punto, recta ou plano empregando unicamente nocións da intuición, da vista e da forma.

Os postulados da Xeometría considerados mais evidentes e sinxelos da Grecia clásica son os 5 seguintes:

1. *Dados dous puntos distintos, existe un segmento de recta que os contén.*
2. *Un segmento de recta estendido indefinidamente determina unha recta.*
3. *Dados un centro e un radio, pódese trazar unha circunferencia a partir deles.*
4. *Tódolos ángulos rectos son iguais entre si.*
5. *(Postulado das paralelas) Se unha recta corta a outras dúas, de tal maneira que a suma dos ángulos interiores do mesmo lado que se forman é menor que dous ángulos rectos, as dúas rectas, ao prolongarse, cortaranse neste lado.*

5'. *(Equivalente ao 5.) Dados unha recta e un punto que non está na recta, existe unha única recta que contén ao punto e é paralela á recta dada.*

Este conxunto de afirmacións, serven para construír un estudo puramente lóxico dos elementos xeométricos, sentando as bases das investigacións posteriores no campo. O conxunto de postulados anteriores é minimal, pois o quinto postulado non pode ser deducido a partir dos anteriores.

A pesares de que con esta forma de facer e entender a Xeometría as persoas podían realizar marabillas en Arquitectura, como se viu na época romana, había buratos que quedaban sen pechar. Acaso hai forma humana de, utilizando só os postulados anteriores, describir o movemento dos corpos? A pregunta anterior é a que motivou a René Descartes (1596 - 1650), célebre pensador da Idade Moderna, a desenvolver unha nova teoría da Xeometría. Porén, esta ten unha particular diferenza respecto aos traballos anteriores, pois emprega a Álxebra para entender a relación entre os segmentos. Este é un exemplo da suma relevancia que terían os filósofos da Revolución Científica na comprensión teorética da realidade.

Descartes publicou o seu tratado *Discurso do Método* de forma anónima, supón a súa auténtica metafísica, dirixida ao grande público como fundamentación do racionalismo e o seu método. Nesta obra aparece un apéndice, *A Xeometría*, onde explica o seu novo sistema.

Nel, expón que calquera operación elemental entre elementos de $\mathbb{N}$ — no seu momento: suma, resta, multiplicación, división e extracción de raíces— pode realizarse empregando segmentos de recta, cuxa lonxitude é proporcional ao valor de cada operando.

Seguindo este enfoque, pódese establecer un sistema de coordenadas no plano a partir dunha referencia, formada por eixes e un centro, que permite realizar ditas operacións. A Figura 1 presenta 3 referencias distintas no plano: R, R' e R''.

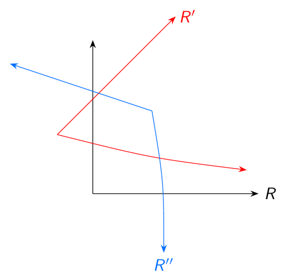


Fig. 1: Tres referencias no plano.

Os vectores das referencias anteriores son comunmente coñecidos como eixes cartesianos, así como as coordenadas dun punto (x,y) nunha referencia R formada por eixes cartesianos chámanse coordenadas cartesianas.

Isto permite formular un novo enfoque para tratar de comprender a disposición do noso arredor, pois agora podemos dotar ao espazo dunha métrica especial, á que chamaremos distancia. Esta será empregada para medir a proximidade entre os elementos físicos de forma precisa.

A obra cartesiana é iniciadora dunha corrente común na filosofía moderna: aproximarse ao saber antigo mediante a pescuda de novas respostas e innovadoras maneiras de ver e entender o mundo. Ademais, o seu pensamento encádrase dentro do racionalismo, que só cre válido o pensamento teórico brindado pola razón.

Pero é claro que a forma racional de ver o mundo precisa dunha abstracción similar á que realizan os investigadores e estudantes en Matemáticas cada día. Trátase de esquecer a información brindada polos sentidos e concentrarse só na teoría. No caso das rectas, puntos e planos, a clave está en esquecer o mundo e centrarse na xeneralización. É, dalgún xeito, unha simplificación realizada co obxectivo de acadar a plena comprensión da materia, a través de conceptos que, malia abstractos en certo grao, están dotados de maior simplicidade en última instancia.

O pensamento matemático céntrase en analizar os elementos estritamente necesarios para unha tarefa encomendada, permitindo ao pensador focalizarse no que é relevante de modo pleno. Quen cultiva esta forma de matinar é, polo tanto, un auténtico experto en resolver problemas centrándose nas súas partes fundamentais; e isto é o que fai a Xeometría de diferentes formas ao longo da historia para ser capaz de describir a realidade.

As matemáticas e as IA

Carlos Cao López

Que é un matemático? Cando tratamos de dar resposta a este tipo de cuestións, parece mester achegarnos ás mesmas dende outro punto de vista, reformular a pregunta e atacala cun novo interrogante: que fai un matemático?

Seguindo ao británico G. Harold Hardy na súa Apoloxía dun matemático (1940), a súa función é "probar novos teoremas, contribuír ás matemáticas". Tomariamos así a súa palabra e afirmaríamos que a función dos matemáticos estaría orientada en gran medida cara as demostracións rigorosas. Parece que o matemático, a diferenza doutros científicos, adoita esculcar as súas ideas interiores máis que o mundo exterior en busca dun presentimento que o guíe durante o proceso de demostración.

Estamos no ano 2023 e a eclosión das intelixencias artificiais é unha realidade. Grandes modelos de linguaxe coma ChatGPT parecen afondar en disciplinas que ata o momento foran propiamente humanas, como o deseño gráfico ou mesmo a literatura; semella que estamos nun momento no que incluso materias cun alto compoñente creativo, aquilo que poderíamos pensar que as converte nun eido exclusivo da acción humana, están a escapar do noso control total. Sen ir más lonxe, este mesmo ano un fotógrafo gañou un concurso cunha imaxe xerada por esta IA, facéndonos pensar que podemos estar non moi lonxe do momento no que unha destas intelixencias artificiais supere o test de Turing. Chegados a este punto, cabe facernos unha nova cuestión: que implicacións pode chegar a ter isto para unha disciplina creativa coma as matemáticas?

Para entender como poden cambiar as intelixencias artificiais o labor dos matemáticos, primeiro debemos atender ao rol que xogan as demostracións neste proceso, é dicir, comprender que buscamos historicamente con elas e que significado lle damos a que algo estea probado. A resposta reside, como non podía ser doutra maneira, no pai da lóxica, no gran Aristóteles. No seu *Órganon* afirma que para que algo quede probado como verdadeiro debe descansar sobre o razoamento dedutivo e unha serie de premisas das que saibamos a verdade, mais este camiño lévanos a tratar cos axiomas, que el mesmo define en Analíticos como aqueles principios lóxicos indemostrables e anteriores a toda demostración, polo tanto universais, necesarios e evidentes, sobre os que se erguen os principios materiais, aqueles que enuncian as demostracións. Dado que todo o edificio matemático se fundamenta sobre axiomas -pois calquera proposición dunha demostración debe poder ser reducida a eles en última instancia-, parece lóxico pensar que unha máquina podería perfectamente emular o labor dun matemático e construír as súas propias demostracións, non sendo xa necesaria a nosa intervención no proceso. Poderiamos concibir este edificio matemático coma unha gran biblioteca á que acudimos cando queremos saber se algo é verdadeiro, ao modo daquela Biblioteca de Babel borgiana na que reside todo o coñecemento, na que "basta con que un libro sexa posible para que exista", unha biblioteca ilimitada e periódica cuxos únicos límites serían os do propio coñecemento humano. Programas coma Lean, un probador de teoremas baseado no cálculo de construcións con tipos indutivos, actúan dunha forma similar á biblioteca, gardan unha gran colección de resultados e, en base a eles, poden verificar se unha demostración dada segue pasos lóxicos, facendo fincapé nos pasos máis escuros complexos e preguntando sobre eles ata a exactitude.

Pero volvendo á cuestión anterior, ao preguntarnos como poden as máquinas cambiar as matemáticas, ineludiblemente xorden novos interrogantes: en que punto a unha máquina á que lle deamos inicialmente as nosas ideas será capaz non só de guiarnos a través de intelixentes cuestións pola demostración, senón tamén de aportar as súas propias ideas? Cal será entón o valor do matemático? Que será un matemático no futuro? A resposta, se existe, é complicada. Poderiamos imaxinar aos matemáticos futuros máis preto doutros científicos, escribindo algo coa esperanza de que unha máquina o verifique. É terriblemente complicado establecer os límites do que pode -ou non- facer unha máquina, pero gustaríame rematar o artigo retornando aos axiomas, máis concretamente a dous resultados sobre eles e que deixan certo lugar á esperanza. Falo dos teoremas de incompletitude de Godel, máis concretamente do primeiro. Este afirma que calquera teoría matemática que sexa capaz de describir os números naturais e a aritmética non pode ser asemade consistente e completa. Isto dá lugar á existencia de enunciados cuxa verdade non é verificable dentro do sistema formal -polo que sexa a consistencia parece algo máis importante que pedir- e, en consecuencia, por unha máquina. Pola contra, unha persoa podería decatarse da verdade, aínda que dende logo non no sentido formalista, tras o enunciado, malia non poder demostralo. Un exemplo particularmente fermoso deste tipo de enunciados vén recollido na sección sobre o teorema de Gödel do libro A nova mente do emperador de Roger Penrose; amosar o exemplo no presente artigo excedería por completo os seus propios límites pero, concluiremos, esta asemella ser unha ventá do coñecemento á que as máquinas nunca se poderán asomar. [2]

Referencias

[1] Godfrey Harol, Hardy, *Apoloxía dun matemático.*

[2] Granville, Andrew, *When Computers write Proofs, What's the Point of Mathematicians?*, Canal de Youtube: Quanta Magazine https://youtu.be/3l1RMiGeTfU?si=KxR3Cr0YZFDHD3k9 .

O problema do triángulo de Hans Heilbronn

Guillermo Arcos Salgado

Gustaríame aclarar neste primeiro artigo a intención que terá esta sección, e non é outra que a de informar sobre certas novas acerca das matemáticas (ou temas adxacentes).

Non creo tampouco que o formalismo matemático sexa algo que teña que estar presente aiquí. Pero... por que? Pois porque creo que é axeitado acceder a tal información para quen estea interesado nas cuestiós máis técnicas de certos conceptos. Polo tanto, considero que o propósito máis claro que poden ter estos artigos é o de acercar certos avances que igual se atopan en certo modo ”escondidos”, pois as matemáticas avanzan aínda que nos non nos demos conta (vouche dicir... creo que todos sabemos que a publicación de certos teoremas igual non ten a repercusión social que ten ”El Mambo” do Kiko Rivera).

Con todo, tamén se espera levantar a curiosidade sobre certos temas, e buscar o afondamento por parte do lector, fundamentalmente porque as fontes consultadas sobre as novas van ser expostas tamén nos artigos. Por iso quero animar a xente a que o faga aínda non estando acostumada (o mesmo que si saes por zona vella, algúns sitios pódenche gustar máis ou menos, pero non o sabes ata que os probas), ao igual que os que seremos os redactores destes artigos que a base de buscar tamén indagaremos sobre temas que doutro modo nunca coñeceriamos.

Comecemos entón cunha primeira nova e falemos do problema do triángulo de Hans Heilbronn. A formulación é a seguinte: supoñamos varios puntos dentro dun cadrado, e os triángulos que forman as lineas rectas que os unen. Pois ben, haberá triángulos máis grandes e máis pequenos, e o problema consiste en maximizar o triángulo máis pequeno de todos. Xa dende os inicios do problema, varios matemáticos aportaron certos avances sobre os posibles límites superiores da área dese triángulo máis pequeno, mais recentemente (concretamente o pasado maio) foron tres os matemáticos que propuxeron un novo límite: Alex Cohen, Cosmin Pohoata e Dimitrii Zakharov. Unha primeira hipótese foi a do propio Heilbronn, que pensou que a área dese triángulo non podía superar $1/n^2$ (con n o número de puntos no cadrado), pero uns matemáticos húngaros atoparon un triángulo máis pequeno, cunha área superior a esa cantidade, e ademais estableceron un límite superior de $1/n^{8/7}$. Logo de 40 anos, os tres primeiros matemáticos protagonistas, empregaron certos métodos doutros matemáticos (orientados a outros problemas pero que por suposto foron aplicables) e percatáronse de certos aspectos que, por exemplo, os matemáticos húngaros non foron conscientes (como que a mellor disposición dos puntos no cadrado para a resolución do problema non era a combinación de puntos dispersos e concentrados, senón unha opción ou a outra).

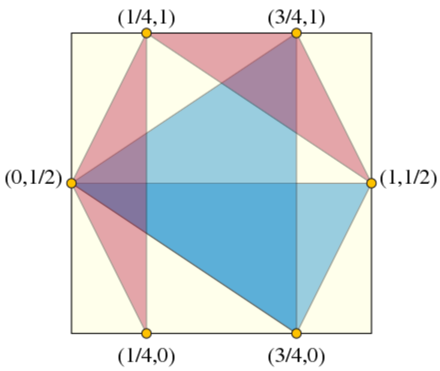


Fig. 1: Exemplo con seis puntos

Logo de pasar por temas de dimensiós e descubrir certos resultados (que podes consultar no artigo que menciono máis abaixo), atoparon, a finais de maio deste ano, que a área do triángulo máis pequeno entre n puntos nun cadrado unitario nunca pode ser maior que $1/n^{8/7+1/2000}$, un resultado que mellora de forma increible e esaxerada o expoñente dos matemáticos húngaros. Fóra bromas, aínda parecendo unha pequena mellora na cota existente, non só o resultado é importante senón tamén as conexiós realizadas con outros aspectos matemáticos supoñen un avance considerable para a resolución do problema. Un problema que ten un carácter peculiar, pois a solución non parece tan sinxela como a formulación do mesmo, pois como di o matemático Thomas Bloom da Universidade de Oxford, se se poñen os puntos moi estructurados, non se atopa a solución pero se se poñen de forma aleatoria, parece que tampouco.

Para despedirme, recordar que quen queira información máis estendida sobre o tema pode ler o artigo da revista Quanta Magazine, "The Biggest Smallest Triangle Just Got Smaller” escrito por Leila Sloman que conta con máis detalle este descubrimento.

Retos Matemáticos

Sementeira

O Principio da Invariancia

Esta técnica de resolución de problemas é moi útil nun grupo de problemas particularmente intrincados, que doutra forma sería moito máis difícil resolver. Adoita aplicarse a algoritmos, xogos ou transformacións nas que un paso se repite periodicamente.

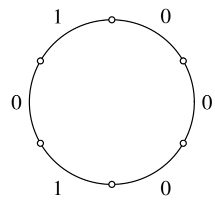
Identificar un invariante nun problema pode permitirnos diferenciar entre os distintos casos nos que nos podemos atopar, e saber se podemos pasar dun a outro.

Sobre Sementeira

A iniciativa Sementeira consiste nun seminario semanal de resolución de problemas, esencialmente de olimpíadas matemáticas. O proxecto está organizado por alumnos de grao e máster e é unha grande oportunidade para aprender entre todos e compartir ideas. Non é necesaria experiencia previa e o nivel de dificultade axustarase ao do alumnado polo que invitamos a calquera que poida estar interesado ou teña curiosidade a animarse a inscribirse no correo:

`sementeira.problemas@gmail.com`

Exemplo Un círculo divídese en 6 seccións. Entón, escríbense os números naturais $1,0,1,0,0,0$ nos 6 sectores que se formaron. Tes unha operación que se permite incrementar o valor de dous sectores contiguos en 1. É posible chegar a que tódolos números sexan iguais, só aplicando a operación anterior?



Solución Sendo a_i o valor do número na sección $i = 1,\dots,6$, chegaría con empregar o invariante: $I = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$.

En moitos casos, os invariantes son simplemente características do sistema. Como que se conserve a paridade, os restos, unha relación de orde entre dúas variables, ou mesmo a monotonía.

Exemplo Sexa $n \in \mathbb{Z}$ impar. Un alumno escribe os enteiros $1,2,\dots,2n$ na pizarra. Entón elixe dous en particular, a e b, bórraos, e escribe no seu lugar $|a-b|$ (unha única vez, non na posición de a e na de b). Probar que, ao repetir o proceso ata que só quede un número na pizarra, quedaranos un número impar.

Solución Sexa S a suma dos números escritos na pizarra. Ao principio, $S_0 = 1+2+\cdots+2n-1+2n = n(2n+1)$, é un número impar. A cada iteración ou paso i, S redúcese en $2\min(a,b)$, que é un número par. Polo tanto, a *paridade* de S é invariante. Así que, ao rematar as iteracións, S_{2n-1} tamén será impar.

Problemas Propostos de Outubro

1. Na Xunta de Facultade, cada membro ten, como moito, 3 "membros afíns". Probar que os membros da Xunta se poden separar en dous grupos, conseguindo que cada un deles teña, como moito, un "membro afín" no seu grupo.

2. Dicimos que un enteiro $n \in \mathbb{Z}^+$ é bo, se existe un conxunto de divisores de n, contendo ao 1, cuxos elementos sumen n. Probar que todo enteiro positivo ten un múltiplo que é bo.

3. Sexa $ABCD$ un cuadrilátero. Os puntos medios de AB, BC, CD e DA son P, Q, R e S respectivamente. Dado que o cuadrilátero $PQRS$ ten área 1, probar que a área do cuadrilátero $ABCD$ é 2.

4. Dado un punto de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $0 < x_0 < y_0$. Defínese a recurrencia:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \qquad y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} y_n}.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Atopar o valor (común) do límite:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = x = y.$$

Voluntariado en Mates??

Francisco Estévez Lengua, Catalina Lavandeira Gippini

Arrincamos a sección de Sociedade con Catalina, máis ven coñecida por Cata. Esta rapaza é estudante do grao en Matemáticas na nosa Facultade e durante o ano pasado decidiu facer un voluntariado en África.

-F: Cóntanos un pouco sobre o voluntariado, cales eran as túas motivacións?

-C: Desde hai un tempo participo nunha ONG e xurdiume unha oportunidade para ir a Mozambique, estaba relacionado coas Matemáticas pois, en principio a cousa ía ser recoller datos sobre a poboación de Mozambique con albinismo, pois é un conxunto vulnerable. A súa esperanza de vida é de 40 anos e como adoitan traballar na agricultura están expostos ao sol, o que implica a aparición de tumores. Isto é un problema pois a idade media de aparición do primeiro tumor ronda os 20 anos.

-F: Como que en principio? A que te adicaches?

-C: Cando cheguei alí para recoller datos vin que era imposible, non había un sistema estandarizado. Centrámonos en coordinar a actuación sanitaria, concienciar á xente e desmitificar esta condición. Ser albin@ nun país africano é motivo de exclusión social, e moitas barbaridades polos seus mitos. Tamén no noso centro fixéronse cursos, pois a maioría son analfabetos e remedialo abriríalle moitas portas. Conseguimos a axuda dunha marca de cremas solares para distribuír e ver se hai un cambio, e ver se ten correlación co retraso da aparición do cáncer.

-F: En que che axudaron as matemáticas?

-C: O pensamento matemático levoume a identificar ben as variables influíntes e actuar desde o principio.

-F: Pero por que fixeche isto?

-C: Eu primeiro son Muller, despois Científica e por último Cooperante. Sempre quixen facer do mundo un lugar mellor. Eu quería ver que se podía facer coas matemáticas, aínda que estaba ben na Facultade, necesitaba conectar con algo diferente e axudar. A verdade mereceume a pena, agora teño moitas máis motivacións para seguir estudando.

-F: E agora que?

-C: Pois dentro duns meses, coa colaboración de máis persoas, sacamos un proxecto do albinismo para participar nun premio. Pretendemos actualizar o sistema, facelo máis accesible, sen conexión e que sexa máis manexable e interpretable.

Gustaríame acabar invitandovos á charla Pornografía e Prostitución, o 24 de outubro (ás 13:00 ou ás 16:00) na nosa Aula Magna, na cal estará presenta Cata con Médicos del Mundo.

A curiosidade converxe nas Ciencias

Andrea A. Montero, Francisco E. Lengua, Rosa Mª Trinchet Soria

Temos con nós á Profª Rosa Mª Trinchet Soria, á que lle agradecemos a súa participación nesta entrevista.

Esta entrevista vén motivada para coñecer algunha nova visión de parte de xente experta, neste caso dunha profesora de área de Análise.

-E: Que te levou ás Matemáticas?

-R: Cando eu era pequena tiña curiosidade por moitas cousas, ata quería facer Ciencias e Letras porque me chamaba todo a atención. O que me atraía era o coñecemento en si mesmo. Ao final decanteime polas Matemáticas por ser o que máis me tiraba.

-E: Se che tira esta ciencia, enmarcaríaste nalgunha rama?

-R: A día de hoxe diría que a Análise, mais non me gustaría enmarcarme nunha. Refírome a que, coma os médicos de cabeceira coñecen un pouco de todo, creo que as Matemáticas non é un conxunto de caixóns estancados, de feito os maiores avances teñen tido lugar ao arrexuntar diferentes ramas e darlle unha visión máis alá. Gustaríame saber de todo, pero como ben se sabe é imposible.

-E: Poderías resaltar algún traballo que che gustara facer?

-R: Interésame crear novos espazos con determinadas propiedades, refírome a espazos metrizables, métricos, normales, pois a miña intención é estudalos para ver a súa diversidade e caracterizalos.

-E: Para que crees que serven as Matemáticas?

-R: Ben é sabido que son a linguaxe das ciencias, que serven para divertirnos e facilitarnos a vida...

Eu creo que a pregunta correcta sería: para que non serven?

-E: O teu alumnado sabe que os teus apuntes son en galego, mais adoitas explicar en castelán. A que se debe isto? É un tema de inclusión?

-R: Por unha parte si, mais tamén por outra parte práctica. Eu falo amodo, e o galego aínda máis. Explico en castelán pola miña propia rapidez. Os apuntes escríboos en galego, pois creo que para promocionalo é mellor deixalos escritos, pois ”as palabras as leva o vento”.

E=”entrevistadores” , R=”Rosa”

Propiedades Universais

Pedro Vidal Villalba

No día a día do estudante de Matemáticas, non é raro atoparse con conceptos novos, estruturas complicadas e definicións enrevesadas, ou que polo menos o son nunha primeira (e posiblemente segunda e terceira) aproximación.

Porén, tampoco é inusual detectar patróns nas construcións feitas, que se repiten constantemente aínda en áreas diferentes. O exemplo arquetípico deste fenómeno é o que me gusta denominar o ciclo *Cousa - Subcousa - Cousa cociente*, no que cada vez que se define unha nova estrutura, procédense a definir subconxuntos dela que teñan á súa vez a mesma estrutura, para acto seguido realizar o fatídico cociente entre elas e obter, de novo, un caso particular da mesma estrutura.

Son estes patróns, estas definicións análogas entre campos aparentemente inconexos as que son de interese para o matemático. É cando se observan todas no seu conxunto que as propiedades importantes de cada unha resaltan, e pode construírse unha mellor intuición sobre todas elas. Neste contexto é onde nace a teoría de categorías.

A teoría de categorías é a abstracción da abstracción, e xorde co propósito de estudar estas similitudes entre campos aparentemente inconexos, permitindo crear un marco común no que estudalos todos. De forma breve, unha categoría non é máis que unha colección de obxectos e de mapas entre eles que se compoñen ben. Exemplos de categorías son **Set**, cuxos obxectos son os conxuntos e os mapas, as aplicacións entre eles; $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$, composta polos espazos vectoriais sobre un corpo $\mathbb{K}$, na que os mapas son as aplicacións lineais; ou **Top**, composta polos espacios topolóxicos e as aplicacións continuas entre eles.

Unha das características máis destacables da teoría de categorías é que nela as demostracións rigurosas si poden facerse cun debuxo ou, máis en concreto, cun diagrama conmutativo, que non deixa de ser un debuxo de obxectos e frechas entre eles. A teoría de categorías permite tamén definir as **propiedades universais**, que son propiedades que caracterizan unha construción (salvo isomorfismo). As propiedades universais permiten un cambio de paradigma: en lugar de realizar unha construcción nova de forma concreta e estudar as súas propiedades (o que normalmente preséntase ao alumno como carente de motivación aparente), pódese partir das propiedades que queremos que teña dita construción, e despois estudar se podemos construíla e se esa construción é única —aínda que no caso das propiedades universais sempre o será, no caso de existir—.

Imos cun exemplo concreto: o coproduto na categoría dos espazos vectoriais sobre un corpo $\mathbb{K}$, chamado neste caso *suma directa*. A suma directa de espazos vectoriais é un concepto bastante familiar que se presenta na asignatura de primeiro Espazos Vectoriais como basicamente unha forma abreviada de denotar a suma de dous subespazos cuxa intersección é trivial. Pero a medida que se avanza de curso é moi normal atoparse con exercicios nos que aparecen sumas directas de espazos distintos, que non son subespazos comúns de outro, e con sumas directas de outros obxectos, como os grupos abelianos. A suma directa pódese definir en xeral, para dos espazos calesquera, mediante unha propiedade universal, que se pode trasladar a outras categorías para realizar construcións similares (de forma xenérica denomínase coproduto).

Así, dados dous espazos calquera U e W, a **suma directa** deles é outro espazo vectorial, $U \oplus W$, con dúas aplicacións lineais $\iota_U : U \to U \oplus W$, $\iota_W : W \to U \oplus W$, chamadas *inclusións canónicas*, que satisfai a seguinte propiedade universal (recollida no diagrama 1): para calquera espazo vectorial V e calquera par de aplicacións lineais $f : U \to V$, $g : W \to V$, existe unha única aplicación lineal $h : U \oplus W \to V$ tal que $f = h \circ \iota_U$ e $g = h \circ \iota_W$.

$$\begin{tikzcd}
 & V & \\
 & U \oplus W \arrow[u, dashed, "h"] & \\
U \arrow[uur, hook, "f"] \arrow[ur, hook, "\iota_U"'] & & W \arrow[uul, hook, "g"'] \arrow[ul, hook, "\iota_W"]
\end{tikzcd}$$

Fig. 1: Propiedade Universal da suma directa

Deixo como exercicio para o lector (sempre quixen facer isto) probar que, se X é un espazo vectorial e $U, W \subset X$ subespazos del tales que $U \cap W = \{0\}$, entón o espazo $U + W = \{u + w \in X \mid u \in U, w \in W\}$, coas inclusións $\iota_U : u \in U \to u \in U + W$ e $\iota_W : w \in W \to w \in U + W$, satisfai a propiedade universal 1 e, polo tanto, baixo estas hipóteses, $U + W \simeq U \oplus W$, que é como se define en primeiro.

Desta forma temos definido unha nova construción (a suma directa) sen chegar a construir o espazo de forma explícita, e realmente non importa como é este espazo, só que satisfai a propiedade universal. Nótese que non temos probado a existencia dun espazo que verifique esta propiedade para calquera par de espazos dados, nin a súa unicidade (salvo isomorfismo único) en caso de existir, e a lonxitude deste artigo non me permite facelo, así que o deixo tamén como exercicio, resaltando que para probar a existencia tendes que construír un espazo concreto, mais para demostrar a unicidade tan só fai falla utilizar a propiedade universal e o diagrama asociado e non é necesario ter antes un exemplo concreto, e isto é certo en xeral para calquera enunciado que se queira probar que involucre á suma directa.

Introdución aos sistemas caóticos

Francisco Estévez Lengua

Ao querer describir as variacións de moitos fenómenos, ao longo do tempo "t", podemos formular unhas ecuacións que o simulen. Este tipo de problemas, que requiren da súa modelización, reciben o nome de sistemas dinámicos.

O campo dos sistemas dinámicos implica o uso de ecuacións diferenciais, nos cales teremos un sistema de ecuacións con relacións entre varias variabeis independentes e as súas respectivas derivadas respecto o tempo.

Nos casos máis sinxelos habería só unha variable, que podemos ver en sucesións de recurrencia (sistemas discretos), así como os métodos de punto fixo tamén describen un sistema dinámico. Analízanse principalmente cando se estudan a sistemas de EDO's e sobre todo as características cualitativas destes sistemas. Os modelos máis sinxelos son lineais e autónomos, mais se esiximos que non sexan lineais nen autónomos vaise complicando a cousa.

Exemplo deste últimos son os sistemas que pretenden modelizar o comportamento das placas tectónicas ou da predicción do tempo.

Os sistemas pódense caracterizar segundo o seu comportamento cando o tempo e as condicións iniciais (valores que toman as variables nun tempo dado):

- Os sistemas estables. Dadas dúas solucións próximas, estas mantéñense suficientment cercas a medida que pasa o tempo.
- Os sistemas inestables. Sendo as solucións cercanas, estas afástanse, diverxendo unha doutra.
- Os sistemas caóticos. Se temos un sistema no que as solucións non son cercanas, máis mantéñense a unha distancia finita respecto dalgún atractor falamos do caos.

Os sistemas caóticos presentan un comportamento substancialmente irregular, pois dadas dúas condicións iniciais bastante cercanas, o sistema evoluciona totalmente diferente de forma. As solucións móvense ao redor dun atractor, que é como un punto (ou varios) ao cal tende a solución para $t \longrightarrow \infty$, pero evitándoa.

A continuación discútese un exemplo de bastante importancia no mundo dos sistemas caóticos.

- A ecuación loxística iterativa (discreta):

$$x_{n+1} = r \cdot x_n(1 - x_n)$$

  - $x_n \in [0,1]$ representa a proporción de individuos nun territorio sobre o número de capacidade máxima, nun instante n.
  - $r > 0$ representa a relación entre reprodución e mortandade.

Esta ecuación pretende describir o crecemento exponencial da poboación e, por outra parte, o aumento da mortalidade cando máis aumenta a poboación, debida á competencia dos individuos.

O modelo iterativo pódese estudar segundo os valores de r, pois da variable x_n, sempre están entre 0 (non hai individuos) e 1 (están os máximos posibles). O interese do estudo da constante r vén pola grande diferenza que pode haber entre dous valores diferentes. Analizando o límite da sucesión de recurrencia: chegamos a que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = \frac{1-r}{r}$$

Observamos que se $r \in [0,1]$ a poboación evolucionará ata desaparecer. Dende $r > 1$ poderíamos asumir que o límite é ise número e xa. O estudo desta ecuación xeneralízase polo estudo das sucesións $x_{n+1} = r \cdot f(x_n)$ e grazas a Feigenbaum (1978).

Ao estudar diferentes valores de r:

- Se $1 \leq r \leq 3$ a poboación x_n converxe ao suposto límite.
- Dende $r > 3$ prodúcese unha "bifurcación", a medida que r aumenta, x_n comezará a oscilar entre 2 valores, despois entre 4, despois entre 8 ...
- Ata chegar a $r = 4$, pois se $r > 4$ os valores da poboación diverxen para case todos os valores iniciais.

Esta información resúmese nun "diagrama de bifurcación". Neste amósanse os valores de r nas ordenadas e nas abscisas o valor de x_n cando tende a infinito.

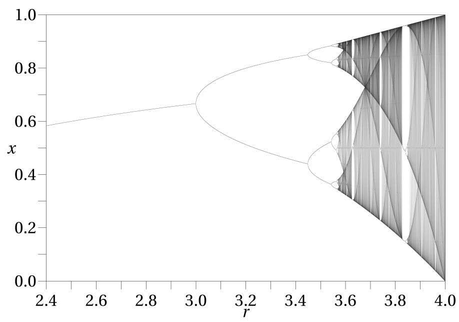


Fig. 1: Diagrama de bifurcación para r entre 2.4 e 4

Dirección e Produción
Francisco Estévez Lengua

Sección Historia
Santiago González Gómez
Ignacio Garbayo Fernández

Sección Actualidade
Carlos Cao López
Guillermos Arcos Salgado

Sección Sociedade
Andrea Abad Montero
Francisco Estévez Lengua

Sección Teoría
Pedro Vidal Villalba
Francisco Estévez Lengua

Sección Retos
Sementeira

MÁIS MATES

AGRADECEMENTOS

Ás entrevistadas: Profª Rosa María Trinchet Soria e a Dona Catalina Lavandeira Gippini.

Á Facultade de Matemáticas pola acollida e pola difusión.

Ás e aos lectores desta revista.

Á xente da miña contorna, que me axudou, con ilusión, a levar a cabo esta inicitiva.

Revista Máis Mates
Número 1
Outubro de 2023