FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Las funciones generatrices en el cálculo de índices de poder

Carlos Gómez Fueyo

Febrero, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Las funciones generatrices en el cálculo de índices de poder

Carlos Gómez Fueyo

Febrero, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento:	Estadística e Investigación Operativa
Título:	Las funciones generatrices en el cálculo de índices de poder

Breve descripción del contenido

Desde el punto de vista de la teoría de juegos, son varios los índices de poder a considerar, como el índice de Shapley-Shubik y el índice de Banzhaf. En este documento se estudiarán diferentes tipos de índices. La principal dificultad en el cálculo de índices de poder es computacional. Las funciones generatrices se presentan como mecanismos para facilitar su cálculo. Tales funciones se basarán en técnicas del análisis combinatorio. En este trabajo se revisarán los métodos de las funciones generatrices para los índices presentados, tanto desde el punto de vista teórico como aplicado. Teniendo en cuenta la posibilidad de que los votantes puedan aliarse, tiene lugar una nueva casuística. Se presentarán dos de los índices más trabajados en este contexto, el índice de Owen y el de Banzhaf-Owen; y ante el coste computacional, se utilizarán nuevas funciones generatrices para su cálculo.

Índice

Resumen

Dentro del campo de la teoría de juegos, los juegos de mayoría ponderada desempeñan un papel fundamental en el análisis de votaciones en parlamentos y comités. En este trabajo, se presenta esta clase de juegos, centrándose en el estudio de los índices de poder. Este es un concepto de solución que asigna una medida de influencia o poder a los jugadores en el proceso de votación. Entre los índices de poder existentes en la literatura, se estudiarán Shapley-Shubik, Banzhaf, Johnston, Colomer-Martínez y Johnston-Colomer-Martínez. Se analizarán las propiedades que cumplen y se ilustrarán con ejemplos prácticos.

Con el objetivo de facilitar el cómputo de estos índices, se desarrollarán métodos basados en funciones generatrices, herramientas del análisis combinatorio que permiten obtener, mediante polinomios, los elementos necesarios para su cálculo. Además, se modelará una nueva situación al considerar que los jugadores implicados pueden aliarse formando agrupaciones, dando lugar a los denominados juegos con estructura coalicional. Para este tipo de juegos, se introducirán dos nuevos índices de poder: los índices de Owen y Banzhaf-Owen, junto con métodos para su cálculo basados también en funciones generatrices.

Finalmente, se aplicarán estos conceptos en un caso práctico: el análisis del Parlamento español. Se estudiarán los cambios en la distribución de poder de los partidos políticos entre las elecciones generales de noviembre de 2019 y julio de 2023, así como las consecuencias de los movimientos de diputados entre grupos parlamentarios a lo largo de la XV Legislatura. Para llevar a cabo estos cálculos, se utilizará la librería *powerindexR* en el software estadístico R.

Abstract

Within the field of game theory, weighted majority games play a fundamental role in the analysis of voting processes in parliaments and committees. This work introduces this class of games, focusing on the study of power indices, a solution concept that assigns a measure of influence or power to the players involved in the voting process. Among the power indices available in the literature, we will consider five: Shapley-Shubik, Banzhaf, Johnston, Colomer-

Martínez, and Johnston-Colomer-Martínez. Their mathematical properties will be examined, practical applications will be provided, and their computational cost will be assessed.

To facilitate the computation of these five indices, we will develop methods based on generating functions, which are combinatorial tools that allow us to derive, through polynomials, the necessary components for their calculation. Furthermore, we will model a new scenario in which players can form alliances, leading to what are known as games with coalition structure. For these games, we will introduce two additional power indices: Owen and Banzhaf-Owen, along with computation methods based on generating functions.

Finally, these concepts will be applied to a practical case: the analysis of the Spanish Parliament. We will examine changes in the distribution of power among political parties between the general elections held in November 2019 and July 2023, as well as the consequences of members of parliament switching between parliamentary groups during the XV Legislature. The *powerindexR* library within the statistical software R will be used to compute the power indices in these scenarios.

Prefacio

A lo largo de la historia, gran parte de las decisiones que nos afectan en nuestra vida cotidiana han sido y son tomadas por grupos de individuos que controlaban el poder dentro de una comunidad. Sin embargo, con el paso del tiempo, comenzó a expandirse el uso de un sistema más justo, las votaciones, permitiendo que la opinión de cada vez más personas tuviese relevancia en el funcionamiento de la comunidad. Generalmente, en un sistema de votación, la decisión se toma en función a lo que prefiera la mayoría, ya sea por mayoría simple (la opción con más votos) o por mayoría absoluta (cuando se alcanza al menos la mitad de votos más uno).

El uso de las votaciones y el aumento de la participación ciudadana sentó las bases para el surgimiento en el siglo XIX del concepto de sufragio en los Estados. Este otorga el derecho al voto en la elección de cargos públicos que representan a los votantes. En un inicio, este derecho era limitado; sin embargo, con el paso del tiempo y gracias a diversas revoluciones y movimientos sociales, se logró en gran parte del mundo el derecho a voto para cualquier persona ciudadana del Estado. Es lo que habitualmente se conoce como sufragio universal.

El derecho al voto de la ciudadanía es el pilar fundamental de la democracia, un sistema de organización política y social de un Estado en el que las decisiones colectivas son adoptadas por el pueblo mediante diversas herramientas de participación. Según el grado de implicación de los ciudadanos, se distinguen dos tipos principales de democracias: la directa, la población interviene directamente en la toma de decisiones políticas; y la indirecta o representativa, los ciudadanos eligen a representantes que toman decisiones en su nombre.

En este documento nos centraremos en el sistema político español. España es un estado democrático cuya forma política es una monarquía parlamentaria. Su sistema de Gobierno se fundamenta en la soberanía nacional, la división de poderes (legislativo, ejecutivo y judicial) y un sistema parlamentario. El órgano encargado de ejercer el Poder Legislativo en España es el Parlamento, denominado Cortes Generales, que consta de dos cámaras: la alta (Senado) y la baja (Congreso de los Diputados). Sus principales funciones son la elaboración y aprobación de leyes, la elección del Presidente del Gobierno y la supervisión del Poder Ejecutivo. El Poder Ejecutivo recae en el Presidente del Gobierno y los ministros responsables de las diferentes áreas de gestión.

Sus funciones principales son ejecutar leyes, dirigir la política interior y exterior y coordinar la administración pública. Por último, el Poder Judicial es ejercido por jueces y tribunales, bajo la supervisión administrativa del Consejo General del Poder Judicial. Su función es interpretar y aplicar las leyes, así como garantizar justicia. Analizando esta distribución de poderes, el núcleo político del Estado reside en las Cortes Generales, donde se aprueban las leyes que rigen el país, se elige al candidato al Presidente del Gobierno que las aplicará y que tanto jueces como tribunales juzgarán su debido cumplimiento.

Figura 1. Congreso de los Diputados, Madrid, España. Imagen extraída de Flickr, Joan Brebo.

Dado que la democracia española es representativa, los ciudadanos participan en los asuntos públicos a través de representantes que integran las dos cámaras de las Cortes Generales: el Senado y el Congreso de los Diputados. Estos representantes, habitualmente, se agrupan en partidos políticos, que se distinguen por seguir una ideología propia y defender ciertos valores. Su elección se realiza mediante sufragio universal, libre, igual, directo y secreto, con un mandato de 4 años. Así, cada 4 años, como máximo (o antes, en caso de disolución anticipada de las cámaras), los españoles mayores de edad tienen el derecho a votar en unas elecciones generales al grupo político que mejor se ajuste a sus ideales y visión del Estado. Tras las elecciones, para la formación del Gobierno, se asignan los escaños a las listas electorales en cada circunscripción electoral (en España hay 50 provincias y dos ciudades autónomas, Ceuta y Melilla) mediante el sistema de reparto de escaños de D'Hont. El Congreso de los Diputados cuenta con un total de 350 escaños a repartir, garantizando que cada provincia tenga al menos 2 y las ciudades autónomas 1, mientras que el resto se distribuyen según la población de cada circunscripción. Será el Rey quien proponga al candidato a Presidente del Gobierno, normalmente, siguiendo la propuesta de la Presidencia del Congreso tras negociaciones previas y que suele corresponderse con el más votado. En una sesión específica, el candidato propone su programa y se somete a votación en el Congreso de los Diputados. Si la candidatura obtiene mayoría absoluta (176 votos), este será nombrado por el Rey como Presidente del Gobierno. Si no, se realizará una segunda votación 48 horas después, donde basta con mayoría simple (más síes que noes). Una vez investido, el Presidente conforma su equipo ejecutivo con los ministros y ministras que lo acompañarán durante los siguientes 4 años.

En España, desde las primeras elecciones generales en 1977 hasta las elecciones de diciembre de 2015, predominó el bipartidismo y la alternancia entre el PP y el PSOE como ganadores de las elecciones y en la configuración del Congreso de los Diputados. Sin embargo, en 2015 surgieron nuevas fuerzas políticas como Podemos y Ciudadanos, que pusieron fin al bipartidismo, diversificando el panorama político y complicando la formación de gobiernos. Este gran cambio derivó en un total de cuatro elecciones generales en un período de ocho años.

Tras las elecciones de 2015, se produjeron dos investiduras fallidas. Ni Mariano Rajoy (PP) ni Pedro Sánchez (PSOE) lograron los apoyos necesarios, lo que llevó a unas nuevas elecciones en junio de 2016, donde Mariano Rajoy (PP) consiguió formar gobierno. En 2018, Pedro Sánchez (PSOE) presentó una moción de censura contra Mariano Rajoy (PP), que prosperó y le permitió convertirse en Presidente del Gobierno sin convocar elecciones inmediatas. Estas tuvieron lugar en abril de 2019, pero nuevamente ningún candidato logró una mayoría suficiente, lo que obligó a convocar elecciones en noviembre de ese mismo año. Entonces, Pedro Sánchez (PSOE) formó el primer gobierno de coalición en democracia al aliarse con Unidas Podemos y otras fuerzas. En 2023, tras unos malos resultados en las elecciones municipales y autonómicas, Pedro Sánchez (PSOE) convocó elecciones anticipadas (julio, 2023) en las que el PSOE se mantuvo en el poder al negociar pactos con otras formaciones políticas. La Figura 2, muestra la composición del Parlamento resultante de dichas elecciones generales y los cambios en el Congreso de los Diputados durante el año 2024.

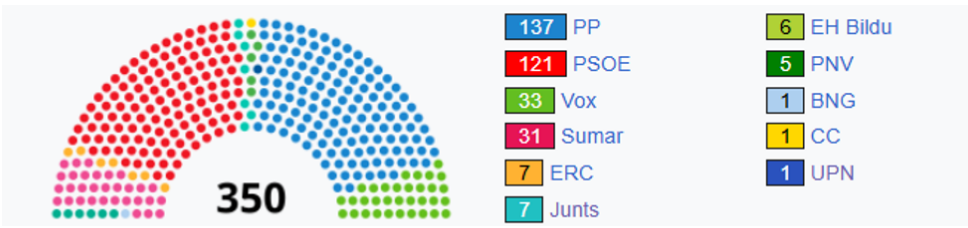

Figura 2. Distribución de escaños del Congreso de los Diputados tras las elecciones generales de julio de 2023. Imagen extraída de Wikipedia.

El Partido Popular (PP) fue el partido con más escaños (137). Siguiendo el procedimiento habitual, el Rey de España, Felipe VI, propuso a Alberto Núñez Feijóo como candidato a la Presidencia del Gobierno al liderar el grupo político con mayor representación en el Parlamento. Sin embargo, su investidura no prosperó, ya que no logró el apoyo suficiente en el Congreso de los Diputados para formar gobierno. En ambas votaciones, recibió los votos de VOX, Coalición Canaria (CC) y Unión del Pueblo Navarro (UPN), pero estos sumaban 172 escaños y fueron insuficientes para alcanzar, primero, la mayoría absoluta (176 votos) y, posteriormente, la mayoría simple. Entonces, el Rey propuso a Pedro Sánchez, líder del PSOE, como nuevo candidato a la Presidencia al ser el segundo partido con más escaños. Sánchez consiguió la investidura mediante mayoría absoluta de 179 votos gracias al apoyo de Sumar, Esquerra Republicana de Catalunya (ERC), Junts, Euskal Herria Bildu (Bildu), Partido Nacionalista Vasco (PNV), Bloque Nacionalista Galego (BNG) y Coalición Canaria (CC). Esto le permitió conservar su puesto como Presidente del Gobierno y formar el nuevo y actual Gobierno. La Figura 3 muestra el reparto de escaños en los dos intentos de investidura.

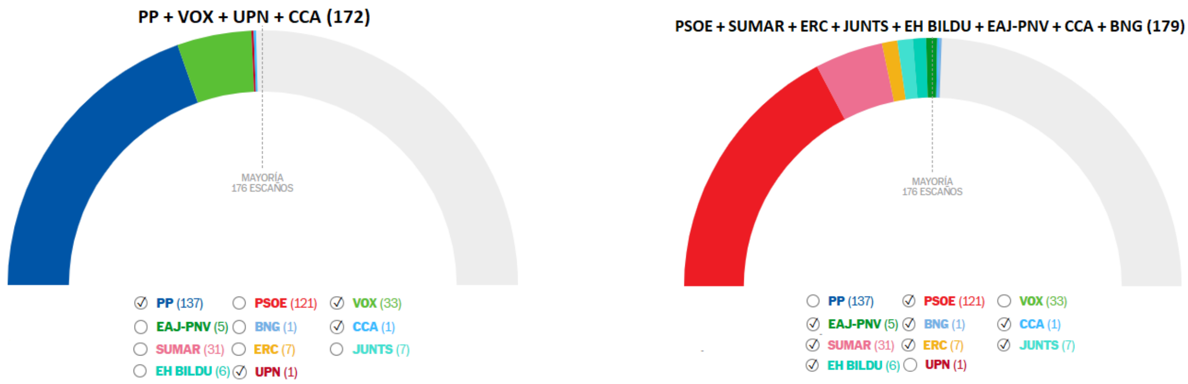

Figura 3. Distribución de escaños en las investiduras de Alberto Núñez Feijóo (izquierda) y Pedro Sánchez (derecha). Imagen extraída de Calculadora de pactos, El País.

A lo largo de la presente legislatura, diferentes sucesos en el ámbito político han derivado en cambios en el número de escaños de algunos grupos parlamentarios. El Grupo Mixto es un grupo parlamentario formado por todos los diputados que no cumplen los requisitos esenciales para formar un grupo parlamentario propio. Tras las elecciones, contaba con 3 diputados correspondientes al BNG, CCa y UPN. Sin embargo, en la actualidad cuenta con 8 diputados: 4 procedentes de Podemos, tras escindirse del grupo Sumar, y 1 del PSOE. Este último pasa a contar con 120 escaños, mientras que Sumar queda con 27.

Tras la fragmentación del panorama político español, el marco político se encuentra más dividido, dificultando alcanzar mayorías parlamentarias. Esto resalta la importancia de analizar con mayor detenimiento el Congreso de los Diputados e identificar qué grupos parlamentarios tienen mayor influencia y, que por lo tanto serán más determinantes en el futuro político del país. Para ello, aplicaremos herramientas matemáticas, propias de la teoría de juegos. Concretamente, consideramos su análisis mediante el empleo de los índices de poder en juegos de mayoría ponderada, que permiten estudiar sistemas de votación y evaluar la capacidad de influencia de los miembros para influir en las decisiones colectivas. Este enfoque es especialmente útil para analizar parlamentos donde las coaliciones pueden estar sujetas a cambios según afinidades ideológicas y políticas. Así, podremos arrojar un poco de luz sobre el panorama político español.

Capítulo 1

Juegos de mayoría ponderada y soluciones

Los juegos de mayoría ponderada son un tipo de juegos muy utilizados para el estudio y modelado de sistemas de votación. Para realizar un análisis de tales sistemas, es preciso conocer la máxima información posible acerca de las posibilidades de influencia de cada jugador. Gracias a los denominados índices de poder, podremos conocer la importancia de cada uno de los jugadores. Cada índice tendrá en cuenta diversos criterios para obtener tal medida y la conveniencia del uso entre unos u otros vendrá determinada por el contexto particular de cada sistema de votación.

En este capítulo introduciremos en la Sección 1.1 los juegos simples y, en concreto, los de mayoría ponderada, además de sus características, soluciones y propiedades. En la Sección 1.2, introduciremos 5 tipos de medidas de la influencia de los jugadores dentro de este tipo de juegos, los índices de poder, y sus características. Por último, en la Sección 1.3 nos cuestionaremos la complejidad en el cálculo de estos índices en función del conjunto de jugadores y veremos que el cálculo para un gran número de jugadores será complejo computacionalmente.

1.1. Los juegos de mayoría ponderada

Siguiendo González-Díaz et al. (2010), la teoría de juegos es una rama de las matemáticas que trata problemas de decisión interactivos, en los que un grupo de jugadores sigue una estrategia tratando de obtener el mayor beneficio posible. Dentro de esta rama se encuentran muchos modelos de situaciones, en concreto para este documento, nos interesan los modelos cooperativos simples con utilidad transferible, en los que los jugadores pueden formar coaliciones con el fin de obtener un beneficio mayor que el que pueden alcanzar por sí mismos.

Definición 1.1. Se denomina **juego de utilidad transferible (TU)** al par (N, v) donde N es el conjunto finito de jugadores y $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ la función característica del juego de tal manera que $v(\emptyset) = 0$. Denotaremos $G(N)$ como el conjunto de juegos TU con $|N| = n$ jugadores. Entenderemos una coalición, $S \subseteq N$ como un subconjunto de $|S| = s$ jugadores.

La función característica nos permite conocer la utilidad total, $v(S)$ (en términos de coste o bien de beneficios) de cada una de las coaliciones posibles, $S \subseteq N$ dentro de un juego con n jugadores. Uno de los objetivos fundamentales de estos juegos es el reparto de la utilidad entre todos los agentes de N que cooperan, para ello se utilizan, entre otros, los conceptos de solución para juegos TU. Uno de ellos es el denominado valor, este asigna a cada jugador el beneficio/coste que obtiene según su contribución al juego. La definición formal es la siguiente.

Definición 1.2. Denominamos **valor** de un juego TU como una función $f : (N, v) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que asigna a cada jugador de una coalición un pago basado en su contribución y en la cooperación entre jugadores en el juego.

Introducimos ahora siguiendo Alonso-Meijide (2002), para juegos con utilidad transferible, dos de los valores más utilizados entre los existentes en la literatura: el valor de Shapley (Shapley, 1953) y el valor de Banzhaf (Owen, 1975).

Definición 1.3. Sea $(N, v) \in G(N)$ un juego con utilidad transferible TU, se definen para tal juego el siguiente par de valores.

- **Valor de Shapley.** Se trata de un valor $\Phi : (N, v) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de la forma

$$\Phi_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|N| - |S| - 1)!}{|N|!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)). \tag{1.1}$$

- **Valor de Banzhaf.** Se trata de un valor $\beta : (N, v) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de la forma

$$\beta_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{n-1}}(v(S \cup \{i\}) - v(S)). \tag{1.2}$$

Ambos valores asignan a cada jugador una suma ponderada de las contribuciones marginales que dicho jugador hace a todas las coaliciones a las que se une. La diferencia reside en que, para el valor de Shapley los pesos asignados a cada coalición dependen de su tamaño, mientras que en el valor de Banzhaf la formación de todas las coaliciones es equiprobable.

A continuación, definiremos la clase de juegos en la que se basará este documento, los juegos simples, en los que la función característica únicamente indicará si una coalición es perdedora,tomando el valor 0 o ganadora, con el valor 1. La definición formal es la siguiente.

Definición 1.4. Dado $(N, v) \in G(N)$ se denomina **juego simple** si su función característica es de la forma $v : 2^N \longrightarrow \{0, 1\}$, es no decreciente, es decir, $v(S) \subseteq v(T)$ siempre que $S \subseteq T \subseteq N$ y verifica que $v(N) = 1$. Denotamos $S(N) \subset G(N)$ como el conjunto de juegos simples con N jugadores.

Presentamos ahora, un ejemplo de un juego con utilidad transferible (TU), para el que calcularemos los valores de Shapley y Banzhaf vistos en la Definición 1.3 y que comprobaremos que, gracias a su función característica, se puede pensar como un juego simple.

Ejemplo 1.5. *Supongamos un parlamento formado por 4 grupos, a los que denominaremos grupo A,B,C y D, cada uno está formado por* 6*,* 5*,* 3 *y* 2 *miembros, respectivamente. En este parlamento, las decisiones se toman mediante un sistema de votación con mayoría absoluta, por ello, para que una propuesta sea aprobada debe obtener votos favorables de la mitad más uno de los miembros del parlamento, esto es un total de* 9 *votos. Los miembros de cada grupo parlamentario comparten la misma ideología, por lo que sus votos coinciden; además, los grupos parlamentarios pueden aliarse formando coaliciones, logrando así más fuerza en la votación de una propuesta. De esta forma, cualquier coalición que alcance o supere los* 9 *miembros tendrá el poder de aprobar o descartar cualquier propuesta.*

Podemos modelar este parlamento como un juego de utilidad transferible (TU) en el que los jugadores serán los grupos parlamentarios que tratan de repartirse el poder. Formalmente, estamos ante un juego (N, v) *en el que,* $N = \{A, B, C, D\}$ *representa el conjunto de jugadores y* v *la función característica que, a cada una de las* $|2^4| = 16$ *posibles coaliciones, les asocia el valor* 1 *en caso de igualar o superar los* 9 *miembros, de lo contrario, el* 0*. A continuación, enunciamos las* $2^4 = 16$ *posibles coaliciones junto con su número de miembros utilizando la siguiente notación* [1]*:* $AC(9)$ *denota la coalición* $S = \{A, C\}$ *con* $|A| + |C| = 9$ *miembros, en caso de que la utilidad de la coalición sea* $v(S) = 1$ *escribiremos el número de color verde, de lo contrario en rojo. Para este juego tenemos que*

$$N = \{\emptyset(0), A(6), B(5), C(3), D(2), AB(11), AC(9), AD(8), BC(8), BD(7), CD(5), \\ ABC(14), ABD(13), ACD(11), BCD(10), ABCD(16)\}.$$

Calculemos ahora los valores de Shapley y Banzhaf para este juego TU. Lo haremos para el jugador C*, para el resto de jugadores será análogo. Debemos obtener, primeramente, aquellas coaliciones del juego en las que no esté el jugador* C *y calcular sus contribuciones marginales a tales coaliciones, los términos* $(v(S \cup \{C\}) - v(S))$*. Al calcularlos, obtenemos que serán nulos todos aquellos términos cuya coalición asociada tenga la misma utilidad total independientemente del jugador* C*. Dicho de otra forma, únicamente se conservan y tienen valor igual a* 1 *aquellos*

[1] Usaremos esta notación en todos los ejemplos de este documento.

términos que tienen asociadas coaliciones con menos de 9 *miembros y que, al incorporarse tal jugador, alcanzan o superan los* 9 *miembros. Estas coaliciones son:* $A(6), AD(8), BD(7)$. *Aplicando las Fórmulas* (1.1) *y* (1.2) *obtenemos, respectivamente, los asignaciones resultado de aplicar el valor de Shapley,* $\Phi_C(N,v)$*, y de Banzhaf,* $\beta_C(N,v)$*, del jugador* C *en este juego* TU*.*

$$\Phi_C(N,v) = \frac{1!(4-1-1)!}{4!} + \frac{2!(4-2-1)!}{4!} + \frac{2!(4-2-1)!}{4!} = \frac{1}{4}.$$
$$\beta_C(N,v) = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{3}{8}.$$

De forma análoga, podemos calcular los valores de Shapley y Banzhaf para los demás jugadores y así obtener los siguientes vectores:

$$\Phi(N,v) = \left(\frac{5}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}, \frac{1}{12}\right), \qquad \beta(N,v) = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right).$$

Ambos valores otorgan el mayor poder al jugador $A \in N$*, lo cual tiene sentido, ya que es el grupo que tiene más miembros y que mayor número de coaliciones convierte en ganadoras, por ello, es el jugador más determinante. Por otro lado, los grupos parlamentarios* $B, C \in N$ *tienen el mismo valor, esto es debido a que, a pesar de tener distintos miembros, pueden convertir en ganadoras al mismo número de coaliciones. Por último, el jugador* $D \in N$ *es el jugador con menor valor en el juego, esto es debido a que solo puede ser determinante en una única coalición.*

Por último, veamos que se trata de un juego simple. La función característica únicamente toma los valores 0 *y* 1 *para cualquiera de las posibles coaliciones, además, es no decreciente, dado que la utilidad de cualquier coalición es igual a la suma de las utilidades de los jugadores que lo forman. Por último, es trivial comprobar que el conjunto de jugadores, pensado como una única coalición, verifica que* $v(N) = 1$*, ya que esta coalición tiene* 16 *miembros totales. Podemos afirmar entonces que* $(N,v) \in S(N)$*.*

Presentamos ahora una serie de definiciones relativas a los juegos simples, estas serán esenciales para los temas que trataremos más adelante en este documento. Sea $(N,v) \in S(N)$ un juego simple, definimos sobre este los siguientes conceptos.

- **Jugador nulo.** El jugador $i \in N$ se dice nulo si $\forall S \subset N$, $v(S \cup \{i\}) = v(S)$. Un jugador nulo es aquel cuya aportación al valor de cualquiera coalición es nula.
- **Jugadores simétricos.** Los jugadores $i, j \in N$ se dicen simétricos si $\forall S \subset N \setminus \{i,j\}$ se tiene que $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$. Dos o más jugadores que sean simétricos realizan la misma aportación al valor de cualquier coalición.
- **Coalición ganadora.** Una coalición $S \subset N$ es ganadora si $v(S) = 1$. El conjunto de coaliciones ganadoras de un juego se denota por $W(N) = \{S \subset N \;/\; v(S) = 1\}$. En algunas

ocasiones, con el fin de concretar el juego al que nos referimos, se denotará por $W(v)$. Sea $i \in N$, el conjunto de coaliciones ganadoras a las que pertenece el jugador i es el conjunto $W_i(N) = \{S \in W(N) / i \in S\}$.

- **Coalición perdedora.** Una coalición $S \subset N$ es perdedora si $v(S) = 0$.

- **Jugador crítico.** Dada una coalición ganadora, $S \subset W(N)$, llamaremos jugador crítico a cualquier jugador $i \in N$ de forma que $v(S \setminus \{i\}) = 0$. El conjunto de jugadores críticos de una coalición se denota por $C(S)$. Un jugador será crítico para una determinada coalición si su ausencia hace que la coalición se vuelva perdedora.

- **Coalición minimal ganadora.** Una coalición $S \in W(N)$ es minimal ganadora si no contiene ninguna otra coalición ganadora. El conjunto de todas estas coaliciones se denota por $W^m(N) = \{S \subset W(N) \ / \ v(T) = 0, \forall \, T \subsetneq S\}$. El conjunto de todas estas coaliciones en las que está un determinado jugador $i \in N$ se denota por W_i^m. Una coalición será minimal si la falta de cualquier jugador la hace perdedora, es decir, todos sus jugadores son críticos.

- **Coaliciones ganadoras cuasi-minimales.** Una coalición $S \in W(N)$ es ganadora cuasi-minimal si existe al menos un jugador crítico. El conjunto de estas coaliciones se denota como $Q(N) = \{S \in W(N)/C(S) \neq \emptyset\}$. Para un determinado jugador $i \in N$, $Q_i(N)$ será el conjunto coaliciones en las que el jugador es crítico.

- **Swings de un jugador.** Sea $i \in N$, un *swing* para un jugador es una coalición que se vuelve ganadora al incorporarse este jugador. Definimos el conjunto de *swings* de dicho jugador como $\eta_i(v) = \{S \subset N \setminus \{i\} \ / \ v(S) = 0, \ v(S \cup \{i\}) = 1\}$. El número total de *swings* del juego viene dado por $\eta(v) = \sum_{i=1}^{n} |\eta_i(v)|$.

Analicemos estos conceptos para un ejemplo en concreto.

Ejemplo 1.6. *Recuperemos el juego del Ejemplo 1.5. Este juego no tiene ningún jugador nulo, todos ellos pueden hacer que al menos una coalición pase a ser ganadora. Los jugadores* B *y* C *son jugadores simétricos, actúan de igual manera al incorporarse en las coaliciones* $2^{N \setminus \{B,C\}} = \{\emptyset(0), A(6), D(2), AD(8)\}$*, convirtiendo en ganadoras a las coaliciones* $A(6)$ *y* $AD(8)$ *y manteniendo perdedoras a las coaliciones* $\emptyset(0)$ *y* $D(2)$*. El conjunto* $W(N)$ *se obtiene seleccionando de entre las posibles vistas en el Ejemplo 1.5, aquellas cuya utilidad sea mayor o igual a 9, este conjunto es:* $W(N) = \{AB(11), AC(9), ABC(14), ABD(13), ACD(11), BCD(10), ABCD(16)\}$*, y* $|W(N)| = 7$*. De esta forma, todas las coaliciones restantes serán perdedoras.*

Estudiemos ahora cuáles son las coaliciones ganadoras minimales del juego. Para ello, debemos seleccionar aquellas ganadoras en las que todos sus jugadores sean críticos, es decir, las que no pueden prescindir de ningún jugador para resultar ganadoras. Por ello, primeramente estudiaremos los jugadores críticos de las coaliciones ganadoras. A modo de ejemplo, para la coalición

$ACD(11) \in W(N)$ el jugador D es el único prescindible ya que $AC(9) \in W(N)$, por ello no es un jugador crítico para esta coalición, su conjunto de jugadores críticos será $C(ACD) = \{A, C\}$, por ello, no se trata de una coalición minimal. Análogamente, obtenemos marcados en rojo [2] los jugadores críticos de todas las coaliciones ganadoras.

$$C = \{AB(11), AC(9), ABC(14), ABD(13), ACD(11), BCD(10), ABCD(16)\}. \tag{1.3}$$

Seleccionando aquellas en las que todos los jugadores son críticos, obtenemos el siguiente conjunto: $W^m(N) = \{AB(11), AC(9), BCD(10)\}$, y, por lo tanto, $|W^m(N)| = 3$.

Veamos ahora cuáles son las coaliciones ganadoras cuasi-minimales. Para ello, debemos escoger aquellas ganadoras que cuentan con algún jugador crítico. Analizando el estudio de jugadores críticos de las coaliciones ganadoras del conjunto que detalla la Expresión (1.3) vemos rápidamente que la única coalición que no tiene estos jugadores es la coalición formada por todos los jugadores, $ABCD(16)$. De esta forma obtenemos el siguiente conjunto de coaliciones $Q(N) = \{AB(11), AC(9), ABC(14), ABD(13), ACD(11), BCD(10))\}$ y $|Q(N)| = 6$.

Por último, obtenemos los conjuntos de swings de los jugadores escogiendo las coaliciones que cada jugador puede convertir en ganadoras al incorporarse. Para ello tomaremos un jugador, por ejemplo $B \in N$, y el conjunto de coaliciones perdedoras a las que no pertenece. Para este caso tendremos el siguiente conjunto: $P_B = \{A(6), C(3), D(2), AD(8), CD(5)\}$.

Obtendremos el conjunto de swings escogiendo aquellas que resulten ganadoras tras añadir al jugador. De esta forma el conjunto de swings de B será $\eta_B(v) = \{A(6), AD(8), CD(5)\}$. Razonando de igual manera obtenemos los siguientes conjuntos de swings de todos los jugadores.

$$\begin{aligned}
\eta_A(v) &= \{B(5), C(3), BC(8), BD(7), CD(5)\}, \ |\eta_A(v)| = 5;\\
\eta_B(v) &= \{A(6), AD(8), CD(5)\}, \ |\eta_B(v)| = 3;\\
\eta_C(v) &= \{A(6), AD(8), BD(7)\}, \ |\eta_C(v)| = 3;\\
\eta_D(v) &= \{BC(8)\}, \ |\eta_D(v)| = 1;\\
\eta(v) &= |\eta_A(v)| + |\eta_B(v)| + |\eta_C(v)| + |\eta_D(v)| = 5 + 3 + 3 + 1 = 12.
\end{aligned}$$

Para la clase de juegos simples, las definiciones de valor de Shapley y Banzhaf vistas en la Definición 1.3, son equivalentes utilizando el concepto de *swings*. Esta reformulación resulta equivalente ya que las contribuciones marginales del jugador a las coaliciones $S \subseteq N \setminus \{i\}$, $(v(S \cup \{i\}) - v(S))$, toman valor no nulo, en concreto el valor 1, únicamente si tal coalición es un *swing* para el jugador $i \in N$.

[2] Esta notación para los jugadores críticos será utilizada a lo largo del documento.

En la clase de juegos simples, nos interesarán los juegos de mayoría ponderada. Este tipo de juegos resultan muy útiles para el modelado de sistemas de votación y toma de decisiones dentro de, por ejemplo, los parlamentos. La definición formal es la siguiente.

Definición 1.7. Dado un juego simple, $(N, v) \in S(N)$ decimos que es un **juego de mayoría ponderada**, denotado como $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$, si existe un conjunto de pesos $w_1, w_2, ..., w_n$ para los n jugadores con $w_i \geq 0$ y $1 \leq i \leq n$ y una cantidad $q \in \Re^+$ que se denomina mayoría del juego, de tal forma que $S \in W(N) \Leftrightarrow \sum_{i \in S} w_i \geq q$. Este tipo de juegos se denotan por $[q; w]$ con $w \in \mathbb{R}^n$. El conjunto de todos los juegos de mayoría ponderada con N jugadores será $SW(N)$.

Adaptemos seguidamente la situación vista en el Ejemplo 1.5 de forma que esté modelada como un juego de mayoría ponderada.

Ejemplo 1.8. *Recuperando la situación del Ejemplo 1.5, en este parlamento tenemos* 4 *grupos parlamentarios, representados por el conjunto* $N = \{A, B, C, D\}$. *Dotando a los jugadores de los siguientes pesos:* $w(A) = 6$, $w(B) = 5$, $w(C) = 3$, $w(D) = 2$, *y considerando la cuota como la mayoría absoluta necesaria para aprobar una propuesta, esta es, la mitad del peso del conjunto de jugadores más uno, es decir* $q = \frac{w(N)}{2} + 1 = 9$, *podemos modelar la situación como un juego de mayoría ponderada sobre el conjunto de jugadores* N, $[q; w] \in SW(N)$. *Denotamos el juego como sigue como* $[q; w] = [9; 6, 5, 3, 2]$.

De acuerdo con Armijos-Toro et al. (2024a), representamos ahora tres conceptos relativos a posibles relación entre diversos juegos simples, que serán relevantes más adelante en este documento. El primero, el juego unión, define la idea de unir juegos simples con el mismo conjunto de jugadores al considerar ganadoras todas aquellas coaliciones que son ganadoras en alguno de los juegos a unir.

Definición 1.9. Sean $(N, v), (N, v') \in S(N)$ se denomina **juego unión** al juego $(N, v \vee v') \in S(N)$ de forma que $\forall S \subseteq N / S \in W(v \vee v')$ se tiene que o bien $S \in W(v)$ o bien $S \in W(v')$.

Por otra parte, el concepto de juego intersección interseca juegos simples con el mismo conjunto de jugadores al considerar ganadoras únicamente las coaliciones que lo son en todos los juegos involucrados.

Definición 1.10. Sean $(N, v), (N, v') \in S(N)$ se llama **juego intersección** al juego $(N, v \wedge v') \in S(N)$ de forma que $\forall S \subseteq N / S \in W(v \wedge v')$ se tiene que $S \in W(v)$ y $S \in W(v')$.

Por último, se caracterizan aquellos juegos que pueden fusionarse como aquellos que no tienen coaliciones minimales ganadoras en común.

Definición 1.11. Dos juegos $(N, v), (N, v') \in S(N)$ se dicen **juegos fusionables** si para todo par de coaliciones $S, T \subseteq N$ tales que $S \in W^m(v)$ y $T \in W^m(v')$ se verifica que $S \nsubseteq T$ y $T \nsubseteq S$. De esta forma, se verifica que $W^m(v) \cap W^m(v') = \emptyset$ y $W^m(v \vee v') = W^m(v) \cup W^m(v')$.

1.2. Índices de poder y sus características

Al trabajar con juegos simples, son de especial interés los índices de poder, un concepto de solución que nos proporciona una medida del poder o de la influencia de los jugadores sobre el resultado final del juego. Cada índice tiene en cuenta diferentes aspectos y nos permite conocer tanto a los jugadores menos relevantes como a los más relevantes. La definición formal es la siguiente.

Definición 1.12. Sea $(N, v) \in S(N)$ un juego simple, se denomina **índice de poder** a una aplicación $f : (N, v) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que asocia a cada juego un vector n-dimensional donde la componente i-ésima del vector proporciona una medida de la influencia del jugador i.

Existen muchos tipos de índices de poder, pero en este documento nos centraremos en 5 de ellos. El índice de Shapley-Shubik (Shapley y Shubik, 1954); Banzhaf (Banzhaf, 1964); Johnston (Johnston, 1978); Colomer-Martínez (Colomer y Martínez, 1995); y Johnston-Colomer-Martínez (Armijos-Toro et al., 2024b). Cada uno de ellos se calcula teniendo en cuenta diferentes aspectos sobre la participación de cada jugador, y viene caracterizado por una serie de propiedades. Siguiendo Armijos-Toro et al. (2024a), presentaremos primeramente cuatro propiedades generales de los índices de poder, eficiencia, jugador nulo, simetría y aditividad. Más adelante con el fin de caracterizar los índices de poder, presentaremos propiedades particulares a algunos de estos.

Definición 1.13. Sea $f : (N, v) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un índice de poder para cada juego $(N, v) \in S(N)$. Este índice f satisface:

- **Eficiencia (EF).** Si $\sum_{i \in N} f_i(N, v) = 1 \ \forall \ (N, v) \in S(N)$.
- **Jugador nulo (NP).** Si $f_i(N, v) = 0 \ \forall \ (N, v) \in S(N)$ y para cada jugador nulo $i \in N$ del juego.
- **Simetría (SY).** Si $f_i(N, v) = f_j(N, v) \ \forall (N, v) \in S(N)$ y para cada par de jugadores simétricos $i, j \in N$ del juego.
- **Aditividad (TR).** Si $f(N, v \wedge v') + f(N, v \vee v') = f(N, v) + f(N, v')$ para cada par de juegos $(N, v), (N, v') \in S(N)$.

A continuación, presentaremos los cinco índices de poder con los que trabajaremos en este documento además de las propiedades que verifican. Los definiremos sobre la clase de juegos de mayoría ponderada, cabe mencionar que, exceptuando los índices de Colomer-Martínez y Jhonston-Colomer-Martínez, definidos únicamente para juegos de mayoría ponderada (tienen en cuenta los pesos de los jugadores), la generalización de los restantes para la clase de juegos simples es directa. Primeramente definiremos en la Sección 1.2.1 aquellos basados en contribuciones marginales, estos son los índices de Shapley-Shubik y Banzhaf. Los tres índices restantes, los agrupamos en la Sección 1.2.2 como índices basados en coaliciones (cuasi-)minimales ganadoras.

1.2.1. Índices basados en contribuciones marginales

Tanto el índice de Shapley-Shubik, como el índice de Banzhaf son índices que generalizan el concepto del valor de Shapley y del valor de Banzhaf, respectivamente, para la clase de juegos de mayoría ponderada. Para su cálculo, es necesario conocer las contribuciones marginales de cada jugador a las posibles coaliciones. Serán relevantes en el cálculo de ambos índices aquellas que sean no nulas, estas serán aquellas coaliciones que cada jugador convierta en ganadoras, es decir, los *swings* que genere. La diferencia entre ambos residirá en los pesos a considerar.

El índice de Shapley-Shubik

El índice de Shapley-Shubik fue introducido en Shapley y Shubik (1954). Se trata de una adaptación del valor de Shapley, definido en la Expresión (1.1) para juegos TU, para la clase de juegos de mayoría ponderada. En este caso, el índice coincide con el valor de Shapley para juegos simples al utilizar la reformulación mediante el concepto de *swing*. Su definición formal es la siguiente.

Definición 1.14. Sea $[q;w] \in SW(N)$ un juego de mayoría ponderada e $i \in N$. Se define el **índice de Shapley-Shubik** para el jugador i en $[q;w]$ como

$$SS_i([q;w]) = \sum_{S \in \eta_i} \frac{|S|!(|N|-|S|-1)!}{|N|!}. \tag{1.4}$$

Al estar considerar juegos de mayoría ponderada, las contribuciones marginales $v(S \cup \{i\} - v(S))$ presentes en el valor de Shapley, equivalen a restringir la suma a los *swings* del jugador i, de ahí nace la definición del índice. Este se calcula asignando a cada jugador i la media aritmética de las contribuciones marginales que dicho jugador hace a las coaliciones formadas por los jugadores que preceden a i en las $n!$ permutaciones posibles de los jugadores. A continuación, gracias al siguiente resultado, presentamos la caracterización de este índice.

Proposición 1.15. *(Dubey, 1975). El índice de Shapley-Shubik es el único índice de poder que verifica las propiedades de EF, NP, SY y TR.*

Ejemplo 1.16. *Calculemos este índice en el Ejemplo 1.5, en el que tenemos un juego* $[9;6,5,3,2] \in SW(N)$ *con* $N = \{A,B,C,D\}$*. Para este ejemplo, al tratarse de un juego de mayoría ponderada, el cálculo del índice de poder de Shapley-Shubik es equivalente al valor de Shapley. Recuperando el* *cálculo del Ejemplo 1.5, tenemos el siguiente vector con la distribución del poder de los jugadores de acuerdo con el índice de Shapley-Shubik.*

$$SS([q;w]) = \Phi(N,v) = \left(\frac{5}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}, \frac{1}{12}\right).$$

El índice de Banzhaf

El índice de Banzhaf, propuesto en Banzhaf (1964), es una generalización del valor de Banzhaf visto en la Expresión (1.2) para juegos TU, a la clase de juegos de mayoría ponderada, de hecho, su expresión será equivalente. Para definirlo, presentaremos primeramente el índice de Banzhaf bruto, definido en Dubey y Shapley (1979). Este propone que la influencia de un jugador viene determinada directamente por el número de *swings* que genera. Además, supone que todos los *swings* tienen la misma relevancia y, por tanto, la misma probabilidad de formarse. La definición formal de este índice es la siguiente.

Definición 1.17. Sea $[q;w] \in SW(N)$ un juego de mayoría ponderada e $i \in N$. Se define el **índice de Banzhaf bruto** para el jugador i en $[q;w]$ como

$$B_i([q;w]) = |\eta_i(v)|, \tag{1.5}$$

donde $|\eta_i(v)|$ denota el número de *swings* que genera el jugador. Este índice fue caracterizado gracias al siguiente resultado.

Proposición 1.18. *(Dubey y Shapley, 1979). El índice de Banzhaf bruto es el único índice de poder que verifica las propiedades de NP, SY , TR y, además*

$$\sum_{i=1}^{n} B_i([q;w]) = \eta(v).$$

En la práctica nos interesará normalizar este índice y así pasar a comparar proporciones, por ello definiremos dos normalizaciones y presentaremos dos resultados caracterizándolas de forma general en Dubey y Shapley (1979) y mediante resultados presentados en González-Díaz et al. (2010). La normalización más común se obtiene al dividir por el número total de *swings*, este es el índice de Banzhaf normalizado, también denominado índice de Banzhaf-Coleman. Su definición formal es la siguiente.

Definición 1.19. Sea $[q;w] \in SW(N)$ un juego de mayoría ponderada e $i \in N$. Se define el **índice de Banzhaf normalizado** para el jugador i en $[q;w]$ como

$$BZN_i([q;w]) = \frac{|\eta_i(v)|}{\eta(v)}. \tag{1.6}$$

Al normalizar el índice bruto de esta manera, adquiere la propiedad de EF. Sin embargo, pierde TR. De ahí el siguiente resultado.

Proposición 1.20. *(González-Díaz et al., 2010). El índice de Banzhaf normalizado es el único índice de poder que verifica las propiedades de EF, NP, SY.*

Otra normalización del índice bruto muy común y que da lugar al denominado índice de Banzhaf, consiste en dividir por el número total de coaliciones a las que se puede unir el jugador i, esto es, 2^{n-1}. Su definición formal es la siguiente.

Definición 1.21. Sea $[q;w] \in SW(N)$ un juego de mayoría ponderada e $i \in N$. Se define el **índice de Banzhaf** para el jugador i en $[q;w]$ como

$$BZ_i([q;w]) = \frac{|\eta_i(v)|}{2^{n-1}}. \tag{1.7}$$

Como podemos observar, este índice coincide con el valor de Banzhaf para juegos simples. Además, con esta normalización del índice bruto, se adquiere la siguiente nueva propiedad definida en González-Díaz et al. (2010) y el siguiente resultado que caracteriza el índice de Banzhaf.

- **Poder total de Banzhaf (TP).** Dado $(N,v) \in S(N)$ juego simple. Decimos que un índice de poder $f : (N,v) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad TP si

$$\sum_{i\in N} f_i(v) = \frac{\eta(v)}{2^{n-1}}.$$

Proposición 1.22. *(González-Díaz et al., 2010). El índice de Banzhaf es el único índice de poder que verifica las propiedades de NP, SY, TR y TP.*

Ejemplo 1.23. *Calculemos este índice en el Ejemplo 1.5, en el que tenemos un juego* $[9;6,5,3,2] \in SW(N)$ *con* $N = \{A,B,C,D\}$*. El índice de Banzhaf bruto es equivalente al número de swings de cada jugador, por ello, recuperando los conjuntos de swings calculados en el Ejemplo 1.6 podemos calcular el siguiente vector* $B([q;w]) = (5,3,3,1)$*. Calculemos ahora el índice de Banzhaf normalizado dividiendo el índice bruto por el número total de swings,* $\eta(v)$*.*

$$\eta(v) = \sum_{i=1}^{4} B_i([q;w]) = |\eta_A(v)| + |\eta_B(v)| + |\eta_C(v)| + |\eta_D(v)| = 12.$$

Con ello podemos calcular el siguiente vector del índice de Banzhaf normalizado:

$$BZN([q;w]) = \frac{B([q;w])}{\eta(v)} = \left(\frac{5}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}, \frac{1}{12}\right).$$

Por último, calcularemos el índice de Banzhaf. Para ello, debemos dividir el índice bruto por el número total de coaliciones sin el jugador i, este es $2^3 = 8$*. Podemos comprobar que coincide con el valor de Banzhaf para juegos simples.*

$$BZ([q;w]) = \frac{B[q;w]}{2^{n-1}} = \beta(N,v) = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right).$$

1.2.2. Índices basados en coaliciones (cuasi-)minimales ganadoras

El índice de Johnston

Fue propuesto en Johnston (1978). La base de este índice está en los jugadores críticos y en las coaliciones que cuentan con este tipo de jugadores, las coaliciones ganadoras cuasi-minimales, denotadas por $Q(N)$. La definición formal es la siguiente.

Definición 1.24. Sea $[q;w] \in SW(N)$ un juego de mayoría ponderada e $i \in N$. Se define el **índice de Johnston** para el jugador i en $[q;w]$ como

$$JT_i([q;w]) = \frac{1}{|Q(N)|} \sum_{S \in Q_i} \frac{1}{|C(S)|}. \tag{1.8}$$

Para un jugador $i \in N$, el índice viene determinado por una proporción calculada teniendo en cuenta el número de jugadores críticos de cada una de las coaliciones ganadoras cuasi-minimales en las que i es jugador crítico. De esta forma, se obtiene un poder más alto para aquellos jugadores que son críticos en un mayor número de coaliciones y además también se ven beneficiados cuanto menor sea el número de jugadores críticos de estas. Siguiendo Lorenzo-Freire et al. (2007), para caracterizar el índice debemos definir una nueva propiedad, la fusionabilidad critica. La interpretación de esta es que, para el índice de poder que la verifique, el poder de un jugador se obtiene como la media ponderada del poder de los juegos de unanimidad de coaliciones críticas.

- **Fusionabilidad crítica (FC).** Sea $(N,v) \in S(N)$ juego simple con $W^m(N) = \{S_1, ..., S_m\}$ e $I = \{1, ..., m\}$ un conjunto de m índices, decimos que un índice de poder $f : (N,v) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad FC si

  $$f(N,v) = \sum_{S \in F} \frac{|Q(S,v)|}{|Q(N)|} f(N,u_s),$$

  donde $F = \left\{ \bigcap_{j \in R} S_j / \bigcap_{j \in R} S_j \neq \emptyset, R \subseteq I \right\}$ es el conjunto de coaliciones resultantes de intersecar j de coaliciones minimales ganadoras. El término $Q(S,v)$ representa el conjunto de coaliciones ganadoras cuasi-minimales cuyo conjunto de jugadores críticos es $S \subseteq N$, es decir, $Q(S,v) = \{T \in Q(N)/C(T) = S\}$. Por último, $f(N,u_s)$ representa el índice sobre el juego de unanimidad de la coalición S, en el que una coalición $T \subseteq N$ será ganadora si y solo si $S \subseteq T$, por lo que el resultado del juego lo determina la coalición S.

Conociendo esta propiedad, podemos enunciar el resultado que caracteriza el índice de Johnston.

Proposición 1.25. *(Lorenzo-Freire et al., 2007). El índice de poder de Johnston es el único índice de poder que verifica las propiedades de EF, NP, SY y FC.*

Ejemplo 1.26. *Calculemos este índice en el Ejemplo 1.5, en el que tenemos un juego* $[9; 6, 5, 3, 2] \in SW(N)$ *con* $N = \{A, B, C, D\}$*. Para el cálculo del índice de Johnston, necesitamos conocer el conjunto de coaliciones ganadoras cuasi-minimales y los jugadores críticos de tales coaliciones. Recuperando el conjunto* $Q(N)$ *de 1.6 y viendo qué jugadores de cada coalición son críticos, tenemos:* $Q(N) = \{AB(11), AC(9), ABC(14), ABD(13), ACD(11), BCD(10)\}$*. En esta notación, definida en el Ejemplo 1.6 , el color rojo denota los jugadores que son críticos para cada coalición. Tenemos entonces que* $|Q(N)| = 6$ *y podemos calcular el índice. A modo de ejemplo, sea* $B \in N$ *el índice de Johnston viene dado por*

$$JT_B([q; w]) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{18}.$$

Con un razonamiento análogo para los demás jugadores, calculamos el índice de Johnston para el juego $[q; w]$ *como*

$$JT([q; w]) = \left(\frac{9}{18}, \frac{4}{18}, \frac{4}{18}, \frac{1}{18}\right).$$

El índice de Colomer-Martínez

Los dos índices restantes, los conocidos como índices de Colomer-Martínez y Johnston-Colomer-Martínez, se definen únicamente para juegos de mayoría ponderada. Esto es debido a que, en su cálculo, se tienen en cuenta no solo las coaliciones en las que se ve involucrado cada jugador, también el peso de este.

El índice de Colomer-Martínez fue propuesto en Colomer y Martínez (1995). Se trata de una modificación del índice de Deegan-Packel propuesto en Deegan y Packel (1978) para el caso específico de los juegos de mayoría ponderada.

Definición 1.27. Sea $[q; w] \in SW(N)$ un juego de mayoría ponderada e $i \in N$. Se define el **índice de Colomer-Martínez** para el jugador i en $[q; w]$ como

$$CM_i([q; w]) = \frac{1}{|W^m(N)|} \sum_{S \in W_i^m} \frac{w_i}{w_S}, \quad \text{donde } w_S = \sum_{j \in S} w_j. \tag{1.9}$$

Este índice otorga el poder a un jugador $i \in N$ en función a su contribución de pesos a las coaliciones minimales ganadoras en las que participa. Para este caso, el poder de un jugador será mayor si se une a coaliciones donde los jugadores tienen menor peso que él. Para caracterizarlo, y siguiendo Armijos-Toro et al. (2024a), es necesario generalizar las propiedades de simetría (SY) y la Fusionabilidad de Deegan-Packel (FUDP) propuesta en Deegan y Packel (1978) al caso de juegos de mayoría ponderada. No obstante, antes de proceder, es preciso adaptar los conceptos de unión y fusión a los juegos de mayoría ponderada, ya que estos difieren de aquellos definidos para juegos simples en las Definiciones 1.9 y 1.11. En el caso del juego unión ponderado, tendrá como cuota la menor de las cuotas de los juegos involucrados y el vector de pesos será el vector con mayores pesos de los juegos a unir; de esta forma, obtendremos un nuevo juego de mayoría ponderada bien definido. La definición formal es la siguiente.

Definición 1.28. Sean N un conjunto finito de jugadores, $p \in \mathbb{N}$ con $p > 1$ y $[q^1; w^1], ..., [q^p; w^p] \in SW(N)$. Se define el **juego unión ponderado** como $[q^\vee; w^\vee] \in SW(N)$ donde $q^\vee = min_{k\in\{1,...,p\}} q^k$ y $w^\vee = max_{k\in\{1,...,p\}} w^k$.

Para dar una buena definición del concepto de fusión en juegos ponderados necesitamos que los juegos verifiquen las siguientes cuatro condiciones: la cuota será la misma para todos los jugadores; el peso de un jugador, en caso de ser no nulo, debe ser el mismo en todos los juegos; una coalición que sea perdedora en un juego también lo será en el juego fusión y que el número total de coaliciones ganadoras minimales debe conservarse. La definición formal es la siguiente.

Definición 1.29. Sean N un conjunto finito de jugadores, $p \in \mathbb{N}$ con $p > 1$ y $[q^1; w^1], ..., [q^p; w^p] \in SW(N)$. Estos juegos se dicen **juegos fusionables ponderados** si:

- $q^1 = ... = q^p$.
- Sea cualquier $i \in N$ para el que se verifica que existen $k, l \in \{1, ..., p\}$ con $w_i^k \neq w_i^l$, entonces o bien $w_i^k = 0$ o $w_i^l = 0$.
- $\forall S \subsetneq N$ tal que $w_S^k < q^k \ \forall k \in \{1, ..., p\}$, entonces $\sum\limits_{i\in S} max_{k\in\{1,...,p\}} w_i^k < min_{k\in\{1,...,p\}} q^k$.
- $|W^m([q^\vee; w^\vee)]| = \sum\limits_{k=1}^{p} |W^m([q^k; w^k])|$.

Presentamos a continuación dos nuevas propiedades: la Simetría Ponderada (SYw) y la Fusionabilidad de Deegan-Packel ponderada (FUDPw). La primera presenta una relación proporcional entre el índice y los pesos de jugadores simétricos en el caso de un juego de unanimidad; la segunda presenta el cálculo del índice de poder para la fusión de $p \in \mathbb{N}$ juegos de mayoría ponderada relacionando los índices y coaliciones ganadoras minimales de los p juegos.

- **Simetría Ponderada (SYw).** Sea $[q; w] \in SW(N)$ juego de mayoría ponderada de unanimidad, es decir, aquellos en los que $W^m(N) = \{S\}$ para una cierta coalición $S \subseteq N$. Decimos que un índice de poder $f : [q; w] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad (SYw) si
$$\frac{f_i([q; w])}{f_j([q; w])} = \frac{w_i}{w_j} \ \text{ con } \ i, j \in S.$$
- **Fusionabilidad de Deegan-Packel ponderada (FUDPw).** Dados $[q^1, w^1], ..., [q^p, w^p] \in SW(N)$ para cada $p \in \mathbb{N}$ con $p > 1$ juegos de mayoría ponderada fusionables. Decimos que

un índice de poder $f : [q; w] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad (FUDPw) si

$$f([q^{\vee}; w^{\vee}]) = \frac{\sum_{k=1}^{p} |W^m([q^k; w^k])| f([q^k; w^k])}{|W^m([q^k; w^k])|}.$$

Podemos enunciar ahora el siguiente resultado que caracteriza el índice de Colomer-Martínez.

Proposición 1.30. *(Armijos-Toro et al., 2024a). El índice de poder de Colomer-Martínez es el único índice de poder que verifica las propiedades de EF, NP, SYw y FUDPw.*

Ejemplo 1.31. *Calculemos este índice en el Ejemplo 1.5, en el que tenemos un juego* $[9; 6, 5, 3, 2] \in SW(N)$ *con* $N = \{A, B, C, D\}$*. Recuperamos del Ejemplo 1.6 el siguiente conjunto de coaliciones ganadoras minimales y sus pesos:* $W^m(N) = \{AB(11), AC(9), BCD(10)\}$*, entonces,* $|W^m(N)| = 3$ *y podemos calcular el índice. Lo calcularemos para el jugador* $A \in N$*. Se tiene que*

$$CM_A([q; w]) = \frac{1}{3}\left(\frac{6}{11} + \frac{6}{9}\right) = \frac{40}{99}.$$

Con un razonamiento análogo para los demás jugadores, obtenemos el índice de Colomer-Martínez. Para hacer los resultados más interpretables, escribimos en forma decimal estos valores.

$$CM([q; w]) \approx (0.404, 0.318, 0.211, 0.07)\,.$$

El índice de Johnston-Colomer-Martínez

El índice de Johnston-Colomer-Martínez, fue propuesto en Armijos-Toro et al. (2024b). Presenta una nueva medida de poder basada en la combinación del índice de Johnston y el índice de Colomer-Martínez. Su definición formal es la siguiente.

Definición 1.32. Sea $[q; w] \in SW(N)$ un juego de mayoría ponderada e $i \in N$. Se define el **índice de Johnston-Colomer-Martínez** para el jugador i en $[q; w]$ como

$$JCM_i([q; w]) = \frac{1}{|Q(N)|} \sum_{S \in Q_i} \frac{w_i}{w(C(S))}. \tag{1.10}$$

De acuerdo con Armijos-Toro et al. (2024b), este índice tiene en cuenta no solamente la capacidad de un jugador crítico para hacer una coalición perdedora, sino que también compara a los jugadores que tienen esa capacidad dentro de la misma coalición. Para un determinado jugador $i \in N$, utiliza en su cálculo las coaliciones cuasi-minimales para las que el jugador es crítico y el número total de tales coaliciones en el juego, de ahí su relación con el índice de Johnston, sin embargo, este nuevo índice incorpora el peso del jugador y del conjunto de jugadores críticos de $Q_i(N)$. Esto, como ya hemos mencionado, hace que el índice esté definido para juegos de mayoría ponderada. La relación con el índice de Colomer-Martínez reside en el uso de pesos y en que ambos índices verifican la propiedad SYw, vista en la anterior sección.

Ejemplo 1.33. *Calculemos este índice en el Ejemplo 1.5, en el que tenemos un juego* $[9; 6, 5, 3, 2] \in SW(N)$ *con* $N = \{A, B, C, D\}$*. Para el cálculo de este índice necesitamos conocer el conjunto de coaliciones ganadoras cuasi-minimales y sus jugadores críticos. En el Ejemplo 1.6, hemos calculado el conjunto* $Q(N)$ *junto con los jugadores críticos de cada coalición marcados en rojo. Este conjunto es:* $Q(N) = \{AB(11), AC(9), ABC(14), ABD(13), ACD(11), BCD(10)\}$.

Por lo tanto, sabemos que $|Q(N)| = 6$ *y podemos aplicar la definición del índice para un determinado jugador* $i \in N$ *seleccionando aquellas coaliciones de* $Q(N)$ *para las que* i *sea crítico, teniendo en cuenta el peso del jugador y de los jugadores críticos de cada una de estas coaliciones,* $w(C(S))$*. Consideremos* $C \in N$*, sabemos que* $Q_C = \{AC(9), ACD(11), BCD(10)\}$ *y obtenemos:*

$$JCM_C([q; w]) = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{9} + \frac{3}{9} + \frac{3}{10}\right) = \frac{29}{180}.$$

Con un razonamiento análogo para los demás jugadores obtenemos el índice de Johnston-Colomer-Martínez para $[q; w]$*. Para hacer los resultados más interpretables, escribimos en forma decimal estos valores.*

$$JCM([q; w]) \approx (0.571, 0.235, 0.161, 0.03).$$

1.3. Coste de la computación de índices de poder

Los índices de poder definidos en la sección anterior presentan un gran inconveniente en su cálculo directo, ya que necesitan un número muy elevado de operaciones cuando el número de jugadores es alto. En todos ellos, debemos estudiar las posibles coaliciones y, a posteri, filtrarlas, ya que dependiendo del índice se utilizan un tipo de coaliciones u otras. En el peor de los casos, debemos calcular todas las coaliciones posibles, lo que es equivalente al problema combinatorio de contar todos los subconjuntos posibles de cualquier tamaño de un conjunto con n jugadores, cuya solución es 2^n. Por ello, la complejidad de este tipo de propuestas suele ser exponencial, $O(2^n)$. Esto significa que para cada jugador que se añada se duplica el número total de operaciones. Un algoritmo con esta complejidad es generalmente ineficiente para valores grandes de n.

Para solucionar el anterior problema se utilizan herramientas que permiten obtener estos índices de manera exacta o aproximada, como por ejemplo las denominadas extensiones multilineales o las funciones generatrices. En este documento realizaremos un estudio completo de estas últimas, las cuales se basan en el uso de técnicas del análisis combinatorio. Presentaremos las funciones generatrices asociadas a cada uno de los índices de poder definidos, estudiando su complejidad y aplicándolas a un caso real.

Capítulo 2

Métodos para el cálculo de índices de poder

En esta sección nos centraremos en el cálculo de los distintos índices de poder sobre un juego de mayoría ponderada $[q; w] \in SW(N)$ de $|N| = n$ jugadores, necesitamos enumerar y filtrar las posibles coaliciones de cada jugador en función al valor a calcular. El cálculo de todas ellas, como ya hemos mencionado en la Sección 1.3, tiene complejidad computacional de orden exponencial, lo que lo convierte, a menudo, en un método ineficiente cuando el número de jugadores es lo suficientemente alto. Resolveremos este problema con el uso de las llamadas funciones generatrices. En la Sección 2.1 presentaremos los fundamentos de las funciones generatrices para su cómputo y en la Sección 2.2 plantearemos los métodos usados en cada uno de los índices presentados en la Sección 1.2.

2.1. La técnica de las funciones generatrices

La técnica de las funciones generatrices consiste en utilizar polinomios con los que podemos enumerar el conjunto de posibles coaliciones, conocer sus pesos y el número de jugadores que las forman. Mediante esta técnica, podemos obtener el valor exacto de diferentes índices de poder. Sin embargo, para cada uno de ellos deberemos seguir un proceso distinto con el fin de obtener la información necesaria sobre las coaliciones involucradas en el cómputo de cada uno de ellos. Siguiendo Alonso Meijide y Casas Méndez (2009), en esta sección presentaremos la idea subyacente tras las funciones generatrices.

Definición 2.1. Sea $a = \{a_r\}_{r\geq 0}$ una sucesión de números reales. Se denomina **función generatriz de la sucesión a**, a la siguiente serie formal

$$f(t) = \sum_{r\geq 0} a_r t^r = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + ...$$

Esta serie es formal, lo que significa que únicamente usamos la variable t para asociar a_r como el coeficiente correspondiente a t^r. Se puede tratar tanto de una serie finita, en caso de tener una sucesión finita, o de una serie infinita, en caso de que así lo sea la sucesión correspondiente. En este documento nos interesarán los problemas combinatorios finitos.

Consideremos ahora el siguiente producto finito de binomios lineales y su expresión en términos de una serie finita.

$$\prod_{r=1}^{n}(1 + x_r t) = \sum_{r=0}^{n} a_r t^r. \tag{2.1}$$

En este caso tendremos que el coeficiente inicial es de la forma $a_0 = 1$. Los demás coeficientes vienen dados por la siguiente igualdad:

$$a_r = \sum_{1\leq i_1 < i_2 < ... < i_r \leq n} x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_r}.$$

Los coeficientes a_r son funciones simétricas con respecto a las variables $x_1, x_2, ..., x_n$. En cuanto a esta relación, nos va a interesar que, para cada coeficiente a_r, el número de sumandos va a coincidir con el número de combinaciones posibles de r elementos de un conjunto con n elementos. Ahora bien, en el caso particular en el que todas las variables sean constantes con valor 1 tendremos que:

$$\prod_{r=1}^{n}(1 + t) = (1 + t)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} t^r.$$

En este caso particular, tendremos que los coeficientes a_r son el número de combinaciones de r elementos de un conjunto finito que tiene n elementos. Por ello, la función $f(t) = (1 + t)^n$ es la función generatriz de la sucesión:

$$a = \left\{ \binom{n}{r} / r = 0, 1, ..., n \right\}.$$

Con ello, obtenemos la idea básica de esta técnica. Los coeficientes binomiales $\binom{n}{r}$ se pueden obtener mediante la función $f(t) = (1+t)^n$, ya que estos coinciden con los coeficientes de las series formales. En base a esta idea, construiremos métodos con los que obtener las coaliciones deseadas para cada uno de los índices de poder. Sin embargo, además de obtener dichas coaliciones, pretendemos obtener más información, como el peso de cada una de ellas o los jugadores que las forman, por ello, deberemos utilizar funciones generatrices de varias variables.

Definición 2.2. Definimos una **función generatriz de varias variables** como la siguiente serie formal:

$$f(x,y,z) = \sum_{k\geq 0}\sum_{j\geq 0}\sum_{l\geq 0} a_{kjl}x^k y^j z^l,$$

donde a_{kjl} son números reales que dependen de k, j y l.

2.2. Las funciones generatrices en el cómputo de los índices de poder

En esta sección, abordaremos la tarea del cálculo de índices de poder para juegos de mayoría ponderada con n jugadores, $[q;w] \in SW(N)$. Las funciones generatrices que utilizaremos en el cálculo de los índices parten de una misma función, con la que vamos a obtener las posibles coaliciones involucradas, indicar sus pesos, el número de jugadores que la forman y cuáles son estos jugadores. La función, siguiendo Alonso-Meijide et al. (2012), es la siguiente:

$$F(x, z_1, ..., z_n, t) = \prod_{j=1}^{n}(1 + x^{w_j} z_j t). \tag{2.2}$$

Una vez se calcula dicha función, se obtienen 2^n términos que representan cada una de las posibles coaliciones de N. El exponente asociado a la variable x será el peso de la coalición, los subíndices de las variables z sirven para identificar los jugadores que forman parte de la coalición, y por último, el exponente asociado a t indica el número de jugadores que la forman (el cardinal de la coalición).

Para cada uno de los índices tendremos un proceso particular. La diferencia estará en ciertas modificaciones sobre la función generatriz descrita en la Expresión (2.2) y en el proceso de selección sobre la enumeración de coaliciones. De igual manera que realizamos en la presentación de los índices de poder en la Sección 1.2, los dividiremos entre aquellos calculados en base a sus contribuciones marginales y aquellos basados en coaliciones (cuasi-)minimales ganadoras.

2.2.1. Funciones generatrices para índices basados en contribuciones marginales

Como se analizó en la Sección 1.2.1, los índices de poder para juegos de mayoría ponderada cuyo cálculo se basa en las contribuciones marginales de los jugadores a las coaliciones son el índice de Shapley-Shubik y el índice de Banzhaf. En esta sección, siguiendo Alonso Meijide y Casas Méndez (2009) y apoyándonos en Bilbao et al. (2000), utilizaremos la técnica de las funciones generatrices para calcular dichos índices.

Función generatriz para el índice de Shapley-Shubik

Recordemos el índice de Shapley-Shubik para cada jugador $i \in N$, detallado en la Expresión (1.4), en la que se involucran los *swings* de cada jugador y su número de jugadores. Para cada $i \in N$, el índice de Shapley-Shubik para juegos de mayoría ponderada, $[q; w] \in SW(N)$, viene dado por

$$SS_i([q;w]) = \sum_{S \in \eta_i(v)} \frac{|S|!(|N|-|S|-1)!}{|N|!}.$$

Veamos ahora el método para el cálculo de este índice de forma más eficiente utilizando funciones generatrices, descrito en Alonso Meijide y Casas Méndez (2009).

Método 1. Sea $[q; w] \in SW(N)$ juego de mayoría ponderada. Los pasos para calcular el índice de Shapley-Shubik para un jugador $i \in N$ mediante funciones generatrices son los siguientes:

- **Paso 1. Reescritura del índice en función de d^i_j.**

  Teniendo en cuenta la cardinalidad de las coaliciones S a formar, $|S| = j$, reescribimos la definición del índice de la siguiente manera

  $$SS_i([q;w]) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j!(|N|-j-1)!}{|N|!} d^i_j. \tag{2.3}$$

  En este caso, el término d^i_j representa el número total de *swings* para el jugador i con j jugadores. Se puede interpretar como sigue:

  $$d^i_j = \sum_{k=q-w_i}^{q-1} a^i(k,j). \tag{2.4}$$

  El coeficiente $a^i(k,j)$ es el número de coaliciones perdedoras sin i en las que j jugadores suman un peso igual a k. La suma detallada en la Expresión (2.4) sólo tiene en cuenta aquellos coeficientes asociados a coaliciones con pesos $k \in [q - w_i, q-1]$, estas se convierten en ganadoras al unirse i. Por ello, en la anterior expresión, se realiza el recuento de *swings* de i con j jugadores.

- **Paso 2. Uso de una función generatriz para la obtención de las 2^{n-1} posibles coaliciones y de $a^i(k,j)$.**

  Para el cálculo del índice de poder tenemos que conocer los números $a^i(k,j)$, usaremos la función generatriz dada por el siguiente resultado.

  Proposición 2.3. *(Alonso Meijide y Casas Méndez, 2009). Sea $[q; w] \in SW(N)$ juego de mayoría ponderada. Para un jugador $i \in N$, la función generatriz de los números $\{a^i(k,j)\}$,* *viene dada por*

$$FSS_i(x,t) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (1 + x^{w_j} t). \tag{2.5}$$

Esta función generatriz es una modificación de aquella originalmente mostrada en la Expresión (2.2). Para calcular este índice, es preciso conocer los *swings* del jugador i, por ello se omiten las variables $z_1, ..., z_n$ de la función ya que no nos interesa conocer qué jugadores forman las coaliciones. Con el fin de obtener las coaliciones que convierten en ganadoras el jugador i, se elimina el índice i del producto por lo que obtenemos una enumeración de las 2^{n-1} posibles coaliciones en las que no está presente el jugador i. Notemos que, únicamente para esta definición, el índice j se refiere a cada uno de los jugadores, en otras expresiones de esta sección se referirá al número de jugadores.

Gracias al razonamiento del anterior paso y aplicando la igualdad en la Expresión (2.1), podemos reescribir la función generatriz de la siguiente forma

$$FSS_i(x,t) = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{w(N)} a^i(k,j) x^k \right] t^j.$$

De esta forma obtenemos los números $a^i(k,j)$ como los coeficientes de los monomios $x^k t^j$.

- **Paso 3: Obtención de d_j^i.**

  El cálculo de los términos d_j^i deriva de su identificación por un polinomio $g_i(t)$ y posteriormente la aplicación de la Igualdad (2.4).

  $$g_i(t) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j^i t^j = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{k=q-w_i}^{q-1} a^i(k,j) \right] t^j.$$

  Apoyándonos en las dos últimas igualdades, podemos determinar los números d_j^i a partir de la función generatriz. Para ello sumamos los coeficientes $a^i(k,j)$ asociados a los monomios con exponente $k \in [q - w_i, q-1]$. Con ello obtenemos el número de *swings* de i con j jugadores, es decir, los términos d_j^i.

- **Paso 4: Cálculo del índice de Shapley-Shubik.**

  Una vez hayamos calculado los d_j^i, podemos calcular el polinomio $g_i(t)$. Con este polinomio ya tenemos la información necesaria para el cálculo del índice de Shapley-Shubik para el jugador i mediante la Expresión (2.3).

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación del procedimiento.

Ejemplo 2.4. *Apliquemos el método en el Ejemplo 1.5 y calculemos el índice de Shapley-Shubik. Recordemos que se trata de un juego* $[9; 6, 5, 3, 2] \in SW(N)$ *con* $N = \{A, B, C, D\}$*, asociaremos a cada jugador el índice correspondiente a su posición alfabética. Consideremos* $A \in N$*, que se corresponde con el jugador* 1*.*

Gracias al Paso 1 *podemos centrarnos en la búsqueda de los números* d_j^i*, para ello debemos de calcular los* $a^i(k, j)$*. Estos se calculan en el segundo paso mediante la función generatriz detallada en la Expresión* (2.5)*. Para el jugador* A *tenemos que*

$$FSS_A(x,t) = \prod_{i=2}^{4} (1 + x^{w_i} t) = \left(1 + x^5 t\right)\left(1 + x^3 t\right)\left(1 + x^2 t\right)$$
$$= x^{10}t^3 + x^8t^2 + x^7t^2 + x^5t^2 + x^5t + x^3t + x^2t + 1.$$

Los números $a^i(k, j)$ *serán los coeficientes asociados a los monomios* $x^k t^j$*. Como vemos en el Paso* 3*, los números* d_j^i *vienen determinados por la suma de los* $a^i(k, j)$*, con* k *entre* $[q - w_i, q - 1]$*. Para obtenerlos sumamos los coeficientes asociados a los monomios* $x^k t^j$ *con* $k \in [q - w(A), q - 1] = [3, 8]$*. De esta forma obtenemos el número de swings de* A *con* j *jugadores.*

En la siguiente expresión utilizaremos una nueva notación [1]*, en la que marcamos en verde los exponentes de monomios que cumplen la condición y en rojo los que no la verifican.*

$$FSS_A(x,t) = x^{\color{red}{10}}t^3 + x^{\color{green}{8}}t^2 + x^{\color{green}{7}}t^2 + x^{\color{green}{5}}t^2 + x^{\color{green}{5}}t + x^{\color{green}{3}}t + x^{\color{red}{2}}t + 1.$$

Observamos que tenemos $d_1^A = 1 + 1 = 2$ *swings de* 1 *jugador y* $d_2^A = 1 + 1 + 1 = 3$ *de* 2 *jugadores. Como vemos en el Paso* 4*, sustituyendo en el polinomio* $g_i(t)$ *tenemos que*

$$g_A(t) = \sum_{j=0}^{3} d_j^A t^j = d_1^A t + d_2^A t^2 = 2t + 3t^2.$$

Por último, sustituimos en la Expresión (2.3) *y calculamos el índice para el jugador* A*.*

$$SS_A([q; w]) = \sum_{j=0}^{3} \frac{j!(|N| - |S| - 1)!}{|N|!} d_j^A = \frac{1!(4 - 1 - 1)!}{4!} 2 + \frac{2!(4 - 2 - 1)!}{4!} 3 = \frac{5}{12}.$$

Con un razonamiento análogo para los demás jugadores, calculamos el índice de Shapley-Shubik utilizando el Método 1 para el juego $[q; w] \in SW(N)$*, como*

$$SS([q; w]) = \left(\frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}\right).$$

[1] Esta notación la utilizaremos para el resto de monomios de funciones generatrices del documento

Función generatriz para el índice de Banzhaf normalizado

Recordemos el índice de Banzhaf normalizado para cada jugador $i \in N$, detallado la Expresión (1.6), en la que se involucran los *swings* de cada jugador y el total de *swings* del juego. Para cada $i \in N$, el índice de Banzhaf normalizado para juegos de mayoría ponderada, $[q; w] \in SW(N)$, viene dado por

$$BZN_i([q; w]) = \frac{|\eta_i(v)|}{\eta(v)}.$$

Veamos ahora el método para el cálculo de este índice de forma más eficiente utilizando funciones generatrices, descrito en Alonso Meijide y Casas Méndez (2009).

Método 2. Sea $[q; w] \in SW(N)$ juego de mayoría ponderada. Los pasos para calcular el índice de Banzhaf normalizado para un jugador $i \in N$ mediante funciones generatrices son los siguientes:

- **Paso 1. Expresión para contar los *swings* de un jugador i.**

  Para el cálculo de este índice precisamos obtener el número *swings* del jugador i, $|\eta_i(v)|$ y el número total de *swings* del juego, $\eta(v)$. Veamos primeramente como contar estas coaliciones para cada jugador gracias a la siguiente proposición.

  Proposición 2.5. *(Alonso Meijide y Casas Méndez, 2009). Sea $[q; w] \in SW(N)$ juego de mayoría ponderada. Para un jugador $i \in N$, el número de swings es igual a*

  $$|\eta_i(v)| = \sum_{k=q-w_i}^{q-1} b^i(k).$$

  El valor $b^i(k)$ representa el número de coaliciones $S \subseteq N \setminus \{i\}$ tales que $w(S) = k$.

- **Paso 2. Obtención de $b^i(k)$ mediante una función generatriz.**

  Para contar los *swings* de i necesitamos los valores $b^i(k)$. Para ello, gracias al siguiente resultado, logramos una función generatriz con la que obtenerlos.

  Proposición 2.6. *(Alonso Meijide y Casas Méndez, 2009). Sea $[q; w] \in SW(N)$ juego de mayoría ponderada. Para un jugador $i \in N$, la función generatriz de los valores $b^i(k)$ viene dada por*

  $$FBZN_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n} (1 + x^{w_j}). \tag{2.6}$$

  Al calcular dicha función, al igual que para el caso visto en la sección anterior, obtenemos una enumeración de las 2^{n-1} posibles coaliciones de N en las que no está presente el jugador i. De nuevo, el exponente de la variable x^k nos indica el peso de la coalición, en cambio, para este índice omitimos en la función la variable t, la cual nos aportaba el número de jugadores que formaban dicha coalición. Los coeficientes asociados a los monomios x^k serán los $b^i(k)$.

- **Paso 3. Conteo del número de *swings* de un jugador i y del juego.**

  Para obtener el número de *swings* de $i \in N$ aplicamos la Proposición 2.5. Seleccionamos aquellos coeficientes $b^i(k)$ asociados a los monomios con exponente $k \in [q - w_i, q - 1]$ y los sumamos, obteniendo así $|\eta_i(v)|$.

  Para calcular el número total de *swings* del juego, $\eta(v)$ debemos realizar este proceso para el resto de los jugadores, y finalmente realizamos la siguiente suma

$$\eta(v) = \sum_{i=1}^{n} |\eta_i(v)|.$$

- **Paso 4. Cálculo del índice de Banzhaf normalizado.**

  Por último, para calcular el índice para un jugador $i \in N$ aplicamos la Definición 1.6 del índice de Banzhaf normalizado.

El siguiente ejemplo ilustra el cómputo del índice de Banzhaf normalizado utilizando funciones generatrices de acuerdo con el método anterior.

Ejemplo 2.7. *Apliquemos el método en el Ejemplo 1.5 y calculemos el índice de Banzhaf normalizado. Recordemos que se trata de un juego* $[9; 6, 5, 3, 2] \in SW(N)$ *con* $N = \{A, B, C, D\}$, *asociaremos a cada jugador el índice correspondiente a su posición alfabética. Consideremos* $C \in N$, *que se corresponde con el jugador* 3.

Gracias al Paso 1 *podemos centrarnos en la búsqueda de los números* $b^i(k)$ *Estos se calculan en el segundo paso mediante la función generatriz de la Expresión* (2.6). *Para el jugador* C *tenemos que*

$$\begin{aligned} FBZN_C(x) &= \prod_{i=1, i\neq 3}^{4} (1 + x^{w_i}) = \left(1 + x^6\right)\left(1 + x^5\right)\left(1 + x^2\right) \\ &= x^{13} + x^{11} + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^2 + 1. \end{aligned}$$

Los números $b^i(k)$ *serán los coeficientes asociados a los monomios* x^k. *Como vemos en el Paso* 3, *el número de swings de* i *viene determinado por la suma de los* $b^i(k)$ *con* k *entre* $[q - w_i, q - 1]$. *Seleccionamos entonces los coeficientes asociados a los monomios* x^k *con* $k \in [q - w(C), q - 1] = [6, 8]$.

En la siguiente expresión, utilizando al notación definida en el Ejemplo 2.4, marcamos en verde los exponentes de monomios que cumplen la condición y en rojo los que no la verifican.

$$FBZN_C(x) = x^{13} + x^{11} + x^{8} + x^{7} + x^{6} + x^{5}t + x^{2} + 1.$$

Tomando los coeficientes $b^i(k)$ podemos calcular el número de swings de i sumándolos. Para el jugador C tenemos que

$$|\eta_i(v)| = \sum_{k=6}^{8} b^C(k) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Necesitamos calcular el número total de swings, para ello realizamos el proceso para el resto de jugadores A, B y D y obtenemos que $|\eta_A(v)| = 5$, $|\eta_B(v)| = 3$, $|\eta_D(v)| = 1$. Por lo tanto

$$\eta(v) = \sum_{i=1}^{4} |\eta_i(v)| = 5 + 3 + 3 + 1 = 12.$$

Aplicando el Paso 4 obtenemos el siguiente índice de Banzhaf normalizado para el jugador C

$$BZN_C([q; w]) = \frac{|\eta_C(v)|}{\eta(v)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Con un razonamiento análogo para los demás jugadores, calculamos el índice de Banzhaf normalizado utilizando el Método 2 para el juego $[q; w] \in SW(N)$, como

$$BZN([q; w]) = \left(\frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}\right).$$

2.2.2. Funciones generatrices para índices basados en coaliciones (cuasi-)minimales ganadoras

En esta sección introduciremos los procesos para el cómputo de índices basados en coaliciones minimales ganadoras (Colomer-Martínez) o en coaliciones cuasi-minimales ganadoras (Johnston y Johnston-Colomer-Martínez). En estos procesos, utilizaremos las funciones generatrices propuestas en Armijos-Toro et al. (2024b).

Función generatriz para el índice de Johnston

Recordemos la expresión del índice de Johnston, detallada en la Expresión (1.8) en la que se involucran las coaliciones ganadoras minimales de cada jugador y sus jugadores críticos. Para cada $i \in N$, el índice de Johnston para juegos de mayoría ponderada, $[q; w] \in SW(N)$, viene dado por

$$JT_i(N, v) = \frac{1}{|Q(N)|} \sum_{S \in Q_i} \frac{1}{|C(S)|}.$$

Veamos ahora el método para el cálculo de este índice de forma más eficiente utilizando funciones generatrices, tal y como se describe en Armijos-Toro et al. (2024b).

Método 3. Sea $[q;w] \in SW(N)$ juego de mayoría ponderada. Los pasos para calcular el índice de Johnston para un jugador $i \in N$ mediante funciones generatrices son los siguientes:

- **Paso 1. Reescritura del índice de forma conveniente.**

  Comenzamos reescribiendo la expresión del índice como sigue

$$JT_i([q;w]) = \frac{1}{|Q(N)|} \sum_{k \in C_i} \frac{c_k^i}{k}, \tag{2.7}$$

  donde el término C_i representa un conjunto con los números de jugadores críticos de las coaliciones ganadoras cuasi-minimales en para las que i es jugador crítico, esto es, $C_i = \{|C(S)|/S \in Q_i(N)\}$. El valor del numerador, c_k^i, representa el número de coaliciones ganadoras cuasi-minimales con un total de k jugadores críticos, incluyendo a i, esto es, $c_k^i = |\{S \in Q_i(N)/|C(S)| = k\}|$. Para calcular el índice, deberemos calcular los c_k^i para todo $i \in N$ y todo $k \in C_i$.

- **Paso 2. Obtención de las 2^{n-1} coaliciones sin cada jugador mediante n funciones generatrices.**

  Consideramos las siguientes n funciones generatrices, una asociada a cada jugador.

$$FJ^i(x, z_1, ..., z_{i-1}, z_{i+1}, ..., z_n) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (1 + x^{w_j} z_j) \quad \text{donde} \quad i = 1, ..., n.$$

  Estas n funciones son una modificación de la función generatriz general descrita en la Expresión (2.2), cada una de ellas se asocia al jugador i. Con la función i-ésima obtendremos la enumeración 2^{n-1} términos asociados a las coaliciones posibles del juego en las que no está el jugador i.

- **Paso 3. Selección de los monomios asociados a coaliciones en los que i es crítico.**

  Considérese $i \in N$. Seleccionaremos aquellos monomios de FJ^i cuyos pesos están comprendidos entre $q - w_i$ y $q - 1$. Además, en cada uno de estos monomios sustituiremos la variable x por $z_i h_i$. A estas nuevas funciones las denotaremos como $g^i(z_1, ..., z_n, h_i)$.

- **Paso 4. Obtención de la función $G(z_1, ..., z_n, h_1, ..., h_n)$.**

  Seguidamente, sumando las funciones $g^i(z_1, ..., z_n, h_i)$, obtenemos la siguiente función:

$$G(z_1, ..., z_n, h_1, ..., h_n) = \sum_{i=1}^{n} g^i(z_1, ..., z_n, h_i).$$

- **Paso 5. Obtención de $|Q(N)|$ y de los coeficientes c_k^i.**

Para su determinación, sacamos factor común en G agrupando aquellos términos que tengan los mismos jugadores, las mismas variables z_j. Gracias a un resultado visto en Armijos-Toro et al. (2024b), sabemos que el número de sumandos resultantes es igual al número de coaliciones ganadoras cuasi-minimales $|Q(N)|$, información que utilizaremos en el cálculo del índice de poder de Johnston detallado en la Expresión (2.7).

A continuación, añadiremos a cada uno de los sumandos h_i un exponente igual al número sumandos h en ese término, eliminamos las z_j y obtenemos una nueva función $GJ(h_1, ..., h_n)$. Esta polinomio estará formado por sumandos de la forma $c_k^i h_i^k$, con $i \in N$ y $k \in C_i$. Los coeficientes c_k^i son los necesarios para calcular el índice de acuerdo a la Expresión (2.7). Recordemos que estos nos indican el número de coaliciones ganadoras cuasi-minimales con un total de k jugadores críticos, incluyendo a i.

- **Paso 6. Cálculo de índice de Johnston.**

  Con la información obtenida en los anteriores pasos ya podemos calcular el índice de Johnston mediante su reformulación descrita en la Expresión (2.7).

A continuación, se evalúa dicho procedimiento sobre el ejemplo considerado como caso de estudio en esta memoria.

Ejemplo 2.8. *Apliquemos el método en el Ejemplo 1.5 y calculemos el índice de Johnston. Recordemos que se trata de un juego* $[9; 6, 5, 3, 2] \in SW(N)$ *con* $N = \{A, B, C, D\}$*, asociaremos a cada jugador el índice correspondiente a su posición alfabética. Consideremos* $A \in N$*, que se corresponde con el jugador* 1.

Gracias al primer paso, nos centraremos en el cálculo de $|Q(N)|$ *y* c_k^i*. Para ello calculamos las funciones* $FJ^i(x, z_1, ..., z_{i-1}, z_{i+1}, ..., z_n)$*. De acuerdo con el Paso* 3*, donde debemos de seleccionar en la función i-ésima aquellos monomios cuyo exponente de la variable* x^k *verifica que* $k \in [q - w_i, q - 1]$*, escribiremos a continuación, siguiendo la notación presentada en el Ejemplo 2.4, en verde aquellos exponentes que verifiquen la condición, de lo contrario, se denotarán en rojo.*

$$\begin{aligned}
FJ^A(z_2, z_3, z_4, x) &= (1 + x^5 z_2)(1 + x^3 z_3)(1 + x^2 z_4) \\
&= x^{10} z_2 z_3 z_4 + x^8 z_2 z_3 + x^7 z_2 z_4 + x^5 z_3 z_4 + x^5 z_2 + x^3 z_3 + x^2 z_4 + 1, \\
FJ^B(z_1, z_3, z_4, x) &= (1 + x^6 z_1)(1 + x^3 z_3)(1 + x^2 z_4) \\
&= x^{11} z_1 z_3 z_4 + x^9 z_1 z_3 + x^8 z_1 z_4 + x^6 z_1 + x^5 z_3 z_4 + x^3 z_3 + x^2 z_4 + 1, \\
FJ^C(z_1, z_2, z_4, x) &= (1 + x^6 z_1)(1 + x^5 z_2)(1 + x^2 z_4) \\
&= x^{13} z_1 z_2 z_4 + x^{11} z_1 z_2 + x^8 z_1 z_4 + x^7 z_2 z_4 + x^6 z_1 + x^5 z_2 + x^2 z_4 + 1, \\
FJ^D(z_1, z_2, z_3, x) &= (1 + x^6 z_1)(1 + x^5 z_2)(1 + x^3 z_3) \\
&= x^{14} z_1 z_2 z_3 + x^{11} z_1 z_2 + x^9 z_1 z_3 + x^8 z_2 z_3 + x^6 z_1 + x^5 z_2 + x^3 z_3 + 1.
\end{aligned}$$

Eliminando los términos que no verifican la condición anterior, con exponentes en rojo, y sustituyendo en aquellos cuyo exponente si la verifica, en verde, la variable x por $z_i h_i$ tenemos las funciones $g^i(z_1, z_2, z_3, z_4, h_i)$ vistas en el tercer paso.

$$\begin{aligned}
g^A(z_1, z_2, z_3, z_4, h_1) &= z_1z_2z_3h_1 + z_1z_2z_4h_1 + z_1z_3z_4h_1 + z_1z_2h_1 + z_1z_3h_1,\\
g^B(z_1, z_2, z_3, z_4, h_2) &= z_1z_2z_4h_2 + z_1z_2h_2 + z_2z_3z_4h_2,\\
g^C(z_1, z_2, z_3, z_4, h_3) &= z_1z_3z_4h_3 + z_2z_3z_4h_3 + z_1z_3h_3,\\
g^D(z_1, z_2, z_3, z_4, h_4) &= z_2z_3z_4h_4.
\end{aligned}$$

Aplicando el cuarto paso, las sumamos y obtenemos la siguiente función

$$\begin{aligned}
G(z_1, z_2, z_3, z_4, h_1, h_2, h_3, h_4) = {}& z_1z_2z_3h_1 + z_1z_2z_4h_1 + z_1z_3z_4h_1 + z_1z_2h_1 + z_1z_3h_1 + z_1z_2z_4h_2 +\\
&+ z_1z_2h_2 + z_2z_3z_4h_2 + z_1z_3z_4h_3 + z_2z_3z_4h_3 + z_1z_3h_3 + z_2z_3z_4h_4.
\end{aligned}$$

A continuación, de acuerdo con el Paso 5, agrupamos los términos que tengan las mismas variables z_j sacando factor común. El número de sumandos que obtengamos será el número de coaliciones ganadoras cuasi-minimales.

$$\begin{aligned}
G(z_1, z_2, z_3, z_4, h_1, h_2, h_3, h_4) = {}& z_1z_2(h_1 + h_2) + z_1z_3(h_1 + h_3) + z_1z_2z_3(h_1) + z_1z_2z_4(h_1 + h_2)\\
&+ z_1z_3z_4(h_1 + h_3) + z_2z_3z_4(h_2 + h_3 + h_4).
\end{aligned}$$

Con ello, $|Q(N)| = 6$. Siguiendo el Paso 5, debemos añadir a cada uno de los h_i un exponente igual al número sumandos h en ese término. Eliminamos los z_j y obtenemos una función que únicamente dependerá de las variables h_i.

$$\begin{aligned}
GJ(h_1, h_2, h_3, h_4) ={}&(h_1^2 + h_2^2) + (h_1^2 + h_3^2) + (h_1) + (h_1^2 + h_2^2) + (h_1^2 + h_3^2) + (h_2^3 + h_3^3 + h_4^3)\\
={}& h_1 + 4h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 + h_2^3 + h_3^3 + h_4^3.
\end{aligned}$$

En esta función los coeficientes asociados a los términos de las forma h_i^k son los c_k^i, con esto, ya tenemos toda la información necesaria para el cálculo del índice. Para el jugador A tendremos los coeficientes $c_1^A = 1$ y $c_2^A = 4$. El índice de Johnston para el jugador A será

$$JT_A([q; w]) = \frac{1}{|Q(N)|} \sum_{k \in C_A} \frac{c_k^A}{k} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1} + \frac{4}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Con un razonamiento análogo para los demás jugadores, calculamos el índice de Johnston utilizando el Método 3 para el juego $[q; w] \in SW(N)$, como

$$JT([q; w]) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{18}\right).$$

Función generatriz para Colomer-Martínez

Recordemos la expresión del índice de Colomer-Martínez formulado en la Expresión (1.9) en la que se involucran las coaliciones ganadoras minimales de cada jugador y los pesos de sus jugadores. Para cada $i \in N$, el índice de Colomer-Martínez asigna

$$CM_i([q;w]) = \frac{1}{|W^m(N)|} \sum_{S \in W_i^m} \frac{w_i}{w_S},$$

donde w_S denota el peso de las coaliciones minimales ganadoras de i, $w(S)$ con $S \in W_i^m$.

Veamos ahora el método para el cálculo de este índice de forma más eficiente utilizando funciones generatrices, que se describe en Armijos-Toro et al. (2024b).

Método 4. Sea $[q;w] \in SW(N)$ un juego de mayoría ponderada. Los pasos para calcular el índice de Colomer-Martínez para un jugador $i \in N$ mediante funciones generatrices se describen a continuación.

- **Paso 1. Reescritura del índice.**

  Comencemos introduciendo un par de definiciones. Para cada $i \in N$,

  - $CW_i = \{w(S)/S \in W_i(N)\}$ denota el conjunto de pesos asociados a las coaliciones mínimas ganadoras en las que participa el jugador i.
  - $cm_k^i = |\{S \in W_i^m/w(S) = k\}|$ denota el número de coaliciones ganadoras en las que esté el jugador i y tengan un peso igual a k.

  Así, el índice de Colomer-Martínez puede reescribirse como

  $$CM_i([q;w]) = \frac{w_i}{|W^m(N)|} \sum_{k \in CW_i} \frac{cm_k^i}{k}, \text{ para cada } i \in N. \tag{2.8}$$

- **Paso 2. Obtención de las coaliciones ganadoras minimales mediante una función generatriz.**

  Para obtener las coaliciones posibles, usaremos la función generatriz vista en la Expresión (2.2), eliminando la variable t (que en este caso será irrelevante). Es decir, obtendremos la función

  $$F(x, z_1, ..., z_n) = \prod_{j=1}^{n} (1 + x^{w_j} z_j).$$

  Seleccionando aquellos monomios cuyo exponente k de la variable x^k sea mayor que q, obtenemos los términos asociados a coaliciones ganadoras, el número total de estas, $|W(N)|$ viene dado por el número de sumandos. Por último, eliminamos aquellos términos en los que algún jugador no sea crítico, obtenemos así un polinomio $GCM(x, z_1, ..., z_n)$ cuyos términos se asocian a las coaliciones ganadoras minimales del juego. El número total de estas coaliciones, $|W^m(N)|$, viene dado por el número de sumandos del polinomio.

- **Paso 3. Obtención de cm_k^i.**

  A partir de $GCM(x, z_1, ..., z_n)$ obtenemos n funciones de la forma $GCM^i(x)$, cada una asociada a cada jugador, $i \in N$. La función i-ésima será el resultado de seleccionar aquellos términos en los que esté presente la variable z_i y posteriormente eliminar las variables z. Cada una de estas funciones contiene los términos x^k asociados a las coaliciones ganadoras minimales en las que está el jugador i. El conjunto de pesos CW_i será el conjunto de exponentes de estas variables x^k en la función $GCM^i(x)$.

  Para acabar, cm_k^i será el coeficiente del término x^k en la función $GCM^i(x)$.

- **Paso 4. Cálculo del índice de Colomer-Martínez.**

  Con la información obtenida en los anteriores pasos ya podemos calcular el índice de Colomer-Martínez usando la reformulación vista en en la Expresión (2.8).

Ilustraremos su uso mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.9. *Apliquemos el método en el Ejemplo 1.5 y calculemos el índice de Colomer-Martínez. Recordemos que se trata de un juego* $[9; 6, 5, 3, 2] \in SW(N)$ *con* $N = \{A, B, C, D\}$*, asociaremos a cada jugador el índice correspondiente a su posición alfabética. Consideremos* $D \in N$*, que se corresponde con el jugador* 4.

Observando la reformulación del índice en el Paso 1 *del procedimiento, nos centramos en el cálculo del conjunto de pesos* $CM^i(x)$ *y en los coeficientes* cm_k^i*. Para ello, siguiendo el segundo paso, debemos calcular la función generatriz y filtrar los términos para obtener aquellos asociados a coaliciones ganadoras minimales. Escribiremos la función siguiendo la notación propuesta en el Ejemplo 2.4, los exponentes de monomios asociados a coaliciones perdedoras en rojo para su posterior eliminación y aquellos asociados a coaliciones ganadoras en verde.*

$$\begin{aligned}F(x, z_1, z_2, z_3, z_4, t) &= \prod_{j=1}^{4}(1 + x^{w_j} z_j t) = (1 + x^6 z_1 t)(1 + x^5 z_2 t)(1 + x^3 z_3 t)(1 + x^2 z_4 t)\\ &= x^{16} z_1 z_2 z_3 z_4 t^4 + x^{14} z_1 z_2 z_3 t^3 + x^{13} z_1 z_2 z_4 t^3 + x^{11} z_1 z_3 z_4 t^3 + x^{11} z_1 z_2 t^2\\ &+ x^{10} z_2 z_3 z_4 t^3 + x^9 z_1 z_3 t^2 + x^8 z_2 z_3 t^2 + x^8 z_1 z_4 t^2 + x^7 z_2 z_4 t^2 + x^6 z_1 t + x^5 z_3 z_4 t^2\\ &+ x^5 z_2 t + x^3 z_3 t + x^2 z_4 t + 1.\end{aligned}$$

Ahora, eliminamos las coaliciones perdedoras y denotamos, siguiendo la notación de jugadores críticos propuesta en el Ejemplo 1.6, en rojo las variables z_i *asociadas a los jugadores críticos de* *cada coalición. Tenemos los siguientes monomios:*

$$x^{16}z_1z_2z_3z_4t^4, x^{14}z_1z_2z_3t^3, x^{13}z_1z_2z_4t^3, x^{11}z_1z_3z_4t^3, x^{11}z_1z_2t^2, x^{10}z_2z_3z_4t^3 \text{ y } x^9z_1z_3t^2.$$

Si eliminamos aquellas coaliciones en los que algún jugador no es crítico, obtenemos el conjunto de monomios asociados a coaliciones ganadoras minimales y, eliminando la variable t podemos calcular la función $GCM(x, z_1, z_2, z_3, z_4)$ de segundo paso y $|W^m(N)|$.

$$GCM(x, z_1, z_2, z_3, z_4) = x^{11}z_1z_2 + x^{10}z_2z_3z_4 + x^9z_1z_3.$$

Concluimos entonces que $|W^m(N)| = 3$. A continuación, siguiendo el Paso 3 obtenemos la siguientes 4 funciones $GCM^i(x)$, para cada $i \in N$.

$$\begin{aligned} GCM^A(x) &= x^{11} + x^9, \\ GCM^B(x) &= x^{11} + x^{10}, \\ GCM^C(x) &= x^{10} + x^9, \\ GCM^D(x) &= x^{10}. \end{aligned}$$

Para el caso del jugador $D \in N$ tenemos que $CW_D = \{10\}$ y $cm^D_{10} = 1$. Con esto, podemos calcular su índice de poder de Colomer-Martínez aplicando la Fórmula (2.8) del Paso 1.

$$CM_D([q;w]) = \frac{w_D}{|W^m(N)|} \sum_{k \in CW_D} \frac{cm^D_k}{k} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{15}.$$

Con un razonamiento análogo para los demás jugadores, calculamos el índice de Colomer-Martínez utilizando el Método 4 para el juego $[q;w] \in SW(N)$. Para hacer los resultados más interpretables, escribimos en forma decimal estos valores, obteniendo que

$$CM([q;w]) \approx (0.404, 0.318, 0.211, 0.07).$$

Función generatriz para Johnston-Colomer-Martínez

Recordemos la expresión del índice de Johnston-Colomer-Martínez que vimos en la Ecuación (1.10) en la que se involucran las coaliciones cuasi-minimales, sus jugadores críticos y los pesos de estos. Así, para cada $i \in N$, el índice de Johnston-Colomer-Martínez asigna

$$JCM_i([q;w]) = \frac{1}{|Q(N)|} \sum_{S \in Q_i} \frac{w_i}{w(C(S))},$$

donde $C(S)$ denota el conjunto de jugadores críticos de las coaliciones cuasi-minimales ganadoras del jugador $i \in N$.

Veamos ahora el método, muy similar al utilizado en el cálculo del índice de Johnston, para el cálculo de este índice utilizando funciones generatrices de forma menos costosa computacionalmente que el cálculo directo. Originalmente, este procedimiento está descrito en Armijos-Toro et al. (2024b).

Método 5. Sea $[q;w] \in SW(N)$ juego de mayoría ponderada. Los pasos para calcular el índice de Johnston-Colomer-Martínez para un jugador $i \in N$ mediante funciones generatrices son los siguientes:

- **Paso 1. Reescritura del índice.**

  De nuevo, comencemos introduciendo un par de definiciones necesarias para la modelización de su cómputo. Para cada $i \in N$,

  - $W_{Q_i} = \{w(C(S))/S \in Q_i(N)\}$ denota el conjunto de pesos asociados a los jugadores críticos de aquellas coaliciones cuasi-minimales en las que participa el jugador i.
  - $jcm_k^i = |\{S \in Q_i(N)/w(C(S)) = k\}|$ denota, para cada uno de los pesos k de W_{Q_i}, el número de coaliciones cuasi-minimales de i cuyo peso de los jugadores críticos es igual a k.

  Así, tenemos la siguiente reescritura equivalente del índice de Johnston-Colomer-Martínez para cada $i \in N$.

  $$JCM_i([q;w]) = \frac{w_i}{|Q(N)|} \sum_{k \in W_{Q_i}} \frac{jcm_k^i}{k}. \tag{2.9}$$

- **Paso 2. Obtención de la función $J(z_1, ..., z_n, h_1, ..., h_n)$.**

  Para la obtención de esta función, los pasos a seguir son idénticos a los Pasos 2, 3 y 4 del Método 3 para el cálculo del índice de Johnston. Resumidamente, primero calculamos las i funciones generatrices, denotadas en este caso por $FJCM^i$, con las que obtenemos una enumeración de las coaliciones posibles sin el jugador i. A continuación, seleccionamos aquellas coaliciones que convierte en ganadoras i, sustituimos la variable x por $z_i h_i$ y así obtenemos las funciones g^i. Por último, las sumamos y obtenemos la función $J(z_1, ..., z_n, h_1, ..., h_n)$.

- **Paso 3. Obtención de $|Q(N)|$ y cálculo de jcm_k^i.**

  Sacamos factor común en $J(z_1, ..., z_n, h_1, ..., h_n)$, agrupando aquellos términos que tengan los mismos jugadores, esto es, las mismas variables z_j. Sabemos que el número de sumandos resultantes es igual al número de coaliciones ganadoras cuasi-minimales $|Q(N)|$, información que utilizaremos en el cálculo del índice.

  Para terminar, cambiamos en la expresión $J(z_1, ..., z_n, h_1, ..., h_n)$ los productos de variables z por la variable t. A esta variable le debemos añadir un exponente igual a la suma de los pesos de jugadores críticos correspondientes a la coalición cuasi-minimal a la que está asociada. Estos jugadores vienen indicados por los subíndices en la suma de las variables h. A esta nueva función le llamaremos $GJCM(h_1, ..., h_n, t)$.

Los valores jcm_k^i serán los coeficientes asociados a cada uno de los términos del polinomio $GJCM(h_1, ..., h_n, t)$ de la forma $t^k h_i$, para $k \in W_{Q_i}$ e $i \in N$.

- **Paso 4. Cálculo del índice de Johnston-Colomer-Martínez.**

  Con la información obtenida en los anteriores pasos ya podemos calcular el índice de Johnston-Colomer-Martínez usando la reformulación del índice dada en la Expresión (2.9) del Paso 1.

Aplicaremos dicho método en el cómputo del índice de Johnston-Colomer-Martínez sobre el ejemplo considerado a lo largo de esta memoria.

Ejemplo 2.10. *Apliquemos el método en el Ejemplo 1.5 y calculemos el índice de Johnston-Colomer-Martínez. Recordemos que se trata de un juego* $[9; 6, 5, 3, 2] \in SW(N)$ *donde* $N = \{A, B, C, D\}$*, asociaremos a cada jugador el índice correspondiente a su posición alfabética. Consideremos* $C \in N$*, que se corresponde con el jugador* 3.

De acuerdo con el Paso 1*, nos centramos en el cálculo del conjunto de pesos* W_{Q_i} *y los coeficientes* jcm_k^i*. Siguiendo el Paso 2, vemos que, la función* $J(z_1, z_2, z_3, z_4, h_1, h_2, h_3, h_4)$ *la podemos recuperar del Ejemplo 2.8 del cálculo del índice de Johnston mediante funciones generatrices. Así, tenemos*

$$J(z_1, z_2, z_3, z_4, h_1, h_2, h_3, h_4) = z_1z_2z_3h_1 + z_1z_2z_4h_1 + z_1z_3z_4h_1 + z_1z_2h_1 + z_1z_3h_1 + z_1z_2z_4h_2 + \\ + z_1z_2h_2 + z_2z_3z_4h_2 + z_1z_3z_4h_3 + z_2z_3z_4h_3 + z_1z_3h_3 + z_2z_3z_4h_4.$$

Aplicando el tercer paso, agrupamos los términos por jugadores, obteniendo

$$J(z_1, z_2, z_3, z_4, h_1, h_2, h_3, h_4) = z_1z_2(h_1 + h_2) + z_1z_3(h_1 + h_3) + z_1z_2z_3(h_1) + z_1z_2z_4(h_1 + h_2) \\ + z_1z_3z_4(h_1 + h_3) + z_2z_3z_4(h_2 + h_3 + h_4).$$

Por lo tanto, sabemos que $|Q(N)| = 6$*. Sustituimos ahora en la función los productos de variables* z_j *por la variable* t*. A esta variable le añadimos un exponente igual a los pesos de jugadores críticos de la coalición cuasi-minimal asociada. Tales jugadores se indican en el subíndice* i *de las variables* h*.*

$$J(z_1, z_2, z_3, z_4, h_1, h_2, h_3, h_4) = t^{11}(h_1 + h_2) + t^9(h_1 + h_3) + t^6(h_1) + t^{11}(h_1 + h_2) \\ + t^9(h_1 + h_3) + t^{10}(h_2 + h_3 + h_4).$$

Por último, agrupamos en función de h_i y obtenemos

$$J(z_1, z_2, z_3, z_4, h_1, h_2, h_3, h_4) = h_1(2t^{11} + 2t^9 + t^6) + h_2(2t^{11} + t^{10}) + h_3(t^{10} + 2t^9) + h_4(t^{10}).$$

Observando esta expresión, para el caso del jugador $C \in N$ tenemos que $W_{Q_C} = \{9, 10\}$. Por lo tanto, $jcm_9^C = 2$, $jcm_{10}^C = 1$ y podemos calcular el índice de Johnston-Colomer-Martínez para el jugador C siguiendo la Fórmula (2.9) del Paso 1.

$$JCM_C([q; w]) = \frac{w_C}{|Q(N)|} \sum_{k \in W_{Q_C}} \frac{jcm_k^C}{k} = \frac{3}{6}\left(\frac{2}{9} + \frac{1}{10}\right) = \frac{29}{180}.$$

Con un razonamiento análogo para los demás jugadores, calculamos el índice de Johnston-Colomer-Martínez utilizando el Método 5 para el juego $[q; w] \in SW(N)$. Para hacer los resultados más interpretables, escribimos en forma decimal estos valores, obteniendo que

$$JCM([q; w]) \approx (0.571, 0.235, 0.161, 0.03)\,.$$

Capítulo 3

Métodos para el cálculo de índices bajo estructuras coalicionales

Dentro de un parlamento o comité formado por diversos grupos, las decisiones suelen tomarse mediante votaciones. En este contexto, es común que algunos grupos se unan a otros, formando nuevas fuerzas, generalmente motivadas por afinidades ideológicas que pueden ser vistas como una restricción a la cooperación. Siguiendo Alonso-Meijide y Bowles (2005), entre otras referencias, en este capítulo analizaremos estas situaciones utilizando una modificación de los juegos de mayoría ponderada: los juegos de mayoría ponderada con estructura coalicional.

En la Sección 3.1 definiremos los juegos de mayoría ponderada con estructura coalicional, que se caracterizan por ser juegos de mayoría ponderada en los que consideramos particiones sobre el conjunto de jugadores. Posteriormente, en la Sección 3.2, introduciremos los índices de poder para este tipo de juegos y presentaremos dos de ellos, los denominados índice de Owen e índice de Banzhaf-Owen. Estos adaptan los índices de Shapley-Shubik y Banzhaf, anteriormente descritos en las Definiciones 1.4 y 1.7, a este nuevo contexto. Finalmente, en la Sección 3.3 describiremos dos métodos para su cómputo exacto utilizando funciones generatrices.

3.1. Juegos con estructura coalicional

En la definición de juego simple (Definición 1.4), los jugadores son libres de unirse a otros. Sin embargo, pueden formar nuevos grupos a la hora de votar, por lo que debemos utilizar particiones sobre el conjunto de jugadores N para describirlo. La definición formal de partición de un conjunto es la siguiente.

Definición 3.1. Dado un conjunto N. Se denomina **partición de** N a una colección $\{A_1, ..., A_n\}$

de subconjuntos no vacíos de N tal que: $\cup_{i=1}^{n} A_i = N$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ con $i \neq j$.

Siguiendo la notación en Alonso-Meijide y Bowles (2005), estas particiones sobre el conjunto de jugadores N, llamadas estructura coalicional, tienen la siguiente definición.

Definición 3.2. Sea $N = \{1, ..., n\}$ un conjunto finito de jugadores y $P(N)$ el conjunto de todas las particiones de N. Se define una **estructura coalicional de** N a cualquier partición $P \in P(N)$.

Dado un conjunto finito N, las posibles estructuras coalicionales serán de la forma $P = \{P_1, ..., P_m\} \in P(N)$. Denotaremos $M = \{1, ..., m\}$ como el conjunto de los $|M| = m$ índices de los elementos de la partición P. Para cada jugador $i \in N$, el elemento de la partición P al que pertenece se denota como P_k, $i \in P_k$, y $k \in M$ es su índice asociado; además, $|P_k| = p_k$ denota el número de jugadores de este elemento. Si en un juego simple consideramos sobre el conjunto de jugadores N una estructura coalicional $P \in P(N)$, obtenemos un juego simple asociado, denominado juego simple con estructura coalicional. Su definición formal es la siguiente.

Definición 3.3. Sea $(N, v) \in S(N)$ un juego simple con un conjunto finito de jugadores N y sea $P \in P(N)$ una partición de N. Definimos un **juego simple con estructura coalicional** como una terna (N, v, P).

Denotaremos $SU(N)$ como el conjunto de juegos simples con estructura coalicional sobre el conjunto N. Cada juego simple con estructura coalicional, (N, v, P), representa el juego simple resultante de suponer que, en el juego (N, v), los jugadores cooperan de acuerdo con las restricciones impuestas por la partición $P \in P(N)$. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.4. *Recuperemos el Ejemplo 1.5, en el que tenemos un parlamento formado por* 4 *grupos parlamentarios, A, B, C y D, con* 6*,* 5*,* 3 *y* 2 *miembros, respectivamente. De esta forma, el conjunto de jugadores es* $N = \{A, B, C, D\}$ *y la función característica asocia a una coalición el valor* 1 *si esta tiene* 9 *o más miembros, denominándose ganadora y en caso contrario, el valor* 0*, denominándose perdedora. Como pudimos comprobar en el dicho ejemplo, estamos ante un juego simple* $(N, v) \in S(N)$.

Supongamos ahora que, debido a afinidades ideológicas el grupo B y el grupo D, en una cierta votación, se unen dando lugar a un nuevo grupo parlamentario, BD, con un total de 7 *jugadores. De esta forma obtenemos un nuevo conjunto de jugadores,* $N' = \{A, BD, C\}$ *con* 6*,* 7 *y* 3 *miembros, respectivamente, que podemos expresar como partición de N de la siguiente forma* $P = \{\{A\}, \{B, D\}, \{C\}\} \in P(N)$*. De esta forma, P es una estructura coalicional de N y define un juego simple con estructura coalicional,* (N, v, P).

A continuación, definiremos la clase de juegos con la que trabajaremos en este capítulo, los juegos de mayoría ponderada con estructura coalicional. De igual forma a lo que ocurría con los juegos simples, obtendremos esta nueva clase de juegos al suponer particiones sobre el conjunto de jugadores.

Definición 3.5. Sea $[q;w] \in SW(N)$ un juego de mayoría ponderada con un conjunto finito de jugadores N y $P \in P(N)$ una partición de N. Definimos un **juego de mayoría ponderada con estructura coalicional** como un par $([q;w], P)$.

Denotamos $SUW(N)$ como el conjunto de juegos de mayoría ponderada con estructura coalicional sobre el conjunto N. A continuación, ilustramos esta definición sobre un ejemplo.

Ejemplo 3.6. *Como podemos observar en el Ejemplo 1.8, podemos adaptar el juego simple visto en el Ejemplo 1.5 al tomar pesos sobre los grupos parlamentarios iguales al número de miembros de estos y tomar una cuota igual a la mayoría absoluta, obteniendo el juego de mayoría ponderada,* $[q;w] = [9;6,5,3,2] \in SW(N)$*. Tomando la partición* $P = \{\{A\},\{B,D\},\{C\}\} \in P(N)$ *del Ejemplo 3.4 sobre el conjunto de jugadores,* $([q;w], P)$ *denota el resultante juego de mayoría ponderada con estructura coalicional.*

3.2. Índices de poder coalicionales

En esta sección, siguiendo Alonso-Meijide y Bowles (2005), presentamos una generalización del concepto de índice de poder para la clase de juegos de mayoría ponderada con estructura coalicional, $SUW(N)$. Esta generalización proporciona un concepto de solución que nos permitirá medir el poder o la influencia de cada jugador sobre el resultado final del juego. Además, al extender los índices de Shapley-Shubik y Banzhaf, definiremos dos índices de poder específicos para esta nueva clase de juegos. Para ello, comenzaremos dando la definición formal de índice de poder para la clase de juegos $SUW(N)$.

Definición 3.7. Sea $([q;w], P) \in SUW(N)$ un juego de mayoría ponderada con estructura coalicional. Se denomina **índice de poder coalicional** a una aplicación $f : (([q;w], P), v) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que asocia a cada juego con estructura coalicional un vector n-dimensional donde la componente i-ésima del vector proporciona una medida de la influencia del jugador i.

Una vez definido el concepto de índice de poder, presentamos dos de los índices presentes en Alonso-Meijide y Bowles (2005), estos son el índice de Owen (Owen, 1977), que generaliza el índice de Shapley-Shubik, y el índice de Banzhaf-Owen (Owen, 1981), que generaliza el índice de Banzhaf. Ambos índices están basados en las contribuciones marginales que hacen los jugadores tanto a jugadores de su propio grupo como a otros elementos de la partición; la diferencia residirá en los pesos asociados a estas contribuciones. La definición formal del índice de Owen para un juego $([q;w], P)$ es la siguiente.

Definición 3.8. Sea $([q;w],P) \in SUW(N)$ un juego de mayoría ponderada con estructura coalicional e $i \in N$. Se define el **índice de Owen (OW)** para el jugador i en el juego $([q;w],P)$ mediante la expresión

$$OW_i([q;w],P) = \sum_{R \subseteq M \setminus k} \sum_{T \subseteq P_k \setminus i} \frac{r!(m-r-1)!}{m!} \frac{t!(p_k-t-1)!}{p_k!} (w(Q \cup T \cup i) - w(Q \cup T)), \quad (3.1)$$

donde $T \subseteq P_k \setminus i$ son las coaliciones en P_k que no contienen al jugador $i \in N$ y $|T| = t$ denota el número de jugadores que conforman estos subconjuntos; $R \subseteq M \setminus k$ son los subconjuntos de índices de M tras eliminar el índice k asociado a P_k, $|R| = r$ denota el número de índices de estos subconjuntos; $Q = \cup_{r \in R} P_r$ es la unión de los elementos de la partición P cuyos índices pertenecen a R. También en este contexto, $w(Q \cup T \cup i) - w(Q \cup T)$ denota las contribuciones marginales del jugador i a las coaliciones $Q \cup T$.

Para el caso de valor de Banzhaf-Owen, su expresión se detalla a continuación.

Definición 3.9. Sea $([q;w],P) \in SUW(N)$ un juego de mayoría ponderada con estructura coalicional e $i \in N$. Se define el **índice de Banzhaf-Owen (BO)** para el jugador i en el juego $([q;w],P)$ mediante la expresión

$$BO_i([q;w],P) = \sum_{R \subseteq M \setminus k} \sum_{T \subseteq P_k \setminus i} \frac{1}{2^{m+p_k-2}} (w(Q \cup T \cup i) - w(Q \cup T)). \quad (3.2)$$

Con el fin de ilustrar su cómputo, obtendremos ambos índices en un ejemplo concreto.

Ejemplo 3.10. *Calcularemos los índices de Owen (OW) y Banzhaf-Owen (BO) para el Ejemplo 3.6. Consideremos el grupo parlamentario $B \in N$, que debido a motivos ideológicos se asocia con el grupo D. Recordemos que este parlamento se plantea como un juego de mayoría ponderada con estructura coalicional, $([q;w],P) \in SUW(N)$, donde la estructura coalicional es $P = \{\{A\},\{B,D\},\{C\}\} \in P(N)$. Calcularemos primeramente para el jugador B sus contribuciones marginales.*

La estructura coalicional $P \in P(N)$ en este caso es $P = \{P_1,P_2,P_3\} = \{\{A\},\{B,D\},\{C\}\}$, por ello, el conjunto de índices será $M = \{1,2,3\}$. Como el grupo $B \in P_2$ entonces el índice $k = 2$, $P_2 = \{B,D\}$ y $|P_2| = 2$. Estudiemos ahora cuáles son los subconjuntos $T \subseteq P_2 \setminus B$, en este caso, $T \in \{\emptyset,\{D\}\}$ y $|T| \in \{0,1\}$. Calculemos ahora los posibles subconjuntos de índices $R \subseteq M \setminus 2$, estos serán, $R \in \{\emptyset,\{1\},\{3\},\{1,3\}\}$ y $|R| \in \{0,1,2\}$. Una vez tenemos calculados los subconjuntos R, podemos calcular $Q = \cup_{r \in R} P_r$, obteniendo los siguientes resultados para los distintos subconjuntos de índices.

$$R = \emptyset \Rightarrow Q = \emptyset, \quad R = \{1\} \Rightarrow Q = P_1 = \{A\},$$
$$R = \{3\} \Rightarrow Q = P_3 = \{C\} \ \ y \ \ R = \{1,3\} \Rightarrow Q = P_1 \cup P_3 = \{A,C\}.$$

Una vez hemos determinado los conjuntos $Q \in \{\emptyset, \{A\}, \{C\}, \{A,C\}\}$ y $T \in \{\emptyset, \{D\}\}$ sus posibles uniones son $Q \cup T$ y $Q \cup T \cup B$, chequearemos, con la función característica, si estas son ganadoras o perdedoras. Las denotaremos de acuerdo con la notación y el código de colores habitual, con el que identificábamos en color verde aquellas coaliciones con un número de miembros mayor o igual a 9, lo que nos indica que la función característica le asocia el valor 1. Estas uniones son las siguientes.

$$Q \cup T \in \{\emptyset(0), A(6), C(3), D(2), AC(9), AD(8), CD(5), ACD(11)\},$$
$$Q \cup T \cup B \in \{B(5), AB(11), BC(8), BD(7), ABC(14), ABD(13), BCD(10), ABCD(16)\}.$$

Con esto, ya podemos calcular las contribuciones marginales del jugador B a las coaliciones $Q \cup T$. Los únicos elementos no nulos serán aquellas coaliciones que convierta en ganadoras, lo que nos permite afirmar la siguiente equivalencia (en el resto de casos, las contribuciones marginales tienen valor nulo).

$$w(Q \cup T \cup B) - w(Q \cup T) = 1 \Leftrightarrow Q \cup T = \{A(6), AD(8), CD(5)\}. \tag{3.3}$$

Una vez hemos calculado los 3 sumandos no nulos de los sumatorios asociados a las contribuciones marginales, podemos proceder al cálculo de los pesos asociados a los índices de OW y BO. Para su cálculo, necesitaremos el número de índices del conjunto $M = \{1, 2, 3\}$, $m = 3$; el número de jugadores de los subconjuntos $T \subseteq P_2 \setminus B$, como vimos al principio del ejemplo, $T \in \{\emptyset, \{D\}\}$ y entonces, $t \in \{0, 1\}$; el número de índices de los subconjuntos $R \subseteq M \setminus 2$, $r \in \{0, 1, 2\}$; y además, el número de jugadores del elemento de la partición al que pertenece el jugador B, como ya hemos visto, $P_2 = \{B, D\}$, por tanto, $p_k = 2$. Teniendo en cuenta las contribuciones marginales no nulas, procedemos al cálculo de ambos índices. Comencemos calculando el índice de Owen para el jugador B, al usar la Ecuación (3.1).

$$OW_B([q; w], P) = \frac{1!1!}{3!}\frac{0!1!}{2!} + \frac{1!1!}{3!}\frac{1!0!}{2!} + \frac{1!1!}{3!}\frac{1!0!}{2!} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}.$$

Calculemos ahora el índice de Banzhaf-Owen para el jugador B, al usar la Ecuación (3.2).

$$BO_B([q; w], P) = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{3}{8}.$$

Aplicando ahora los mismos razonamientos para el resto de jugadores, obtenemos el índice de Owen y Banzhaf-Owen para todos los jugadores de N. Estos son:

$$OW([q; w], P) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}\right), \quad BO([q; w], P) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right).$$

3.3. Métodos para el cálculo de los índices de Owen y Banzhaf-Owen

Como se ha comprobado en la anterior Sección 3.2, para calcular los índices de Owen y Banzhaf-Owen para juegos de mayoría ponderada, es necesario determinar para cada jugador, un conjunto de coaliciones que cumplen unas determinadas características y que tal jugador convierte en ganadoras. Al igual que ocurría para los juegos sin particiones, el cálculo de las coaliciones posibles para identificar estos conjuntos, es un proceso que se vuelve computacionalmente costoso a medida que aumenta el número de jugadores.

En esta sección, siguiendo Alonso-Meijide y Bowles (2005), definiremos cuáles son estas coaliciones que debemos calcular, denominadas *swings* compatibles, y presentaremos dos métodos que, mediante el uso de funciones generatrices, permiten calcular estos índices de manera más eficiente y accesible. Para poder presentar estos métodos, presentamos un par de definiciones sobre la clase de juegos de mayoría ponderada con estructura coalicional. La primera definición define el concepto de que una coalición $S \subseteq N$ sea compatible con una estructura coalicional $P \in P(N)$ para un determinado jugador y permite definir la segunda, que generaliza el concepto de *swing* para este tipo de juegos.

Definición 3.11. Sea $([q;w],P) \in SUW(N)$ un juego de mayoría ponderada con estructura coalicional $P = \{P_1, ..., P_m\}$, una coalición $S \subseteq N$ es **compatible** con la partición P para un jugador $i \in P_j$ si se verifica que $S = \cup_{k \in R \subseteq M \setminus j} P_k \cup T$ con $T \subseteq P_j$.

Aplicaremos a continuación esta definición en un ejemplo práctico y estudiaremos las coaliciones compatibles con la estructura coalicional P para un determinado jugador.

Ejemplo 3.12. *Utilizando el Ejemplo 3.6, donde tenemos $([q;w],P) \in SUW(N)$, con $N = \{A, B, C, D\}$ y $P = \{\{A\},\{B, D\},\{C\}\} \in P(N)$, vamos a estudiar las coaliciones $S \subseteq N$ compatibles con la partición $P \in P(N)$ para el jugador $B \in N$.*

Recuperemos información del Ejemplo 3.10, la estructura coalicional P tiene tres elementos, por ello tenemos el conjunto de índices $M = \{1, 2, 3\}$. Como $B \in P_2 = \{B, D\}$ entonces $j = 2$ y podemos definir el conjunto $M \setminus 2 = \{1, 3\}$ y sus subconjuntos $R \in \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$. Los subconjuntos de P_2 serán $T \in \{\emptyset, \{B\}, \{D\}, \{B, D\}\}$. De entre todas las coaliciones compatibles posibles, comprobemos una de ellas, por ejemplo, $S = \{A, D\}$. Esta coalición es compatible dado que se puede formar tomando $R = \{1\}$ y $T = \{D\}$. En efecto, $S = P_1 \cup \{T\} = \{A\} \cup \{D\} = \{A, D\}$.

De acuerdo con Alonso-Meijide y Bowles (2005), si $S \subseteq N$ es compatible con la estructura coalicional $P \in P(N)$ para un jugador $i \in P_j$, entonces S es compatible con P para cualquier jugador $k \in P_j$. Esta propiedad nos permite definir, para cada juego $([q; w], P) \in SUW(N)$, el conjunto de todas las coaliciones $S \subseteq N$ compatibles con una partición P para todos los jugadores de P_j, se denota con $C(j, P)$.

Presentaremos ahora la segunda definición relevante de la sección, la generalización del concepto de *swings* para juegos de mayoría ponderada con estructura coalicional. Esta definición nos permitirá entender aquellas coaliciones sobre las que la contribución marginal del jugador i es no nula en el cálculo de los índices de Owen y Banzhaf-Owen; gracias a ello, este concepto nos permitirá estudiar métodos de cálculo de tales índices.

Definición 3.13. Sea $([q; w], P) \in SUW(N)$ un juego de mayoría ponderada con estructura coalicional, un ***swing* compatible** con la partición P para un jugador $i \in P_j$, es un par de coaliciones $(S, S \cup i)$ de tal forma que S es perdedora, $S \in C(j, P)$ y $S \cup i$ es ganadora.

El conjunto de tales coaliciones se denotará por $CS(j, P)$, además, denotaremos por $\eta_i([q; w], P) = |CS(j, P)|$ el número de *swings* compatibles con P para un jugador $i \in N$ en el juego $([q; w], P) \in SUW(N)$. De acuerdo con Rodríguez-Veiga et al. (2016), si nos fijamos en las Ecuaciones (3.1) y (3.2), y en el razonamiento realizado en el Ejemplo 3.10, los *swings* compatibles con una partición P para un jugador $i \in N$ son aquellas coaliciones $Q \cup T \subseteq N$ tales que $w(Q \cup T \cup i) - w(Q \cup T) = 1$, donde Q y T son los conjuntos presentados en la Definición 3.8. Una consecuencia de esta afirmación es que el número de *swings* compatibles con P para el jugador i viene dado por la siguiente expresión.

$$\eta_i([q; w], P) = \sum_{R \subseteq M \setminus k} \sum_{T \subseteq P_k \setminus i} (w(Q \cup T \cup i) - w(Q \cup T)). \tag{3.4}$$

Vamos a ilustrar con un ejemplo el cálculo del número de *swings* compatibles con P para un jugador $i \in N$, en un juego $([q; w], P) \in SUW(N)$.

Ejemplo 3.14. *Recuperando el juego con estructura coalicional del Ejemplo 3.6, vamos a calcular el conjunto de swings compatibles con la partición $P = \{\{A\}, \{B, D\}, \{C\}\}$ para el jugador B. Utilizando el razonamiento anterior y la Equivalencia (3.3), podemos afirmar que el conjunto de coaliciones que el jugador B convierte en ganadoras es, en este caso, el siguiente conjunto, $CS([q; w], P) = \{A(6), AD(8), CD(5)\}$.*

Únicamente nos falta comprobar que estas coaliciones son compatibles con la partición P para los jugadores de P_2, equivalentemente, tenemos que ver que para cualquier $S \in CS([q; w], P)$ tenemos $S \in C(2, P)$. Nos llega con probarlo para un jugador de $P_2 = \{B, D\}$, supongamos B.

Para ello, usaremos la Definición 3.11 y el razonamiento del Ejemplo 3.12.

$$R = \{1\}, T = \{\emptyset\} \Rightarrow S = P_1 \cup \{T\} = \{A\} \in CS([q;w], P),$$
$$R = \{1\}, T = \{D\} \Rightarrow S = P_1 \cup \{T\} = \{A, D\} \in CS([q;w], P),$$
$$R = \{3\}, T = \{D\} \Rightarrow S = P_3 \cup \{T\} = \{C, D\} \in CS([q;w], P).$$

Podemos afirmar entonces que las coaliciones $S \in CS([q;w], P)$ son swings compatibles con P para el jugador B. Además, gracias a Expresión (3.4)*, podemos deducir que el número total de este tipo de conjuntos es $\eta_B([q;w], P) = 3$.*

3.3.1. Método para el cómputo del índice de Owen basado en funciones generatrices

En esta sección, abordaremos el cómputo exacto del índice de Owen para juegos de mayoría ponderada mediante el empleo de funciones generatrices. Considérese un juego $([q;w], P) \in SUW(N)$ y un jugador $i \in N$. De acuerdo con la Definición 3.8, el índice de Owen para i es

$$OW_i([q;w], P) = \sum_{R \subseteq M \setminus k} \sum_{T \subseteq P_k \setminus i} \frac{r!(m-r-1)!}{m!} \frac{t!(p_k - t - 1)!}{p_k!} (w(Q \cup T \cup i) - w(Q \cup T)),$$

donde $M = \{1, ..., m\}$, $P = \{P_1, ..., P_m\}$, $Q = \cup_{r \in R} P_r$ y $P_k \in P$ es el elemento de la partición al que pertenece el jugador i.

Siguiendo Alonso-Meijide y Bowles (2005), vamos ahora a presentar el método para el cálculo de este índice de forma más eficiente computacionalmente utilizando funciones generatrices.

Método 6. Sea $([q;w], P) \in SUW(N)$ un juego de mayoría ponderada con estructura coalicional $P \in P(N)$. Los pasos para calcular el índice de Owen para un jugador $i \in N$ mediante funciones generatrices son los siguientes:

- **Paso 1. Reescritura del índice utilizando *swings* compatibles.**

  Debemos reescribir el índice utilizando los *swings* compatibles con la partición P para el jugador $i \in N$ en cuestión. La expresión equivalente del índice de Owen es la siguiente.

$$\begin{aligned} OW_i([q;w], P) &= \sum_{\{S \in CS(j,P)\}} \frac{|m_j(S)|!(m - |m_j(S)| - 1)!}{m!} \frac{|S \cap P_j|!(p_j - |S \cap P_j| - 1)!}{p_j!} \\ &= \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{p_j - 1} \frac{r!(m-r-1)!}{m!} \frac{l!(p_j - l - 1)!}{p_j!} d_{rl}^i, \end{aligned}$$

donde, $m_j(S) = \{k \in M \setminus j / P_k \subseteq S\}$ es el conjunto de índices de $M \setminus j$ asociados a elementos de la partición P_k y contenidos en *swings* compatibles con P para el jugador $i \in P_j$. Por otro lado, d^i_{rl}, es el número de tales *swings* compatibles tales que $|m_j(S)| = r$ y $|S \cap P_j| = l$.

- **Paso 2. Expresión para la obtención de los d^i_{rl}.**

  Para el cálculo del índice de Owen, como podemos observar en la reescritura del índice, necesitamos obtener los números d^i_{rl}. Siguiendo Alonso-Meijide y Bowles (2005), obtendremos interpretación de tales números que nos acercará a su cálculo. Para cualquier $r \in [0, m-1]$ y $l \in [0, p_j - 1]$ tenemos que

$$d^i_{rl} = \sum_{k=q-w_i}^{q-1} a^i_{krl}, \tag{3.5}$$

  donde el coeficiente a^i_{krl} es el número de *swings* compatibles con P, $(S, S \cup i)$, para un jugador $i \in P_j$ tal que $w(S) = k$, $|m_j(S)| = r$ y $|S \cap P_j| = l$.

- **Paso 3. Obtención de a^i_{krl} mediante funciones generatrices.**

  En este paso, presentaremos una función generatriz que nos permita obtener los números a^i_{krl}. Dicha función la presentamos en el siguiente resultado.

  Proposición 3.15. *(Alonso-Meijide y Bowles, 2005). Sea $([q; w], P) \in SUW(N)$ juego de mayoría ponderada con estructura coalicional con $P = \{P_1, ..., P_m\}$. La función generatriz de los números $\{a^i_{krl}\}_{k\geq 0, r\geq 0, l\geq 0}$ para un jugador $i \in P_j$ viene dada por*

$$FOW_i(x, t, z) = \prod_{r=1, r\neq j}^{m} (1 + x^{w(P_r)}t) \cdot \prod_{l=1, j_l\neq i}^{p_j} (1 + x^{w_{j_l}}z), \tag{3.6}$$

  donde $w(P_r) = \sum_{j\in P_r} w_j$ y $P_j = \{j_1, j_2, .., j_{p_j}\}$.

  Esta función generatriz es una adaptación de la función obtenida en la Definición 2.2, en la que modificamos la estructura del productorio para adaptarlo a la clase de juegos con estructura coalicional P. En el primer productorio de esta función, obtenemos una enumeración de las 2^{m-1} coaliciones de uniones compatibles posibles que pueden formar los $m-1$ elementos de la partición $P(N) \setminus P_j$. El segundo productorio está asociado al elemento P_j de P y recorre los $p_j - 1$ jugadores forman $P_j \setminus i$. Al calcularlo, obtenemos las 2^{p_k-1} coaliciones de uniones compatibles posibles que pueden formar tales jugadores. Por último, al multiplicar ambos productos obtenemos una enumeración de las 2^{m+p_k-2} posibles coaliciones compatibles sin el jugador i. Los términos del polinomio resultante serán de la forma $x^k t^r z^l$, donde k nos índica el peso de la coalición asociada, r el número de elementos de la partición $P(N) \setminus P_j$ que la forman y l el número de jugadores de $P_j \setminus i$ que la forman.

- **Paso 4. Identificación de d^i_{rl} como elementos de la función generatriz.**

  En este paso vamos a ver cómo podemos extraer los números d^i_{rl} a partir del polinomio obtenido con la función generatriz. Lo primero que debemos hacer es identificar tales valores con los coeficientes de la siguiente expresión que depende únicamente de las variables t y z, aplicando posteriormente la Ecuación (3.5), obtenemos una equivalente.

$$g_i(t,z) = \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{p_j-1} d^i_{rl} t^r z^l = \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{p_j-1}\left[\sum_{k=q-w_i}^{q-1} a^i_{krl}\right] t^r z^l. \tag{3.7}$$

  Finalmente, gracias a la ecuación anterior y a la Proposición 3.15, que nos permite calcular los números a^i_{krl} mediante la función generatriz, podemos establecer la siguiente igualdad.

$$FOW_i(x,t,z) = \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{p_j-1}\left[\sum_{k=q-w_i}^{w(N)-w_i} a^i_{krl} x^k\right] t^r z^l. \tag{3.8}$$

  Por ello, los coeficientes de la función $g_i(t,z)$, d^i_{rl} pueden obtenerse seleccionando los coeficientes de aquellos términos $x^k t^r z^l$ del polinomio proporcionado por la función generatriz $FOW_i(x,t,z)$, en los que k tome valores comprendidos entre $q - w_i$ y $q - 1$.

- **Paso 5. Cálculo del índice de Owen.**

  Una vez hallamos obtenido los d^i_{rl}, es decir, el número de *swings* compatibles con S para el jugador $i \in P_j$ tales que $|m_j(S)| = r$ y $|S \cap P_j| = l$; conocemos el número de índices del conjunto M, $|M| = m$ y el número de jugadores de la coalición del jugador $i \in P_j$, $|P_j| = p_j$, podemos calcular el índice de Owen para el jugador $i \in N$ gracias a la reescritura del primer paso.

La estructura de este método es una extensión del Método 1, que utilizamos para calcular el índice de Shapley-Shubik para juegos de mayoría ponderada sin particiones. Esto se debe a que en ambos métodos, reescribimos el índice para buscar el número de *swings* (compatibles en el caso de juegos con particiones) junto con información sobre sus elementos. La diferencia reside en que, al considerar particiones sobre el conjunto de jugadores, tenemos que exigir más condiciones en cada uno de los pasos. Pongamos ahora este método en práctica para un ejemplo en concreto.

Ejemplo 3.16. *Apliquemos el método en el Ejemplo 3.6 y calculemos el índice de Owen. Recordemos que se trata de un juego* $([q;w],P) \in SUW(N)$*, donde* $N = \{A,B,C,D\}$*,* $[q;w] = [9;6,5,3,2]$ *y* $P = \{\{A\},\{B,D\},\{C\}\}$*. Observemos primeramente que los pesos de los elementos de la partición* P *son los siguientes,* $w(P_1) = w(A) = 6$*,* $w(P_2) = w(BD) = 7$ *y* $w(P_3) = w(C) = 3$*. Consideremos* $B \in N$*, que se corresponde con el jugador* 2*. En el primer paso obtenemos una reescritura del índice que nos permite centrarnos en búsqueda de los números*

d_{rl}^B, *es decir, el número de swings compatibles compatibles con la partición* $P \in P(N)$ *para el jugador* $B \in P_2 = \{B, D\}$ *verificando que* $|m_B(S)| = r$ *con* $r \in [0, 2]$ *y que* $|S \cap P_2| = l$ *con* $l \in [0, 1]$. *Gracias a la Expresión* (3.5) *del segundo paso, interpretamos los* d_{rl}^B *como una suma en función del peso del swing compatible,* $w(S) = k$ *con* $k \in [4, 8]$. *Los elementos de esta suma son los coeficientes* a_{krl}^B. *En el tercer paso, obtenemos en la Proposición 3.15 la función generatriz con la que calcular un polinomio cuyos elementos están asociados a las* $2^3 = 8$ *posibles coaliciones sin el jugador* i. *La función generatriz del jugador* $B \in N$ *es la siguiente.*

$$\begin{aligned} FOW_B(x,t,z) &= \prod_{r=1, r\neq 2}^{3} (1 + x^{w(P_r)}t) \cdot (1 + x^{w_{j_2}}z) = (1 + x^{w(P_1)}t)(1 + x^{w(P_3)}t) \cdot (1 + x^{w_{j_2}}z) \\ &= (1 + x^{w(A)}t)(1 + x^{w(C)}t) \cdot (1 + x^{w(D)}z) = (1 + x^6 t)(1 + x^3 t) \cdot (1 + x^2 z) \\ &= x^{11}t^2 z + x^9 t^2 + x^8 tz + x^6 t + x^5 tz + x^3 t + x^2 z + 1. \end{aligned}$$

Siguiendo el razonamiento visto en el cuarto paso, podemos obtener los números d_{rl}^i *al seleccionar los coeficientes de los términos* $x^k t^r z^l$ *con* k *entre* 4 *y* 8, *siguiendo la notación presentada en el Ejemplo 2.4, marcaremos en verde los exponentes* k *de los términos que cumplen la condición y en rojo los que no la verifican.*

$$FOW_B([q;w],P) = x^{11}t^2 z + x^9 t^2 + x^8 tz + x^6 t + x^5 tz + x^3 t + x^2 z + 1.$$

Con los coeficientes de estos términos obtenemos las funciones $g_B(t,z)$ *de la Ecuación* (3.7).

$$g_B(t,z) = \sum_{r=0}^{2} \sum_{l=0}^{1} d_{rl}^B t^r z^l = 2tz + t.$$

Gracias a esta expresión conocemos los coeficientes d_{rl}^i *y además los valores* r, *en el exponente de la variable* t^r *y* l, *en el exponente de la variable* z^l. *Sustituyendo tales valores en la reescritura del índice del primer paso obtenemos el índice de Owen para el jugador* B.

$$OW_B([q;w],P) = \frac{1!1!}{3!}\frac{1!0!}{2!}2 + \frac{1!1!}{3!}\frac{0!1!}{2!}1 = \frac{1}{4}.$$

Realizando el proceso análogo para el resto de jugadores, obtenemos el índice de Owen. Este queda determinado por

$$OW([q;w],P) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}\right).$$

3.3.2. Método para el cómputo del índice de Banzhaf-Owen basado en funciones generatrices

En esta sección, abordaremos el cómputo exacto del índice de Banzhaf-Owen para juegos de mayoría ponderada mediante el empleo de funciones generatrices. Considérese un juego $([q;w],P) \in SUW(N)$ y un jugador $i \in N$. De acuerdo con la Definición 3.9, el índice de Banzhaf-Owen para i es

$$BO_i([q;w],P) = \sum_{R \subseteq M \setminus k} \sum_{T \subseteq P_k \setminus i} \frac{1}{2^{m+p_k-2}} (w(Q \cup T \cup i) - w(Q \cup T)),$$

donde $M = \{1, ..., m\}$, $P = \{P_1, ..., P_m\}$, $Q = \cup_{r \in R} P_r$ y $P_k \in P$ es el elemento de la partición al que pertenece el jugador i. Siguiendo Alonso-Meijide y Bowles (2005), vamos ahora a presentar un método para el cálculo de este índice de forma más eficiente computacionalmente utilizando funciones generatrices.

Método 7. Sea $([q;w],P) \in SUW(N)$ un juego de mayoría ponderada con estructura coalicional $P \in P(N)$. Los pasos para calcular el índice de Banzhaf-Owen para un jugador $i \in N$ mediante funciones generatrices son los siguientes.

- **Paso 1. Reescritura del índice utilizando *swings* compatibles.**

  Utilizando la Expresión (3.4), podemos reescribir este índice utilizando el número de *swings* compatibles con P para el jugador i, $\eta_i([q;w],P)$ de la siguiente manera.

  $$BO_i([q;w],P) = \frac{\eta_i([q;w],P)}{2^{m+p_k-2}}. \tag{3.9}$$

  Esta reescritura nos permite reducir el estudio del índice de poder al cálculo del número de *swings* compatibles con P para el jugador i.

- **Paso 2. Expresión para contar los *swings* compatibles con P para un jugador i.**

  Para poder contar el número de *swings* compatibles utilizaremos el siguiente resultado.

  Proposición 3.17. *(Alonso-Meijide y Bowles, 2005). Sea $([q;w],P)$ juego de mayoría ponderada con estructura coalicional con $P = \{P_1, ..., P_m\}$. El número de swings compatibles con P para un jugador $i \in P_j$ es*

  $$\eta_i([q;w],P) = \sum_{k=q-w_i}^{q-1} b_k^i,$$

  donde b_k^i es el número de coaliciones $S \in C(j,P)$ tales que $i \notin S$ y $w(S) = k$.

- **Paso 3. Obtención de los coeficientes b_k^i mediante una función generatriz.**

  En este paso buscamos obtener los coeficientes b_k^i, lo que nos permite obtener el número de *swings* compatibles para cada jugador y así calcular el índice. Para ello, usaremos la función generatriz definida en el siguiente resultado de Alonso-Meijide y Bowles (2005).

Proposición 3.18. *(Alonso-Meijide y Bowles, 2005). Sea* $([q;w],P)$ *juego de mayoría ponderada con estructura coalicional* $P=\{P_1,...,P_m\}$*. La función generatriz de los números* $\{b_k^i\}_{k\geq 0}$ *para un jugador* $i\in P_j$ *viene dada por*

$$FBO_i(x)=\prod_{r=1,r\neq j}^{m}(1+x^{w(P_r)})\cdot\prod_{l=1,j_l\neq i}^{p_j}(1+x^{w_{j_l}}),\tag{3.10}$$

donde $w(P_r)=\sum_{j\in P_r}w_j$ *y* $P_j=\{j_1,j_2,..,j_{p_j}\}$*.*

De forma similar a la que ocurría en el Método 6 para el cálculo del índice de Owen, esta función es una modificación de la función generatriz presentada en la Definición 2.2, donde la única variable que tenemos es x y la estructura del productorio se modifica para adaptarlo a la clase de juegos con estructura coalicional P. Al calcular el primer productorio, obtenemos una enumeración de las 2^{m-1} coaliciones de uniones compatibles posibles que pueden formar los $m-1$ elementos de la partición $P(N)\setminus P_j$. El segundo productorio está asociado al elemento $P_j\setminus i$ de P y recorre los p_j-1 jugadores que lo forman. Al calcular este producto obtenemos las 2^{p_k-1} coaliciones de uniones compatibles posibles que pueden formar tales jugadores. Por último, al multiplicar ambos productos obtenemos una enumeración de las 2^{m+p_k-2} posibles coaliciones compatibles sin el jugador i. Los términos del polinomio resultante serán de la forma x^k donde k representa el peso de la coalición. Los coeficientes asociados a los monomios x^k serán los b_k^i.

- **Paso 4. Conteo del número de *swings* compatibles para un jugador i.**

  Aplicando la Proposición 3.17, podemos calcular para cada jugador $\eta_i([q;w],P)$. Para ello, seleccionamos aquellos coeficientes b_k^i asociados a los monomios x^k con exponente $k\in[q-w_i,q-1]$ y los sumamos, obteniendo así $\eta_i([q;w],P)$.

- **Paso 5. Cálculo del índice de Banzhaf-Owen.**

  Una vez hemos obtenido el número de *swings* compatibles con la estructura coalicional P del jugador $i\in P_k$, y conocemos el número de jugadores de la coalición a la que pertenece el jugador i, $|P_k|=p_k$, podemos calcular el índice de Banzhaf-Owen para el jugador i utilizando la Expresión (3.9) del primer paso.

Este método es una extensión del Método 2, donde se obtiene un proceso para el cálculo del índice de Banzhaf en un juego de mayoría ponderada mediante funciones generatrices. La similitud reside en que para el cálculo de ambos índices, debemos contar el número de *swings* de cada jugador, lo que nos hace pensar en una función generatriz que enumere las posibles coaliciones para posteriormente filtrarlas en función del peso del jugador. La diferencia reside en la estructura de la función generatriz, para este caso, debemos tener en cuenta la partición tomada sobre el conjunto de jugadores. Veamos este método aplicado sobre un ejemplo en concreto.

Ejemplo 3.19. *Apliquemos el método en el Ejemplo 3.4 y calculemos el índice de Banzhaf-Owen. Recordemos que se trata de un juego* $([q;w],P) \in SUW(N)$, *donde* $N = \{A,B,C,D\}$, $[q;w] = [9;6,5,3,2]$ *y* $P = \{\{A\},\{B,D\},\{C\}\}$. *Consideremos* $B \in N$, *que se corresponde con el jugador* 2. *Los pesos de los elementos de la partición* P *son los siguientes,* $w(P_1) = w(A) = 6$, $w(P_2) = w(BD) = 7$ *y* $w(P_3) = w(C) = 3$. *Gracias al primer paso del método nos centraremos en la búsqueda de los números* $\eta_B([q;w],P)$, *es decir, del número de swings compatibles para el jugador* B. *Estos valores se pueden obtener, gracias al segundo paso y la Proposición 3.17, con los coeficientes* $\{b_k^B\}_{k\geq 0}$, *que obtenemos al calcular la función generatriz propuesta en la Ecuación* (3.10). *Calculemos esta función para el jugador* B.

$$
\begin{aligned}
FBO_B(x) &= \prod_{r=1, r\neq 2}^{3} (1+x^{w(P_r)}) \cdot (1+x^{w_{j_2}}) = (1+x^{w(P_1)})(1+x^{w(P_3)}) \cdot (1+x^{w_{j_2}}) \\
&= (1+x^{w(A)})(1+x^{w(C)}) \cdot (1+x^{w(D)}) = (1+x^6)(1+x^3)\cdot(1+x^2) \\
&= x^{11}+x^9+x^8+x^6+x^5+x^3+x^2+1.
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que, $M = \{1,2,3\}$ *entonces* $|M| = 3$ *y que* $P_2 = \{B,D\}$ *entonces* $|P_2| = 2$, *de acuerdo con el razonamiento del tercer paso, en esta expresión obtenemos las* $2^{m-p_k-2} = 2^3 = 8$ *posibles coaliciones compatibles con la partición* P *sin el jugador* B. *Los números* b_k^B *serán los coeficientes asociados a los monomios* x^k. *Siguiendo el cuarto paso, el número de swings compatibles de* i *viene determinado por la suma de los* b_k^B *con* $k \in [q-w(B), q-1] = [4,8]$. *Seleccionamos tales coeficientes asociados a monomios* x^k *con* k *entre* 4 *y* 8, *siguiendo la notación presentada en el Ejemplo 2.4.*

$$FBO_B(x) = x^{11}+x^{9}+x^{8}+x^{6}+x^{5}+x^{3}+x^{2}+1.$$

Si aplicamos la Proposición 3.17, obtenemos el número total de swings compatibles con la partición P *para el jugador* B. *Este número es el siguiente.*

$$\eta_B([q;w],P) = \sum_{k=4}^{8} b_k^B = 1+1+1 = 3.$$

Aplicando la reescritura del índice vista en la Expresión (3.9) *junto con el número total de índices,* $m = 3$, *y el número de jugadores del elemento de la partición al que pertenece* B, $p_2 = 2$, *obtenemos el índice de Banzhaf-Owen para el jugador* B.

$$BO_B([q;w],P) = \frac{\eta_B([q;w],P)}{2^{m+p_k-2}} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}.$$

Si aplicamos el procedimiento análogamente para los demás jugadores, obtenemos el índice de Banzhaf-Owen.

$$BO([q;w],P) = \left(\frac{1}{2},\frac{3}{8},\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right).$$

Capítulo 4

Aplicación: un análisis del Parlamento español

Utilizando las técnicas presentadas en este documento, analizaremos el panorama político reciente en España. En particular, nos centraremos en el estudio comparativo del poder de los partidos entre la **XIV Legislatura** (2019-2023) y la **XV Legislatura** (2023-actualidad). Además, examinaremos cómo los movimientos de diputados en la presente legislatura han influido en el poder de los distintos grupos parlamentarios. Para ello, siguiendo Armijos-Toro et al. (2024b), utilizaremos el paquete *powerindexR* en el software estadístico R, presentado en el Anexo I, que nos permite el cálculo de los índices de poder tratados en este documento para juegos de mayoría ponderada. Todos los códigos utilizados se recopilan en el Anexo I.

4.1. Análisis de poder entre la XIV Legislatura y la XV Legislatura

En España, la convocatoria de elecciones generales de noviembre de 2019 dio paso al comienzo de la XIV Legislatura. Las 18 fuerzas políticas que obtuvieron representación en el Congreso de los diputados fueron: Partido Popular (**PP**), Partido Socialista Obrero Español (**PSOE**), VOX (**VOX**), Unidas Podemos (**UP**), Esquerra Republicana de Catalunya (**ERC**), Junts (**JxCAT**), En Comú Podem (**CP**), Partido Nacionalista Vasco (**PNV**), Euskal Herria Bildu (**Bildu**), Más País (**MP**), Candidatura de Unidad Popular (**CUP**), En Común (**EC**), Coalición Canaria (**CC**), Navarra Suma (**NA+**), Més Compromís (**MC**), Unión del Bloque Nacionalista Galego (**BNG**), Partido Regionalista de Cantabria (**PRC**) y Teruel Existe (**TE**). El reparto de los 350 escaños del Congreso lo podemos ver en la parte izquierda de la Figura 4.1, extraída de Wikipedia.

En mayo de 2023, el Presidente del Gobierno durante la XIV Legislatura, Pedro Sánchez, convocó elecciones generales anticipadas para julio de 2023, que darían lugar al comienzo de la XV Legislatura. Con respecto a las formaciones políticas que obtuvieron representación en el Congreso, tuvieron lugar los siguientes cambios: Unidas Podemos (**UP**), Más País (**MP**), En Comú Podem (**CP**), En Común (**EC**) y Més Compromís (**MC**) se alían, junto con otros partidos con menor representación, para formar una nueva fuerza, Sumar (**Sumar**); Navarra Suma (**NA+**) pasa a denominarse Unión del Pueblo Navarro (**UPN**); y, por último, no obtienen representación en la cámara la Candidatura de Unidad Popular (**CUP**), Partido Regionalista de Cantabria (**PRC**) y Teruel Existe (**TE**). El reparto de los 350 escaños del Congreso lo podemos ver en parte derecha de la Figura 4.1, extraída de Wikipedia.

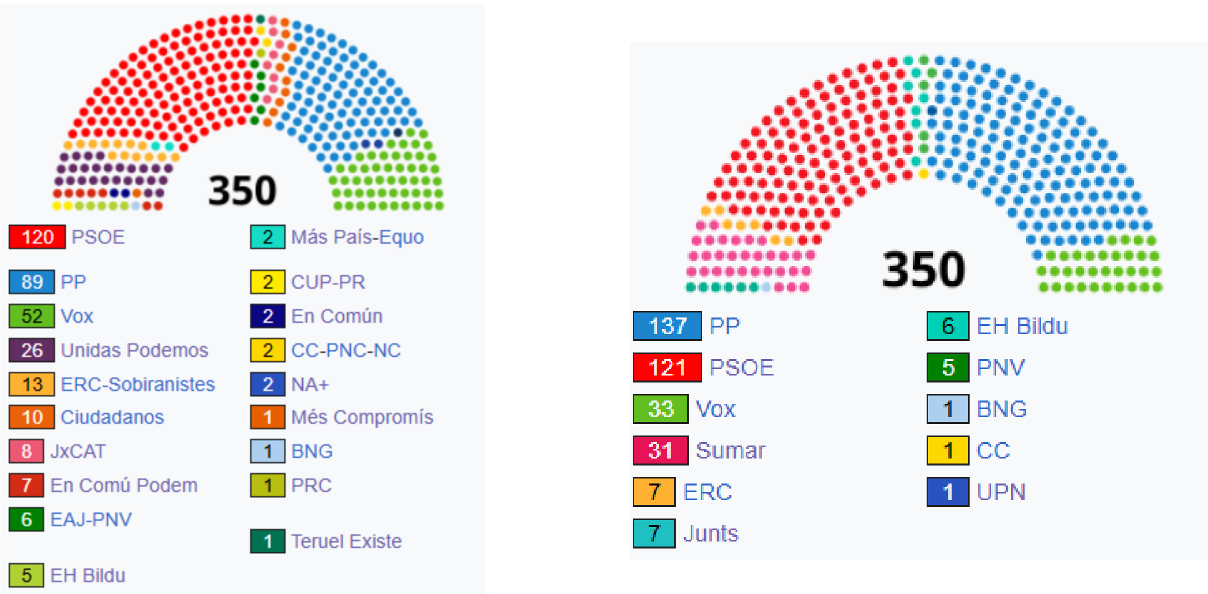

Figura 4.1. Comparativa de escaños en la XIV Legislatura (izquierda) y en la XV Legislatura (derecha).

Para poder comparar el poder de los partidos en las dos legislaturas y así poder ver si aquellos partidos que se han aliado con otros han sido beneficiados o perjudicados, debemos modelar dos juegos de mayoría ponderada, uno para cada legislatura. Para ello, tomaremos en ambos como cuota la mayoría absoluta (la mitad +1), $q = 176$, y como conjuntos de jugadores, los partidos que obtuvieron representación en el Congreso de los Diputados. El peso de cada jugador será el número de escaños del partido correspondiente. Con esto, ya podemos calcular los índices de Shapley-Shubik(SS), Banzhaf(BZ), Johnston(J), Colomer-Martínez(CM) y Johnston-Colomer-Martínez(JCM) presentados en la Sección 1.2, para ambos juegos de mayoría ponderada. Para esto, emplearemos la librería *powerindexR* (Armijos-Toro et al., 2024b). En la Tabla 4.2 presentamos los resultados obtenidos.

		SS	BZ	JH	CM	JCM
PP	2019	0,21446	0,35078	0,18817	0,25881	0,21003
	2023	0,40631	0,70020	0,57402	0,58750	0,68365
PSOE	2019	0,39490	0,64922	0,51546	0,33280	0,61287
	2023	0,20076	0,29980	0,15177	0,16879	0,20285
VOX	2019	0,20351	0,35017	0,18717	0,16159	0,13598
	2023	0,15036	0,26660	0,12204	0,07741	0,05854
UP SUMAR	2019	0,06569	0,14322	0,05351	0,08521	0,02790
	2023	0,12338	0,23340	0,09952	0,10609	0,04780
ERC	2019	0,03008	0,06548	0,01851	0,04849	0,00634
	2023	0,03131	0,04785	0,01436	0,01654	0,00225
JxCAT	2019	0,01786	0,03828	0,00901	0,02323	0,00223
	2023	0,03131	0,04785	0,01436	0,01654	0,00225
CP	2019	0,01579	0,03351	0,00751	0,01963	0,00170
	2023	SUMAR				
PNV	2019	0,01373	0,02899	0,00623	0,01717	0,00126
	2023	0,01623	0,02637	0,00678	0,00909	0,00088
Bildu	2019	0,01153	0,02422	0,00500	0,01381	0,00088
	2023	0,02496	0,04004	0,01116	0,01309	0,00161
CC	2019	0,00468	0,00937	0,00139	0,00569	0,00013
	2023	0,00512	0,00879	0,00199	0,00165	0,00006
NA+ UPN	2019	0,00468	0,00937	0,00139	0,00569	0,00013
	2023	0,00512	0,00879	0,00199	0,00165	0,00006
MP	2019	0,00468	0,00937	0,00139	0,00569	0,00013
	2023	SUMAR				
CUP	2019	0,00468	0,00937	0,00139	0,00569	0,00013
	2023	No obtuvo representación				
EC	2019	0,00468	0,00937	0,00139	0,00569	0,00013
	2023	SUMAR				
MC	2019	0,00226	0,00475	0,00062	0,00270	0,00003
	2023	SUMAR				
BNG	2019	0,00226	0,00475	0,00062	0,00270	0,00003
	2023	0,00512	0,00879	0,00199	0,00165	0,00006
PRC	2019	0,00226	0,00475	0,00062	0,00270	0,00003
	2023	No obtuvo representación				
TE	2019	0,00226	0,00475	0,00062	0,00270	0,00003
	2023	No obtuvo representación				

Tabla 4.2. Comparación de Poder de los partidos entre noviembre de 2019 y julio de 2023.

Analizando las diferencias entre ambos años, expuestas en la Tabla II.1 del Anexo II, se pueden extraer las siguientes conclusiones. En relación con el año 2019, el poder de **UPN**, **CC**, **BNG**, **Bildu** y **PNV** se ha mantenido. Esto refleja que, debido a su baja representación en términos de escaños totales, su influencia en la cámara es muy baja. Los cambios registrados con respecto a las elecciones anteriores (variaciones de un diputado) no han tenido un impacto significativo en su poder. Una situación similar ocurre con **ERC**. En este caso, aunque ha perdido un total de 6 diputados respecto a 2019, lo que equivale a casi la mitad de su representación, su poder de influencia se mantiene. Esto se explica porque el número de partidos con representación ha disminuido de 18 a 11, lo que reduce el número de coaliciones posibles. En consecuencia, a pesar de su menor número de escaños, su capacidad de influencia se ha mantenido debido a este cambio estructural.

Por otro lado, los partidos que han perdido poder de influencia con respecto a 2019 son **PSOE** y **VOX**, dos de los partidos con mayor número de escaños en el Parlamento. En el caso del **PSOE**, las pérdidas de poder son significativas, oscilando entre un $-16\,\%$ (según el índice de CM) y el $-41\,\%$ (según el índice de JCM). Promediando las pérdidas de los cinco índices analizados, se observa que su poder de influencia ha variado un $-30\,\%$. Este resultado puede resultar llamativo, ya que el partido ha ganado un diputado con respecto a 2019 y mantiene casi un tercio del total de escaños. Sin embargo, esta disminución se explica por el cambio en la correlación de fuerzas: en 2019, el **PSOE** era el partido con mayor representación, con 31 escaños más que el **PP**. En cambio, en 2023, el **PP** se posicionó como la primera fuerza política con 137 diputados, lo que ha reducido la influencia del **PSOE**. Por su parte, la pérdida de poder de **VOX** promedia un $-7\,\%$, tras pasar de 52 diputados en 2019 a 33 en 2023. Además de la pérdida de escaños, esta disminución de poder se explica por la evolución representativa de **UP**. En 2019, **VOX** tenía el doble de escaños que **UP**. Sin embargo, en 2023, gracias a la formación de **Sumar**, **UP** alcanzó los 31 escaños, una cifra muy cercana a los 33 de **VOX**. Esto provocó un aumento proporcional en el reparto de poder total para **UP** y una disminución para **VOX**, que pierde la amplia ventaja frente a la siguiente fuerza con mayor representación de la pasada campaña.

Por último, los partidos cuyo poder ha aumentado con respecto de la anterior legislatura son el **PP** y los partidos que conforman el partido **Sumar**: **UP**, **CP**, **MP**, **EC** y **MC**. El **PP** ha sido el partido que más ha incrementado su poder en comparación con la legislatura anterior, con un aumento que varía entre un $19\,\%$ (según el índice de SS) y un $47\,\%$ (según el índice de JCM). Promediando las ganancias de los cinco índices analizados, se observa que su poder de influencia ha aumentado un $35\,\%$. Este incremento refleja tanto el notable aumento del número de escaños obtenidos como la pérdida de poder de **VOX**. Por otro lado, la formación de **Sumar** ha beneficiado a los partidos que lo integran. Aunque en 2019 dichos partidos sumaban 38 escaños y en 2023 **Sumar** obtuvo 31, el poder total ha aumentado ligeramente gracias a la coalición. La diferencia entre la suma de poder de **UP**, **CP**, **MP**, **EC** y **MC** en 2019 y el poder de **Sumar** en 2023 es positiva para los índices de SS, BZ, CM y JCM, oscilando entre un 2 % y un 4 %. Sin embargo, para el índice J, la variación es de $-1\,\%$. Al promediar estas diferencias, se observa que el poder total de estos partidos ha aumentado en un 2 % tras formar una coalición en las elecciones de 2023, en comparación con la suma de poder que tenían al presentarse de forma independiente en 2019.

4.2. Análisis de poder de los grupos parlamentarios durante la XV Legislatura

Tras las elecciones generales de julio de 2023, los partidos formaron los grupos parlamentarios que conformarían el Congreso en la nueva legislatura. Estos grupos son los siguientes: Grupo Popular (**PP**), Grupo Socialista (**PSOE**), Grupo VOX (**VOX**), Grupo Sumar (**Sumar**), Grupo Republicano (**GR**), Grupo Junts per Catalunya (**JUNTS**), Grupo Euskal Herria Bildu (**Bildu**), Grupo Vasco (**PNV**) y Grupo Mixto (**GM**). A lo largo de la XV Legislatura se han producido cambios en el número de escaños de algunos de estos partidos. En particular, el **PSOE** y **SUMAR** han perdido uno y cuatro diputados, respectivamente, los cuales se han unido al **GM**, incrementando su representación de tres a ocho escaños. Estos cambios, junto con el número de escaños registrados en julio de 2023 y enero de 2025, se presentan en la Tabla 4.3.

	PP	PSOE	VOX	SUMAR	GR	JUNTS	Bildu	PNV	GM
jul-23	137	120	33	31	7	7	6	5	3
ene-25	137	121	33	27	7	7	6	5	8
cambio	**0**	**-1**	**0**	**-4**	**0**	**0**	**0**	**0**	**+5**

Tabla 4.3. Cambios en el número de escaños entre julio de 2023 y enero de 2025.

Para analizar la diferencia de poder de los partidos a raíz de los cambios, planteamos la situación como un juego de mayoría ponderada con cuota 176 y consideramos particiones sobre el conjunto de jugadores que representen estos cambios. En la práctica, para poder modelar tales particiones, consideraremos que el **PSOE** se forma mediante la coalición de dos partidos, **A** y **B** con pesos de 120 y 1, respectivamente. Realizaremos lo mismo con **SUMAR**, que resulta de la coalición de los partidos **C** y **D** con pesos de 27 y 4, respectivamente. Con ello, podremos modelar el escaño que perdió el **PSOE** y los cuatro que perdió **SUMAR** a lo largo de la legislatura. El conjunto de jugadores será: $N = \{\mathrm{PP}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{VOX}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{GR}, \mathrm{JUNTS}, \mathrm{Bildu}, \mathrm{PNV}, \mathrm{GM}\}$ con $|N| = 11$. Para modelar la situación de julio de 2023, debemos considerar la siguiente partición: $P_1 = \{\{\mathrm{PP}\}, \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}, \{\mathrm{VOX}\}, \{\mathrm{C}, \mathrm{D}\}, \{\mathrm{GR}\}, \{\mathrm{JUNTS}\}, \{\mathrm{Bildu}\}, \{\mathrm{PNV}\}, \{\mathrm{GM}\}\}$ con $|P_1| = 9$. Para modelar la situación de enero de 2025, debemos considerar la partición: $P_2 =$

$\{\{PP\},\{A\},\{VOX\},\{C\},\{GR\},\{JUNTS\},\{Bildu\},\{PNV\},\{GM,B,D\}\}$ con $|P_2| = 9$.

Considerando estas particiones y utilizando la librería *powerindexR*, podemos calcular los índices de poder coaliciones de Owen y Banzhaf-Owen presentados en la Sección 3.2 para ambas situaciones y compararlas. En la Tabla 4.4 presentamos los resultados obtenidos.

			OW	BO
PP	2023	{PP}	0,40079	0,69141
	2025		0,39881	0,68750
PSOE	2023	{A},{B}	0,20437	0,30859
	2025	{A}	0,20595	0,31250
VOX	2023	{VOX}	0,15079	0,26953
	2025		0,16429	0,28906
SUMAR	2023	{C},{D}	0,12103	0,23047
	2025	{C}	0,10714	0,21094
GR	2023	{GR}	0,03175	0,05078
	2025		0,02738	0,04688
JUNTS	2023	{JUNTS}	0,03175	0,05078
	2025		0,02738	0,04688
Bildu	2023	{Bildu}	0,02579	0,04297
	2025		0,02381	0,03906
PNV	2023	{PNV}	0,01984	0,03516
	2025		0,01786	0,03125
GM	2023	{GM}	0,01389	0,02734
	2025	{GM},{B},{D}	0,02738	0,05078

Tabla 4.4. Comparación de los grupos parlamentarios entre julio de 2023 y enero de 2025.

Analizando las diferencias entre ambos años, expuestas en la Tabla II.2 del Anexo I, se pueden extraer las siguientes conclusiones. Los cambios ocurridos a lo largo de la XV Legislatura son relativamente pequeños, generando modificaciones ligeras en la influencia de los partidos. Entre ellos, los cambios más relevantes son los siguientes. El **GM**, al ganar un diputado del **PSOE** y cuatro del **SUMAR**, pasa de tener tres a ocho escaños. Como resultado, duplica su poder según los índices de OW y BO, aumentando su influencia en un 1 % y un 2 %, respectivamente. Por otro lado, **SUMAR** pierde cuatro escaños, pasando de 31 a 27. Esta disminución conlleva una pérdida en su influencia del 1 % según el índice de OW y del 2 % según el índice de BO. La pérdida de escaños y, por tanto, de poder, de **SUMAR**, beneficia a **VOX**, que incrementa su poder en un 1 % (índice de OW) y un 2 % (índice de BO). Este efecto se debe a que **SUMAR**, al inicio de la legislatura, tenía un número de escaños muy similar al de **VOX**. Tras la pérdida de escaños de **SUMAR**, el número de coaliciones en las que este partido es determinante se reduce, otorgando así un mayor poder a **VOX**. Finalmente, **PSOE** mantiene su poder prácticamente inalterado. Dado que cuenta con 121 escaños, la pérdida de un diputado no tiene un impacto significativo en su influencia.

Capítulo 5

Conclusiones

Tras las elecciones de diciembre de 2015, el marco político español se diversificó debido a la aparición de nuevas fuerzas políticas, lo que dificultó la formación de mayorías parlamentarias. Como consecuencia, el país atravesó un período de inestabilidad política: entre 2015 y 2023 se celebraron cinco elecciones generales. Además, a lo largo de la XV Legislatura se produjeron cambios en la distribución de escaños de los grupos parlamentarios. Mediante herramientas matemáticas, hemos estudiado las variaciones en el poder de los miembros de la cámara, lo que permite una mejor comprensión de la influencia de los grupos políticos españoles.

En este documento, se ha presentado la clase de juegos de mayoría ponderada. Hemos analizado sus elementos y explorado cómo modelar sistemas de votación en parlamentos o comités mediante este tipo de juegos. Para estudiar el reparto de poder en estos contextos, recurrimos a los índices de poder, presentando, entre los existentes en la literatura, cinco de ellos. Implementamos su cálculo y comprobamos que su coste computacional tiene orden exponencial, lo que los hace generalmente ineficientes computacionalmente cuando el número de jugadores es grande. Introdujimos métodos basados en la técnica combinatoria de funciones generatrices, que optimizan su cálculo y hemos comprobado cómo aplicar estos métodos. Incorporamos la posibilidad de que los jugadores formen alianzas, lo que nos llevó a definir los juegos con estructura coalicional. En esta nueva clase de juegos, presentamos dos índices de poder específicos, desarrollamos métodos más eficientes para su cálculo y aplicamos estos conceptos a un caso práctico. Finalmente, analizamos con estas técnicas el caso del Congreso de los Diputados.

Como líneas futuras de investigación, proponemos la caracterización del índice de Johnston-Colomer-Martínez. También sería interesante ampliar la librería *powerindexR* del software estadístico R, incorporando más índices de poder, como los índices de Deegan-Packel (Deegan y Packel, 1978) y Public Good (Holler, 1982), cuya obtención mediante métodos basados en funciones generatrices se encuentra en Alonso-Meijide et al. (2012).

Anexo I

Librería *powerindexR*

Dedicaremos este anexo para hablar de la librería *powerindexR*, presentada en Armijos-Toro et al. (2024b). Esta contiene funciones con las que podemos calcular los índices de poder vistos en este documento, ya sea para juegos de mayoría ponderada o para juegos con estructura coalicional, a través de los métodos de funciones generatrices vistos en el Capítulo 3 y en el Capítulo 4. Esto nos permite optimizar el tiempo computacional de los índices de poder y poder considerar así su cálculo para juegos con un mayor número de jugadores. La librería cuenta también, entre otras, con funciones para poder calcular las coaliciones ganadoras minimales y las coaliciones cuasi-minimales ganadoras del juego en cuestión. Para introducir un juego de mayoría ponderada, únicamente debemos crear un vector de pesos c con los n jugadores y un valor q que será la cuota, con estos valores ya podemos calcular los índices de Shapley-Shubik, Banzhaf, Johnston, Colomer-Martínez y Johnston-Colomer-Martínez utilizando, respectivamente, las funciones:

- *pi.shapley(q,c)*.
- *pi.banzhaf(q,c)*.
- *pi.johnston(q,c)*.
- *pi.colomermartinez(q,c)*.
- *pi.johnstoncolomermartinez(q,c)*.

Para introducir particiones dentro del conjunto de jugadores, pasando así a un juego con estructura coalicional y calcular así los índices de Owen y Banzhaf-Owen, debemos considerar un nuevo parámetro, *partition*. A este parámetro le proporcionaremos un vector de n componentes que represente al elemento P de la partición $P(N)$. Para ello, crearemos un vector p en el que a cada jugador se le asocie el índice k del elemento de la partición al que pertenezca $P_k \in P$. Las funciones utilizadas son las siguientes:

- *pi.shapley(q,c,partition=d).*
- *pi.banzhaf(q,c,partition=d).*

El código utilizado en el cálculo de los índices de poder en la Sección 4.1 para el análisis de poder entre los resultados de las elecciones generales de noviembre de 2019 y julio de 2023 es el siguiente:

```
install.packages("powerindexR")
library(powerindexR)

diputados2019 <- c(89,120,52,26,13,8,7,6,5,2,2,2,2,2,1,1,1,1)
cuota <- 176
pi.shapley(cuota,diputados2019)
pi.banzhaf(cuota,diputados2019)
pi.johnston(cuota,diputados2019)
pi.colomermartinez(cuota,diputados2019)
pi.johnstoncolomermartinez(cuota,diputados2019)

diputados2023 <- c(137,121,33,31,7,7,5,6,1,1,1)
cuota <- 176
pi.shapley(cuota,diputados2023)
pi.banzhaf(cuota,diputados2023)
pi.johnston(cuota,diputados2023)
pi.colomermartinez(cuota,diputados2023)
pi.johnstoncolomermartinez(cuota,diputados2023)
```

El código utilizado en el cálculo de índices de poder del juego con estructura coalicional de la Sección 4.2 para el análisis de los cambios durante la XV Legislatura es el siguiente:

```
install.packages("powerindexR")
library(powerindexR)
diputadosXV <- c(137,120,1,33,27,4,7,7,6,5,3)
cuota <- 176
pi.shapley(cuota,diputadosXV, partition = c(1,2,2,3,4,4,5,6,7,8,9))
pi.banzhaf(cuota,diputadosXV, partition = c(1,2,2,3,4,4,5,6,7,8,9))

pi.shapley(cuota,diputadosXV, partition = c(1,2,9,3,4,9,5,6,7,8,9))
pi.banzhaf(cuota,diputadosXV, partition = c(1,2,9,3,4,9,5,6,7,8,9))
```

Anexo II

Análisis de diferencias

En este anexo, presentamos las tablas sobre las que se ha apoyado el análisis de las situaciones de las Secciones 4.1 y 4.2. En ambas tablas, para cada partido político podemos encontrar dos filas: la inferior contiene las diferencia de poder entre ambas fechas, al restarle al valor más reciente temporalmente el más antiguo; la superior contiene el porcentaje que representa esta diferencia. Además, incluimos una columna en la que calculamos la media aritmética de las variaciones sobre los índices de poder. El código de colores utilizado en dichas tablas es el siguiente:

- **Color Verde**. Se utiliza cuando la diferencia de poder de un partido es significativamente positiva.
- **Color Amarillo**. Se utiliza cuando la diferencia de poder de una partido no es significativa.
- **Color Rojo**. Se utiliza cuando la diferencia de poder de un partido es significativamente negativa.

En la Tabla II.1, podemos encontrar la tabla asociada a la situación de la Sección 4.1, en la que analizamos la diferencia de poder entre la XIV Legislatura y la XV Legislatura. Aquellas filas vacías se asocian a partidos que no han obtenido escaños tras las elecciones generales de 2023.

En la Tabla II.2, podemos encontrar la tabla asociada a la situación de la Sección 4.2, en la que analizamos los cambios en los grupos parlamentarios y la consecuente variación de poder entre el principio de la XV Legislatura, en noviembre de 2019, y actualmente, enero de 2025. Los cambios en los grupos implican a un número bajo de diputados, por ello, los valores de esta tabla son bajos. Se analizan los valores cuyo porcentaje de variación es no nulo.

SS	BZ	JH	CM	JCM	MEDIA	
19% 0,19185	35% 0,34941	39% 0,38584	33% 0,32869	47% 0,47363	**35%** **0,34588**	**PP**
-19% -0,19414	-35% -0,34941	-36% -0,36368	-16% -0,16401	-41% -0,41002	**-30%** **-0,29625**	**PSOE**
-5% -0,05315	-8% -0,08357	-7% -0,06513	-8% -0,08418	-8% -0,07744	**-7%** **-0,07270**	**VOX**
3% 0,03028	3% 0,03319	4% 0,03511	-1% -0,01283	2% 0,01789	**2%** **0,02073**	**UP+CP+MP+EC+MC/Sumar**
0% 0,00123	-2% -0,01762	0% -0,00415	-3% -0,03195	0% -0,00410	**-1%** **-0,01132**	**ERC**
1% 0,01345	1% 0,00957	1% 0,00535	-1% -0,00670	0% 0,00001	**0%** **0,00434**	**JxCAT**
0% 0,00251	0% -0,00262	0% 0,00055	-1% -0,00808	0% -0,00038	**0%** **-0,00160**	**PNV**
1% 0,01344	2% 0,01582	1% 0,00616	0% -0,00072	0% 0,00073	**1%** **0,00709**	**Bildu**
0% 0,00044	0% -0,00058	0% 0,00061	0% -0,00404	0% -0,00007	**0%** **-0,00073**	**CC**
0% 0,00044	0% -0,00058	0% 0,00061	0% -0,00404	0% -0,00007	**0%** **-0,00073**	**NA+/UPN**
0% 0,00286	0% 0,00404	0% 0,00137	0% -0,00105	0% 0,00003	**0%** **0,00145**	**BNG**

Tabla II.1. Análisis de las diferencias de poder de julio de 2023 con respecto a noviembre de 2019.

OW	BO	MEDIA	
0% -0,00198	0% -0,00391	0% -0,00295	PP
0% 0,00159	0% 0,00391	0% 0,00275	PSOE
1% 0,01349	2% 0,01953	2% 0,01651	VOX
-1% -0,01389	-2% -0,01953	-2% -0,01671	SUMAR
0% -0,00437	0% -0,00391	0% -0,00414	GR
0% -0,00437	0% -0,00391	0% -0,00414	JUNTS
0% -0,00198	0% -0,00391	0% -0,00295	Bildu
0% -0,00198	0% -0,00391	0% -0,00295	PNV
1% 0,01349	2% 0,02344	2% 0,01846	GM

Tabla II.2. Análisis de las diferencias de Poder de enero de 2025 con respecto a julio de 2023.

Bibliografía

Alonso-Meijide, J. M. (2002). Contribuciones a la teoría del valor en juegos cooperativos con condicionamientos exógenos. *Tesis doctoral. Universidade de Santiago de Compostela, Departamento de Estadística e Investigación Operativa.*

Alonso-Meijide, J. M. y Bowles, C. (2005). Generating functions for coalitional power indices: an application to the IMF. *Annals of Operations Research, vol. 137, pp. 21-44, Springer.*

Alonso Meijide, J. M. y Casas Méndez, B. (2009). Generating functions: a useful tool for computing power indices. *Boletín de Estadística e Investigación Opreativa, vol. 23, No. 3, pp. 206-217, SEIO.*

Alonso-Meijide, J. M., Freixas, J., y Molinero, X. (2012). Computation of several power indices by generating functions. *Applied Mathematics and Computation, vol. 219, No. 8, pp. 3395–3402, Elsevier.*

Armijos-Toro, L. M., Alonso-Meijide, J. M., y Mosquera, M. A. (2024a). Mergeable weighted majority games and characterizations of some power indices. *Annals of Operations Research, vol. 336, No.3, pp. 1373-1393, Springer.*

Armijos-Toro, L. M., Alonso-Meijide, J. M., Mosquera, M. A., y Saavedra-Nieves, A. (2024b). On generating functions to compute some power measures for weighted majority games. *Annals of Operations Research, pp. 1-23, Springer.*

Banzhaf, J. (1964). Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis. *Rutgers Law Review, vol. 19, pp. 317.*

Bilbao, J. M., Fernández, J. R., Jiménez Losada, A., y López, J. J. (2000). Generating functions for computing power indices efficiently. *Top, vol.8, No. 2, pp. 191-213, Springer.*

Colomer, J. y Martínez, F. (1995). The paradox of coalition trading. *Journal of Theorical Politics, vol.7, No.1, pp. 41-63, SAGE Publications.*

Deegan, J. y Packel, E. W. (1978). A new index of power for simple n-person games. *International Journal of Game Theory, vol. 7, pp. 113-123, Springer.*

Dubey, P. (1975). On the uniqueness of the Shapley value. *International Journal of Game Theory, vol. 4, No. 2, pp. 131-139, Springer.*

Dubey, P. y Shapley, L. S. (1979). Mathematical properties of the Banzhaf power index. *Mathematics of Operations Research, vol.4, No. 2, pp. 99–131, INFORMS.*

González-Díaz, J., García-Jurado, I., y Fiestras-Janeiro, M. G. (2010). An introductory course on mathematical game theory. *Graduate Studies in Mathematics, vol. 115. Providence, RI, Estados Unidos: American Mathematical Society.*

Holler, M. J. (1982). Forming coalitions and measuring voting power. *Political Studies, vol. 30, No. 2, pp. 262-271, SAGE Publications.*

Johnston, R. J. (1978). On the measurement of power: some reactions to laver. *Environment and Planning A: Economy and Space, vol. 10, No.8, pp. 907-914, SAGE Publications.*

Lorenzo-Freire, S., Alonso-Meijide, J. M., Casas-Méndez, B., y Fiestras-Janeiro, M. G. (2007). Characterizations of the Deegan-Packel and Johnston power indices. *European Journal of Operational Research, vol. 177, No. 1, pp. 431–444, Elsevier.*

Owen, G. (1975). Multilinear extensions and the Banzhaf value. *Naval research logistics quarterly, vol. 22, No. 4, pp. 741-750, Wiley Online Library.*

Owen, G. (1977). Values of games with a priori unions. *Mathematical Economics and Game Theory: Essays in honor of Oskar Morgenstern, pp. 76-88, Springer.*

Owen, G. (1981). Modification of the Banzhaf-Coleman index for games with a priori unions. *Power, Voting and Voting Power, pp. 232-238, Springer.*

Rodríguez-Veiga, J., Novoa-Flores, G. I., y Casas-Méndez, B. (2016). Implementing generating functions to obtain power indices with coalition configuration. *Discrete Applied Mathematics, vol. 214, pp. 1-15, Elsevier.*

Shapley, L. S. (1953). A value for n-person games. *In Kuhn, H. W. and Tucker, A. W., editors, Contributions to the Theory of Games (AM-28), vol. 2, pp. 307–318, Princeton University Press, Princeton, NJ.*

Shapley, L. S. y Shubik, M. (1954). A method for evaluating the distribution of power in a committee system. *American Political Science Review, vol. 48, No. 3, pp. 787-792, Cambridge University Press.*