



TESIS DOCTORAL

# **MODELOS MULTIOBJETIVO PARA LA PLANIFICACIÓN FORESTAL EN GALICIA: UN ENFOQUE CONTINUO**

José Mario González González

ESCUELA DE DOCTORADO INTERNACIONAL DE LA UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

PROGRAMA DE DOCTORADO EN INGENIERÍA PARA EL DESARROLLO RURAL Y CIVIL

LUGO

2021







## DECLARACIÓN DEL AUTOR DE LA TESIS

*Modelos multiobjetivo para la planificación forestal en Galicia: un enfoque continuo*

Yo, **José Mario González González**, presento mi tesis siguiendo el procedimiento adecuado al Reglamento y declaro que:

1. La tesis abarca los resultados de la elaboración de mi trabajo.
2. De ser el caso, en la tesis se hace referencia a las colaboraciones que tuvo este trabajo.
3. Confirmando que la tesis no incurre en ningún tipo de plagio de otros autores ni de trabajos presentados por mí para la obtención de otros títulos.
4. La tesis es la versión definitiva presentada para su defensa y coincide la versión impresa con la presentada en formato electrónico.

Y me comprometo a presentar el Compromiso Documental de Supervisión en el caso de que el original no esté depositado en la Escuela.

En Lugo, a 19 de octubre de 2021.





## **AUTORIZACIÓN DEL DIRECTOR/TUTOR DE LA TESIS**

*Modelos multiobjetivo para la planificación forestal en Galicia: un enfoque continuo*

**D. Ulises Diéguez Aranda (Director/Tutor)**

**D. Miguel Ernesto Vázquez Méndez (Director)**

INFORMAN:

Que la presente tesis se corresponde con el trabajo realizado por **D. José Mario González González**, bajo nuestra dirección/tutorización, y autorizan su presentación considerando que reúne los requisitos exigidos en el Reglamento de Estudios de Doctorado de la USC, y que como directores de esta no incurre en las causas de abstención establecidas en la Ley 40/2015.

De acuerdo con lo indicado en el Reglamento de Estudios de Doctorado, declaran también que la presente tesis doctoral es idónea para ser defendida en base a la modalidad **«Monográfica con reproducción total o parcial de publicaciones»**, en donde la participación del doctorando ha sido decisiva para su elaboración y las publicaciones se ajustan al Plan de Investigación.

En Lugo, a 19 de octubre de 2021.



## AGRADECIMIENTOS

En estas líneas quiero expresar mi gratitud a todas aquellas personas que han contribuido, directa o indirectamente, al desarrollo de esta tesis.

En primer lugar, como no podría ser de otra forma, a mis directores, Miguel E. Vázquez Méndez y Ulises Diéguez Aranda, por el apoyo brindado durante toda mi etapa doctoral. Sin la implicación, paciencia y guía de ambos, esta tesis no hubiera sido posible. A Miguel quiero agradecerle, en particular, sus lecciones magistrales sobre optimización matemática, sus revisiones exhaustivas siempre acompañadas de sugerencias muy provechosas y, sobre todo, el hacerme entender que en el rigor está la diferencia. Ulises me ha ayudado de todas las formas posibles durante el desarrollo de esta tesis. Especialmente, quiero darle las gracias por haberme aceptado como su alumno de doctorado, lo que me ha permitido beneficiarme de su experiencia y amplio conocimiento en investigación forestal, proporcionándome, a la vez, un ambiente motivador e ilusionante. También tengo que agradecerle todo el tiempo que ha pasado conmigo comentando bibliografía, analizando resultados, corrigiendo manuscritos, etc. Esos momentos han tenido una influencia muy positiva en mi formación como investigador.

A la Unidad de Gestión Ambiental y Forestal Sostenible (UXAFORES), y muy especialmente a Juan G. Álvarez, Alberto Rojo, Roque Rodríguez, Guillermo Riesco, Cesar Pérez, Ana D. Ruiz y Almudena Pérez, por haberme hecho sentir parte del grupo y prestarme su ayuda siempre que lo he necesitado. También a Fernando Castedo, que allá por 2004 me obsequió con un ejemplar de su tesis doctoral, lo que supuso para mí el comienzo de un interés creciente por la investigación, algo que siempre le agradeceré.

A los profesores Juan B. Ferreiro, Miguel Á. Vilar, Xerardo Casal, Duarte Santamarina y Manuel Andrade del Dpto. de Matemática Aplicada, por los buenos momentos compartidos durante estos años y por el interés constante mostrado por mi trabajo.

Y para finalizar, a mi familia, por su apoyo incondicional. Sin ellos, todo hubiera sido más difícil.



*A mi hijo Alejandro.*



# ÍNDICE

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>Listado de publicaciones</b>	<b>3</b>
<b>1. Introducción y objetivos</b>	<b>7</b>
1.1. Las masas forestales en Galicia . . . . .	7
1.2. Planificación forestal . . . . .	9
1.3. Modelos forestales de crecimiento . . . . .	10
1.4. Optimización en la planificación forestal . . . . .	13
1.5. Objetivos . . . . .	20
<b>2. Materiales y métodos</b>	<b>21</b>
2.1. Hipótesis de trabajo . . . . .	21
2.2. Definiciones básicas . . . . .	23
2.2.1. Valor esperado del suelo . . . . .	23
2.2.2. Turno óptimo a nivel rodal . . . . .	24
2.2.3. Turno óptimo del monte regulado . . . . .	25
2.2.4. Valor del suelo y del vuelo . . . . .	25
2.2.5. Programa selvícola óptimo a nivel rodal . . . . .	27
2.2.6. Métricas de renta constante y de regulación . . . . .	27
2.3. Modelos de optimización multiobjetivo . . . . .	36
2.4. Resolución numérica . . . . .	39
2.5. Casos de estudio . . . . .	41

<b>3. Resultados y discusión</b>	<b>45</b>
3.1. Análisis de métodos para optimizar la constancia de renta . . .	45
3.2. Optimización de la constancia de renta y el LTV . . . . .	47
3.3. Optimización de la regulación y el LTV . . . . .	52
3.4. Optimización combinatoria de la regulación y el LTV . . . . .	55
3.5. Optimización de la regulación, la constancia de renta y el LTV	58
3.6. Discusión . . . . .	61
<b>4. Conclusiones</b>	<b>63</b>
<b>5. Trabajo futuro</b>	<b>65</b>
<b>6. Bibliografía</b>	<b>67</b>
<b>7. Siglas</b>	<b>77</b>
<b>8. Notación</b>	<b>79</b>
<b>9. Apéndice 1: <i>A note on the regularity of a new metric for measuring even-flow in forest planning</i></b>	<b>83</b>
9.1. Introduction . . . . .	84
9.2. A new metric for measuring even-flow . . . . .	86
9.3. Mathematical analysis . . . . .	90
9.3.1. An alternative proof of Theorem 1 in the framework of the distribution theory . . . . .	92
9.4. Case study: <i>Eucalyptus globulus</i> Labill. forest in Galicia (NW Spain) . . . . .	95
9.5. Conclusions . . . . .	99
9.6. References . . . . .	101
<b>10. Apéndice 2: <i>Simultaneous optimization of even flow and land and timber value in forest planning: a continuous approach</i></b>	<b>105</b>
10.1. Background . . . . .	106
10.2. Methods . . . . .	112

10.2.1. Mathematical framework . . . . .	112
10.2.2. Economic metric: the land and timber value (LTV) . . .	113
10.2.3. Even flow (EF) metric . . . . .	114
10.2.4. Bi-objective model . . . . .	118
10.2.5. Numerical resolution . . . . .	119
10.3. Results and discussion . . . . .	120
10.4. Conclusions . . . . .	129
10.5. References . . . . .	130

**11. Apéndice 3: Multi-objective models for the forest harvest scheduling problem in a continuous-time framework** **135**

11.1. Introduction . . . . .	136
11.2. Methods . . . . .	138
11.2.1. Starting hypotheses and notation . . . . .	139
11.2.2. Main definitions . . . . .	140
11.2.3. Multi-objective optimization problems (MOPs) . . . .	145
11.2.4. Numerical solution . . . . .	148
11.3. Results and discussion . . . . .	149
11.4. Conclusions . . . . .	156
11.5. References . . . . .	160



## RESUMEN

En esta tesis se presentan varios modelos multiobjetivo para la planificación de cortas en montes constituidos por rodales regulares monoespecíficos (los más habituales en Galicia), utilizando una formulación temporal continua que busca maximizar la rentabilidad económica y la renta constante en volumen en el primer turno y/o en el monte regulado. Para ello, se han diseñado nuevas métricas que miden esa constancia de rentas y permiten trabajar con variables de decisión continuas. La estrategia propuesta para resolver los problemas combina una técnica de escalarización (método de pesos) con un algoritmo de tipo gradiente (L-BFGS-B) que permite obtener el frente Pareto. Esto hace que el tomador de decisiones pueda especificar sus preferencias con posterioridad al proceso de optimización, ya que dispone de toda la información sobre los costes de oportunidad que asume cuando elige una solución satisfactoria entre el conjunto de soluciones no dominadas del frente. Con el fin de analizar el rendimiento de dicha estrategia, se comparan los resultados que proporciona con los obtenidos mediante NSGA-II, un algoritmo evolutivo para optimización multiobjetivo. Para evaluar los modelos planteados se usan varios montes de *Eucalyptus globulus* Labill. La formulación continua se ha demostrado robusta en montes con distinto número de rodales y diferente estructura de edades, y ha proporcionado resultados mejores que los del enfoque combinatorio tradicional. Con respecto a la resolución de los problemas, la estrategia propuesta ha resultado claramente más eficiente que el algoritmo evolutivo, y tanto más eficaz cuanto mayor ha sido la dimensión del problema.



## LISTADO DE PUBLICACIONES

Esta tesis se presenta en la modalidad de «monografía con reproducción total o parcial de publicaciones» y se basa en el trabajo contenido en tres artículos científicos cuyo propósito general ha sido explorar el uso de formulaciones continuas y el empleo de técnicas de optimización diferenciables para la planificación de las cortas a nivel monte. Estos artículos se relacionan a continuación:

- I González-González, J. M., Vázquez-Méndez, M. E., and Diéguez-Aranda, U. (2020). **A note on the regularity of a new metric for measuring even-flow in forest planning.** *European Journal of Operational Research*, 282(3): 1101–1106. DOI: 10.1016/j.ejor.2019.10.029.

### *Contribución específica en la publicación:*

El doctorando, José Mario, ha sido el responsable principal de la revisión bibliográfica y de la realización de los análisis, y junto a los demás coautores, ha contribuido en la concepción del estudio, en la presentación y discusión de resultados y en la redacción del artículo.

### *Índices de calidad:*

La revista *European Journal of Operational Research* presenta, a fecha de 4 de octubre de 2021, las siguientes métricas de calidad: un índice CiteScore de 9.5 (2020, Scopus), un índice SJR de 2.161 (2020, Scimago) y un factor de impacto de 5.334 (2020, Journal Citation Reports), encontrándose en el cuartil Q1 (posición 13 de 99) en la categoría *OPERATIONS RESEARCH & MANAGEMENT SCIENCE*.

### *Autorización de la revista:*

La revista *European Journal of Operational Research*, perteneciente a la editorial Elsevier, permite la reutilización del artículo por parte del autor como parte de su tesis: <https://www.elsevier.com/about/policies/copyright>

### *Secciones donde se reproduce la publicación:*

Este artículo ha sido reproducido parcialmente en las Secciones 2 (Ma-

teriales y métodos), 3 (Resultados y discusión) y 4 (Conclusiones), y se ha reproducido en su totalidad en la Sección 9 (Apéndice 1) de esta tesis.

- II González-González, J. M., Vázquez-Méndez, M. E., and Diéguez-Aranda, U. (2021). **Simultaneous optimization of even flow and land and timber value in forest planning: a continuous approach.** *Forest Ecosystems*, 8:48. DOI: 10.1186/s40663-021-00325-9.

*Contribución específica en la publicación:*

El doctorando, José Mario, ha sido el responsable principal de la revisión bibliográfica y de la realización de los análisis, y junto a los demás coautores, ha contribuido en la concepción del estudio, en la presentación y discusión de resultados y en la redacción del artículo.

*Índices de calidad:*

La revista *Forest Ecosystems* presenta, a fecha de 4 de octubre de 2021, las siguientes métricas de calidad: un índice CiteScore de 3.7 (2020, Scopus), un índice SJR de 1.001 (2020, Scimago) y un factor de impacto de 3.645 (2020, Journal Citation Reports), encontrándose en el cuartil Q1 (posición 9 de 95) en la categoría *FORESTRY*.

*Autorización de la revista:*

*Forest Ecosystems* es una revista de acceso abierto (open access) que publica bajo licencia *Creative Commons Attribution License 4.0*, la cual permite la reutilización y redistribución del artículo siempre que se atribuyan correctamente los autores originales: <https://www.springeropen.com/get-published/copyright/copyright-and-license-agreement>

*Secciones donde se reproduce la publicación:*

Este artículo ha sido reproducido parcialmente en las Secciones 1 (Introducción y objetivos), 2 (Materiales y métodos), 3 (Resultados y discusión) y 4 (Conclusiones), y se ha reproducido en su totalidad en la Sección 10 (Apéndice 2) de esta tesis.

- III González-González, J. M., Vázquez-Méndez, M. E., and Diéguez-Aranda, U. (2021). **Multi-objective models for the forest harvest scheduling problem in a continuous-time framework** (manuscrito enviado para su publicación, encontrándose actualmente en proceso de revisión). DOI: 10.13140/RG.2.2.14396.97926/1.

*Contribución específica en la publicación:*

El doctorando, José Mario, ha sido el responsable principal de la revisión bibliográfica y de la realización de los análisis, y junto a los demás coautores, ha contribuido en la concepción del estudio, en la presentación y discusión de resultados y en la redacción del artículo.

*Secciones donde se reproduce la publicación:*

Este artículo ha sido reproducido parcialmente en las Secciones 2 (Materiales y métodos), 3 (Resultados y discusión) y 4 (Conclusiones), y se ha reproducido en su totalidad en la Sección 11 (Apéndice 3) de esta tesis.



# 1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

En esta sección se tratan aspectos y antecedentes relevantes para el desarrollo de la tesis y se plantean los objetivos de la misma. En primer lugar, se resumen las particularidades de las masas forestales productoras en Galicia. A continuación, se introduce el objeto de la planificación forestal así como su naturaleza multiobjetivo. Posteriormente, se clasifican los modelos forestales de crecimiento, justificando su importancia en la planificación forestal, y se analizan las formulaciones más habituales para optimizar la planificación de la gestión forestal. Para finalizar, se plantean los objetivos a alcanzar.

## 1.1. Las masas forestales en Galicia

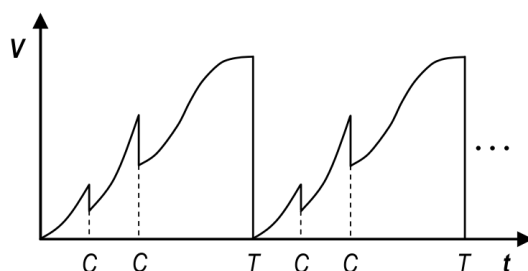
Según datos del IV Inventario Forestal Nacional (MAGRAMA, 2011), la superficie forestal de Galicia (España) es de 2030681 ha, de las que el 70% están arboladas. Las masas más importantes están formadas por eucaliptos (*Eucalyptus* spp.), pino marítimo (*Pinus pinaster*), pino insigne (*Pinus radiata*) y roble común (*Quercus robur*). En el Tabla 1 se recoge la representación superficial de dichas formaciones, que mayormente se presentan como masas puras.

Las masas forestales productivas de esta región, fundamentalmente de los géneros *Eucalyptus* y *Pinus*, suelen gestionarse mediante sistemas de turno de corta o RFM (del inglés *rotation forest management*), que se caracterizan por la aplicación repetida de programas selvícolas con una edad de corta final o turno definido (ver Figura 1). En dichos programas se pueden diferenciar varias fases: una primera de renovación mediante plantación o regeneración natural, dando lugar a rodales coetáneos (al menos el 90% de sus pies tienen la misma edad) o regulares (al menos el 90% de sus pies pertenecen a la misma clase artificial de edad); una segunda fase en la que pueden realizarse una o varias claras y diversos tratamientos culturales de mejora; y una tercera fase de aprovechamiento final cuando se llega al turno, repitiéndose entonces el mismo esquema de forma sucesiva (Diéguez-Aranda et al., 2009, p. 9).

## 1. Introducción y objetivos

**Tabla 1:** Superficie ocupada por las principales formaciones forestales en Galicia (MAGRAMA, 2011).

Formaciones forestales arboladas	Superficie (ha)
Pinares de pino marítimo ( <i>Pinus pinaster</i> )	217 281
Pinares de pino insignie ( <i>Pinus radiata</i> )	96 177
Pinares de pino albar ( <i>Pinus sylvestris</i> )	32 737
Replantaciones jóvenes de coníferas	87 759
Eucaliptales ( <i>Eucalyptus</i> spp.)	248 169
Replantaciones jóvenes de eucaliptos	39 814
<i>Pinus pinaster</i> en mezcla con <i>Quercus robur</i>	105 002
<i>Pinus pinaster</i> en mezcla con <i>Eucalyptus</i> spp.	124 415
<i>Eucalyptus</i> spp. en mezcla con <i>Quercus robur</i>	21 517
Robledales de <i>Quercus robur</i>	124 780
<i>Quercus robur</i> en mezcla con frondosas autóctonas	121 665



**Figura 1:** Representación gráfica de la evolución de las existencias en volumen en los sistemas RFM (Diéguez-Aranda et al., 2009). *C*: Clara. *T*: Turno de la corta final.

El 99 % de la superficie forestal gallega está en manos privadas, correspondiendo el 1 % restante a montes de titularidad pública. Aproximadamente dos tercios de la primera pertenecen a pequeños propietarios individuales que poseen como media algo menos de 2 ha, repartidas a su vez en varias parcelas, lo que constituye un condicionante especialmente negativo para su gestión. El

resto de la superficie forestal privada, unas 664495 ha, pertenecen a 3326 Montes Vecinales en Mano Común, con una superficie media de aproximadamente 200 ha (Xunta de Galicia, 2020).

### 1.2. Planificación forestal

Uno de los cometidos principales de la planificación forestal es determinar dónde y cuándo realizar los aprovechamientos madereros en función de los objetivos establecidos por el propietario o gestor (Ware & Clutter, 1971). Centrándonos en la gestión de masas regulares mediante sistemas RFM, se debe decidir como mínimo el momento en el que se va a realizar la corta final (turno), pudiendo considerarse además el número, el tipo, la intensidad y el momento de realizar las claras para cada una de las unidades en la que suelen dividirse los montes para su gestión, que generalmente son rodales. Un rodal puede definirse como un grupo contiguo de árboles lo suficientemente uniforme en su distribución de clases de edad, composición y estructura, y que crece en un sitio de calidad lo bastante homogénea como para ser considerado una unidad distinguible (Helms, 1998). En el contexto de la gestión forestal, un monte puede considerarse como el conjunto de rodales administrados como una unidad integrada, usualmente bajo un mismo propietario (Smith et al., 1997). Si la planificación se realiza independientemente para cada rodal sin tener en cuenta la existencia de los adyacentes, hablaremos de planificación a nivel rodal. Por el contrario, si la planificación se realiza de forma coordinada para todos los rodales que constituyen un monte, la identificaremos como planificación a nivel monte.

El nivel de rodal es el más utilizado en la planificación de la gestión de propiedades forestales de pequeña extensión (Bettinger et al., 2009, p. 125), en las que frecuentemente los objetivos perseguidos son exclusivamente de carácter económico, como maximizar el valor actualizado neto de un único turno o de infinitos turnos (el valor esperado del suelo, ver Apartado 2.2.1) (Kaya et al., 2016). Desde un punto de vista exclusivamente económico, el mejor plan de gestión a nivel monte sería simplemente la agregación de los planes óptimos a nivel de rodal (Clutter et al., 1983, p. 211), aunque en la mayoría de los casos

## 1. Introducción y objetivos

los gestores forestales se enfrentan a objetivos y restricciones que implican la interrelación entre rodales (p. ej., la búsqueda de una estructura global para el monte), lo que obliga a abordar la planificación desde una perspectiva más amplia.

Los objetivos de la planificación forestal a nivel monte están generalmente relacionados con aspectos de carácter económico (p. ej., maximizar los beneficios netos actualizados o minimizar costes), temporal (p. ej., asegurar una renta adecuada de madera en el tiempo) o espacial (p. ej., no permitir áreas de corta demasiado grandes o garantizar áreas mínimas de bosque maduro) (Murray, 1999). Un concepto clave relacionado con estos aspectos es el de monte regulado, estructura de monte que permite obtener una renta constante de productos en perpetuidad, maximizando las utilidades del mismo. En el trabajo de Madrigal Collazo (1994) se explican en detalle numerosos métodos de ordenación que se han aplicado tradicionalmente en los montes españoles para lograr dicha estructura. Hoy en día, aunque puede ser deseable obtener un rendimiento razonablemente estable y continuo de productos forestales, en la mayoría de las situaciones será preferible gestionar el monte de una forma dinámica con estructuras intermedias entre las óptimas a nivel rodal y un monte perfectamente regulado (Ware & Clutter, 1971; Clutter et al., 1983, pp. 238–239). Por tal motivo, en la práctica, la elección de un método de ordenación concreto ya no es una cuestión fundamental, debiendo hablarse más bien de una metodología general de planificación forestal (Saura, 2010), que debe ser suficientemente flexible como para permitir, además, la consideración de otros objetivos distintos de los puramente económicos (p. ej., aumentar la captura de carbono, conservar la biodiversidad, mantener el nivel de empleo o fijar población en el rural). Esto hace que el diseño de planes de gestión forestal sea una tarea compleja que deba abordarse en el marco de la optimización multiobjetivo (Kangas & Pukkala, 1992).

### 1.3. Modelos forestales de crecimiento

Para planificar la gestión forestal a cualquier nivel es necesario disponer de modelos matemáticos que permitan predecir el crecimiento de las masas fores-

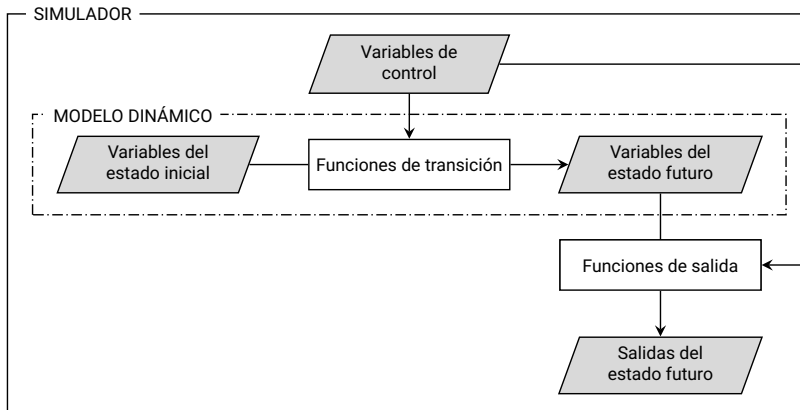
### 1.3. Modelos forestales de crecimiento

tales bajo diferentes programas de gestión selvícola y evaluarlos en términos económicos (Davis et al., 2001, p. 77). La implementación de estos modelos en simuladores informáticos, junto con el uso de un algoritmo de optimización apropiado, facilitan el diseño de planes de gestión que satisfagan los objetivos planteados por el propietario o el gestor.

Se han empleado numerosas metodologías para modelizar el desarrollo de las masas forestales, no existiendo ninguna forma universalmente aceptada de clasificarlas (Burkhart & Tomé, 2012, p. 234). Una de las más extendidas diferencia entre modelos empíricos, modelos de procesos e híbridos, siendo los primeros los más utilizados como herramientas predictivas de ayuda a la toma de decisiones en la gestión forestal práctica, mientras que el propósito principal de los basados en procesos es entender el funcionamiento del sistema (Burkhart & Tomé, 2012, pp. 1–4). Otra clasificación se refiere a la unidad de predicción, considerándose habitualmente tres unidades diferentes: el rodal, la clase de dimensión o el árbol individual, obteniéndose en estos dos últimos casos resultados que deben agregarse para conocer los valores totales por unidad de superficie. Los modelos también pueden ser determinísticos o estocásticos, proporcionando los primeros siempre el mismo valor de salida para un conjunto dado de datos de entrada, mientras que los segundos incluyen algún elemento aleatorio que proporciona resultados diferentes en cada ejecución para las mismas entradas (Weiskittel et al., 2011, p. 4). Finalmente, se puede distinguir entre modelos estáticos y dinámicos. Los primeros son adecuados para predecir el desarrollo de rodales no aclarados o sometidos a un rango reducido de tratamientos selvícolas estándar, en los que las cantidades de interés se predicen directamente como funciones fijas del tiempo a partir de datos experimentales de largo plazo. Por su parte, los modelos dinámicos permiten una mayor flexibilidad para simular tratamientos selvícolas, prediciendo tasas de cambio bajo condiciones variadas (García, 1988).

Para la gestión de masas regulares monoespecíficas, que son las más abundantes en Galicia, es suficiente con el uso de modelos empíricos, dinámicos, determinísticos y de rodal (García, 1988), como los recomendados para las principales especies forestales con interés comercial en dicha región (Diéguez-Aranda et al., 2006; Castedo-Dorado et al., 2007; Gómez-García et al., 2014,

## 1. Introducción y objetivos



**Figura 2:** Esquema de un simulador de programas selvícolas que incluye un modelo dinámico de crecimiento de rodal como los desarrollados para las principales especies forestales de Galicia.

2015; García-Villabrille, 2015; Arias-Rodil et al., 2016). Estos modelos se han desarrollado basándose en el enfoque del espacio de estados, en el que el estado del rodal en cualquier instante se describe por un conjunto discreto de variables, cuyos valores futuros se predicen mediante funciones de transición. Los tratamientos selvícolas se simulan utilizando variables de control y las salidas se obtienen mediante funciones específicas a partir de las variables de estado (Figura 2). La descripción del estado debe ser tal que, con un grado suficiente de aproximación, los estados futuros queden determinados por el estado actual y las acciones futuras, y cualquier variable de interés pueda estimarse a partir de las variables de estado mediante funciones de salida (García, 1994).

En los modelos disponibles para Galicia, que son los que se utilizarán en esta tesis, el estado se describe mediante tres variables: altura dominante, número de árboles y área basimétrica. A partir de ellas pueden estimarse las salidas, como volúmenes de productos, valores monetarios, distribuciones de diámetros, etc. Tanto las funciones de transición como las de salida de estos modelos dinámicos de rodal son muy regulares (generalmente de clase  $C^\infty$ ) y,

## 1.4. Optimización en la planificación forestal

como consecuencia, las salidas admiten derivadas parciales con respecto a las variables de control, permitiendo el uso de algoritmos de tipo gradiente en el diseño óptimo de los planes de gestión (Arias-Rodil et al., 2017).

### 1.4. Optimización en la planificación forestal

En Galicia, la mayoría de los planes de gestión forestal para masas regulares productivas se basan en el método de división por cabida (*area control method* en la literatura anglosajona), con el que se pretende conseguir un monte regulado a partir de un primer turno de transformación (Davis et al., 2001, pp. 528–529). Dicho método se aplica generalmente trabajando con superficies equiproductivas, es decir, superficies reales ponderadas por su capacidad de producción a la edad fijada como turno en el futuro monte regulado, debido a las diferencias de calidad que suele haber entre los rodales de un mismo monte (Madrigal Collazo, 1994, pp. 143, 158–164), aunque sin sustentarse en ningún modelo de programación matemática para optimizar la gestión durante el turno de transformación (Díaz-Balteiro et al., 2009).

Desde un punto de vista matemático, optimización es la minimización o maximización de una (o varias) función(es) objetivo sujeta a restricciones en sus variables de decisión. El proceso de identificar estos componentes (función(es) objetivo, restricciones y variables de decisión) para un problema dado se conoce como modelizar. La construcción de un modelo apropiado es un requisito para poder usar un algoritmo de optimización que busque la mejor solución (Nocedal & Wright, 2006, pp. 1–2).

En la planificación forestal es habitual el uso de distintos modelos para obtener planes de gestión óptimos (Kaya et al., 2016; Caglayan et al., 2018). Para analizar los distintos modelos existentes en la literatura, partimos de que para una especie forestal determinada se dispone de modelos de crecimiento que proporcionan, por ejemplo, el volumen de madera  $V_j(y)$  (volumen/área) del rodal  $j$  a lo largo del tiempo. Por simplicidad, asumiremos que el objetivo es maximizar el volumen de madera. Sin hipótesis adicionales, denotando  $A_j$  el área del rodal  $j$ , el problema consiste en determinar el ritmo de corta  $h_j^c(y)$  (área/tiempo) de cada rodal a lo largo del tiempo (Heaps, 1984, 2015), dado

## 1. Introducción y objetivos

por

$$\begin{aligned} \text{maximizar } J^V(\mathbf{h}^r) &= \sum_j \int_0^P V_j(y) h_j^r(y) dy \\ \text{sujeto a } h_j^r(y) &\geq 0, \int_0^P h_j^r(y) dy = A_j. \end{aligned} \quad (1)$$

Aunque esta formulación resulta sencilla, la variable de decisión  $\mathbf{h}^r = (h_j^r)_j$  es una función vectorial definida en  $[0, P]$ , lo que hace que el problema no sea fácil de resolver. Por esta razón, originalmente se pensó en suponer que: **(H1)** las intervenciones (cortas) en cada rodal  $j$  son instantáneas, en instantes  $y_j^k$  establecidos de antemano (generalmente al inicio, a la mitad o al final de los períodos en que suele dividirse el horizonte de planificación  $[0, P]$ ). La hipótesis **(H1)** es equivalente a asumir que  $h_j^r(y) = \sum_k A_{jk} \delta(y - y_j^k)$ , siendo  $A_{jk}$  el área del rodal  $j$  cortada en la intervención  $k$ , y  $\delta(y)$  la función delta de Dirac (Oldham et al., 2009, Cap. 9). Bajo esta hipótesis, el Problema (1) pasa a ser encontrar la matriz  $\mathbf{A} = (A_{jk})$  tal que

$$\begin{aligned} \text{maximizar } J^V(\mathbf{A}) &= \sum_j \sum_k V_j(y_j^k) A_{jk} \\ \text{sujeto a } A_{jk} &\geq 0, \sum_k A_{jk} = A_j. \end{aligned} \quad (2)$$

Tomando como nueva variable de decisión la proporción del rodal  $j$  que se corta en la intervención  $k$  ( $x_{jk} = A_{jk}/A_j$ ), este problema se escribe como

$$\begin{aligned} \text{maximizar } J^V(\mathbf{X}) &= \sum_j \sum_k A_j V_j(y_j^k) x_{jk} \\ \text{sujeto a } x_{jk} &\in [0, 1], \sum_k x_{jk} = 1, \end{aligned} \quad (3)$$

que es el denominado «Modelo I» de programación lineal (LP, por sus siglas en inglés *linear programming*) (Johnson & Scheurman, 1977). Este modelo, que se utiliza con frecuencia cuando no es necesario considerar la ubicación espacial de las cortas, puede resolverse de forma exacta con el método *simplex* (e.g., Curtis, 1962; Nautiyal & Pearse, 1967; Ware & Clutter, 1971) y también con el de costo reducido (RC, por sus siglas en inglés *reduced cost*),

#### 1.4. Optimización en la planificación forestal

que produce soluciones óptimas casi factibles de una manera rápida y sencilla (Hoganson & Rose, 1984).

Si es necesario considerar esa ubicación, o si las soluciones que proporciona la LP estándar generan problemas de índole operacional (Başkent, 2001), resultando por tanto inadecuadas para las necesidades de planificación de muchos gestores (Bettinger et al., 2009, p. 163), se debe asumir una hipótesis adicional: **(H2)** todo el rodal  $j$  debe cortarse en un único instante  $y_j$ . Esta hipótesis transforma las variables continuas  $x_{jk}$  en variables binarias ( $x_{jk} = 1$  si y solo si  $y_j = y_j^k$ ), y (3) pasa a ser el problema combinatorio

$$\begin{aligned} \text{maximizar } J^V(\mathbf{X}) &= \sum_j \sum_k A_j V_j(y_j^k) x_{jk} \\ \text{sujeto a } x_{jk} &\in \{0, 1\}, \sum_k x_{jk} = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

En el marco de la programación lineal binaria (BLP, por sus siglas en inglés *binary linear programming*), la solución exacta del Problema (4) se puede obtener con el método de ramificación y poda o con el de los planos de corte (Williams, 1999, pp. 151–152), siempre que el problema no exceda una cierta dimensión relativamente pequeña (e.g., Bettinger et al., 1999). La BLP ha sido utilizada por muchos autores para modelizar problemas con restricciones espaciales de adyacencia (ver, para ejemplos recientes, Fonseca et al., 2012; Martins et al., 2014; Neto et al., 2017; Gharbi et al., 2019). En estos problemas, especialmente si son grandes, también puede ser útil una aplicación espacial del método RC (Pukkala et al., 2009).

Adicionalmente, el Problema (4) también acepta una formulación combinatoria en el marco de la programación entera no lineal (NLIP, por sus siglas en inglés *nonlinear integer programming*), considerando los instantes de corta  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n_s})$  como las variables de decisión. En este caso, (4) es equivalente a encontrar el vector  $\mathbf{y}$  tal que

$$\begin{aligned} \text{maximizar } J^V(\mathbf{y}) &= \sum_j A_j V_j(y_j) \\ \text{sujeto a } y_j &\in \{y_j^k\}_k. \end{aligned} \quad (5)$$

## 1. Introducción y objetivos

Esta aproximación resulta más interesante para problemas combinatorios de cierta envergadura, en los que los métodos exactos utilizados para resolver los problemas de BLP no son eficientes. En este caso, es necesario resolver (5) mediante un método heurístico (Zanakis & Evans, 1981), que proporcionará una solución (aunque de calidad desconocida) en un tiempo de computación razonable, incluso si se consideran restricciones no lineales. Los algoritmos heurísticos han sido aplicados con éxito en diferentes problemas de planificación forestal, destacando entre ellos el enfriamiento simulado (Lockwood & Moore, 1993; Chen & von Gadow, 2002; Baskent & Jordan, 2002), la búsqueda tabú (Bettinger et al., 1997; Brumelle et al., 1998) o los algoritmos genéticos (Falcão & Borges, 2001; Dewey et al., 2006). Es importante destacar que los Problemas (3)-(5) dividen conceptualmente el problema básico de planificación forestal (decidir dónde y cuándo realizar las cortas) en dos etapas: una para generar programas de gestión alternativos y otra para seleccionar la combinación de dichos programas que mejor satisfaga los objetivos establecidos para el monte a la vez que cumpla con las posibles restricciones (Başkent, 2001; Kurttila, 2001; Pukkala, 2019).

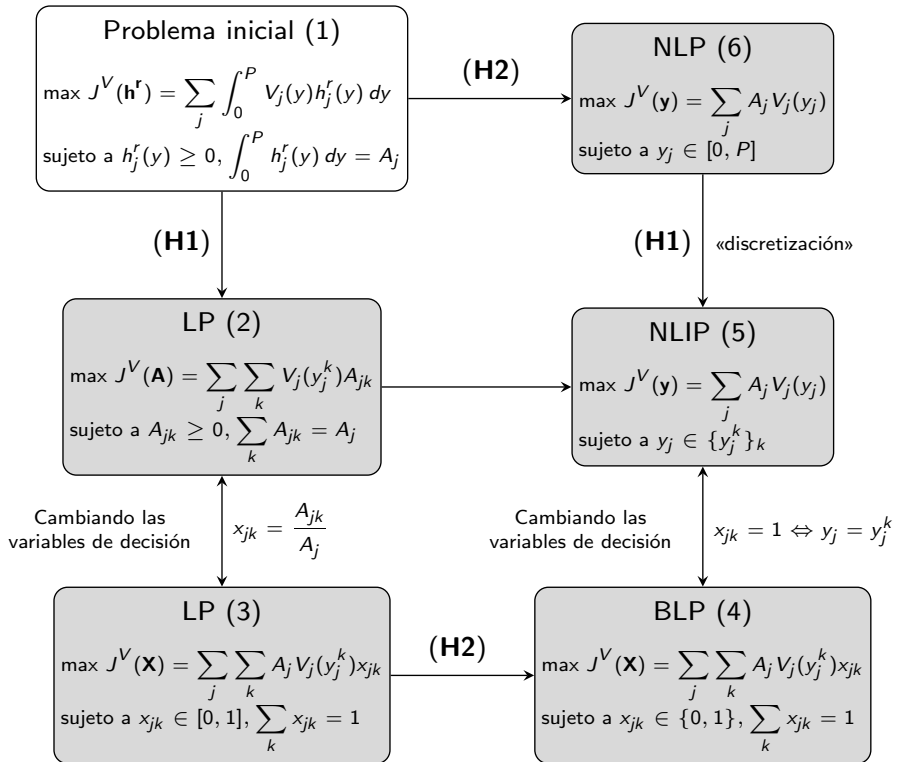
Si no se considera la hipótesis (**H1**), entonces (**H2**) es equivalente a asumir que  $h_j^r(y) = A_j \delta(y - y_j)$ , y sin ninguna asunción adicional, el Problema (1) se convierte en el problema no lineal (NLP, por sus siglas en inglés *nonlinear programming*)

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } J^V(\mathbf{y}) = \sum_j A_j V_j(y_j) \\ &\text{sujeto a } y_j \in [0, P]. \end{aligned} \tag{6}$$

Ahora, la hipótesis (**H1**) se puede entender como una discretización de la variable continua de este NLP, y si se asume (lo cual puede ser necesario si la dimensión del problema —número de rodales— es elevada y los métodos disponibles no van bien en un tiempo razonable), el Problema (6) se convierte directamente en el Problema (5) de NLP previo. En la Figura 3 se resumen las equivalencias y transformaciones entre todas estas formulaciones.

Los Problemas (3)–(6) se pueden mejorar considerando objetivos más sofisticados, como el valor esperado del suelo y del vuelo. También se pueden completar con más objetivos y/o restricciones relacionadas con el rendimien-

## 1.4. Optimización en la planificación forestal



**Figura 3:** Equivalencias y transformaciones entre diferentes formulaciones del problema básico de planificación forestal (el problema de planificación de cortas).

to sostenido de productos, el tamaño del área contigua de corta (restricciones espaciales), etc. Como se ha indicado, existen muchos artículos que tratan con modelos basados en las formulaciones (3)–(5). Por el contrario, debido a la herencia de la formulación de LP original, y a la aparente ausencia de métodos numéricos de resolución adecuados, la formulación continua dada en el Problema (6) ha sido mucho menos explorada (ver, por ejemplo, Roise, 1990).

Como se ha comentado en el Apartado 1.2, los problemas de planificación

## 1. Introducción y objetivos

forestal generalmente incluyen más de un objetivo, por lo que se pueden abordar dentro del marco de la optimización multiobjetivo (MOP, por sus siglas en inglés *multi-objective optimization problem*) (Kangas & Pukkala, 1992), siempre que haya un único tomador de decisiones (DM, por sus siglas en inglés *decision maker*). Problemas con más de un DM, que generalmente tienen intereses diferentes, se estudian en la teoría de juegos (Ungureanu, 2018, pp. 3–4). Ejemplos de este tipo de problemas en el campo forestal se pueden encontrar en Paradis et al. (2018).

En una situación cooperativa (p. ej., cuando solo hay un DM y es racional), resolver el MOP implica elegir una solución satisfactoria entre el conjunto de soluciones factibles no dominadas, generalmente conocidas como soluciones Pareto óptimas o soluciones eficientes. Dicha solución satisfactoria será la mejor solución de compromiso para las preferencias del DM. Considerando el momento en el que estas preferencias se incorporan al proceso de búsqueda de la solución, se distinguen tres enfoques (Miettinen, 1998, pp. 63–64):

- A priori: las preferencias del DM se conocen antes de iniciar el proceso de optimización, evitando así tener que generar el conjunto de soluciones eficientes. En este caso el MOP se formula como un problema de un único objetivo utilizando pesos y/o tratando algunos objetivos como restricciones. Este enfoque tiene la desventaja de que el DM debe especificar sus preferencias para los diversos objetivos sin saber lo que es posible lograr, lo que puede llevar a soluciones pobres (Tóth et al., 2006; Miettinen, 1998, p. 115). Entre las técnicas más usadas para resolver este tipo de problemas destacan el método de función de valor (Pukkala & Kangas, 1993; Kašpar et al., 2015) y la programación por metas y sus extensiones (Field, 1973; Kangas & Pukkala, 1992; Diaz-Balteiro et al., 2013).
- A posteriori: el proceso de optimización se inicia sin conocer las preferencias del DM, lo que requiere obtener el conjunto completo de soluciones no dominadas o el frente Pareto. Será el DM quien, a partir de dicho frente, deberá seleccionar la solución satisfactoria en base a sus preferencias. Una ventaja importante que ofrece este enfoque es que el

#### 1.4. Optimización en la planificación forestal

DM dispone de información valiosa sobre los costes de oportunidad de optar por una solución u otra. El principal inconveniente es que la obtención del frente suele ser costosa en tiempo de computación. Dentro de este enfoque, es de uso común el método de pesos (Roise, 1990; Snyder & ReVelle, 1997; Öhman & Eriksson, 2010) y el de  $\varepsilon$ -restricciones (Tóth & McDill, 2009; Kangas et al., 2015), que proporcionan una única solución no dominada con cada ejecución. También se pueden usar algoritmos evolutivos multiobjetivo (Zitzler et al., 2004), cuya población de soluciones se aproxima al frente Pareto en cada iteración, y que han sido aplicados en la planificación forestal con buenos resultados (Ducheyne et al., 2004; Ducheyne et al., 2006; Fotakis et al., 2012). Dos de los algoritmos de este tipo más populares en la literatura científica son SPEA2 (Zitzler et al., 2002) y NSGA-II (Deb et al., 2002).

- Interactivo: el DM participa directamente durante el proceso de optimización. Este enfoque se sustenta en las técnicas algorítmicas utilizadas en los enfoques a priori y a posteriori combinadas con pasos intermedios para obtener las preferencias del DM (Emmerich & Deutz, 2018), lo que permite reducir el número de soluciones a generar y puede ser muy interesante cuando el MOP tiene más de tres objetivos. Para ejemplos de este enfoque en problemas forestales, ver Liu & Davis (1995), Diaz-Balteiro (1998), Krmar-Nowic et al. (1998) o Ezquerro et al. (2019).

## 1. Introducción y objetivos

### 1.5. Objetivos

El objetivo general de esta tesis es proponer y resolver modelos continuos de optimización multiobjetivo adecuados para planificar la gestión de las masas forestales regulares en Galicia. Se busca que dichos modelos integren simultáneamente objetivos típicamente productivos y otros relacionados con la sostenibilidad.

Los objetivos específicos de esta tesis son:

1. Desarrollar nuevas métricas para la constancia de renta en volumen y la regulación del monte que permitan trabajar con variables de decisión continuas y utilizar métodos diferenciables para su optimización.
2. Formular modelos de planificación de cortas que permitan el tratamiento continuo de las variables temporales, evitando la discretización en períodos usada en las formulaciones clásicas.
3. Comparar el nuevo enfoque continuo con la metodología combinatoria clásica, resuelta mediante algoritmos evolutivos.

El resto de la tesis se organiza de la siguiente manera: en la segunda sección se presentan las metodologías empleadas (hipótesis de partida, definiciones de conceptos clásicos y nuevos, modelos de optimización propuestos y métodos de resolución numérica) y los casos de estudio, en la tercera sección se muestran (siempre que es posible, de forma gráfica) y discuten los resultados más relevantes, en la cuarta sección se indican las principales conclusiones, en la quinta sección se apuntan futuras líneas de investigación relacionadas con la temática de la tesis, en la sexta sección se incluye la bibliografía citada en la memoria, y las dos últimas se dedican a detallar las siglas y la notación utilizadas. Por último, se reproducen en apéndices, en lengua inglesa, los tres artículos de investigación que son la base de la presente memoria.

## 2. MATERIALES Y MÉTODOS

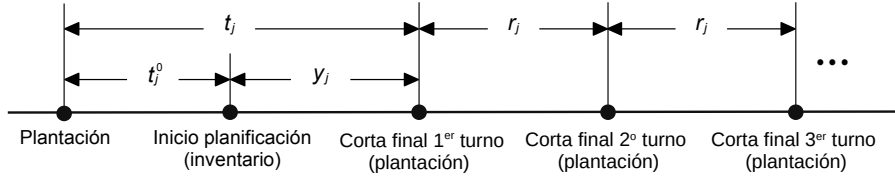
En esta sección se detallan la metodología y los modelos matemáticos empleados en la tesis para la optimización de la planificación forestal a nivel monte. Primero se establecen las hipótesis de trabajo y la notación utilizada. A continuación, se dan definiciones rigurosas de aquellos conceptos necesarios (tanto clásicos como novedosos). Posteriormente, se formulan los distintos problemas de optimización multiobjetivo que se proponen y se detallan los métodos que se utilizan para su resolución numérica. Finalmente, se describen los casos de estudio sobre los que se probará la utilidad de las metodologías propuestas.

### 2.1. Hipótesis de trabajo

Inicialmente se considera un monte compuesto por  $n_s$  rodales en el que, para cada rodal  $j$ , se conoce su edad al inicio de la planificación ( $t_j^0$ , en años), área ( $A_j$ , en hectáreas) y mediciones a la edad  $t_j^0$  de las siguientes variables de estado: altura dominante ( $H_j^0$ , en metros, definida como la altura media de los árboles dominantes), número de árboles ( $N_j^0$ , por hectárea) y área basimétrica ( $G_j^0$ , en  $m^2/ha$ , definida como la suma de la sección normal de todos los árboles del rodal a la altura de 1.3 m sobre el suelo). Se asume además que, para cada rodal  $j$ , se conocen funciones diferenciables  $h_j$ ,  $n_j$  y  $g_j$  (llamadas funciones de transición) que proporcionan, a partir de las mediciones anteriores, estimaciones de las variables de estado a cualquier edad  $t > 0$ . Es decir, las variables de estado vienen dadas por  $H_j(t) = h_j(t_j^0, H_j^0, t)$ ,  $N_j(t) = n_j(t_j^0, N_j^0, t)$  y  $G_j(t) = g_j(t_j^0, G_j^0, t)$ . Finalmente, se supone que también existen funciones diferenciables  $v_j(H, N, G)$  que proporcionan el volumen total del rodal (en  $m^3/ha$ ) a partir de las variables de estado.

Para evitar confusiones, es importante distinguir entre la edad del rodal  $j$ , denotada por  $t_j$ , y el tiempo transcurrido desde el inicio de la planificación (que suponemos que coincide con el año del inventario), denotado por  $y_j$ . Ambos se expresan en años, y como la edad de un rodal al inicio de la planificación es

## 2. Materiales y métodos



**Figura 4:** Línea de tiempo para un rodal  $j$  en la que se muestra la relación entre las variables temporales.  $t_j$ : tiempo transcurrido desde el momento de la plantación hasta la corta final;  $t_j^0$ : edad al inicio de la planificación;  $y_j$ : tiempo transcurrido desde el inicio de la planificación hasta la corta final;  $r_j$ : duración establecida para los turnos futuros.

$t_j^0$ , entonces  $y_j = t_j - t_j^0$  (ver Figura 4).

El objetivo último de la planificación forestal es determinar el programa selvícola que se aplicará a cada rodal  $j$ , que queda determinado por el número de claras a aplicar  $n_c^j$ , el instante  $y_j^k$  en el que se realiza cada clara (clara  $k$ ), su intensidad  $I_j^k \in (0, 1)$  y tipo (definido como la relación de extracción  $R_j^k \in (0, 1]$ ), y finalmente el momento de la corta final  $y_j$ . De este modo, la variable de decisión a nivel rodal resulta  $\mathbf{u}_j = (y_j^1, I_j^1, R_j^1, \dots, y_j^{n_c^j}, I_j^{n_c^j}, R_j^{n_c^j}, y_j) \in \mathbb{R}^{3n_c^j+1}$  y, consecuentemente, la variable de decisión a nivel monte tiene una dimensión  $d = n_s + 3 \sum_{j=1}^{n_s} n_c^j$ , y viene dada por  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n_s}) \in \mathbb{R}^d$ . Si no se aplican claras, solo es necesario determinar el instante  $y_j$  de la corta final de cada rodal, de manera que la variable de decisión a nivel monte se reduce a

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n_s}) \in \mathbb{R}^{n_s}.$$

En todo lo que sigue, para simplificar la notación, asumiremos que no se realizan claras y que nuestra variable de decisión es  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_s}$ . Obviamente, encontrar  $\mathbf{y}$  es equivalente a encontrar  $\mathbf{t} = \mathbf{y} + \mathbf{t}^0$ , y las definiciones que se establecen en la siguiente sección se harán en términos de  $\mathbf{y}$  o  $\mathbf{t}$  dependiendo de cómo resulte más apropiado (por ejemplo, si el rodal  $j$  se corta en el instante  $y_j$ , cuando tiene  $t_j$  años, el volumen de madera obtenido se denotará por  $V_j(y_j) = v_j(H(t_j), N(t_j), G(t_j))$ ). Aún así, conviene destacar que todas las definiciones que se establecen en el siguiente apartado pueden extenderse sin

## 2.2. Definiciones básicas

dificultad al caso en el que se apliquen claras, y que el trabajo presentado en esta memoria podría también extenderse a este último caso. Como ejemplo de esto, el estudio del valor esperado del suelo (Apartado 2.2.1) en términos de la variable  $\mathbf{u}_j$  puede verse en Arias-Rodil et al. (2017), mientras que la métrica para la renta constante en volumen (Apartado 2.2.6) en términos de  $\mathbf{u}$  se presenta en González-González et al. (2020), trabajo que se incluye como Apéndice 1 de esta memoria.

Con respecto a la regeneración, se asume que no hay cambios en la calidad de estación (índice de sitio), que los rodales se plantarán con una densidad fija ( $N_j^f$  árboles por hectárea) inmediatamente después de cortarse, que se dispone de una función para estimar el área basimétrica inicial, y que en cada rodal  $j$  todos los turnos futuros serán de la misma duración ( $r_j$  años).

Por último, se tendrá en cuenta que sobre los rodales demasiado jóvenes no se puede actuar, esto es, que para cada rodal  $j$  existe una edad mínima para su corta  $l_j > 0$  (años), debiendo verificarse que  $t_j \geq l_j$ . A partir de estos valores se obtiene el instante inicial en el que se puede actuar sobre el monte, que se denota por  $a \geq 0$  (años), y que viene dado por

$$a = \begin{cases} \min\{l_j - t_j^0\} & \text{si } l_j - t_j^0 \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n_s, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

## 2.2. Definiciones básicas

Para formular correctamente los problemas de optimización planteados en esta tesis es necesario definir previamente algunos conceptos importantes.

### 2.2.1. Valor esperado del suelo

El valor esperado del suelo (LEV, por sus siglas en inglés *land expectation value*) es uno de los conceptos financieros más importantes en la gestión forestal, ya que permite comparar adecuadamente programas selvícolas con diferentes turnos en masas regulares. Para un rodal  $j$  dado, el LEV puede definirse como el valor actualizado, por unidad de superficie, de los costes e ingresos

## 2. Materiales y métodos

proyectados de una serie infinita de turnos idénticos (de  $r_j$  años), partiendo de un terreno raso (Bettinger et al., 2009, pp. 40–42). Si asumimos una tasa de interés real  $i \in (0, 1]$ , entonces viene dado por

$$J_j^{LEV}(r_j) = \frac{(1+i)^{r_j}(R_j(r_j) - C_j(r_j))}{(1+i)^{r_j} - 1}, \quad (7)$$

donde  $R_j(r_j)$  y  $C_j(r_j)$  representan ingresos y costes de gestión actualizados, respectivamente, y son funciones conocidas definidas a partir de las variables de estado y de las variables de salida (p. ej., el volumen de madera cortado).

El LEV de un monte es la suma del LEV de todos los rodales que lo constituyen, es decir,

$$J^{LEV}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{n_s} J_j^{LEV}(r_j). \quad (8)$$

Desde un punto de vista matemático, debe tenerse en cuenta que la función  $J^{LEV}$  tiene las mismas propiedades de suavidad que las funciones  $h_j$ ,  $n_j$ ,  $g_j$  y  $v_j$  (Arias-Rodil et al., 2017).

### 2.2.2. Turno óptimo a nivel rodal

Tomando el LEV como indicador de beneficios, el turno económicamente óptimo para un rodal individual  $j$  viene dado por la edad de la corta final que corresponde a la solución del problema

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && J_j^{LEV}(r_j) \\ &\text{suje}to && a \quad r_j \geq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

y se denota por  $\bar{r}_j$ . Este turno óptimo se conoce en la literatura económica forestal como «Fórmula de Faustmann», aunque este autor (Faustmann, 1849) solo propuso la Ecuación (7), sin llegar a maximizarla (Cairns, 2017). En su conjunto, al vector  $\bar{\mathbf{r}} = (\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_{n_s})$  se le denomina vector de turnos económicamente óptimos a nivel rodal.

### 2.2.3. Turno óptimo del monte regulado

El monte regulado es un concepto simplista de un monte ideal con una estructura relativamente estable que proporciona un rendimiento sostenido de los productos forestales deseados a lo largo del tiempo (Davis et al., 2001, p. 93). En la gestión de masas regulares esto implica utilizar una misma edad  $r$  para la corta final de todos los rodales, que deben ser inmediatamente regenerados, repitiéndose el mismo ciclo indefinidamente (Kuusela & Lintunen, 2019). Si el objetivo principal es maximizar la rentabilidad económica, esta edad debe ser la que maximiza el LEV del monte (Hoganson & McDill, 1993; Kuusela & Lintunen, 2019), y viene dada por la solución del problema

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && \sum_{j=1}^{n_g} J_j^{LEV}(r) \\ &\text{sujeto} && r \geq 0, \end{aligned} \quad (10)$$

que de ahora en adelante se denotará por  $R$ .

### 2.2.4. Valor del suelo y del vuelo

El valor del suelo y del vuelo (LTV, por sus siglas en inglés *land and timber value*) es una generalización del LEV que proporciona el valor de un terreno forestal con una masa de árboles ya establecida, cualquiera que sea su estado de desarrollo, por lo que resulta muy útil para determinar cuándo cortar un rodal existente. El LTV del rodal  $j$  se define como la suma del valor actualizado de los costes e ingresos proyectados para el resto del presente turno, más el valor actualizado del LEV que, como indicamos anteriormente, representa el valor de todos los turnos futuros de producción de madera partiendo del terreno raso (Clutter et al., 1983, pp. 226–228). Consecuentemente, el LTV de un rodal no solo depende del instante de corta en el primer turno ( $y_j$ ), sino también de la edad del turno futuro ( $r_j$ ), y viene dado por

$$J_j^{LTV}(y_j, r_j) = \frac{p_j V_j(y_j) + J_j^{LEV}(r_j)}{(1+i)^{y_j}}, \quad (11)$$

## 2. Materiales y métodos

donde, como ya dijimos,  $i \in (0, 1]$  es la tasa de interés real y  $p_j$  (en €/m<sup>3</sup>) es el precio esperado de venta de la madera en pie.

En este trabajo, como suele ser habitual, el objetivo es determinar los programas selvícolas a ejecutar en el primer turno, por lo que el valor de los turnos futuros se admite prefijado de antemano. Se admitirá, según convenga, que los turnos futuros se harán en base al turno óptimo para cada rodal ( $r_j = \bar{r}_j$ ) o basándose en el turno óptimo del monte regulado ( $r_j = R$ ). Consecuentemente, se trabajará con dos funciones diferentes para el LTV:

- (i) Si se asume que los turnos futuros se basan en el turno óptimo para cada rodal, se tendrá

$$J_j^{LTV_{\bar{r}_j}}(y_j) = \frac{p_j V_j(y_j) + J_j^{LEV}(\bar{r}_j)}{(1+i)^{y_j}}. \quad (12)$$

- (ii) Si se asume que los siguientes turnos se basan en el turno óptimo para el monte regulado, se utilizará

$$J_j^{LTV_R}(y_j) = \frac{p_j V_j(y_j) + J_j^{LEV}(R)}{(1+i)^{y_j}}. \quad (13)$$

En cualquier caso, el LTV del monte se obtiene como la suma del LTV de todos sus rodales, es decir,

$$J^{LTV}(\mathbf{y}, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{n_s} J_j^{LTV}(y_j, r_j), \quad (14)$$

y en particular,

$$J^{LTV_{\bar{r}}}(y) = \sum_{j=1}^{n_s} J_j^{LTV_{\bar{r}_j}}(y_j), \quad (15)$$

$$J^{LTV_R}(y) = \sum_{j=1}^{n_s} J_j^{LTV_R}(y_j). \quad (16)$$

Al igual que con  $J^{LEV}$ , la regularidad de  $J^{LTV}$ ,  $J^{LTV_{\bar{r}}}$  y  $J^{LTV_R}$  viene dada por las propiedades de las funciones  $h_j$ ,  $n_j$ ,  $g_j$  y  $v_j$ , por lo que se puede asumir que son suficientemente regulares.

### 2.2.5. Programa selvícola óptimo a nivel rodal

Tomando el LTV como indicador de beneficios, el programa selvícola óptimo para un rodal individual  $j$  viene dado por la solución del problema

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } J_j^{LTVr_j}(y_j) \\ &\text{sujeto a } y_j \geq 0, \end{aligned} \quad (17)$$

y se denota por  $\bar{y}_j$ . En su conjunto, al vector  $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n_s})$  se le denomina vector de programas selvícolas óptimos a nivel rodal.

### 2.2.6. Métricas de renta constante y de regulación

Según Madrigal Collazo (1994, pp. 36–40), la persistencia y estabilidad de las masas forestales, el rendimiento sostenido y el máximo de utilidades deben ser los objetivos generales que guíen la gestión de los montes arbolados densos. La persistencia y la estabilidad están garantizadas con el mecanismo corta/regeneración y la aplicación de las técnicas selvícolas más adecuadas a las características de cada estación y tipo de masa que soporta. El rendimiento sostenido implica la obtención de una renta constante en perpetuidad del conjunto de utilidades que proporcionan los montes arbolados, si bien la escala territorial en la que se pretende este objetivo puede ser superior a la del propio monte y abarcar hasta la comarca. Por su parte, el último objetivo está relacionado con la maximización de todas las utilidades que los montes arbolados pueden rendir.

Centrándonos en el caso de la producción preferente de madera, en el Apartado 1.2 ya se comentó que no siempre tiene por qué ser deseable obtener una renta constante de productos en perpetuidad, siendo en ocasiones preferible gestionar dinámicamente el monte (es decir, haciendo planes y evaluándolos cada cierto tiempo, repitiendo cíclicamente estos procesos) con estructuras intermedias entre las óptimas a nivel rodal y un monte perfectamente regulado. Así, estaríamos moviéndonos siempre entre el máximo beneficio económico que se podría obtener al gestionar cada rodal como mejor le convenga y el modelo teórico o estado final ideal que supone el monte regulado, por lo que los

## 2. Materiales y métodos

valores de ambos casos extremos pueden servir como líneas de referencia con las que comparar escenarios de gestión intermedios.

En el Apartado 2.2.4 se ha asumido que el LTV es la métrica que debe utilizarse para conocer los beneficios que se pueden obtener gestionando el monte de una determinada manera. Conviene ahora, por tanto, decidir de qué forma se puede medir la constancia de renta en el volumen procedente de las cortas de regeneración, lo cual se puede hacer tanto para un determinado horizonte de planificación (en adelante, métrica de renta constante en volumen) como para el monte regulado (métrica de regulación). En el primer caso se trata de obtener una renta constante en el volumen procedente de las cortas de regeneración durante un primer turno, mientras que con la métrica de regulación se busca la constancia en el segundo turno (y sucesivos), asumiendo que el turno futuro de todos los rodales será de  $R$  años (turno óptimo para el monte regulado, ver Apartado 2.2.3), es decir, cuando se hayan cortado durante el turno de transformación para alcanzar esa estructura ideal.

La maximización de la métrica de renta constante pretendería lo mismo que el método clásico de división en volumen (nótese que con este método no se garantiza que las masas se corten a una edad que realice el máximo de utilidades, ni puede asegurarse el rendimiento sostenido concluido el horizonte de planificación). Por su parte, con la maximización de la métrica de regulación se perseguirá la estructura de un monte regulado, tal y como sucede en el método de división por cabida (Madrigal Collazo, 1994, p. 143).

### **Métrica de renta constante en volumen**

La obtención de una renta constante (EF, por sus siglas en inglés *even flow*) en el volumen de madera obtenido de las cortas de regeneración de un monte es uno de los objetivos clásicos de la planificación forestal. Existen diferentes estrategias para abordar este objetivo de constancia de renta en la programación de cortas, pero prácticamente todas ellas pasan por dividir el horizonte de planificación en períodos de idéntica duración y buscar que los volúmenes cortados en los diferentes períodos sean similares. Así, algunos estudios optan por usar restricciones para garantizar niveles de volumen cortado por período.

## 2.2. Definiciones básicas

do dentro unos umbrales prefijados (O'Hara, 1989; Murray & Church, 1995) o por acotar las variaciones de volumen entre períodos (McDill et al., 2002; Constantino et al., 2008), mientras que otros incluyen la obtención de una renta constante como un objetivo para minimizar esas mismas variaciones (Kao & Brodie, 1979; Brumelle et al., 1998; Ducheyne et al., 2004).

La división del horizonte de planificación en períodos es algo artificial y, en principio, parece más útil conseguir una cierta constancia del volumen cortado durante todo ese horizonte. Teniendo en cuenta que la corta de un rodal no es instantánea sino que puede durar días, o incluso semanas, teóricamente podría obtenerse una constancia perfecta si el monte fuese suficientemente grande. Con esta idea en mente, en esta tesis se propone una nueva métrica para medir la constancia de renta en volumen, que no necesita la agrupación de las cortas en períodos. Para ello nos centramos en el concepto de ritmo de corta (ahora volumen/tiempo) y buscamos un ritmo constante en un período de  $T$  años, que será la duración del horizonte de planificación para la constancia de renta. Teniendo presente la posibilidad de que sobre el monte no se pueda actuar hasta dentro de  $a$  años (ver Apartado 2.1), el objetivo será alcanzar ese ritmo de corta constante en el período  $[a, a + T]$ , en el que sería deseable que todos los rodales se cortasen al menos una vez. El valor de  $T$  es una decisión técnica, que depende de la especie, las calidades del lugar, la edad de los rodales, etc.

El horizonte de planificación real comienza en el instante  $a$  y termina cuando todos los rodales se hayan cortado al menos una vez, esto es, coincide con el intervalo  $[a, \text{máx}(\mathbf{y})]$ . El instante en el que se corta el último rodal ( $\text{máx}(\mathbf{y})$ ) no tiene por qué coincidir con  $a + T$  y, por tanto, el intervalo en el que debemos controlar el ritmo de corta es  $[a, b(\mathbf{y})]$ , siendo

$$b(\mathbf{y}) = \text{máx}\{a + T, \text{máx}(\mathbf{y})\}.$$

Como ya se comentó, desde el punto de vista de la constancia de renta lo deseable es que todos los rodales se corten en el período  $[a, a + T]$ . De este modo, el objetivo a perseguir es que haya un ritmo de corta constante en  $[a, a + T]$  y que ese ritmo sea nulo en  $[a + T, b(\mathbf{y})]$ . Asumiendo que tras la corta se produce una regeneración inmediata y teniendo en cuenta que la edad

## 2. Materiales y métodos

de los turnos futuros viene dada por el vector  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{n_s})$ , el volumen total extraído en el intervalo  $[a + T, b(\mathbf{y})]$  es

$$\sum_{j=1}^{n_s} \left( V_j(y_j) + \sum_{k \geq 1} V_j(r_j) H(b(\mathbf{y}) - (y_j + kr_j)) \right),$$

siendo  $H(y)$  la función escalón de Heaviside (Oldham et al., 2009, Cap. 9). De este modo, si definimos

$$m(\mathbf{y}, \mathbf{r}) = \frac{\sum_{j=1}^{n_s} \left( V_j(y_j) + \sum_{k \geq 1} V_j(r_j) H(b(\mathbf{y}) - (y_j + kr_j)) \right)}{T},$$

el ritmo de corta deseado viene dado por (ver Figura 5)

$$\frac{\partial V^g}{\partial y}(\mathbf{y}, \mathbf{r}, y) = \begin{cases} m(\mathbf{y}, \mathbf{r}) & \text{si } y \in [a, a + T], \\ 0 & \text{si } y \in [a + T, b(\mathbf{y})]. \end{cases} \quad (18)$$

Por otra parte, admitiendo cortas instantáneas, el ritmo de corta real debe escribirse en términos de la *función* delta de Dirac  $\delta(y)$  (Oldham et al., 2009, Cap. 9). Específicamente, viene dado por (ver Figura 5)

$$\frac{\partial V}{\partial y}(\mathbf{y}, \mathbf{r}, y) = \sum_{j=1}^{n_s} \left( V_j(y_j) \delta(y - y_j) + \sum_{k \geq 1} V_j(r_j) \delta(y - (y_j + kr_j)) \right). \quad (19)$$

La delta de Dirac no es una función en el sentido tradicional, por lo que la comparación entre las expresiones (18) y (19) no es apropiada. En lugar de comparar los ritmos de corta, se propone comparar los volúmenes cortados (objetivo y real) que se obtienen al integrar esas expresiones (18) y (19), que

## 2.2. Definiciones básicas

para  $y \in [a, b(\mathbf{y})]$  vienen dados por

$$\begin{aligned} V^g(\mathbf{y}, \mathbf{r}, y) &= \int_a^y \frac{\partial V^g}{\partial \tau}(\mathbf{y}, \mathbf{r}, \tau) d\tau \\ &= \begin{cases} m(\mathbf{y}, \mathbf{r})(y - a) & \text{si } a \leq y \leq a + T, \\ m(\mathbf{y}, \mathbf{r})T & \text{si } y \geq a + T, \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} V(\mathbf{y}, \mathbf{r}, y) &= \int_a^y \frac{\partial V}{\partial \tau}(\mathbf{y}, \mathbf{r}, \tau) d\tau \\ &= \sum_{j=1}^{n_s} \left( V_j(y_j)H(y - y_j) + \sum_{k \geq 1} V_j(r_j)H(y - (y_j + kr_j)) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

La métrica de constancia de renta en volumen ( $J^{EF}$ ) debe medir la distancia entre ambas funciones para el horizonte de planificación  $[a, b(\mathbf{y})]$ . Usando la distancia asociada a la norma  $L^2$  (Adams, 1975), para cualquier estrategia de planificación  $\mathbf{y}$  y cualquier vector de turnos futuros  $\mathbf{r}$ , esa métrica viene dada por

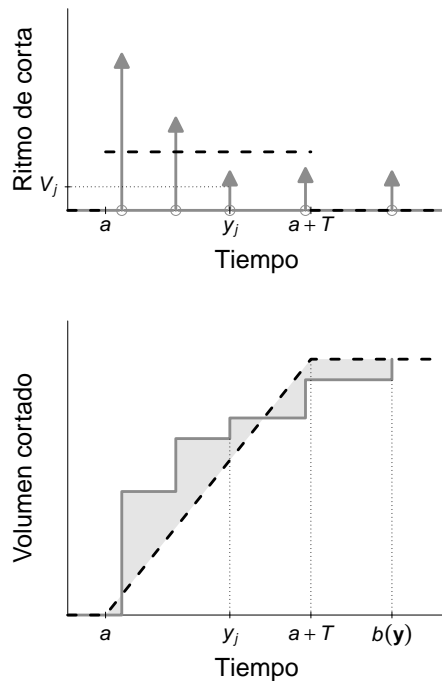
$$J^{EF}(\mathbf{y}, \mathbf{r}) = - \int_a^{b(\mathbf{y})} (V(\mathbf{y}, \mathbf{r}, y) - V^g(\mathbf{y}, \mathbf{r}, y))^2 dy,$$

donde el signo menos se incluye precisamente para que un valor más alto de  $J^{EF}(\mathbf{y}, \mathbf{r})$  corresponda a una mayor similitud de la función  $V(\mathbf{y}, \mathbf{r}, \cdot)$  con la función objetivo  $V^g(\mathbf{y}, \mathbf{r}, \cdot)$ , que es lo que se entiende por una mejor constancia de renta.

Como ya se comentó en el Apartado 2.2.4, el objetivo de este trabajo es determinar la estrategia de planificación del primer turno (dada por el vector  $\mathbf{y}$ ), por lo que los valores de los turnos futuros (dados por el vector  $\mathbf{r}$ ) se admiten prefijados de antemano. Aceptaremos, según convenga, que los turnos futuros se harán en base al turno óptimo para cada rodal ( $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}$ ) o en base al turno óptimo del monte regulado ( $\mathbf{r} = \mathbf{R} = (R, \dots, R)$ ). Consecuentemente, trabajaremos con dos funciones diferentes para la constancia de renta:

$$\begin{aligned} J^{EF_{\bar{\mathbf{r}}}}(\mathbf{y}) &= J^{EF}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{r}}), \\ J^{EF_{\mathbf{R}}}(\mathbf{y}) &= J^{EF}(\mathbf{y}, \mathbf{R}). \end{aligned}$$

## 2. Materiales y métodos



**Figura 5:** Ejemplo de ritmo de corta (arriba) y volumen cortado (abajo). Las líneas continuas grises representan cortas instantáneas reales (arriba, Ecuación (19)) y los volúmenes reales cortados (abajo, Ecuación (21)), mientras que las líneas negras discontinuas representan funciones de ritmo de corta objetivo (arriba, Ecuación (18)) y funciones de volumen cortado objetivo (abajo, Ecuación (20)).

Quando lo hagamos con  $J^{EF\bar{t}}$  admitiremos que los rodales se corten después de  $a + T$  si eso es beneficioso desde un punto de vista económico (si  $\bar{y}_j > a + T$ ) y, consecuentemente, tomaremos como conjunto admisible de es-

trategias de planificación

$$Y^{ad\bar{r}} = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_s}, \text{ tal que } \max\{0, l_j - t_j^0\} \leq y_j \leq \max\{a + T, \bar{y}_j\} \}. \quad (22)$$

Cuando trabajemos con  $J^{EF_R}$  supondremos que la duración del horizonte de planificación para la constancia de renta es el turno óptimo del monte regulado ( $T = R$ ), y exigiremos que la primera corta de todos los rodales se realice antes de los  $a + R$  años, de manera que  $b(\mathbf{y}) = a + R$ . En este caso, el conjunto admisible de estrategias de planificación viene dado por

$$Y^{adR} = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_s}, \text{ tal que } \max\{0, l_j - t_j^0\} \leq y_j \leq a + R \}. \quad (23)$$

Las funciones  $J^{EF_{\bar{r}}}$  y  $J^{EF_R}$  no son tan regulares como  $J^{LTV_{\bar{r}}}$  y  $J^{LTV_R}$  pero, aún así, son continuas y tienen derivadas parciales continuas en casi todo punto. Para  $J^{EF_R}$ , la prueba de ese resultado, junto a la expresión explícita de esas derivadas, puede verse en el trabajo de González-González et al. (2020), que se recoge en el Apéndice 1 de esta tesis. En ese trabajo se muestra además como esa regularidad es suficiente para que los métodos de tipo gradiente funcionen bien a la hora de minimizar esa función.

### Métrica de regulación

Para definir la métrica de regulación asumimos las mismas hipótesis que cuando trabajamos con la métrica  $J^{EF_R}$ :

- La duración del horizonte de planificación es el turno óptimo del monte regulado ( $T = R$ ).
- Los turnos futuros se hacen en base al turno óptimo del monte regulado ( $r_j = R$ ).
- La primera corta de todos los rodales se realiza antes de los  $a + R$  años ( $b(\mathbf{y}) = a + R$ ).

## 2. Materiales y métodos

Se trata ahora de definir una métrica que mida la constancia de renta en el segundo turno ( $[a + R, a + 2R]$ ). Bajo las hipótesis anteriores, el volumen cortado en este período es  $\sum_{j=1}^{n_s} V_j(R)$ , por lo que el ritmo corta deseado en todo el período es constante e independiente de la variable de decisión, y viene dado por

$$m^R = \frac{\sum_{j=1}^{n_s} V_j(R)}{R}. \quad (24)$$

Por el contrario, el ritmo real de corta en este segundo turno sí depende de la estrategia de planificación del primer turno ( $\mathbf{y}$ ). Como ahora todos los rodales se cortan a los  $R$  años, el instante de la segunda corta (tiempo transcurrido desde el inventario hasta que se produce la segunda corta) es  $y_j + R$  y, consecuentemente, para cada  $\mathbf{y}$ , el ritmo real de corta en el segundo turno viene dado por (ver Figura 6)

$$\frac{\partial V^n}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}, y) = \sum_{j=1}^{n_s} V_j(R) \delta(y - (y_j + R)), \quad y \in [a + R, a + 2R]. \quad (25)$$

Los volúmenes cortados en el segundo turno (objetivo  $V^R$  y real  $V^n$ ) se obtienen al integrar, respectivamente, las expresiones (24) y (25). Para  $y \in [a + R, a + 2R]$  vienen dados por

$$V^R(\mathbf{y}, y) = \int_{a+R}^y m^R d\tau = m^R(y - (a + R)), \quad (26)$$

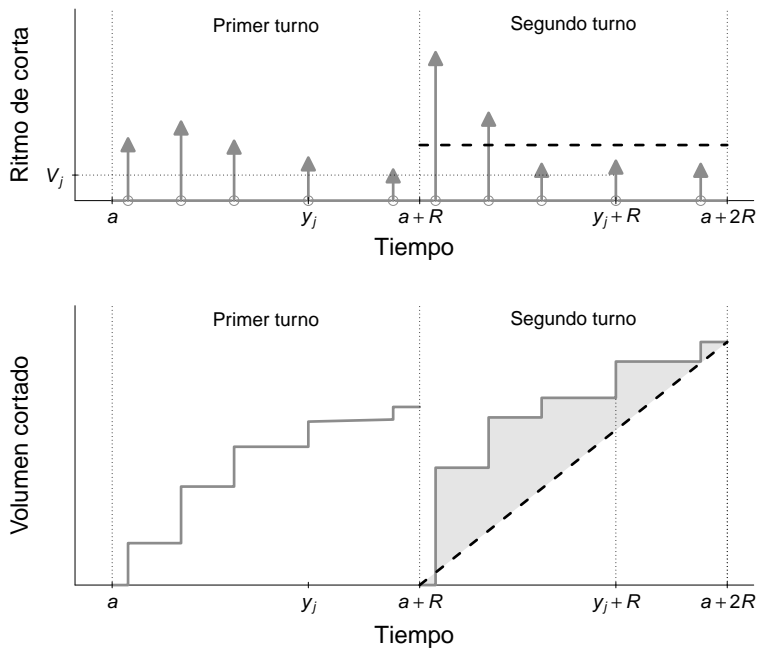
$$V^n(\mathbf{y}, y) = \int_{a+R}^y \frac{\partial V^n}{\partial \tau}(\mathbf{y}, \tau) d\tau = \sum_{j=1}^{n_s} V_j(R) H(y - (y_j + R)). \quad (27)$$

Igual que para la constancia de renta, la métrica de regulación se define utilizando la distancia asociada a la norma  $L^2$  para medir la semejanza entre volumen objetivo y volumen real. Concretamente

$$J^R(\mathbf{y}) = - \int_{a+R}^{a+2R} (V^n(\mathbf{y}, y) - V^R(\mathbf{y}, y))^2 dy.$$

## 2.2. Definiciones básicas

La función  $J^R$  tiene las mismas propiedades de regularidad que  $J^{EF_r}$  y  $J^{EF_R}$ , y la expresión explícita de sus derivadas se obtiene de modo similar a como se hizo en González-González et al. (2020) para calcular las derivadas de  $J^{EF_R}$ . A la vista de que las propiedades de regularidad son las mismas, cabe esperar que



**Figura 6:** Ejemplo de ritmo de corta (arriba) y volumen cortado (abajo). Las líneas continuas grises representan cortas instantáneas reales (arriba, Ecuación (25)) y los volúmenes reales cortados (abajo, Ecuación (27)), mientras que las líneas negras discontinuas representan funciones de ritmo de corta objetivo (arriba, Ecuación (24)) y funciones de volumen cortado objetivo (abajo, Ecuación (26)).

## 2. Materiales y métodos

con esta nueva métrica los métodos de tipo gradiente se comporten de modo similar a como lo hacen con  $J^{EF_R}$ .

### 2.3. Modelos de optimización multiobjetivo

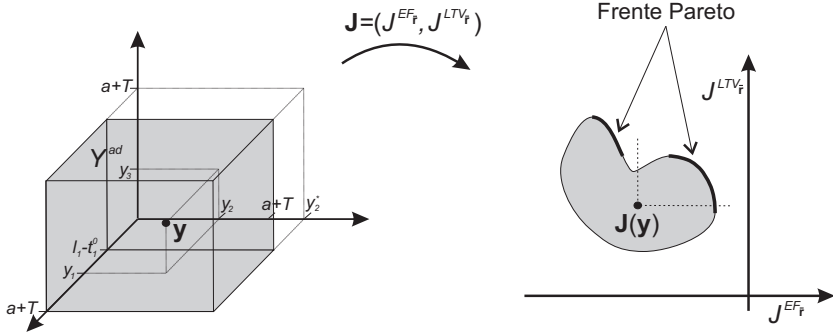
En esta tesis, el problema de planificación de la gestión forestal que pretendemos resolver consiste en seleccionar el conjunto de tratamientos selvícolas que debe aplicarse a cada rodal (es decir, determinar  $\mathbf{y} \in Y^{ad}$ ) para obtener la máxima rentabilidad (es decir, maximizar  $J^{LTV}$ ) y a la vez alcanzar la mejor constancia de renta en volumen de madera procedente de las cortas de regeneración ( $J^{EF}$ ) y/o la mejor regulación ( $J^R$ ). El primero de estos dos últimos objetivos pretende lo mismo que el método clásico de división en volumen, mientras que el segundo persigue alcanzar la estructura de un monte regulado, tal y como sucede en el método de división por cabida (Madrigal Collazo, 1994, p. 143). En ambos casos, para poder calcular adecuadamente el valor de  $J^{LTV}$ , proponemos decidir de antemano el turno que se aplicará sucesivamente a cada rodal una vez realizada su primera corta. En este sentido, si estamos interesados en el objetivo  $J^{EF}$ , y dado que vamos a analizar su relación con el objetivo  $J^{LTV}$  para un determinado horizonte de planificación, lo más lógico es asumir que en el futuro cada rodal se gestionará de acuerdo a su turno económicamente óptimo  $\bar{r}_j$ , ya que no se realiza ningún supuesto sobre la necesidad de alcanzar una renta constante cuando finalice el plan. Por su parte, si lo que se pretende es regular un monte, es necesario asumir que el turno futuro a aplicar a todos los rodales será el óptimo del monte regulado  $R$ , independientemente de cuáles sean los objetivos a considerar (solo  $J^R$ , o  $J^{EF_R}$  y  $J^R$ ).

Por tanto, la gestión óptima de un monte puede entenderse como un problema de optimización multiobjetivo, para lo que se proponen inicialmente dos MOP:

- Maximizar simultáneamente los beneficios y la constancia de renta durante un determinado horizonte de planificación, es decir,

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \mathbf{J}(\mathbf{y}) = (J^{EF_{\bar{r}}}(\mathbf{y}), J^{LTV_{\bar{r}}}(\mathbf{y})) \\ \text{sujeto a} & \mathbf{y} \in Y^{ad_{\bar{r}}}. \end{array} \quad (28)$$

### 2.3. Modelos de optimización multiobjetivo



**Figura 7:** Ejemplo, para el Problema (28) con dimensión  $n_s = 3$ , de un posible conjunto admisible  $Y^{ad} \subset \mathbb{R}^{n_s}$  y del conjunto de imágenes correspondiente  $\mathbf{J}(Y^{ad}) \subset \mathbb{R}^2$ , en el que se destaca el frente Pareto.

- Maximizar simultáneamente los beneficios y la regulación del monte, es decir,

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } \mathbf{J}(\mathbf{y}) = (J^R(\mathbf{y}), J^{LTV_R}(\mathbf{y})) \\ &\text{sujeto a } \mathbf{y} \in Y^{ad_R}, \end{aligned} \quad (29)$$

Los Problemas (28) y (29) pretenden maximizar objetivos que son contradictorios entre sí y, consecuentemente, no es posible encontrar una solución ideal (o utópica)  $\mathbf{y}^I \in Y^{ad}$  que maximice simultáneamente los dos objetivos que consideran. Estos problemas deben, por tanto, estudiarse desde un punto de vista cooperativo, examinando algunos elementos distinguidos del conjunto admisible: los no dominados. Tales vectores son aquellos para los que ninguno de los objetivos puede mejorarse sin un deterioro del otro, y se conocen generalmente como soluciones Pareto óptimas o soluciones eficientes (para una definición más formal ver, por ejemplo, Miettinen, 1998, pp. 10–14). El vector objetivo correspondiente también se conoce como Pareto óptimo, mientras que el conjunto de estos vectores objetivo se conoce como frente Pareto (ver Figura 7).

Desde un punto de vista matemático, los Problemas (28) y (29) quedan resueltos cuando se obtiene su frente Pareto. Sin embargo, en la práctica es ne-

## 2. Materiales y métodos

cesario elegir una solución satisfactoria, es decir, un único elemento del conjunto de soluciones eficientes. Esta elección, conocida como toma de decisiones, debe realizarse atendiendo a las preferencias del propietario o el gestor del monte (el tomador de decisiones). En esta tesis, dado que los problemas que se plantean solo constan de dos o tres objetivos, se propone una articulación de preferencias a posteriori para elegir la solución satisfactoria visualizando el frente Pareto.

Aunque pueda resultar obvio, debe tenerse en cuenta que cualquier requisito conocido de antemano (que no sean los umbrales mínimos para los objetivos  $J^{LTV}$ ,  $J^{EF}$  y  $J^R$ ) debe estar presente en la fase de formulación del modelo y no en la posterior toma de decisiones (realizada a partir del frente Pareto obtenido). Estos requisitos hacen que el Problema (28), o el (29), deba modificarse (generalmente incluyendo nuevas restricciones) para generar un nuevo frente Pareto que permita realizar una toma de decisiones adecuada. Un ejemplo de esta situación es el enfoque combinatorio tradicional donde, primero, se simulan programas selvícolas para cada rodal (con los que se construye un conjunto discreto  $\Omega$ ) y, segundo, se emplea la optimización combinatoria para buscar los programas óptimos dentro de este conjunto (Pukkala, 2019). En ese caso, centrándonos en el MOP (29), este debería reemplazarse por

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } \mathbf{J}(\mathbf{y}) = (J^R(\mathbf{y}), J^{LTV_R}(\mathbf{y})) \\ &\text{sujeto a } \mathbf{y} \in Y^{ad_R}, \\ &\quad y_j \in \Omega. \end{aligned} \tag{30}$$

Por otra parte, si los intereses del propietario cambian y, además de preocuparse por los beneficios y por la regulación del monte, se interesa también por obtener una determinada constancia de renta en el primer turno, entonces el Problema (29) debe completarse con la función  $J^{EF_R}$  para medir el logro de dicho objetivo. En este caso el problema a resolver es

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } \mathbf{J}(\mathbf{y}) = (J^R(\mathbf{y}), J^{EF_R}(\mathbf{y}), J^{LTV_R}(\mathbf{y})) \\ &\text{sujeto a } \mathbf{y} \in Y^{ad_R}. \end{aligned} \tag{31}$$

Nótese que en este último problema se está asumiendo que el segundo y sucesivos turnos coincidirán con el turno óptimo para el monte regulado  $R$ , por lo

que debe utilizarse la correspondiente métrica de constancia de renta,  $J^{EF_R}$ .

## 2.4. Resolución numérica

A continuación se detallan las estrategias y algoritmos utilizados para resolver los problemas planteados en el apartado anterior. En primer lugar, conviene señalar que, con el fin de analizar cómo se comportan los métodos basados en gradiente cuando se trabaja con las métricas presentadas en el Apartado 2.2.6, se ha abordado el problema de maximizar únicamente la constancia de renta

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } J^{EF_R}(\mathbf{y}) \\ &\text{sujeto a } \mathbf{y} \in Y^{ad_R}, \end{aligned} \quad (32)$$

utilizando las tres estrategias que se describen a continuación. En todas ellas, para los algoritmos de optimización empleados, se ha usado la implementación existente en la librería de software libre de Python SciPy 1.0 (Virtanen et al., 2020):

- Estrategia 1: combinación del algoritmo L-BFGS-B (Zhu et al., 1997), al que se le proporciona el gradiente exacto, con un multiarranque aleatorio para evitar máximos locales. Para aplicar esta estrategia solo es necesario determinar previamente el número de multiarranques adecuado al problema.
- Estrategia 2: misma combinación, pero proporcionando un gradiente numérico estimado por un método de diferencias finitas de dos puntos (Nocedal & Wright, 2006). Como paso previo, además de determinar el número de multiarranques, es necesario obtener un tamaño de paso adecuado al problema.
- Estrategia 3: aplicación directa del método de evolución diferencial (DE, por sus siglas en inglés *differential evolution*) (Storn & Price, 1997). Como paso previo a su aplicación es necesario obtener una combinación de parámetros (operador de mutación, probabilidades de entrecruzamiento y mutación, y tamaño de población inicial) adecuada al problema.

## 2. Materiales y métodos

Por otra parte, para poder evaluar correctamente los funcionales objetivo de los MOP planteados en el apartado anterior, es necesario resolver previamente los Problemas (9), (10) y (17). Para ello, atendiendo a que tanto  $J_j^{LEV}$  como  $J_j^{LTV_{\bar{r}_j}}$  son muy regulares y no parecen presentar máximos locales, puede utilizarse cualquier método de tipo gradiente. Concretamente, en este trabajo se utilizó de nuevo el algoritmo L-BFGS-B implementado en la librería de software libre de Python SciPy 1.0 (Virtanen et al., 2020).

Con respecto a la propia resolución numérica de los MOP, para tratar de aprovechar las propiedades de regularidad de las funciones  $J^{LTV}$ ,  $J^{EF}$  y  $J^R$ , lo que se propone es convertir los Problemas (28), (29) y (31) en problemas monoobjetivo, usando alguna técnica de escalarización, y resolver esos problemas con un método de tipo gradiente combinado con un multiarranque aleatorio si se detectan máximos locales. Concretamente, en esta tesis, para obtener el frente Pareto de esos problemas se ha utilizado el método de pesos (Miettinen, 1998, pp. 78–85) combinado, de nuevo, con el algoritmo L-BFGS-B. Con respecto a la escalarización, se tomaron pesos igualmente espaciados y, para que los valores de los funcionales objetivo fuesen aproximadamente de la misma magnitud, se normalizaron esas funciones utilizando el vector ideal (obtenido maximizando cada objetivo individualmente) y una aproximación del vector nadir estimada a partir de la tabla *payoff* (Miettinen, 1998, pp. 15–19).

Con respecto al MOP (30), este se formuló usando la metodología combinatoria clásica en la que el horizonte de planificación  $[a, a + R]$  se divide en  $n^P$  períodos de  $\Delta = R/n^P$  años, y se asume un único instante de corta por período (su punto medio). En este caso los instantes de corta son  $y_j^k = a + (k - 1/2)\Delta$ , y el conjunto discreto es  $\Omega = \{a + \Delta/2, \dots, a + R - \Delta/2\}$ . Esta discretización del problema impide el uso de métodos de tipo gradiente, por lo que para resolver el MOP (30) se aconseja utilizar una estrategia evolutiva. En esta tesis se utilizó el algoritmo NSGA-II (Deb et al., 2002), ampliamente utilizado en optimización multiobjetivo (tanto discreta como continua), y que se va aproximando gradualmente a un conjunto de soluciones Pareto óptimas bien distribuidas a lo largo del frente (Emmerich & Deutz, 2018). Específicamente, se usó la implementación de este algoritmo en la librería de Python Inspy-

red 1.0 (Tonda, 2020), con operadores de mutación y recombinación apropiados para representación entera (Eiben & Smith, 2015, pp. 52–56). Finalmente, también se utilizó el algoritmo NSGA-II con operadores de mutación y recombinación continuos, para testear el método anteriormente propuesto para resolver los Problemas (28), (29) y (31).

## 2.5. Casos de estudio

Para probar la utilidad de las metodologías propuestas en esta tesis se utilizaron los datos reales del inventario de un monte ubicado en el municipio lucense de Xove (Galicia, noroeste de España —Figura 8—), que tiene una superficie total de 94.82 ha y está compuesto por 51 rodales regulares de *Eucalyptus globulus* Labill. El área de cada rodal y los principales datos del inventario se muestran en la Tabla 2. A partir de estos datos, las variables de estado que describen los rodales hasta el momento de la corta se calculan mediante las funciones de transición del modelo dinámico desarrollado por García-Villabrille (2015). Específicamente:

- $H_j(t) = h(t_j^0, H_j^0, t) = \exp\left(X(t_j^0, H_j^0) - \frac{\beta}{t^\alpha X(t_j^0, H_j^0)}\right)$ , donde  $\alpha = 0.5989$ ,  $\beta = 13.90$ , y
 
$$X(a, b) = 0.5a^{-\alpha} \left( a^\alpha \ln(b) + \sqrt{4\beta a^\alpha + (a^\alpha \ln(b))^2} \right). \quad (33)$$
- $N_j(t) = n(t_j^0, N_j^0, t) = ((N_j^0)^{-0.5} + 1.995 \cdot 10^{-5} ((t)^2 - (t_j^0)^2))^{-2}$ .
- $G_j(t) = g(t_j^0, G_j^0, t) = \exp\left(X(t_j^0, G_j^0) - \frac{\beta}{t^\alpha X(t_j^0, G_j^0)}\right)$ , donde  $\alpha = 0.9906$ ,  $\beta = 21.16$ , y  $X(t_j^0, G_j^0)$  está dado por (33).

Para estas variables de estado, el volumen de madera ( $\text{m}^3/\text{ha}$ ) se obtiene mediante

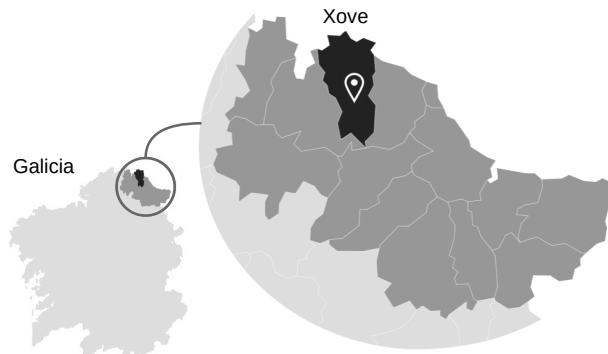
$$v(H_j, N_j, G_j) = 0.6234 H_j^{0.8642} N_j^{-0.05978} G_j^{1.108}.$$

## 2. Materiales y métodos

Se asume que ningún rodal se puede cortar antes de que tenga cinco años de edad ( $l_j = 5$ ) y que, tras la corta, se realiza la regeneración inmediata del terreno con una densidad de plantación constante de  $N_j^f = 1333$  árboles/ha para todos los rodales. Además, se considera que no hay cambios en la calidad de estación (índice de sitio) entre los diferentes turnos. Bajo estas hipótesis, utilizando una función de inicialización de área basimétrica apropiada (ver García-Villabrille, 2015), se predijeron los datos de cada rodal un año después de la corta (ver Tabla 2). Estos datos se utilizaron para calcular las variables de estado y las salidas después de la primera corta. Para el cálculo de los costes y los beneficios actualizados se consideró un coste de plantación de 1500 €/ha, un precio de venta de la madera en pie de  $p_j = 25$  €/m<sup>3</sup> y una tasa de interés del  $i = 3\%$ , de manera que  $C_j(r_j) = 1500$  y  $R_j(r_j) = 25V_j(r_j)/1.03^{t_j}$ .

Además, para probar la robustez de las metodologías propuestas en un monte con una estructura diferente, los datos predichos de la Tabla 2 también se utilizaron como datos de inventario para simular un monte joven de 51 rodales con la misma especie, área e índice de sitio, pero suponiendo una edad de un año para todos ellos.

Finalmente, para analizar el comportamiento de la metodología propuesta



**Figura 8:** Localización del monte real utilizado como caso de estudio.

## 2.5. Casos de estudio

en montes más grandes (con un mayor número de rodales), se simularon dos nuevos montes: uno con 204 y otro con 1632 rodales. Estos fueron obtenidos replicando, respectivamente, los rodales del monte real 4 y 32 veces, y generando aleatoriamente su área entre los valores de los rodales de menor y mayor superficie.

Con respecto a la densidad de plantación después de corta, en los montes simulados se asume, igual que para el monte real, que es constante y de  $N_j^f = 1333$  árboles/ha para todos los rodales.

**Tabla 2:** Datos de inventario y datos predichos después de la corta para el monte del caso de estudio.  $A_j$ : área del rodal en hectáreas,  $t_j^0$ : edad del rodal en años,  $H_j^0$ : altura dominante en metros,  $N_j^0$ : número de árboles por hectárea,  $G_j^0$ : área basimétrica en  $m^2/ha$ .

Rodal	$A_j$	Datos de inventario				Datos predichos			
		$t_j^0$	$H_j^0$	$N_j^0$	$G_j^0$	$t_j^0$	$H_j^0$	$N_j^0$	$G_j^0$
1	0.503	14	21.2	812	17.5	1	1.17	1331	0.019
2	0.569	14	21.2	812	17.5	1	1.17	1331	0.019
3	3.180	14	21.2	812	17.5	1	1.17	1331	0.019
4	2.171	17	29.5	1273	33.2	1	1.75	1331	0.109
5	2.320	30	26.5	522	22.9	1	1.06	1331	0.020
6	3.047	30	26.5	522	22.9	1	1.06	1331	0.020
7	0.823	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
8	2.231	17	29.5	1273	33.2	1	1.75	1331	0.109
9	1.425	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
10	0.645	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
11	1.342	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
12	0.362	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
13	0.544	13	23.2	622	14.9	1	1.42	1331	0.012
14	2.304	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
15	4.285	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
16	0.320	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
17	0.368	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
18	2.832	16	25.6	572	25.5	1	1.45	1331	0.052
19	3.008	16	25.6	572	25.5	1	1.45	1331	0.052
20	1.255	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057

## 2. Materiales y métodos

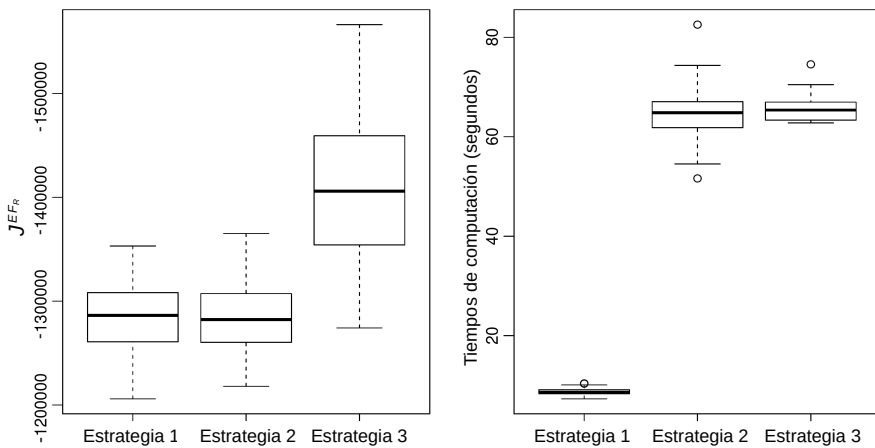
Rodal	$A_j$	Datos de inventario				Datos predichos			
		$t_j^0$	$H_j^0$	$N_j^0$	$G_j^0$	$t_j^0$	$H_j^0$	$N_j^0$	$G_j^0$
21	1.675	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
22	2.152	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
23	0.346	13	23.2	622	14.9	1	1.42	1331	0.012
24	1.264	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
25	2.202	16	25.6	572	25.5	1	1.45	1331	0.052
26	3.970	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
27	0.225	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
28	0.584	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
29	0.404	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
30	2.130	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
31	1.035	13	23.2	622	14.9	1	1.42	1331	0.012
32	1.913	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
33	2.639	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
34	1.009	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
35	2.086	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
36	2.967	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
37	3.926	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
38	2.215	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
39	1.618	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
40	1.514	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
41	3.540	17	29.5	1273	33.2	1	1.75	1331	0.109
42	3.816	17	29.5	1273	33.2	1	1.75	1331	0.109
43	4.016	17	29.5	1273	33.2	1	1.75	1331	0.109
44	4.273	17	29.5	1273	33.2	1	1.75	1331	0.109
45	1.973	14	21.2	812	17.5	1	1.17	1331	0.019
46	2.241	30	26.5	522	22.9	1	1.06	1331	0.020
47	0.223	13	23.2	622	14.9	1	1.42	1331	0.012
48	0.207	30	26.5	522	22.9	1	1.06	1331	0.020
49	0.818	13	23.2	622	14.9	1	1.42	1331	0.012
50	2.302	13	23.2	622	14.9	1	1.42	1331	0.012
51	1.995	13	23.2	622	14.9	1	1.42	1331	0.012

### 3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se presentan y discuten los resultados obtenidos tras haber resuelto los modelos formulados en los Apartados 2.3 y 2.4 sobre los casos de estudio detallados en el apartado anterior.

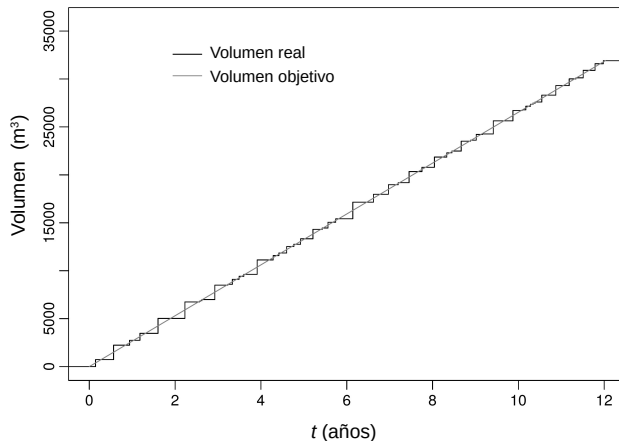
#### 3.1. Análisis de métodos para optimizar la constancia de renta

En primer lugar, para evaluar la eficiencia y la eficacia de los algoritmos basados en gradiente a la hora de trabajar con las métricas presentadas en el Apartado 2.2.6, se compararon los resultados obtenidos al resolver el Problema (32) (maximizar la métrica  $J^{EF_R}$ ) con las tres estrategias definidas en el Apartado 2.4. Para ello, se tomó como caso de estudio el monte real de Xo-



**Figura 9:** Valores óptimos de la función objetivo  $J^{EF_R}$  (izquierda) y tiempos de computación (derecha). Estrategia 1: L-BFGS-B + multiarranque con gradiente exacto. Estrategia 2: L-BFGS-B + multiarranque con gradiente numérico. Estrategia 3: DF.

### 3. Resultados y discusión



**Figura 10:** Volumen cortado obtenido (línea escalonada) y volumen objetivo para la constancia de renta (línea recta) correspondiente a la solución del Problema (32).

ve, se realizó previamente una búsqueda exhaustiva que proporcionara valores adecuados al problema (tanto de tamaño de paso como de parámetros propios del algoritmo DE), se consideró un multiarranque aleatorio de 25 elementos en cada experimento (cada vez que se resolvió el problema), y se realizaron 50 experimentos (se resolvió el problema, con las tres estrategias, 50 veces).

La Figura 9 muestra los valores óptimos obtenidos (cuanto más próximo a cero, mejor) y los tiempos de computación empleados por cada estrategia. Independientemente del uso del gradiente exacto o su aproximación, el algoritmo L-BFGS-B con multiarranque resultó mucho más efectivo y robusto que el algoritmo DE. La ventaja de disponer de la expresión explícita de las derivadas se demostró en términos de eficiencia, ya que la estrategia 1 requirió una séptima parte del tiempo de cálculo de las otras dos. Una ventaja adicional de usar el gradiente exacto es que evita el tedioso ajuste de parámetros necesarios para obtener buenos resultados, ya sea con el gradiente aproximado numéricamente o con DE.

Para finalizar, la Figura 10 muestra, para la mejor solución obtenida me-

### 3.2. Optimización de la constancia de renta y el LTV

dianthe la estrategia 1 (L-BFGS-B con gradiente exacto), el volumen cortado a lo largo del tiempo. Como era de esperar, esta función está muy próxima a la recta del volumen objetivo, lo que implica un volumen de corta prácticamente constante durante todo el horizonte de planificación ( $J^{EFr} \approx 0$ ).

### 3.2. Optimización de la constancia de renta y el LTV

En primer lugar, el MOP (28) se resolvió para los dos casos de estudio expuestos en el Apartado 2.5 que constan de 51 rodales. Para el monte real, la Figura 11 muestra los frentes Pareto obtenidos con el método de pesos + L-BFGS-B y con el algoritmo NSGA-II, para un tamaño de población de  $P = 200$  individuos y  $G = 500$  generaciones. Esta figura también muestra la comparación entre los volúmenes real y objetivo correspondientes a los diez óptimos Pareto obtenidos con el método de pesos + L-BFGS-B. Los resultados correspondientes al monte joven simulado se pueden ver en la Figura 12. Se puede destacar que:

- Ambos métodos, aunque usando técnicas diferentes, proporcionaron prácticamente los mismos frentes Pareto, lo que garantiza que la metodología propuesta es adecuada.
- La metodología continua funciona bien para montes con estructuras muy diferentes, como sugieren los resultados del monte real (que tiene rodales de distintas edades, muchos de ellos maduros) y del monte joven simulado (en el que todos los rodales tienen la misma edad, concretamente un año).
- Las Figuras 11 y 12 son muy útiles en el proceso de toma de decisiones, ya que permiten analizar gráficamente los costes de oportunidad (*trade-offs*) de optar por una solución u otra:
  - En los gráficos superiores, la función  $J^{LTV_r}$ -normalizada es  $J^{LTV_r} / J^{LTV_r}(\bar{\mathbf{y}})$ , es decir, el LTV dividido por su valor máximo. Esta forma de proceder permite una comparación intuitiva de las

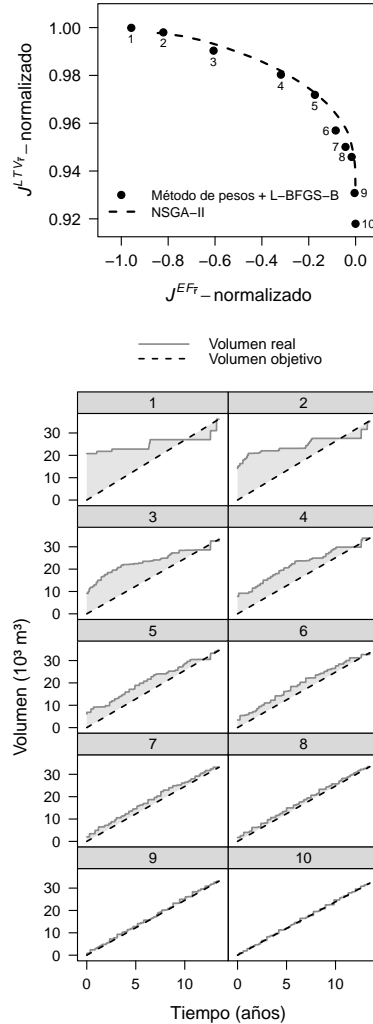
### 3. Resultados y discusión

diferentes estrategias de gestión: para el monte real, hubo una reducción de alrededor del 8 % en LTV entre la mejor solución desde la perspectiva económica y la mejor en términos de constancia de renta en volumen (puntos 1 y 10 del frente Pareto, respectivamente). Para el monte joven simulado esa diferencia fue solo del 5%. Las soluciones intermedias pueden ser analizadas de la misma forma.

- La métrica de constancia de renta no tiene una interpretación tan sencilla en términos numéricos, pero el área en gris de los gráficos inferiores de las figuras indica claramente el logro de este objetivo, así como el momento en el que se realizan las cortas de regeneración. Además, estos gráficos también muestran el volumen total cortado para cada óptimo de Pareto. Como puede apreciarse claramente, ese volumen se reduce a medida que se mejora el objetivo de constancia de renta.

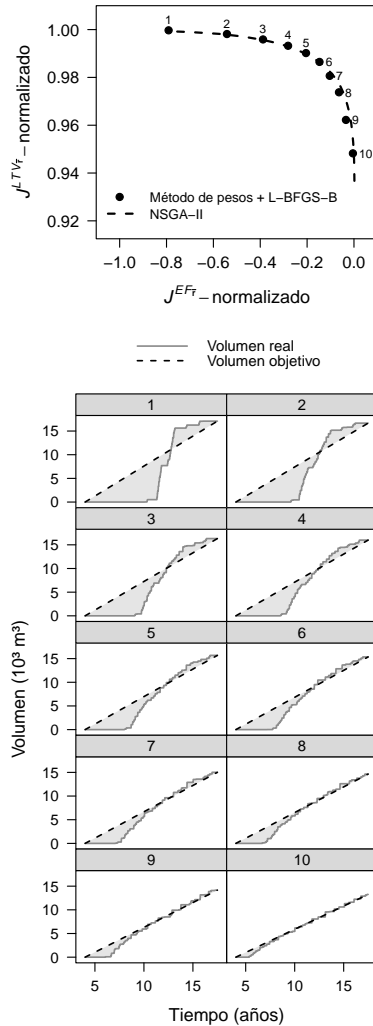
Finalmente, para analizar la metodología continua en montes con un mayor número de rodales, se resolvió el problema para el monte simulado de 204 rodales y se observó que el método de pesos + L-BFGS-B capturó el frente Pareto completo en un tiempo más que razonable (aproximadamente medio minuto), mientras que el algoritmo NSGA-II necesitó un mayor número de generaciones que en los experimentos previos con los montes de 51 rodales y, consecuentemente, un mayor tiempo de computación. Este hecho se confirmó con los resultados obtenidos para el monte simulado de 1632 rodales, en el que el método de pesos + L-BFGS-B siguió proporcionando el frente Pareto en un tiempo aceptable (unos siete minutos), mientras que el algoritmo NSGA-II con  $G = 2000$  generaciones solo capturó un pequeño arco (ver Figura 13), con un tiempo de computación de aproximadamente once horas. La Tabla 3 resume los tiempos de computación de todos estos experimentos.

### 3.2. Optimización de la constancia de renta y el LTV



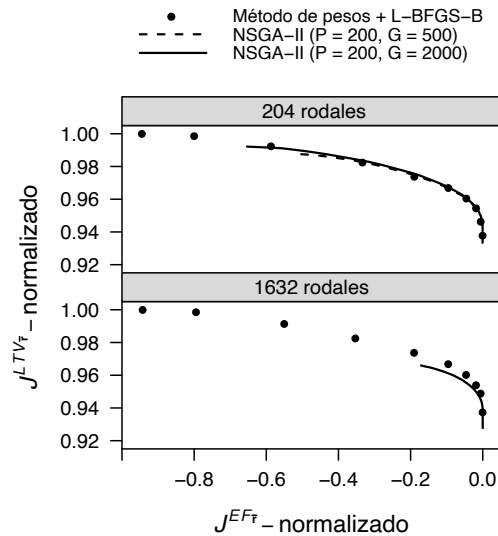
**Figura 11:** Resultados para el monte real: frente Pareto normalizado obtenido para el MOP (28) con el método de pesos + L-BFGS-B y con el algoritmo NSGA-II (arriba), y comparación entre los volúmenes real y objetivo para los puntos obtenidos con el primero de ellos (abajo).

### 3. Resultados y discusión



**Figura 12:** Resultados para el monte joven simulado: frente Pareto normalizado obtenido para el MOP (28) con el método de pesos + L-BFGS-B y con el algoritmo NSGA-II (arriba), y comparación entre los volúmenes real y objetivo para los puntos obtenidos con el primero de ellos (abajo).

### 3.2. Optimización de la constancia de renta y el LTV



**Figura 13:** Frentes Pareto normalizados obtenidos para el MOP (28) con el método de pesos + L-BFGS-B y con el algoritmo NSGA-II, para dos montes simulados de 204 (arriba) y 1632 rodiales (abajo). Los frentes Pareto obtenidos con NSGA-II corresponden a un tamaño de población  $P = 200$  individuos y un número de generaciones  $G = 500$  (línea discontinua) y  $G = 2000$  (líneas sólidas).

### 3. Resultados y discusión

**Tabla 3:** Tiempos de computación (segundos) utilizados para obtener los frentes Pareto mostrados en las Figuras 11, 12 y 13 con un iMac con procesador Intel® Core™ i7 de 4 GHz. Comparación, en montes con diferente estructura o diferente número de rodales, entre el método de pesos + L-BFGS-B y el algoritmo NSGA-II con un tamaño de población de  $P = 200$  individuos y diferente número de generaciones ( $G$ ).

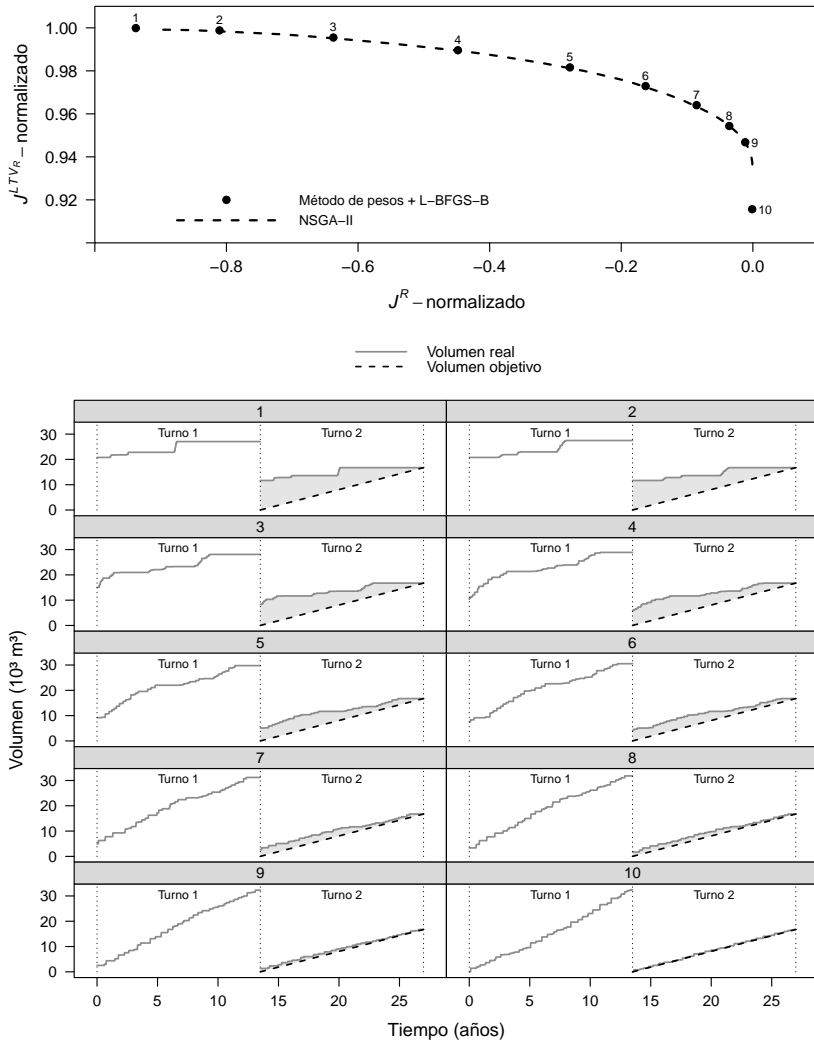
	Método de pesos + L-BFGS-B	NSGA-II
Monte real (51 rodales)	14	296 ( $G = 500$ )
Monte joven simulado (51 rodales)	9	302 ( $G = 500$ )
Monte simulado con 204 rodales	36	1171 ( $G = 500$ ) 5405 ( $G = 2000$ )
Monte simulado con 1632 rodales	449	39594 ( $G = 2000$ )

### 3.3. Optimización de la regulación y el LTV

En el MOP (29) se busca optimizar simultáneamente el beneficio económico ( $J^{LTV_R}$ ) y la regulación del monte ( $J^R$ ). Los resultados para el monte real y para el monte joven simulado se presentan, respectivamente, en las Figuras 14 y 15. En ellas se muestran los frentes Pareto obtenidos con el método de pesos + L-BFGS-B y con el algoritmo NSGA-II. Además, estas figuras también muestran el volumen real cortado para el primer turno y la comparación entre los volúmenes real y objetivo para el segundo turno, correspondiente a los diez óptimos Pareto obtenidos con la primera de las estrategias. Aunque ya se haya señalado en el apartado anterior, a la vista de los resultados obtenidos para este problema, conviene volver a destacar que:

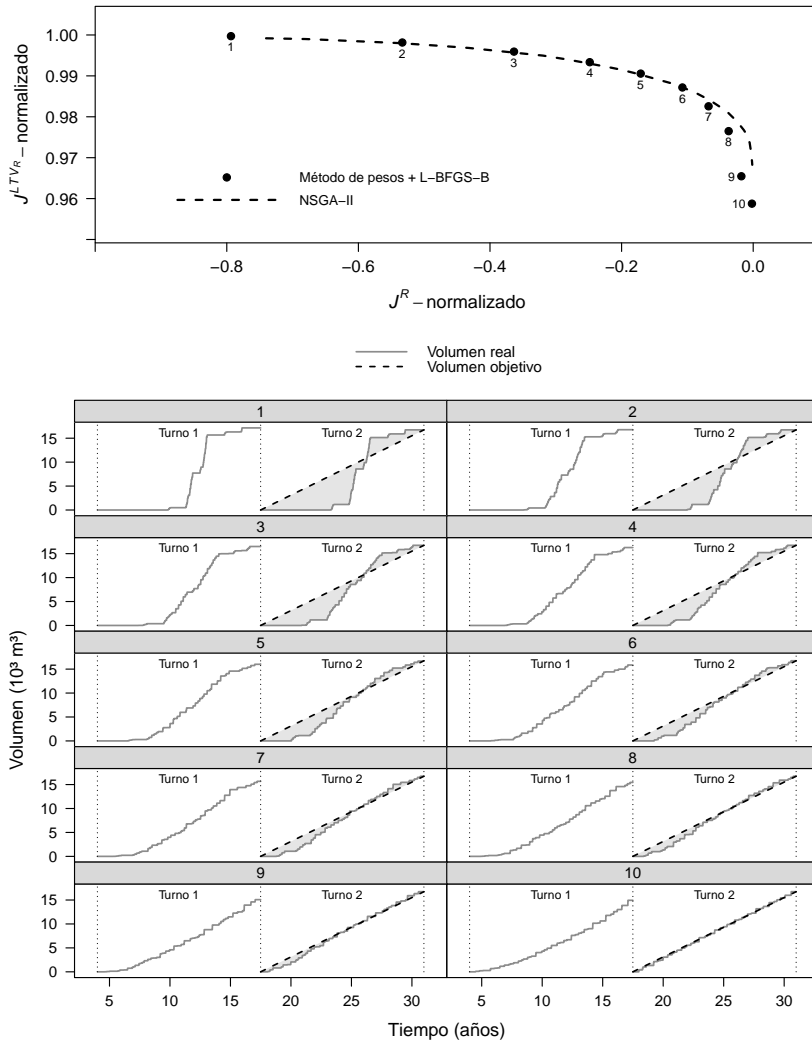
- Ambas estrategias proporcionaron, en todos los casos, frentes similares, lo que supone una garantía de que esos frentes están bien capturados.
- Al igual que con la métrica de constancia de renta, el enfoque continuo de la regulación también es robusto, proporcionando buenos resultados en montes con diferentes estructuras.
- Las Figuras 14 y 15 resultan muy útiles en el proceso de toma de decisiones:

### 3.3. Optimización de la regulación y el LTV



**Figura 14:** Resultados para el monte real: frentes Pareto normalizados obtenidos para el MOP (29) con el método de pesos + L-BFGS-B y con el NSGA-II (arriba), y comparación entre volúmenes reales y objetivo para el segundo turno correspondiente a los puntos numerados (abajo).

### 3. Resultados y discusión



**Figura 15:** Resultados para el monte joven simulado: frentes Pareto normalizados obtenidos para el MOP (29) con el método de pesos + L-BFGS-B y con el NSGA-II (arriba), y comparación entre volúmenes reales y objetivo para el segundo turno correspondiente a los puntos numerados (abajo).

### 3.4. Optimización combinatoria de la regulación y el LTV

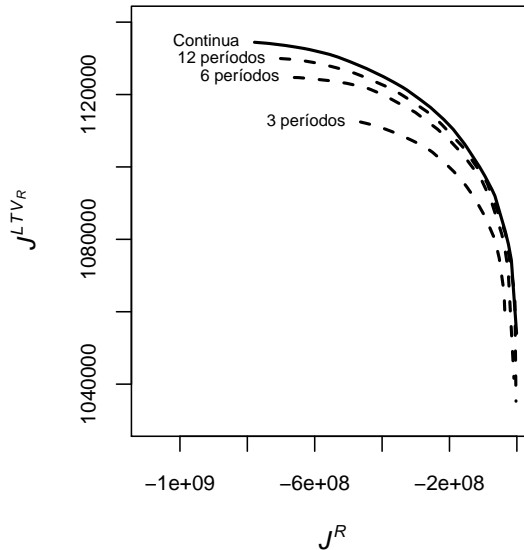
- En las gráficas superiores, el valor de  $J^{LTV_R}$ -normalizado, ahora definido como  $J^{LTV_R} / J^{LTV_R}(\bar{y})$ , permite una comparación intuitiva de las diferentes estrategias de gestión: para el monte real, se observa una pérdida de alrededor del 8 % en LTV cuando se opta por la mejor solución en términos de regulación, mientras que para el monte joven simulado es solo del 4 %.
- Como en el caso de la constancia de renta, la interpretación numérica de la métrica de regulación tampoco es sencilla, pero la consecución del objetivo se aprecia perfectamente observando el área gris de las gráficas inferiores de las figuras. En cuanto a volumen total cortado, se observa que, en el monte real, el volumen es mayor para el primer turno que para el segundo, con el monte ya regulado, siendo esto debido a que se parte inicialmente de una masa con rodales maduros; por el contrario, para el monte joven simulado, debido a su estructura inicial, el volumen total cortado es, en la mayoría de los casos (en todos menos en el punto 1), ligeramente más bajo en el primer turno que en el segundo.

Conviene aclarar que la pérdida porcentual en LTV entre la mejor solución desde el punto de vista económico y la que permite alcanzar el monte regulado revela el coste aproximado de la regulación (asumiendo que los siguientes turnos se basarán en el turno óptimo para el monte regulado  $r_j = R$ ): cuanto menores son esas pérdidas mayor es la similitud entre la estructura inicial y la del monte regulado. No obstante, el coste real de la regulación debe medirse en términos del valor actual neto que se pierde si se compara con el que se obtendría gestionando todos los rodales indefinidamente según su turno óptimo ( $r_j = \bar{r}_j$ ) (Hoganson & McDill, 1993).

### 3.4. Optimización combinatoria de la regulación y el LTV

Con respecto al MOP (30), se resolvió sobre el monte real con NSGA-II, considerando  $n^P = 3$ ,  $n^P = 6$  y  $n^P = 12$  períodos. En la Figura 16 se compa-

### 3. Resultados y discusión

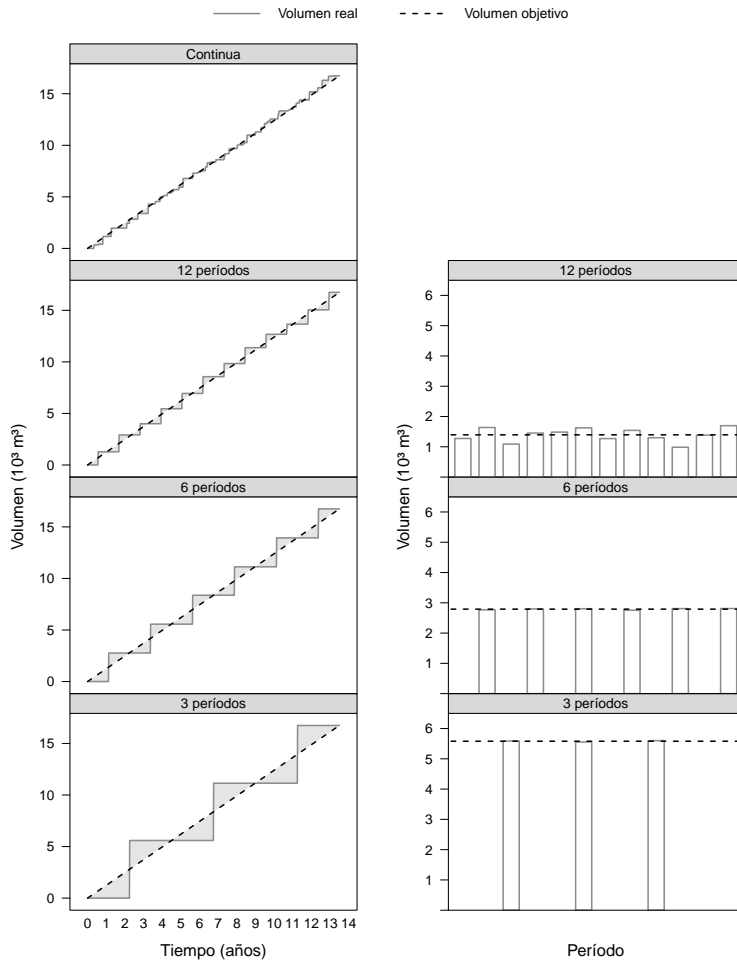


**Figura 16:** Frentes Pareto obtenidos con NSGA-II para las formulaciones continua (MOP (29)) y combinatoria (MOP (30)) con diferente número de períodos para el monte real.

ran los frentes así obtenidos con el frente Pareto de la formulación continua (MOP (29)). Como era de esperar, esta última proporcionó mejores resultados que la combinatoria, ya que esta implica restricciones adicionales dadas por el conjunto discreto  $\Omega$ . Además, la formulación continua se resuelve mucho más rápido cuando se utiliza un método de tipo gradiente. Por ejemplo, para el monte real, los tiempos de computación para el método de pesos + L-BFGS-B fueron del orden de 65 veces inferiores a los del NSGA-II (tanto para formulaciones continuas como discretas). Atendiendo a los resultados mostrados en el Apartado 3.2, es de esperar que estas diferencias en eficiencia aumenten a medida que se incremente la dimensión del problema (número de rodajes).

Para analizar gráficamente la bondad de la nueva métrica  $J^R$ , la columna

### 3.4. Optimización combinatoria de la regulación y el LTV



**Figura 17:** Volúmenes real ( $V^n$ ) y objetivo ( $V^R$ ) para el segundo turno (izquierda) que se corresponden con los puntos de máximo  $J^R$  en la Figura 16, y su equivalencia en volumen por período (derecha).

### 3. Resultados y discusión

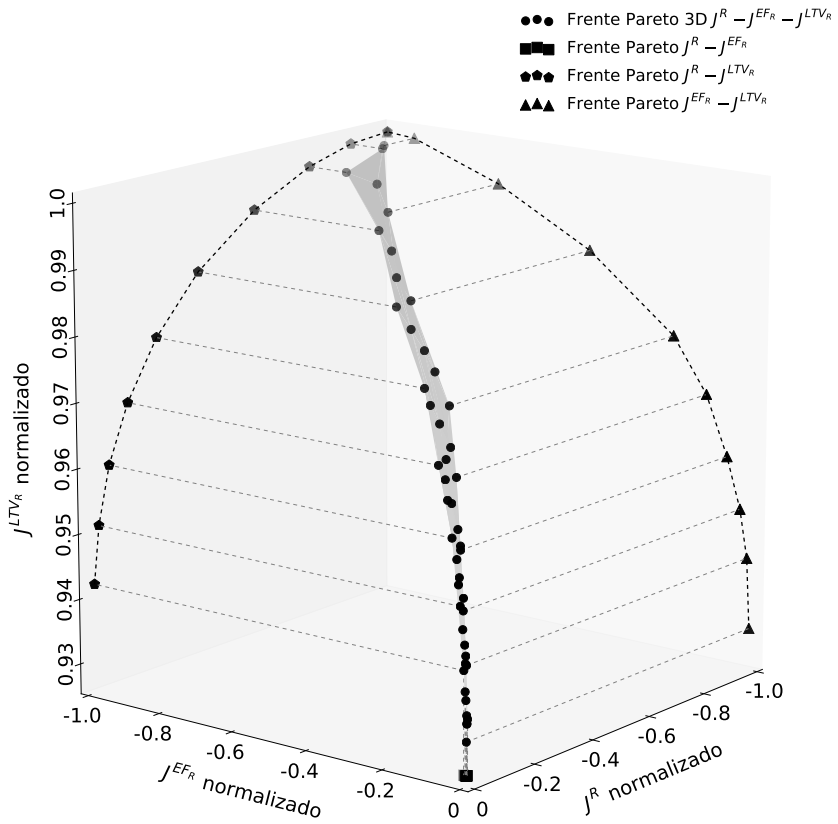
izquierda de la Figura 17 muestra los volúmenes real ( $V^n$ ) y objetivo ( $V^R$ ) cortados en el segundo turno, que se corresponden con los mejores puntos para la regulación, es decir, aquellos que maximizan la función  $J^R$ . La columna de la derecha muestra, para estos mismos puntos, el volumen equivalente cortado por período. Se puede ver que maximizar  $J^R$  conduce a variaciones mínimas de volumen entre períodos, es decir, proporciona buenos resultados para las formas clásicas de medir el EF en formulaciones combinatorias (p. ej., Kao & Brodie, 1979; Brumelle et al., 1998; Ducheyne et al., 2004).

### 3.5. Optimización de la regulación, la constancia de renta y el LTV

El MOP (31), de tres objetivos, se resolvió para el monte real y para el monte joven simulado. En las Figuras 18 y 19 se muestran los respectivos frentes Pareto 3D obtenidos con el método de pesos + L-BFGS-B. Para comprender mejor los *trade-offs* entre las distintas soluciones no dominadas, resulta útil observar el frente Pareto para cada par de objetivos (Couture et al., 2021), que se pueden ver proyectados en planos  $J^R - J^{EFr}$ ,  $J^R - J^{LTVr}$  y  $J^{EFr} - J^{LTVr}$ .

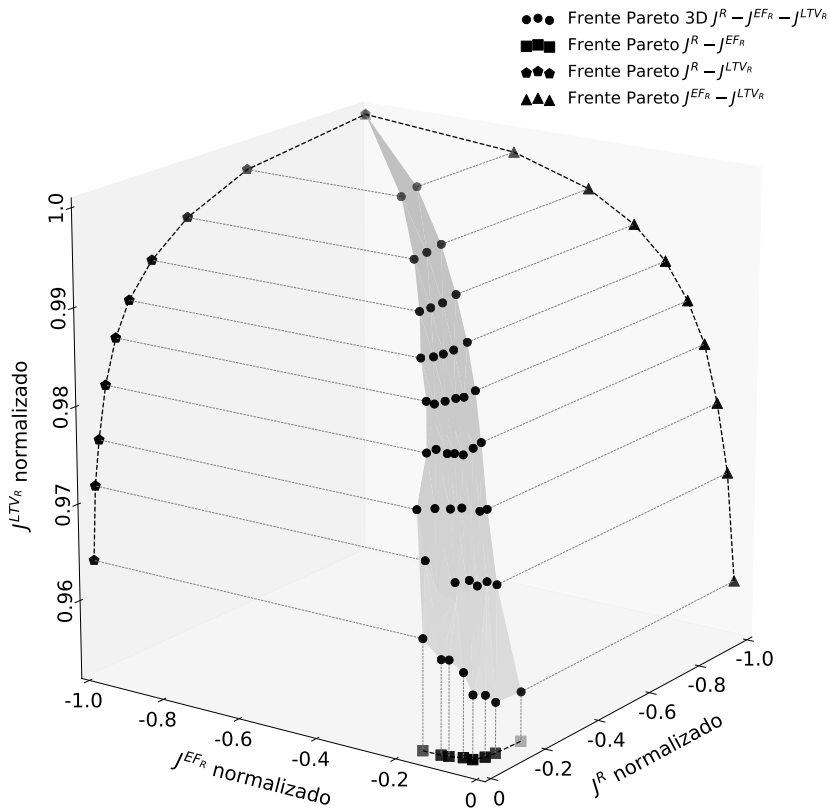
El análisis de estos frentes muestra una cierta compatibilidad entre los objetivos  $J^R$  y  $J^{EFr}$ , que es más evidente en el monte real debido a que este está formado, mayoritariamente, por rodales maduros, que se encuentran en una fase de crecimiento bastante ralentizado. Esta compatibilidad también se puede observar en las Figuras 14 y 15, que muestran como al dar más peso al objetivo de regulación  $J^R$ , indirectamente se obtiene una mejor constancia de renta en el primer turno (valores de  $J^{EFr}$  más próximos a cero). Este MOP (31) es más interesante para el proceso de planificación de masas jóvenes, en las que las mejores soluciones para  $J^{EFr}$  durante el primer turno entran en conflicto con aquellas que maximizan  $J^R$  para la regulación a nivel monte.

### 3.5. Optimización de $J^R - J^{EF_R} - J^{LTV_R}$



**Figura 18:** Resultados para el monte real: frente Pareto 3D obtenido para el MOP (31) con el método de pesos + L-BFGS-B.

### 3. Resultados y discusión



**Figura 19:** Resultados para el monte joven simulado: frente Pareto 3D obtenido para el MOP (31) con el método de pesos + L-BFGS-B.

### 3.6. Discusión

El uso de modelos continuos no lineales para formular los problemas de gestión forestal no es frecuente. En el marco de la teoría de control óptimo, Heaps (1984, 2015) estudió el problema general de determinar el ritmo de corta de cada rodal a lo largo del tiempo, pero no llegó a demostrar con ejemplos cómo podía resolverse numéricamente el modelo continuo que propuso. Tahvonen (2004) discutió el uso de variables discretas o continuas en modelos de optimización para planificar las cortas de regeneración. Roise (1990) propuso y resolvió un modelo continuo, pero sin realizar un análisis matemático de las funciones objetivo y de las restricciones, aplicando técnicas que, como el propio autor reconoce, pueden no ser las más adecuadas para resolver el problema. Por su contra, los modelos continuos propuestos en esta tesis utilizan funciones con propiedades apropiadas de regularidad, que garantizan un buen funcionamiento de los métodos de tipo gradiente en la resolución numérica.

En este trabajo se ha empleado una especie cuyo uso principal es la producción de celulosa, por lo que el valor del suelo y del vuelo se ha calculado sobre la base del precio de la madera en pie multiplicado por el volumen en el momento de la corta. Sin embargo, para otras especies que requieren estimaciones del volumen comercial es necesario utilizar un método más sofisticado. Por ejemplo, en un estudio de optimización a nivel de rodal, Arias-Rodil et al. (2015) evaluaron dos metodologías alternativas para estimar el volumen comercial de un rodal a una edad determinada: (i) un sistema de desagregación, que implica agregar previamente el volumen comercial predicho por clases diamétricas, y (ii) una función de razón de volumen de rodal. Esta última considera un diámetro límite superior para clasificar el volumen por destinos de la madera, mientras que el uso del sistema de desagregación también permite especificar la longitud que deben tener las trozas de cada destino. El uso de la alternativa (i) puede causar discontinuidades en la función  $J^{LTV}$ , lo que dificulta el uso de métodos de tipo gradiente. Sin embargo, la alternativa (ii) no presenta ningún problema y, aunque proporciona valores óptimos ligeramente más altos de  $J^{LTV}$ , puede ser incluso más precisa (Arias-Rodil et al., 2016).

La metodología de trabajo propuesta proporciona una herramienta gráfica

### 3. Resultados y discusión

para analizar los *trade-offs* entre objetivos, ayudando a los propietarios a elegir un peso adecuado después de ver el efecto del requisito de constancia de renta (en el primer o el segundo y sucesivos turnos) en la rentabilidad económica. Como se ha demostrado, esta metodología es muy útil cuando se trabaja con hasta tres objetivos. Para problemas con más de tres, a pesar de que se pueden utilizar técnicas a posteriori combinadas con métodos especiales de visualización (e.g., Borges et al., 2014), es cuestionable la necesidad de obtener todo el frente (Alvarez-Vázquez et al., 2015), pudiendo resultar más apropiadas las técnicas interactivas (e.g., Diaz-Balteiro, 1998). En cualquier caso, antes de seleccionar el método de solución más apropiado deben considerarse las características del problema y las capacidades y el tipo de tomador de decisiones (Miettinen, 1998, pp. 227–231).

## 4. CONCLUSIONES

En esta tesis se formulan y comparan varios modelos multiobjetivo continuos para planificar la gestión forestal a nivel monte de rodales regulares monoespecíficos en Galicia. Se busca la maximización del beneficio económico y una renta constante en el volumen procedente de las cortas de regeneración, tanto para un determinado horizonte de planificación como para el monte regulado. Para ello, se han diseñado dos nuevas métricas que tratan de medir esa constancia trabajando con variables continuas, y que también proporcionan buenos resultados para el modo de medir la constancia de renta en las formulaciones combinatorias clásicas. Tras un análisis matemático riguroso, se propone obtener el frente Pareto del problema combinando una técnica de escalarización (método de pesos) con un algoritmo de optimización basado en gradiente (L-BFGS-B), que se compara con un algoritmo evolutivo ampliamente utilizado en el ámbito forestal (NSGA-II). Conviene destacar que:

- Las formulaciones propuestas permiten tratar los problemas de planificación de la gestión forestal a nivel de monte con variables continuas, de la misma forma que se ha hecho en las últimas décadas con problemas a nivel de rodal.
- Las formulaciones continuas propuestas no requieren establecer de antemano programas de gestión potencialmente aplicables a cada rodal y evitan la división del horizonte de planificación en períodos. La formulación combinatoria clásica se obtiene sin más que añadir restricciones adicionales al modelo continuo, lo que garantiza que los resultados de este último sean siempre mejores. Adicionalmente, en las soluciones continuas los instantes de corta están perfectamente ordenados temporalmente, lo que supone una ventaja con respecto a las formas tradicionales de medir la constancia de renta, en las que las soluciones se agrupan por períodos.
- El hecho de que las nuevas métricas tengan derivadas parciales en casi todo punto permite el uso de métodos tipo gradiente para su optimiza-

#### 4. Conclusiones

ción. Si se utiliza la expresión de las derivadas parciales obtenida en esta tesis, estos métodos se muestran mucho más eficientes, eficaces y robustos que los métodos empleados habitualmente en el campo forestal, aumentando su ventaja a medida que lo hace la dimensión del problema (número de rodales). Esta ventaja podría ampliarse dada la facilidad de paralelización de la técnica de escalarización, que permitiría aprovechar todo el potencial de los procesadores multinúcleo. En cualquier caso, la existencia de mínimos locales puede requerir el uso de alguna estrategia de optimización global.

- La métrica propuesta como indicador de constancia de renta no es exclusiva para el campo forestal, sino que puede aplicarse a cualquier problema en el que los ingresos/gastos se produzcan en instantes determinados (p. ej., Dan et al., 2019).
- En el modelo propuesto que considera como objetivos el LTV y la renta constante asumiendo turnos futuros basados en el turno óptimo a nivel rodal, no es necesario establecer de antemano el horizonte de planificación, requiriéndose únicamente un valor tentativo, ya que su cálculo está involucrado en el propio proceso de optimización y se obtiene como resultado del modelo.
- En el enfoque propuesto el tomador de decisiones no necesita articular sus preferencias antes de iniciar el proceso de optimización. Los resultados del método numérico utilizado permiten visualizar el frente Pareto, que proporciona información útil e intuitiva sobre la relación entre objetivos, permitiéndole seleccionar una solución satisfactoria a posteriori. Esto convierte las salidas gráficas desarrolladas en esta tesis en herramientas muy interesantes para el proceso de toma de decisiones en la planificación forestal.

## 5. TRABAJO FUTURO

A raíz del desarrollo de esta tesis se han identificado líneas de trabajo que pueden ser el punto de partida para futuras investigaciones:

- Sistemas de cubierta forestal continua. Los modelos propuestos se han utilizado con éxito en montes que comprenden rodales coetáneos mono-específicos, que se gestionan mediante el sistema RFM. Su aplicabilidad en montes con estructuras y dinámicas más complejas, como los sistemas de cubierta forestal continua, es un reto pendiente.
- Formulaciones continuas con más de tres objetivos. En esta tesis se han propuesto modelos continuos para dos y tres objetivos, pero en algunas aplicaciones reales puede ser necesario trabajar con un número mayor. En estos casos, la aplicación de otros enfoques de articulación de preferencias, como el interactivo, permitiría abordar la complejidad del nuevo problema de una manera más eficiente.
- Restricciones de adyacencia. En los modelos de planificación forestal es habitual la incorporación de algún tipo de restricción de adyacencia, como las de tipo URM (por sus siglas en inglés *unit restriction model*), con las que no se permite que se corten rodales adyacentes en un determinado período, o las de tipo ARM (por sus siglas en inglés *area restriction model*), que impiden superar una determinada superficie de corta en rodales contiguos también durante un período de tiempo. Encontrar métricas que permitan tratar con estos problemas espaciales y que sean compatibles con la formulación continua está siendo objeto de una investigación en curso.
- Agrupamiento de cortas (*clustering*). Agrupar las cortas, tanto espacial como temporalmente, se viene planteando en reiteradas ocasiones en planificación forestal con el fin de reducir costes (p. ej., de explotación, de mantenimiento de pistas, de logística de transporte). En los modelos clásicos en los que se discretiza el tiempo en períodos, la agrupación

## 5. Trabajo futuro

temporal ya va implícita en la propia formulación, algo que no ocurre en la formulación continua propuesta en esta tesis, por lo que disponer de métricas que favorezcan ese agrupamiento temporal y/o espacial resultaría muy interesante.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- Adams, R. A. (1975). *Sobolev Spaces*. London: Academic Press.
- Álvarez-González, J. G., Zingg, A., & von Gadow, K. (2010). Estimating growth in beech forests: a study based on long term experiments in Switzerland. *Ann. For. Sci.*, *67*(3), 307.
- Alvarez-Vázquez, L. J., García-Chan, N., Martínez, A., & Vázquez-Méndez, M. E. (2015). An application of interactive multi-criteria optimization to air pollution control. *Optimization*, *64*(6), 1367–1380.
- Arias-Rodil, M., Barrio-Anta, M., & Diéguez-Aranda, U. (2016). Developing a dynamic growth model for maritime pine in Asturias (NW Spain): comparison with nearby regions. *Ann. For. Sci.*, *73*(2), 297–320.
- Arias-Rodil, M., Diéguez-Aranda, U., & Vázquez-Méndez, M. E. (2017). A differentiable optimization model for the management of single-species, even-aged stands. *Can. J. For. Res.*, *47*(4), 506–514.
- Arias-Rodil, M., Pukkala, T., González-González, J. M., Barrio-Anta, M., & Diéguez-Aranda, U. (2015). Use of depth-first search and direct search methods to optimize even-aged stand management: a case study involving maritime pine in asturias (nw spain). *Can. J. For. Res.*, *45*(10), 1269–1279.
- Baskent, E. Z., & Jordan, G. A. (2002). Forest landscape management modeling using simulated annealing. *For. Ecol. Manage.*, *165*, 29–45.
- Baskent, E. Z., Keles, S., & Yolasigmaz, H. A. (2008). Comparing multi-purpose forest management with timber management, incorporating timber, carbon and oxygen values: A case study. *Scand. J. For. Res.*, *23*(2), 105–120.
- Başkent, E. Z. (2001). Combinatorial Optimization in Forest Ecosystem Management Modeling. *Turk. J. Agric. For.*, *25*, 187–194.
- Bettinger, P., Boston, K., & Sessions, J. (1999). Intensifying a heuristic forest harvest scheduling search procedure with 2-opt decision choices. *Can. J. For. Res.*, *29*(11), 1784–1792.
- Bettinger, P., Boston, K., Siry, J. P., & Grebner, D. L. (2009). *Forest management and planning*. Amsterdam: Elsevier.

## 6. Bibliografía

- Bettinger, P., Graetz, D., Boston, K., Sessions, J., & Chung, W. (2002). Eight Heuristic Planning Techniques Applied to Three Increasingly Difficult Wildlife Planning Problems. *Silva Fenn.*, 36(September 2000), 561–584.
- Bettinger, P., Sessions, J., & Boston, K. (1997). Using Tabu search to schedule timber harvests subject to spatial wildlife goals for big game. *Ecol. Modell.*, 94, 111–123.
- Borges, J. G., Garcia-Gonzalo, J., Bushenkov, V., McDill, M. E., Marques, S., & Oliveira, M. M. (2014). Addressing multicriteria forest management with Pareto frontier methods: an application in Portugal. *For. Sci.*, 60(1), 63–72.
- Boston, K., & Bettinger, P. (1999). An analysis of Monte Carlo integer programming, simulated annealing, and tabu search heuristics for solving spatial harvest scheduling problems. *For. Sci.*, 45(2), 292–301.
- Brumelle, S., Granot, D., Halme, M., & Vertinsky, I. (1998). A tabu search algorithm for finding good forest harvest schedules satisfying green-up constraints. *Eur. J. Oper. Res.*, 106(2-3), 408–424.
- Burkhardt, H. E., & Tomé, M. (2012). *Modeling Forest Trees and Stands*. Dordrecht: Springer Netherlands.
- Caglayan, I., Yesil, A., Cinar, D., & Cieszewski, C. (2018). Taxonomy for the optimization in forest management: a review and assessment. *J. Fac. For. Univ.*, 68(2), 122–135.
- Cairns, R. D. (2017). Faustmann's Formulas for Forests. *Nat. Resour. Model.*, 30(1), 52–73.
- Castedo-Dorado, F., Diéguez-Aranda, U., & Álvarez-González, J. G. (2007). A growth model for *Pinus radiata* D. Don stands in north-western Spain. *Ann. For. Sci.*, 64(4), 453–465.
- Chen, B. W., & von Gadow, K. (2002). Timber harvest planning with spatial objectives, using the method of simulated annealing. *Forstwissenschaftliches Cent.*, 121(1), 25–34.
- Clutter, J. L., Fortson, J. C., Pienaar, L. V., Brister, G. H., & Bailey, R. L. (1983). *Timber management: a quantitative approach*. Colorado: Wiley & Sons.

- Constantino, M., Martins, I., & Borges, J. G. (2008). A New Mixed-Integer Programming Model for Harvest Scheduling Subject to Maximum Area Restrictions. *Oper. Res.*, 56(3), 542–551.
- Couture, S., Cros, M. J., & Sabbadin, R. (2021). Multi-Objective Sequential Forest Management Under Risk Using a Markov Decision Process-Pareto Frontier Approach. *Environ. Model. Assess.*, 26(2), 125–141.
- Curtis, F. (1962). Linear programming the management of a forest property. *J. For.*, 60(0), 611–616.
- Dan, H., Yamamoto, A., Tanaka-Kanekiyo, H., Sutoh, A., Maruyama, O., & Satoh, T. (2019). Optimal Scheduling of Tunnel Inspection and Monitoring for Leveling Yearly Budget. In H. C. Rodrigues, J. Herskovits, C. M. Mota Soares, A. L. Araújo, J. M. Guedes, J. O. Folgado, F. Moleiro, & J. F. A. Madeira (Eds.) *EngOpt 2018 Proc. 6th Int. Conf. Eng. Optim.*, (pp. 1458–1469). Cham: Springer International Publishing.
- Davis, L. S., Johnson, K. N., Bettinger, P., & Howard, T. E. (2001). *Forest Management: To Sustain Ecological, Economic, and Social Values*, vol. 1.
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., & Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Trans. Evol. Comput.*, 6(2), 182–197.
- Dewey, J., Maier, F., Potter, W. D., Nute, D. E., Rauscher, H. M., Twery, M. J., Knopp, P. D., & Thomasma, S. A. (2006). Prescriptive treatment optimization using a genetic algorithm: A tool for forest management. In *Proc. iEMSs 3rd Bienn. Meet. Summit Environ. Model. Softw.*
- Diaz-Balteiro, L. (1998). Modeling Timber Harvest Scheduling Problems with Multiple Criteria : An Application in Spain. *For. Sci.*, 44(1).
- Diaz-Balteiro, L., Bertomeu, M., & Bertomeu, M. (2009). Optimal harvest scheduling in Eucalyptus plantations. A case study in Galicia (Spain). *For. Policy Econ.*, 11(8), 548–554.
- Diaz-Balteiro, L., González-Pachón, J., & Romero, C. (2013). Goal programming in forest management : customising models for the decision-maker ' s preferences. *Scand. J. For. Res.*, 28:2, 166–173.

## 6. Bibliografía

- Díaz-Balteiro, L., & Romero, C. (2008). Making forestry decisions with multiple criteria: A review and an assessment. *For. Ecol. Manage.*, 255(8-9), 3222–3241.
- Diéguez-Aranda, U., Castedo Dorado, F., Álvarez González, J. G., & Rojo Alboreca, A. (2006). Dynamic growth model for Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) plantations in Galicia (north-western Spain). *Ecol. Model.*, 191(2), 225–242.
- Diéguez-Aranda, U., Rojo Alboreca, A., Castedo-Dorado, F., Álvarez González, J. G., Barrio-Anta, M., Crecente-Campo, F., González González, J. M., Pérez-Cruzado, C., Rodríguez Soalleiro, R., López-Sánchez, C. A., Balboa-Murias, M. Á., Gorgoso Varela, J. J., & Sánchez Rodríguez, F. (2009). *Herramientas selvícolas para la gestión forestal sostenible en Galicia*. Xunta de Galicia.
- Ducheyne, E. I., De Wulf, R. R., & De Baets, B. (2004). Single versus multiple objective genetic algorithms for solving the even-flow forest management problem. *For. Ecol. Manage.*, 201(2-3), 259–273.
- Ducheyne, E. I., De Wulf, R. R., & De Baets, B. (2006). A spatial approach to forest-management optimization: Linking GIS and multiple objective genetic algorithms. *Int. J. Geogr. Inf. Sci.*, 20(8), 917–928.
- Eiben, A., & Smith, J. (2015). *Introduction to evolutionary computing*. *Natural Computing Series*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2 ed.
- Emmerich, M. T., & Deutz, A. H. (2018). A tutorial on multiobjective optimization: fundamentals and evolutionary methods. *Nat. Comput.*, 17(3), 585–609.
- Ezquerro, M., Pardos, M., & Díaz-balteiro, L. (2019). Sustainability in Forest Management Revisited Using Multi-Criteria Decision-Making Techniques.
- Falcão, A., & Borges, J. (2001). Designing an Evolution Program for Solving Integer Forest Management Scheduling Models: An Application in Portugal. *For. Sci.*, 47(2), 158–168.
- Faustmann, M. (1849). On the determination of the value which forest lands

- and immature stands possess for forestry. In *Transl. by M. Gane, ed., Martin Faustmann Evol. Discount. cash flow. Oxford Inst. Pap. 42, 1968.*
- Field, D. B. (1973). Goal Programming for Forest Management. *For. Sci.*, 19, 125–135.
- Fonseca, T. F., Cerveira, A., & Mota, A. (2012). An integer programming model for a forest harvest problem in *Pinus pinaster* stands. *For. Syst.*, 21(2), 272–283.
- Fotakis, D. G., Sidiropoulos, E., Myronidis, D., & Ioannou, K. (2012). Spatial genetic algorithm for multi-objective forest planning. *For. Policy Econ.*, 21, 12–19.
- García, O. (1988). Growth Modelling - a (re)view. *New Zeal. For.*, 33(3), 14–17.
- García, O. (1994). The state-space approach in growth modelling. *Can. J. For. Res.*, 24(9), 1894–1903.
- García-Villabrille, J. D. (2015). *Modelización del crecimiento y la producción de plantaciones de Eucalyptus globulus Labill. en el noroeste de España*. Ph.D. thesis, Universidade de Santiago de Compostela.
- Gharbi, C., Rönnqvist, M., Beaudoin, D., & Carle, M. A. (2019). A new mixed-integer programming model for spatial forest planning. *Can. J. For. Res.*, 49(12), 1493–1503.
- Gómez-García, E., Crecente-Campo, F., Barrio-Anta, M., & Diéguez-Aranda, U. (2015). A disaggregated dynamic model for predicting volume, biomass and carbon stocks in even-aged pedunculate oak stands in Galicia (NW Spain). *Eur. J. For. Res.*, 134(3), 569–583.
- Gómez-García, E., Crecente-Campo, F., Tobin, B., Hawkins, M., Nieuwenhuis, M., & Diéguez-Aranda, U. (2014). A dynamic volume and biomass growth model system for even-aged downy birch stands in southwestern Europe. *Forestry*, 87(1), 165–176.
- González-González, J. M., Vázquez-Méndez, M. E., & Diéguez-Aranda, U. (2020). A note on the regularity of a new metric for measuring even-flow in forest planning. *Eur. J. Oper. Res.*, 282(3), 1101–1106.

## 6. Bibliografía

- González-González, J. M., Vázquez-Méndez, M. E., & Diéguez-Aranda, U. (2021). Simultaneous optimization of even flow and land and timber value in forest planning: a continuous approach. *For. Ecosyst.*, 8(48).
- Heaps, T. (1984). The forestry maximum principle. *J. Econ. Dyn. Control*, 7(2), 131–151.
- Heaps, T. (2015). Convergence of optimal harvesting policies to a normal forest. *J. Econ. Dyn. Control*, 54, 74–85.
- Helms, J. (1998). The dictionary of forestry. Bethesda, MD: Society of American Foresters.
- Hof, J. G., & Joyce, L. A. (1992). Spatial Optimization for Wildlife and Timber in Managed Forest Ecosystems. *For. Sci.*, 38(3), 489–508.
- Hoganson, H., & McDill, M. (1993). More on forest regulation: an LP perspective. *For. Sci.*, 39(2), 321–347.
- Hoganson, H. M., & Rose, D. W. (1984). A Simulation Approach for Optimal Timber Management Scheduling. *For. Sci.*, 30(1), 220–238.
- Johnson, K., & Scheurman, H. (1977). Techniques for prescribing optimal timber harvest and investment under different objectives—Discussion and synthesis. *For. Sci. Monogr* 18.
- Kangas, A., Hartikainen, M., & Miettinen, K. (2015). Simultaneous optimization of harvest schedule and data quality. *Can. J. For. Res.*, 45(8), 1034–1044.
- Kangas, J., & Pukkala, T. (1992). A decision theoretic approach applied to goal programming of forest management. *Silva Fenn.*, 26, 169–176.
- Kao, C., & Brodie, J. D. (1979). Goal programming for reconciling economic, even-flow, and regulation objectives in forest harvest scheduling. *Can. J. For. Res.*, 9(4), 525–531.
- Kašpar, J., Marušák, R., & Hlavatý, R. (2015). A forest planning approach with respect to the creation of overmature reserved areas in managed forests. *Forests*, 6(2), 328–343.
- Kaya, A., Bettinger, P., Boston, K., Akbulut, R., Ucar, Z., Siry, J., Merry, K.,

- & Cieszewski, C. (2016). Optimisation in forest management. *Curr. For. Reports*.
- Krcmar-Nozic, E., Van Kooten, G. C., Vertinsky, I., & Brumelle, S. (1998). An interactive multiobjective approach to harvest decisions in forest planning. *Scand. J. For. Res.*, 13(1-4), 357–369.
- Kurttila, M. (2001). The spatial structure of forests in the optimization calculations of forest planning - a landscape ecological perspective. *For. Ecol. Manage.*, 142(1-3), 129–142.
- Kuusela, O. P., & Lintunen, J. (2019). Financial valuation and the optimal rotation of a fully regulated forest. *Can. J. For. Res.*, 49(7), 819–825.
- Liu, G., & Davis, L. S. (1995). Interactive resolution of multi-objective forest planning problems with shadow price and parametric analysis. *For. Sci.*, 41(3), 452–469.
- Lockwood, C., & Moore, T. (1993). Harvest scheduling with spatial constraints: a simulated annealing approach. *Can. J. For. Res.*, 23(3), 468–678.
- Madrigal Collazo, A. (1994). *Ordenación de montes arbolados*. Madrid: ICONA, Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación.
- MAGRAMA (2011). *Cuarto Inventario Forestal Nacional. Galicia*. Ministerio de Agricultura, Alimentación y Medio Ambiente.
- Martins, I., Ye, M., Constantino, M., da Conceição Fonseca, M., & Cadima, J. (2014). Modeling target volume flows in forest harvest scheduling subject to maximum area restrictions. *TOP*, 22(1), 343–362.
- McDill, M., Rebain, S., & Braze, J. (2002). Harvest Scheduling with Area-Based Adjacency Constraints. *For. Sci.*, 48(4), 631–642.
- Miettinen, K. (1998). *Nonlinear Multiobjective Optimization*, vol. 12 of *International Series in Operations Research & Management Science*. Boston, MA: Springer US.
- Murray, A. T. (1999). Spatial restrictions in harvest scheduling. *For. Sci.*, 45(1), 45–52.
- Murray, A. T., & Church, R. L. (1995). Heuristic solution approaches to operational forest planning problems. *OR Spektrum*, 17(2-3), 193–203.

## 6. Bibliografía

- Nautiyal, J. C., & Pearse, P. H. (1967). Optimizing the Conversion to Sustained Yield Programming Solution. *For. Sci.*, 13(2), 131–139.
- Neto, T., Constantino, M., Martins, I., & Pedroso, J. P. (2017). Forest harvest scheduling with clearcut and core area constraints. *Ann. Oper. Res.*, 258(2), 453–478.
- Nocedal, J., & Wright, S. (2006). *Numerical optimization*. New York: Springer.
- O'Hara, A. J. (1989). Spatially constrained timber harvest scheduling. *Can. J. For. Res.*, 19, 715–724.
- Öhman, K., & Eriksson, L. O. (2010). Aggregating harvest activities in long term forest planning by minimizing harvest area perimeters. *Silva Fenn.*, 44(1), 77–89.
- Oldham, B., Myland, J., & Spainer, J. (2009). *An Atlas of Functions*. New York: Springer-Verlag.
- Paradis, G., Bouchard, M., LeBel, L., & D'Amours, S. (2018). A bi-level model formulation for the distributed wood supply planning problem. *Can. J. For. Res.*, 48(2), 160–171.
- Pukkala, T. (2019). Using ALS raster data in forest planning. *J. For. Res.*, 30(5), 1581–1593.
- Pukkala, T., Heinonen, T., & Kurttila, M. (2009). An application of a reduced cost approach to spatial forest planning. *For. Sci.*, 55(1), 13–22.
- Pukkala, T., & Kangas, J. (1993). A heuristic optimization method for forest planning and decision making. *Scand. J. For. Res.*, 8(1-4), 560–570.
- Rebain, S., & McDill, M. E. (2003). A mixed-integer formulation of the minimum patch size problem. *For. Sci.*, 49(4), 608–618.
- Roise, J. P. (1990). Multicriteria nonlinear programming for optimal spatial allocation of stands. *For. Sci.*, 36(3), 487–501.
- Saura, S. (2010). Del rodal al paisaje: un cambio de escala, nuevas perspectivas para la planificación y ordenación forestal. *Cuad. la Soc. Española Ciencias For.*, 239, 213–239.

- Smith, D., Larson, B., Kelty, M., & Ashton, P. (1997). *The practice of silviculture: Applied forest ecology*. John Wiley & Sons.
- Snyder, S., & ReVelle, C. (1997). Multiobjective grid packing model: an application in forest management. *Locat. Sci.*, 5(3), 165–180.
- Storn, R., & Price, K. (1997). Differential Evolution - A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Dr. Dobb's J.*, 22(4), 18–24.
- Tahvonen, O. (2004). Optimal harvesting of forest age classes: A survey of some recent results. *Math. Popul. Stud.*, 11(3-4), 205–232.
- Tonda, A. (2020). Inspyred: Bio-inspired algorithms in Python. *Genet. Program. Evolvable Mach.*, 21(1-2), 269–272.
- Tóth, S. F., & McDill, M. E. (2009). Finding efficient harvest schedules under three conflicting objectives. *For. Sci.*, 55(2), 117–131.
- Tóth, S. F., McDill, M. E., & Rebain, S. (2006). Finding the efficient frontier of a bi-criteria, spatially explicit, harvest scheduling problem. *For. Sci.*, 52(1), 93–107.
- Ungureanu, V. (2018). *Pareto-Nash-Stackelberg Game and Control Theory: Intelligent Paradigms and Application*. Springer International Publishing.
- Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., Haberland, M., Reddy, T., Cournapeau, D., Burovski, E., Peterson, P., Weckesser, W., Bright, J., van der Walt, S. J., Brett, M., Wilson, J., Jarrod Millman, K., Mayorov, N., J Nelson, A. R., Jones, E., Kern, R., Larson, E., Carey, C. J., Polat, I., Feng, Y., Moore, E. W., VanderPlas, J., Laxalde, D., Perktold, J., Cimrman, R., Henriksen, I., Quintero, E. A., Harris, C. R., Archibald, A. M., Ribeiro, A. H., Pedregosa, F., & van Mulbregt, P. (2020). SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nat. Methods*, 17, 261–272.
- Ware, G., & Clutter, J. (1971). Mathematical Programming System For Management Of Industrial Forests. *For. Sci.*, 17(4), 428–445.
- Weiskittel, A. R., Hann, D. W., Kershaw, J. A., & Vanclay, J. K. (2011). *Forest Growth and Yield Modeling*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd.

## 6. Bibliografía

- Williams, H. P. (1999). *Model Building in Mathematical Programming*. New York, 4 ed.
- Xunta de Galicia (2020). *Anuario de Estatística Forestal de Galicia 2019*. Santiago de Compostela: Dirección Xeral de Montes e Medio Ambiente Natural.
- Zanakis, S. H., & Evans, J. R. (1981). Heuristic Optimization: Why, When, and How to Use It. *Interfaces (Providence)*, 11(5), 84–91.
- Zhang, H., Constantino, M., & Falcão, A. (2011). Modeling forest core area with integer programming. *Ann. Oper. Res.*, 190(1), 41–55.
- Zhu, C., Byrd, R. H., Lu, P., & Nocedal, J. (1997). Algorithm 778: L-BFGS-B: Fortran Subroutines for Large-Scale Bound-Constrained Optimization. *ACM Trans. Math. Softw.*, 23(4), 550–560.
- Zitzler, E., Laumanns, M., & Bleuler, S. (2004). A Tutorial on Evolutionary Multiobjective Optimization. *Metaheuristics Multiobjective Optim.*, (535), 3–37.
- Zitzler, E., Laumanns, M., & Thiele, L. (2002). SPEA2: Improving the strength pareto evolutionary algorithm. In CIMNE (Ed.) *Evol. Methods Des. Optim. Control*.

## 7. SIGLAS

**ARM** *area restriction model* (modelo de restricción por área).

**BLP** *binary linear programming* (programación lineal binaria).

**DE** *differential evolution* (evolución diferencial).

**DM** *decision maker* (tomador de decisiones).

**EF** *even flow* (renta constante).

**LEV** *land expectation value* (valor esperado del suelo).

**LP** *linear programming* (programación lineal).

**LTV** *land and timber value* (valor esperado del suelo y del vuelo).

**MOP** *multi-objective optimization problem* (problema de optimización multiobjetivo).

**NLIP** *nonlinear integer programming* (programación entera no lineal).

**NLP** *nonlinear programming* (programación no lineal).

**RC** *reduced cost* (costo reducido).

**RFM** *rotation forest management* (gestión forestal por turno de corta).

**URM** *unit restriction model* (modelo de restricción por unidad).



## 8. NOTACIÓN

- $a$  instante inicial en el que se puede actuar sobre el monte, en años.
- $A_j$  área del rodal  $j$ , en hectáreas.
- $A_{jk}$  área del rodal  $j$  cortada en la intervención  $k$ , en hectáreas.
- $b$  función que proporciona el límite superior del intervalo en el que se controla el ritmo de corta, en años.
- $C_j$  función que proporciona los costes actualizados para el rodal  $j$ , en €/ha.
- $\Delta$  amplitud de período, en años.
- $\delta$  función delta de Dirac.
- $d$  dimensión de la variable de decisión a nivel monte.
- $G_j^0$  área basimétrica para el rodal  $j$  a la edad  $t_j^0$ , en m<sup>2</sup>/ha.
- $g_j$  función que proporciona el área basimétrica del rodal  $j$  a cualquier edad, en m<sup>2</sup>/ha.
- $H$  función escalón de Heaviside.
- $H_j^0$  altura dominante para el rodal  $j$  a la edad  $t_j^0$ , en metros.
- $h_j^r$  ritmo de corta para el rodal  $j$ .
- $h_j$  función que proporciona la altura dominante del rodal  $j$  a cualquier edad, en metros.
- $i$  tasa de interés.

$I_j^k$  intensidad en la clara  $k$  del rodal  $j$ .

$J^R$  métrica de regulación.

$J^{E\bar{r}}$  métrica para constancia de renta asumiendo  $\bar{r}$  para turnos futuros.

$J^{ER}$  métrica para constancia de renta asumiendo  $R$  para turnos futuros.

$J^{EF}$  métrica de constancia de renta en volumen de madera.

$J_j^{LEV}$  función que proporciona el LEV para el rodal  $j$ , en euros.

$J_j^{LTV\bar{r}_j}$  función que proporciona el LTV en base al turno óptimo a nivel rodal para el rodal  $j$ , en euros.

$J_j^{LTV}$  función que proporciona el LTV para el rodal  $j$ , en euros.

$J_j^{LTVR}$  función que proporciona el LTV en base al turno óptimo a nivel monte para el rodal  $j$ , en euros.

$l_j$  edad mínima a la que puede cortarse el rodal  $j$ , en años.

$N_j^0$  número de árboles por hectárea del rodal  $j$  a la edad  $t_j^0$ .

$N_j^f$  densidad de plantación después de la corta de regeneración del rodal  $j$ , en árboles por hectárea.

$n^P$  número de períodos.

$n_c^j$  número de claras a aplicar en el rodal  $j$ .

$n_j$  función que proporciona el número de árboles por hectárea del rodal  $j$  a cualquier edad.

$n_s$  número de rodales que componen un monte.

$\Omega$  conjunto discreto de instantes de corta permitidos.

- $P$  horizonte de planificación, en años.
- $p_j$  precio esperado por la venta de la madera en pie, en €/m<sup>3</sup>.
- $\bar{r}_j$  turno económicamente óptimo para el rodal  $j$ , en años.
- $\bar{\mathbf{r}}$  vector de turnos económicamente óptimos a nivel rodal  $j$ , en años.
- $\mathbf{r}$  vector de turnos futuros de los rodales, en años.
- $R$  turno económicamente óptimo para el monte regulado, en años.
- $R_j^k$  relación de extracción en la clara  $k$  del rodal  $j$ .
- $R_j$  función que proporciona los ingresos actualizados para el rodal  $j$ , en €/ha.
- $r_j$  duración establecida para los turnos futuros del rodal  $j$ , en años.
- $\mathbf{t}_0$  vector de edades de los rodales al inicio de la planificación, en años.
- $\mathbf{t}$  vector de edades de corta final de los rodales, en años.
- $T$  horizonte de planificación para la constancia de renta, en años.
- $t_j^0$  edad del rodal  $j$  al inicio de la planificación, en años.
- $t_j$  edad a la que se realiza la corta final del rodal  $j$ , en años.
- $\mathbf{u}$  variable de decisión a nivel monte considerando las claras y la corta final.
- $\mathbf{u}_j$  variable de decisión para el rodal  $j$  considerando las claras y la corta final.
- $V^S$  función que proporciona el volumen extraído objetivo en el primer turno, en m<sup>3</sup>.
- $V^n$  función que proporciona el volumen extraído en el segundo turno, en m<sup>3</sup>.
- $V^R$  función que proporciona el volumen extraído objetivo en el segundo turno para obtener un monte regulado, en m<sup>3</sup>.

- $V_j$  volumen de madera del rodal  $j$  a lo largo del tiempo, en  $m^3/ha$ .
- $v_j$  función que proporciona el volumen total del rodal  $j$  a partir de las variables de estado  $(H, N, G)$ , en  $m^3/ha$ .
- $x_{jk}$  proporción del área del rodal  $j$  cortada en la intervención  $k$ .
- $\bar{y}_j$  programa selvícola económicamente óptimo para el rodal  $j$ , en años.
- $\bar{y}$  vector de programas selvícolas óptimos a nivel rodal, en años.
- $y$  variable de decisión a nivel monte si no se aplican claras (solo se determina el instante  $y_j$  de la corta final de cada rodal), en años.
- $Y^{ad}$  conjunto de tratamientos selvícolas que pueden aplicarse a cada rodal.
- $y_j$  instante en el que se realiza la corta final del rodal  $j$ , en años.
- $y_j^k$  instante en el que se realiza la intervención  $k$  en el rodal  $j$ , en años.

# APÉNDICE 1

## A note on the regularity of a new metric for measuring even-flow in forest planning

José M. González-González<sup>1</sup>  
Miguel E. Vázquez-Méndez<sup>2,\*</sup>  
Ulises Dieguéz-Aranda<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Unidad de Gestión Forestal Sostenible, Departamento de Enxeñaría Agroforestal, Universidade de Santiago de Compostela. Escola Politécnica Superior de Enxeñaría, R/ Benigno Ledo, 27002 Lugo, Spain. E-mail addresses: josemario.gonzalez@usc.es, ulises.dieiguez@usc.es

<sup>2</sup> Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela. Escola Politécnica Superior de Enxeñaría, R/ Benigno Ledo, 27002, Lugo, Spain.  
E-mail adress: miguelernesto.vazquez@usc.es

\* Corresponding author

European Journal of Operational Research 282 (2020) 1101–1106  
DOI: 10.1016/j.ejor.2019.10.029

### Abstract

In this work we deal with the mathematical analysis of a new metric for measuring even-flow in even-aged forest management planning. We begin writing the most used way of measuring even-flow, and showing the main disadvantages of this classical procedure. Next, we introduce the new metric and study the regularity of the corresponding function, which results to be continuous and to have continuous derivatives in almost all points. We give an explicit expression for these derivatives and analyze its usefulness by comparing a gradient-type method with a derivative-free algorithm (widely used in

## 9. Apéndice 1

forestry) to maximize even-flow in a forest of 51 *Eucalyptus globulus* Labill. stands in Galicia (NW Spain). We observe that gradient-type methods work well with the new even-flow metric, which enables this type of methods for solving the multi-objective problems that can be formulated in forest planning.

**Keywords:** OR in natural resources, Even-aged forest management, Forest-level optimization, Continuous optimization, Gradient type algorithms.

### 9.1. Introduction

Forest management typically operates at the spatial scale of the *stand*, which may be defined as a contiguous group of trees sufficiently uniform in age-class distribution, composition, and structure and growing on a site of sufficiently uniform quality, to be a distinguishable unit (Helms, 1998). Within the specific context of forest management, a *forest* can be defined as a collection of stands administered as an integrated unit, usually under one ownership (Smith et al., 1997). The *basic forest management question* is what silvicultural treatment (e.g., site preparation, planting, thinning, harvesting) should be applied to each stand to best meet the objectives established for the forest (Hann & Brodie, 1980). A *silvicultural prescription* is a set of planned treatments designed to change the current structure and/or composition of a stand to one that meets management goals. The management of *even-aged stands* generally requires decisions about the rotation length (the age of harvesting and regenerating the stand using, for example, the clearcutting method) and the number, type, intensity, and timing of each thinning.

Profitability and sustainability are two common aspects in forest management. The first is directly related with the net revenues ( $R$ ) obtained from the management. On the other hand, sustainability (an abstract concept which nowadays should be assessed using multi-criteria techniques —(Diaz-Balteiro et al., 2016)—) has traditionally been related to the concept of maintaining an even-flow ( $EF$ ) timber supply through appropriate forest planning and management techniques, although this concept shifted from commercial products to multiple resource values, then to ecosystems (Bettinger et al., 2009, p. 185).

Consequently, the natural framework for planning forest management is multi-objective optimization. If we focus on  $R$  and  $EF$ , optimization of forest management is to study and solve the problem

$$\text{maximize } \mathbf{J} = (R, EF). \quad (1)$$

Although the idea is quite simple, the fact that the considered objectives come into conflict makes necessary to include decision making in the resolution of problem (1) (Álvarez-Miranda et al., 2018), and converts the concept of *optimal forest management* in something subjective.

Following Johnson & Scheurman (1977), many authors apply a priori strategies and replace problem (1) with a constraint optimization problem. Other authors (see, for example, Ducheyne et al., 2004) propose to obtain the complete Pareto frontier of problem (1) to later address the decision making. In either case, except for the classical works on linear programming (see, for example, Curtis, 1962; Nautiyal & Pearse, 1967) where it is allowed to apply more than one silvicultural prescription to each forest stand, it is usual (see, for instance, Başkent, 2001; Constantino & Martins, 2018) to formulate the problem as a combinatorial problem, treating the decision variables as discrete, even though these are, by their own nature, clearly continuous. In addition, in the few studies in which the variables are considered continuous, no mathematical analysis of the objective functions ( $R$  and  $EF$ ) is performed, applying optimization algorithms that may not be the most adequate to solve the problem (Roise, 1990).

The net revenues of a forest are the sum of the net revenues of each individual stand. Stand revenues are obtained from harvests, and may be expressed in terms of Net Present Value (NPV) or Soil Expectation Value (SEV). During the last decades forest researchers have developed growth models for many timber species, which include explicit expressions that provide values of these indicators as a function of the decision variable of the stand. Besides, (Arias-Rodil et al., 2017) have observed that in many cases these functions are smooth (of class  $C^\infty$ ) with respect to the decision variable at stand level. Consequently, the  $R$  function is also smooth (of class  $C^\infty$ ) with respect to the decision variable

## 9. Apéndice 1

at forest level.

Regarding the even-flow, as far as we know, there are no studies that analyze the regularity properties of the  $EF$  function. Nevertheless, knowing that the  $R$  function is smooth, it may also be useful to work with smooth  $EF$  functions and, particularly, allow to address problem (1) with differentiable optimization techniques.

In this situation, in this work we first (section 9.2) expose the classical way of measuring even-flow in forest planning and propose an alternative approach, trying to avoid the main drawbacks of the classical formulation. Then (section 9.3), we analyze the regularity properties of the new  $EF$  function and prove how it admits, in almost every point, partial derivatives with respect to the decision variables of the problem. This allows to optimize the function using gradient-type methods, which are compared (section 9.4) with a derivative-free strategy (widely used in forestry) to maximize even-flow in a *Eucalyptus globulus* Labill. forest of Galicia (NW Spain). Finally (section 9.5), we briefly present some interesting conclusions.

### 9.2. A new metric for measuring even-flow

Let's consider that we are interested in practicing even-aged forest management for a planning horizon of  $T$  years in a forest with  $N_R$  stands. The objective is to determine for each stand (stand  $j$ ) the number of thinnings that must be applied ( $N_j^C$ ), the timing ( $t_j^i \in [0, T]$ ) of each thinning (thinning  $i$ ), its intensity ( $I_j^i \in (0, 1)$ ) and type (defined by its removal relation  $R_j^i \in (0, 1)$ ), and finally the timing of clearcutting ( $t_j \in [0, T]$ ). The decision variable at stand level is

$$\mathbf{u}_j = (t_j^1, I_j^1, R_j^1, \dots, t_j^{N_j^C}, I_j^{N_j^C}, R_j^{N_j^C}, t_j) \in \mathbb{R}^{3N_j^C+1},$$

and, consequently, the decision variable at forest level has dimension  $d = N_R + 3 \sum_{j=1}^{N_R} N_j^C$ , and is given by

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N_R}) \in \mathbb{R}^d.$$

## 9.2. A new metric for measuring even-flow

In this formulation, the linear constraints

$$0 \leq t_j^1 < \dots < t_j^{N_j^C} < t_j \leq T$$

should be verified, and the assumption  $t_j \in [0, T]$  implies that the  $j$  stand must be cut within the planning horizon. Of course, a forestry prescription decision for any stand may also be to do nothing and, if it is desired, it can be included in the model by deleting the last constraint ( $t_j \leq T$ ).

The revenues of the forest are calculated from the harvested volume, and the even-flow is also considered in terms of harvested volume. As already indicated, during the last decades forest researchers have developed explicit expressions, specific to each location and species, which provide the values of those volumes based on the decision variable of the stand. Therefore, for each stand, we can assume known smooth functions (of class  $C^\infty$ )  $V_j^i(\mathbf{u}_j)$  and  $V_j(\mathbf{u}_j)$  which provide the volume of stand  $j$  at thinning  $i$  and at final harvest, respectively (see Arias-Rodil et al., 2017).

To measure even-flow, the usual way is to divide the planning horizon, interval  $[0, T]$ , in a number of  $N_P$  planning periods of duration  $\Delta P = T/N_P$  years, and to use as indicator of even-flow whatever parameter that measures the difference in harvested volume between periods. If for  $k = 1, \dots, N_P$  we define period  $P_k = ((k-1)\Delta P, k\Delta P]$  and assume that during that planning horizon we will harvest and regenerate all stands (in each stand we will carry out one and only one final harvest), the harvested volume in  $P_k$  is given by

$$V_{P_k}(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{N_R} \left( \sum_{i=1}^{N_C^j} \chi_{P_k}(t_j^i) V_j^i(\mathbf{u}_j) + \chi_{P_k}(t_j) V_j(\mathbf{u}_j) \right),$$

where  $\chi_{P_k}$  is the characteristic function of  $P_k$ , given by

$$\chi_{P_k}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } (k-1)\Delta P < t \leq k\Delta P, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The forestry literature provides numerous examples on how to measure

## 9. Apéndice 1

even-flow (see Bettinger et al., 2009), but practically all of them are defined based on functions  $V_{P_k}$ . As an example of classical even-flow indicators (which should be minimized), we could choose (Johnson & Scheurman, 1977; Ducheyne et al., 2004)

$$C_{EF}(\mathbf{u}) = \max_{k=2, \dots, N_P} \{|V_{P_k}(\mathbf{u}) - V_{P_{k-1}}(\mathbf{u})|\}, \quad (2)$$

$$C_{EF}(\mathbf{u}) = \max_{k=1, \dots, N_P} \{|V_{P_k}(\mathbf{u}) - \bar{V}(\mathbf{u})|\}, \text{ being } \bar{V}(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{k=1}^{N_P} V_{P_k}(\mathbf{u})}{N_P}, \quad (3)$$

or whatever other form of measuring differences between the values of  $V_{P_k}(\mathbf{u})$  (see, for instance, Brumelle et al., 1998).

Functions of the type (2) or (3) do not have appropriate properties for continuous optimization purposes. Additionally, the division of the planning horizon in periods is somehow artificial that arises from the apparent need of discretizing the problem to be addressed more easily. Undoubtedly, it is more useful to look for a certain even-flow in harvested volume during the entire planning horizon. Considering that harvest a stand lasts a small interval of time (days or even weeks), we could theoretically achieve the perfect even-flow if the forest were large enough. Achieving even-flow is therefore trying to ensure that the volume harvested over time fits a constant function throughout the planning horizon, and any metric that measures the goodness of this fit can be chosen as an indicator. With this idea in mind, we considered function  $V_{ac}(\mathbf{u}, t)$ , which provides the accumulated harvested volume at instant  $t \in [0, T]$  if we follow the planning defined by variable  $\mathbf{u}$ . This function is given by

$$V_{ac}(\mathbf{u}, t) = \sum_{j=1}^{N_R} V_j(\mathbf{u}_j)H(t - t_j) + \sum_{j=1}^{N_R} \sum_{i=1}^{N_j^C} V_j^i(\mathbf{u}_j)H(t - t_j^i),$$

where  $H(t)$  is the Heaviside function given by

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0, \\ 1 & \text{if } t \geq 0. \end{cases}$$

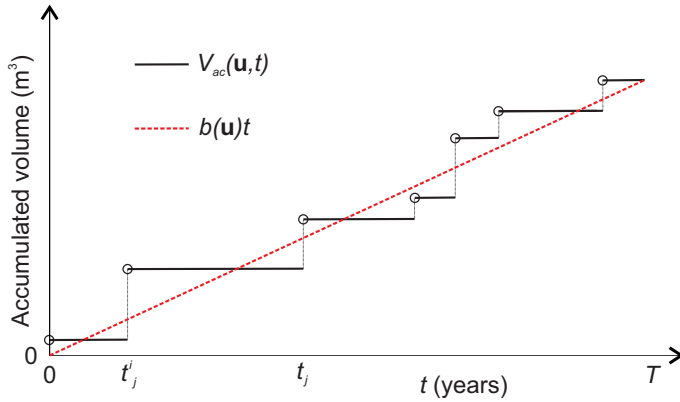
## 9.2. A new metric for measuring even-flow

To measure the quality of fit of this function and the theoretical accumulated harvested volume, which would correspond with a constant harvested volume (see Fig.1), in this work we propose the use of the metric associated with the  $L^2(0, T)$  norm. This leads to define even-flow (to minimize) as

$$EF(\mathbf{u}) = \int_0^T (V_{ac}(\mathbf{u}, t) - b(\mathbf{u})t)^2 dt, \quad (4)$$

where  $b(\mathbf{u})$ , in  $\text{m}^3/\text{year}$ , is the desired harvest rate, given by

$$b(\mathbf{u}) = \frac{V_{ac}(\mathbf{u}, T)}{T} = \frac{\sum_{j=1}^{N_R} \left( V_j(\mathbf{u}_j) + \sum_{i=1}^{N_C^j} V_j^i(\mathbf{u}_j) \right)}{T}.$$



**Figure 1:** Accumulated harvested volume  $V_{ac}(\mathbf{u}, t)$  and accumulated theoretical volume  $b(\mathbf{u})t$ , for a given decision variable  $\mathbf{u}$ .

## 9. Apéndice 1

### 9.3. Mathematical analysis

Recently (Arias-Rodil et al., 2017), the regularity of functions  $V_j^i(\mathbf{u}^j)$  and  $V_j(\mathbf{u}_j)$  has been studied and it has proved that they are of class  $C^\infty$ . The function  $EF(\mathbf{u})$  given by (4) has not this smooth property, but it has continuous partial derivatives in almost everywhere: always, except where two thinning or clearcutting instants are equal ( $t_j = t_{j'}$ ,  $t_j = t_{j'}^i$  or  $t_j^i = t_{j'}^i$ ), and it is deriving with respect to one of them. The main aim of this section is to present a rigorous proof of this property and to give useful expressions for these partial derivatives. To alleviate notation and without loss of generality, we assume no thinnings ( $N_j^C = 0$ ). In this case, the decision variable is  $\mathbf{u} = (t_1, \dots, t_{N_R})$  and we have the following result, which proof for  $N_R = 2$  is included below. An alternative and general proof, by using classical concepts of the distribution theory (Schwartz, 1966), can be seen in Section 9.3.1.

**Theorem 1** *The function  $EF$  given by (4) is continuous and has continuous partial derivatives with respect to  $t_j$  at any point  $\mathbf{u} = (t_1, \dots, t_{N_R})$  verifying  $t_k \neq t_j$ , for all  $k \neq j$ . These partial derivatives are given by*

$$\begin{aligned} \frac{\partial EF}{\partial t_j}(\mathbf{u}) = & - 2V_j(t_j) \left( V_{ac}(\mathbf{u}, t_j) - \frac{V_j(t_j)}{2} - b(\mathbf{u})t_j \right) \\ & + 2V_j'(t_j) \int_0^T (V_{ac}(\mathbf{u}, t) - b(\mathbf{u})t) \left( H(t - t_j) - \frac{t}{T} \right) dt. \end{aligned} \quad (5)$$

**Proof 1** *For simplicity, we assume  $N_R = 2$  ( $\mathbf{u} = (t_1, t_2)$ ) and look for the explicit expression of  $EF(t_1, t_2)$ . For  $t_1 < t_2$  we have*

$$EF(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} (bt)^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} (V_1 - bt)^2 dt + \int_{t_2}^T (V_1 + V_2 - bt)^2 dt,$$

where  $V_j = V_j(t_j)$  and  $b = b(t_1, t_2) = (V_1 + V_2)/T$ . For  $t_1 \geq t_2$  we proceed in a

### 9.3. Mathematical analysis

similar way and, by applying the Barrow rule, we obtain

$$EF(t_1, t_2) = \begin{cases} bV_1t_1^2 + bV_2t_2^2 - V_1^2t_1 - V_2^2t_2 - 2V_1V_2t_2 + \frac{b^2}{3}T^3 & \text{if } t_1 < t_2, \\ bV_1t_1^2 + bV_2t_2^2 - V_1^2t_1 - V_2^2t_2 - 2V_1V_2t_1 + \frac{b^2}{3}T^3 & \text{if } t_1 \geq t_2. \end{cases}$$

This function is continuous and has continuous partial derivatives if  $t_1 \neq t_2$ . Moreover, by deriving with respect to  $t_1$  in previous expression, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial EF}{\partial t_1}(t_1, t_2) &= -2V_1(V_{ac}(t_1) - \frac{V_1}{2} - bt_1) \\ &+ 2V_1' \left( \frac{2V_1 + V_2}{2T}t_1^2 + \frac{V_2}{2T}t_2^2 - V_1t_1 + \frac{(V_1 + V_2)T}{3} - V_2 \max\{t_1, t_2\} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

On the other hand:

- if  $t_1 < t_2$ ,

$$\begin{aligned} &\int_0^T (V_{ac}(\mathbf{u}, t) - bt) \left( H(t - t_1) - \frac{t}{T} \right) dt \\ &= \int_0^{t_1} \frac{b}{T} t^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} (V_1 - bt) \left( 1 - \frac{t}{T} \right) dt + \int_{t_2}^T (V_1 + V_2 - bt) \left( 1 - \frac{t}{T} \right) dt \\ &= \frac{2V_1 + V_2}{2T} t_1^2 + \frac{V_2}{2T} t_2^2 - V_1 t_1 + \frac{(V_1 + V_2)T}{3} - V_2 t_2, \end{aligned}$$

- if  $t_1 \geq t_2$ ,

$$\begin{aligned} &\int_0^T (V_{ac}(\mathbf{u}, t) - bt) \left( H(t - t_1) - \frac{t}{T} \right) dt \\ &= \int_0^{t_2} \frac{b}{T} t^2 dt + \int_{t_2}^{t_1} (V_2 - bt) \left( -\frac{t}{T} \right) dt + \int_{t_1}^T (V_1 + V_2 - bt) \left( 1 - \frac{t}{T} \right) dt \\ &= \frac{2V_1 + V_2}{2T} t_1^2 + \frac{V_2}{2T} t_2^2 - V_1 t_1 + \frac{(V_1 + V_2)T}{3} - V_2 t_1, \end{aligned}$$

## 9. Apéndice 1

and, consequently,

$$\begin{aligned} & \int_0^T (V_{ac}(\mathbf{u}, t) - bt) \left( H(t - t_1) - \frac{t}{T} \right) dt \\ &= \frac{2V_1 + V_2}{2T} t_1^2 + \frac{V_2}{2T} t_2^2 - V_1 t_1 + \frac{(V_1 + V_2)T}{3} - V_2 \max\{t_1, t_2\}. \end{aligned}$$

For  $j = 1$ , the expression (5) is obtained by substituting previous equality into (6). For  $j = 2$ , the proof is just similar.

### 9.3.1. An alternative proof of Theorem 1 in the framework of the distribution theory

The main difficulty for deriving function  $EF$  given by (4) is due to the Heaviside function has not derivative in a classical sense. To avoid this problem we have to use a more general framework: the distribution theory (Schwartz, 1966). We denote by  $D(0, T)$  the set of functions defined on  $(0, T)$ , of class  $C^\infty$  and compact support, endowed with the appropriate topology (see Adams, 1975). The space of distributions  $D'(0, T)$  is the dual space of  $D(0, T)$  and, as it is well known, any locally integrable function  $f \in L^1_{loc}(0, T)$  can be considered a distribution, since it is identified with  $T_f \equiv f$  given by

$$T_f(\Phi) = \int_0^T f(t)\Phi(t)dt \quad \forall \Phi \in D(0, T).$$

The space of distributions is the suitable framework to define the Dirac's delta. For any  $t_0 \in (0, T)$ , it is the distribution  $\delta(t - t_0)$  given by

$$\delta(t - t_0)(\phi) = \phi(t_0), \quad \forall \phi \in D(0, T).$$

In this framework, the Dirac's delta is the derivative of the Heaviside function in the sense that  $T'_{H(t-t_0)} = \delta(t - t_0)$ , and we have the following result:

**Lemma 1** *The function  $f : (0, T) \longrightarrow (D(0, T))'$  is differentiable*  
 $t_0 \longrightarrow f(\bar{t}_0) = T_{H(t-t_0)}$

### 9.3. Mathematical analysis

and  $f'(t_0) = -\delta(t - t_0)$ .

From this lemma we can give a general proof of Theorem 1:

**Proof 2 (Proof (of Theorem 1))** *Developing the square in expression (4) we have*

$$EF(\mathbf{u}) = \int_0^T (V_{ac}(\mathbf{u}, t))^2 dt - 2 \int_0^T V_{ac}(\mathbf{u}, t) b(\mathbf{u}) t dt + \int_0^T (b(\mathbf{u}))^2 t^2 dt,$$

and moreover

$$(V_{ac}(\mathbf{u}, t))^2 = \sum_{j=1}^{N_R} V_j^2(t_j) H(t - t_j) + \sum_{j=1}^{N_R} V_j(t_j) H(t - t_j) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_R} V_k(t_k) H(t - t_k).$$

Taking into account that  $t_k \neq t_j$  for  $k \neq j$ , we can derive by using the Leibnitz rule (see, for instance, Adams, 1975). Then, from Lemma 1, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial EF}{\partial t_j}(\mathbf{u}) = & \int_0^T 2V_j(t_j) V_j'(t_j) H(t - t_j) dt - V_j^2(t_j) \\ & + 2 \int_0^T V_j'(t_j) H(t - t_j) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_R} V_k(t_k) H(t - t_k) dt \\ & - 2V_j(t_j) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_R} V_k(t_k) H(t_j - t_k) \\ & - 2 \left( \int_0^T V_j'(t_j) H(t - t_j) b(\mathbf{u}) t dt - V_j(t_j) b(\mathbf{u}) t_j \right) \\ & - 2 \int_0^T V_{ac}(\mathbf{u}, t) \frac{V_j'(t_j)}{T} t dt + 2 \int_0^T \frac{V_j'(t_j)}{T} b(\mathbf{u}) t^2 dt. \end{aligned}$$

## 9. Apéndice 1

Finally, by rearranging terms, we have

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial EF}{\partial t_j}(\mathbf{u}) &= 2V_j'(t_j) \int_0^T (V_j(t_j) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_R} V_k(t_k)H(t-t_k))H(t-t_j) dt \\
 &\quad - 2V_j'(t_j) \int_0^T \left( H(t-t_j)b(\mathbf{u})t + \frac{V_{ac}(\mathbf{u},t)}{T}t - \frac{b(\mathbf{u})}{T}t^2 \right) dt \\
 &\quad - 2V_j(t_j) \left( \frac{V_j(t_j)}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_R} V_k(t_k)H(t_j-t_k) - b(\mathbf{u})t_j \right) \\
 &= 2V_j'(t_j) \int_0^T V_{ac}(\mathbf{u},t)H(t-t_j) dt \\
 &\quad - 2V_j'(t_j) \int_0^T \left( H(t-t_j)b(\mathbf{u})t + \frac{V_{ac}(\mathbf{u},t)}{T}t - \frac{b(\mathbf{u})}{T}t^2 \right) dt \\
 &\quad - 2V_j(t_j) \left( V_{ac}(\mathbf{u},t_j) - \frac{V_j(t_j)}{2} - b(\mathbf{u})t_j \right).
 \end{aligned}$$

**Remark 1** From Lemma 1, the equality (5) can be directly obtained by a formal derivation of (4), assuming that

$$\delta(t-t_0)(H(t-t_0)) = 1/2. \quad (7)$$

Equality (7) can be easily assumed if we take into account that the Heaviside function  $H(t-t_0)$  can be written as the limit of  $C^\infty$  functions that go through the point  $(t_0, 1/2)$ . In any case, this hypothesis is not necessary if the square in expression (4) is developed previously, as we have done in the previous proof.

## 9.4. Case study: *Eucalyptus globulus* Labill. forest in Galicia (NW Spain)

Gradient-type methods have proven their effectiveness in economic optimization at stand level (see Arias-Rodil et al., 2017). Theorem 1 allows the use of this type of methods when function  $EF$  given by (4) is used. Thinking about using algorithms with derivatives to solve problem (1), we focus our attention on analyzing their effectiveness and efficiency to optimize even-flow, that is, to solve problem

$$\min_{\mathbf{u} \in U_{ad}} EF(\mathbf{u}), \quad (8)$$

where  $U_{ad}$  is the set of admissible actions.

Let's consider a forest of *Eucalyptus globulus* Labill. located in the municipality of Xove (north of Galicia, Spain), which has  $N_R = 51$  stands. For each of them, we know the current stand age ( $t_j^0$ , in years), the area ( $A_j$ , in hectares), and the value of the following three state variables: dominant height ( $H_j^0$ , in meters), number of trees per hectare ( $N_j^0$ ) and stand basal area ( $G_j^0$ , in  $\text{m}^2/\text{ha}$ ). This is the information needed to use the transition functions of a dynamic growth model appropriate for the species and location (see García-Villabrille, 2015) which provide, at every instant  $t$  (years), the predicted values of the state variables ( $H_j(t)$ ,  $N_j(t)$  and  $G_j(t)$ ). We admit that no thinning treatments are done ( $N_j^C=0$ ) and, therefore, the standing stand volume ( $V_j(t)$ , in  $\text{m}^3$ ) of each stand through time is given by the output equation (see García-Villabrille, 2015):

$$V_j(t) = A_j \left( 0.6234 H_j(t)^{0.8642} N_j(t)^{-0.05978} G_j(t)^{1.108} \right),$$

being:

- $H_j(t) = y(-0.5989, 13.90, t_j^0, H_j^0, t)$ ,
- $N_j(t) = ((N_j^0)^{-0.5} + 1.99510^{-5}(t^2 + 2tt_j^0))^{-2}$ ,
- $G_j(t) = y(-0.9906, 21.16, t_j^0, G_j^0, t)$ ,

## 9. Apéndice 1

where:

$$y(a, b, \bar{t}, \bar{y}, t) = \exp \left( \frac{\left( 0.5\bar{t}^a \left( \bar{t}^a \ln(\bar{y}) + \sqrt{4b\bar{t}^a + (\bar{t}^a \ln(\bar{y}))^2} \right) \right)^2 - b(\bar{t} + t)^a}{0.5\bar{t}^a \left( \bar{t}^a \ln(\bar{y}) + \sqrt{4b\bar{t}^a + (\bar{t}^a \ln(\bar{y}))^2} \right)} \right)$$

Because no thinning treatments are allowed,  $\mathbf{u} = (t_1, \dots, t_{N_R})$  and we only have bound constraints:

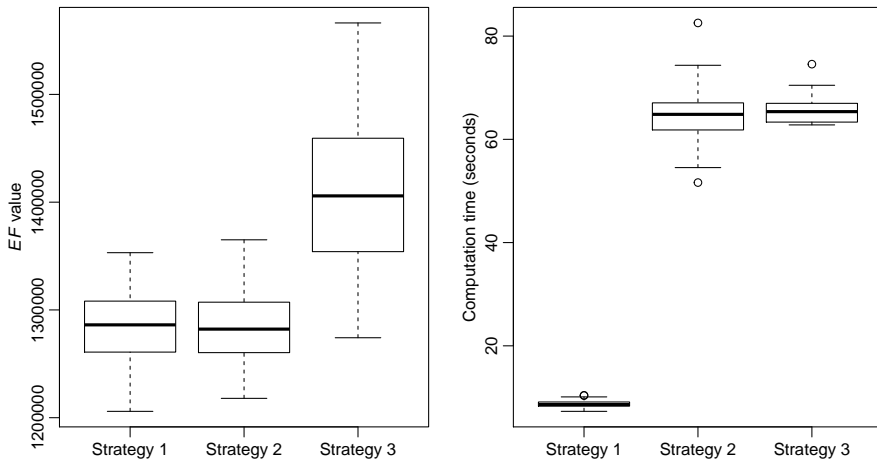
$$U_{ad} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N_R}, \text{ such that } 0 \leq t_j \leq T\}.$$

We chose a planning horizon of  $T = 12$  years and, for comparing results and computation times, we solve problem (8) on an Intel(R) Core™ i7-4770 CPU 3.40GHz PC, using the optimization methods implemented in the free and open-source Python library SciPy 1.1.0 (Jones et al., 2001–). We compare three different strategies. First, the L-BFGS-B algorithm (Zhu et al., 1997), using random multi-start with 25 initial points, to try to avoid local minima. We solve the problem supplying to the algorithm the exact gradient, provided by expression (5) —strategy 1—, and the numeric gradient given by the ‘two-point’ finite difference estimation of SciPy —strategy 2—, with a step size  $\varepsilon = 10^{-2}$ , chosen after an exhaustive search. Besides, we also solve the problem with the differential evolution (DE) method (Storn & Price, 1997) —strategy 3—, a gradient-free algorithm widely used in forestry. The parameters that control the search for this method were selected after a previous (and tedious) exhaustive search and, finally, we use a ‘DE/best/1/bin’ strategy, with a crossover probability of 0.5, a constant mutation of 0.05, and a population size of 15 individuals. In order to analyze the efficiency and robustness of the three strategies, the experiment was repeated 50 times.

Figure 2 shows the optimal values obtained and the computation times of the different strategies. Regardless the use of the exact gradient or its approximation, the L-BFGS-B algorithm with multi-start results much more effective and robust than the differential evolution. The usefulness of equality (5) is shown in terms of efficiency, since the L-BFGS-B algorithm with the exact

#### 9.4. Case study: *Eucalyptus globulus* Labill. forest in Galicia (NW Spain)

gradient reduces the computation time by seven with respect to the approximated gradient and to the differential evolution method. An additional advantage of using expression (5) is that it avoids the tedious adjustment of parameters needed to obtain good results, either with the approximated gradient or with the differential evolution method.

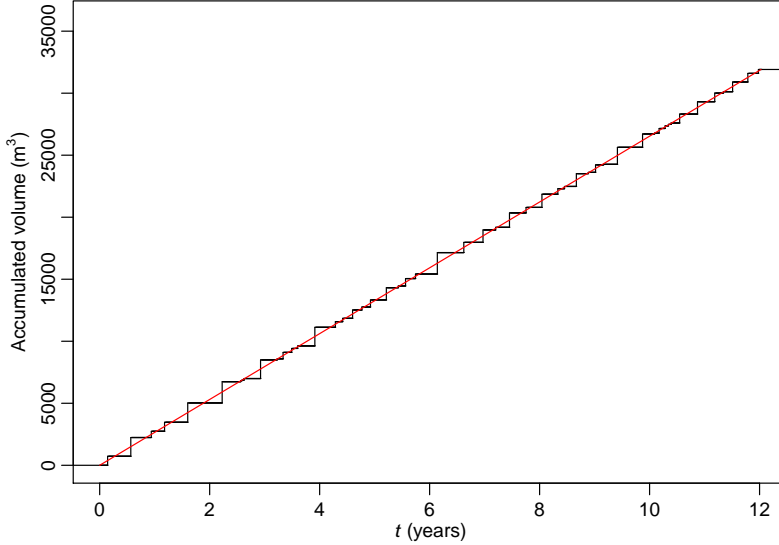


**Figure 2:** Minimal values of objective function  $EF$  (left) and computation times (right) obtained for 50 repetitions of the experiment. Strategy 1: random multi-start + L-BFGS-B with the gradient given by (5). Strategy 2: random multi-start + L-BFGS-B with a gradient computed by centered finite differences. Strategy 3: differential evolution.

Finally, Fig. 3 shows, for the best solution ( $\mathbf{u}_{opt}$ ), the accumulated harvested volume function  $V_{ac}(\mathbf{u}_{opt}, \cdot)$  through time. As expected, this function is almost a straight line, which implies a constant harvested volume during the entire planning horizon, that is, a practically perfect even-flow.

From previous results we are in a position to formulate, analyze and solve multi-objective optimization problems (MOP) dealing with profitability (NPV or SEV), sustainability (even-flow) and also non-spatial and spatial constraints.

## 9. Apéndice 1



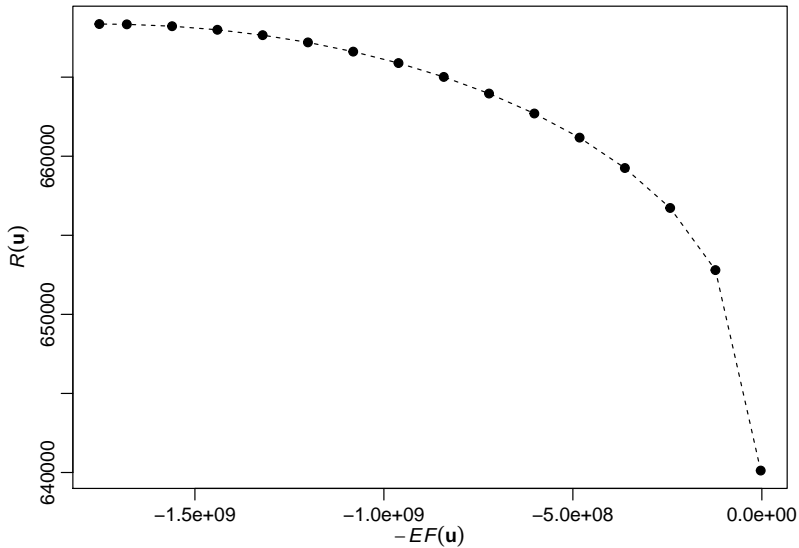
**Figure 3:** Accumulated volume obtained —step function— and theoretical accumulated volume —straight line— corresponding to the solution of problem (8) for the case study.

This will be the topic of an ongoing research, but for advancing how the new metric works in a simple MOP, we have solved problem (1) in this case study, taking NPV as indicator of revenues. Specifically, we consider

$$R(\mathbf{u}) = p \sum_{j=1}^{N_R} \frac{V_j(t_j)}{(1+0.01r)^{t_j}} - c_r \sum_{j=1}^{N_R} \frac{A_j}{(1+0.01r)^{t_j}},$$

where  $r$  (%) is the annual discount rate,  $p$  (€/m<sup>3</sup>) is the expected sale price of wood, and  $c_r$  (€/ha) is the regeneration cost. Then, we solve problem (1) by the weighting method, using a five random multi-start of the L-BFGS-B algorithm for solving the single optimization problems. The computation time for this experiment was 165 seconds, and the Pareto frontier obtained is shown

in Fig. 4. As can be seen, the results are very encouraging and the new metric seems to work very well with this type of multi-objective problems.



**Figure 4:** Pareto frontier for problem (1) in this case study.

## 9.5. Conclusions

In this work we analyze mathematically a new metric for measuring even-flow in forest management planning, obtaining an explicit expression of the partial derivatives of the new function. Besides, in the study of a real case, we compare different numerical methods to try to optimize the even-flow. We want to highlight:

- In comparison with the classical way of measuring even-flow the new metric works well with continuous decision variables. The solution ob-

## 9. Apéndice 1

tained provides a clearcut age for each stand. This implies that the treatments that should be applied to each stand are completely ordered.

- The fact that the even-flow function has partial derivatives allows the use of gradient-type methods for its optimization. If we use the partial derivatives function obtained in this work, these methods are much more efficient, effective and robust than the gradient-free methods generally applied in forestry.
- In this paper we analyze a simplified, single-objective forestry problem: the even-flow maximization. We solve the problem in a relatively small (51 stands) forest of *Eucalyptus globulus* Labill. and observe that the new metric proposed for measuring even-flow works very well with gradient-type methods. The performance of this combination (new metric and optimization with derivatives) is expected to improve as the forest size (the number of decision variables) increases, but this will be analyzed in a forthcoming paper.
- We use this new metric to deal with a simple multi-objective problem, and the results are very encouraging. From now on, we are in a position to study complex multi-objective optimization problems, including also non spatial and spatial constraints, using the Unit Restriction Model as well as the Area Restriction Model (see Murray, 1999). This will be the topic of an ongoing research which is going to be considered for publication in the near future.
- The metric analyzed in this paper enables gradient-type methods for solving the multi-objective problems that can be formulated in forest planning. This would allow forest-level problems to be treated with continuous variables, as has been done in recent decades with stand-level problems.
- The proposed metric as indicator of even-flow is not exclusive of forestry, but it can be applied to any other problem in which revenues/costs are computed at specific instants (see, for example, Dan et al., 2019).

## 9.6. References

- Adams, R.A. (1975). *Sobolev spaces*. Academic Press.
- Álvarez-Miranda, E., Garcia-Gonzalo, J., Ulloa-Fierro, F., Weintraub, A., & Barreiro, S. (2018). A multicriteria optimization model for sustainable forest management under climate change uncertainty: An application in Portugal. *European Journal of Operational Research*, 269(1):79–98.
- Arias-Rodil, M., Diéguez-Aranda, U., & Vázquez-Méndez M.E. (2017). A differentiable optimization model for the management of single-species, even-aged stands. *Canadian Journal of Forest Research*, 47(4):506–514. <https://doi.org/10.1139/cjfr-2016-0237>.
- Baskent, E.Z. (2001). Combinatorial optimization in forest ecosystem management modeling. *Turkish Journal of Agriculture and Forestry*, 25(3):187–194.
- Bettinger, P., Boston, K., Siry, J.P., & Grebner, D.L. (2009). *Forest management planning*. Academic Press.
- Brumelle, S., Granot, D., Halme, M., & Vertinsky, I (1998). A tabu search algorithm for finding good forest harvest schedules satisfying green-up constraints. *European Journal of Operational Research*, 106(2-3):408–424.
- Constantino, M., & Martins, I. (2018). Branch-and-cut for the forest harvest scheduling subject to clearcut and core area constraints. *European Journal of Operational Research*, 265(2):723–734.
- Curtis, F.H. (1962). Linear programming the management of a forest property. *Journal of Forestry*, 60(9):611–616.
- Dan, H., Yamamoto, A., Tanaka-Kanekiyo, H., Sutoh A., Maruyama, O., & Satoh, T. (2019). Optimal scheduling of tunnel inspection and monitoring for leveling yearly budget. In H.C. Rodrigues et al. (Eds.), *EngOpt 2018 Proceedings of the 6th International Conference on Engineering Optimization* (pp.1458-1469). Switzerland: Springer Nature.
- Diaz-Balteiro, L., González-Pachón, J., & Romero, C (2016). Measuring systems sustainability with multi-criteria methods: A critical review. *European Journal of Operational Research*, 258(2):607–616.

## 9. Apéndice 1

- Ducheyne, E.I., De Wulf, R.R., & De Baets, B. (2004). Single versus multiple objective genetic algorithms for solving the even-flow forest management problem. *Forest Ecology and Management*, 201(2-3),259–273.
- García-Villabrille, J.D. (2015). *Modelización del crecimiento y la producción de plantaciones de Eucalyptus globulus Labill. en el noroeste de España*. Tesis Doctoral, Universidade de Santiago de Compostela.
- Hann, D.W., & Brodie, J.D. (1980). Even-aged management: Basic managerial questions and available or potential techniques for answering them, *USDA Forest Service*, General Technical Report INT-83.
- Helms, J.A. (ed.) (1998). *The dictionary of forestry*. Society of American Foresters, Bethesda, MD.
- Johnson, K.N., & Scheurman, H.L. (1977). Techniques for Prescribing Optimal Timber Harvest and Investment Under Different Objectives—Discussion and Synthesis. *Forest Science*, 23(1):1–32.
- Jones, E., Oliphant, T., Peterson, P., & others (2001–). SciPy: Open Source Scientific Tools for Python, available on-line at <http://www.scipy.org/>
- Murray, A.T. (1999). Spatial Restrictions in Harvest Scheduling. *Forest Science*, 45(1):45–52.
- Nautiyal, J.C., & Pearse, P.H. (1967). Optimizing the Conversion to Sustained Yield Programming Solution. *Forest Science*, 13(2):131–139.
- Nocedal, J., & Wright, S.J. (1999). *Numerical Optimization*. New York: Springer-Verlag.
- Roise, J.P. (1990). Multicriteria Nonlinear Programming for Optimal Spatial Allocation of Stands. *Forest Science*, 36(3):487–501.
- Schwartz, L. (1966). *Théorie des distributions*. Paris: Hermann.
- Smith, D.M., Larson, B.C., Kelty, M.J., & Ashton, P.M.S. (1997). *The practice of silviculture: Applied forest ecology*. (9th ed.). John Wiley & Sons, Inc.
- Storn, R., & Price, K. (1997). Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11(4):341–359.

## 9.6. References

Zhu, C., Byrd, R.H., & Nocedal, J. (1997). L-BFGS-B: Algorithm 778: L-BFGS-B, FORTRAN routines for large scale bound constrained optimization. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 23(4):550–560.



## APÉNDICE 2

### Simultaneous optimization of even flow and land and timber value in forest planning: a continuous approach

José M. González-González<sup>1</sup>  
Miguel E. Vázquez-Méndez<sup>2</sup>  
Ulises Dieguéz-Aranda<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> Unidad de Gestión Forestal Sostenible, Departamento de Enxeñaría Agroforestal, Universidade de Santiago de Compostela. Escola Politécnica Superior de Enxeñaría, R/ Benigno Ledo, 27002 Lugo, Spain. E-mail addresses: josemario.gonzalez@usc.es, ulises.dieguéz@usc.es

<sup>2</sup> Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela. Escola Politécnica Superior de Enxeñaría, R/ Benigno Ledo, 27002, Lugo, Spain.  
E-mail adress: miguelernesto.vazquez@usc.es

\* Corresponding author

Forest Ecosystems, 8:48.(2021)

DOI: 10.1186/s40663-021-00325-9

#### Abstract

- **Background.** Forest management planning involves deciding which silvicultural treatment should be applied to each stand and at what time to best meet the objectives established for the forest. For this, many mathematical formulations have been proposed, both within the linear and non-linear programming frameworks, in the latter case generally considering integer variables in a combinatorial manner. We present a novel approach for planning the management of forests comprising single-species, even-aged stands, using a continuous, multi-objective formula-

## 10. Apéndice 2

tion (considering economic and even flow) which can be solved with gradient-type methods.

- **Results.** The continuous formulation has proved robust in forest with different structures and different number of stands. The results obtained show a clear advantage of the gradient-type methods over heuristics to solve the problems, both in terms of computational time (efficiency) and in the solution obtained (effectiveness). Their improvement increases drastically with the dimension of the problem (number of stands).
- **Conclusions.** It is advisable to rigorously analyze the mathematical properties of the objective functions involved in forest management planning models. The continuous bi-objective model proposed in this paper works with smooth enough functions and can be efficiently solved by using gradient-type techniques. The advantages of the new methodology are summarized as: it does not require to set management prescriptions in advance, it avoids the division of the planning horizon into periods, and it provides better solutions than the traditional combinatorial formulations. Additionally, the graphical display of trade-off information allows an a posteriori articulation of preferences in an intuitive way, therefore being a very interesting tool for the decision-making process in forest planning.

**Keywords:** Even-aged forest management, Forest-level optimization, Continuous optimization, Gradient-type algorithms.

### 10.1. Background

A forest can be considered a set of stands, which are contiguous communities of trees sufficiently uniform in composition, age-class distribution and site quality, to distinguish each community from its adjacent ones (Helms, 1998). In forest planning, decision-making processes often use optimisation approaches for developing optimal harvest schedules that will best meet the objectives of the landowners or land managers (Kaya et al., 2016). The main

issue consists in determining when (and how) to harvest each stand during the planning horizon (next  $P$  years), to achieve the proposed objectives. To formulate this problem, it is necessary to have a simulator that allows predicting the development of forest stands efficiently and accurately. In the last decades, many papers have been devoted to this topic (see, for instance García (1994), Castedo-Dorado et al. (2007), Álvarez-González et al. (2010)), and for any well-know species can be assumed that output functions are available, given, for example, the timber volume  $V_j(y)$  (volume/area) of the stand  $j$  along the time. To clearly show the novelty and interest of this work, we begin by analyzing different formulations of the forest planning problem in the optimization framework. For simplicity, we assume that maximizing timber volume is the main objective. Without any additional hypothesis, denoting  $A_j$  the area of stand  $j$ , the problem is to determine the harvest rate  $h_j^r(y)$  (area/time) of each stand over time (Heaps (1984, 2015)), such that

$$\begin{aligned} \text{máx } J^V(\mathbf{h}^r) &= \sum_j \int_0^P V_j(y) h_j^r(y) dy \\ \text{subject to } h_j^r(y) &\geq 0, \int_0^P h_j^r(y) dy = A_j. \end{aligned} \quad (1)$$

Although this formulation is quite simple, the decision variable  $\mathbf{h}^r = (h_j^r)_j$  is a vector function defined on  $[0, P]$ , which makes the problem not easy to solve. For this reason, it was originally thought to assume that: **(H1)** interventions (cuts) on each stand  $j$  are instantaneous, at instants  $y_j^k$  set in advance (generally at the beginning, middle or end of the periods in which the planning horizon  $[0, P]$  is divided). Hypothesis H1 is equivalent to assume that  $h_j^r(y) = \sum_k A_{jk} \delta(y - y_j^k)$ , being  $A_{jk}$  the area of stand  $j$  cut at intervention  $k$ , and  $\delta(y)$  the Dirac's delta function (Oldham et al., 2009, Ch. 9). Under this hypothesis, problem (1) changes to find matrix  $\mathbf{A} = (A_{jk})$  such that

$$\begin{aligned} \text{máx } J^V(\mathbf{A}) &= \sum_j \sum_k V_j(y_j^k) A_{jk} \\ \text{subject to } A_{jk} &\geq 0, \sum_k A_{jk} = A_j. \end{aligned} \quad (2)$$

## 10. Apéndice 2

Taking the proportion of stand  $j$  cut at intervention  $k$  ( $x_{jk} = A_{jk}/A_j$ ) as the new decision variable, this problem is writing as

$$\begin{aligned} \text{máx } J^V(\mathbf{X}) &= \sum_j \sum_k A_j V_j(y_j^k) x_{jk} \\ \text{subject to } &x_{jk} \in [0, 1], \sum_k x_{jk} = 1, \end{aligned} \quad (3)$$

which is the the so-called ‘Model I’ linear programming (LP) problem (Johnson & Scheurman, 1977). It is widely used when the spatial location of the cutting areas must not be considered, can be exactly solved with the simplex method (e.g., Curtis, 1962), and also with the reduced cost (RC) approach, which produces optimal, near-feasible solutions in a cheap and simple way (Hoganson & Rose, 1984). If it is necessary to consider that location, an additional hypothesis must be assumed: **(H2)** the whole stand  $j$  can only be cut in a single instant  $y_j$  (harvest instant). This hypothesis transforms the continuous variables  $x_{jk}$  into binary variables ( $x_{jk} = 1$  if and only if  $y_j = y_j^k$ ), and (3) is changed into the combinatorial problem

$$\begin{aligned} \text{máx } J^V(\mathbf{X}) &= \sum_j \sum_k A_j V_j(y_j^k) x_{jk} \\ \text{subject to } &x_{jk} \in \{0, 1\}, \sum_k x_{jk} = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Within the framework of the binary linear programming (BLP), the exact solution of (4) can be obtained by the branch and bound or cutting plane methods, as long as the problem does not exceed a certain relatively small dimension (e.g., Bettinger et al., 1999). For large problems, a spatial application of the RC method can be also useful (Pukkala et al., 2009). Additionally, problem (4) also accepts a combinatorial formulation in the frame of non-linear integer programming (NLIP), by considering the harvest instants  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n_s})$  as

the decision variables. In this case, (4) is equivalent to find vector  $\mathbf{y}$  such that

$$\begin{aligned} \text{máx } J^V(\mathbf{y}) &= \sum_j A_j V_j(y_j) \\ \text{subject to } y_j &\in \{y_j^k\}_k. \end{aligned} \quad (5)$$

This formulation is more appropriate if a heuristic method is used to solve the problem (which generates a solution within a reasonable amount of time, although of uncertain quality —(Davis et al., 2001, p. 741), (Bettinger et al., 2009, p. 172)—).

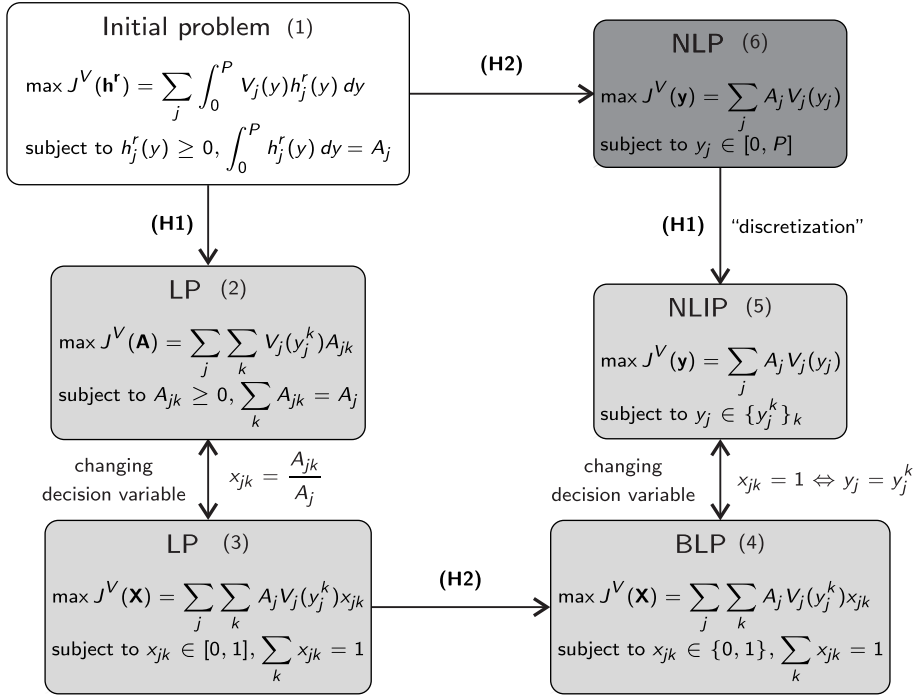
If hypothesis H1 is not considered, then H2 is equivalent to assume that  $h_j^r(y) = A_j \delta(y - y_j)$ , and without any additional assumption, problem (1) changes into the following non-linear problem (NLP)

$$\begin{aligned} \text{máx } J^V(\mathbf{y}) &= \sum_j A_j V_j(y_j) \\ \text{subject to } y_j &\in [0, P]. \end{aligned} \quad (6)$$

Now, hypothesis H1 can be understood as a discretization of the continuous variable of this NLP, and if it is assumed (what may be necessary if the dimension of the problem —number of stands—, is high and the available methods do not work in a reasonable time), problem (6) becomes straightly the previous NLIP problem (5). Equivalences and transformations between all these formulations are summarized in Figure 1.

Problems (3)-(6) can be improved by considering more sophisticated goals, such as land and timber value (LTV). They can also be completed with additional objectives and/or constraints related to even flow of products (EF), size of contiguous area harvested (spatial constraints), etc. There are many papers dealing with models based on formulations (3)-(5), and Table 1 includes some examples classified by the formulation type, and the objectives and constraints considered. On the contrary, due to the inheritance of the original LP formulation, and to the apparent absence of suitable methods for numerical resolution, models based on the continuous formulation given in problem (6) have been much less explored (see, for instance, Roise (1990)). The aim of this work is

## 10. Apéndice 2



**Figura 1:** Equivalences and transformations between different formulations of the forest planning basic problem (harvest scheduling problem).

to help fill this gap in the forestry literature, by presenting a novel continuous bi-objective model in forest planning.

In recent papers, Arias-Rodil et al. (2017) and González-González et al. (2020) presented rigorous mathematical analysis of two continuous metrics for measuring, respectively, land expectation value (LEV) and EF. In this work, without losing their good properties for working with gradient-type methods, these metrics are appropriately modified to deal with the scheduling harvest problem of a forest, assuming future rotations based on economically optimal management prescriptions at stand level. These modifications include a novel

## 10.1. Background

**Table 1:** Literature review: some references dealing with optimization models for forest planning. They are grouped by the formulation type and classified according to the objectives and constraints considered.

Formulation type	Authors	Objectives			Constraints		
		Economic	Volume	Other	EF	Spatial	Other
LP	Curtis (1962)		•		•		
	Johnson & Scheurman (1977)	•			•		•
	Hoganson & Rose (1984)	•			•		
	Diaz-Balteiro (1998)	•	•	•	•		
	Baskent et al. (2008)	•		•	•		•
	Borges et al. (2014)	•	•		•		
BLP	McDill et al. (2002)	•			•	•	•
	Rebain & McDill (2003)	•			•	•	•
	Zhang et al. (2011)	•			•		•
	Neto et al. (2017)	•			•	•	
	Gharbi et al. (2019)	•			•	•	•
NLIP	Hof & Joyce (1992)		•	•		•	•
	Bettinger et al. (1997)			•		•	
	Boston & Bettinger (1999)			•	•	•	
	Murray (1999)	•			•	•	
	Bettinger et al. (2002)			•	•		•
	Ducheyne et al. (2004)	•		•			

way to estimate the planning horizon in an automatic manner, and the possibility that a stand is harvested several times. The combination of these new metrics leads to a bi-objective model, which can be efficiently solved by using gradient-type techniques, does not require to set management prescriptions in advance, and avoids the division of the planning horizon into periods, therefore resulting an useful tool for the decision-making processes in forest planning.

The paper is organized as follows. In Section 10.2, the new metrics are detailed in a suitable mathematical framework, and the forest planning problem is formulated by means of the new continuous bi-objective model, which is studied from a cooperative point of view, proposing a numerical method to obtain its Pareto-optimal frontier. The efficiency and accuracy of the numerical method is shown in Section 11.3, where results in some *Eucalyptus globulus* Labill. forests are presented and discussed. Finally, some interesting conclusions are summarized in Section 11.4.

## 10. Apéndice 2

### 10.2. Methods

#### 10.2.1. Mathematical framework

To formulate the forest planning problem, we need a growth simulator which allows prediction of stands development. To that end, we used the dynamic systems-based framework (frequently referred to as “state-space” approach), first used in forestry by García (1994). Particularly, our approach is based on:

- (i) Each stand  $j$  is characterized by three state variables: mean height of dominant trees in the stand ( $H_j$ , in meters), number of stems per hectare ( $N_j$ ), and stand basal area ( $G_j$ , in  $\text{m}^2/\text{ha}$ ).
- (ii) Outputs can be obtained from the predicted values of these state variables. For example, the timber volume (in  $\text{m}^3/\text{ha}$ ) is given by a known species-specific function  $v_j(H, N, G)$ .

We denote by  $n_s$  the number of forest stands, and for each stand  $j$  we assume to know its age at inventory ( $t_j^0$ , in years), area ( $A_j$ , in hectares) and measurements, at age  $t_j^0$ , of the state variables ( $H_j^0$ ,  $N_j^0$  and  $G_j^0$ ). In addition, we also assume to know species-specific transition functions  $h_j$ ,  $n_j$  and  $g_j$  given, from the previous data, the state variables at any age  $t \geq 0$ . That is, the state variables are given by  $H_j(t) = h_j(t_j^0, H_j^0, t)$ ,  $N_j(t) = n_j(t_j^0, N_j^0, t)$  and  $G_j(t) = g_j(t_j^0, G_j^0, t)$ .

To avoid confusion, it is important to distinguish between stand age, denoted by  $t$ , and the time from the beginning of the planning horizon (inventory), which is denoted by  $y$ . Both are given in years, and if the age of a stand at inventory is  $t_0$ , then  $y = t - t_0$ . Particularly, if stand  $j$  is clearcut at time  $y_j$  (when it is  $t_j = y_j + t_j^0$  years old), the timber volume is given by  $V_j(y_j) = v_j(H(t_j), N(t_j), G(t_j))$ . The ultimate objective of forest planning is to determine the management prescription that will be applied to each stand.

In this study, to alleviate notation, we seek only the times of clearcutting from the inventory, that is, the decision vector  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n_s}) \in \mathbb{R}^{n_s}$ . Obviously, finding  $\mathbf{y}$  is equivalent to finding  $\mathbf{t} = \mathbf{y} + \mathbf{t}^0$ .

### 10.2.2. Economic metric: the land and timber value (LTV)

The economic value of the forest is the sum of the value of each stand  $j$ , which depends on:

- (i) The timber value at the first clearcutting, given by  $p_j V_j(y_j)$ , being  $p_j$  the expected stumpage price.
- (ii) The land expectation value (LEV), which accounts for all future rotations of timber that will be grown on the area after clearcutting the existing stand. The LEV is defined as the present value, per unit area, of the projected costs and revenues from an infinite series of identical even-aged forest rotations, starting initially from bare land (Bettinger et al., 2009, pp. 40-42). It only depends on the future rotation age, hereafter  $\bar{t}_j$ , and is given by

$$J_j^{LEV}(\bar{t}_j) = \frac{(1+r)^{\bar{t}_j} (R_j(\bar{t}_j) - C_j(\bar{t}_j))}{(1+r)^{\bar{t}_j} - 1},$$

where  $r \in (0, 1]$  is the interest rate, and  $R_j(\bar{t}_j)$  and  $C_j(\bar{t}_j)$  represent, respectively, functions of present values of revenues and costs.

The land and timber value (LTV) can be defined as the present value of the sum of the timber value at the first clearcutting and the LEV just after clearcutting. For each stand  $j$ , it depends not only on the time of the first clearcutting ( $y_j$ ), but also on the future rotation age ( $\bar{t}_j$ ). We only seek for  $y_j$  and, consequently,  $\bar{t}_j$  has to be set in advance. We assume future rotations based on the optimal management prescription at stand level, in such a way that  $\bar{t}_j$  is the

## 10. Apéndice 2

solution of the following optimization problem

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && J_j^{LEV}(t) \\ & \text{subject to} && t \geq 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Under this assumption, the LTV of the forest is given by

$$J^{LTV}(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n_s} J_j^{LTV}(y_j) = \sum_{j=1}^{n_s} \frac{p_j V_j(y_j) + J_j^{LEV}(\bar{t}_j)}{(1+r)^{y_j}}.$$

The regularity properties of  $J^{LTV}$  are given by the properties of functions  $h_j$ ,  $n_j$ ,  $g_j$  and  $v_j$ , and we can assume that it is smooth enough (Arias-Rodil et al., 2017).

### 10.2.3. Even flow (EF) metric

Even flow (EF) and sustained yield are two of the oldest objectives of forest management. The first has been related to the concept of maintaining a stable timber supply (nowadays provisioning ecosystem services) through appropriate forest planning and management techniques. There are numerous examples of how to address the even flow issue in harvest scheduling. Some studies use constraints that ensure volume levels in each period within some upper and lower limits (O'Hara, 1989; Murray & Church, 1995) or that allow a certain variation in volume between periods (McDill et al., 2002; Constantino et al., 2008), while others include even flow as an objective in which volume variations between periods should be minimized (Kao & Brodie, 1979; Brumelle et al., 1998; Ducheyne et al., 2004).

In this study we recover the concept of harvest rate (now volume/time) and seek for a constant rate during a period of  $T$  years, named tentative planning horizon for even-flow. It represents the period for which, clearcutting all stands at least once time, a stable timber supply is desired. The value of  $T$  is a technical decision, which depends on the species, site qualities, stand ages... of the forest.

We consider that interventions may not begin at the present time if, for example, the forest is too young. We denote by  $l_j > 0$ , in years, the minimum harvest age for each stand  $j$ , in such a way that  $t_j \geq l_j$  should be verified. From these bounds, the instant  $a \geq 0$  (years) when harvests can begin in the forest is given: it will be zero if any stand can be harvested now, otherwise it will be the minimum time guaranteeing  $t_j \geq l_j$ . Specifically:

$$a = \begin{cases} \min_j \{l_j - t_j^0\} & \text{if } l_j - t_j^0 \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n_s, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then, a constant harvest rate is seek in the forest during the period  $[a, a + T]$ , but harvest instants ( $y_j$ ) can be greater than  $a + T$  if it is good from an economic point of view. The admissible set of planning strategies is given by

$$Y^{ad} = \{y \in \mathbb{R}^{n_s}, \text{ such that, for all } j = 1, \dots, n_s \\ \max\{0, l_j - t_j^0\} \leq y_j \leq \max\{a + T, y_j^*\}\},$$

where  $y_j^*$  is the best management prescription from an economic point of view, that is, the solution of problem

$$\begin{aligned} & \text{maximize } J_j^{LTV}(y) \\ & \text{subject to } y \geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Taking into account that a management prescription can be greater than  $a + T$ , and assuming that all stands have to be harvested at least once during the planning horizon, its upper limit must be automatically computed by

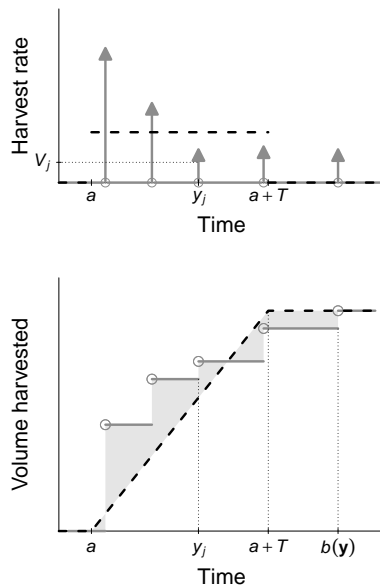
$$b(y) = \max\{a + T, y_1, \dots, y_{n_s}\}.$$

We assume that the best EF corresponds with the following situation: all stands are harvested at least one time in the period  $[a, a + T]$ , and the harvest rate for this period is constant. If we allow to cut each stand only once during the

## 10. Apéndice 2

planning horizon  $[a, b(\mathbf{y})]$ , the total harvested volume is  $\sum_{j=1}^{n_s} V_j(y_j)$ . However, we assume that future rotations will be based on the optimal rotation at stand-level, and consequently, it is possible that any stand must be cut more than once during the planning horizon. In this situation, the total harvested volume is

$$\sum_{j=1}^{n_s} \left( V_j(y_j) + \sum_{k \geq 1} V_j(\bar{t}_j) H(b(\mathbf{y}) - (y_j + k\bar{t}_j)) \right),$$



**Figura 2:** Example of harvest rate (top) and volume harvested (bottom). The grey solid lines represent real instant harvests (top, Eq. (10)) and real volumes harvested (bottom, Eq. (12)), while the black dashed lines represent goal harvest rate functions (top, Eq. (9)) and goal volume harvested functions (bottom, Eq. (11)).

and the desired harvest rate is

$$m(\mathbf{y}) = \frac{\sum_{j=1}^{n_s} \left( V_j(y_j) + \sum_{k \geq 1} V_j(\bar{t}_j) H(b(\mathbf{y}) - (y_j + k\bar{t}_j)) \right)}{T},$$

where  $H(y)$  is the Heaviside function (Oldham et al., 2009, Ch. 9). Therefore, from the EF point of view, the objective is to achieve the next goal harvest rate function (see Figure 2)

$$\frac{\partial V^g}{\partial y}(\mathbf{y}, y) = \begin{cases} m(\mathbf{y}) & \text{if } y \in [a, a + T], \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (9)$$

Assuming instant harvests, the real harvest rate must be written in terms of the Dirac delta  $\delta(y)$ . Specifically, it is given by (see Figure 2)

$$\frac{\partial V}{\partial y}(\mathbf{y}, y) = \sum_{j=1}^{n_s} \left( V_j(y_j) \delta(y - y_j) + \sum_{k \geq 1} V_j(\bar{t}_j) \delta(y - (y_j + k\bar{t}_j)) \right). \quad (10)$$

The Dirac delta is not a function in the traditional sense, so the comparison between expressions (9) and (10) is not appropriate. Instead of comparing harvest rates we propose to compare the volumes harvested (goal and real), which are obtained by integrating those expressions (9) and (10):

$$V^g(\mathbf{y}, y) = \int_0^y \frac{\partial V^g}{\partial \tau}(\mathbf{y}, \tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq y \leq a, \\ m(\mathbf{y})(y - a) & \text{if } a \leq y \leq a + T, \\ m(\mathbf{y})T & \text{if } y \geq a + T, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} V(\mathbf{y}, y) &= \int_0^y \frac{\partial V}{\partial \tau}(\mathbf{y}, \tau) d\tau \\ &= \sum_{j=1}^{n_s} \left( V_j(y_j) H(y - y_j) + \sum_{k \geq 1} V_j(\bar{t}_j) H(y - (y_j + k\bar{t}_j)) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

The EF metric must measure the distance between both functions for the

## 10. Apéndice 2

planning horizon  $[a, b(\mathbf{y})]$ . By using the associated distance to the  $L^2$  norm (Adams, 1975), for any planning strategy  $\mathbf{y} \in Y^{ad}$ , it is given by

$$J^{EF}(\mathbf{y}) = - \int_a^{b(\mathbf{y})} (V(\mathbf{y}, y) - V^g(\mathbf{y}, y))^2 dy,$$

where the minus sign is included precisely so that a higher value of  $J^{EF}(\mathbf{y})$  corresponds to a greater similarity of the function  $V(\mathbf{y}, \cdot)$  to the goal function  $V^g(\mathbf{y}, \cdot)$ , which is what is meant by a higher even flow.

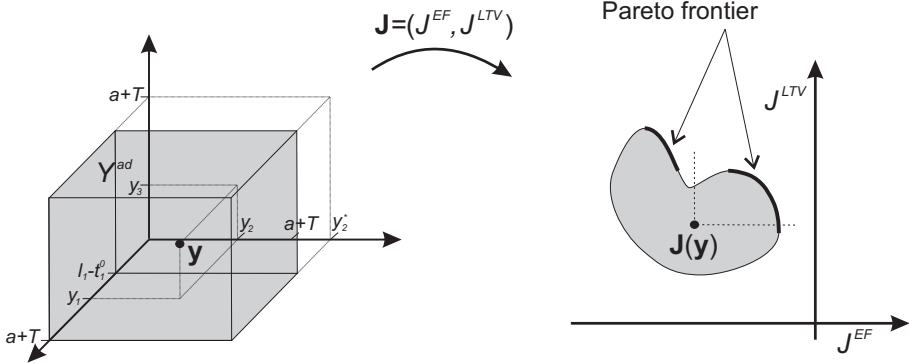
Following González-González et al. (2020), it can be proved that function  $J^{EF}$  has continuous derivatives in almost all points, and an explicit expression for its gradient can be obtained.

### 10.2.4. Bi-objective model

In this work, it is assumed that the main goal of forest planning is to determine the management prescriptions to be applied to each stand (i.e., to determine  $\mathbf{y} \in Y^{ad}$ ) to get the best profitability (i.e., to maximize  $J^{LTV}$ ) with the highest possible even flow (i.e., to maximize  $J^{EF}$ ). Hence, the following Bi-objective Optimization Problem (BOP) is considered:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \mathbf{J}(\mathbf{y}) = (J^{EF}(\mathbf{y}), J^{LTV}(\mathbf{y})) \\ & \text{subject to} && \mathbf{y} \in Y^{ad}. \end{aligned} \tag{13}$$

This problem must be studied from a cooperative point of view, looking for non-dominated admissible vectors, also known as efficient solutions or Pareto optima. An admissible vector  $\mathbf{y} \in Y^{ad}$  is said dominated if there exists a better admissible vector, in the sense that it improves at least one objective, without making the other worse. If  $\mathbf{y} \in Y^{ad}$  is non-dominated (Pareto optimum), the corresponding objective vector  $\mathbf{J}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2$  is also known as Pareto-optimal, and the set of Pareto-optimal objective vectors is known as Pareto frontier (see Figure 2). A more detailed definition can be seen, for instance, in (Miettinen, 1998, p. 11). As commented above, the final aim is to determine the management prescription to be applied to each stand. Therefore, a satisfactory solution



**Figura 3:** Example of an admissible set  $Y^{ad} \subset \mathbb{R}^3$  (corresponding with  $n_s = 3$ ) and an image set  $J(Y^{ad}) \subset \mathbb{R}^2$ , where the Pareto frontier is highlighted.

must be chosen within the set of Pareto optima. A satisfactory solution is the best compromise for the preferences of the decision maker. These preferences may be articulated prior to the analysis (allowing to reformulate the BOP into a single objective problem through weights or/and treating some objectives as constraints), after graphing the Pareto frontier, or interactively in a progressive way (requiring to compute only some Pareto optima) (Miettinen, 1998, pp. 61-65). In the next section we propose a numerical method for obtaining the set of Pareto optima and graphing the Pareto frontier. It allows to articulate preferences a posteriori, resulting in a very interesting tool for the decision-making process in forest planning.

### 10.2.5. Numerical resolution

The first step is to solve the single optimization problems (3), whose solutions are inputs for computing both metrics. The second step is to calculate the solutions of problems (8), which are necessary to determine the admissible set  $Y^{ad}$ . Functions  $J_j^{LEV}$  and  $J_j^{LTV}$  are smooth (they have the same regularity properties than functions  $h$ ,  $n$ ,  $g$  and  $v$ ), and problems (3) and (8) can be solved by any gradient-type method. In this work, the L-BFGS-B algorithm (Nocedal &

## 10. Apéndice 2

Wright, 2006), implemented in the free and open-source Python library SciPy 1.0 (Virtanen et al., 2020), was used.

Regarding BOP (11), to take advantage of the regularity properties of  $J^{LTV}$  and  $J^{EF}$ , we propose to obtain the Pareto frontier by the weighting method (Miettinen, 1998, pp. 78-84), solving each single-optimization problem by a gradient-type method, combined with a random multi-start if local minima are detected. It is also advisable to normalize the objective functions so that their objective values are of approximately the same magnitude. For the results presented in the next section, both objectives were normalized using the ideal objective vector (that obtained by maximizing each of the objective functions individually subject to the constraints of the problem) and an estimation of the nadir objective vector (given by the value of each objective function at the point where the other objective function reaches its maximum) (Miettinen, 1998, pp. 15-19), weights were taking equally spaced, and the L-BFGS-B algorithm was used again without any multi-start procedure. To check this approach, BOP (11) was also solved by the evolutionary algorithm NSGA-II (Deb et al., 2002), widely used in multi-objective optimization, and already implemented in the Python library Inspyred 1.0 (Tonda, 2020).

### 10.3. Results and discussion

We analyzed the usefulness of our approach in a real forest of *Eucalyptus globulus* Labill. located in the municipality of Xove (Galicia, NW Spain), considering a tentative planning horizon for even flow of  $T = 13.5$  years. The forest comprises  $n_s = 51$  stands whose area and inventory data can be seen in Table 2. From these data, the state variables until clearcutting are computed from the specific transition functions given by García-Villabrille (2015). Specifically:

$$- H_j(t) = h(t_j^0, H_j^0, t) = \exp\left(X(t_j^0, H_j^0) - \frac{\beta}{t^\alpha X(t_j^0, H_j^0)}\right), \text{ where}$$

### 10.3. Results and discussion

$\alpha = 0.5989$ ,  $\beta = 13.90$ , and

$$X(a, b) = 0.5a^{-\alpha} \left( a^{\alpha} \ln(b) + \sqrt{4\beta a^{\alpha} + (a^{\alpha} \ln(b))^2} \right). \quad (14)$$

$$- N_j(t) = n(t_j^0, N_j^0, t) = ((N_j^0)^{-0.5} + 1.995 \cdot 10^{-5} ((t)^2 - (t_j^0)^2))^{-2}.$$

$$- G_j(t) = g(t_j^0, G_j^0, t) = \exp \left( X(t_j^0, G_j^0) - \frac{\beta}{t^{\alpha} X(t_j^0, G_j^0)} \right), \text{ where}$$

$\alpha = 0.9906$ ,  $\beta = 21.16$ , and  $X(t_j^0, G_j^0)$  is given by (14).

From these state variables, the timber volume (m<sup>3</sup>/ha) is given by

$$v(H_j, N_j, G_j) = 0.6234 H_j^{0.8642} N_j^{-0.05978} G_j^{1.108}.$$

After clearcutting, we assume no changes on site quality (site index) and a constant plantation density of 1333 trees/ha for all stands. Under this hypotheses, by using an appropriate function for initializing the stand basal area (García-Villabrille, 2015), we predicted the data at one year after clearcutting (see Table 2). These data were used for computing the state variables (and outcomes) after the first clearcutting. To further test our approach in a forest with a different structure, we also used these data for simulating a hypothetical forest (hereinafter the simulated young forest) with 51 stands of the same species, area and site index, but all at one-year age.

## 10. Apéndice 2

**Tabla 2:** Inventory data and hypothetical predicted data at one year after clearcutting for the forest of the case study.  $A_j$ : stand area in hectares,  $t_j^0$ : stand age in years,  $H_j^0$ : dominant height in meters,  $N_j^0$ : number of trees per hectare,  $G_j^0$ : stand basal area in  $m^2/ha$ .

Stand	$A_j$	Inventory data				Predicted data			
		$t_j^0$	$H_j^0$	$N_j^0$	$G_j^0$	$t_j^0$	$H_j^0$	$N_j^0$	$G_j^0$
1	0.503	14	21.2	812	17.5	1	1.17	1331	0.019
2	0.569	14	21.2	812	17.5	1	1.17	1331	0.019
3	3.180	14	21.2	812	17.5	1	1.17	1331	0.019
4	2.171	17	29.5	1273	33.2	1	1.75	1331	0.109
5	2.320	30	26.5	522	22.9	1	1.06	1331	0.020
6	3.047	30	26.5	522	22.9	1	1.06	1331	0.020
7	0.823	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
8	2.231	17	29.5	1273	33.2	1	1.75	1331	0.109
9	1.425	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
10	0.645	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
11	1.342	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
12	0.362	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
13	0.544	13	23.2	622	14.9	1	1.42	1331	0.012
14	2.304	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
15	4.285	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
16	0.320	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
17	0.368	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
18	2.832	16	25.6	572	25.5	1	1.45	1331	0.052
19	3.008	16	25.6	572	25.5	1	1.45	1331	0.052
20	1.255	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
21	1.675	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
22	2.152	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
23	0.346	13	23.2	622	14.9	1	1.42	1331	0.012
24	1.264	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
25	2.202	16	25.6	572	25.5	1	1.45	1331	0.052
26	3.970	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
27	0.225	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
28	0.584	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
29	0.404	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
30	2.130	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
31	1.035	13	23.2	622	14.9	1	1.42	1331	0.012
32	1.913	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
33	2.639	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113

### 10.3. Results and discussion

Stand	$A_j$	Inventory data				Predicted data			
		$t_j^0$	$H_j^0$	$N_j^0$	$G_j^0$	$t_j^0$	$H_j^0$	$N_j^0$	$G_j^0$
34	1.009	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
35	2.086	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
36	2.967	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
37	3.926	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
38	2.215	8	19.1	1111	18.2	1	1.57	1331	0.057
39	1.618	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
40	1.514	16	27.2	1286	32.9	1	1.59	1331	0.113
41	3.540	17	29.5	1273	33.2	1	1.75	1331	0.109
42	3.816	17	29.5	1273	33.2	1	1.75	1331	0.109
43	4.016	17	29.5	1273	33.2	1	1.75	1331	0.109
44	4.273	17	29.5	1273	33.2	1	1.75	1331	0.109
45	1.973	14	21.2	812	17.5	1	1.17	1331	0.019
46	2.241	30	26.5	522	22.9	1	1.06	1331	0.020
47	0.223	13	23.2	622	14.9	1	1.42	1331	0.012
48	0.207	30	26.5	522	22.9	1	1.06	1331	0.020
49	0.818	13	23.2	622	14.9	1	1.42	1331	0.012
50	2.302	13	23.2	622	14.9	1	1.42	1331	0.012
51	1.995	13	23.2	622	14.9	1	1.42	1331	0.012

For the real forest of the case study, Figure 4 shows the Pareto fronts obtained with the weighting method and with the NSGA-II, for a population size of  $P=200$  individuals and  $G=500$  generations. Additionally, this figure also shows the comparison between real and goal volumes corresponding to all (ten) Pareto optima obtained with the weighting method. The corresponding results for the simulated young forest can be seen in Figure 5. In view of these results, it can be highlighted that:

- Both methods, although using different techniques, provide the same Pareto fronts, which warrants the appropriateness of our approach.
- The continuous approach works well for forest with very different stand structures, as suggested from the results of the real forest (which has many mature stands of different ages) and the simulated young forest (in which all stands are of the same age).

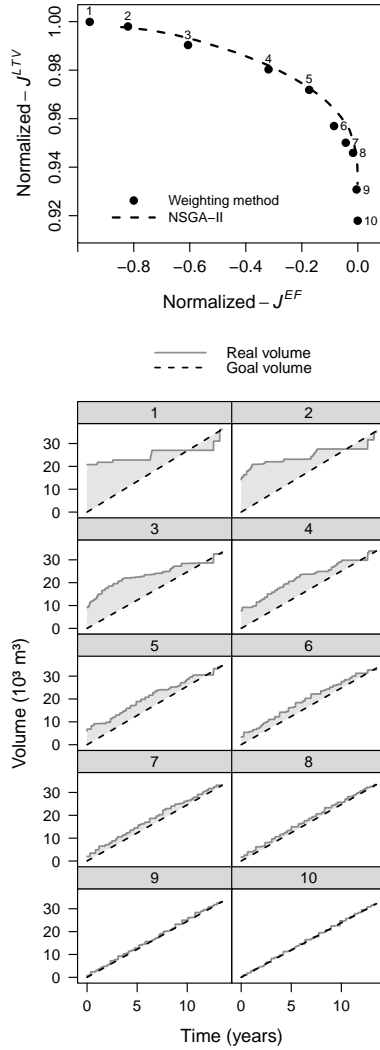
## 10. Apéndice 2

- Figures 4 and 5 are very useful for the decision-making process:
  - In the top graphs, the normalized- $J^{LTV}$  is  $J^{LTV} / J^{LTV}(\mathbf{y}^*)$ , i. e., the LTV divided by its best value. This way of proceeding allows an intuitive comparison of the different optimal management strategies: for the real forest, there was a reduction of about 8% in LTV between the best solutions from the economic and even flow perspectives (points 1 and 10 in the Pareto front, respectively), while for the simulated young forest it was of only 5%.
  - The even flow metric has not such an easy interpretation in terms of numerical values, but the grey area of the bottom graphs of the figures clearly indicates the achievement of the even flow objective as well as the moment in which the clearcuts are done. Additionally, these graphs also show the total harvest volume of each Pareto optimum, which is reduced as the even flow objective is improved.

Finally, to analyze our continuous approach in larger forests, we simulated two new hypothetical forests: one with 204 stands and other with 1632 stands. They were obtained by replicating the stands of the real forest 4 and 32 times, respectively, and randomly generating their area between the minimum and maximum real-area values. Then, we solved the problem on the simulated forest with 204 stands and observed that the weighting method captured the complete Pareto front in a very reasonable time (about half a minute), but the NSGA-II needed a greater number of generations than the previous experiments with the 51-stand forests and, consequently, a higher computation time. This fact was confirmed by the results obtained on the simulated forest with 1632 stands, where the weighting method kept providing the complete Pareto front in an acceptable time (about seven minutes), but the NSGA-II with  $G=2000$  generations only captured a small arc (see Figure 6), with a computation time of about eleven hours. Table 3 summarizes the computation time of all performed experiments.

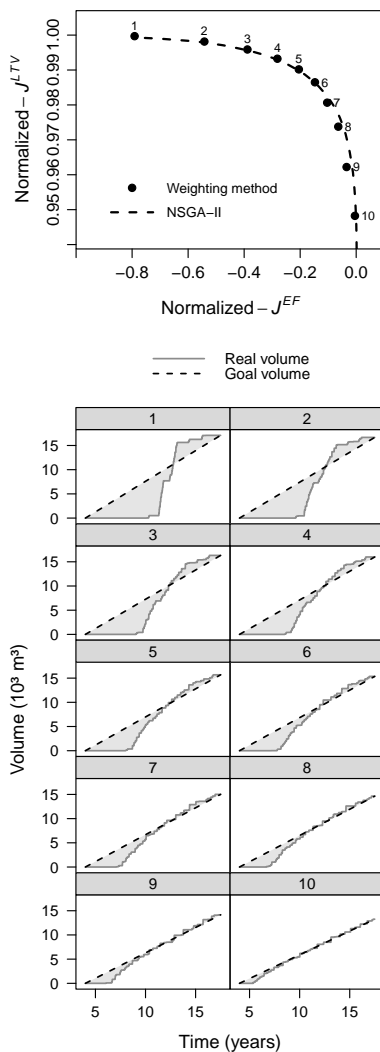
The use of non-linear continuous models to formulate the forest mana-

### 10.3. Results and discussion



**Figura 4:** Results for the real forest: normalized Pareto front obtained with the weighting method and the NSGA-II (top), and comparison between real and goal volumes for the points obtained with the weighting method (bottom).

## 10. Apéndice 2



**Figura 5:** Results for the simulated young forest: normalized Pareto front obtained with the weighting method and the NSGA-II (top), and comparison between real and goal volumes for the points obtained with the weighting method (bottom).

### 10.3. Results and discussion

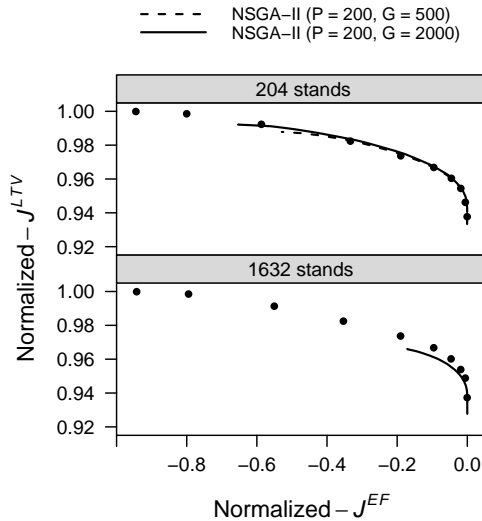
**Table 3:** Computation times (seconds) for obtaining the Pareto fronts shown in Figures 4, 5 and 6 on an Intel® Core™ i7 Processor 4 GHz iMac. Comparison, on forest with different structure or number of stands, between the weighting method and the NSGA-II with a population size of P=200 individuals and different number of generations (G).

	Weighting + L-BFGS-B	NSGA-II
Real forest (51 stands)	14	296 (G=500)
Simulated young forest (51 stands)	9	302 (G=500)
Simulated forest with 204 stands	36	1171 (G=500)
		5405 (G=2000)
Simulated forest with 1632 stands	449	39594 (G=2000)

gement problems has been scarce. In the framework of optimal control theory, Heaps (1984, 2015) studied the general problem of determining the harvest rate of each stand over time, but did not address with examples how the continuous forestry age class model he proposed could be solved numerically. Tahvonen (2004) discussed the use of discrete or continuous variables in describing time and age class structure in models for optimization of forest harvesting. Roise (1990) proposed and solved a continuous model, but without performing a mathematical analysis of the objective and constraint functions, applying optimization techniques that may not be the most adequate to solve the problem. On the contrary, the continuous model proposed in this paper uses functions with appropriate regularity properties, that guarantee a successful numerical resolution using gradient-type methods.

In this study we have dealt with a species whose main use is pulp production, therefore the land and timber value has been calculated on the basis of the stumpage price times the volume at the harvest instant. Nevertheless, for other species which require merchantable volume estimates, a more sophisticated method must be used. For example, in a study of optimization at stand level, Arias-Rodil et al. (2015) evaluated two alternative methods of estimating the merchantable volume of a stand at a given age: (i) a disaggregation system, which involves aggregating the merchantable volume previously predicted by

## 10. Apéndice 2



**Figura 6:** Normalized Pareto fronts obtained with the weighting method (●) and the NSGA-II, for two simulated forest comprising 204 stands (top) and 1632 stands (bottom). The Pareto fronts obtained with NSGA-II correspond with a population size of  $P=200$  individuals and a number of generations of  $G=500$  (dashed line) and  $G=2000$  (solid lines).

diameter classes, and (ii) a stand volume ration function. The latter considers a top diameter limit for classifying the volume by timber assortments, while the former also allows specification of long length requirements. The use of alternative (i) may cause discontinuities in the  $J^{LTV}$  function, which makes a gradient-based search challenging. However, alternative (ii) does not present any problem and, although will provide slightly higher optimal values of  $J^{LTV}$ , may even be more accurate (Arias-Rodil et al., 2016).

Our proposal provides a graphical tool to analyze the relationship (trade-off) between the two objectives, helping the landowners to choose a suitable weighting after seeing the effect of even-flow requirement on economic profitability. This methodology can include constraints and be extended to other

objectives, in pairwise comparison or considering three or more objectives. In the latter case, despite a posteriori techniques combined with special visualization methods have been used in forest management problems (Borges et al., 2014), interactive techniques can also be useful (Diaz-Balteiro, 1998). In any case, the features of the problem and the capabilities and type of the decision maker have to be considered before selecting the most appropriate solution method (Miettinen, 1998, pp. 227-231).

### 10.4. Conclusions

In this paper we present a novel continuous bi-objective model (economic vs. even flow) in forest planning. According to the results obtained, it is worth highlighting the following aspects:

- The planning horizon is not set in advance and only a tentative value is required. It is involved in the optimization process and obtained as an output of the model.
- The LTV and EF functions have smooth enough properties, which allows the use of gradient-type methods for its optimization, behaving in a more efficient, effective and robust way than many other gradient-free methods commonly applied in forestry.
- The continuous formulation does not require to set management prescriptions in advance and avoids the division of the planning horizon into periods, providing solutions which may be better than those obtained with traditional combinatorial formulations.
- This model allows forest-level problems to be treated with continuous decision variables, in a way similar to that used generally with stand-level problems. As envisaged in previous works, the performance of the continuous approach combined with gradient-type methods improved as the forest size (the number of decision variables) increased.

## 10. Apéndice 2

- With this approach, it is not necessary to articulate the preferences of the decision maker a priori. Furthermore, the graphical outputs of our numerical method provide the Pareto front and other useful trade-off information in an intuitive way, which makes the proposed continuous bi-objective model a very interesting tool for the decision-making process in forest planning.
- This model was successfully used in forests comprising single-species, even-aged stands which are intended to be managed with the rotation forest management system. The applicability of the model in forests with more complex structures and dynamics (forests consisting of mixed stands, which have gradual advance regeneration, and are treated with partial cuttings) is the topic of an ongoing research.

## 10.5. References

- Adams, R. (1975). Sobolev Spaces. (Academic Press,1975)
- Álvarez-González, J.G., Zingg, A. & von Gadow, K. (2010). Estimating growth in beech forests: a study based on long term experiments in Switzerland. *For. Sci.*, 67(3):307.
- Arias-Rodil, M., Barrio-Anta, M. & Diéguez-Aranda, U. (2016). Developing a dynamic growth model for maritime pine in Asturias (NW Spain): comparison with nearby regions. *Annals Of Forest Science*, 73(2):297–320.
- Arias-Rodil, M., Diéguez-Aranda, U. & Vázquez-Méndez, M.E. (2017). A differentiable optimization model for the management of single-species, even-aged stands. *Can. J. For. Res.*, 47(4):506–514.
- Arias-Rodil, M., Pukkala, T., González-González, J.M., Barrio-Anta, M. & Diéguez-Aranda, U. (2015). Use of depth-first search and direct search methods to optimize even-aged stand management: a case study involving maritime pine in Asturias (NW Spain). *Canadian Journal Of Forest Research*, 45(10):1269–1279.
- Baskent, E., Keles, S. & Yolasmaz, H. (2008). Comparing multipurpose fo-

## 10.5. References

- rest management with timber management, incorporating timber, carbon and oxygen values: A case study. *Scandinavian Journal Of Forest Research*, 23(2):105–120.
- Bettinger, P., Boston, K. & Sessions, J. (1999). Intensifying a heuristic forest harvest scheduling search procedure with 2-opt decision choices. *Canadian Journal Of Forest Research*, 29(11):1784–1792.
- Bettinger, P., Sessions, J. & Boston, K. (1997). Using Tabu search to schedule timber harvests subject to spatial wildlife goals for big game. *Ecological Modelling*, 94:11–123.
- Bettinger, P., Graetz, D., Boston, K., Sessions, J. & Chung, W. (2002). Eight Heuristic Planning Techniques Applied to Three Increasingly Difficult Wildlife Planning Problems. *Silva Fennica*, 36(2000):561–584.
- Borges, J., Garcia-Gonzalo, J., Bushenkov, V., McDill, M., Marques, S. & Oliveira, M. (2014). Addressing multicriteria forest management with Pareto frontier methods: an application in Portugal. *Forest Science*, 60(1):63–72.
- Boston, K. & Bettinger, P. (1999). An analysis of Monte Carlo integer programming, simulated annealing, and tabu search heuristics for solving spatial harvest scheduling problems. *Forest Science*, 45(2):292–301.
- Brumelle, S., Granot, D., Halme, M. & Vertinsky, I. (1998). A tabu search algorithm for finding good forest harvest schedules satisfying green-up constraints. *European Journal Of Operational Research*, 106(2-3):408–424.
- Castedo-Dorado, F., Diéguez-Aranda, U. & Álvarez-González, J. G. (2007). A growth model for *Pinus radiata* D. Don stands in north-western Spain. *Annals Of Forest Science*, 64(4):453–465.
- Constantino, M., Martins, I. & Borges, J. (2008). A New Mixed-Integer Programming Model for Harvest Scheduling Subject to Maximum Area Restrictions. *Operations Research*, 56(3):542–551.
- Curtis, F. (1962). Linear programming the management of a forest property. *Journal Of Forestry*, 60(0):611–616.
- Davis, L., Johnson, K., Bettinger, P. & Howard, T. (2001). Forest management:

## 10. Apéndice 2

To Sustain Ecological, Economic and Social Values. New York: McGraw-Hill. 804 pages.

- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S. & Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *Ieee Transactions On Evolutionary Computation*, 6(2):182–197.
- Diaz-Balteiro, L. (1998). Modeling Timber Harvest Scheduling Problems with Multiple Criteria : An Application in Spain. *For. Sci.*, 44(1).
- Ducheyne, E., De Wulf, R. & De Baets, B. . Single versus multiple objective genetic algorithms for solving the even-flow forest management problem. *For. Ecol. Manage.*, 201(2-3):259–273.
- García, O. (1994). The state-space approach in growth modelling. *Canadian Journal Of Forest Research*, 24(9):1894–1903.
- García-Villabrille, J. (2015). Modelización del crecimiento y la producción de plantaciones de *Eucalyptus globulus* Labill. en el noroeste de España. PhD thesis. Universidade de Santiago de Compostela.
- Gharbi, C., Rönnqvist, M., Beaudoin, D. & Carle, M. (2019). A new mixed-integer programming model for spatial forest planning. *Canadian Journal Of Forest Research*, 49(12): 1493–1503.
- González-González, J.M., Vázquez-Méndez, M.E. & Diéguez-Aranda, U. (2020). A note on the regularity of a new metric for measuring even-flow in forest planning. *Eur. J. Oper. Res.*, 282(3):1101–1106.
- Heaps, T. (1984). The forestry maximum principle. *J. Econ. Dyn. Control*, 7(2):131–151.
- Heaps, T. (2015). Convergence of optimal harvesting policies to a normal forest. *J. Econ. Dyn. Control*, 54:74–85.
- Helms, J. (1998). The dictionary of forestry. Society of American Foresters, Bethesda, MD.
- Hof, J. & Joyce, L. (1992). Spatial Optimization for Wildlife and Timber in Managed Forest Ecosystems. *Forest Science*, 38(3):489–508.
- Hoganson, H. & Rose, D. (1984). A Simulation Approach for Optimal Timber Management Scheduling. *Forest Science*, 30(1):220–238.

## 10.5. References

- Johnson, K. & Scheurman, H. (1977). Techniques for prescribing optimal timber harvest and investment under different objectives-Discussion and synthesis. *For. Sci. Monogr.* 18, 31.
- Kao, C. & Brodie, J. (1979). Goal programming for reconciling economic, even-flow, and regulation objectives in forest harvest scheduling. *Can. J. For. Res.*, 9(4):525–531.
- Kaya, A., Bettinger, P., Boston, K., Akbulut, R., Ucar, Z., Siry, J., Merry, K. & Cieszewski, C. (2016). Optimisation in forest management. *Current Forestry Reports*.
- Mcdill, M., Rebain, S. & Braze, J. (2002). Harvest Scheduling with Area-Based Adjacency Constraints. *For. Sci.*, 48(4):631–642.
- Miettinen, K. (1998). *Nonlinear multiobjective optimization*. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Murray, A. (1999). Spatial restrictions in harvest scheduling. *For. Sci.*, 45(1):45–52.
- Murray, A. & Church, R. (1995). Heuristic solution approaches to operational forest planning problems. *Or Spektrum*, 17(2-3):193–203.
- Neto, T., Constantino, M., Martins, I. & Pedroso, J. (2017). Forest harvest scheduling with clearcut and core area constraints. *Annals Of Operations Research*, 258(2):453–478.
- Nocedal, J. & Wright, S. (2006). Numerical optimization. (Springer,2006)
- O’Hara, A. (1989). Spatially constrained timber harvest scheduling. *Canadian Journal Of Forest Research*, 19:715–724.
- Oldham, B., Myland, J. & Spainer, J. (2009). *An Atlas of Functions*. New York: Springer-Verlag.
- Pukkala, T., Heinonen, T. & Kurttila, M. (2009). An application of a reduced cost approach to spatial forest planning. *Forest Science*, 55(1):13–22.
- Rebain, S. & Mcdill, M. (2003). A mixed-integer formulation of the minimum patch size problem. *Forest Science*, 49(4):608–618.
- Roise, J. (1990). Multicriteria nonlinear programming for optimal spatial allocation of stands. *For. Sci.*, 36(3):487–501.

## 10. Apéndice 2

- Tahvonen, O. (2004). Optimal harvesting of forest age classes: A survey of some recent results. *Mathematical Population Studies*, 11(3-4):205–232.
- Tonda, A. (2020). Inspyred: Bio-inspired algorithms in Python. *Genet. Program. Evolvable Mach.*, 21:269–272.
- Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., Haberland, M., Reddy, T., Cournapeau, D., Burovski, E., Peterson, P., Weckesser, W., Bright, J., Walt, S. J. van der, Brett, M., Wilson, J., Jarrod Millman, K., Mayorov, N., J Nelson, A. R., Jones, E., Kern, R., Larson, E., Carey, C. J., Polat, I., Feng, Y., Moore, E. W., VanderPlas, J., Laxalde, D., Perktold, J., Cimrman, R., Henriksen, I., Quintero, E. A., Harris, C. R., Archibald, A. M., Ribeiro, A. H., Pedregosa, F., & van Mulbregt, P. (2020). SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nat. Methods*, 17:261–272.
- Zhang, H., Constantino, M. & Falcão, A. (2011). Modeling forest core area with integer programming. *Annals Of Operations Research*, 190(1):41–55.

## APÉNDICE 3

### Multi-objective models for the forest harvest scheduling problem in a continuous-time framework

José M. González-González<sup>1</sup>  
Miguel E. Vázquez-Méndez<sup>2</sup>  
Ulises Dieguéz-Aranda<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> Unidad de Gestión Forestal Sostenible, Departamento de Enxeñaría Agroforestal, Universidade de Santiago de Compostela. Escola Politécnica Superior de Enxeñaría, R/ Benigno Ledo, 27002 Lugo, Spain. E-mail addresses: josemario.gonzalez@usc.es, ulises.dieguez@usc.es

<sup>2</sup> Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela. Escola Politécnica Superior de Enxeñaría, R/ Benigno Ledo, 27002, Lugo, Spain.  
E-mail adress: miguelernesto.vazquez@usc.es

\* Corresponding author

*[Manuscrito enviado en proceso de revisión]*

DOI: 10.13140/RG.2.2.14396.97926/1

### Abstract

In this study we present several multi-objective models for forest harvest scheduling in forest with single-species, even-aged stands using a continuous formulation. We seek to maximize economic profitability and even-flow of products, both for the first rotation and for the regulated forest. For that, we have designed new metrics that allow working with continuous decision variables. We propose to combine an scalarization technique (weighting method) with a gradient-type algorithm (L-BFGS-B) to obtain the Pareto frontier of

## 11. Apéndice 3

the problem. This a posteriori articulation of preferences allows a graphical display of the relationships (trade-offs and synergies) between objectives, helping the decision makers to choose a suitable weighting for each objective. We compare this approach with the widely used in forestry multi-objective genetic algorithm NSGA-II. We analyze the model in a *Eucalyptus globulus* Labill. forest of Galicia (NW Spain). The continuous formulation has proved robust in forests with different structures and provided better results than the traditional combinatorial approach. For problem solving, our proposal has shown a clear advantage over the evolutionary algorithm in terms of computational time (efficiency).

**Keywords:** Even-aged forest management; Land and Timber Value; Forest regulation; Continuous optimization; Gradient-based optimization; Pareto frontier; Multi-objective optimization.

### 11.1. Introduction

The core of forest management planning is deciding the silvicultural prescription that should be applied to each stand to best meet the objectives of the forestland owners. It implies to set where, when and how much to cut (Ware & Clutter, 1971). Many models have been used to formulate this basic harvest scheduling problem. The most frequent approach has conceptually subdivided it into two computation stages: one for generating alternative management prescriptions for each stand, and other for selecting the combination of management prescriptions that best meets the objectives established for the forest while satisfying the possible restrictions (Başkent, 2001; Kurttila, 2001; Pukkala, 2019). These models have been formulated within the linear programming (e.g., Johnson & Scheurman, 1977), binary linear programming (e.g., McDill et al., 2002), and non-linear integer programming (e.g., Boston & Bettinger, 1999) frameworks. An alternative to avoid having to divide the problem into two stages is to work with continuous (non-discrete) decision variables. This approach, despite having many important advantages, is much less

common, possibly because it requires a rigorous mathematical analysis to be truly useful. Within this time continuous approach, it can be highlighted Heaps (1984, 2015), who used optimal control theory to formulate and study the forest management planning problem under suitable hypothesis; Roise (1990), who proposed a non-linear programming formulation; and, more recently, the previous work of the authors of this study (González-González et al., 2021), who formulated and solved a new continuous bi-objective model. This latter paper includes some equivalences and transformations between different formulations of the forest harvest scheduling problem.

From an economic point of view, the best management plan of a forest would be the sum of the optimal plans at the stand level. Nevertheless, in many cases forest managers are faced with the problem of providing a reasonably stable and continuing yield of products due to economic, environmental or social issues (Díaz-Balteiro & Romero, 2008). In fact, the aim of traditional forest regulation procedures was to achieve a “target forest” structure that would provide an even flow of products in perpetuity. Nowadays, although the achievement of this ideal forest may be desirable, in most situations it will generally be preferable to dynamically manage the forest with intermediate structures between the optima at stand level and a perfect regulation (Ware & Clutter, 1971; Clutter et al., 1983, pp. 238-239). This makes the design of forest management plans a difficult task that may be approached within the framework of multi-objective optimization (Kangas & Pukkala, 1992), as long as there is only one decision maker. Problems with more decision makers with generally different interests are studied by game theory (Ungureanu, 2018, pp. 3-4). Examples of this type of problems in forestry can be found in Paradis et al. (2018).

The objectives of a multi-objective optimization problem (MOP) in the context of forest management are generally related to economic (e.g., maximize net present value or minimize costs), temporal (e.g., even-flow of timber harvested over time) or spatial (e.g., maximum area of adjacent units treated, minimum old-growth forest area) concerns (Murray, 1999). In a cooperative situation, e.g., when there is only one rational decision maker, solving a MOP implies to choose a satisfactory solution within the set of non-dominated feasible solutions, generally known as Pareto optimal solutions or efficient so-

## 11. Apéndice 3

lutions. A satisfactory solution is the best compromise solution for the preferences of the decision maker. These preferences may be articulated prior to the analysis (therefore avoiding the generation of the set of efficient solutions; e.g., when the MOP is reformulated into a single objective problem through weights or/and treating some objectives as constraints), after it (which requires to obtain the complete set, also known as Pareto frontier), or interactively in a progressive way (trying to reduce the set) (Miettinen, 1998, pp. 61-65).

In recent papers, Arias-Rodil et al. (2017) and González-González et al. (2020) presented rigorous mathematical analyses of two continuous metrics for measuring, respectively, land expectation value (LEV) and even flow (EF) of timber harvested using even-aged management. Later, González-González et al. (2021) appropriately modified these metrics to deal with the harvest scheduling problem of a forest, considering land and timber value (LTV) as the economic metric in which future rotations are based on economically optimal management prescriptions at stand level. These modifications included a novel way to estimate the planning horizon in an automatic manner, and the possibility that a stand is harvested several times. The combination of these new metrics lead to a non-linear bi-objective model which could be efficiently solved by using gradient-type techniques. In this work we go one step further and consider another objective, forest regulation, for which we develop a new metric that can also be used in continuous optimization. The paper is organized as follows. In Section 11.2, the new metric is detailed in a suitable mathematical framework, and the forest planning problem is formulated by means of novel MOPs, which are studied from a cooperative point of view, proposing a numerical method to obtain their Pareto-optimal frontiers. The efficiency and accuracy of the numerical method is shown in Section 11.3, where the results in *Eucalyptus globulus* Labill. forests are presented and discussed. Finally, the most interesting conclusions are summarized in Section 11.4.

### 11.2. Methods

In this section we detail a mathematical model designed to be a useful tool in forest management planning. First, we establish starting hypotheses

and introduce the notation used, next give rigorous definitions of some important (classical and original) concepts, and finally formulate the problem in the framework of multi-objective optimization and show how it can be solved successfully.

### 11.2.1. Starting hypotheses and notation

Consider a forest consisting of  $n_s$  stands. For each stand  $j$ , we assume to know its age at inventory ( $t_j^0$ , in years), area ( $A_j$ , in hectares), and measurements at age  $t_j^0$  of the following state variables: dominant height ( $H_j^0$ , in meters, defined as the mean height of the dominant trees), number of trees ( $N_j^0$ , in a per hectare basis), and stand basal area ( $G_j^0$ , in  $\text{m}^2/\text{ha}$ , defined as the total cross-sectional area of all stems in a stand measured at breast height). We also assume that, from these values, for each stand we know smooth functions  $h_j$ ,  $n_j$ , and  $g_j$  which provide, for every age  $t > 0$ , estimates of those state variables. That is, the state variables are given by  $H_j(t) = h_j(t_j^0, H_j^0, t)$ ,  $N_j(t) = n_j(t_j^0, N_j^0, t)$  and  $G_j(t) = g_j(t_j^0, G_j^0, t)$ . Finally, we also accept to know smooth functions  $v_j(H, N, G)$  giving the total stand volume (in  $\text{m}^3/\text{ha}$ ) in terms of the stand state variables.

To avoid confusion, it is important to distinguish between stand age, denoted by  $t$ , and the time from the beginning of the planning horizon (inventory), which is denoted by  $y$ . Both are given in years, and if the age of a stand at inventory is  $t_0$ , then  $y = t - t_0$ . The ultimate objective of forest planning is to determine the management prescription that will be applied to each stand. In this study, to alleviate notation, we seek only the times of clearcutting from inventory, that is, the decision vector  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n_s}) \in \mathbb{R}^{n_s}$ . Obviously, finding  $\mathbf{y}$  is equivalent to finding  $\mathbf{t} = \mathbf{y} + \mathbf{t}^0$ . From now on, we will give the definitions in terms of  $\mathbf{y}$  or  $\mathbf{t}$  depending on how it is more appropriate. For instance, if stand  $j$  is clearcut at time  $y_j$  (when it is  $t_j = y_j + t_j^0$  years old), the timber volume is given by  $V_j(y_j) = v_j(H(t_j), N(t_j), G(t_j))$ . On the contrary, present values of revenues and management costs if stand  $j$  is clearcut at age  $t_j$  will be denoted by functions  $R_j(t_j)$  and  $C_j(t_j)$ , respectively, which are also defined from the state variables.

## 11. Apéndice 3

### 11.2.2. Main definitions

To correctly formulate the problem we must previously define some important concepts.

#### Land expectation value

The land expectation value (LEV, Faustmann (1849)) is one of the most important financial concepts in timberland management, as it allows to adequately compare even-aged stand management alternatives of different rotation ages. For a given stand  $j$ , the LEV can be defined as the present value, per unit area, of the projected costs and revenues from an infinite series of identical even-aged forest rotations, starting initially from bare land (Bettinger et al., 2009, pp. 40-42). If we assume a real interest rate of  $r \in (0, 1]$ , then it is given by

$$J_j^{LEV}(t_j) = \frac{(1+r)^{t_j}(R_j(t_j) - C_j(t_j))}{(1+r)^{t_j} - 1}. \quad (1)$$

The LEV of the forest is the sum of the LEV of all stands, that is,

$$J^{LEV}(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{n_s} J_j^{LEV}(t_j). \quad (2)$$

From a mathematical point of view, it should be noted that function  $J^{LEV}$  has the same smooth properties as functions  $h_j$ ,  $n_j$ ,  $g_j$ , and  $v_j$  (Arias-Rodil et al., 2017).

#### Optimal rotation at stand-level

Taking the LEV as indicator of profits, the optimal economic rotation for an individual stand  $j$  is given by the age of clearcutting corresponding to the solution of the problem

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && J_j^{LEV}(t_j) \\ & \text{subject to} && t_j \geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

which is denoted by  $\bar{t}_j$ . This optimal rotation is generally known in the forest economics literature as “Faustmann formula”, although this author only proposed Eq. (1) and did not maximize it (Cairns, 2017). The vector  $\bar{\mathbf{t}} = (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{n_s})$  is named optimal rotation vector at stand-level.

### Optimal rotation for the regulated forest

The regulated forest is a simplistic concept of an ideal forest with a relatively steady-state structure which provides an even, sustained flow of desired forest outcomes over time (Davis et al., 2001, p. 93). In even-aged management, it implies to use the same clearcutting age for all the stands and, if the primary objective is to maximize forest profitability, the optimal rotation for the regulated forest is the one that maximizes the LEV of the entire forest (Hoganson & McDill, 1993). It is given by the solution of the problem

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{j=1}^{n_s} J_j^{LEV}(t) \\ & \text{subject to} && t \geq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

and hereinafter will be denoted by  $R$ .

### Land and timber value

The land and timber value (LTV) is a generalization of the LEV which gives the value of a piece of forest land with an existing stand of trees, whatever its stage of development. It is useful for determining when the existing stand should be harvested. The LTV of stand  $j$  is the sum of the present value of the projected costs and revenues for the remainder of the current rotation, plus the present value of the LEV which accounts for all future rotations of timber that will be grown on the land (Clutter et al., 1983, pp. 226-228). Let  $p_j$  (in €/m<sup>3</sup>) be the expected stumpage price. Then, for each  $y_j \geq 0$ :

- (i) If we assume that next rotations will be based on the optimal rotation for

## 11. Apéndice 3

the individual stand  $j$ , the LTV is given by

$$J_j^{LTV}(y_j) = \frac{p_j V_j(y_j) + J_j^{LEV}(\bar{t}_j)}{(1+r)^{y_j}}. \quad (5)$$

(ii) If we assume that next rotations will be based on the optimal rotation for the regulated forest, the LTV is given by

$$J_j^{LTV}(y_j) = \frac{p_j V_j(y_j) + J_j^{LEV}(R)}{(1+r)^{y_j}}. \quad (6)$$

In both cases, the LTV of the forest is the sum of the LTV of all stands, that is,

$$J^{LTV}(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n_s} J_j^{LTV}(y_j).$$

As with  $J^{LEV}$ , the regularity of  $J^{LTV}$  is given by the properties of functions  $h_j$ ,  $n_j$ ,  $g_j$ , and  $v_j$ , and we can assume that it is smooth enough.

### Regulation metric

If the primary goal is to obtain commercial timber outcomes, then we could think of a regulated forest as that with all stands harvested at the age of  $R$  years and producing a perfect even flow (EF) of timber volume in perpetuity, which implies that the harvest rate for the next  $R$  years (i.e., after the transition period from the unregulated structure to the regulated condition) is constant. Looking for the regulated forest, it is necessary to define a function (hereinafter the regulation metric) which provides, for every admissible planning strategy  $\mathbf{y}$ , the degree of achievement of that objective. With this aim we consider:

- The minimum harvest age for each stand,  $l_j > 0$  (years), which leads to the constraint  $t_j \geq l_j$ .
- The instant  $a \geq 0$  (years) when harvests can begin in the forest. This value is given by the first stand which can be harvested: it will be zero if

any stand can be harvested now, otherwise it will be the minimum of the differences  $l_j - t_j^0$ . Specifically:

$$a = \begin{cases} \min_{j=1, \dots, n_s} \{l_j - t_j^0\} & \text{if } l_j - t_j^0 \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n_s, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- The set of admissible planning strategies  $Y^{ad} \subset \mathbb{R}^{n_s}$ , given by

$$Y^{ad} = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_s}, \text{ such that } \max\{0, l_j - t_j^0\} \leq y_j \leq a + R, \forall j = 1, \dots, n_s \}.$$

- The goal harvest rate for the regulated forest,  $m^R$ . The current planning horizon (where the management prescriptions are chosen) is  $[a, a + R]$ , but to measure how the forest is regulated we must check the EF for the next planning horizon ( $[a + R, a + 2R]$ ), assuming that the second harvest is done when the stand is  $R$  years old. The total harvest volume is  $\sum_{j=1}^{n_s} V_j(R)$  and, if a constant harvest rate is required, it must be

$$m^R = \frac{\sum_{j=1}^{n_s} V_j(R)}{R}. \quad (7)$$

- The real harvest rate for the next planning horizon ( $[a + R, a + 2R]$ ). At the beginning of that next planning horizon ( $a + R$ ), the age of stand  $j$  will be  $a + R - y_j$  and, consequently, the time from inventory to the second clearcutting of stand  $j$  is  $y_j + R$ . Assuming instant harvests, the real harvest rate must be written in terms of the Dirac's delta function  $\delta(y)$  (Oldham et al., 2009, Ch. 9). Specifically, for the period  $[a + R, a + 2R]$ , it is given by (see Figure 1)

$$\frac{\partial V^n}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}, y) = \sum_{j=1}^{n_s} V_j(R) \delta(y - (y_j + R)) \quad y \in [a + R, a + 2R]. \quad (8)$$

## 11. Apéndice 3

- A function given the real volume harvested for the next planning horizon ( $V^n$ ) and a function given the desired harvested volume for each rotation of the regulated forest ( $V^R$ ). The Dirac delta is not a function in the traditional sense, so the comparison between (8) and the constant function for the period  $[a + R, a + 2R]$  given by (7) is not appropriate. Instead of comparing harvest rates, it is more suitable to compare those volumes, which are obtained by integrating those expressions (7) and (8): for  $y \in [a + R, a + 2R]$

$$V^R(\mathbf{y}, y) = \int_{a+R}^y m^R d\tau = m^R(y - (a + R)), \quad (9)$$

$$V^n(\mathbf{y}, y) = \int_{a+R}^y \frac{\partial V^n}{\partial \tau}(\mathbf{y}, \tau) d\tau = \sum_{j=1}^{n_s} V_j(R)H(y - (y_j + R)), \quad (10)$$

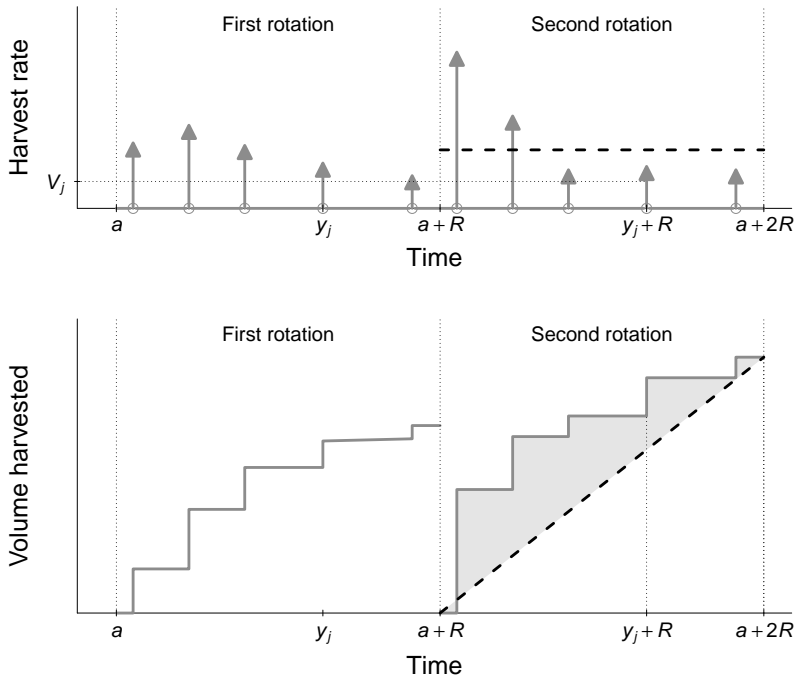
where  $H(y)$  is the Heaviside step function (Oldham et al., 2009, Ch. 9).

The definition of a regulated forest given at the beginning of this section suggests that, at the end of the first planning horizon, a forest will be more regulated the more closely functions  $V^R(\mathbf{y}, \cdot)$  and  $V^n(\mathbf{y}, \cdot)$  resemble each other. Following González-González et al. (2020), in this work we propose the distance associated to the  $L^2$  norm to measure the similarity of these two functions, and establish the definition that, given a planning strategy  $\mathbf{y} \in Y^{ad}$ , the regulation metric associated with that strategy is the value of

$$J^R(\mathbf{y}) = - \int_{a+R}^{a+2R} (V^n(\mathbf{y}, y) - V^R(\mathbf{y}, y))^2 dy,$$

where the minus sign in the definition is included precisely so that a higher value of  $J^R(\mathbf{y})$  corresponds to a greater similarity of the function  $V^n(\mathbf{y}, \cdot)$  to the goal function  $V^R(\mathbf{y}, \cdot)$ , which is what is meant by a higher regulation.

Function  $J^R$  has not the same smooth properties as  $J^{LEV}$  or  $J^{LTV}$ , although it is continuous and has continuous derivatives in almost all points. The explicit expression of its gradient can be obtained in a way similar to that of González-González et al. (2020).

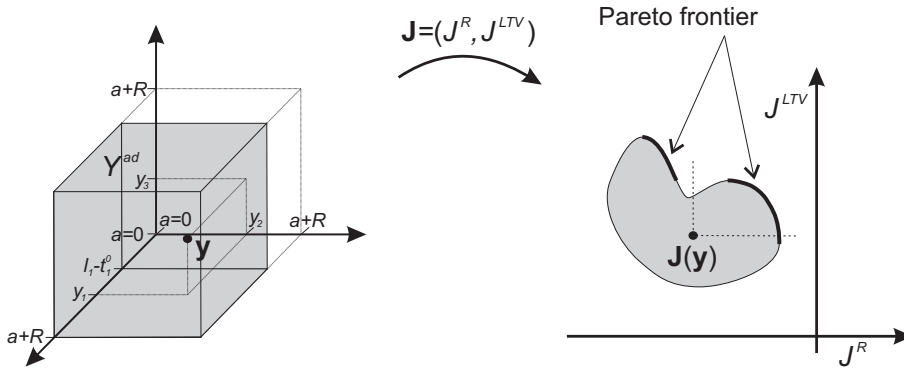


**Figure 1:** Example of harvest rate (top) and volume harvested (bottom). The grey solid lines represent real instant harvests (top, Eq. (8)) and real volumes harvested (bottom, Eq. (10)), while the black dashed lines represent the goal harvest rate function (top, Eq. (7)) and the goal volume harvested function (bottom, Eq. (9)).

### 11.2.3. Multi-objective optimization problems (MOPs)

Initially, the forest management planning problem we are dealing with consists of selecting the set of silvicultural treatments to be applied to each stand (i.e., to determine  $\mathbf{y} \in Y^{ad}$ ) to obtain maximum profitability (i.e., to maximize

## 11. Apéndice 3



**Figura 2:** Example of an admissible set  $Y^{ad} \subset \mathbb{R}^3$  and the corresponding image set  $J(Y^{ad}) \subset \mathbb{R}^2$ , where the Pareto frontier is highlighted.

$J^{LTV}$ ) with the highest regulation possible (i.e., to maximize  $J^R$ ). Therefore, this problem may be formulated as the following MOP:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \mathbf{J}(\mathbf{y}) = (J^R(\mathbf{y}), J^{LTV}(\mathbf{y})) \\ & \text{subject to} && \mathbf{y} \in Y^{ad}, \end{aligned} \quad (11)$$

where function  $J^{LTV}$  must be calculated assuming that next rotations will be based on the optimal rotation for the regulated forest  $R$  (by using Eq. (6)).

The idea is simple but, unfortunately, both objectives are in conflict and, consequently, it will not be possible to find an ideal (or perfect) element  $\mathbf{y}^I \in Y^{ad}$  maximizing them simultaneously. Problem (11) must be studied from a cooperative point of view by examining some distinguished elements of the admissible set (the non-dominated ones). Such vectors are those for which none of the objectives can be improved without a deterioration of the other, and are generally known as Pareto optimal solutions or efficient solutions (for a more formal definition see, for instance, Miettinen (1998, pp. 11, 19)). The corresponding objective vector is also known as Pareto optimal, while the set of these objective vectors is known as Pareto frontier (see Figure 2).

From a mathematical point of view, MOP (11) is considered to be solved

when the Pareto optimal set is found. However, what is desired in practice is to select a satisfactory solution among all the efficient solutions, for which we must know the preferences of the decision maker. The techniques for articulating these preferences in multi-objective optimization can be classified in (Miettinen, 1998, pp. 61-65): a priori methods (the decision maker first acts clearly establishing his preferences), a posteriori methods (all efficient solutions to the problem are sought, so that the decision maker chooses, among all of them, the one that suits him best), and interactive methods (based on the preferences indicated by the decision maker, one goes from one efficient solution to another, until one is achieved that, in addition to being efficient, is satisfactory). In Section 11.2.4 we propose an a posteriori method to draw the Pareto frontier of the problem as the basic tool in forest planning.

Although it may be obvious, it should be noted that any requirement known in advance (other than the minimum thresholds for the objectives  $J^{LTV}$  and  $J^R$ ) must be present in the formulation phase of the model, and not in the subsequent decision-making process (made from the Pareto frontier obtained). These requirements mean that MOP (11) must be modified (generally including new constrictions), causing a new Pareto frontier from which decision-making must be carried out. An example of this situation is the traditional combinatorial approach of, first, simulating alternative management prescriptions for each stand (collected in a discrete set  $\Omega$ ) and, second, using combinatorial optimization to seek the optimal prescriptions in these sets (Pukkala, 2019). In that case, MOP (11) must be replaced by

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \mathbf{J}(\mathbf{y}) = (J^R(\mathbf{y}), J^{LTV}(\mathbf{y})) \\ & \text{subject to } \mathbf{y} \in Y^{ad}, \\ & \quad y_j \in \Omega, \end{aligned} \tag{12}$$

and the decision-making process must be carried out based on the Pareto frontier of this new problem.

On the other hand, MOP (11) must also be modified if the objectives of the landowner change. For example, if there is also interest in maximizing the even flow (EF) for the current planning horizon, the problem must be com-

## 11. Apéndice 3

pleted with a new function ( $J^{EF}$ ) measuring the achievement of this objective (Kao & Brodie (1979), analyzed a problem with similar objectives by goal programming). In this case, the MOP to solve is

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \mathbf{J}(\mathbf{y}) = (J^R(\mathbf{y}), J^{EF}(\mathbf{y}), J^{LTV}(\mathbf{y})) \\ & \text{subject to} && \mathbf{y} \in Y^{ad}, \end{aligned} \quad (13)$$

where  $J^{EF}$  is defined as in González-González et al. (2021), replacing the automatically computed planning horizon by the fixed planning horizon  $[a, a + R]$ .

### 11.2.4. Numerical solution

The first step is to solve problem (3), which provides the optimal management prescription for each stand  $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n_s})$ , and problem (4), which indicates the optimal rotation for the regulated forest  $R$ . These values are used to obtain the bounds of the set of admissible planning strategies. Additionally,  $R$  is also used to calculate the desired harvest rates and, in turn, functions  $J^R$  and  $J^{EF}$ , as well as the land and timber value function  $J^{LTV}$ . Because of the regularity properties of the functions involved, both problems can be solved by any gradient-type method. In this work we used the L-BFGS-B algorithm (Zhu et al., 1997) implemented in the free and open-source Python library SciPy 1.0 (Virtanen et al., 2020).

To take advantage of the regularity properties of the  $J^{LTV}$ ,  $J^R$  and  $J^{EF}$  functions, we propose to convert MOPs (11) and (13) into differentiable single-objective problems (SOPs) using an scalarization technique and to solve them with a gradient-type method combined with a random multi-start if local minima are detected. In this study, to obtain the Pareto frontier, we used the weighting method (Miettinen, 1998, pp. 78-85) and, again, the L-BFGS-B algorithm. For the results presented in the next section, we took equally spaced weights and, using the ideal objective vector (that obtained by maximizing each of the objective functions individually subject to the constraints of the problem) and the approximate nadir objective vector estimated from a payoff table (Miettinen, 1998, pp. 15-19), we normalized the objective functions so that their

objective values were of approximately the same magnitude.

The multi-objective optimization problem (12) was formulated using the traditional combinatorial approach in which the planning horizon  $[a, a + R]$  is divided into  $P$  periods of  $\Delta = R/P$  years, and only one harvest instant (the middle of the period) is assumed for each period. In this case the harvest instants are  $c_i = a + (i - 1/2)\Delta$ , and the discrete set is given by  $\Omega = \{a + \Delta/2, \dots, a + R - \Delta/2\}$ . These additional constraints prevent the use of gradient-based techniques and, therefore, we solved MOP (12) using the evolutionary algorithm NSGA-II (Deb et al., 2002), widely used in multi-objective optimization, which gradually approaches a well-distributed set of Pareto optimal solutions across the Pareto frontier and can be applied to continuous as well as to combinatorial search spaces (Emmerich & Deutz, 2018). Specifically, we used the implementation of this algorithm in the Python library Inspyred 1.0 (Tonda, 2020), with appropriate mutation and recombination operators for integer representation (Eiben & Smith, 2015, pp. 52-56). Finally, we also used the NSGA-II algorithm to check the numerical method proposed above for solving continuous MOPs (11) and (13).

### 11.3. Results and discussion

For testing the usefulness of our approach, we used the real forest and the simulated young forest of *Eucalyptus globulus* Labill. in the municipality of Xove (Galicia, NW Spain) of the case studies analyzed by González-González et al. (2021). They comprise  $n_s = 51$  stands and assume that none of them can be cut before they are 5 years old ( $l_j = 5$ ). Additionally, we considered immediate regeneration after clearcutting with a constant plantation density of 1333 trees/ha for all stands, and that there are no changes on site quality (site index). The inventory data and the transition functions of a dynamic growth model appropriate for the species (García-Villabrille, 2015) were used for computing the state variables and outcomes (for details, see González-González et al. (2021)). After solving problem (4), we obtained an optimal rotation for the regulated forest of  $R = 13.1$  years.

For MOP (11), the results corresponding to the real forest of the case study

## 11. Apéndice 3

and to the simulated young forest are presented, respectively, in Figures 3 and 4. They show the Pareto frontiers obtained with the weighting method + L-BFGS-B and with the NSGA-II algorithm. Additionally, these figures also exhibit the real volume harvested for the first rotation and the comparison between real and goal volumes for the second rotation corresponding to all (ten) Pareto optima obtained with the first of these two approaches. In view of these results, it can be highlighted that:

- Both methods, although using different techniques, provide the same Pareto fronts, which warrants the appropriateness of our approach.
- The continuous approach works well for forests with very different stand structures, as suggested from the results of the real forest (which has young and mature stands of different ages) and the simulated young forest (in which all stands are 1-year old).
- Figures 3 and 4 are very useful for the decision-making process, as they allow to graphically analyze the trade-offs and synergies between objectives:
  - In the top graphs, the normalized- $J^{LTV}$  is  $J^{LTV} / J^{LTV}(\mathbf{y}^*)$ , i.e., the LTV divided by its best value. This way of proceeding allows an intuitive comparison of the different optimal management strategies: for the real forest, there was a reduction of about 8% in LTV between the best solutions from the economic and regulation perspectives (points 1 and 10 in the Pareto front, respectively), while for the simulated young forest it was of only 4%; intermediate solutions can also be analyzed in the same manner.
  - The regulation metric has not such an easy interpretation in terms of numerical values, but the grey area of the bottom graphs of the figures clearly indicates the achievement of the regulation objective as well as the moment in which the clearcuts are done. Additionally, these graphs also show the total volume harvested of each Pareto optimum, which deserves a separate analysis for each

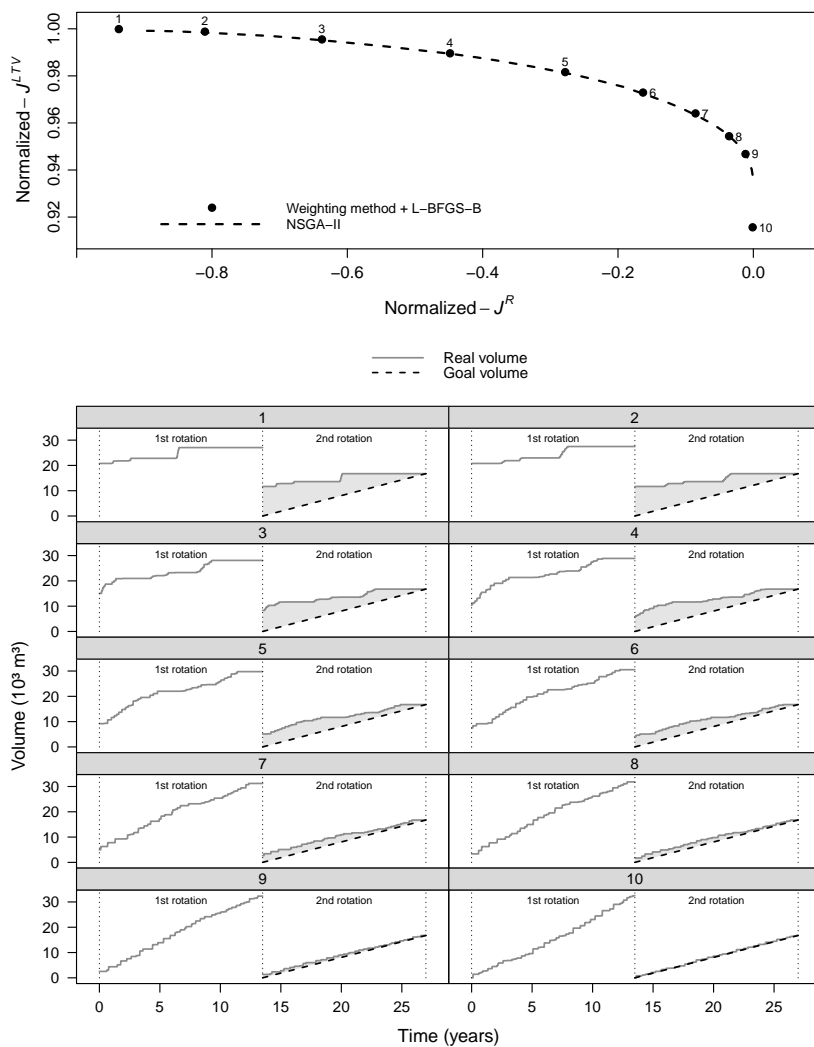
### 11.3. Results and discussion

forest: in the real one, it is higher for the first rotation than for the regulated condition due to its current structure towards mature stands, while for the simulated young forest it is slightly lower in most cases (except for the Pareto optima with higher weights of  $J^{LTV}$ ) because of its initial structure of young stands.

As shown, the results of problem (11) reveal the cost of regulation assuming that next rotations will be based on the optimal rotation for the regulated forest  $R$  (a low cost corresponds to a highly regulated forest at the beginning of planning). Nevertheless, the real cost of regulation should be measured in terms of lost net discounted returns compared to managing all stands indefinitely following their Faustmann rotation (i.e.,  $\bar{t}_j$ ) to maximize financial returns (Hoganson & McDill, 1993). The objectives implicit in regulation may be inappropriate for many landowners, and current management decisions should not generally be controlled by a long-term forest structure objective because of highly probably changes in markets, technology, prices, and costs (Ware & Clutter, 1971). Nevertheless, the results of the regulated forest can serve as a baseline against which to compare alternative management scenarios. This role is becoming more important as interest in sustainable forest management increases. (Davis et al., 2001, pp. 435-436).

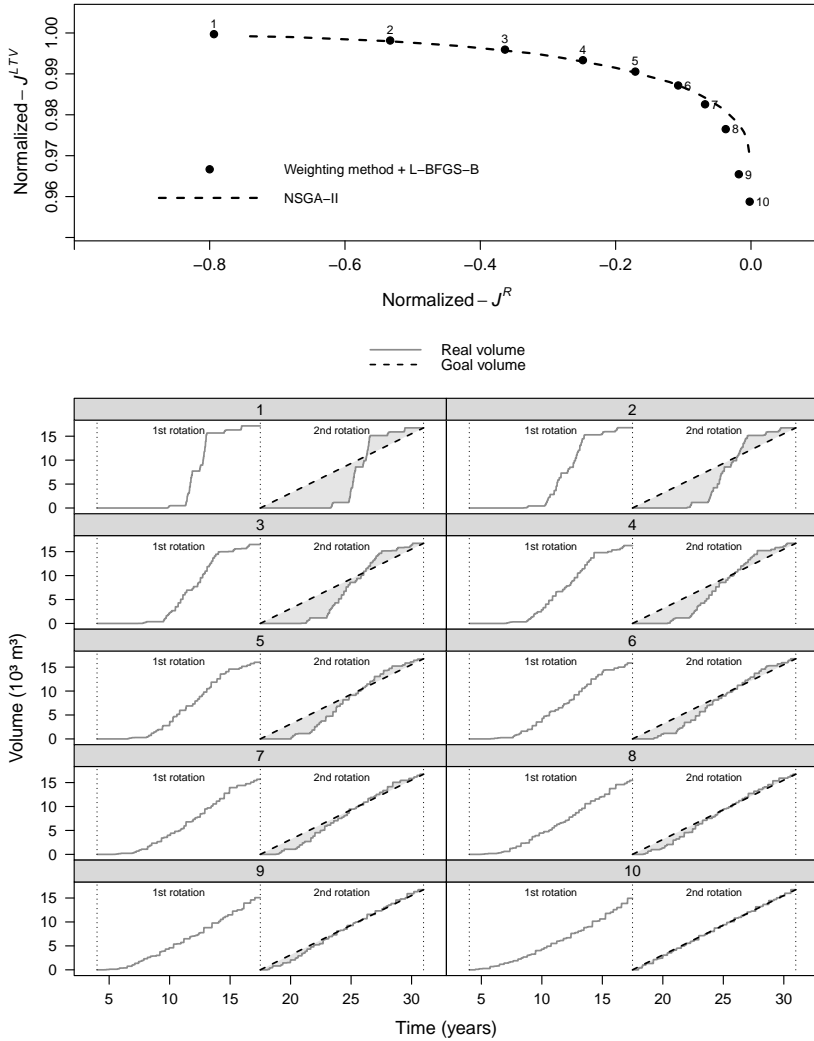
Regarding MOP (12), Figure 5 shows the Pareto frontiers of the real forest obtained with NSGA-II. As expected, the continuous formulation (MOP (11)) provided better results than the combinatorial one, since the latter implies additional constraints given by the discrete set  $\Omega$ . Besides, the continuous formulation is much faster to solve when gradient-type methods are used. For example, for the real forest, computation times for the weighting method + L-BFGS-B were of the order of 65 times faster than for NSGA-II (for both continuous and discrete formulations). This ratio is expected to increase as the dimension of the problem (number of stands) increases (González-González et al., 2021). To graphically analyse the goodness of the new  $J^R$  metric, the left column of Figure 6 shows the real and goal volumes corresponding to the best points for regulation, i.e., those which maximize function  $J^R$  (that measures the even flow in the second rotation). The right column shows, for these same

## 11. Apéndice 3



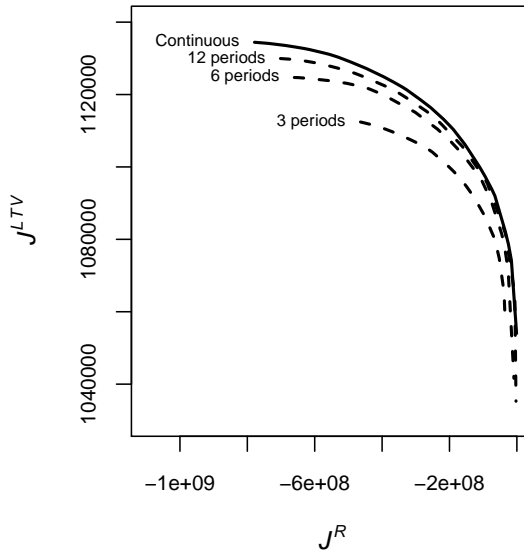
**Figure 3:** Results for the real forest: normalized Pareto frontiers obtained for the continuous formulation with the weighting method + L-BFGS-B and with NSGA-II (top), and comparison between real and goal volumes for the second rotation corresponding to the numbered points (bottom).

### 11.3. Results and discussion



**Figure 4:** Results for the simulated young forest: normalized Pareto frontiers obtained for the continuous formulation with the weighting method + L-BFGS-B and with NSGA-II (top), and comparison between real and goal volumes for the second rotation corresponding to the numbered points (bottom).

## 11. Apéndice 3

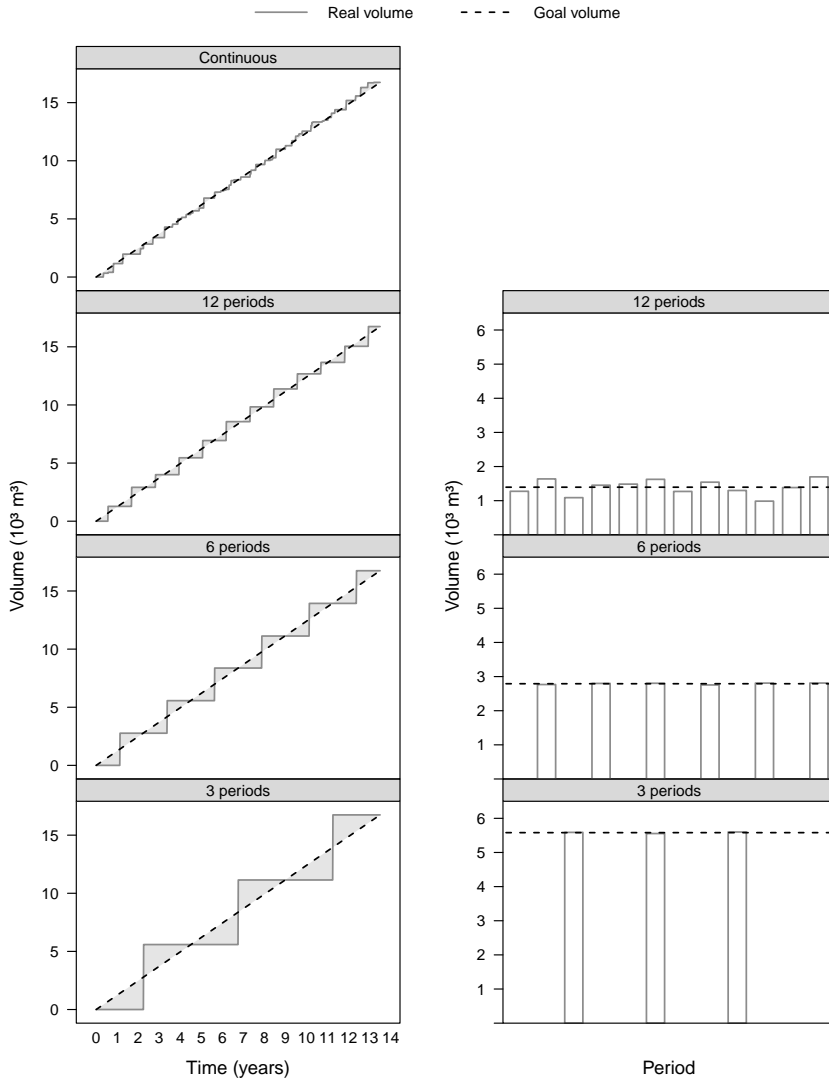


**Figura 5:** Pareto frontiers obtained with NSGA-II for continuous and combinatorial formulations of different number of periods for the real forest.

points, the equivalent volume harvested per period. It can be seen that maximizing  $J^R$  leads to small variations in the volume harvested between periods, that is, good results with the classic ways of measuring even flow in combinatorial formulations (e.g., Kao & Brodie, 1979; Brumelle et al., 1998; Ducheyne et al., 2004).

Finally, with respect to MOP (13), Figures 7 and 8 show the 3D Pareto frontier for the real and the simulated young forests, respectively, which provide all the information necessary to choose a compromise solution and may help decision makers with unclear priorities (Diaz-Balteiro et al., 2009). To improve the understanding of the trade-off information it is also useful to look at the Pareto frontier in a pairwise comparison of objectives (Couture et al., 2021), which can be seen projected in each plane (i.e.,  $J^R - J^{EF}$ ,  $J^R - J^{LTV}$ ,

### 11.3. Results and discussion



**Figure 6:** Real and goal volumes for the second rotation (left) corresponding to the points of maximum  $J^R$  in Figure 5, and equivalent volume per period (right).

## 11. Apéndice 3

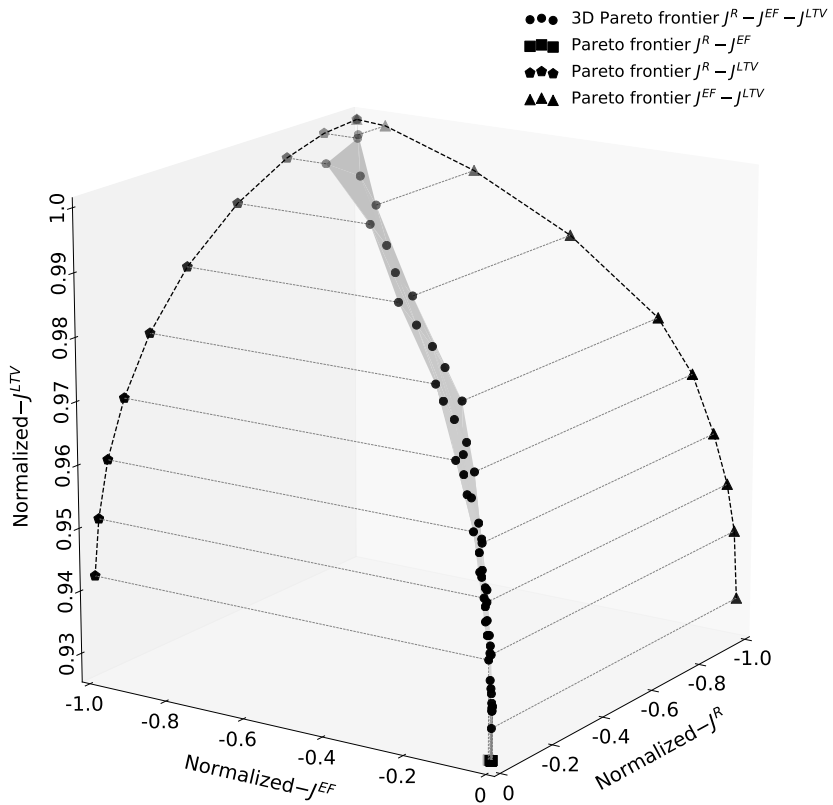
and  $J^{EF} - J^{LTV}$ ) of the aforementioned figures. The analysis of these frontiers shows a certain compatibility between objectives  $J^R$  and  $J^{EF}$ , which is more evident in the real forest because it is mainly formed by mature stands, which are in a rather slow growth phase. This compatibility can also be observed in Figures 3 and 4, which indicate that when we increase the weight of the regulation objective  $J^R$ , we indirectly obtain a better even flow in the first rotation (values of  $J^{EFr}$  closer to zero). This MOP (13) is more interesting for the planning process of young-stand forests, in which the best solutions for  $J^{EF}$  during the first rotation are clearly in conflict with those that maximize  $J^R$  for forest level regulation. As we have seen, if two or three objectives are involved, it is advisable to obtain the Pareto frontier to graphically analyze the relationships (trade-offs and synergies) between objectives, helping the decision makers (forestland owners and/or forest managers) to choose a suitable weighting for each objective. For problems with more objectives, despite a posteriori techniques combined with special visualization methods can be used (e.g., Borges et al., 2014), the rationale for approximating of the whole Pareto frontier is questionable (Alvarez-Vázquez et al., 2015), and interactive techniques (e.g., Diaz-Balteiro, 1998) may be more appropriate.

### 11.4. Conclusions

We present several multi-objective models for forest harvest scheduling in single-species, even-aged stands using a continuous formulation. We seek to maximize economic profitability and even-flow of products, both for the first rotation and for the regulated forest. For that, we have designed new metrics that allow working with continuous decision variables. To obtain the Pareto frontier, we propose to combine an scalarization technique (weighting method) with a gradient-type algorithm (L-BFGS-B), which we compare with the widely used in forestry multi-objective genetic algorithm NSGA-II. The main conclusions of this study are:

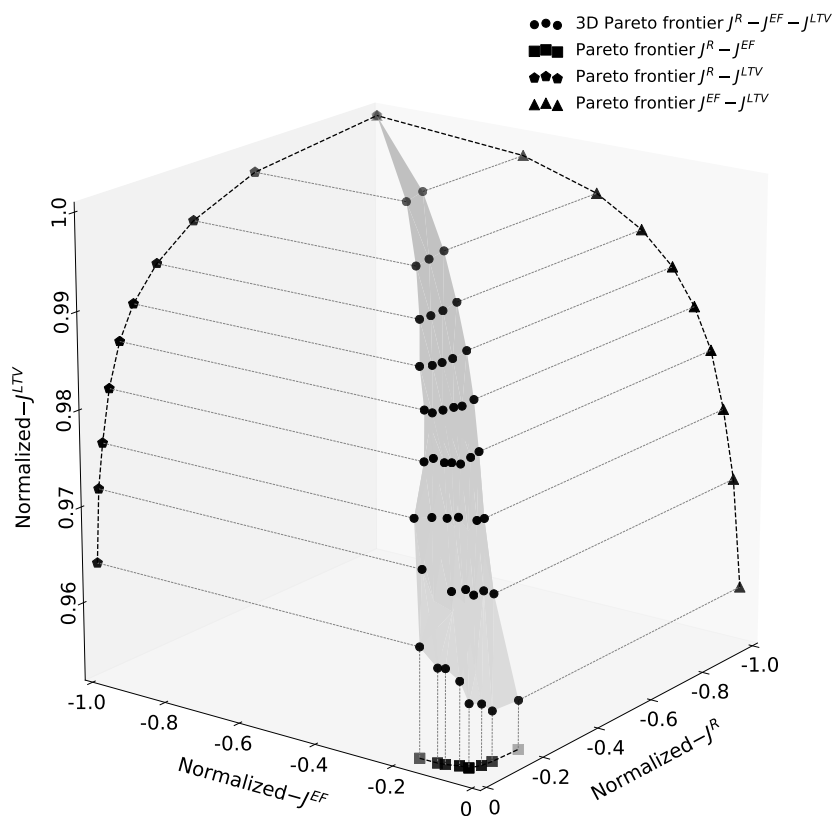
- Our proposal has been shown to be very effective, providing results at least as good as to those obtained with the evolutionary algorithm. Be-

## 11.4. Conclusions



**Figura 7:** Normalized 3D Pareto frontier obtained with the weighting method + L-BFGS-B with a continuous formulation for the real forest.

## 11. Apéndice 3



**Figura 8:** Normalized 3D Pareto frontier obtained with the weighting method + L-BFGS-B with a continuous formulation for the simulated young forest.

sides, in terms of efficiency, the use of the gradient-based algorithm has required much less computing time to obtain the complete Pareto frontier. This difference could be extended considering that our approach is easily parallelizable, which could take advantage of the potential of multi-core processors.

- In this work, the classical combinatorial formulation is obtained by adding additional constraints to the continuous model. This guarantees that the results of the latter are always better, as has been shown in the case study of a real *Eucalyptus globulus* forest.
- The proposed metric to measure regularity, designed to work with continuous formulations, has been shown to be similar to the traditional metrics used in combinatorial problems. Planning strategies that maximize the new metric also lead to constant flows of products by period in the regulated forest.
- The graphical display of trade-off and synergy information between objectives using the Pareto frontier allows an a posteriori articulation of preferences in an intuitive way, therefore being a very interesting tool for the decision making process in forest planning.
- In a previous study we formulated a continuous model to maximize economic profitability and even-flow of timber harvested for a given planning horizon, which did not require to set management prescriptions in advance and avoided the division of the planning horizon into periods. In this study we show how this formulation can be extended to more objectives, specifically we deal with the problem of forest regulation. More sophisticated objectives and constraints can also be incorporated into the model, such as those that consider the spatial location of the harvests, which is being analyzed in an ongoing research.

## 11. Apéndice 3

### 11.5. References

- Alvarez-Vázquez, L., García-Chan, N., Martínez, A. & Vázquez-Méndez, M. E. (2015). An application of interactive multi-criteria optimization to air pollution control. *Optimization*, 64(6):1367–1380.
- Arias-Rodil, M., Diéguez-Aranda, U. & Vázquez-Méndez, M. E. (2017). A differentiable optimization model for the management of single-species, even-aged stands. *Can. J. For. Res.*, 47(4):506–514.
- Başkent, E. (2001). Combinatorial Optimization in Forest Ecosystem Management Modeling. *Turk. J. Agric. For.*, 25:187–194.
- Bettinger, P., Boston, K., Siry, J. & Grebner, D. (2009). *Forest management and planning*. San Diego, CA: Academic Press.
- Borges, J., Garcia-Gonzalo, J., Bushenkov, V., Mcdill, M., Marques, S. & Oliveira, M. (2014). Addressing multicriteria forest management with Pareto frontier methods: an application in Portugal. *For. Sci.*, 60(1):63–72.
- Boston, K. and Bettinger, P. (1999). An analysis of Monte Carlo integer programming, simulated annealing, & tabu search heuristics for solving spatial harvest scheduling problems. *For. Sci.*, 45(2):292–301 .
- Brumelle, S., Granot, D., Halme, M. & Vertinsky, I. (1998) A tabu search algorithm for finding good forest harvest schedules satisfying green-up constraints. *Eur. J. Oper. Res.*, 106(2-3):408–424.
- Cairns, R. (2017) Faustmann’s Formulas for Forests. *Nat. Resour. Model.*, 30(1):52–73.
- Clutter, J., Fortson, J., Pienaar, L., Brister, G. & Bailey, R. (1983). *Timber management: a quantitative approach*. Colorado: Wiley & Sons, 333 pages
- Couture, S., Cros, M. & Sabbadin, R. (2021). Multi-Objective Sequential Forest Management Under Risk Using a Markov Decision Process-Pareto Frontier Approach. *Environ. Model. Assess.*, 26(2):125–141.
- Davis, L., Johnson, K., Bettinger, P. & Howard, T. (2001). *Forest management*. New York: McGraw-Hill, 804 pages.
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S. & Meyarivan, T. (2002). A fast and eli-

## 11.5. References

- tist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *Ieee Trans. Evol. Comput.*, 6(2):182–197.
- Diaz-Balteiro, L. (1998). Modeling Timber Harvest Scheduling Problems with Multiple Criteria : An Application in Spain. *For. Sci.*:44(1).
- Diaz-Balteiro, L. & Romero, C. (2008). Making forestry decisions with multiple criteria: A review and an assessment. *For. Ecol. Manage.*, 255(8-9):3222–3241.
- Diaz-Balteiro & Bertomeu, M. (2009). Optimal harvest scheduling in Eucalyptus plantations. A case study in Galicia (Spain). *For. Policy Econ.*, 11(8):548–554.
- Ducheyne, E., De Wulf, R. & De Baets, B. (2004). Single versus multiple objective genetic algorithms for solving the even-flow forest management problem. *For. Ecol. Manage.*, 201(2-3):259–273.
- Eiben, A. & Smith, J. (2015). *Introduction to evolutionary computing. Natural Computing Series*. 2nd ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. XII, 287 pages.
- Emmerich, M. & Deutz, A. (2018). A tutorial on multiobjective optimization: fundamentals and evolutionary methods. *Nat. Comput.*, 17(3):585–609.
- Faustmann, M. (1849). On the determination of the value which forest lands and immature stands possess for forestry. *Transl. by M. Gane, ed., Martin Faustmann Evol. Discount. cash flow. Oxford Inst. Pap. 42, 1968.*
- García-Villabrille, J. (2015). Modelización del crecimiento y la producción de plantaciones de Eucalyptus globulus Labill. en el noroeste de España. PhD thesis. Universidade de Santiago de Compostela.
- González-González, J. M., Vázquez-Méndez, M. E. & Diéguez-Aranda, U. (2020). A note on the regularity of a new metric for measuring even-flow in forest planning. *Eur. J. Oper. Res.*, 282(3):1101–1106.
- González-González, J. M., Vázquez-Méndez, M. E. & Diéguez-Aranda, U. (2021). Simultaneous optimization of even flow and land and timber value in forest planning : a continuous approach. *For. Ecosyst.*, 8(48).

## 11. Apéndice 3

- Heaps, T. (1984). The forestry maximum principle. *J. Econ. Dyn. Control.* 7(2):131–151.
- Heaps, T. (2015). Convergence of optimal harvesting policies to a normal forest. *J. Econ. Dyn. Control.* 54:74–85.
- Hoganson, H. & McDill, M. (1993). More on forest regulation: an LP perspective. *For. Sci.*, 39(2):321–347.
- Johnson, K. & Scheurman, H. (1977). Techniques for prescribing optimal timber harvest and investment under different objectives-Discussion and synthesis. *For. Sci. Monogr* 18, 31.
- Kangas, J. & Pukkala, T. (1992). A decision theoretic approach applied to goal programming of forest management. *Silva Fenn.*, 26:169–176.
- Kao, C. & Brodie, J. (1979). Goal programming for reconciling economic, even-flow, and regulation objectives in forest harvest scheduling. *Can. J. For. Res.*, 9(4):525–531.
- Kurttila, M. (2001). The spatial structure of forests in the optimization calculations of forest planning - a landscape ecological perspective. *For. Ecol. Manage.*, 142(1-3):129–142 .
- McDill, M., Rebain, S. & Braze, J. (2002). Harvest Scheduling with Area-Based Adjacency Constraints. *For. Sci.*, 48(4):631–642.
- Miettinen, K. (1998). *Nonlinear multiobjective optimization*. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Murray, A. (1999). Spatial restrictions in harvest scheduling. *For. Sci.*, 45(1):45–52.
- Oldham, B., Myland, J. & Spainer, J. (2009). *An Atlas of Functions*. New York: Springer-Verlag.
- Paradis, G., Bouchard, M., Lebel, L. & D'amours, S. (2018). A bi-level model formulation for the distributed wood supply planning problem. *Can. J. For. Res.*, 48(2):160–171.
- Pukkala, T. (2019). Using ALS raster data in forest planning. *J. For. Res.*, 30(5):581–1593.

## 11.5. References

- Roise, J. (1990). Multicriteria nonlinear programming for optimal spatial allocation of stands. *For. Sci.*, 36(3):487–501.
- Tonda, A. (2020). Inspyred: Bio-inspired algorithms in Python. *Genet. Program. Evolvable Mach.*, 21:269–272.
- Ungureanu, V. (2018). Pareto-Nash-Stackelberg Game and Control Theory Intelligent Paradigms and Application.
- Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., Haberland, M., Reddy, T., Cournapeau, D., Burovski, E., Peterson, P., Weckesser, W., Bright, J., Walt, S. J. van der, Brett, M., Wilson, J., Jarrod Millman, K., Mayorov, N., J Nelson, A. R., Jones, E., Kern, R., Larson, E., Carey, C. J., Polat, I., Feng, Y., Moore, E. W., VanderPlas, J., Laxalde, D., Perktold, J., Cimrman, R., Henriksen, I., Quintero, E. A., Harris, C. R., Archibald, A. M., Ribeiro, A. H., Pedregosa, F., & van Mulbregt, P. (2020). SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nat. Methods.* 17:261–272.
- Ware, G. & Clutter, J. (1971). Mathematical Programming System For Management Of Industrial Forests. *For. Sci.*, 17(4):428–445.
- Zhu, C., Byrd, R., Lu, P. & Nocedal, J. (1997). Algorithm 778: L-BFGS-B: Fortran Subroutines for Large-Scale Bound-Constrained Optimization. *Acm Trans. Math. Softw.*, 23(4):550–560.