

materia

Matemáticas III

unidade didáctica **4**

A transformada de Laplace

Miguel Ernesto Vázquez Méndez

Área de Matemática Aplicada

Departamento de Matemática Aplicada

Escola Politécnica Superior



VICERREITORÍA DE ESTUDANTES,
CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA



unidade didáctica 4

A transformada de Laplace

Miguel Ernesto Vázquez Méndez
Área de Matemática Aplicada
Departamento de Matemática Aplicada
Escola Politécnica Superior



© Universidade de Santiago de Compostela, 2013



Esta obra atópase baixo unha licenza Creative Commons BY-NC-SA 3.0.
Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-SA 3.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón:
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/legalcode.g>

Deseño
Unidixital
Servizo de Edición Dixital
da Universidade de Santiago de Compostela

Edita
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

Imprime
Unidixital
Dep. Legal: C 276-2013
ISBN 978-84-9887-986-5

MATERIA: Matemáticas III
TITULACIÓN: Grao en Enxeñaría Civil
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

Unidade I. Introducción ás ecuacións diferenciais

Motivación e exemplos
Concepto e clasificación das ecuacións diferenciais
Xeneralidades sobre as solucións
Problemas de valor inicial e problemas de valor na fronteira

Unidade II. Ecuacións diferenciais ordinarias de primeira orde

Ecuacións en variables separadas
Ecuacións homoxéneas
Ecuacións lineares
Ecuacións exactas
Aplicacións en enxeñaría

Unidade III. Ecuacións diferenciais ordinarias lineares de orde superior

Teoría xeral das ecuacións diferenciais lineares.
A ecuación homoxénea de segunda orde con coeficientes constantes
A ecuación non homoxénea
Aplicacións en enxeñaría
Ecuacións de orde superior e sistemas lineares de primeira orde

Unidade IV. A transformada de Laplace

Motivación: Un problema de natureza descontínua e impulsiva
Definición da transformada de Laplace. Propiedades
A transformada inversa. Propiedades
Convolución
Método da transformada de Laplace para problemas de valor inicial
Función impulso. Delta de Dirac
Aplicacións en enxeñaría

Unidade V. Resolución numérica de ecuacións diferenciais ordinarias

Introdución
Problemas de valor inicial de primeira orde. Métodos de Euler
Problemas de valor inicial con ecuacións de orde superior
Problemas de valor na fronteira. Método de diferencias finitas

Unidade VI. Ecuacións en derivadas parciais

Introdución. Un modelo unidimensional para o fluxo de calor
Resolución analítica. Separación de variables
Resolución numérica. Discretización espacial e temporal
Modelos en enxeñaría con ecuacións en derivadas parciais
Ecuacións lineares de segunda orde. Clasificación e resolución numérica con *MATLAB*

ÍNDICE

Presentación	7
Os obxectivos	8
Os principios metodolóxicos	8
Os contidos básicos	9
1. Motivación: Un problema de natureza descontinua e impulsiva	9
2. Definición da transformada de Laplace. Propiedades	11
2.1. Linearidade	14
2.2. Translacións	14
2.3. Derivadas da transformada de Laplace	15
2.4. Transformada de Laplace da derivada e da integral	15
3. A transformada inversa. Propiedades	16
4. Convolución	19
5. Método da transformada de Laplace para resolver un PVI	21
6. Función impulso. Delta de Dirac	22
7. Aplicacións	24
Avaliación	26
Anexos	27
Táboa de transformadas de Laplace	27
Exercicios propostos	28
Bibliografía	31

PRESENTACIÓN

A transformada de Laplace é un método de gran eficiencia á hora de resolver un certo tipo de ecuacións diferenciais e integrais. Ademais do interese que pode ter desde o punto de vista puramente matemático, constitúe unha ferramenta básica na enxeñaría de control moderna (ver, por exemplo, Ogata, 1998 ou Dorf e Bishop, 2005) e resulta especialmente útil á hora de resolver determinados problemas de valor inicial con termos non homoxéneos de natureza descontínua ou impulsiva. Este tipo de problemas aparece con relativa frecuencia en enxeñaría, especialmente cando se estudan sistemas mecánicos ou eléctricos.

Esta unidade didáctica está deseñada para que, en aproximadamente 10 horas de docencia presencial, o alumnado do *Grao en Enxeñaría Civil* se introduza no manexo desta ferramenta matemática. Para iso pártese de que xa se teñen coñecementos básicos de álgebra linear e de cálculo diferencial e integral (adquiridos nas materias *Matemáticas I e II*). Ademais, nesta materia (*Matemáticas III*) o alumno xa se familiarizou coas ecuacións diferenciais (*Unidade I*) e, especialmente, coas ecuacións diferenciais ordinarias (EDO) de primeira orde (*Unidade II*) e coas EDO lineares de orde superior (*Unidade III*), que é onde o uso da transformada de Laplace ten maior aplicación en enxeñaría.

Así, para motivar o estudo da transformada de Laplace, comezaremos presentando un problema relacionado co control da pulverización de tratamentos sobre cultivos. Ese problema, ligado a un oscilador harmónico amortecido, serve de exemplo dun problema asociado a un EDO linear de orde dous que aínda non se sabe resolver, en tanto que o termo non homoxéneo non é unha función continua. Coa intención de poder resolver ese problema (e outros similares) introduciremos a transformada de Laplace¹, estableceremos condicións para a súa existencia, estudaremos algunhas das súas propiedades máis importantes e veremos como se pode aplicar para resolver un problema de valor inicial (PVI) asociado a unha EDO linear de orde superior. Finalmente precisaremos como modelar unha *función impulso* a través dunha *delta de Dirac* e veremos como a transformada de Laplace permite resolver ese tipo de problemas de natureza impulsiva.

¹Neste tema preséntase a transformada de Laplace en variable real, pensando en que os alumnos aos que irá dirixida non posúen coñecementos de funcións de variable complexa. Aínda así, debemos sinalar que o emprego da teoría de variable complexa presenta notables vantaxes tanto no desenvolvemento da teoría (permite establecer unha expresión xeral para a transformada inversa), como no das súas aplicacións (noción de *impedancia* en circuitos eléctricos). Para ver o desenvolvemento da transformada de Laplace en variable complexa o alumno interesado pode consultar, por exemplo, o libro de LePage, 1980.

OS OBXECTIVOS

Búscase que ao rematar a unidade didáctica o alumno sexa capaz de:

- Coñecer e manexar as principais propiedades da transformada (e transformada inversa) de Laplace.
- Coñecer a convolución de funcións e as súas propiedades máis importantes, identificando a convolución cun *produto xeneralizado*.
- Resolver problemas de valor inicial asociados a ecuacións diferenciais lineares utilizando a transformada de Laplace.
- Coñecer e manexar a *función salto*.
- Expresar funcións descontinuas como combinacións de funcións salto.
- Coñecer e manexar a *delta de Dirac*.
- Expresar *funcións impulso* a partir de deltas de Dirac.
- Modelar e resolver problemas da enxeñaría que se poidan formular en termos de ecuacións diferenciais lineares con termo non homoxéneo impulsivo ou descontinuo.

OS PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

Esta unidade didáctica está prevista para ser desenvolta en 10 horas lectivas distribuídas do seguinte xeito:

- Docencia expositiva (7 horas): clases teóricas dirixidas a todo o alumnado que constitúe oficialmente un grupo. Nestas clases o profesor presentará, coa axuda do encerado e doutros medios audiovisuais, os contidos que se detallan na seguinte sección. A explicación de cada concepto, propiedade ou método, irá acompañada dos exemplos que axuden ao alumno a asimilalo e, posteriormente, a realizar os exercicios propostos de xeito totalmente autónomo. As explicacións irán constantemente acompañadas de preguntas que buscarán establecer unha comunicación fluída profesor/alumno e comprobar a correcta asimilación dos distintos conceptos da materia.
- Seminarios (3 horas): clases dirixidas a subgrupos de aproximadamente 20 alumnos nas que o docente, ou calquera alumno orientado polo docente, realizará algúns dos exercicios previamente propostos nas clases teóricas e/ou recollidos nun *boletín de exercicios* (ver anexos). O alumno coñecerá, con antelación suficiente, o grupo de exercicios do boletín que se vai tratar en cada seminario e deberá abordalos antes de que se fagan na clase. Deste xeito, nos seminarios trataranse, especialmente, aqueles problemas que presentan unha maior dificultade para o alumnado.

Como complemento á docencia presencial, habilitarase un «curso virtual» onde o alumno poderá obter material de apoio como a presente unidade didáctica, exercicios de autoavaliación, enlaces a páxinas web de interese,... Ademais, utilizando a ferramenta de correo electrónico e os foros creados para tal efecto, poderá resolver as dubidas que lle vaian xurdindo a medida que vai estudando a materia.

OS CONTIDOS BÁSICOS

1. Motivación: Un problema de natureza descontinua e impulsiva



Figura 1: Maquinaria para a pulverización de tratamentos sobre cultivos

A aplicación que as ecuacións diferenciais lineares teñen no mundo da enxeñaría é sobradamente coñecida. O seu estudo é especialmente interesante cando o segundo membro desas ecuacións resulta ser de natureza descontinua ou *impulsiva*. Un exemplo sinxelo desa situación atópase estudando un circuito de pulverización simple, que é a base da maquinaria agrícola destinada á pulverización de tratamentos sobre cultivos (ver figura 1). Tal e como pode verse na figura 2, o circuito consta dun depósito, unha bomba de presión e dous tubos, un que comunica directamente cos pulverizadores e outro que regresa ao depósito (comunmente denominado *retorno ao depósito*). O caudal pulverizado, en lugar de regularse variando a presión da bomba, regúlase mediante unha válvula instalada no retorno ao depósito, de modo que, se se desexa diminuír a cantidade de líquido pulverizado, ábrese a válvula para que parte do líquido bombeado regrese ao depósito. Se a válvula instalada é de tipo pneumático, como a da figura 3, estará conectada a un compresor co que se controla a súa abertura: se se aumenta a presión a placa baixa e a válvula pecha, se a presión diminúe a placa sobe polo efecto do resorte e a válvula abre.

Antes de instalar a válvula no circuito é necesario estudar cal vai ser o seu comportamento. Concretamente, interesa saber canto tempo tardará a válvula en responder ás variacións de presión do compresor (cal será o seu *tempo de resposta*) e como se verá afectada polos posibles *picos de presión* que poida sufrir. Nese sentido cabe observar que, dependendo do tratamento que se estea a aplicar, desviacións importantes da pulverización desexada poden provocar consecuencias nefastas no cultivo.

Como noutras moitas situacións en enxeñaría, o comportamento da válvula pode modelarse a través dun sinxelo problema de valor inicial asociado a unha EDO linear de segunda orde con coeficientes constantes. Neste caso, admitindo que o líquido que se está pulverizando é viscoso, con constante de amortecemento c kg/s, da segunda lei de Newton tense que (ver, por exemplo, Braun, 1990)

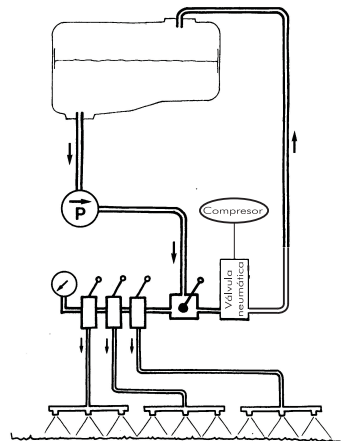


Figura 2: Esquema dun circuito de pulverización simple

$$\begin{cases} mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F_{ext}(t), \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

onde m (kg) é a masa efectiva da válvula, k (kg/s²) é a constante de rixidez do resorte e $x(t)$ mide a distancia da placa da válvula á súa posición de equilibrio ($F_{ext}(t) = 0$) que, polo propio deseño da válvula, pode suporse que se corresponde coa aliñación perfecta entre a placa da válvula e a parte superior do cano.

A resolución do problema (1) cando a función F_{ext} é continua xa foi estudada na *Unidade III*. Non obstante, na situación que estamos propondo, a forza externa F_{ext} vai ser unha función constante a trozos (pero descontínua), se pensamos en cambios de presión *instantáneos* que se manteñen ao longo do tempo, ou ben unha *función impulso*, que será sempre constante salvo nun *instante* no que terá un valor moito máis alto². Para resolver o problema (1) nestes casos resulta moi útil introducir unha nova ferramenta matemática, coñecida como *transformada de Laplace*.

²Na sección 6 precisarase un pouco máis que se entende por *función impulso*.

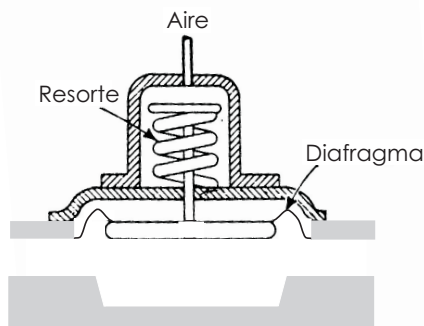


Figura 3: Esquema da válvula pneumática en estudo

2. Definición da transformada de Laplace. Propiedades

A idea básica de calquera *transformación*, desde o punto de vista matemático, consiste en substituír unha serie de *obxectos* (números, funcións,...) por outros novos, coa intención de que ese cambio leve implícito unha simplificación dun problema que teríamos formulado sobre os primeiros. Como un exemplo sinxelo, pero que pode servir para ilustrar a filosofía que seguiremos neste tema, pensemos en que queremos multiplicar dous números reais $x, y \in \mathbb{R}$, pero que non sabemos como facelo. Nese caso, o *logaritmo* pode ser unha transformación interesante, xa que, como $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$, para calcular o produto de x por y basta calcular $\log x$, $\log y$, sumalos e calcular a continuación o *antilogaritmo* dese valor. O problema da multiplicación de dous números substitúese así polo da suma dos seus logaritmos, aínda que para iso é necesario saber calcular *logaritmos* e *antilogaritmos*.

No estudo das ecuacións diferenciais resultan de gran interese as *transformacións integrais*. Unha transformación integral é unha relación da forma

$$F(s) = \int_a^b K(s, t) f(t) dt, \quad (2)$$

onde unha función dada $f(t)$ transfórmase noutra función $F(s)$, a través da multiplicación por unha determinada función $K(s, t)$ (*núcleo* da transformación) e da posterior integración sobre a variable t , nun intervalo $[a, b]$. Coa intención de aplicala posteriormente, dedicamos esta sección a definir e presentar algunhas das propiedades dunha das transformacións integrais máis utilizada, a *transformada de Laplace*.

Definición 1 Sexa $f(t)$ unha función definida en $[0, +\infty)$. A transformada de Laplace de $f(t)$, a cal se denota por $F(s)$ ou $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, é a función definida

por

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (3)$$

para todos aqueles valores de s para os que a integral exista e seja finita.

Exemplo 1 Transformada de Laplace da función constante $f(t) = 1$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-e^{-st}}{s} \Big|_{t=0}^{t=b} \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-sb}}{s} \right] = \begin{cases} \infty & \text{se } s < 0, \\ \frac{1}{s} & \text{se } s > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Co que, $F(s) = \frac{1}{s}$ para $s > 0$.

Exemplo 2 Transformada de Laplace da función $f(t) = t$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} t dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-e^{-st} \left(\frac{t}{s} + \frac{1}{s^2} \right) \Big|_{t=0}^{t=b} \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s^2} - e^{-sb} \left(\frac{b}{s} + \frac{1}{s^2} \right) \right] = \begin{cases} \infty & \text{se } s < 0, \\ \frac{1}{s^2} & \text{se } s > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Co que, $F(s) = \frac{1}{s^2}$ para $s > 0$.

Exemplo 3 Transformada de Laplace da función $f(t) = e^{at}$, onde a é unha constante.

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(a-s)t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-e^{(a-s)t}}{s-a} \Big|_{t=0}^{t=b} \right] \\ &= \frac{1}{s-a}, \text{ para } s > a. \end{aligned}$$

Exemplo 4 Transformada de Laplace da función $f(t) = \cos at$, onde a é unha constante.

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cos(at) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-st}}{a^2 + s^2} (a \sin(at) - s \cos(at)) \Big|_{t=0}^{t=b} \right] \\ &= \frac{s}{a^2 + s^2}, \text{ para } s > 0. \end{aligned}$$

Exemplo 5 Transformada de Laplace da función salto unidade, definida por

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < a, \\ 1 & \text{se } t \geq a, \end{cases}$$

onde $a \geq 0$ é unha constante positiva.

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} H(t-a) dt = \int_0^a e^{-st} 0 dt + \int_a^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-as}}{s}, \text{ para } s > 0.$$

Exemplo 6 Transformada de Laplace da función $f(t) = e^{t^2}$.

$$\int_0^{\infty} e^{-st} e^{t^2} dt = \int_0^{\infty} e^{(t^2-st)} dt, \text{ que diverxe } \forall s \in \mathbb{R}.$$

Por conseguinte a transformada de Laplace de $f(t) = e^{t^2}$ non existe para ningún valor de s .

Tal e como se mostra no último exemplo, hai funcións que non admiten transformada de Laplace (a integral (3) non converge para ningún valor de s). Convén pois, antes de estudar as súas propiedades, establecer condicións que garantan a súa existencia. Para iso, introducimos os conceptos de *continuidade por segmentos* e *orde exponencial*.

Definición 2 Unha función $f(t)$ é continua por segmentos nun intervalo $[a, b]$ se é continua en todo punto dese intervalo, agás posiblemente nun número finito nos que presenta unha descontinuidade de salto.

Dise que unha función $f(t)$ é continua por segmentos en $[a, +\infty)$ se é continua por segmentos en $[a, b]$, para todo $b > a$.

Definición 3 Dise que unha función $f(t)$ é de orde exponencial α se existen constantes positivas T e M de xeito que

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \text{ para todo } t \geq T.$$

Unha boa parte das funcións coas que nos atopamos á hora de resolver ecuacións diferenciais son á vez continuas por segmentos e de orde exponencial. Estas dúas condicións garanten a existencia da súa transformada de Laplace para valores de s *suficientemente grandes*, tal e como se recolle no seguinte resultado, que se proba a partir do criterio de comparación para integrais impropias (ver, por exemplo, Nagle, Saff e Snider, 2005).

Teorema 1 Se $f(t)$ é unha función continua por segmentos en $[0, +\infty)$ e de orde exponencial α , entón a súa transformada de Laplace $F(s)$ existe para $s > \alpha$, cumpríndose ademais que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0.$$

Vexamos agora algunha das propiedades máis elementais da transformada de Laplace.

2.1. Linearidade

Como consecuencia directa da linearidade da integral tense tamén a linearidade da transformada de Laplace.

Teorema 2 Sexan $f_1(t)$ e $f_2(t)$ dúas funcións que teñen transformadas de Laplace para $s > \alpha$ e sexan $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Entón, para $s > \alpha$

$$\mathcal{L}\{(c_1 f_1 + c_2 f_2)(t)\}(s) = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\}(s) + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}(s).$$

Exercicio 1 Calcular $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, sendo

1. $f(t) = 11 + 5e^{4t} - 6 \cos(2t)$.

2. $f(t) = \begin{cases} 5 & \text{se } 0 \leq t < 2 \\ -1 & \text{se } 2 \leq t < 7 \\ 4 & \text{se } t \geq 7 \end{cases}$

2.2. Translacións

Da propia definición, mediante cambios de variable sinxelos, obtense (ver, por exemplo, Nagle, Saff e Snider, 2005).

Teorema 3 Sexa $f(t)$ unha función continua por segmentos en $[0, \infty)$ e de orde exponencial α . Dado $a \in \mathbb{R}$, verifícase que

i) $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s - a)$, para $s > \alpha + a$.

ii) Se $a > 0$, entón $\mathcal{L}\{f(t - a) H(t - a)\}(s) = e^{-as} F(s)$, para $s > \alpha$.

Observación 1 Na práctica é máis común atoparse co problema de calcular a transformada dunha función expresada como $g(t)H(t - a)$ que a da función expresada como $f(t - a)H(t - a)$. Para calcular $\mathcal{L}\{g(t)H(t - a)\}$ basta identificar $g(t)$ con $f(t - a)$ de xeito que $f(t) = g(t + a)$. A propiedade ii) do teorema anterior resulta agora

$$\mathcal{L}\{g(t)H(t - a)\}(s) = e^{-as} \mathcal{L}\{g(t + a)\}(s).$$

Exercicio 2 Calcular $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, sendo

1. $f(t) = e^{at} \cos(bt)$.

2. $f(t) = \begin{cases} 5 & \text{se } 0 \leq t < 3 \\ t^2 & \text{se } t \geq 3 \end{cases}$

2.3. Derivadas da transformada de Laplace

Intercambiando a orde de derivación e integración dedúcese directamente o seguinte resultado.

Teorema 4 *Sexa $f(t)$ unha función continua por segmentos en $[0, \infty)$ e de orde exponencial α . Entón, para $s > \alpha$, tense que*

$$i) \quad F'(s) = -\mathcal{L}\{t f(t)\}(s).$$

$$ii) \quad F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s).$$

Exercicio 3 *Calcular $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, sendo*

1. $f(t) = t^n$, $n = 1, 2, \dots$
2. $f(t) = t^n e^t$, $n = 1, 2, \dots$

2.4. Transformada de Laplace da derivada e da integral

Aplicando integración por partes obtense a expresión para a transformada de Laplace da derivada dunha determinada función (ver, por exemplo, Edwards e Penney, 1985).

Teorema 5 *Sexa $f(t)$ unha función continua, de orde exponencial α e tal que a súa primeira derivada ($f'(t)$) é continua por segmentos en $[0, \infty)$. Entón, $f'(t)$ admite transformada de Laplace para $s > \alpha$ e esta vén dada por*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0).$$

A aplicación reiterada deste resultado conduce ao seguinte, de carácter máis xeral.

Corolario 1 *Sexa $f(t)$ unha función definida en $[0, \infty)$ de xeito que ela e tódalas súas derivadas até a orde $n - 1$ son continuas e de orde exponencial α . Se a derivada de orde n ($f^{(n)}(t)$) é continua por segmentos en $[0, \infty)$, entón admite transformada de Laplace para $s > \alpha$, que vén dada por*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Estes resultados dan a clave de como pode utilizarse a transformada de Laplace para resolver ecuacións diferenciais: utilizando a transformada de Laplace, a operación de *derivar con respecto a t* substitúese pola de *multiplicar por s* , convertendo así unha ecuación diferencial linear nunha ecuación alxebrica (ver exemplo 7).

Ademais, estes resultados poden ser de gran utilidade para calcular transformadas de Laplace a partir doutras xa coñecidas e, en calquera caso,

permiten obter (sen máis que utilizar o teorema 5 e o primeiro teorema fundamental do cálculo integral) a seguinte expresión para a transformada da integral (ver, por exemplo, Edwards e Penney, 1985).

Teorema 6 *Sexa $f(t)$ unha función continua por segmentos en $[0, \infty)$ e de orde exponencial α . Entón, para $s > \alpha$, tense que*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s).$$

3. A transformada inversa. Propiedades

Efectivamente, tal e como xa dixemos, o corolario 1 indica como utilizar a transformada de Laplace para resolver un problema de valor inicial asociado a unha EDO linear. Ilustramos este feito co seguinte exemplo.

Exemplo 7 *Resolver o seguinte problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' - y = \cos t, & t \geq 0, \\ y(0) = 0, & y'(0) = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Aplicando a transformada nos dous membros da ecuación diferencial e utilizando que esta é linear (teorema 2) e que coñecemos a expresión para a transformada das derivadas (corolario 1) obtense que

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - Y(s) = \mathcal{L}\{\cos t\}(s),$$

onde, coa notación habitual, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$.

Substituíndo agora os valores $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ e utilizando que $\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = s/(s^2 + 1)$ (exemplo 4), chégase a

$$s^2Y(s) - 1 - Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1},$$

de onde, despxendo, resulta que

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^4 - 1}.$$

O problema (4) transformouse en atopar unha función $y(t)$ que teña por transformada de Laplace á función $Y(s)$ dada pola expresión anterior. Ao estudo de tal proceso dedicamos esta sección.

O problema que nos formulamos é o seguinte: dada unha función $Y(s)$, trátase de determinar outra función $y(t)$ tal que $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ (a esa función $y(t)$ chamarémoslle *transformada inversa de Laplace* de $Y(s)$). En certo xeito, trátase de *invertir o operador transformada de Laplace* e, para iso, debemos cuestionarnos en primeiro lugar se ese operador é inxectivo.

Preguntámonos pois se dada $Y(s)$ pode haber, ou non, máis dunha función, $y(t)$, que teña por transformada a $Y(s)$. A resposta a esa cuestión vén dada polo seguinte resultado (o alumno interesado pode consultar a demostración en Doetsch, 1970).

Teorema 7 (Teorema de Lerch) *Sexan f e g funcións continuas por segmentos en $[0, \infty)$ e de orde exponencial α , e supóñase que existe un número s_0 tal que*

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s), \quad \text{para todo } s > s_0.$$

Entón $f = g$, excepto como moito nos puntos de discontinuidade das funcións. Isto é,

$$f(t) = g(t) \quad \text{en } \{t > 0, \text{ tal que } f \text{ e } g \text{ son continuas en } t\}.$$

O feito de que as *transformadas inversas* difiran como máximo nos puntos illados de discontinuidade (o cal na práctica non ten maior importancia), lévanos a considerar que a transformada inversa de Laplace, de existir, é *esencialmente única*. Convén observar ademais que o resultado anterior indica, en particular, que se para unha función dada $F(s)$, existe outra función continua $f(t)$ verificando $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, esta é única. Deste xeito, como a solución dunha ecuación diferencial é continua, o método da transformada de Laplace (ver exemplo 7) serve para determinar univocamente a súa solución.

A segunda pregunta que nos facemos é se o operador transformada de Laplace é sobrexectivo. A resposta, de carácter negativo, vén dada polo teorema 1, que establece unha condición necesaria para que unha función sexa transformada de Laplace dalgunha outra función de orde exponencial. En efecto, segundo ese resultado, para que $F(s)$ definida en $[s_0, \infty)$ sexa transformada dalgunha función $f(t)$ de orde exponencial debe verificarse que $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$, co que, por exemplo, a función $F(s) = 1$ non é transformada de Laplace de ningunha función de orde exponencial.

Tendo presentes as observacións anteriores podemos establecer a seguinte definición.

Definición 4 *Dada unha función $F(s)$ definida en (s_0, ∞) , chamamos transformada inversa de Laplace de $F(s)$ a calquera función, $f(t)$, continua por segmentos en $[0, \infty)$ e de orde exponencial α (para algún α), que verifique*

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s). \tag{5}$$

No caso de que unha desas funcións sexa continua en $[0, \infty)$ referirémonos a ela como a transformada inversa de Laplace de $F(s)$ e denotarémola por $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. Se esa función continua non existe, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ denotará a unha das funcións continuas por segmentos (se existe algunha) que satisfaga (5).

Convén observar que, aínda que no marco da variable complexa (que nós non estamos a considerar) pode darse unha expresión xeral

para a transformada inversa de Laplace, esta non adoita ser de gran utilidade práctica. O cálculo elemental de transformadas inversas faise en base ao coñecemento de certas transformacións inmediatas (por exemplo $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-a)\}(t) = e^{at}$, en tanto que $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = 1/(s-a)$) e determinadas manipulacións previas, realizadas en base ás propiedades de \mathcal{L}^{-1} .

As propiedades estudadas na sección anterior para a transformada de Laplace teñen o seu recíproco para a transformada inversa, podéndose enunciar á inversa tódolos teoremas desa sección. Destacamos, pola súa importancia, o carácter linear da transformada inversa que recolleemos no seguinte resultado (recíproco do teorema 2).

Teorema 2' Sexan $F_1(s)$ e $F_2(s)$ dúas funcións para as que existe a transformada inversa de Laplace e sexan $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Verifícase que

$$\mathcal{L}^{-1}\{(c_1F_1 + c_2F_2)(s)\} = c_1\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + c_2\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}.$$

Exercicio 4 Calcular

1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}$.
2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}$.
3. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right\}$.

En moitos casos, á hora de calcular a transformada inversa dunha función, resulta axeitado facer uso desta propiedade. Neses casos, con frecuencia, é necesario previamente descompor a función nunha suma de funcións cuxas transformadas inversas resulten coñecidas. Para este fin, os desenvolvementos en fraccións parciais son, tal e como se ilustra no seguinte exemplo, de gran utilidade.

Exemplo 8 Determinar

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{s^4-1}\right\}.$$

Descompondo o denominador da fracción en produto de factores irreducíbeis, temos

$$\frac{s^2+s+1}{s^4-1} = \frac{A_1}{s-1} + \frac{B_1}{s+1} + \frac{C_1s+D_1}{s^2+1},$$

onde, calculando os coeficientes, resulta $A_1 = 3/4$, $B_1 = -1/4$, $C_1 = -1/2$ e $D_1 = 0$. Utilizando agora a linearidade do operador \mathcal{L}^{-1} e os exemplos 3 e 4, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 + s + 1}{s^4 - 1}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{4(s-1)} - \frac{1}{4(s+1)} - \frac{1}{2(s^2+1)}\right\} \\
&= \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} \\
&= \frac{3}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t.
\end{aligned}$$

Exercicio 5 *Calcular*

1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 + 9s + 2}{(s-1)^2(s+3)}\right\}$.
2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s+1)}\right\}$.

4. Convolución

Introducimos agora un concepto de gran importancia en si mesmo, que permite ademais simplificar o cálculo de transformadas inversas en determinadas situacións. Comezamos cun exemplo.

Exemplo 9 *Consideremos o problema de valor inicial*

$$y''(t) + y(t) = \cos(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (6)$$

Se aplicamos a transformada de Laplace nos dous membros da ecuación e temos en conta as condicións iniciais, resulta

$$s^2Y(s) + Y(s) = \mathcal{L}\{\cos(t)\}(s),$$

de onde,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}\mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) = \mathcal{L}\{\sin(t)\}(s)\mathcal{L}\{\cos(t)\}(s).$$

En ocasións, tal e como acabamos de ver no exemplo anterior, é posible identificar $Y(s)$, transformada de Laplace dunha certa función descoñecida $y(t)$, como o produto de dúas transformadas $F(s)$ e $G(s)$, correspondentes a funcións coñecidas $f(t)$ e $g(t)$. Desgraciadamente, dese feito non pode deducirse que $y(t)$ sexa o produto de $f(t)$ por $g(t)$ pero, aínda así, suxírenos que debería haber unha forma de combinar f e g para obter y . Efectivamente esa *operación* existe (ver teorema 9) e recibe o nome de *convolución*.

Definición 5 *Sexan $f(t)$ e $g(t)$ continuas por segmentos en $[0, +\infty)$. A convolución de $f(t)$ e $g(t)$, denotada por $f * g$, defínese do seguinte xeito*

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-u)g(u)du.$$

A convolución considérase ás veces un «produto xeneralizado» e, de feito, posúe algunhas propiedades análogas ao produto ordinario. Recollemos estas no seguinte resultado, cuxa proba é un sinxelo exercicio de cambio de variable.

Teorema 8 Sexan $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ continuas por segmentos en $[0, +\infty)$.

Entón,

- i) $f * g = g * f$.
- ii) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.
- iii) $(f * g) * h = f * (g * h)$.
- iv) $f * 0 = 0$.

Ademais, como xa adiantamos, temos un resultado que establece a relación entre a transformada da convolución de dúas funcións e o produto das súas transformadas. Para a súa demostración utilízase o cambio de orde na integración e a propiedade do desprazamento (ver, por exemplo, Nagle, Saff e Snider, 2005).

Teorema 9 (Teorema de convolución) Sexan $f(t)$ e $g(t)$ funcións continuas por segmentos en $[0, +\infty)$ e de orde exponencial α , e sexan $F(s)$ e $G(s)$ as súas transformadas de Laplace. Entón

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s)G(s),$$

ou, de forma equivalente,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) = (f * g)(t).$$

As integrais de convolución utilízanse no cálculo de transformadas inversas e, de feito, se utilizamos o resultado anterior no exemplo 9 obtemos directamente que a solución do problema (6) vén dada por $y(t) = \sin(t) * \cos(t)$.

Ademais de no cálculo de transformadas inversas, as integrais de convolución teñen importantes aplicacións na resolución de determinadas ecuacións integrais e ecuacións integro-diferenciais, que xorden asociadas a situacións nas cales o comportamento do sistema no instante t non só depende do seu estado nese instante, senón tamén da súa historia pasada. Este tipo de sistemas (ás veces denominados *sistemas hereditarios*) aparecen, por exemplo, na dinámica de poboacións (ver Boyce e DiPrima, 2003 ou Nagle, Saff e Snider, 2005).

A convolución é tamén unha ferramenta imprescindible en enxeñaría de control, cando se utiliza a transformada de Laplace para definir e manexar a «función de transferencia» e a «resposta ao impulso unitario». O alumno interesado neste tema pode consultar, por exemplo, o texto de Ogata, 1998 ou o libro de Dorf e Bishop, 2005.

5. Método da transformada de Laplace para resolver un PVI

Presentamos agora o método da transformada de Laplace para resolver problemas de valor inicial asociados a ecuacións diferenciais lineares con coeficientes constantes, que xa foi introducido no exemplo 7.

Consideremos o problema de valor inicial

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = f(t) \quad (7)$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y'_0 \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{n-1}, \quad (8)$$

onde a_k ($k = 0, \dots, n$), y_0, y_0^j ($j = 1, \dots, n-1$), son constantes e $f(t)$ é unha función dada.

Os pasos a seguir para resolver este problema son os seguintes:

Paso 1: Aplicar a transformada de Laplace nos dous membros da ecuación diferencial (7) e utilizar a linearidade (teorema 2) e a expresión que temos para a transformada das derivadas (corolario 1). Substituír entón as condicións iniciais (8) e obter así unha ecuación para $Y(s)$ (transformada da solución).

Paso 2: Resolver a ecuación e obter o valor de $Y(s)$.

Paso 3: Calcular a transformada inversa de $Y(s)$, función $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t)$, que resulta ser a solución do problema (7)-(8).

A aplicación do método a un caso particular pode verse nos exemplos 7 e 8 nos que se resolve completamente o problema (4). Os pasos 1 e 2 lévanse a cabo no exemplo 7, onde se obtén a transformada da solución $Y(s)$. O paso 3 realízase no exemplo 8, obténdose finalmente que a solución do problema (4) vén dada por

$$y(t) = \frac{3}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t.$$

Como resumo do que acabamos de ver podemos mencionar que o método da transformada de Laplace converte o problema de valor inicial (7)-(8) nun problema alxebraico no que se incorporan automaticamente as condicións iniciais, proporcionando a solución de modo directo, sen necesidade de atopar previamente a *solución xeral*. O método da transformada de Laplace é especialmente útil cando a función de segundo membro en (7) non é continua.

Exercicio 6 Resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 4y = f(t), & t \geq 0, \\ y(0) = 0, & y'(0) = 0, \end{cases}$$

sendo $f(t)$ a función dada por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < 1, \\ -1 & \text{se } 1 \leq t < 2, \\ 0 & \text{se } t \geq 2. \end{cases}$$

No último apartado deste tema mostraremos a resolución dun problema, xa presentado na sección 1, no que o segundo membro é de natureza impulsiva. Previamente debemos precisar algo máis sobre que se entende por *funcións impulso*.

6. Función impulso. Delta de Dirac

En determinadas aplicacións físicas é habitual atoparnos funcións que nun intervalo moi pequeno alcanzan un valor moi alto. Un pau que golpea unha pelota (o impacto é case *instantáneo*), o aumento de voltaxe dun circuito eléctrico debido á descarga dun raio, unha carga pesada concentrada nun determinado punto dunha viga ou unha válvula pneumática conectada a un compresor que sofre un *pico de presión*, son exemplos de situacións nas que aparecen ese tipo de funcións que, con frecuencia, reciben o nome de *funcións impulso*.

Tomemos como exemplo unha forza, $f(t)$, que actúa durante un intervalo de tempo moi pequeno $[a, b]$, de modo que o valor de $f(t)$ é *grande* nese intervalo e é cero fóra del. En tal situación, a miúdo ocorre que o principal efecto da forza só depende do valor da integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt,$$

que recibe o nome de *impulso total* da forza. Se iso é así, non necesitamos coñecer de forma precisa a función $f(t)$ nin o lapso exacto durante o que actúa (o cal resulta moi afortunado posto que na maioría das situacións, pensemos nun pau que golpea a unha pelota, poderase estimar o impulso da forza e o *instante* ao redor do cal actúa, pero é pouco probable que se teña información máis detallada sobre esa *forza impulsiva*). Supoñamos entón que a nosa forza ten un impulso de 1 e que actúa durante un pequeno intervalo de tempo ao redor do instante $t = t_0$. Entón, podemos seleccionar $\tau > 0$ de modo que 2τ aproxime a duración do lapso e substituír $f(t)$ pola función específica

$$f_{t_0, \tau}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau} & \text{se } t \in (t_0 - \tau, t_0 + \tau), \\ 0 & \text{noutro caso,} \end{cases} \quad (9)$$

cuxo impulso total é 1, para calquera valor de $\tau > 0$

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{t_0, \tau}(t) dt = \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} \frac{1}{2\tau} dt = 1 \quad \text{para } \tau > 0. \quad (10)$$

Dado que o lapso preciso durante o cal actúa a forza é moi pequeno, pero non parece ser importante, resulta tentador pensar nunha forza que ocorra precisamente en $t = t_0$ e que teña impulso total igual a 1. Buscando un modelo para esa forza poderíamos pensar, nun primeiro momento, en tomar límites cando $\tau \rightarrow 0$ e definir a *función impulso unitario en t_0* (δ_{t_0}) como o límite puntual das funcións $f_{t_0,\tau}(t)$. Con respecto a isto, debemos observar que:

1. O límite puntual das funcións $f_{t_0,\tau}(t)$ vén dado por

$$\delta_{t_0}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} f_{t_0,\tau}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq t_0, \\ \infty & \text{se } t = t_0. \end{cases} \quad (11)$$

2. Nós queremos que o noso *impulso unitario* δ_{t_0} verifique ademais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t) dt = 1, \quad (12)$$

algo que, por outra banda, conseguiríase se en (10) puidésemos intercambiar o límite coa integral.

As condicións (11) e (12) foron consideradas inicialmente como as caracterizacións dunha determinada «función», denominada *delta de Dirac*, utilizada para representar ese *impulso unitario*. Evidentemente, non existe ningunha función (en sentido usual) que satisfaga simultaneamente (11) e (12), polo que esa caracterización, introducida a principios do século XX, foi moi cuestionada polos matemáticos. Este problema solucionouse a finais da década de 1940, cando se logrou situar a delta de Dirac sobre un fundamento matemático firme: o *espazo das distribucións*.

A teoría das distribucións é unha ferramenta complexa, pero actualmente imprescindible en distintos campos da matemática aplicada. En calquera caso, esa teoría escápase dos contidos desta materia e o alumno interesado debe consultar bibliografía específica (ver, por exemplo, Zemanian, 1987). Neste curso aceptaremos sen proba o seguinte resultado.

Teorema 10

$$\mathcal{L} \{ \delta_{t_0} \} (s) = e^{-st_0}.$$

En particular, cando $t_0 = 0$, tense que $\mathcal{L} \{ \delta_0 \} (s) = 1$.

Ademais, a transformada de Laplace dunha distribución verifica propiedades similares ás xa estudadas para funcións (ver, por exemplo, Doetsch, 1970) de tal modo que o método visto na sección 5 resulta igualmente válido no marco das distribucións e, consecuentemente, pode aplicarse tamén cando no segundo membro aparecen deltas de Dirac.

Exemplo 10 Resolver o seguinte problema

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = \delta_0 \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0. \end{cases} \quad (13)$$

Procedendo como no exemplo 7, e tendo en conta que $\mathcal{L}\{\delta_0\}(s) = 1$ (teorema 10), resulta que

$$a(s^2Y(s) - y_0s - y_0') + b(sY(s) - y_0) + cY(s) = 1,$$

onde, coa notación habitual, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. Despexando $Y(s)$ na expresión anterior obtense que

$$Y(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} + \frac{a(sy_0 + y_1) + by_0}{as^2 + bs + c}$$

e a solución do problema (13) é a transformada inversa dese cociente de polinomios.

7. Aplicacións

Consideremos o problema exposto na sección 1. Supoñamos, en primeiro lugar, que queremos simular o comportamento da válvula nunha situación na que temos presión manométrica $P_0 \text{ kg cm}^{-1} \text{ s}^{-2}$ durante os t_0 primeiros segundos, $P_1 \text{ kg cm}^{-1} \text{ s}^{-2}$ durante os $(t_1 - t_0)$ seguintes e $P_2 \text{ kg cm}^{-1} \text{ s}^{-2}$ no resto. Neste caso, a función F_{ext} virá dada por

$$F_{ext}(t) = \begin{cases} P_0 A & \text{se } t \leq t_0, \\ P_1 A & \text{se } t_0 < t \leq t_1, \\ P_2 A & \text{se } t > t_1, \end{cases} \quad (14)$$

onde $A \text{ (cm}^2\text{)}$ é a área efectiva da válvula. Se definimos agora

$$2b = \frac{c}{m}, \quad a^2 = \frac{k}{m}, \quad F_j = \frac{P_j A}{m}, \quad j = 1, 2, 3,$$

a transformada de Laplace da solución ao problema (1) con segundo membro (14) vén dada por

$$X(s) = \frac{F_0 + (F_1 - F_0)e^{-t_0s} + (F_2 - F_1)e^{-t_1s}}{s(s^2 + 2bs + a^2)}.$$

A partir desta, a solución obtense aplicando a propiedade do desprazamento e o método das fraccións simples. De modo condensado pode expresarse como

$$x(t) = F_0 f(t) + (F_1 - F_0)f(t - t_0)H(t - t_0) + (F_2 - F_1)f(t - t_1)H(t - t_1),$$

onde, se admitimos que $a^2 > b^2$ (movemento subamortecido) e definimos $\alpha = \sqrt{a^2 - b^2}$, $\theta = \arctan(b/\alpha)$, a función $f(t)$ vén dada por

$$f(t) = \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{a}{\alpha} e^{-bt} \cos(\alpha t - \theta) \right). \quad (15)$$

Observamos pois que cada variación de presión ΔP se traduce, despois dun certo tempo (*tempo de resposta*), nun desprazamento $(\Delta P A)/k$ da válvula. Durante ese tempo, e para alcanzar a nova posición, a válvula sofre un movemento oscilatorio amortecido, cuxa amplitude decrece de xeito exponencial con $b = c/2m$ e onde a *frecuencia natural* (terminoloxía utilizada en Simmons, 2002) vén dada por

$$frecuencia = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4mk - c^2}{4m^2}}.$$

Nesta situación, o comportamento dunha válvula con $m = 2.7 \text{ kg}$, $A = 104 \text{ cm}^2$ e $k = 20 \text{ kg s}^{-2}$, pode verse na figura 4. Esta foi obtida co software *MATLAB*, considerando que a constante de amortecemento do líquido era $c = 3 \text{ kg/s}$ e que a presión manométrica á que estaba sometida a válvula era 0 os dous primeiros segundos, $0.4 \text{ kg cm}^{-1} \text{ s}^{-2}$ os dezaioito seguintes e $0.1 \text{ kg cm}^{-1} \text{ s}^{-2}$ o resto.

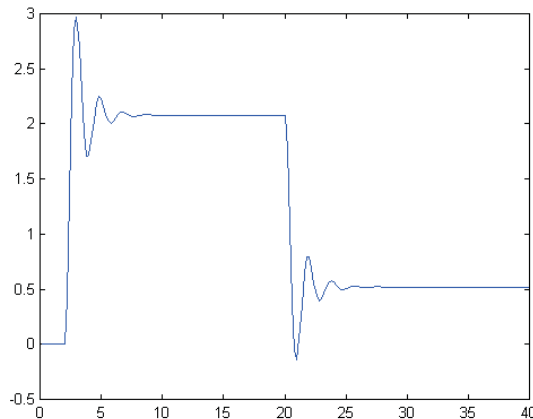


Figura 4: Comportamento da válvula ante cambios bruscos de presión

Supoñamos agora que a nosa intención é observar o comportamento da válvula cando, estando sometida a unha presión constante, poñamos $P_c \text{ kg cm}^{-1} \text{ s}^{-2}$, nun instante t_a sofre un *pico de presión* de $\Delta P \text{ kg cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Nese caso a forza externa debe expresarse mediante unha Delta de Dirac, concretamente,

$$F_{ext}(t) = P_c A + \Delta P A \delta(t - t_a). \quad (16)$$

A transformada da solución neste caso vén dada por

$$X(s) = \frac{P_c A}{m} \frac{1}{s(s^2 + 2bs + a^2)} + \frac{\Delta P A}{m} \frac{e^{-st_a}}{s^2 + 2bs + a^2},$$

co que a solución ao problema resulta

$$x(t) = \frac{P_c A}{m} f(t) + \frac{\Delta P A}{\alpha m} e^{-b(t-t_a)} \sin(\alpha(t-t_a)) H(t-t_a).$$

A resposta da válvula ao *pico de presión* consiste unicamente nun movemento oscilatorio amortecido, de modo que, transcorrido o tempo de resposta, a válvula recupera a súa posición orixinal. Se consideramos a válvula anterior sometida a unha presión constante $P_c = 0.1 \text{ kg cm}^{-1} \text{ s}^{-2}$ e supomos que aos 10 segundos sofre un pico de $\Delta P = 0.3 \text{ kg cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$, o seu comportamento ilústrase na figura 5 (gráfica obtida con *MATLAB*).

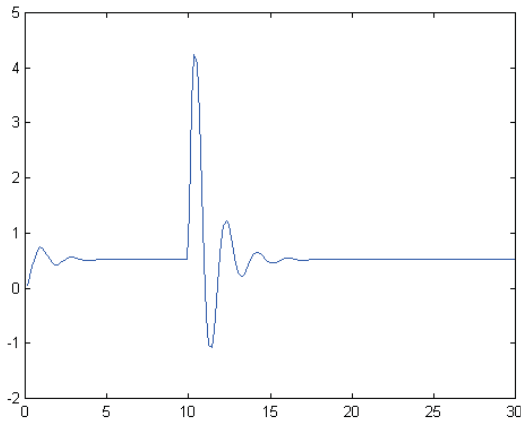


Figura 5: Comportamento da válvula ante un *pico de presión*

AVALIACIÓN

Non está previsto realizar unha avaliación específica desta unidade didáctica senón unha avaliación global (e continuada) de toda a materia da que forma parte. A avaliación da materia farase a partir dunha serie de probas escritas que consistirán na realización de exercicios completamente similares aos incluídos nos boletíns propostos (eventualmente eses boletíns incluírán pequenas cuestións teóricas para analizar o grao de asimilación dos conceptos estudados). Obviamente, os exercicios relacionados con esta unidade didáctica que se inclúan nesas probas de avaliación buscarán determinar se se alcanzaron os obxectivos propostos que xa foron detallados na segunda sección desta guía.

Táboa de transformadas de Laplace

Función $f(t)$	Transformada $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
1	$\frac{1}{s}, s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s > a$
$t^n, n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$
$\text{sen}(bt)$	$\frac{b}{s^2 + b^2}, s > 0$
$\text{cos}(bt)$	$\frac{s}{s^2 + b^2}, s > 0$
$e^{at}t^n, n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s > a$
$e^{at}\text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$
$e^{at}\text{cos}(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$
$H(t-t_0), t_0 > 0$	$\frac{e^{-st_0}}{s}, s > 0$
$\delta_{t_0}, t_0 > 0$	e^{-st_0}

Exercícios propostos

1. Calcule a transformada de Laplace das seguintes funções

(a) $f(t) = 11 + 5e^{4t} - 6\sin(2t)$.

Sol.: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{11}{s} + \frac{5}{s-4} - \frac{12}{s^2+4}$.

(b) $f(t) = t \sin(2t)$.

Sol.: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$.

(c) $f(t) = 3t^2 - e^{2t}$.

Sol.: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s-2}$.

(d) $f(t) = t^2 \sin(bt)$.

Sol.: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{6bs^2 - 2b^3}{(s^2+b^2)^3}$.

(e) $f(t) = \sin^2 t$.

Sol.: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{(s^2+4)} \right)$.

(f) $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq t < 5, \\ 0 & \text{se } 5 \leq t < 10, \\ e^{4t} & \text{se } t \geq 10. \end{cases}$

Sol.: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{e^{-10(s-4)}}{s-4} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s} e^{-5s}$.

(g) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < \pi, \\ 3 \cos(t) & \text{se } t \geq \pi. \end{cases}$

Sol.: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{-3s}{s^2+1} e^{-\pi s}$.

(h) $f(t) = \begin{cases} 1-t & \text{se } 0 \leq t < 1, \\ 1 & \text{se } 1 \leq t < 2, \\ t-2 & \text{se } t \geq 2. \end{cases}$

Sol.: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right) e^{-s} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \right) e^{-2s}$

2. Calcule a transformada inversa de Laplace das seguintes funções

(a) $F(s) = \frac{2}{s^3}$.

Sol.: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = t^2$.

(b) $F(s) = \frac{3}{s^2+9}$.

Sol.: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \sin(3t)$.

(c) $F(s) = \frac{s-1}{s^2-2s+5}$.

Sol.: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = e^t \cos(2t)$.

(d) $F(s) = \frac{5}{s-6} - \frac{6s}{s^2+9} + \frac{3}{2s^2+8s+10}$.

Sol.: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = 5e^{6t} - 6 \cos(3t) + 3/2 e^{-2t} \sin t$.

(e) $F(s) = \frac{5}{(s+2)^4}$.

Sol.: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = 5/6 e^{-2t} t^3$.

(f) $F(s) = \frac{3s+2}{s^2+2s+10}$.

Sol.: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = 3e^{-t} \cos(3t) - 1/3 e^{-t} \sin(3t)$.

(g) $F(s) = \frac{7s-1}{s^3+6s^2+11s+6}$.

Sol.: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = -4e^{-t} + 15e^{-2t} - 11e^{-3t}$.

(h) $F(s) = \frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)}$.

Sol.: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = 2e^t + 3e^t t - e^{-3t}$.

(i) $F(s) = \frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)}$.

Sol.: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = 3e^t \cos(2t) + 4e^t \sin(2t) - e^{-t}$.

$$(j) F(s) = \frac{1}{s^5}.$$

$$\text{Sol.: } \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{24}t^4.$$

$$(k) F(s) = \frac{1}{s^2+4s+8}.$$

$$\text{Sol.: } \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}\sin(2t).$$

$$(l) F(s) = \frac{7s^2-41s+84}{(s-1)(s^2-4s+13)}.$$

$$\text{Sol.: } \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = 5e^t + e^{2t}2\cos(3t) - 5e^{2t}\sin(3t).$$

$$(m) F(s) = \frac{s^2+4}{(s^2+s)(s^2+s-6)}.$$

$$\text{Sol.: } \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = -\frac{2}{3} + \frac{5}{6}e^{-t} + \frac{4}{15}e^{2t} - \frac{13}{30}e^{-3t}.$$

3. Resolve os seguintes problemas de valor inicial utilizando a transformada de Laplace.

$$(a) y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 12.$$

$$\text{Sol.: } y(t) = -e^{-t} + 3e^t \cos(2t) + 4e^t \sin(2t).$$

$$(b) y'(t) - y(t) = 1, \quad y(0) = 0.$$

$$\text{Sol.: } y(t) = e^t - 1.$$

$$(c) y'' - 2y' + 5y = -8e^{(\pi-t)}, \quad y(\pi) = 2, \quad y'(\pi) = 12.$$

$$\text{Sol.: } y(t) = e^{-(t-\pi)} + 3e^{(t-\pi)} \cos(2t) + 4e^{(t-\pi)} \sin(2t).$$

4. Consideremos un tanque con alimentadores controlados mediante válvulas que inicialmente contén 1000 litros de auga con 300 kg de sal disolvido. Nun determinado instante ábrese a válvula A que verte auga salgada ao tanque a razón de 6 litros por minuto e cunha concentración de 4 kg por litro. Aos 10 minutos péchase esa válvula e ábrese unha válvula B que verte auga salgada a razón de 6 litros por minuto cunha concentración de 2 kg por litro. A válvula de saída C baleira o tanque a razón de 6 litros por minuto, polo que o volume do tanque permanece constante. Se a solución se mantén ben mesturada, calcula a cantidade de sal (en kg) que hai no depósito despois de 15 minutos de abrir a primeira válvula.

Sol.: A cantidade de sal $x(t)$ despois de t minutos vén dada pola expresión

$$x(t) = 4000 - 3700e^{-3t/500} - 2000 \begin{cases} 1 - e^{-3(t-10)/500}, & \text{se } t > 10, \\ 0 & \text{se } t < 10. \end{cases}$$

Polo tanto, despois de 15 minutos, $x(15) = 559,34$ kg de sal.

5. Una masa unida a un resorte libérase dende o repouso 1 metro por debaixo da súa posición de equilibrio e comeza a vibrar. Despois de π segundos, golpéase a masa cun martelo que exerce un impulso sobre ela. Se $x(t)$ denota a distancia da masa respecto da posición de equilibrio, tendo en conta a masa e as propiedades do resorte, despois de t segundos de soltala, $x(t)$ é solución do problema

$$\begin{cases} x''(t) + 9x(t) = 3\delta(t - \pi), \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Calcula $x(t)$.

$$\text{Sol.: } x(t) = \cos(3t) - H(t - \pi) \sin(3t).$$

6. Coa intención de coñecer a resposta dun circuíto a variacións bruscas do potencial, consideremos un circuíto eléctrico que consta dun xerador, unha resistencia, un inductor e un condensador en serie (ver figura 6), coñecido como circuíto do tipo RLC en serie.

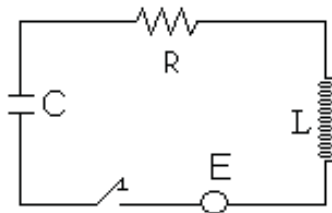


Figura 6: Esquema dun circuíto RLC en serie

A intensidade de corrente ($I(t)$) no circuíto en cada instante de tempo t obtense resolvendo o problema de valor inicial

$$\begin{cases} LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = e(t), \\ I(0) = 0, \quad I'(0) = 0, \end{cases} \quad (17)$$

onde L é a inductancia, R a resistencia, C a capacitancia e $e(t)$ é, *dalgún xeito*, a derivada da forza electromotriz ($E(t)$) proporcionada polo xerador. Supoñamos que se activa o conmutador do circuíto no instante $t = 0$ de xeito que durante os cinco primeiros segundos se aplica unha forza electromotriz de 1V que pasa a ser de 2V a partir do instante $t = 5$. Neste caso a forza electromotriz vén dada por

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ 1 & \text{se } 0 \leq t < 5, \\ 2 & \text{se } t \geq 5, \end{cases} \quad (18)$$

e a función $e(t)$ resulta ser $e(t) = \delta_0 + \delta_5$. Supondo que $L = 2\text{H}$, $R = 1\Omega$ e $C = 0.5\text{F}$, calcula $I(t)$.

Sol.:

$$I(t) = \frac{2}{\sqrt{15}}e^{-t/4} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t\right) H(t) + \frac{2}{\sqrt{15}}e^{-(t-5)/4} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}(t-5)\right) H(t-5).$$

7. Consideremos un circuíto RLC en serie con datos $R = 110\Omega$, $L = 1\text{H}$, $C = 0.001\text{F}$ e unha batería que proporciona unha forza electromotriz $E = 90\text{V}$. Se o circuíto está inicialmente inactivo (sen corrente nin carga) e no instante $t = 0$ ponse o conmutador en *on* e en $t = 1$ pásase á posición *off*, calcula a corrente resultante no circuíto.

Sol.: $I(t) = e^{-10t} - e^{-100t} - H(t-1)(e^{10-10t} - e^{100-100t})$

BIBLIOGRAFÍA

- OGATA, K. (1998): *Ingeniería de control moderna*: Prentice-Hall.
- DORF, R.C. e R.H. BISHOP (2005): *Sistemas de control moderno*, Madrid: Pearson Education.
- LEPAGE, W.R. (1980): *Complex variables and the Laplace transform for engineers*, Nova York: Dover Publications.
- BRAUN, M. (1990): *Ecuaciones diferenciales y aplicaciones*, México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- NAGLE, R.K.; E.B. SAFF e A.D. SNIDER (2005): *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, México: Pearson Education.
- EDWARDS, C.H. e D.P. PENNEY (1985): *Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones*: Prentice-Hall.
- DOETSCH, G. (1970): *Introduction to the theory and application of the Laplace transforms*: Springer-Verlag.
- BOYCE, W.E. e R.C. DIPRIMA (2003): *Ecuaciones diferenciales y problemas con valor en la frontera*, México: Limusa-Wiley.
- ZEMANIAN, A.H. (1987): *Distribution theory and transform analysis*: Dover Publications.
- SIMMONS, G.F. (2002): *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*: McGraw-Hill.



Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade



Impreso en papel 100% reciclado e libre de cloro



SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

