



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grado

Caos

Ángel Pablo González López

2020–2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grado

Caos

Ángel Pablo González López

Xullo, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: Caos
Director: Fernando Adrián Fernández Tojo
Breve descrición do contido
En poucas palabras, dise que un sistema dinámico é caótico cando este non nos permite predicir o futuro. Este tipo de sistemas de ecuacións son a proba de que o teorema de Poincaré-Bendixson (da materia Ecuacións Diferenciais) non é certo para dimensión $n > 2$. Neste traballo estudaranse as orixes do caos así como exemplos paradigmáticos como poden ser as ecuacións meteorolóxicas de Lorenz (efecto bolboreta), a función de Hénon ou o sistema de Rössler.

Índice xeral

Resumo	VII
1. Introducción	1
2. Sistemas dinámicos discretos	3
2.1. Introducción e primeiros exemplos	3
2.2. Diagramas de arañeira	4
2.3. Puntos periódicos	7
2.4. A familia de funcións loxísticas	8
2.5. A derivada Schwarziana	13
2.6. O expoñente de Lyapunov	16
2.7. Universalidade e constante de Feigenbaum	19
2.8. Xeneralizacións a dimensión $m \geq 2$	21
2.8.1. Estabilidade en dimensión $m \geq 2$	22
2.8.2. O expoñente de Lyapunov en dimensión $m \geq 2$	25
2.9. A función de Hénon	27
3. Sistemas dinámicos continuos	33
3.1. Conceptos previos	33
3.2. O teorema de Poincaré-Bendixson	35
3.3. O expoñente de Lyapunov en sistemas continuos	36
3.4. O sistema de Lorenz	37
3.4.1. Propiedades do sistema de Lorenz	38
3.4.2. O atractor de Lorenz	41
3.4.3. O expoñente de Lyapunov do sistema de Lorenz	44
3.4.4. Un modelo do atractor de Lorenz	45
3.5. O atractor de Rössler	48
3.5.1. Comportamento do atractor de Rössler	48
3.5.2. Fenómeno de duplicado do período	50

4. Bibliografía empregada**53**

Resumo

A Teoría do Caos é a rama das matemáticas que estuda o comportamento e evolución de sistemas dinámicos caóticos, nos cales resulta moi complicado predecir o comportamento futuro do sistema.

Ao longo deste traballo presentaremos as definicións básicas e veremos algúns dos resultados máis relevantes no referente ao caos, así como veremos algúns exemplos clásicos de caos: a función loxística e o atractor de Hénon (sistemas discretos) e os atractores de Lorenz e de Rössler (sistemas continuos).

Abstract

Chaos theory is the branch of mathematics that studies the behaviour and evolution of chaotic dynamical systems, in which it is very difficult to predict the future behaviour of the system.

Throughout this dissertation we will present the basic definitions and we will see some of the most relevant results concerning chaos, as well as some classical examples of chaos: the logistic function and the Hénon attractor (discrete systems) and the Lorenz and Rössler attractors (continuous systems).

1. Introducción

Un sistema dinámico consiste basicamente nun sistema cuxo estado evoluciona co paso do tempo. Esta evolución pode ser realizada de forma discreta ou continua, dando lugar aos sistemas dinámicos discretos e os continuos.

O estudo de sistemas dinámicos leva sendo un campo de vasto interese matemático dende finais do século XVII, cando Isaac Newton tratou por primeira vez de modelar o movemento de sistemas físicos mediante o uso de ecuacións diferenciais. Recollendo a estela deixada por el, as seguintes xeracións de matemáticos encargáronse de dar condicións suficientes e necesarias para a existencia de solucións así como métodos para o seu cálculo. Cando estes sistemas podían ser resoltos, a solución describía un movemento moi regular.

A finais do século XIX, o matemático francés Henri Poincaré comezou a estudar o coñecido como “problema dos tres corpos”, tratando de predicir a posición e traxectoria de tres planetas sometidos ás súas propias forzas gravitacionais. Concluía que as solucións podían resultar extremadamente complexas, e cos seus estudos sentou as bases do que hoxe en día é coñecido como *teoría do caos*.

Finalmente, no ano 1963, Lorenz sorprendeu a toda a comunidade matemática co seu artigo “Deterministic nonperiodic flow” [14], onde se presentaba o primeiro exemplo no mundo dun atractor caótico ao tratar de dar un modelo meteorolóxico axeitado, do cal podemos ver unha representación na Figura 1.1.

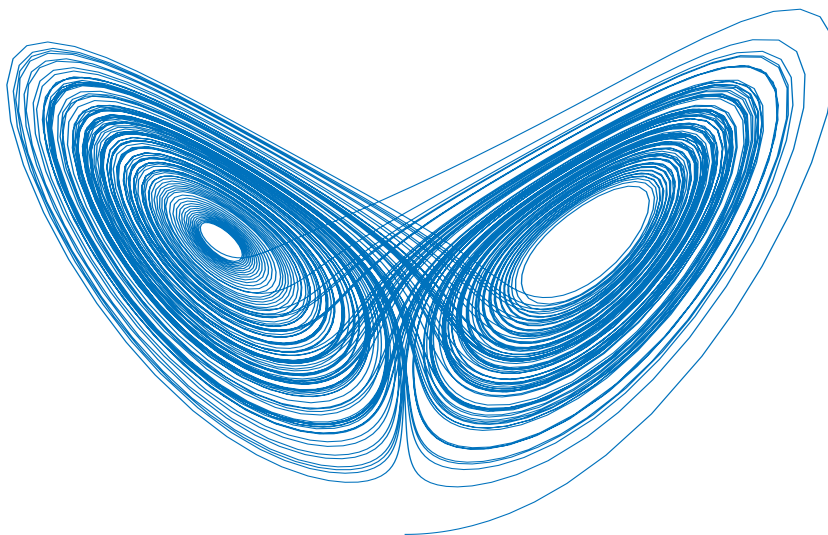


Fig. 1.1. Atractor de Lorenz.

A forma da Figura 1.1 así como unha conferencia impartida por Lorenz no ano 1972 no MIT co título “Predictability, Does the Flap of a Butterfly’s wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?” [15] son a orixe do concepto de *efecto bolboreta*, amplamente coñecido incluso fóra do mundo matemático.

É neste contexto no que presentamos este traballo, onde faremos unha revisión dalgúns exemplos clásicos de caos así como dos resultados máis inmediatos. Como veremos nos seguintes capítulos, moitas definicións e resultados non sempre poden ser aplicados de xeito analítico tendo que conformarnos en algunhas ocasións con aproximacións e afirmacións de carácter numérico.

Os contidos do traballo están divididos en dous grandes capítulos, facendo a división entre sistemas dinámicos discretos e continuos. Finalmente, farase unha revisión da bibliografía empregada.

Na sección 2.1 presentamos os sistemas dinámicos discretos e damos uns primeiros exemplos sinxelos do seu comportamento. A continuación, nas seccións 2.2 e 2.3, damos as primeiras definicións e métodos para o estudo de ditos sistemas. Logo diso, introducimos a familia de funcións loxísticas na sección 2.4 como primeiro exemplo de caos visto neste traballo, afondando tamén no Teorema de Sharkovsky e diversos corolarios sobre el. Tras isto, nas seccións 2.5 e 2.6 introducimos novos conceptos usados no estudo de sistemas discretos, a derivada Schwarziana e o expoñente de Lyapunov, coa intención de poder afirmar resultados sobre a cantidade e comportamento das órbitas. Na sección 2.7 explicamos brevemente a existencia de certas constantes universais para todos estes sistemas caóticos. Para rematar o capítulo, xeneralizamos moitos destes conceptos ao caso multidimensional na sección 2.8, antes de poder empregalos na sección 2.9 para estudar o atractor de Hénon.

No capítulo 3 comezamos na sección 3.1 definindo os conceptos e dando algúns resultados para sistemas continuos que serán de utilidade ao longo do capítulo. Na sección 3.2 vemos os resultados necesarios para demostrar o Teorema de Poincaré-Bendixson así como unha demostración deste, pois este resultado inflúe na posibilidade de existencia de caos en sistemas continuos. Logo disto, na sección 3.3 daremos a extensión do expoñente de Lyapunov presentado anteriormente a sistemas continuos. Finalmente, concluiremos o capítulo revisando os atractores de Lorenz (sección 3.4) e de Rössler (sección 3.5) así como algunhas das súas propiedades.

O caos ao que nos referiremos a partir de agora en todo o traballo será determinista. Isto significa que o comportamento irregular é debido á propia natureza do sistema e non á presenza de azares ou probabilidades máis propios da estatística.

2. Sistemas dinámicos discretos

Con este capítulo dá comezo o noso traballo e, como xa mencionamos, estará centrado nos sistemas dinámicos discretos. Na sección 2.1 explicaremos por que estes sistemas son ideais para comezar revisando a teoría do caos e daremos uns primeiros exemplos. A continuación, nas seguintes seccións desenrolaremos as definicións e resultados básicos para traballar con estes sistemas ao mesmo tempo que os aplicaremos a exemplos concretos, primeiro no caso unidimensional (a función loxística) e despois no bidimensional (a función de Hénon).

2.1. Introducción e primeiros exemplos

Comecemos por dar unha noción do que coñecemos por *sistema dinámico discreto*. Como xa dixemos, un sistema dinámico é basicamente un sistema cuxo estado evoluciona co tempo. A diferenza dos sistemas continuos, onde o tempo é continuo, nos sistemas discretos o tempo é medido en pequenos intervalos. Na práctica, isto modélase mediante relacións de recorrencia da forma $x_{n+1} = f(x_n)$, onde os saltos discretos no tempo veñen dados pola variable n mentres que x é a variable que cambia con este. Estes modelos son en xeral máis sinxelos que os continuos, mais van a servirnos como unha primeira achega ao caos e aos seus principais elementos.

Como veremos máis adiante, polo Teorema 3.13, nos sistemas continuos non pode haber caos nun sistema plano, isto é, en \mathbb{R}^2 . Este resultado depende de maneira crucial da dimensión 2 do plano, de xeito que xa non serve en sistemas de dimensión maior ($n \geq 3$), nos cales poden acontecer novos comportamentos das órbitas como o caótico no que estamos interesados. Pola contra, en sistemas dinámicos discretos vaimos abondar cunha función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para ver o primeiro exemplo de caos, motivo polo cal son idóneos para comezar a afondar no seu estudo. Aquí, e para o que resta de capítulo, \mathbb{R} vai denotar a recta real. Un dos ámbitos onde máis usados son estes modelos discretos é na bioloxía, e máis concretamente nos cultivos de bacterias. Así, x_n denota a poboación dun cultivo de bacterias no instante de tempo n e $x_{n+1} = f(x_n)$ denotaría a poboación do mesmo cultivo unha hora despois. Para maior comprensión, consideremos os seguintes exemplos.

Exemplo 2.1. Sexa $f(x) := 2x \ \forall x \in \mathbb{R}$, onde \mathbb{R} denotará para o que resta de capítulo á recta real. Esta relación de recorrencia dinos que o tamaño da poboación se duplica cada hora. Por tratarse dun sistema discreto, a evolución do sistema vén dada pola composición da función f , de forma que $f^2(x) = f(f(x))$ e, de forma xeral, definiremos $f^k(x)$ como a composición de f un número k de veces, onde k representa o tempo e $x_k = f(x_{k-1})$ a poboación no tempo k . É claro ver que para un valor inicial $x_0 > 0$ este sistema crece sen límite. Este tipo de crecemento é coñecido como *crecemento exponencial*. Non obstante, este sistema non é realista no sentido de que no mundo real a poboación non pode crecer de

forma infinita ao existir un límite de recursos.

Exemplo 2.2. Para tratar de describir de maneira máis realista o crecemento dunha poboación definimos $g_a(x) := ax(1-x)$, con $a > 0$ a taxa de crecemento da poboación. Esta función é coñecida como función loxística no eido dos sistemas dinámicos. Para valores de x próximos a 0, $1-x \approx 1$, e a función g_a ten un grafo moi similar ao da función f definida no Exemplo 2.1. Pola contra, para valores próximos a 1 de x o factor $1-x \approx 0$ vai a limitar o crecemento da poboación. Isto é o que coñecemos como *crecemento loxístico*. Afondaremos máis na sección 2.4 neste exemplo, pois segundo o valor de a atopamos unha gran variedade de comportamentos, algúns deles caóticos.

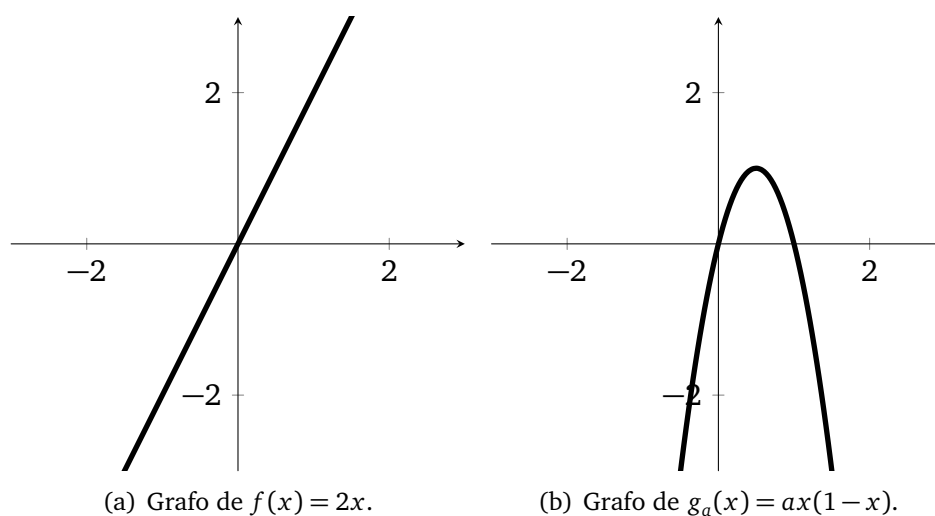


Fig. 2.1. Grafos de f e g respectivamente.

Na Figura 2.1 podemos ver os grafos das funcións descritas nos exemplos. A partir de agora e para todo o que resta de capítulo, salvo indicación expresa do contrario, consideraremos g_a como a función descrita no Exemplo 2.2. Interesaranos o seu comportamento para $x_0 > 0$.

2.2. Diagramas de araña

Comecemos por dar algunhas definicións e resultados que precisaremos de cara ao estudo dos exemplos anteriormente expostos.

Definición 2.3. Sexa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Chamaremos *órbita de x baixo f* ao conxunto $\{x, f(x), f^2(x), \dots\} = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, onde \mathbb{N}^* denota ao conxunto dos números naturais máis o cero, é dicir, $\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. O valor de x no cal comeza a órbita será chamado *valor inicial* da órbita. Ademais, diremos que un punto p é un *punto fixo* da aplicación f se $f(p) = p$.

Para aplicacións de \mathbb{R} en \mathbb{R} , podemos representar órbitas mediante os chamados *diagramas de araña* ou *de Verthulst*. O procedemento consiste en:

- Representar a diagonal $y = x$.
- Representar a función $y = f(x)$ (os puntos fixos de $f(x)$ serán a intersección deste grafo co grafo de $y = x$).
- Partir dun valor inicial $(x_0, 0)$ e o valor de $f(x_0)$ será a intersección da curva $y = f(x)$ coa recta vertical pasando por $(x_0, 0)$.
- Partir de $(x_0, f(x_0))$ e para obter $f^2(x_0)$ proxectar paralelamente ao eixo OX o punto obtido ata a intersección con $y = x$ e despois proceder como no paso anterior, esta vez para o valor $(f(x_0), f(x_0))$.

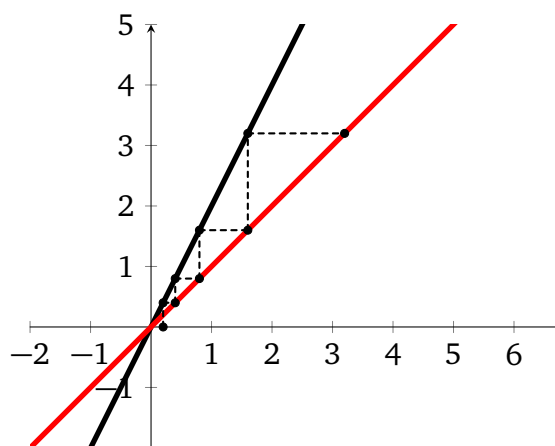


Fig. 2.2. Diagrama de araña da función $f(x) = 2x$ para o valor inicial $x_0 = 0,2$.

Procedendo de forma recorrente, para a función $f(x) = 2x$ obtemos un diagrama como o da Figura 2.2. Se despxamos a ecuación $f(x) = x$ vemos que o único punto fixo de f é $x = 0$. Ademais, para $x_0 > 0$ a órbita crece de xeito exponencial, tal e como se pode comprobar na Figura 2.2. É razoable pensar que o diagrama dunha función máis complexa, como pode ser g_a , terá un comportamento moito máis interesante, como podemos comprobar na Figura 2.3.

Neste caso, un sinxelo cálculo dinos que os puntos fixos de g_2 son $x \in \{0, \frac{1}{2}\}$. O diagrama da Figura 2.3 suxire que para un valor inicial de $x_0 > 0$ a órbita converxerá ao punto fixo $x = \frac{1}{2}$. Neste sentido, é de utilidade dar as seguintes definicións.

Definición 2.4. Sexa $\epsilon > 0$ e \mathbb{R} a recta real. Definimos a ϵ -veciñanza dun punto $p \in \mathbb{R}$ como

$$N_\epsilon(p) := \{x \in \mathbb{R} : |x - p| < \epsilon\}.$$

Definición 2.5. Sexa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sexa $p \in \mathbb{R}$ un punto fixo de f . Diremos que p é un *pozo* ou *punto fixo atractor* do sistema dinámico discreto dado por $x_{n+1} = f(x_n)$ se existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x_0 \in N_\epsilon(p)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = p$. Pola contra, se existe un $N_\epsilon(p)$ tal que todo $x \in N_\epsilon(p) \setminus \{p\}$ eventualmente sae fóra de $N_\epsilon(p)$, entón diremos que p é unha *fonte*.

Coas Definicións 2.4 e 2.5, estamos en condicións de enunciar o seguinte teorema, cuxa demostración foi tomada de [1].

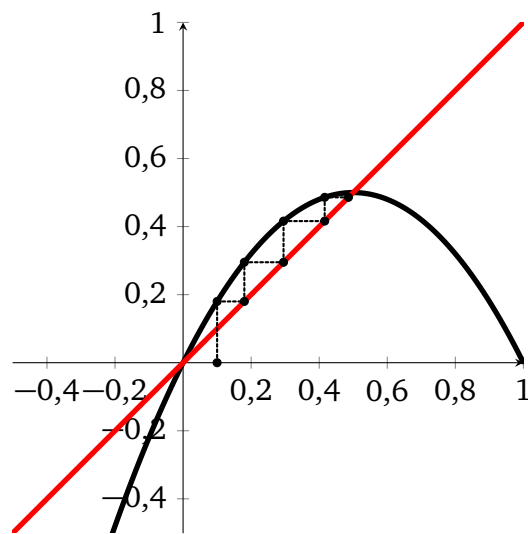


Fig. 2.3. Diagrama de araña da función $g_2(x) = 2x(1-x)$ para o valor inicial $x_0 = 0,1$.

Teorema 2.6. Sexa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unha función suave (existen as derivadas de calquera orde e son continuas) e sexa $p \in \mathbb{R}$ un punto fixo de f .

(1) Se $|f'(p)| < 1$, entón p é un pozo.

(2) Se $|f'(p)| > 1$, entón p é unha fonte.

Demostración. (1) Sexa $a \in (|f'(p)|, 1)$. En particular podemos coller $a = \frac{1+|f'(p)|}{2}$. Como

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} = |f'(p)|,$$

entón para algún $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon(p)$ de maneira que

$$\frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} < a$$

para $x \in N_\epsilon(p) \setminus \{p\}$. É dicir, $f(x)$ está máis próximo a p que x , polo menos por un factor de a . Isto implica dúas cousas. Primeiro, se $x \in N_\epsilon(p)$, entón tamén $f(x) \in N_\epsilon(p)$ e seguindo o razoamento tamén o van a estar $f^2(x), f^3(x), \dots$. Segundo, séguese que

$$|f^k(x) - f^k(p)| = |f^k(x) - p| \leq a^k |x - p|$$

para todo $k \geq 1$. Como $a < 1$, $a^k |x - p| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. Polo tanto, p é un pozo.

A demostración de (2) faise facendo uso dos mesmos argumentos. ■

Para o Exemplo 2.1, temos que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2$, logo o punto fixo $x = 0$ é unha fonte e para calquera valor inicial $x_0 \in N_\epsilon(0) \setminus \{0\}$, x_n eventualmente sae fóra da propia ϵ -veciñanza. No caso do Exemplo 2.2 para $a = 2$, $g'_2(x) = 2 - 4x$ e temos entón que $g'_2(0) = 2$ e $g'_2(\frac{1}{2}) = 0$, logo $x = 0$ será unha fonte e $x = \frac{1}{2}$ un pozo, que atraerá as órbitas que se afasten da fonte de $x = 0$.

2.3. Puntos periódicos

Na anterior sección introducimos os conceptos de órbita, así como os de pozo e fonte para facer distinción entre puntos fixos. No caso da función g_a temos que $g'_a(x) = a - 2ax$, logo hai valores de a para os que os puntos fixos $x = 0$ e $x = 1 - \frac{1}{a}$ son ambos fontes. Isto suxire a seguinte pregunta: Se ningún punto fixo atrae as órbitas do seu arredor, a onde van estas? Introducimos agora a seguinte definición para tratar de dar resposta a dita pregunta.

Definición 2.7. Sexa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que p é un *punto periódico de período k* se $f^k(p) = p$ e k é o menor enteiro positivo para o que se cumpre isto. Á órbita con valor inicial p (consistente en k puntos) chamáremoslle *órbita periódica de período k* . Referirémonos a estes conceptos de xeito abreviado como punto k -periódico e órbita k -periódica.

Na Figura 2.4 podemos ver o diagrama de arañeira para a función $g_{3,3}$ no cal se aprecia a formación dunha órbita 2-periódica.

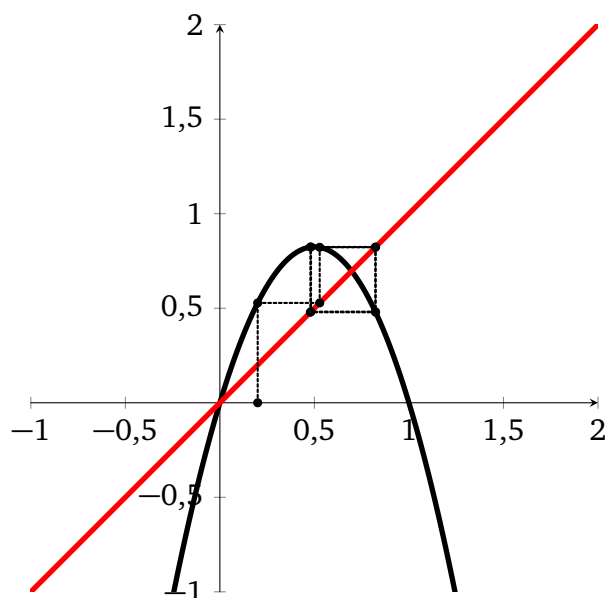


Fig. 2.4. Diagrama de arañeira da función $g_{3,3}(x) = 3,3x(1-x)$ para o valor inicial $x_0 = 0,2$ onde se pode apreciar a órbita 2-periódica que se forma.

Xorde agora de maneira natural a pregunta de que pasa coa estabilidade das órbitas k -periódicas. A clave para resolver esta pregunta reside no feito de que se p é un punto k -periódico de f entón p é un punto fixo da aplicación f^k , logo bástanos con aplicar o Teorema 2.6 a f^k .

Definición 2.8. Sexa f unha aplicación e p un punto k -periódico. Diremos que a órbita k -periódica de p é un *pozo periódico* se p é un pozo para a aplicación f^k . De igual maneira, a órbita k -periódica de p será unha *fonte periódica* se p é unha fonte para a aplicación f^k .

Observación 2.9. É de utilidade ter en conta a regra da cadea para o cálculo da derivada da composición de funcións:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Estamos especialmente interesados no caso en que $g = f$, tendo entón que $(f^2)'(x) = f'(f(x))f'(x)$ e se x é un punto 2-periódico de f a regra da cadea dinos que a derivada de f^2 nun punto dunha órbita 2-periódica é basicamente o produto das derivadas de f nos dous puntos da órbita. En particular, a derivada de f^2 será a mesma sexa cal sexa o punto da órbita no que avaliemos a función.

Isto que acabamos de desenrolar para un exemplo sinxelo dunha órbita 2-periódica, podémolo estender para unha órbita de período arbitrario $k > 2$. Denotemos por $\{p_1, \dots, p_k\}$ á órbita k -periódica dunha función arbitraria h . A regra da cadea dinos que

$$(h^k)'(p_1) = (h(h^{k-1}))'(p_1) = h'(h^{k-1}(p_1))(h^{k-1})'(p_1) = \dots = h'(p_k)h'(p_{k-1})\dots h'(p_1).$$

Grazas ao Teorema 2.6 e ao visto da regra da cadea proporciónase o seguinte Corolario.

Corolario 2.10. *Unha órbita k -periódica $\{p_1, \dots, p_k\}$ dunha función h será un pozo periódico se*

$$|h'(p_k)h'(p_{k-1})\dots h'(p_1)| < 1$$

e será unha fonte periódica se

$$|h'(p_k)h'(p_{k-1})\dots h'(p_1)| > 1.$$

Estamos agora en condicións de verificar estes resultados para o exemplo da función loxística mencionado ao comezo da sección. Vamos a probar que para todo $a > 3$, a función loxística ten unha órbita 2-periódica. Isto é equivalente a que existan dous puntos p e q tales que $g_a(p) = q$ e $g_a(q) = p$ e de igual xeito tamén equivale a que p e q sexan puntos fixos da función $g_a^2(x) = g_a(g_a(x))$. Para atopar os puntos fixos p e q necesitamos resolver a ecuación de grao catro $g_a^2(x) = x$, da cal xa sabemos que $x = 0$ e $x = 1 - \frac{1}{a}$ son raíces, logo todo se reduce ao cálculo dunha ecuación de segundo grao. Despexando obtemos que:

$$p, q = \frac{a + 1 \pm \sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a}$$

de xeito que ambos son reais para $a > 3$. Así, queda probada a existencia da órbita 2-periódica. Esta órbita é estable para $3 < a < 1 + \sqrt{6} = 3,449\dots$. Para velo basta ter en conta o Corolario 2.10. Denotemos $\lambda = g'_a(p)g'_a(q)$. Tras calcular a derivada e substituír p e q obtemos que $\lambda = -a^2 + 2a + 4$, co cal a órbita 2-periódica será estable se $|\lambda| = |-a^2 + 2a + 4| < 1$, isto é, para $3 < a < 1 + \sqrt{6} = 3,449\dots$

2.4. A familia de funcións loxísticas

Nesta sección vamos a dedicarnos ao estudo da familia de funcións loxísticas, $g_a(x) = ax(1-x)$, das cales xa vimos algunhas propiedades ao longo das seccións anteriores. Vamos a considerar $a \in [0, 4]$ de xeito que g_a leva o intervalo $0 \leq x \leq 1$ en si mesmo. Vexamos o comportamento das órbitas en función do valor de a (a taxa de crecemento da poboación) facendo uso de *series de tempo* de x_n fronte a n , onde x_n denota a n -ésima iteración da

relación de recurrencia $x_n = g_a(x_{n-1})$. Para isto, vamos a representar os puntos da forma (n, x_n) . En todos os casos usaremos de valor inicial $x_0 = 0,1$.

Para $a \in [0, 1]$, temos que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ou dito doutra forma, para taxas de crecemento pequenas a poboación eventualmente extinguirase. Para $a \in (1, 3)$ a poboación crece e eventualmente alcanzará un estado estable e distinto de 0, que vén dado polo pozo $x = 1 - \frac{1}{a}$. Agora, para $a > 3$ o comportamento complícase considerablemente. Como vimos na sección 2.3, para $3 < a < 1 + \sqrt{6}$, as órbitas asentan nun pozo 2-periódico. As tres primeiras series de tempo da Figura 2.5 avalan os resultados ata agora expostos.

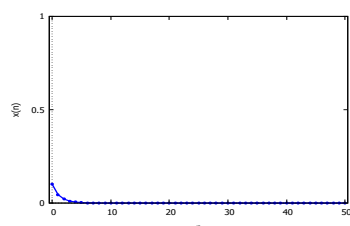
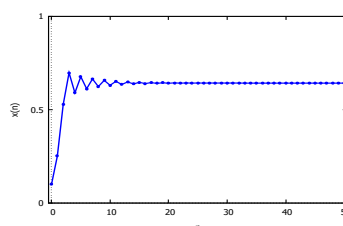
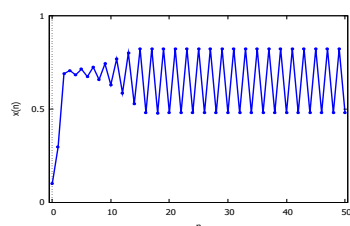
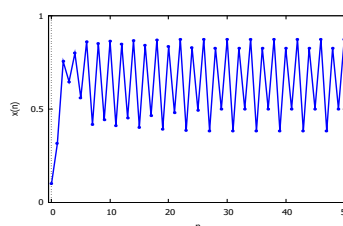
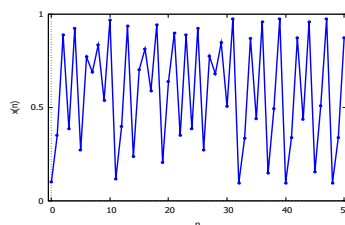
(a) Serie de tempo para $a = 0,5$.(b) Serie de tempo para $a = 2,8$.(c) Serie de tempo para $a = 3,3$.(d) Serie de tempo para $a = 3,5$.(e) Serie de tempo para $a = 3,9$.

Fig. 2.5. Series de tempo para distintos valores de a .

Para $a = 3,5$, unha vista rápida á súa serie de tempo amosa que x_n semella asentar nunha órbita 4-periódica. A proba disto realizaríase de xeito análogo ao visto anteriormente coa órbita 2-periódica. Conforme aumentamos o valor de $a \in [3, 4]$ ocorre o que se coñece como *fenómeno de duplicado do período*. Así, se denotamos como a_n o valor de a para o cal aparece por primeira vez unha órbita 2^n -periódica, diversos experimentos numéricos amosaron que o valor límite de a_n cando $n \rightarrow \infty$ é $a_\infty = 3,569946\dots$ É natural entón preguntarse que ocorre para $a > a_\infty$. Pois ben, para algúns valores de a , a sucesión $\{x_n\}_n \in \mathbb{N}$ semella non asentar nunca en ningún pozo, xa sexa punto fixo ou órbita periódica. Isto pode observarse na Figura 2.5(e) onde calquera esforzo por topar algún tipo de patrón semella inútil.

Acabamos de chegar ao primeiro exemplo de comportamento caótico que pretendíamos estudar ao introducir a familia de funcións loxísticas. Tamén podemos ver que para $a = 3,9$

o diagrama de arañeira de g_a é extraordinariamente complexo en contraposición cos ata agora vistos, como se aprecia na Figura 2.6.

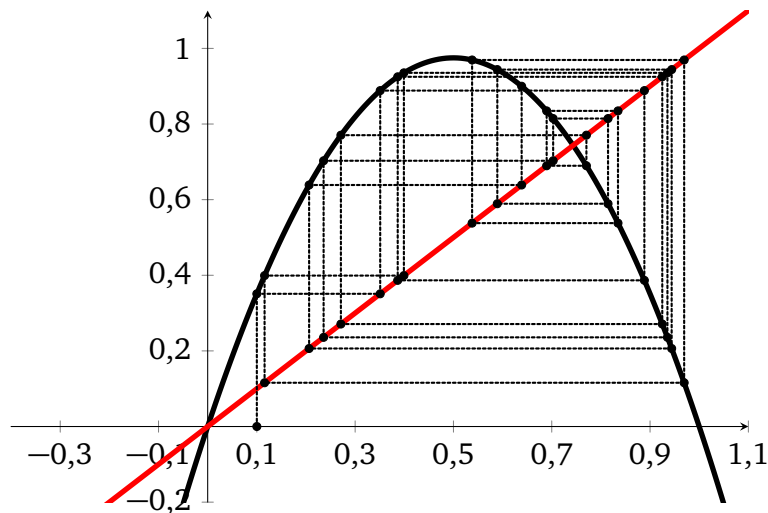


Fig. 2.6. Diagrama de arañeira de $g_{3,9}(x) = 3,9x(1-x)$ para o valor inicial $x_0 = 0,1$.

Agora ben, é natural non conformarse co diagrama de arañeira para un valor concreto e querer saber como varía este comportamento ao longo de todo o intervalo $[0, 4]$ de valores que pode tomar a . Para isto imos facer uso do diagrama que xorde mediante o seguinte algoritmo:

- Tomamos un valor para a , comezando por $a = 1$.
- Escollemos de xeito aleatorio un valor inicial $x_0 \in [0, 1]$.
- Calculamos a órbita $\{g_a^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ ata $n = 1000$.
- Ignoramos as primeiras 300 iteracións e debuxamos a órbita comezando con $n = 301$ ata $n = 1000$.
- Incrementamos o valor de a e volvemos a proceder.

Procedendo deste xeito, o diagrama obtido é coñecido como *diagrama de órbitas* (ou *diagrama de bifurcación*) o cal se pode observar na Figura 2.7, e que se converteu co paso do tempo nun emblema do estudo de sistemas dinámicos caóticos. O código necesario para representar este diagrama en Maxima, así como o das series de tempo antes mencionadas recóllese en [18].

Este diagrama resume o comportamento das órbitas para todos os valores de a . Está presente o fenómeno de duplicado de período antes mencionado e é a partir de $a > a_\infty$ que as órbitas se volven caóticas. Porén, o caos non continúa de xeito indefinido. É importante notar a existencia de rexións de caos (rexións verticais onde semella haber unha infinidade de puntos) que dan lugar de maneira repentina a zonas con comportamento periódico, que se coñecen como *ventás periódicas*. Por exemplo, para $a \approx 3,83$ aparece unha ventá de período 3 e para $a \approx 3,64$ temos unha ventá de período 6.

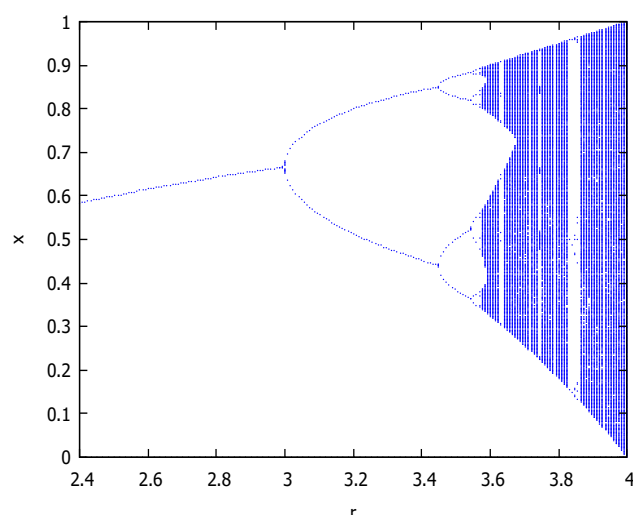


Fig. 2.7. Diagrama de órbitas da función loxística.

Resulta que existe un patrón na secuencia na que estas ventás periódicas aparecen. Para explicalo primeiro debemos definir a forma de ordenar os números naturais coñecida como *orde de Sharkovsky*, que se denota como:

$$\underbrace{3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots}_{\text{impares}} \succ \underbrace{2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots}_{2 \cdot \text{impares}} \succ \underbrace{2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \dots}_{2^2 \cdot \text{impares}} \succ \dots \succ \underbrace{2^3 \cdot 3 \succ 2^3 \cdot 5 \succ 2^3 \cdot 7 \succ \dots}_{2^3 \cdot \text{impares}} \succ \dots \succ \underbrace{2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1}_{\text{potencias de 2 decrecentes}}$$

É dicir, primeiro lístanse todos os números impares menos o 1, seguidos dos seus dobres, cuádruplos, etc. e finalmente as potencias de 2 en orde decrecente ata rematar co 1. Sharkovsky observou que as órbitas periódicas no diagrama de bifurcación da función loxística aparecían ordenadas ao revés que na orde de Sharkovsky: primeiro a órbita de período 1 (punto fixo), a continuación unha órbita 2-periódica, despois 4-periódica, etc., seguindo así ata chegar finalmente á órbita 3-periódica, que é a última en aparecer. Tense entón o seguinte resultado.

Teorema 2.11 (de Sharkovsky). *Sexa $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f : J \rightarrow J$ continua e cun punto k -periódico. Se $k \succ l$, entón f ten un punto l -periódico.*

Non daremos aquí a demostración do Teorema por resultar demasiado extensa, pero unha demostración directa do resultado pode atoparse en [4] sendo moito máis clara e concisa que a orixinal publicada en ruso por Sharkovsky. Debido precisamente á lingua de publicación, este resultado mantívose descoñecido en Europa durante anos ata que Tien-Yien Li e James A. Yorke publicaron o seu famoso artigo “Period three implies chaos” [13] no cal probaban un resultado que resultou ser un corolario directo do Teorema 2.11. Para o que resta de sección, J vai denotar un intervalo da recta real.

Corolario 2.12 (Período tres implica caos). *Sexa $f : J \rightarrow J$ continua. Supoñamos que*

existe un punto $a \in J$ para o cal os puntos $b = f(a)$, $c = f^2(a)$ e $d = f^3(a)$ satisfán

$$d \leq a < b < c \text{ (ou } d \geq a > b > c).$$

Entón para todo $k \in \mathbb{N}$ existe un punto periódico en J de período k .

Para a demostración deste resultado imos a necesitar certas definicións e lemas previos. As probas destes resultados foron tomadas de [13], o artigo orixinal.

Definición 2.13. Sexa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unha función suave. Diremos que unha órbita $\{x_1, x_2, \dots\}$ é *asintoticamente periódica* se converxe a unha órbita periódica cando $n \rightarrow \infty$, isto é, se existe unha órbita periódica $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0$

Lema 2.14. Sexa $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo e $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Tense entón que para cada intervalo compacto $I_1 \subset G(I)$ existe un intervalo compacto $Q \subset I$ tal que $G(Q) = I_1$.

Demostración. Sexa $I_1 = [G(p), G(q)]$, con $p, q \in I$. Se $p < q$, sexa r o último punto de $[p, q]$ verificando que $G(r) = G(p)$ e sexa s o primeiro punto despois de r verificando que $G(s) = G(q)$. Podemos afirmar que estes puntos existen porque a imaxe inversa dun cerrado por unha aplicación continua é un cerrado, un cerrado contido nun compacto é compacto e un compacto en \mathbb{R} contén aos seus supremo e ínfimo. Entón, $G([r, s]) = I_1$. Se $p > q$ o razoamento é análogo. ■

Lema 2.15. Sexa $f : J \rightarrow J$ continua e sexa $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ unha sucesión de intervalos compactos satisfacendo que $I_n \subset J$ e $I_{n+1} \subset f(I_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entón existe unha sucesión $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de intervalos compactos tal que $Q_{n+1} \subset Q_n \subset I_0$ e $f^n(Q_n) = I_n$ para $n \in \mathbb{N}^*$. Para calquera $x \in Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n$ tense que $f^n(x) \in I_n$ para todo n .

Demostración. Definamos primeiro $Q_0 = I_0$. Se Q_{n-1} é definido de forma que $f^{n-1}(Q_{n-1}) = I_{n-1}$, entón $I_n \subset f(I_{n-1}) = f^n(Q_{n-1})$. Polo Lema 2.14, aplicado a $G = f^n$, en Q_{n-1} existe entón un intervalo compacto $Q_n \subset Q_{n-1}$ tal que $f^n(Q_n) = I_n$. Isto completa a demostración indutiva. ■

Lema 2.16. Sexa $G : J \rightarrow \mathbb{R}$ continua e $I \subset J$ un intervalo compacto. Supoñamos que $I \subset G(I)$. Entón existe un punto $p \in I$ tal que $G(p) = p$.

Demostración. Sexa $I = [\beta_0, \beta_1]$. Escollemos α_i , $i \in \{0, 1\}$, en I de maneira que $G(\alpha_i) = \beta_i$. De aquí dedúcese que $\alpha_0 - G(\alpha_0) \geq 0$ e $\alpha_1 - G(\alpha_1) \leq 0$ e por continuidade tense que $G(p) - p = 0$ para algún $p \in I$. ■

Estamos agora, grazas aos Lemas 2.14, 2.15 e 2.16, en condicións de demostrar o resultado de Li e Yorke.

Demostración do Corolario 2.12. Supoñamos que $d \leq a < b < c$ (a proba para o caso $d \geq a > b > c$ é análoga). Sexan $K = [a, b]$ e $L = [b, c]$.

Sexa k un enteiro positivo. Para $k > 1$, sexa $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ a sucesión de intervalos $I_n = L$ para $n = 0, \dots, k-2$ e $I_{k-1} = K$, e definamos I_n para que sexa indutivamente periódica, $I_{n+k} = I_n$ para $n \in \mathbb{N}^*$. Se $k = 1$, sexa $I_n = L$ para todo n .

Sexan Q_n os conxuntos da demostración do Lema 2.15. Temos entón que $Q_k \subset Q_0$ e $f^k(Q_k) = Q_0$ e así, polo Lema 2.16, $G = f^k$ ten un punto fixo $p_k \in Q_k$. Resulta claro entón que p_k non pode ter período menor que k para f , pois de telo necesitaríamos que $f^{k-1}(p_k) = b$, contradicindo que $f^{k-1}(p_k) \in L$. Polo tanto, o punto p_k é un punto k -periódico para f . ■

Observación 2.17. É importante notar que se existe un punto 3-periódico, entón satisfácese trivialmente as hipóteses do Corolario.

2.5. A derivada Schwarziana

Nesta sección imos a describir unha nova ferramenta que foi introducida para o estudo dos sistemas dinámicos unidimensionais no ano 1978 polo matemático estadounidense Isadore Singer [6], a *derivada Schwarziana*. Ademais, tamén mostraremos como pode ser usada para establecer un límite superior ao número de pozos periódicos que unha determinada función pode ter.

Definición 2.18. Sexa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unha función suave. Definimos a *derivada Schwarziana* de f en x como

$$S(f)(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

Este operador era empregado orixinalmente en análise complexa, onde é usado como criterio para ver se unha función complexa é unha transformación fraccional linear (tamén chamada *transformación de Möbius*), pois estas transformacións teñen toda derivada Schwarziana cero.

Temos que para a función loxística

$$S(g_a)(x) = \frac{-6}{(1-2x)^2},$$

logo $S(g_a)(x) < 0$ para calquera valor de $x \in \mathbb{R}$.

A nosa atención vai agora a centrarse nas funcións con derivada Schwarziana negativa, para as que temos os seguintes resultados.

Proposición 2.19. Sexan f e g funcións verificando que $S(f), S(g) < 0$. Entón, $S(f \circ g) < 0$.

Demostración. Usando a regra da cadea, deducimos que

$$(f \circ g)''(x) = f''(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + f'(g(x)) \cdot g''(x),$$

e que

$$(f \circ g)'''(x) = f'''(g(x)) \cdot (g'(x))^3 + 3f''(g(x)) \cdot g''(x) \cdot g'(x) + f'(g(x)) \cdot g'''(x).$$

Concluimos entón que

$$S(f \circ g)(x) = S(f(g(x))) \cdot (g'(x))^2 + S(g)(x),$$

de maneira que $S(f \circ g)(x) < 0$. ■

Como consecuencia inmediata deste resultado temos que se $S(f) < 0$, entón $S(f^n) < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O Teorema que daremos a continuación limita a cantidade de pozos periódicos que pode ter unha función, baseándose unicamente na cantidade de puntos críticos que presente a función (sempre e cando teña derivada Schwarziana negativa). Este resultado resulta sorprendente, pois este operador foi orixinalmente definido cunha finalidade completamente distinta e aínda así permítenos coñecer moita información dos sistemas dinámicos discretos.

Teorema 2.20. *Sexa f unha función verificando que $S(f) < 0$. Supoñamos que f ten n puntos críticos (p é un punto crítico de $f \iff f'(p) = 0$). Entón f ten como moito $n + 2$ pozos periódicos.*

Observación 2.21. É importante notar que este Teorema só dá un límite superior á cantidade de pozos periódicos que pode presentar un sistema dinámico, mais non trata nada sobre a súa existencia.

Para demostrar este Teorema imos a necesitar primeiro certos resultados previos. Todos os enunciados e demostracións foron tomados de [6].

Lema 2.22. *Se $S(f) < 0$, entón $f'(x)$ non pode ter un mínimo local positivo nin un máximo local negativo.*

Demostración. Supoñamos que x_0 é un punto crítico de f' . É dicir, $f''(x_0) = 0$. Como $S(f)(x_0) < 0$, temos que $\frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)} < 0$ co cal $f'''(x_0)$ e $f'(x_0)$ teñen distinto signo, de onde se segue o resultado. ■

Lema 2.23. *Se f ten un número finito de puntos críticos, entón tamén f^n ten un número finito deles.*

Demostración. Para calquera c , $f^{-1}(c)$ é un conxunto finito de puntos, dado que entre dous puntos que son preimaxe de c arbitrarios, debe haber polo menos un punto crítico de f . Deducimos entón que $f^{-m}(c) := \{x \in \mathbb{R} \mid f^m(x) = c\}$ é tamén un conxunto finito.

Supoñamos agora que $(f^m)'(x) = 0$. Pola regra da cadea temos que

$$(f^m)'(x) = \prod_{i=0}^{m-1} f'(f^i(x)).$$

Polo tanto, $f^i(x)$ é un punto crítico de f para algún i , $0 \leq i \leq m - 1$. Consecuentemente, o conxunto de puntos críticos de f^m vén dado pola unión das imaxes inversas de orde menor ca m do conxunto de puntos críticos de f xunto coas súas órbitas. Polo antes mencionado, este conxunto de puntos é finito. ■

Lema 2.24. *Se f ten un número finito de puntos críticos e $S(f) < 0$, entón f ten soamente un número finito de puntos m -periódicos para calquera enteiro m .*

Demostración. Sexa $g = f^m$, de maneira que os puntos m -periódicos de f son puntos fixos de g . Pola Proposición 2.19, $S(g) < 0$.

Supoñamos que g ten infinitos puntos fixos. Polo Teorema do Valor Medio, existen infinitos puntos nos cales $g' = 1$. Entre tres puntos sucesivos calquera verificando que $g' = 1$, debe haber un punto para o cal $g' < 1$. Temos que $g'(x) \neq 1$ en todo un intervalo, pois entón teríamos que $S(g) = 0$, contradicindo a hipótese de que $S(g) < 0$. Ademais, polo Lema 2.22, g' non pode ter un mínimo local positivo entre eses tres puntos. Así, debe haber puntos para os cales $g' < 0$. Consecuentemente, debe haber puntos para os que $g' = 0$, pero este feito implica que g ten infinitos puntos críticos. Isto contradí o Lema 2.23 e completa a proba. ■

Grazas a estes tres lemas podemos agora dar a demostración do Teorema antes enunciado.

Demostración do Teorema 2.20. Sexa p un pozo periódico de período m para a función f . Chamemos $W(p)$ á compoñente conexas do conxunto $\{x \in \mathbb{R} \mid f^{mj}(x) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} p\}$ que contén a p . $W(p)$ é un intervalo aberto e cúmprese que $f^m(W(p)) \subset W(p)$.

Supoñamos polo de agora que p é un punto fixo. $W(p)$ é un intervalo da forma (l, r) , $(-\infty, r)$, (l, ∞) ou $(-\infty, \infty)$. Dado que $f(W(p)) \subset W(p)$ e $W(p)$ é maximal, para o caso da forma (l, r) temos tres posibilidades:

$$(1) f(l) = l \text{ e } f(r) = r.$$

$$(2) f(l) = r \text{ e } f(r) = l.$$

$$(3) f(l) = f(r).$$

Se $f(l) = l$ e $f(r) = r$, entón existen a, b satisfacendo que $l < a < p < b < r$ e $f'(a) = f'(b) = 1$. Dado que $f'(p) < 1$ e como f' non pode ter un mínimo local positivo (polo Lema 2.22), dedúcese que existe un punto crítico no intervalo (a, b) . O segundo caso razónase analogamente considerando f^2 . No terceiro caso, f debe ter un mínimo ou un máximo entre l e r , co cal hai un punto crítico en $W(p)$. No caso de que sexan l e/ou r iguais a ∞ , esta proba falla, pero aínda así, este caso engade como moito dous puntos fixos estables.

Se p ten período m , entón os mesmo argumentos dan lugar a un punto crítico para f^m en $W(p)$. Un punto na órbita deste punto crítico debe ser un punto crítico para f pola regra da cadea. ■

Como Corolario do Teorema 2.20, podemos dar o seguinte resultado sobre a función loxística.

Corolario 2.25. Sexa $g_a(x) = ax(1-x)$ a función loxística. Entón, g_a ten como moito unha órbita que sexa un pozo periódico.

Demostración. Como xa comentamos anteriormente, $S(g_a) < 0$ logo estamos nas condicións do Teorema 2.20. A función loxística g_a ten derivada $g'_a(x) = a(1-2x)$, de maneira que o único punto crítico é $x = \frac{1}{2}$ e consecuentemente polo Teorema 2.20, vai ter como moito tres pozos periódicos.

Por outro lado, se $x < 0$ ou $x > 1$ entón $g_a^n \rightarrow -\infty$ cando $n \rightarrow \infty$. En efecto, se $x < 0$ entón $ax(1-x) < x$, e consecuentemente, $g_a^n(x)$ é unha sucesión decrecente de puntos. Esta sucesión non pode converxer a ningún punto, logo temos que $g_a^n \rightarrow -\infty$. Se $x > 1$, entón tamén se cumpre que $ax(1-x) < 0$ logo $g_a^n \rightarrow -\infty$ de igual maneira. ■

2.6. O expoñente de Lyapunov

Como xa vimos, a función loxística pode exhibir un comportamento carente de calquera tipo de periodicidade para certos valores de a , mais aínda non demos unha definición exacta de que entendemos por *caos*. Para que un sistema poida ser chamado caótico ten que presentar *sensibilidade respecto das condicións iniciais*, no senso de que órbitas partindo de condicións iniciais próximas, dado un número suficiente de iteracións eventualmente se afasten tanto como desexemos.

Definición 2.26. Sexa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que un punto x_0 presenta *sensibilidade respecto das condicións iniciais* se existe $d > 0$ tal que calquera veciñanza de x_0 , $N_\epsilon(x_0)$, contén un punto x tal que $|f^k(x) - f^k(x_0)| \geq d$ para k enteiro non negativo.

Como xa vimos no Teorema 2.6, a estabilidade está influenciada pola derivada da función que define o sistema. Así, se temos que \bar{x} é un punto fixo dunha función f e $f'(\bar{x}) = d > 1$, entón a órbita dun punto x próximo a \bar{x} , vai a separarse de \bar{x} en d unidades por iteración. O número de Lyapunov foi introducido para cuantificar este ratio multiplicativo de separación entre condicións iniciais próximas. Así, un número de Lyapunov de 2 para a órbita de \bar{x} expresa que a distancia entre a órbita de \bar{x} e a órbita dun punto x próximo a \bar{x} se duplica en cada iteración. A importancia deste concepto radica en que tamén pode ser asignado a órbitas non periódicas. Así, damos a seguinte definición.

Definición 2.27. Sexa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Chamaremos *número de Lyapunov* da órbita $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ a

$$L(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (|f'(x_1)| \cdots |f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}},$$

se dito límite existe. Chamaremos *expoñente de Lyapunov* da órbita $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ a

$$h(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\ln |f'(x_1)| + \cdots + \ln |f'(x_n)|) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)|,$$

se dito límite existe.

Observación 2.28. Nótese que h vai existir se e só se L existe e é distinto de cero, en cuxo caso $\ln L = h$.

Séguese da Definición 2.27 que o número de Lyapunov dun punto fixo \bar{x} para unha función f é $L(\bar{x}) = |f'(\bar{x})|$ e, equivalentemente, o seu expoñente de Lyapunov é $h(\bar{x}) = \ln |f'(\bar{x})|$. Se x_1 é un punto k -periódico, entón o seu expoñente de Lyapunov é

$$h(x_1) = \frac{\ln |f'(x_1)| + \cdots + \ln |f'(x_k)|}{k}.$$

Grazas ás Definicións 2.27 e 2.13 podemos enunciar o seguinte resultado, cuxa demostración foi tomada de [1].

Teorema 2.29. *Sexa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se a órbita $\{x_1, x_2, \dots\}$ satisfai que $f'(x_i) \neq 0$ para todo i e ademais é asintoticamente periódica de xeito que converxe á órbita $\{y_1, y_2, \dots\}$, entón as dúas órbitas teñen o mesmo expoñente de Lyapunov, asumindo que ambos os dous existen.*

Demostración. Imos facer uso do feito de que a media aritmética dunha sucesión converxente (media de Cesàro) converxe tamén ao límite da sucesión, é dicir, se $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é unha sucesión cumprindo $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, entón cúmprese que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i = s.$$

Vexamos primeiro o caso $k = 1$, de maneira que y_1 é un punto fixo. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y_1$, que a derivada f' sexa unha función continua implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = f'(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f'(y_1).$$

Ademais, como $\ln|x|$ é unha función continua para $x > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln|f'(x_n)| = \ln|\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n)| = \ln|f'(y_1)|.$$

Esta ecuación danos o límite dunha sucesión. Usando o feito da converxencia da media antes mencionado, tense que

$$h(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln|f'(x_i)| = \ln|f'(y_1)| = h(y_1).$$

Agora supoñamos $k > 1$, de xeito que y_1 xa non é necesariamente un punto fixo de f , mais si vai ser un punto fixo para a función f^k , e a órbita de x_1 baixo f^k é asintoticamente periódica á órbita de y_1 . Polo que probamos antes, o expoñente de Lyapunov da órbita de x_1 baixo f^k é $\ln|(f^k)'(y_1)|$. Polo tanto, o expoñente de Lyapunov da órbita de x_1 baixo f é

$$\frac{1}{k} \ln|(f^k)'(y_1)| = h(y_1).$$

■

Grazas a este Teorema, ampliamos o rango de números e expoñentes de Lyapunov que somos capaces de calcular. Ademais dos casos dos puntos fixos e das órbitas periódicas, inclúense agora tamén as órbitas asintoticamente periódicas. Para o caso no que a órbita a tratar non é asintoticamente periódica e o expoñente de Lyapunov é positivo, damos por primeira vez unha definición do que entendemos por caos, sendo esta unha das moitas definicións que se teñen de dito concepto. Para outra definición pode consultarse [6, Definition 8.5].

Definición 2.30. Sexa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\{x_1, x_2, \dots\}$ unha órbita limitada de f . Diremos que a órbita é caótica se

- (1) $\{x_1, x_2, \dots\}$ non é asintoticamente periódica.
- (2) O expoñente de Lyapunov é maior que cero, é dicir, $h(x_1) > 0$.

A primeira condición esixe que a órbita considerada non asente nunca en calquera outra órbita periódica, o cal resulta razoable segundo o que entendemos intuitivamente por caos. Por outro lado, como xa mencionamos antes, o expoñente de Lyapunov mide o ratio multiplicativo de separación entre condicións iniciais próximas. A segunda condición de que este expoñente sexa maior ca cero implica entón que condicións iniciais tan próximas como queiramos eventualmente se afastarán realizadas as suficientes iteracións, é dicir, os puntos da órbita presentan sensibilidade respecto das condicións iniciais. Finalmente tamén é necesario pedir que a órbita sexa limitada, pois de non facelo funcións como $f(x) = 2x$ tamén verificarían as condicións para ser denominadas caóticas.

A interpretación entón do que entenderemos por órbita caótica é aquela órbita contida nunha rexión limitada do espazo a cal fagamos a cantidade de iteracións que queiramos non presentará ningún tipo de periodicidade, ademais de presentar sensibilidade respecto das condicións iniciais.

Exemplo 2.31. Consideremos a función sobre o intervalo $[0, 1]$ definida como

$$T_r(x) = \begin{cases} rx, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ r(1-x), & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

con $0 \leq r \leq 2$. Esta función é coñecida como a *función tenda* (tradución do inglés “tent map”), da cal podemos ver o grafo na Figura 2.8. Esta función non é diferenciable para $x = \frac{1}{2}$, logo vamos a considerar órbitas que non conteñan dito valor de x . Verifícase que $|f'(x)| = r$ para todo $x \in [0, 1]$, logo resulta sinxelo calcular o expoñente de Lyapunov

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln r = \ln r.$$

Polo tanto, para $r > 1$, calquera órbita limitada $\{x_1, x_2, \dots\}$ que non sexa asintoticamente periódica nin conteña ao punto $x = \frac{1}{2}$ vai a ser caótica, pois teremos que $\ln r > 0$.

En xeral, non se pode calcular de maneira analítica o expoñente de Lyapunov para a maioría de órbitas e van a ser necesarios métodos numéricos. Para a función loxística, un algoritmo numérico para calcular o seu expoñente de Lyapunov podería ser o seguinte:

- Fixar un valor para a .
- Partindo dunha condición inicial aleatoria, iterar unha cantidade suficiente de veces (por exemplo, 300) para que as órbitas se estabilicen.
- Computar un gran número das seguintes iteracións (10000 por exemplo).
- Computar $\ln |f'(x_n)| = \ln |a - 2ax_n|$ para cada n e sumalos.
- Dividir o resultado obtido pola cantidade de iteracións computadas (10000 no noso caso). Este número é o expoñente de Lyapunov desexado.

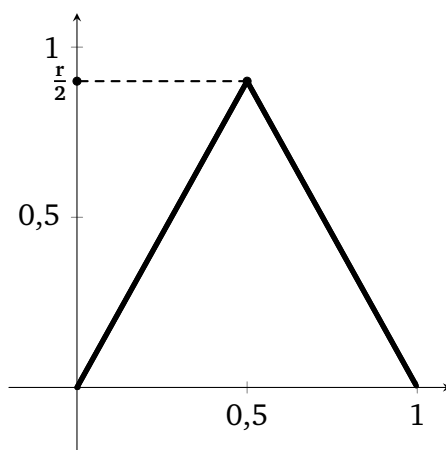


Fig. 2.8. Grafo da función tenda para $r = 1,8$.

- Fixar outro valor de a distinto e repetir o proceso.

Este algoritmo amosa un resultado como o que se pode observar na Figura 2.9, que foi tomada de [24]. Neste gráfico observamos que para $a < a_\infty \approx 3,57$ o expoñente de Lyapunov da función permanece negativo e aproxímase a cero onde comezan as bifurcacións que dan lugar ao fenómeno de duplicado de período. Os picos negativos correspóndense coas órbitas 2^n -periódicas. Para $a > a_\infty$ o expoñente de Lyapunov en xeral aumenta o seu valor, a excepción dos picos causados polas zonas coas ventás periódicas anteriormente mencionadas.

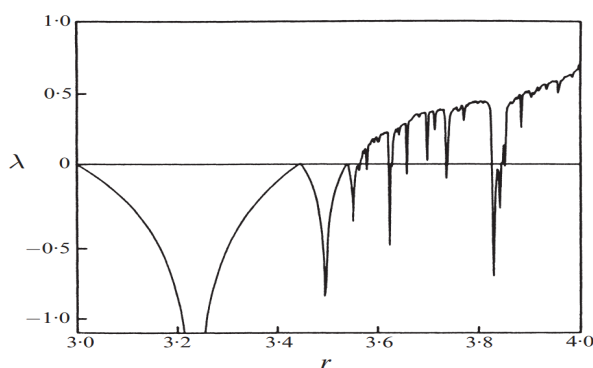


Fig. 2.9. Gráfico que amosa o valor do expoñente de Lyapunov para a función loxística en función do valor de r .

2.7. Universalidade e constante de Feigenbaum

Nesta sección comprobaremos que os resultados ata agora vistos para a función loxística, e que un podería pensar que son intrínsecos de dita función, se poden estender a unha familia moito máis grande de funcións.

Feigenbaum [7] comezou estudando o fenómeno de duplicado do período para a función loxística, mediante un algoritmo deseñado por el para predicir a_n , o valor de a para o que

aparece por primeira vez unha órbita 2^n -periódica. Este proceso era computacionalmente moi complexo para os ordenadores da época, co cal o avance produciuse de forma realmente lenta ata que Feigenbaum se decatou de que presentaba unha converxencia xeométrica, de xeito que a distancia entre sucesivos a_n se acurtaba por un factor de aproximadamente 4,669. É dicir, tense que

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = 4,669 \dots$$

A Figura 2.10 ilustra de xeito esquemático o significado de δ . Se denotamos por $\Delta_n = a_n - a_{n-1}$, entón temos que $\Delta_n/\Delta_{n+1} \rightarrow \delta$ cando $n \rightarrow \infty$. Por outro lado, se denotamos por x_m ao máximo da función e por d_n á distancia de x_m ao punto máis próximo nunha órbita 2^n -periódica, entón cando $n \rightarrow \infty$ verificase que

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} \rightarrow \alpha = -2,5029 \dots$$

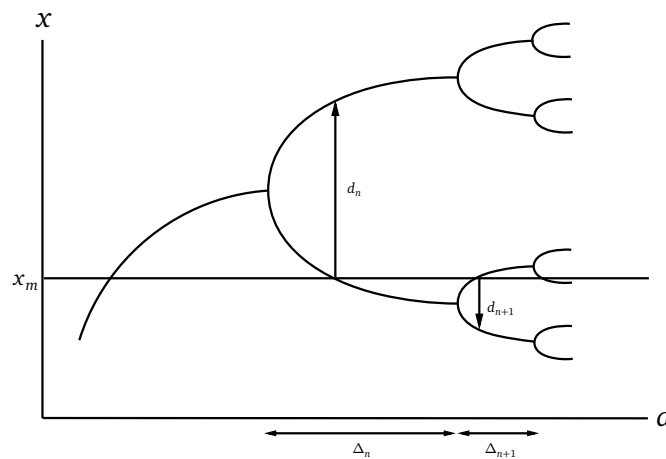


Fig. 2.10. Esquema dos significados de α e δ .

Consideremos agora a función dada pola relación de recorrencia $x_{n+1} = a \text{sen}(\pi x_n)$ para $0 \leq a \leq 1$ e $0 \leq x \leq 1$, coñecida como función seno no ámbito dos sistemas dinámicos. Unha ollada ao seu grafo na Figura 2.11 amosa que é moi parecido ao da familia de funcións loxísticas.

O diagrama de órbitas para a función seno que podemos ver na Figura 2.12 amosa un comportamento moi parecido ao da función loxística. Podemos apreciar como se produce tamén o fenómeno de duplicado do período que conduce ao caos.

Feigenbaum probou que α e δ son universais, no sentido de que os mesmo ratios de converxencia van aparecer sexa cal sexa a función (verificando previamente unhas certas condicións) que defina o sistema. Son polo tanto novas constantes matemáticas, ligadas aos sistemas dinámicos discretos do mesmo xeito que o está π aos círculos. Para probar tan importante resultado, Feigenbaum fixo uso da teoría da renormalización e dos resultados previos aportados por Metropolis en [16] para finalmente concluír que bastaba con que a función que define a relación de recorrencia $x_{n+1} = \lambda f(x_n)$ verificase as seguintes condicións:

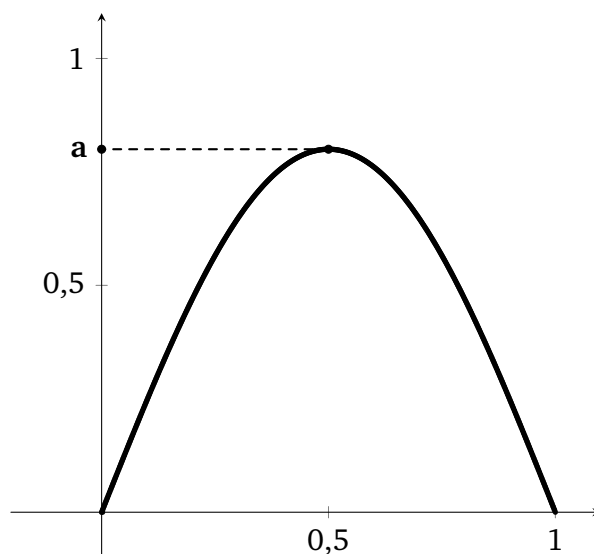


Fig. 2.11. Grafo da función seno para $a = 0,8$.

- f está ben definida, é continua, de clase \mathcal{C}^1 en $[0, 1]$, estritamente positiva en $(0, 1)$ e $f(0) = f(1) = 0$.
- f ten un único máximo en \bar{x} , de xeito que $f(\bar{x}) \leq 1$. Para $x < \bar{x}$, f é estritamente crecente e para $x > \bar{x}$, f é estritamente decrecente.
- A derivada en $f(\bar{x})$ existe e é igual a cero.
- Denotemos $\lambda_{\max} = 1/f(\bar{x})$. Entón existe λ_0 de xeito que, para $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{\max}$, $\lambda f(x)$ ten só dous puntos fixos sendo un deles a orixe, ambos os dous fontes.
- No intervalo no que $|f'(x)| < 1$, f é concava.

Así, temos que calquera relación de recorrencia definida por unha función f verificando as condicións anteriores presentará as constantes δ e α . En concreto, tamén a función seno vai a presentar os mesmos ratios de converxencia que a función loxística e que unha familia moito máis grande de funcións, comunmente coñecidas como *funcións unimodais*. As condicións que debe verificar a función que define a relación de recorrencia foron sacadas do artigo orixinal [7], mais co paso do tempo estas condicións recibiron moitas revisións e reformulacións. Por exemplo, en [5], o cal foi publicado tan só dous anos despois, a universalidade de δ é formulada como o seguinte Teorema.

Teorema 2.32. *Para familias de funcións $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ suficientemente suaves, δ non depende en xeral da familia en cuestión.*

2.8. Xeneralizacións a dimensión $m \geq 2$

Antes de poder afondar no seguinte exemplo de comportamento caótico presente en sistemas dinámicos discretos é preciso dar a extensión a funcións de \mathbb{R}^m con $m \geq 2$ dalgúns dos resultados e conceptos que xa mencionamos ao longo do traballo.

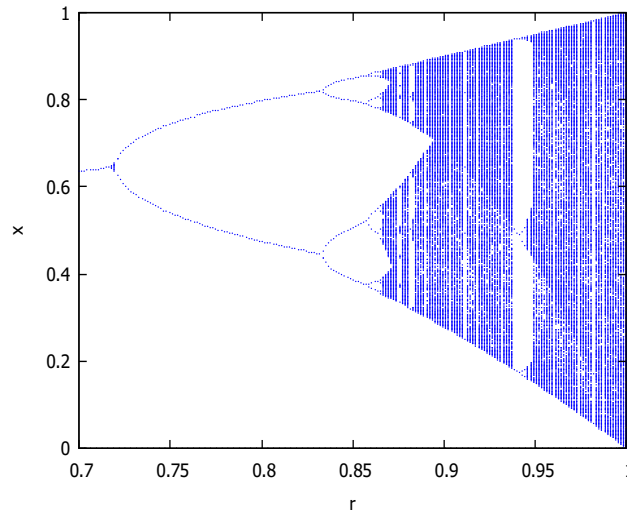


Fig. 2.12. Diagrama de órbitas da función seno.

2.8.1. Estabilidade en dimensión $m \geq 2$

Centrarémonos só no comportamento e resultados a nivel local, coa excepción da Definición 2.40, pois seranos de utilidade na seguinte sección.

Definición 2.33. Sexa $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Diremos que $p \in \mathbb{R}^m$ é un *punto fixo* do sistema dinámico discreto dado por $x_{n+1} = f(x_n)$ se $f(p) = p$.

Definición 2.34. Sexa $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, sexa $p \in \mathbb{R}^m$ un punto fixo de f e $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Diremos que p é:

- *globalmente (asintoticamente) estable* se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = p \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^m,$$

- *localmente (asintoticamente) estable* se

$$\exists \epsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = p \quad \forall x_0 \in B_\epsilon(p),$$

onde x_0 é a condición inicial e $B_\epsilon(p) := \{x \in \mathbb{R}^m : |x_i - p_i| < \epsilon \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, m\}$ é a xeneralización do concepto de ϵ -veciñanza, $N_\epsilon(p)$, a dimensión m .

Para o estudo analítico dos sistemas dinámicos faise uso da linearización do sistema mediante a expansión en serie de Taylor de cada unha das compoñentes da función f nunha veciñanza do punto fixo p . Para un desenvolvemento máis extenso de este procedemento pode consultarse [8]. Así, se denotamos $f = (f_1, \dots, f_m)$, $x_n = (x_{1,n}, \dots, x_{m,n})$ e $p = (p_1, \dots, p_m)$ o sistema non linear é aproximado localmente nunha veciñanza dos puntos fixos por un sistema linear

$$x_{n+1} = Ax_n + B,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_{1,n}} & \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_{2,n}} & \cdots & \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_{m,n}} \\ \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_{1,n}} & \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_{2,n}} & \cdots & \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_{m,n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(p)}{\partial x_{1,n}} & \frac{\partial f_m(p)}{\partial x_{2,n}} & \cdots & \frac{\partial f_m(p)}{\partial x_{m,n}} \end{bmatrix} \equiv \mathcal{D}f(p)$$

é a matriz xacobiana de f avaliada en p , mentres que

$$B = \begin{bmatrix} f_1(p) - \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_{j,n}} p_j \\ f_2(p) - \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_{j,n}} p_j \\ \vdots \\ f_m(p) - \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_m(p)}{\partial x_{j,n}} p_j \end{bmatrix}$$

é un vector columna constante.

Así, temos que o comportamento local do sistema dinámico en veciñanzas dos puntos fixos virá dado polo comportamento do sistema linear asociado, e consecuentemente, polos autovalores da matriz xacobiana $\mathcal{D}f(p)$. Nese sentido, é necesario dar a seguinte Definición.

Definición 2.35. Sexa $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ unha función ben definida e suave, sexa $p \in \mathbb{R}^m$ un punto fixo de f e sexa $\mathcal{D}f(p)$ a matriz xacobiana de f avaliada en p .

- Chamaremos *autoespazo estable*, $E^e(p)$, do punto fixo p a

$$E^e(p) = \langle \{\text{autovectores de } \mathcal{D}f(p) \text{ cuxos autovalores teñen módulo } < 1\} \rangle.$$

- Chamaremos *autoespazo inestable*, $E^i(p)$, do punto fixo p a

$$E^i(p) = \langle \{\text{autovectores de } \mathcal{D}f(p) \text{ cuxos autovalores teñen módulo } > 1\} \rangle.$$

- Chamaremos *autoespazo central*, $E^c(p)$, do punto fixo p a

$$E^c(p) = \langle \{\text{autovectores de } \mathcal{D}f(p) \text{ cuxos autovalores teñen módulo } = 1\} \rangle.$$

Aquí, a notación $\langle \cdot \rangle$ denota á envoltura lineal, sendo entón cada un dos autoespazos o subespazo de \mathbb{R}^m xerado polos autovectores que cumpren a condición sobre o módulo imposta en cada definición.

Dado que os m autovectores de $\mathcal{D}f(p)$ xeran todo \mathbb{R}^m , entón tense o seguinte resultado, cuxa demostración resulta trivial grazas ao aquí mencionado.

Lema 2.36. Sexa $\mathcal{D}f(p)$ a matriz xacobiana de f avaliada no punto fixo p . Cúmrese que

$$\dim E^e(p) + \dim E^i(p) + \dim E^c(p) = m.$$

Definición 2.37. Sexa $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, sexa $p \in \mathbb{R}^m$ e sexa $\mathcal{D}f(p)$ a matriz xacobiana de f avaliada en p . Diremos p é un punto fixo *hiperbólico* se $\mathcal{D}f(p)$ non ten autovalores de módulo 1.

A partir de agora, asumiremos sempre (salvo indicación expresa do contrario) que o punto fixo considerado é hiperbólico, sendo así $E^c(p) = \emptyset$. Con estes resultados estamos xa en condicións de definir as variedades estables ou inestables localmente, as cales son a contraparte non linear dos autoespazos estables ou inestables definidos en 2.35. Primeiro, demos unha definición do que entendemos por variedade, que non deixa de ser a xeneralización a dimensión arbitraria dos conceptos de curva (1-variedade) e superficie (2-variedade).

Definición 2.38. Chamaremos *variedade n -dimensional* $M \subset \mathbb{R}^m$ ao conxunto de puntos tal que $\forall x \in M$ existe unha veciñanza U para a cal existe un difeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ (para $n \leq m$).

Definición 2.39. Sexa $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ a función definindo a relación de recorrencia $x_{n+1} = f(x_n)$ e sexa $p \in \mathbb{R}^m$ un punto fixo de f .

- Chamaremos *variedade localmente estable*, $W_{loc}^e(p)$, do punto fixo p a

$$W_{loc}^e(p) = \{x \in U \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p \text{ e } f^n(x) \in U \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

- Chamaremos *variedade localmente inestable*, $W_{loc}^i(p)$, do punto fixo p a

$$W_{loc}^i(p) = \{x \in U \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x) = p \text{ e } f^{-n}(x) \in U \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

sendo $U \equiv B_\epsilon(p)$ e onde $f^n(x)$ denota a n -ésima iteración da relación de recorrencia e $f^{-n}(x)$ denota a n -ésima iteración cara atrás da relación de recorrencia no caso de que exista.

Así, a variedade localmente estable é o lugar xeométrico de todos os vectores $x \in B_\epsilon(p)$ que se aproximan asintoticamente a p conforme o número de iteracións destes vectores pola función f tende a infinito. De xeito similar, a variedade localmente inestable é o lugar xeométrico de todos os vectores $x \in B_\epsilon(p)$ que se aproximan asintoticamente a p segundo o número de iteracións de f cara atrás tende a infinito.

Definición 2.40. Sexa $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ a función definindo a relación de recorrencia $x_{n+1} = f(x_n)$ e sexa $p \in \mathbb{R}^m$ un punto fixo de f .

- Chamaremos *variedade globalmente estable*, $W^e(p)$, do punto fixo p a

$$W^e(p) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f^{-n}(W_{loc}^e(p))\}.$$

- Chamaremos *variedade globalmente inestable*, $W^i(p)$, do punto fixo p a

$$W^i(p) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f^n(W_{loc}^i(p))\}.$$

É dicir, a variedade globalmente estable non é outra cousa que a unión de todas as iteracións cara atrás da función f sobre a variedade localmente estable. Analogamente, a variedade globalmente inestable resulta da unión de todas as iteracións cara adiante da función f sobre a variedade localmente inestable.

O Teorema da Variedade Estable que daremos a continuación establece a relación entre autoespazos (estables ou inestables) e variedades (estables ou inestables), nas proximidades dun punto fixo p . A demostración pode consultarse en [20].

Teorema 2.41 (da Variedade Estable). *Sexa $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^1 (f e f^{-1} son diferenciables) e $p \in \text{Dom}(f)$ un punto fixo de f . Entón existen variedades localmente estables e inestables, $W_{loc}^e(p)$ e $W_{loc}^i(p)$, que son tanxentes aos autoespazos $E^e(p)$ e $E^i(p)$, respectivamente. Máis aínda, tense que*

$$\dim W_{loc}^e(p) = \dim E^e(p),$$

$$\dim W_{loc}^i(p) = \dim E^i(p).$$

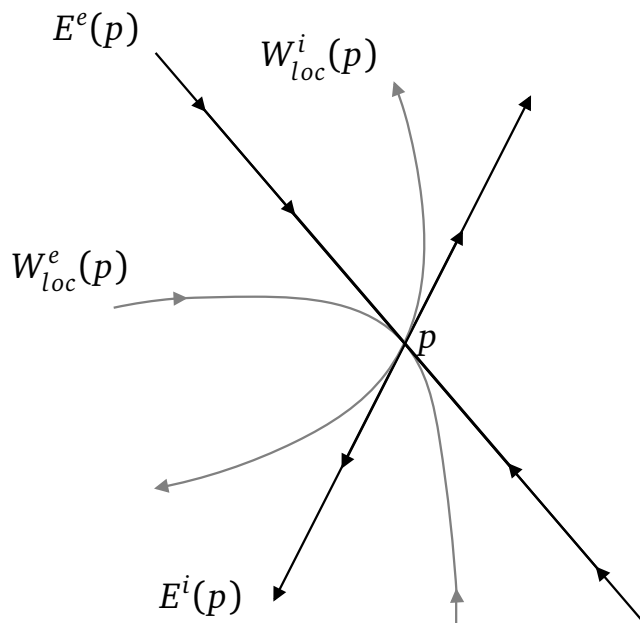


Fig. 2.13. Esquema das variedades estables e inestables e a súa relación cos autoespazos correspondentes.

A Figura 2.13 esquematiza o resultado establecido polo Teorema 2.41 para o caso 2-dimensional nunha veciñanza dun punto fixo p que é un punto de sela. O seguinte resultado séguese do Teorema 2.41.

Teorema 2.42 (Condición suficiente para a estabilidade local). *Sexa $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^1 cun punto fixo hiperbólico $p \in \text{Dom}(f)$. Entón, p é localmente (asintoticamente) estable se e só se o módulo de todos os autovalores da matriz xacobiana de f en p , $\mathcal{D}f(p)$, é menor ca 1.*

2.8.2. O expoñente de Lyapunov en dimensión $m \geq 2$

Como indicamos na Sección 2.6, o expoñente de Lyapunov mide o ratio de separación por iteración entre dúas condicións iniciais. No caso unidimensional resulta sinxelo pois só

poden separarse nunha dirección, mais para o caso m -dimensional pode ocorrer que dúas condicións iniciais próximas se afasten nunha dirección mentres que noutra se acerquen. Polo tanto, en lugar de definir un único número como o expoñente de Lyapunov, vamos a medir o ratio de separación entre as condicións iniciais ao longo de m direccións ortogonais r_1, \dots, r_m .

A primeira dirección será aquela ao longo da cal a separación entre condicións iniciais próximas sexa máxima e denotarémola por r_1 . A segunda será escollida como a que maximice tamén a separación de entre as direccións que son ortogonais a r_1 , e denotarémola r_2 . A terceira, denotada por r_3 , será escollida como a que maximice a separación e sexa ortogonal a r_1 e r_2 , e así sucesivamente ata ter construídos os m vectores necesarios.

Se consideramos unha esfera m -dimensional de radio un e centro na condición inicial x_0 e iteramos a función f sobre os puntos da esfera, tras n iteracións rematamos por obter que a esfera se transformou nunha figura elipsoidal. Os cambios por iteración de cada eixo van ser os números de Lyapunov de x_0 . A Figura 2.14 ilustra este concepto graficamente para unha función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

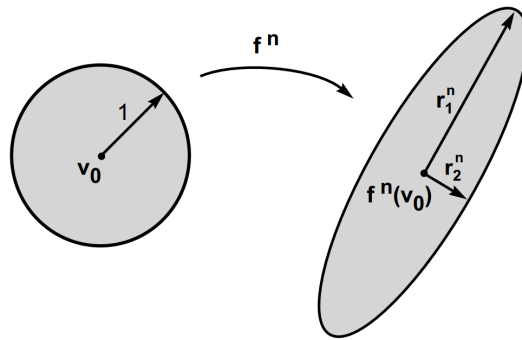


Fig. 2.14. Esquema da evolución dun disco nun elipsoide baixo as iteracións de f , onde x_0 é denotado por v_0 . Tomado de [1].

Para a definición formal, vamos a substituír a función f polo seu xacobiano en x_0 , $\mathcal{D}f(x_0)$, pois estamos interesados no comportamento infinitesimal cerca de x_0 . Se denotamos $J_n = \mathcal{D}f^n(x_0)$, entón os r_1^n, \dots, r_m^n antes mencionados son as raíces cadradas positivas dos autovalores de $J_n J_n^t$, pois os autovalores expresan o factor de escala no que unha lonxitude é expandida ou contraída. Con estes razoamentos estamos xa en condicións de definir o expoñente de Lyapunov no caso multidimensional.

Definición 2.43. Sexa $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ unha función suave e $J_n = \mathcal{D}f^n(x_0)$. Se denotamos por r_k^n , con $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, á lonxitude do k -ésimo eixo ortogonal máis longo do elipsoide $\{\mathcal{D}f^n(x_0)(\bar{x}) \mid \bar{x} \in \mathbb{S}^m\}$ entón:

- (1) O k -ésimo número de Lyapunov vén dado por

$$\ell_k(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_k^n)^{\frac{1}{n}},$$

no caso de que dito límite exista.

(2) O k -ésimo expoñente de Lyapunov vén dado por

$$h_k(x_0) = \ln \ell_k(x_0),$$

no caso de que dito límite exista.

Proposición 2.44. Sexa $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ unha función suave con números de Lyapunov $\{\ell_1, \dots, \ell_m\}$. Entón a contracción ou expansión media da área vén dada por

$$A = |\ell_1| \cdots |\ell_m|.$$

A demostración deste resultado séguese directamente da Definición 2.43. Grazas tamén a esta Definición podemos agora estender de maneira sinxela o concepto de órbita caótica a funcións de maior dimensión.

Definición 2.45. Sexa $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\{x_0, x_1, \dots\}$ unha órbita limitada de f . Diremos que a órbita é caótica se

- (1) $\{x_0, x_1, \dots\}$ non é asintoticamente periódica.
- (2) Ningún número de Lyapunov é exactamente igual a 1.
- (3) $\ell_1(x_0) > 1$ (ou equivalentemente, $h_1(x_0) > 0$).

Como vemos, unha vez definidos os números e expoñentes de Lyapunov, a extensión da definición de órbita caótica resulta análoga ao caso unidimensional, salvo pola segunda condición. Esta, engadida por Yorke, ten a intención de excluír os casos que presentan cuasiperiodicidade. Pódese consultar a ese respecto [1], concretamente o Exemplo 5.5 da páxina 199.

2.9. A función de Hénon

Nesta sección imos a ver o seguinte exemplo de sistema caótico discreto, e empregaremos as xeneralizacións antes feitas para afirmar algunhas propiedades do mesmo.

Comecemos por definir os conceptos de *atractor* e *atractor estraño*, pois serannos de utilidade máis adiante. Estes conceptos son complicados de definir dun xeito rigoroso, e aínda a día de hoxe hai certo debate sobre cal debería ser a definición exacta destes termos [24].

Definición 2.46. Chamaremos *atractor* a un conxunto cerrado A verificando as seguintes propiedades:

- (1) A é invariante: calquera órbita que comeza en A permanece en A .
- (2) A atrae un conxunto aberto de condicións iniciais: existe $U \supset A$, U aberto, tal que se a condición inicial $x_0 \in U$, entón a distancia de x_n a A tende a cero cando $n \rightarrow \infty$. O maior conxunto U verificando esta condición chámase *cunca de atracción* de A .

(3) A é mínimo: non existe $A' \subset A$ verificando as condicións 1 e 2.

Definición 2.47. Chamaremos *atractor estraño* a un atractor que presenta sensibilidade respecto das condicións iniciais.

A orixe do nome de “atractor estraño” débese a que estes atractores adoitan ser conxuntos fractais. Os termos *atractor caótico* e *atractor fractal* son usados tamén dependendo de que aspecto do atractor se queira salientar [24].

Hénon foi un matemático e astrónomo francés que estaba interesado no atractor estraño presente no sistema de Lorenz, no que aprofundaremos máis adiante na sección 3.4. Este sistema viña dado polo seguinte sistema de ecuacións diferenciais:

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x), \\ y' = rx - y - xz, \\ z' = xy - bz. \end{cases} \quad (2.1)$$

Hénon mostrou que algunhas das propiedades do atractor de Lorenz podían ser vistas nunha función tan simple como a definida na ecuación (2.2), facendo os cálculos numéricos considerablemente máis rápidos e precisos.

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (y_n + 1 - ax_n^2, bx_n) \quad (2.2)$$

Comecemos explicando que ferramentas empregou Hénon para simplificar o sistema de Lorenz. En primeiro lugar, en vez de considerar todas as órbitas en \mathbb{R}^3 , considerou só as súas interseccións cunha superficie 2-dimensional S . Definimos unha función $T : S \rightarrow S$ da seguinte forma: dado un punto $A \in S$ seguimos a traxectoria que se orixina desde A hasta que interseca novamente a S , punto que chamamos $T(A)$. Así definida, esta aplicación coñécese co nome de *aplicación de Poincaré*. Así, temos que unha órbita é substituída por un conxunto infinito de puntos de S e o problema orixinal é reducido ao estudo dunha función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

En segundo lugar, substituímos o sistema de ecuacións diferenciais por unha función dada por ecuacións explícitas, de maneira que se A é coñecido entón podemos calcular a súa imaxe de maneira directa, simplificando considerablemente o custo computacional.

Finalmente, só queda especificar a función concreta dada por Hénon. Este baseouse nos resultados numéricos de Pomeau [11] sobre o sistema de Lorenz, que amosaban a forma na que un volume era deformado. Para simular isto, considerou a seguinte cadea de funcións de \mathbb{R}^2 en si mesmo. Consideremos unha rexión de \mathbb{R}^2 alargada ao longo do eixo OX . Comezamos o proceso de deformación con

$$T_1(x, y) = (x, y + 1 - ax^2),$$

onde a é un parámetro que controla o pregado. Agora pregamos máis a rexión mediante unha contracción do eixo OX dada por

$$T_2(x, y) = (bx, y),$$

con $-1 < b < 1$. Finalmente, reorientamos a figura ao longo do eixo OX con

$$T_3(x, y) = (y, x).$$

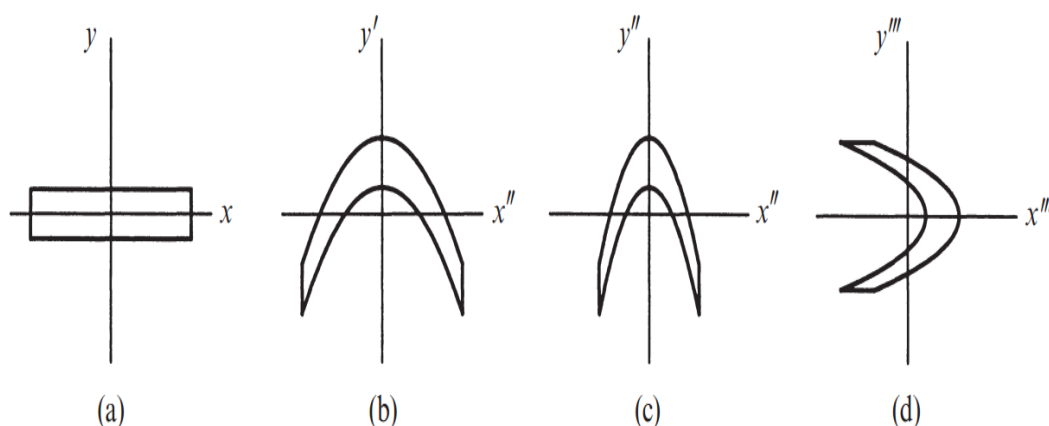


Fig. 2.15. Esquema de como as funcións T_1 , T_2 e T_3 actúan sobre un rectángulo arbitrario. Tomado de [24].

Nas diversas imaxes da Figura 2.15 podemos ver de maneira esquemática como actúan as funcións antes definidas. A imaxe baséase no esquema orixinal realizado por Hénon [11].

A función de Hénon é definida como $T(x, y) = T_3(T_2(T_1(x, y)))$. Se denotamos a (x, y) por (x_n, y_n) e a $T(x, y)$ por (x_{n+1}, y_{n+1}) , entón a función resultante vén dada pola ecuación (2.2).

Se consideramos $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como a definida anteriormente entón tense tamén que:

$$\mathcal{D}T(x, y) = \begin{bmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} \implies |\mathcal{D}T(x, y)| = -b \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

A interpretación deste resultado é sinxela: T_1 conserva as áreas, T_3 tamén conserva as áreas pero cambiando o signo e finalmente T_2 contrae a área multiplicándoa polo factor b . Esta propiedade non deixa de ser a contraparte natural de que o sistema de Lorenz ten diverxencia negativa e constante.

Hénon escolleu os valores $a = 1,4$ e $b = 0,3$, pois son para os que o comportamento dos puntos é o desexado. Hénon xustifica a elección de ditos parámetros baseándose sobre todo na intuición e na experimentación variando os parámetros. O principal motivo da escollo radica en que, a diferenza do atractor de Lorenz, non todos os puntos converxen ao atractor senón que algúns se van a infinito. Así, para algúns valores de a semella non haber atractor de ningún tipo, para outros o atractor é un conxunto de puntos e para outros finalmente temos o atractor estraño buscado, o cal podemos observar na Figura 2.16, realizada en Matlab. Unha explicación máis extensa pode ser atopada en [11].

Na Figura 2.16, somos capaces de distinguir a condición inicial $(x_0, y_0) = (0, 0)$ así como as primeiras iteracións $(x_1, y_1) = (1, 0)$ e $(x_2, y_2) = (-0,4, 0,3)$ pero o resto de iteracións xa se perden dentro do atractor.

No artigo orixinal de Hénon, a maioría das afirmacións que este realiza son baseadas unicamente no cálculo numérico. Mediante o aumento do número de iteracións así como ampliando a gráfica en diversas zonas do atractor en cuestión, Hénon conclúe que o atractor consiste nun conxunto de curvas dentro das cales os puntos se distribúen densamente, sen-

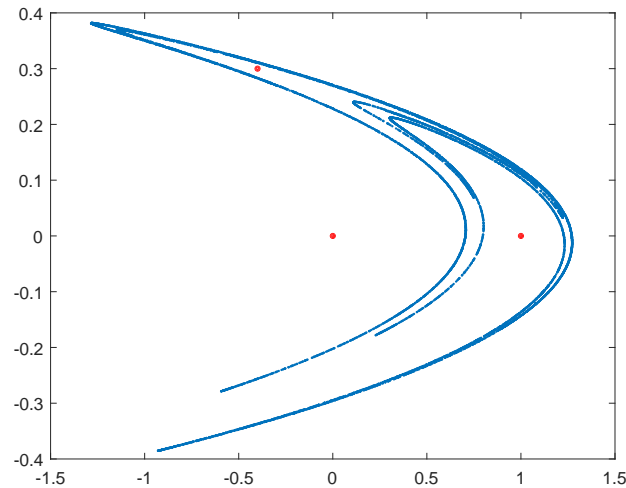


Fig. 2.16. Representación dos primeiros 10000 puntos da función de Hénon para a condición inicial $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

do cada curva unha variedade unidimensional. Ademais, tamén proba a existencia dunha rexión invariante (A é invariante por f se $f(A) \subset A$) dentro da cal está contida o atractor. Para isto, considerou o paralelogramo de vértices:

$$\begin{aligned} A &= (-1,33, 0,42), & B &= (1,32, 0,133), \\ C &= (1,245, -0,14), & D &= (-1,06, -0,5). \end{aligned}$$

A imaxe de $ABCD$ é unha rexión limitada por catro arcos de parábola, cumprindo entón que $T(ABCD) \subset ABCD$. Isto podemos observalo na Figura 2.17, onde R denota ao paralelogramo $ABCD$.

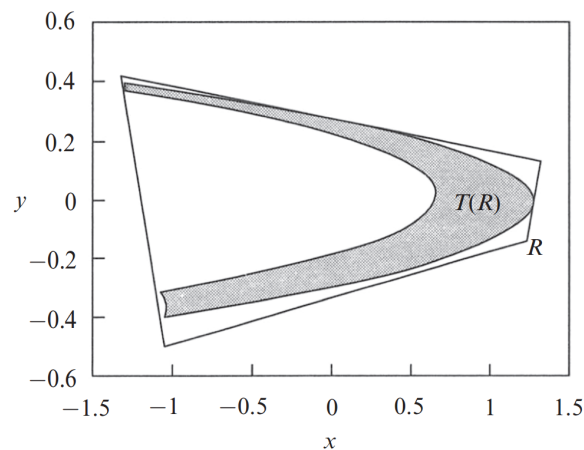


Fig. 2.17. Rexión invariante da función de Hénon. Tomado de [24].

Para os valores $a = 1,4$ e $b = 0,3$, podemos comprobar numericamente que a función de Hénon presenta sensibilidade respecto das condicións iniciais. Para iso, partimos das condicións iniciais $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e $(x_0 + \epsilon, y_0) = (10^{-4}, 0)$ e comezamos a iterar. Como podemos observar na Figura 2.18, as primeiras iteracións son practicamente idénticas, pero conforme aumenta o número delas máis se afasta unha órbita da outra.

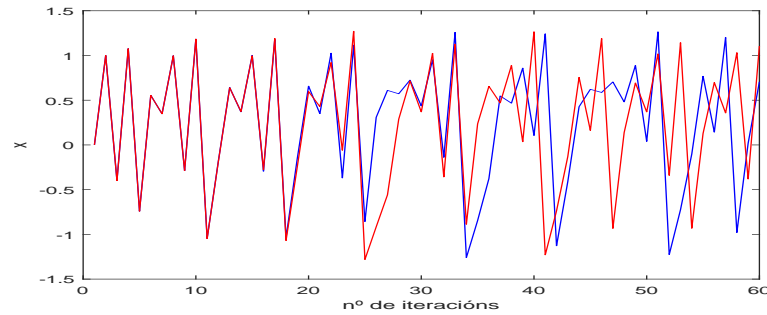


Fig. 2.18. Sensibilidade respecto das condicións iniciais da función de Hénon: en azul, as iteracións con condición inicial (x_0, y_0) e en vermello, as iteracións con condición inicial $(x_0 + \epsilon, y_0)$

A función de Hénon ten dous puntos fixos dados polas ecuacións $x = y + 1 - ax^2$ e $y = bx$. Se resolvemos este sistema temos que

$$\begin{cases} x = \frac{-(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, \\ y = bx. \end{cases}$$

Substituíndo polos valores de a e b antes mencionados temos entón

$$x = \frac{0,7 \pm \sqrt{6,09}}{2,8}, \quad y = 0,3x,$$

que nos dan aproximadamente os puntos $(0,63, 0,19)$ e $(-1,13, -0,34)$. Este primeiro punto fixo (ao que a partires de agora chamaremos p) é especialmente interesante pois semella pertencer ao atractor, como podemos ver na Figura 2.19.

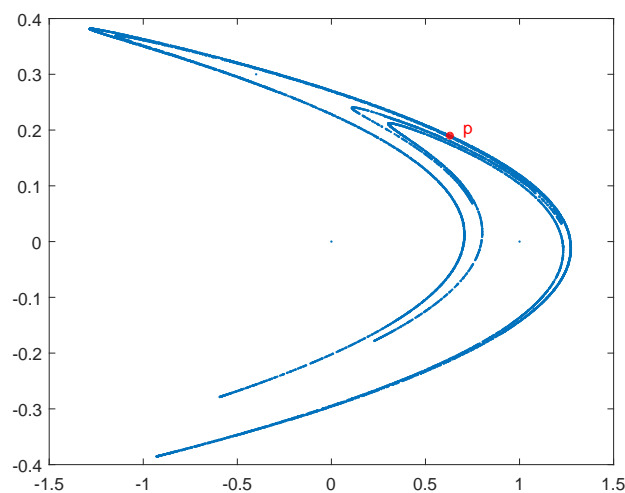


Fig. 2.19. Localización do punto fixo $p \approx (0,63, 0,19)$ dentro do atractor.

Se realizamos os correspondentes cálculos obtemos que, se denotamos aos autovalores de $\mathcal{D}T(p)$ como λ_1 e λ_2 , entón $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2|$. Polo tanto, o punto fixo hiperbólico p é

un punto de sela. Polo tanto, e polo Teorema 2.41, vai haber un conxunto de puntos que diverxa do punto p (a variedade localmente inestable, $W_{loc}^i(p)$) e outro conxunto de puntos que converxa a p (a variedade localmente estable, $W_{loc}^e(p)$).

Se denotamos por \mathcal{H} ao atractor de Hénon, resultados numéricos posteriores ao artigo orixinal de Hénon semellan indicar que

$$\overline{W^i(p)} = \mathcal{H}.$$

Ao respecto desta hipótese tense o seguinte resultado para uns determinados valores de a e b , do que omitimos a proba por ser excesivamente extensa e requirir de moitos resultados previos. De querer consultala, remitímonos ao artigo orixinal [3].

Teorema 2.48. *Sexa $W^i(p)$ a variedade globalmente inestable de T en p . Entón para todo $c < \ln 2$ existe un $b_0 > 0$ tal que para todo $b \in (0, b_0)$ existe un conxunto unidimensional $E(b)$ con medida de Lebesgue positiva verificando para todo $a \in E(b)$ que:*

(1) *Existe un conxunto aberto $U = U(a, b)$ tal que para todo $(x, y) \in U$,*

$$d(T^n(x, y), \overline{W^i(p)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(2) *Existe un punto $(x_0, y_0) \in W^i(p)$ tal que*

- a) $\{T^n(x_0, y_0)\}_{n=0}^{\infty}$ *é denso en $W^i(p)$.*
- b) $\|\mathcal{D}T(x_0, y_0)(0, 1)\| \geq e^{cn}$.

Aquí, e para o resto do traballo, $\|\cdot\|$ denota á norma matricial, a cal é unha extensión do concepto de norma vectorial a matrices. É dicir, se consideramos o corpo \mathbb{R} e o espazo vectorial das matrices de m filas e n columnas con entradas en \mathbb{R} , $\mathbb{R}^{m \times n}$, entón a norma matricial $\|\cdot\|$ é unha norma vectorial en $\mathbb{R}^{m \times n}$ e como tal verifica as propiedades:

- $\|A\| > 0$ se $A \neq 0$ e $\|A\| = 0$ se e só se $A = 0$.
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todas as matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ para todas as matrices $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Finalmente, imos a concluír a nosa revisión do atractor de Hénon cos seus expoñente de Lypaunov e, consecuentemente veremos que o atractor de Hénon presenta órbitas caóticas. Os resultados numéricos foron tomados de [19], onde se pode ver unha disertación máis extensa sobre a computación numérica dos números e expoñentes de Lyapunov. Temos entón que para calquera órbita que converxa ao atractor:

$$\ell_1 \approx 1,52, \quad \ell_2 \approx 0,197.$$

Polo tanto, o atractor de Hénon contrae as distancias nunha dirección e expándeas na outra. Baseándonos na Definición 2.45, calquera órbita limitada e que non sexa asintoticamente periódica vai ser unha órbita caótica do atractor de Hénon.

Por último, e polo visto na Proposición 2.44, temos que a área se contrae por un factor de

$$A = \ell_1 \cdot \ell_2 \approx 0,3 = b,$$

coincidindo este resultado co anteriormente mencionado.

3. Sistemas dinámicos continuos

Este segundo capítulo do noso traballo tratará sobre os sistemas dinámicos continuos, os cales nos resultan máis familiares ao ter tratado con eles ao longo de diversas materias do grado. Comezaremos proporcionando os resultados e definicións coas que traballaremos ao longo do capítulo e despois veremos o Teorema de Poincaré-Bendixson e a súa relación co caos. Finalmente, aplicaremos o visto nas seccións previas aos sistemas de Lorenz e Rössler.

3.1. Conceptos previos

Como xa dixemos, en primeiro lugar imos a dar os conceptos e resultados necesarios para poder seguir revisando algúns dos exemplos clásicos da teoría do caos. Ao servir estes simplemente de ponte cara os resultados que queremos tratar darémolos de maneira esquemática e resumida.

Como xa comentamos na sección 2.1, nos sistemas dinámicos continuos a evolución do sistema vén dada por un tempo continuo. Na práctica, isto vaise formular mediante ecuacións diferenciais, mais en moitos casos estaremos máis interesados en estudar o comportamento das solucións e poder facer afirmacións sobre elas que en calcular a solución explicitamente, pois para sistemas non lineares esta tarefa pode chegar a resultar extremadamente complicada.

As ecuacións diferenciais son moi usadas na física, cando se trata de modelar sistemas físicos como poden ser o movemento dun resorte ou a traxectoria de varios planetas sometidos ás súas propias forzas gravitacionais (coñecido como o *problema dos n corpos*). Para o caso concreto de $n = 3$, tense o famoso problema dos tres corpos.

Imos a restrinxirnos a sistemas autónomos (independentes da variable dependente), pois pódese probar que todo sistema non autónomo se pode transformar noutro autónomo equivalente convertendo a variable independente noutra dependente máis. Por iso, os sistemas que imos a considerar serán da forma

$$x' = f(x), \tag{3.1}$$

onde salvo indicación expresa do contrario, $f \in \mathcal{C}^k(A, \mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 1$ e $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto.

Definición 3.1. Sexa $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Diremos que $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é unha *solución* do sistema 3.1 se:

- (1) $\phi(I) \subset A$,
- (2) ϕ é diferenciable en I ,
- (3) $\phi'(t) = f(\phi(t))$ para todo $t \in I$.

As solucións do sistema reciben tamén o nome de *curvas integrais*. Unha curva integral dise *maximal* se o seu intervalo de definición non se pode estender.

Definición 3.2. Sexa ϕ unha curva integral de 3.1. Chamaremos *órbita* de ϕ a $\mathcal{O}(\phi) := \phi(I)$, *órbita positiva* de ϕ a $\mathcal{O}_+(\phi) := \phi(I \cap [0, \infty))$ e *órbita negativa* de ϕ a $\mathcal{O}_-(\phi) := \phi(I \cap (-\infty, 0])$.

Teorema 3.3 (de Picard-Lipschitz). Sexa $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^n)$ localmente lipshitziana, $x \in A$, $t \in \mathbb{R}$. Entón existe unha única solución maximal $\phi_x : I_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ pasando por (t, x) .

Grazas a este Teorema, cuxa demostración pode ser consultada en [25], podemos definir o seguinte concepto.

Definición 3.4. Nas condicións do Teorema 3.3, chamamos *fluxo* de f a

$$\phi : W \rightarrow A, \quad (t, x) \mapsto \phi(t, x) \equiv \phi_x(t),$$

onde $W := \bigcup_{x \in A} I_x \times \{x\} \subseteq \mathbb{R} \times A$ e $\phi(t, x)$ denota a curva integral maximal pasando por x no instante t .

Vamos a describir agora os conxuntos límite e algunhas das súas propiedades, así como a clasificar órbitas en función destes conxuntos (en lugar da clásica clasificación segundo os autovalores) pois serannos de utilidade de cara ao Teorema 3.13. Omitiremos as probas dos resultados, pero poden ser consultados en [12] ou [25].

Definición 3.5. Sexa $x \in A$ verificando que $[0, \infty) \subset I_x$. Diremos que $y \in \mathbb{R}^n$ é un ω -límite de x se existe $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \infty$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_x(t_n) = y$. O conxunto de todos os ω -límites de x imos a denotalo por $\omega(x)$.

Sexa $x \in A$ cumprindo que $(-\infty, 0] \subset I_x$. Diremos que $y \in \mathbb{R}^n$ é un α -límite de x se existe $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow -\infty$ tal que $\lim_{n \rightarrow -\infty} \phi_x(t_n) = y$. O conxunto de todos os α -límites de x imos a denotalo por $\alpha(x)$.

Observación 3.6. Dado que se pode probar que os α -límites das órbitas de $x' = f(x)$ son os ω -límites das órbitas de $x' = -f(x)$ e viceversa, todo o que enunciemos a partires de agora será para ω -límites, sendo tamén válido para α -límites.

Definición 3.7. Sexa $x \in A$ e ϕ_x unha solución asociado ao fluxo ϕ pasando por $(0, x)$. Diremos que $\mathcal{O}(\phi_x)$ é

- un *punto de equilibrio*, *singularidade* ou *punto crítico* se $\mathcal{O}(\phi_x) = \{x\}$ e un *punto regular* en caso contrario. Ademais, x tamén se di
 - un *atractor* ou *pozo* se existe unha veciñanza U de x (chamada *cunca de atracción*) tal que $\omega(y) = \{x\}$ para todo $y \in U$;
 - un *repulsor* ou *fonte* se existe unha veciñanza U de x tal que $\alpha(y) = \{x\}$ para todo $y \in U$;
 - un *punto de sela* se existe unha veciñanza U de x tal que para todo $y \in U$, $\alpha(y) = \{x\}$ ou $\omega(y) = \{x\}$, habendo polo menos un punto en cada caso;

- unha órbita periódica se ϕ_x é periódica non constante.
- unha órbita homoclínica se $\alpha(x) = \omega(x) = \{L\}$, $L \neq x$.
- unha órbita heteroclínica se $\alpha(x) = \{L_1\}$, $\omega(x) = \{L_2\}$, $L_1 \neq L_2$.

Definición 3.8. Sexa $x^* \in \mathbb{R}^n$ un punto de equilibrio do sistema $x' = f(x)$. Diremos que x^* é estable se para toda veciñanza V de x^* existe outra veciñanza $U \subset V$ de maneira que toda solución $\phi(t)$ con condición inicial en U está definida e permanece en V para todo $t > 0$. Se U pode ser escollido de forma que ademais de verificar o anterior tamén cumpre que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = x^*$ entón diremos que x^* é *asintoticamente estable*. Se un punto de equilibrio x^* non é estable diremos que é *inestable*.

Definición 3.9. Sexa ϕ_x unha solución asociada ao fluxo ϕ pasando por $(0, x)$. Diremos que un conxunto $U \subseteq A$ é *positivamente invariante* se $\mathcal{O}_+(\phi_x) \subset U$ para todo $x \in U$, *negativamente invariante* se $\mathcal{O}_-(\phi_x) \subset U$ para todo $x \in U$ e *invariante* se $\mathcal{O}(\phi_x) \subset U$ para todo $x \in U$.

Proposición 3.10.

- (1) $\omega(x)$ é cerrado.
- (2) $\omega(x)$ é invariante.
- (3) Se $x, y \in A$ pertencen á mesma órbita, entón $\omega(x) = \omega(y)$.
- (4) Se $U \subset A$ é cerrado e positivamente invariante entón $\omega(x) \subset U$ para todo $x \in U$ (analogamente, se $U \subset A$ é cerrado e positivamente invariante entón $\alpha(x) \subset U$ para todo $x \in U$).

Proposición 3.11. Sexa $x \in A$. Se $\phi_x([0, \infty))$ (resp. $\phi_x((-\infty, 0])$) está contido nun conxunto compacto, entón $\omega(x)$ (resp. $\alpha(x)$) é non vacío, compacto e conexo.

3.2. O teorema de Poincaré-Bendixson

Nesta sección vamos a restrinxir o noso estudo dos sistemas dinámicos ao caso de sistemas no plano. Polo tanto, consideraremos $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^2)$.

Deste xeito, daremos o enunciado e demostración do Teorema de Poincaré-Bendixson e veremos que como consecuencia, non pode haber caos en dimensión $m \leq 2$. Imos a precisar o seguinte resultado, do cal omitimos a demostración, aínda que tanto esta como a da versión xeneralizada do Teorema de Poincaré-Bendixson que enunciaremos poden ser consultadas en [25].

Proposición 3.12. Sexa $\mathcal{O}_+(\phi_x) \subset \omega(y) \subset K$ compacto para algún $x \in A$ verificando que $\omega(x)$ ten polo menos un punto regular. Entón $\mathcal{O}(\phi_x)$ é periódica e $\omega(y) = \mathcal{O}(\phi_x)$.

Teorema 3.13 (Poincaré-Bendixson). Sexa $A \in \mathbb{R}^2$ aberto e $f \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^2)$. Fixado $x \in A$ supoñamos que $\omega(x) \neq \emptyset$ é compacto, conexo e contén unha cantidade finita de puntos de equilibrio. Entón:

- (1) Se $\omega(x)$ non contén puntos de equilibrio, entón $\omega(x)$ é unha órbita periódica.
- (2) Se $\omega(x)$ contén só puntos de equilibrio, entón $\omega(x)$ é un punto de equilibrio.
- (3) Se $\omega(x)$ contén polo menos un punto de equilibrio e un punto regular, entón $\omega(x)$ consiste en puntos de equilibrio e órbitas que os unen.

Demostración.

- (1) Sexa $z \in \omega(x)$ un punto regular. Como $\omega(x)$ é invariante, entón $\mathcal{O}(\phi_z) \subset \omega(x)$. Agora, temos que pola Proposición 3.11, $\omega(z) \subset \overline{\mathcal{O}(\phi_z)} \subset \overline{\omega(x)} \subset \omega(x)$ e como $\omega(x)$ só contén puntos regulares por hipótese e $\omega(z) \neq \emptyset$, pola Proposición 3.12, entón $\mathcal{O}(\phi_z)$ é periódica e $\mathcal{O}(\phi_z) = \omega(x)$.
- (2) Se $\omega(x)$ só contén puntos de equilibrio, temos pola Proposición 3.11 que $\omega(x) \neq \emptyset$ é conexo. Como é finito por hipótese, entón é un só punto.
- (3) Sexa $z \in \omega(x)$ un punto regular. Como $\omega(x)$ é invariante, entón $\mathcal{O}(\phi_z) \subset \omega(x)$. Queremos probar que $\omega(z)$ consiste nun punto fixo, co cal basta con probar que non contén puntos regulares. Se $\omega(z)$ contén un punto regular, entón pola Proposición 3.12 $\mathcal{O}(\phi_z)$ é periódica e $\mathcal{O}(\phi_z) = \omega(x)$, o cal é imposible pois $\omega(x)$ non contería puntos de equilibrio. Polo tanto, necesariamente $\omega(z)$ só contén puntos de equilibrio e razoando igual que antes, como $\omega(z) \neq \emptyset$ e é conexo, entón $\omega(z)$ é exactamente un punto de equilibrio.

■

O Teorema de Poincaré-Bendixson en esencia determina os posibles comportamentos dunha órbita limitada no plano. Poden ser puntos de equilibrio, órbitas periódicas, ou órbitas conectando puntos de equilibrio, pero nada máis complexo ca iso é posible, estando isto moi afastado do concepto que temos de caos.

Este teorema só é válido no plano, pois só en \mathbb{R}^2 ten validez o *Teorema da curva cerrada de Jordan*, necesario para demostrar a Proposición 3.12. Este Teorema dinos que toda curva cerrada simple γ divide ao plano en dúas compoñentes conexas disxuntas. Polo tanto, para sistemas continuos imos precisar de dimensión $n \geq 3$ para atopar o primeiro exemplo de caos, que veremos na sección 3.4.

3.3. O expoñente de Lyapunov en sistemas continuos

Nesta sección, estenderemos aos sistemas continuos os conceptos de número e expoñente de Lyapunov introducidos na sección 2.6, para así poder dar unha definición de que entendemos por órbita caótica no eido dos sistemas continuos.

Ao igual que cando o xeneralizamos a dimensión arbitraria $m \geq 2$ o comportamento local do sistema pode variar ao longo das diversas direccións do espazo. Para exemplificar

isto considerabamos unha esfera e viamos como evolucionaba nun elipsoide conforme realizabamos iteracións da función. Para sistemas continuos a idea xeral é a mesma, só que substituíndo as iteracións da función polo fluxo.

Definición 3.14. Sexa $x' = f(x)$ un sistema continuo e ϕ o fluxo asociado. Os números de Lyapunov (respectivamente, expoñentes de Lyapunov) do fluxo $\phi(t, x)$ son definidos como os números de Lyapunov (respectivamente, expoñentes de Lyapunov) da función $\phi(1, x)$ asociada.

O cálculo destes números resulta difícil pois, en xeral, o valor explícito de $\mathcal{D}\phi(1, x)$ é descoñecido. Temos que

$$\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} = f(\phi(t, x)),$$

e pola regra da cadea

$$\frac{\partial \mathcal{D}\phi(t, x)}{\partial t} = \mathcal{D}f(\phi(t, x)) \cdot \mathcal{D}\phi(t, x), \quad (3.2)$$

a cal é coñecida como *ecuación variacional*. Pola definición de fluxo, entón $\mathcal{D}\phi(0, x)$ debe ser a matriz identidade xa que $\phi(0, x) = x$. Así, podemos resolver a ecuación (3.2) para unha órbita dada e así calcular finalmente os seus números e expoñentes de Lyapunov.

Temos entón a seguinte definición de órbita caótica, análoga ao caso discreto.

Definición 3.15. Sexa $x' = f(x)$ un sistema continuo e sexa $\phi_x(t)$ unha solución do sistema. Diremos que a súa órbita é caótica se:

- (1) É limitada.
- (2) É aperiódica.
- (3) Ten polo menos un expoñente de Lyapunov positivo.

Que a órbita sexa aperiódica implica que a órbita non tende a ningún punto de equilibrio (o infinito queda excluído por tratarse dunha órbita limitada) ou órbita periódica cando $t \rightarrow \infty$. En termos de ω -límites, é equivalente a dicir que este non pode ser unha solución periódica, consistir en unicamente puntos de equilibrio ou en puntos de equilibrio unidos mediante órbitas (como no Teorema 3.13).

Por outro lado, que haxa polo menos un expoñente de Lyapunov positivo implica que en polo menos unha dirección dúas órbitas con condicións iniciais próximas eventualmente se separen tanto como desexemos. É dicir, presenta sensibilidade respecto das condicións iniciais.

3.4. O sistema de Lorenz

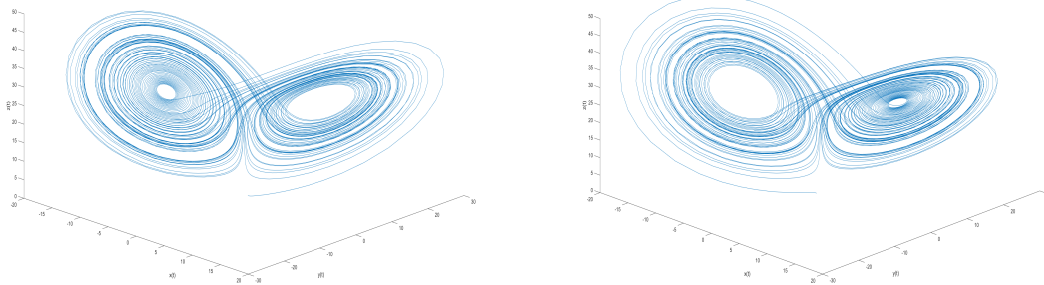
Nesta sección imos a estudar o sistema de Lorenz, o cal xa definimos na sección 2.9 de maneira esquemática. Este é, sen lugar a dúbida, o máis famoso de todos os exemplos de comportamento caótico.

Corría o ano 1963 cando o matemático estadounidense E. N. Lorenz formulou por primeira vez o seu sistema, sendo unha drástica simplificación do modelo das correntes de convección na atmosfera formulado previamente por Rayleigh e Saltzman [14]. Para realizar os cálculos computacionais, fixo uso dun procedemento de dobre aproximación. Os detalles do procedemento poden ser consultados no artigo orixinal [14]. En dito artigo, Lorenz explica que estaba especialmente interesado nas solucións non periódicas do sistema

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x), \\ y' = rx - y - xz, \\ z' = xy - bz, \end{cases} \quad (3.3)$$

derivado do sistema orixinal de 12 variables, mediante a expansión das solucións en serie de Fourier así como a supresión de variables intranscendentes. σ , coñecido como o número de Prandtl, r , coñecido como o número de Rayleigh, e b son parámetros do sistema. Ambos os tres van ser considerados positivos e verificando $\sigma > b + 1$, pois neste caso e para valores de r suficientemente grandes é onde aparece a inestabilidade buscada. Lorenz escolleu no seu artigo $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$ como valores para os parámetros, mais nós probaremos tamén certos resultados en función do valor destes parámetros.

Coa elección feita por Lorenz para os parámetros podemos debuxar as solucións con condicións iniciais $(0, 1, 0)$ e $(0, -1, 0)$ e que podemos observar na Figura 3.1, realizada en Matlab grazas ao código de [27]. Estes debuxos, amplamente coñecidos incluso fora do mundo matemático, foron o primeiro exemplo no mundo de atractor caótico.



(a) Solución con cond. inicial $(0, 1, 0)$.

(b) Solución con cond. inicial $(0, -1, 0)$.

Fig. 3.1. O atractor de Lorenz.

3.4.1. Propiedades do sistema de Lorenz

De xeito similar a como realizamos na sección 2.9, trataremos agora algunhas propiedades relativas a este sistema. Denotaremos ao sistema (3.3) por $X' = L(X)$.

Antes de comezar, é importante notar que este sistema presenta unha simetría natural dada por $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$, é dicir, se temos que $(x(t), y(t), z(t))$ é unha solución do

sistema (3.3), entón tamén o vai ser $(-x(t), -y(t), z(t))$. Ademais, tamén se cumpre que o eixo OZ é invariante: se $x = y = 0$ entón $x' = y' = 0$.

Como é usual ao tratar con sistemas de ecuacións diferenciais, un bo punto de partida pasa por buscar os puntos de equilibrio resolvendo o sistema de ecuacións $L(X) = 0$, do cal obtemos como resultado que os puntos de equilibrio son a orixe $(0, 0, 0)$ así como os puntos $Q_{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ os cales soamente van existir cando $r > 1$.

Temos que

$$\mathcal{D}L(x, y, z) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix}$$

e, consecuentemente, na orixe os autovalores da matriz son

$$\lambda_1 = -b, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \left(-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1-r)} \right).$$

Para $0 \leq r < 1$ todos os autovalores son negativos, e polo tanto, a orixe é un pozo. Temos o seguinte resultado.

Proposición 3.16. *Sexa $r \in [0, 1)$. Entón todas as solucións do sistema (3.3) tenden ao punto de equilibrio $(0, 0, 0)$.*

Para demostrar este resultado, primeiro é preciso definir o concepto de función de Lyapunov estrita así como dar o seguinte resultado, de gran importancia pois pode ser aplicado sen a necesidade de resolver o sistema. A demostración pode ser atopada en [12].

Teorema 3.17 (de estabilidade de Lyapunov). *Sexa x^* un punto de equilibrio do sistema $x' = f(x)$. Sexa $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ unha función diferenciable definida nunha veciñanza aberta U de x^* . Supoñamos que se cumpre que*

- $L(x^*) = 0$ e $L(x) > 0$ para todo $x \in U \setminus \{x^*\}$,
- $\dot{L} := \mathcal{D}L(x) \cdot f(x) \leq 0$ para todo $x \in U \setminus \{x^*\}$.

Entón, x^* é estable. Se ademais L satisfai

- $\dot{L} < 0$ para todo $x \in U \setminus x^*$,

entón x^* é asintoticamente estable.

Chamaremos *función de Lyapunov* para x^* a unha función L satisfacendo os dous primeiros puntos. Se ademais tamén se cumpre o terceiro punto, entón diremos que a función L é unha *función de Lyapunov estrita*.

Demostración da Proposición 3.16. A proba consiste na construción dunha función de Lyapunov estrita en todo \mathbb{R}^3 . Sexa

$$L(x, y, z) = x^2 + \sigma(y^2 + z^2).$$

Temos entón que

$$\dot{L} = -2\sigma(x^2 + y^2 - (1+r)xy) - 2\sigma bz^2.$$

Polo tanto $\dot{L} < 0$ sempre e cando probemos que $g(x, y) = x^2 + y^2 - (1+r)xy > 0$ para $(x, y) \neq (0, 0)$. Para o eixo OY resulta trivial, mentres que para as rectas da forma $y = mx$,

$$g(x, mx) = x^2(m^2 - (1+r)m + 1),$$

pero o termo $m^2 - (1+r)m + 1$ é positivo para todo m sempre e cando $r < 1$ o cal se ten por hipótese. Así, $g(x, y) > 0$ para $(x, y) \neq (0, 0)$ e tense o resultado. ■

Agora o natural é preguntarse que ocorre segundo crece o parámetro r por encima de 1. En primeiro lugar, un dos autovalores do xacobiano na orixe pasa a ser positivo, co cal a orixe pasa a ser un punto de sela. En segundo lugar, os dous puntos de equilibrio P_{\pm} aparecen na orixe cando $r = 1$ e afástanse del segundo r crece. Temos o seguinte resultado.

Proposición 3.18. *Os puntos de equilibrio Q_{\pm} son pozos sempre e cando*

$$r \in \left(1, \sigma \left(\frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}\right)\right).$$

Demostración. Os autovalores de $\mathcal{D}L$ en Q_{\pm} satisfán

$$p_r(\lambda) = \lambda^3 + (1 + b + \sigma)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0.$$

Se $r = 1$ entón p_1 ten tres raíces: 0, $-b$ e $-\sigma - 1$. Dado que $\sigma > b + 1$ todas as raíces son distintas. Polo tanto, para r próximo a 1, p_r ten tres raíces reais próximas a estes valores. Por outro lado, $p_r(\lambda) > 0$ para $\lambda \geq 0$ e $r > 1$, co cal para polo menos r próximo a 1, as tres raíces de p_r deben ser reais e negativas.

Agora, deixamos crecer r e buscamos o valor máis pequeno para o cal p_r ten unha raíz complexa con parte real cero. Esta raíz debe ser da forma $\pm i\omega$ con $\omega \neq 0$ pois p_r non ten raíces iguais a cero para $r > 1$. Resolvendo $p_r(i\omega) = 0$ igualando as partes real e imaxinaria a cero tense entón o resultado. ■

Para a elección realizada por Lorenz de $\sigma = 10$ e $b = 8/3$ temos que os puntos de equilibrio Q_{\pm} son pozos (e polo tanto estables) para $1 < r < \frac{470}{19} \approx 24,74$.

É posible realizar un estudo moito máis extenso do sistema en función do valor do parámetro r . Para valores grandes de r , Lorenz comprobou que aparecían órbitas periódicas estables. Aínda máis, tamén se produce o fenómeno de duplicado de período que xa observamos na sección 2.4. Sorprendentemente, tamén aparece a constante de Feigenbaum, δ . De querer ler máis ao respecto remitímonos a [23], onde se tratan en detalle este e outros aspectos do sistema de Lorenz, mais nós conformarémonos con ver este fenómeno para o atractor de Rössler na seguinte sección.

Consideremos agora $V(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2$. É sinxelo ver que $V(x, y, z) = \nu > 0$ con ν constante define un elipsoide de tres dimensións centrado no punto $(0, 0, 2r)$. Grazas ao resultado que acabamos de probar resulta obvio que para $r > 1$ deixa de ser certo que todas as solucións do sistema (3.3) tendan á orixe, pero tense o seguinte resultado, que nos dá información sobre o comportamento das solucións.

Proposición 3.19. *Existe v^* tal que calquera solución comezando fóra do elipsoide $V(x, y, z) = v^*$ entra eventualmente no elipsoide e permanece dentro del para todo t futuro, é dicir, é unha rexión positivamente invariante.*

Demostración. Temos que

$$\dot{V} = -2\sigma(rx^2 + y^2 + b(z^2 - 2rz)) = -2\sigma(rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 - br^2).$$

A ecuación

$$rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 = \mu$$

define tamén un elipsoide se $\mu > 0$. Se ademais $\mu < br^2$, entón $\dot{V} < 0$. Así, se escollemos v^* o suficientemente grande de maneira que o elipsoide $V(x, y, z) = v^*$ contén ao elipsoide

$$rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 = br^2$$

no seu interior, entón $\dot{V} < 0$ para todo $v \geq v^*$. ■

Por último, vexamos que o sistema (3.3) contrae os volumes. Para iso consideremos D unha rexión con fronteira suave e sexa $D(t) := \phi(t, D)$ a imaxe de D polo fluxo. Sexa $V(t)$ o volume de $D(t)$. Entón tense polo Teorema de Liouville que

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \int_{D(t)} \operatorname{div} L(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

e, como xa comentáramos na sección 2.9, o sistema de Lorenz ten diverxencia constante igual a $-(\sigma + 1 + b)$. Polo tanto,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -(\sigma + 1 + b)V$$

e integrando temos que $V(t) = V(0)e^{-(\sigma+1+b)t}$, co cal calquera volume se contraerá a unha velocidade exponencial a cero.

3.4.2. O atractor de Lorenz

Nesta subsección trataremos cos valores para os parámetros usados por Lorenz: $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$. Deste xeito, o sistema presentará un atractor estraño.

En primeiro lugar, demos unha definición de atractor para sistemas continuos, sendo esta análoga á dada na sección 2.9. Como xa comentamos, non hai concordancia na comunidade matemática sobre cal é a definición exacta, así que guiáremos polo explicado en [12].

Definición 3.20. Sexa $x' = f(x)$ un sistema de ecuacións diferenciais en \mathbb{R}^n . Diremos que un conxunto Λ é un *atractor* se

(1) Λ é compacto e invariante.

(2) Existe un conxunto aberto $U \supset \Lambda$ tal que para cada $x \in U$, $\phi(t, x) \in U$ e $\bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi(t, U)} = \Lambda$.

- (3) (Transitividade) Dados dous puntos $x_1, x_2 \in \Lambda$ e dúas veciñanzas abertas U_i de x_i en U , $i \in \{1, 2\}$, entón existe unha curva integral que comeza en U_1 e pasa a través de U_2 .

A propiedade da transitividade, que a primeira vista pode resultar estraña, é equivalente á terceira propiedade da Definición de atractor da sección 2.9, pois esta propiedade garántenos que chamemos atractor ao mínimo conxunto verificando as outras dúas propiedades. Esta propiedade adoita ser sinxelamente verificable para sistemas no plano, mentres que para dimensión maior pode chegar a resultar extremadamente complexa de probar.

Na Figura 3.1 é importante notar como aínda que as solucións teñen un comportamento inicial moi distinto, eventualmente ambas rematan por comportarse de maneira parecida, oscilando arredor de dous puntos e permanecendo contidas nunha rexión do espazo, tal e como proba a Proposición 3.19. Este debuxo que realizan as solucións e ao que parecen estar todas atraídas é o que se coñece como *atractor de Lorenz*. Na Figura 3.2 podemos observar diversas vistas do atractor proxectado sobre os planos XY , XZ e YZ , respectivamente.

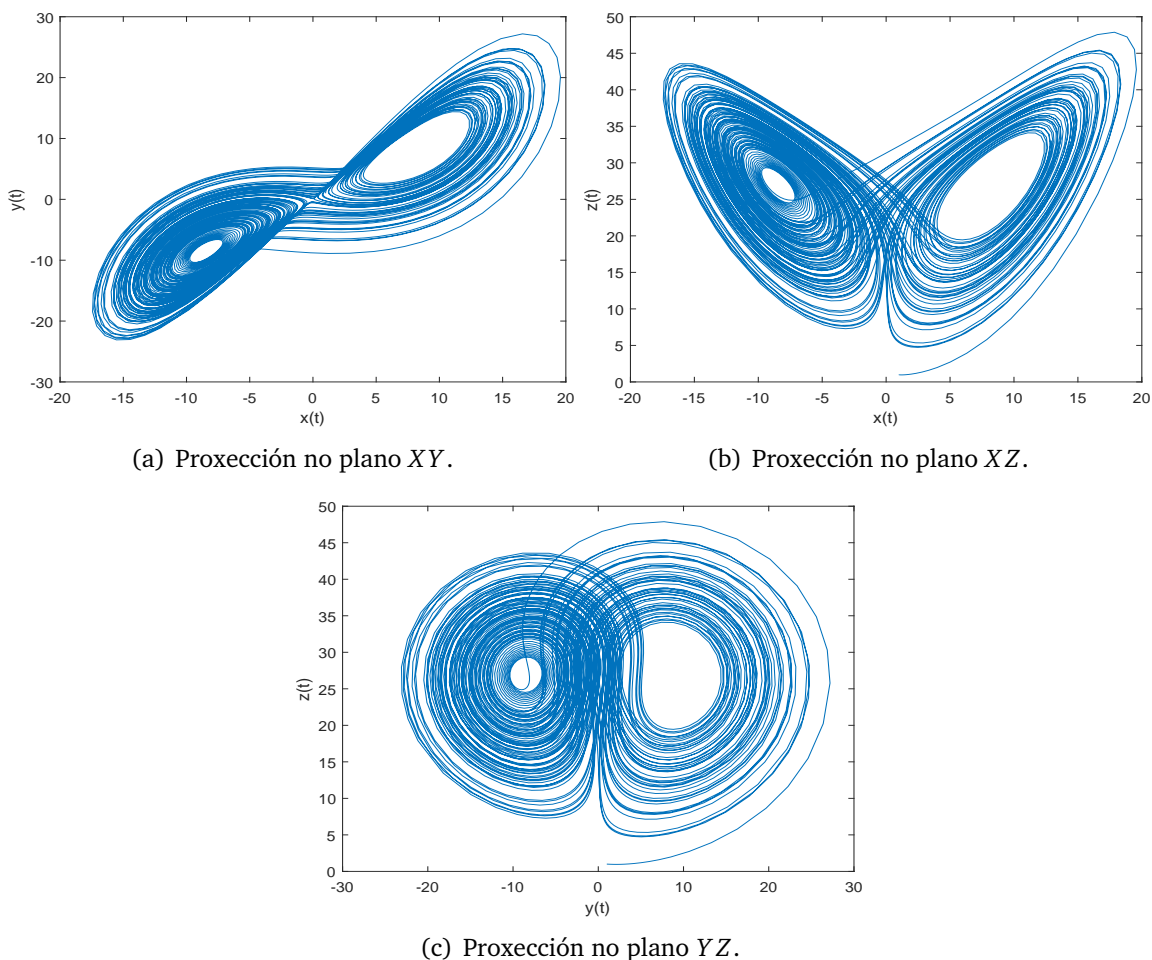


Fig. 3.2. Diversos puntos de vista do atractor de Lorenz para a condición inicial $(1, 1, 1)$.

Cos valores dos parámetros antes mencionados, o sistema específico é:

$$\begin{cases} x' = 10(y - x), \\ y' = 28x - y - xz, \\ z' = xy - \frac{8}{3}z. \end{cases} \quad (3.4)$$

e grazas ao xa visto, os puntos de equilibrio son a orixe e $Q_{\pm} = (\pm 6\sqrt{2}, \pm 6\sqrt{2}, 27)$.

Na orixe, os autovalores son

$$\lambda_1 = -\frac{8}{3}, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{11}{2} \pm \frac{\sqrt{1201}}{2},$$

O comportamento nas proximidades da orixe vén dado polo sistema linearizado

$$Y' = \begin{bmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} Y.$$

Na Figura 3.3 podemos ver o retrato de fases de dita linearización. Nel podemos apreciar como todas as solucións que tenden á orixe o fan de forma tanxencial ao eixo OZ , mentres que o eixo OY é inestable.

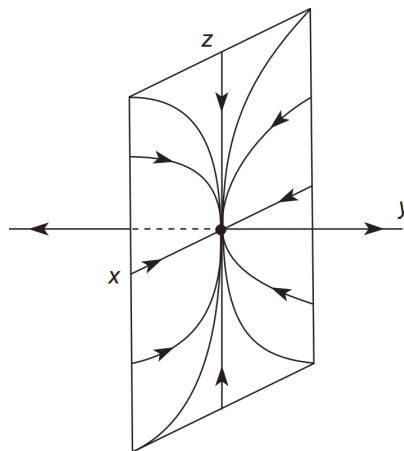


Fig. 3.3. Esquema da linearización do sistema de Lorenz na orixe. Tomado de [12].

Para Q_{\pm} , o cálculo dos autovalores móstranos que hai un autovalor real negativo e un par de autovalores complexos conxugados con parte real positiva. A Figura 3.4 mostra esquematicamente o comportamento dunhas curvas integrais partindo das proximidades da orixe. Na parte dereita, a curva aproxímase a Q_- (o punto que está no centro das espirais da parte esquerda) e despois afástase do punto en espiral. Por reflexión co eixo OZ , a parte esquerda compórtase igual co punto Q_+ . Este movemento en espiral arredor dos puntos Q_{\pm} pódese comprobar observando a proxección da solución sobre o plano XZ na Figura 3.2. Así, vemos como a solución xira en espiral arredor dun dos puntos ata que unha vez chegada a unha certa distancia del esta se afasta rapidamente en dirección ao outro punto de equilibrio, repetíndose este proceso indefinidamente e creando así o caos buscado.

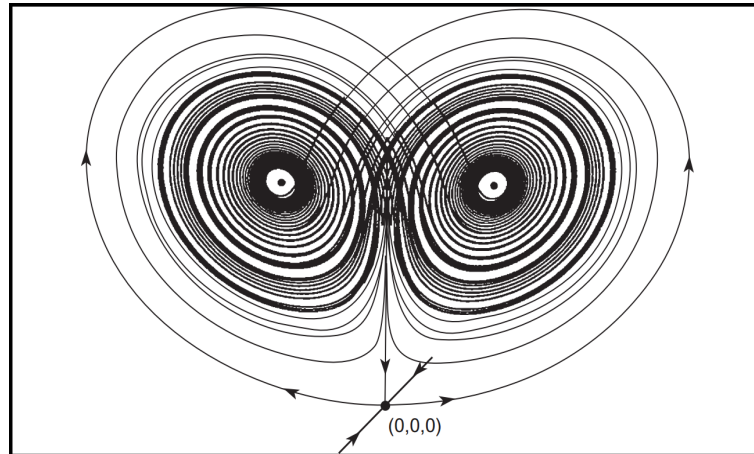


Fig. 3.4. As curvas integrais movéndose arredor dos puntos de equilibrio Q_{\pm} . Tomado de [12].

3.4.3. O expoñente de Lyapunov do sistema de Lorenz

É sinxelo comprobar numericamente como o sistema de Lorenz presenta sensibilidade respecto das condicións iniciais dun xeito análogo ao que fixemos co atractor de Hénon. Para tal fin, se consideramos as condicións iniciais $(0, 2, 0)$ e $(0, 2 + 10^{-4}, 0)$ e representamos a coordenada x nunha serie de tempo $(t, x(t))$, obtemos un gráfico como o da Figura 3.5. Nel podemos observar como aínda estando as condicións iniciais moi próximas, eventualmente afástanse conforme t crece.

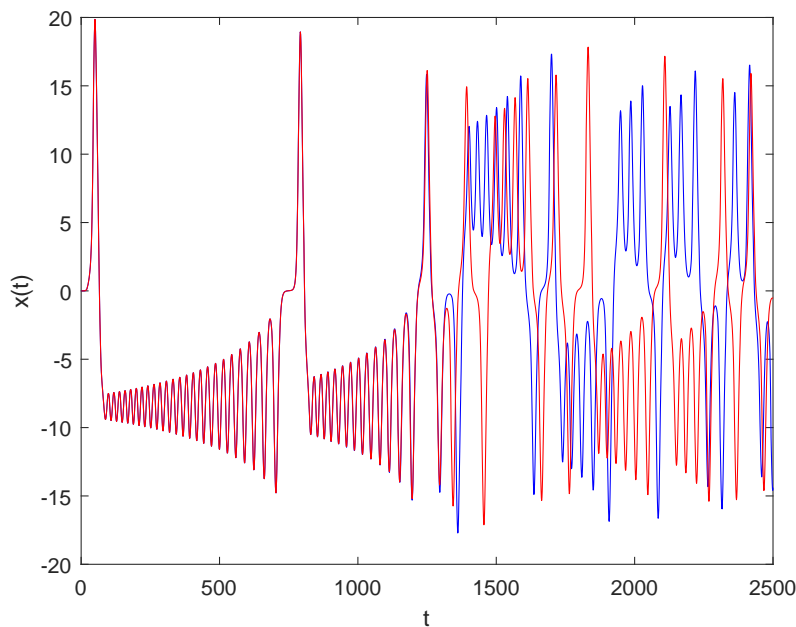


Fig. 3.5. Sensibilidade respecto das condicións iniciais no sistema de Lorenz: en azul, a solución $x(t)$ con condición inicial $(0, 2, 0)$ e en vermello, a solución $x(t)$ con condición inicial $(0, 2 + 10^{-4}, 0)$.

Para o sistema de Lorenz, cálculos numéricos tomados de [10] amosan que os expoñentes

de Lyapunov son

$$h_1 \approx 0,905, \quad h_2 \approx 1,5 \cdot 10^{-6}, \quad h_3 \approx -14,57.$$

para os valores clásicos dos parámetros. Con isto e pola Definición 3.15, temos entón que as órbitas do sistema de Lorenz van ser caóticas.

De xeito similar ao atractor de Hénon, o atractor de Lorenz contrae as distancias nunha dirección e expándese en outra. O expoñente h_2 é moi próximo a cero mais polo seguinte resultado sabemos que debe ser exactamente igual a cero e que ese valor se debe a erros de redondeo así como numéricos.

Proposición 3.21. *Dado un sistema autónomo $x' = f(x)$, toda órbita limitada debe ter un número de Lyapunov igual a cero ou en caso contrario deberá ter un punto de equilibrio no seu ω -límite.*

Demostración. Sexa $x' = f(x)$ un sistema autónomo e ϕ o fluxo. Dada unha condición inicial $x \in \mathbb{R}^n$, se temos que $\omega(x)$ non contén ningún punto de equilibrio, entón $f(\phi(t, x)) \neq 0$ para $t > 0$. Temos tamén que $f(\phi(t, x))$ está limitada para todo $t > 0$, logo van a existir $b, B > 0$ tales que

$$0 < b < \|f(\phi(t, x))\| < B$$

para todo $t > 0$, onde novamente $\|\cdot\|$ denota a norma matricial. Se agora denotamos por $r(n)$ a expansión na dirección de $f(x)$ tras n unidades de tempo entón temos que

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln b \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln r(n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln B \leq 0.$$

Polo tanto, o expoñente de Lyapunov na dirección tanxente á órbita é cero. ■

Analogamente ao feito para o atractor de Hénon é posible comprobar cos expoñentes de Lyapunov que o valor de $e^{h_1+h_2+h_3}$ é igual á velocidade á que se contrae un volume dado, calculada na subsección 3.4.1. Temos entón que

$$e^{h_1+h_2+h_3} \approx 1,15662 \cdot 10^{-6}, \quad e^{-(\sigma+b+1)} \approx 1,16049 \cdot 10^{-6}.$$

3.4.4. Un modelo do atractor de Lorenz

Máis alá dos resultados numéricos proporcionados por Lorenz, había unha carencia de probas matemáticas rigorosas sobre o atractor. Neste contexto, os matemáticos estadounidenses John Guckenheimer e Robert Williams formularon un modelo xeométrico para o atractor de Lorenz, o cal describiremos de xeito esquemático. De querer consultalo en detalle, remitímonos ao artigo orixinal [9].

Partindo da superficie T que pode ser observada na Figura 3.6, describiron T en termos do seguinte sistema linear de ecuacións diferenciais:

$$\begin{cases} x' = ax, \\ y' = -by, \\ z' = -cz, \end{cases} \quad (3.5)$$

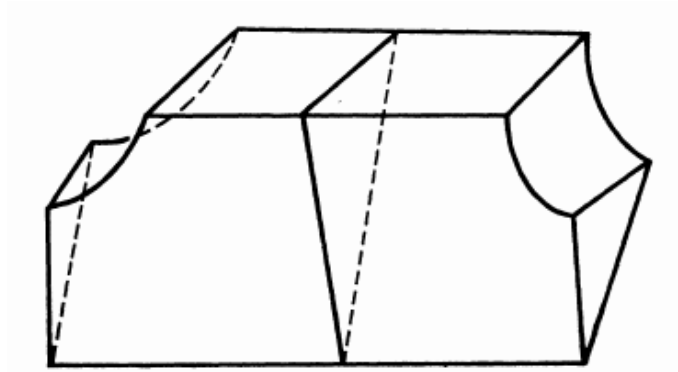


Fig. 3.6. Superficie T de partida. Tomado de [9].

onde a, b, c son escollidos de xeito que $0 < c < a < b$. A continuación, denotaron por S ao cadrado superior de T , dado por $z = 1$ e $x, y \in [-1/2, 1/2]$, e con condición inicial $(x_0, y_0, 1)$ en S resolveron o sistema 3.5 obtendo a solución

$$\begin{cases} x = x_0 e^{at}, \\ y = y_0 e^{-bt}, \\ z = e^{-ct}. \end{cases}$$

O triángulo de T que podemos observar á dereita na Figura 3.6 alcázase no plano $x = 1$, de xeito que a órbita interseca este plano cando

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = y_0 x_0^{b/a} = y_0 x_0^u, & 0 < x_0 \leq \frac{1}{2}, \\ z = x_0^{c/a} = x_0^s, & 0 < s < 1 < u. \end{cases}$$

onde as ecuacións para o caso $x_0 \in [-1/2, 0)$ son análogas.

A continuación a órbita móvese de xeito que leva o triángulo nun subconxunto de S , como podemos ver na Figura 3.7.

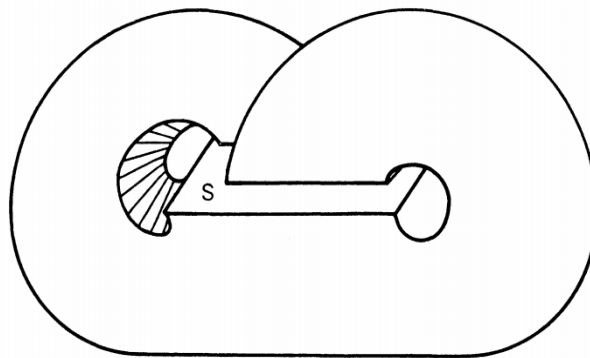


Fig. 3.7. Esquema da evolución de T polo fluxo. Tomado de [9].

Tras isto, impoñen que a aplicación de Poincaré $F : S \rightarrow S$ sexa da forma

$$F(x_0, y_0) = (f(x_0), H(x_0, y_0)),$$

onde a función H verifica que $H(x_0, y_0) > \frac{1}{4}$ se $x_0 > 0$ e $H(x_0, y_0) < \frac{-1}{4}$ se $x_0 < 0$, e a función f satisfai:

- (1) $f(0^+) = -1/2$ e $f(0^-) = 1/2$.
- (2) $f'(x) > \sqrt{2}$ para todo $x \in [-1/2, 1/2]$.
- (3) $f(x) \in (-1/2, 1/2)$ para todo $x \in [-1/2, 1/2]$.

Así, esta aplicación describe un fluxo que presenta un atractor de Lorenz.

Dun xeito semellante a como realizou Hilbert a comezos do século XIX, no ano 1998 o matemático estadounidense Stephen Smale publicou un artigo onde se recollían os que el cría que serían os problemas matemáticos do seguinte século [22]. Entre os problemas propostos recóllense algúns dos famosos “problemas do milenio”: a hipótese de Riemann, a conxectura de Poincaré, a ecuación de Navier-Stokes...

O problema número 14 desta lista involucra ao atractor de Lorenz, e Smale enunciouno como segue (a pesares de non estar Yorke involucrado na creación do atractor xeométrico):

“É a dinámica das ecuacións diferencias de Lorenz a mesma que a do atractor xeométrico de Lorenz enunciado por Williams, Guckenheimer e Yorke?”

A resposta a esta pregunta non tardou demasiados anos en ser dada, pois no ano 2002 o matemático australiano Warwick Tucker probou a súa veracidade, nun artigo extenso e cuxa demostración fai uso da aritmética de intervalos. Antes de dar o enunciado formulado por Tucker é preciso dar a definición de *medida SRB*. Foi tomada de [17], no cal tamén é mencionado o atractor xeométrico de Lorenz.

Definición 3.22. Sexa (X, Σ) un espazo medible e sexa $f : X \rightarrow X$ unha función medible. Diremos que unha medida μ en (X, Σ) é invariante por f se para todo conxunto medible $A \subset \Sigma$,

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A).$$

Definición 3.23. Sexa M unha variedade e $f : M \rightarrow M$. Diremos que a medida invariante por f , μ , é unha *medida SRB* se existe un conxunto $B \subset M$ de medida de Lebesgue positiva tal que para todo $x \in B$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(f^i(x)) = \int_M \varphi \, d\mu$$

para todo $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ continua. O conxunto B é chamado *cunca de atracción* de μ .

Para un fluxo $\phi : M \rightarrow M$ a definición é

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(\phi(t, x)) \, dt = \int h \, d\mu$$

para todo $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Con esta Definición, xa podemos enunciar o resultado probado por Tucker en [26].

Teorema 3.24. *Para os valores clásicos dos parámetros, as ecuacións de Lorenz admiten un atractor extraño robusto, \mathcal{A} . Ademais, o fluxo admite unha única medida SRB, μ_φ , tal que $\text{sop}(\mu_\varphi) = \mathcal{A}$.*

3.5. O atractor de Rössler

O atractor de Lorenz leva desde o seu descubrimento sendo amplamente estudado, descubríndose resultados sobre el incluso nos últimos anos. Porén, na época do seu descubrimento os estudos sobre o atractor de Lorenz eran complicados de realizar debido á imposibilidade de computar unha aplicación de Poincaré para este sistema. Neste contexto púxose de manifesto a necesidade de proporcionar sistemas máis simples que, a pesares desta maior simpleza, retivesen certas propiedades do atractor de Lorenz. Algunhas destas simplificacións son o atractor de Hénon estudado na sección 2.9 ou o modelo xeométrico de Guckenheimer mencionado na subsección 3.4.4. Outro exemplo foi dado polo bioquímico alemán Otto Rössler no ano 1976.

Rössler explica en [21] que o que el buscaba reter do atractor de Lorenz era o movemento en espiral das órbitas arredor dos puntos de equilibrio e ao mesmo tempo simplificalo baseándose na simetría do sistema. Así, proporcionou o sistema

$$\begin{cases} x' = -(y + z), \\ y' = x + ay, \\ z' = b + z(x - c), \end{cases} \quad (3.6)$$

onde os parámetros do sistema foron escollidos como $a = b = 0,2$ e $c = 5,7$. A diferenza do sistema de Lorenz, este sistema presenta un só termo non linear, zx , mentres que o sistema de Lorenz presenta dous, xz e xy . Tamén é importante resaltar que este sistema non modela ningún proceso físico como si trataba de facer o de Lorenz. É, en palabras de Rössler, “un modelo dun modelo”.

De igual xeito que co atractor de Lorenz, na Figura 3.8 podemos ver unha solución do sistema de Rössler para a condición inicial $(0, 0, 0)$ e a elección de parámetros feita por Rössler, así como as proxeccións de dita solución nos planos XY , XZ e YZ .

Podemos observar como en lugar da oscilación arredor dos dous puntos fixos Q_\pm do atractor de Lorenz aquí a solución semella formar unha especie de banda de Möbius [21]. Así, a solución móvese en espiral cara fóra sobre o plano XY seguido por un movemento na dirección do eixo OZ e rematando cunha reinsertión no plano XY .

3.5.1. Comportamento do atractor de Rössler

Os sistema de Rössler ten dous puntos de equilibrio para $c^2 > 4ab$ dados por $P_1 = (-ap_1, p_1, -p_1)$ e $P_2 = (-ap_2, p_2, -p_2)$ sendo

$$p_1 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \quad p_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}.$$

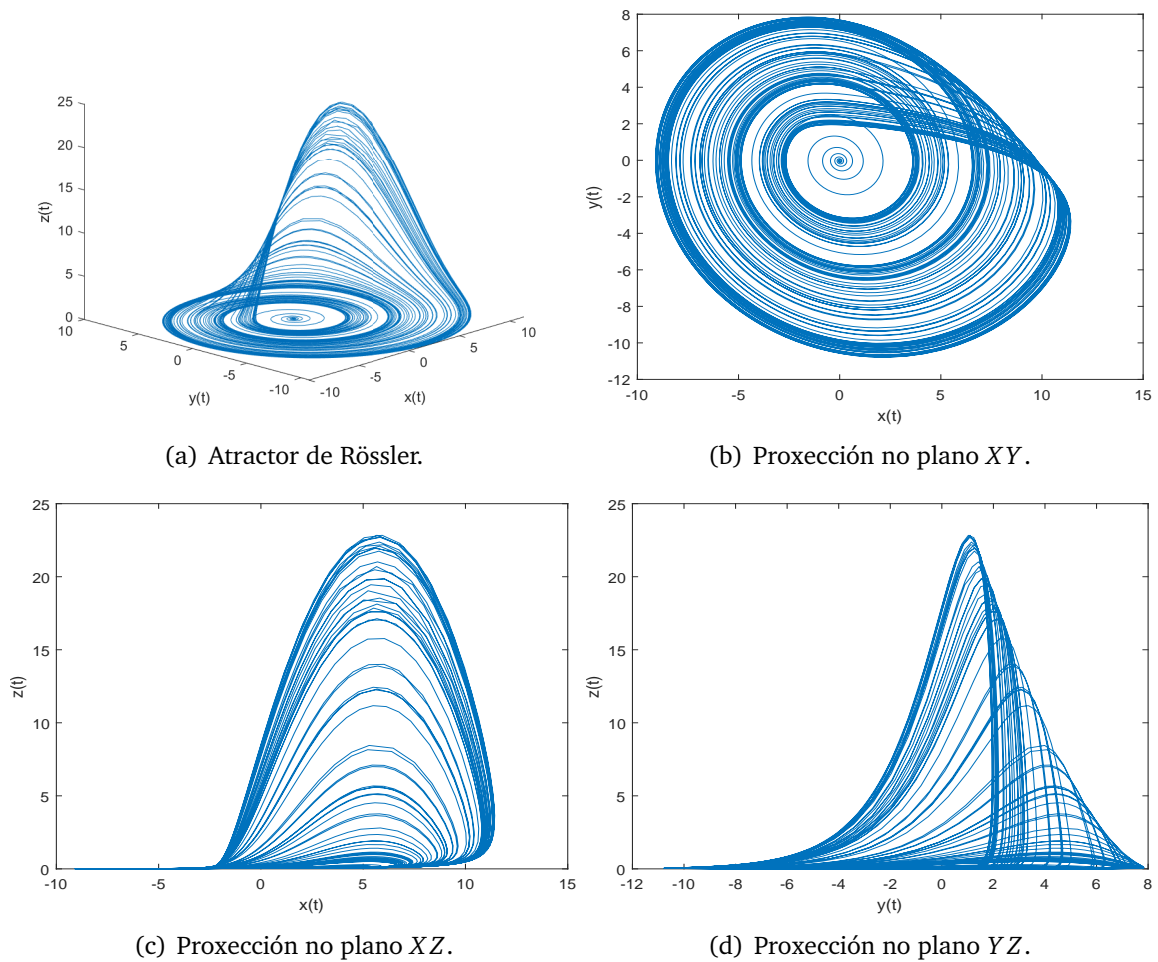


Fig. 3.8. Diversos puntos de vista do atractor de Rössler para a condición inicial (0, 0, 0).

Se $c^2 = 4ab$ entón o sistema ten un só punto de equilibrio.

Con respecto á estabilidade destes puntos tense o seguinte resultado, do cal omitiremos a proba por estar fóra do dominio deste traballo, pero pode ser consultada en [2].

Proposición 3.25. O punto P_1 é sempre inestable e P_2 é estable se e só se os parámetros a e c pertencen a $S_1 = \{(a, c) | a \leq 1, c > 2a\}$ ou a $S_2 = \{(a, c) | a \in (1, \sqrt{2}), c \in (2a, 2a/(a^2 - 1))\}$, e o parámetro b satisfai que

$$b_H(a, c) \leq b \leq b_E(a, c),$$

sendo

$$b_E(a, c) := \frac{c^2}{4a},$$

$$b_H(a, c) := \frac{a(2 - a^4 + ca^3 + 2a^2 - ca + c^2 + (c - a)\sqrt{a^6 - 4a^4 + 2ca^3 - 4a^2 + c^2})}{2(a^2 + 1)^2}.$$

En lugar de afondar máis nas propiedades do sistema como fixemos para o de Lorenz, conformarémonos con comprender o comportamento do sistema de Rössler centrando a nosa atención no plano XY, tal e como se realizou en [1]. Así, para valores de z próximos

a cero temos que a solución se afasta da orixe en espiral e permanece cerca do plano XY mentres x sexa menor ca c , pois a terceira ecuación ten un coeficiente negativo para z . Cando x crece por enriba de c , entón z pasa a ter valores positivos grandes o cal interrompe o crecemento de x debido ao termo z negativo na primeira ecuación do sistema. Esta dinámica entre as variables x e z é a que produce que a órbita se manteña limitada no espazo, tal e como vemos na Figura 3.8.

3.5.2. Fenómeno de duplicado do período

A Figura 3.9 amosa as proxeccións no plano XY do atractor para diversos valores de c (estando $a = b = 0,2$ fixados). Para $c = 2,5$ o atractor consiste nunha órbita periódica. Se aumentamos o valor de c ata $3,5$, agora a órbita dá dúas voltas antes de volver ao punto de partida, de xeito que o período agora é aproximadamente o dobre ca antes. Para $c = 4$, a órbita agora dá 4 voltas e en consecuencia, o período é agora de aproximadamente 4 veces o período orixinal. Deste xeito é como se produce o *fenómeno de duplicado de período* en sistemas continuos. Tras máis duplicados de período segundo aumentamos o valor de c chegamos finalmente ao atractor estraño que podemos observar para $c = 5$.

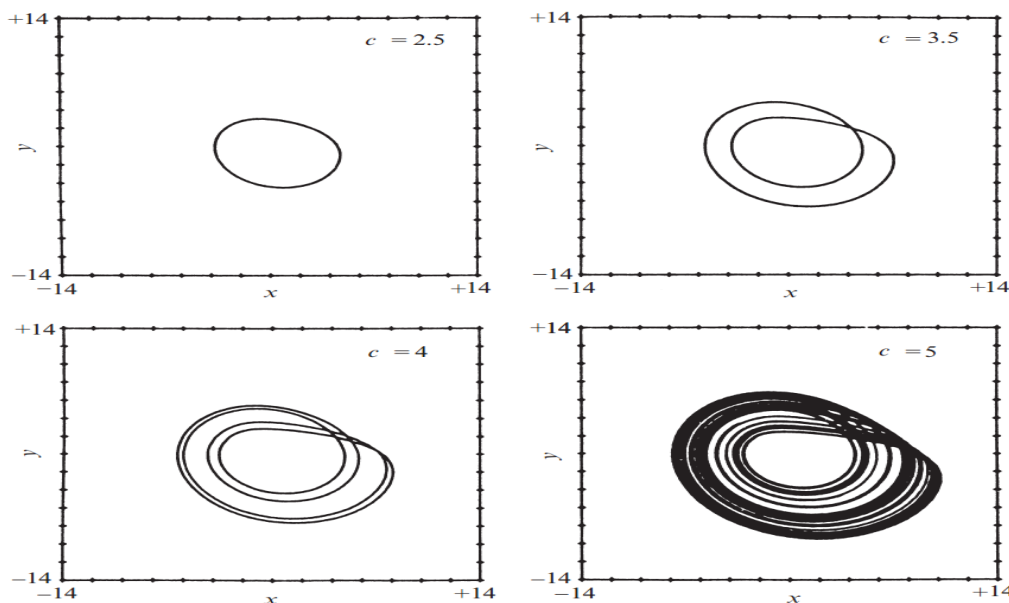


Fig. 3.9. Atractor de Rössler para diversos valores do parámetro c . Tomado de [24].

É posible facer un diagrama de órbitas para o sistema de Rössler, de xeito semellante ao realizado para sistemas discretos. Así, para cada valor de c no eixo horizontal representamos os máximos locais da variable x da solución. Así, unha órbita de período T terá un só máximo local mentres que unha órbita de período aproximado $2T$ terá dous máximos locais, etc. O atractor caótico presentará entón infinitos máximos locais debido á súa estrutura fractal.

Na Figura 3.10 podemos observar o diagrama de órbitas mencionado previamente e comprobamos que ten unha estrutura semellante aos diagramas xa vistos ao longo do traballo. É importante notar como tamén aparece a ventá periódica de período tres antes de dar paso ao caos, como xa vimos polo Corolario 2.12.



Fig. 3.10. Diagrama de órbitas do sistema de Rössler para $a = b = 0,1$. Tomado de [1].

4. Bibliografía empregada

Para rematar, comentaremos brevemente a bibliografía que foi empregada na elaboración deste traballo.

A maioría de definicións e resultados foron tomados de [1, 6, 12, 24, 25], por seren referencias moi amplas e que abranguen moitos temas relativos á teoría do caos e o estudo de sistemas dinámicos, dos cales tamén foron tomadas en ocasións imaxes e esquemas cunha finalidade ilustrativa.

Por outro lado, algún resultado puntual foi tomado do artigo orixinal onde este era probado, como é o caso de [2–4, 7, 13, 16, 17, 26].

En ocasións, remitímonos aos artigos orixinais dos autores onde se facía a presentación do atractor caótico en cuestión, como son [11, 14, 21].

As referencias [18, 27] foron usadas para deseñar os códigos necesarios para representar imaxes e gráficas usadas ao longo do traballo, as cales son na súa maioría de realización propia. Entre os programas usados para este fin estiveron Maxima, Matlab e Geogebra.

Bibliografía

- [1] Alligood, K.T., Sauer, T.D., Yorke, J.A.: *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer (2000)
- [2] Barrio, R., Blesa, F., Dena, A., Serrano, S.: *Qualitative and numerical analysis of the Rössler model: bifurcations of equilibria*. *Computers and Mathematics with Applications* **62**, 4140–4150 (2011)
- [3] Benedicks, M., Carleson, L.: *The dynamics of the Hénon map*. *Ann. of Math. (2)* **133**(1), 73–169 (1991)
- [4] Burns, K., Hasselblatt, B.: *The Sharkovsky Theorem: A Natural Direct Proof*. *Amer. Math. Monthly* **118**(3), 229–244 (2011)
- [5] Collet, P., Eckman, J.P.: *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*. Birkhäuser (1980)
- [6] Devaney, R.L.: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley Publishing Company (1989)
- [7] Feigenbaum, M.J.: *Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations*. *J. Stat. Phys.* **19**(1), 25–52 (1978)
- [8] Galor, O.: *Discrete Dynamical Systems*. Springer (2007)
- [9] Guckenheimer, J., Williams, R.F.: *Structural stability of Lorenz attractors*. *Publications Mathématiques de l’IHÉS* **50**, 59–72 (1979)
- [10] Hartl, M.D.: *Lyapunov exponents in constrained and unconstrained ordinary differential equations* (2003). URL <https://arxiv.org/pdf/physics/0303077v2.pdf>
- [11] Hénon, M.: *A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor*. *Comm. Math. Phys.* **50**(1), 69–77 (1976)
- [12] Hirsch, M.W., Smale, S., Devaney, R.L.: *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Elsevier (2013)
- [13] Li, T.Y., Yorke, J.A.: *Period three implies chaos*. *Amer. Math. Monthly* **82**(10), 985–992 (1975)
- [14] Lorenz, E.N.: *Deterministic Nonperiodic Flow*. *J. Atmospheric Sci.* **20**, 130–141 (1963)
- [15] Lorenz, E.N.: *Predictability, Does the flap of a butterfly’s wings in Brazil set off a tornado in Texas?* In: *AAAS Section on Environmental Sciences New Approaches to Global Weather: GARP*. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts (1972)

- [16] Metropolis, N., Stein, M.L., Stein, P.R.: *On Finite Limit Sets for Transformations on the Unit Interval*. *Journal of combinatorial theory* **15**, 25–44 (1973)
- [17] Metzger, R.J.: *Sinai-Ruelle-Bowen measures for contracting Lorenz maps and flows*. *Annales de l'I.H.P.* **17**(2), 247–276 (2000)
- [18] Morante, A., Vallejo, J.A.: *Chaotic dynamics with Maxima* (2013). URL <https://arxiv.org/pdf/1301.3240.pdf>
- [19] Peitgen, H.O., Jürgens, H., Saupe, D.: *Chaos and Fractals*. Springer (2004)
- [20] Perko, L.: *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer (2006)
- [21] Rössler, O.E.: *An equation for continuous chaos*. *Phys. Lett. A* **57A**(5), 397–398 (1976)
- [22] Smale, S.: *Mathematical Problems for the Next Century*. *The Mathematical Intelligencer* **20**, 7–15 (1998)
- [23] Sparrow, C.: *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*. Springer (1982)
- [24] Strogatz, S.H.: *Nonlinear dynamics and chaos*. Westview Press (2015)
- [25] Teschl, G.: *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. American Mathematical Society (2012)
- [26] Tucker, W.: *A rigorous ODE Solver and Smale's 14th Problem*. *Foundations of Computational Mathematics* **2**, 53–117 (2002)
- [27] Wikipedia contributors: *Lorenz system* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia* (2021). URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lorenz_system&oldid=1025751485. [Online; accessed 24-June-2021]