



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Curvatura de Ricci y Ecuaciones de Einstein

María Eugenia Gil Pallares

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Curvatura de Ricci y Ecuaciones de Einstein

María Eugenia Gil Pallares

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía, Departamento de Matemáticas
Título: Curvatura de Ricci y Ecuaciones de Einstein
Breve descripción do contido
El objetivo del trabajo es inicial el estudio de la geometría Riemanniana y de Lorentz desde el punto de vista de la curvatura. Se dedicará especial atención al tensor de Ricci y las métricas de Einstein como puntos críticos del funcional curvatura escalar total, lo que da lugar a la ecuación de Einstein para espacio-tiempos de dimensión cuatro.
Recomendacións
Cursar la asignatura Variedades diferenciables, correspondiente al grado en Matemáticas.
Otras observacións
El TFG propuesto está claramente relacionado con la Relatividad General, desde un punto de vista matemático.

Índice

Resumen	VIII
Introducción	XI
1. Conceptos previos y notación	1
1.1. Tensores en espacios vectoriales	1
1.2. Variedades diferenciables	2
2. Métricas de Riemann	5
3. Conexiones	9
3.1. Motivación	9
3.2. Conexiones	10
3.3. Campos de vectores a lo largo de curvas	13
3.3.1. Derivadas covariantes a lo largo de curvas	14
3.4. Derivada covariante y campos de tensores	14
3.5. Transporte paralelo	15
3.6. Torsión de la derivada covariante: conexiones simétricas	19
3.7. Conexión de Levi-Civita	19
4. Geodésicas y la aplicación exponencial	25
4.1. Geodésicas	25
4.2. La aplicación exponencial	28

4.2.1. Coordenadas normales	29
5. Curvatura	31
5.1. Propiedades del tensor de curvatura	32
6. Subvariedades	37
7. Variedades de Einstein	43
7.1. El funcional de Hilbert-Einstein	46
Bibliografía	57

Resumen

El objetivo final de este trabajo es el cálculo de los puntos críticos del funcional de Hilbert-Einstein, es decir, de la curvatura escalar total en variedades de Riemann. Para ello se introducirán aquellos conceptos básicos imprescindibles para el desarrollo posterior referentes a variedades diferenciables y a variedades de Riemann. A continuación se introducirán las conexiones como herramienta de derivación en variedades de Riemann y se estudiará la conexión de Levi-Civita. Se expondrán las principales características de las geodésicas y la aplicación exponencial para la consecuente definición de las coordenadas normales. Posteriormente se introducirá la idea de curvatura en variedades y en subvariedades. Finalmente se define el funcional de Hilbert-Einstein y se calculan sus puntos críticos en general y bajo restricciones haciendo variaciones en la métrica.

Abstract

The main purpose of this work is to calculate the critical points of the Hilbert-Einstein functional, also known as the total scalar curvature in Riemannian manifolds. For this purpose, the basic concepts essential for the subsequent development of differentiable manifolds and Riemannian manifolds are introduced. Next, connections are introduced as a tool for derivation in Riemannian manifolds and the Levi-Civita connection is studied. The main characteristics of geodesics and the exponential map are presented for the consequent definition of normal coordinates. Subsequently, the idea of curvature in manifolds and submanifolds is introduced. Finally, the Hilbert-Einstein functional is defined and its critical points are calculated with and without restrictions making variations in the metric.

Introducción

Las variedades de Riemann se caracterizan por ser variedades diferenciables dotadas de una métrica de Riemann. Al estar equipadas con un producto escalar en cada espacio tangente, constituyen el marco propio para medir distancias, áreas, volúmenes y relacionarlas con los cálculos euclídeos análogos. La curvatura de Gauss de una superficie en \mathbb{R}^3 se determina a partir de las secciones normales de la misma. Así en cada punto la curvatura de Gauss es el producto de los valores extremales de las curvaturas de las secciones normales. El Teorema Egregium de Gauss establece que la curvatura de Gauss es un concepto intrínseco y, por tanto, expresable en términos de la primera forma fundamental de la superficie. Sobre variedades de Riemann de dimensión arbitraria se introduce la curvatura seccional en el punto $p \in M$ asociada a un subespacio 2-dimensional $\sigma \subset T_p M$ como el valor en p de la curvatura de Gauss de la superficie construida sobre la variedad al proyectar localmente el subespacio σ a través de la aplicación exponencial. En particular, podemos determinar si la estructura en cuestión está curvada de forma positiva o negativa, o si por el contrario es plana. Los ejemplos más simples de esta situación son las esferas $\mathbb{S}^n(R)$, el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n(R)$ y el espacio euclídeo \mathbb{R}^n , que constituyen los espacios modelo de curvatura seccional positiva, negativa y nula, respectivamente.

La curvatura seccional de una variedad de Riemann determina por completo el tensor de curvatura (que mide la falta de conmutatividad en las derivadas covariantes). Dicho tensor, junto con sus derivadas covariantes, determina por completo la estructura Riemanniana, lo que lo hace de especial interés. El tensor de Ricci, que se obtiene como contracción del tensor de curvatura, permite medir el grado en que la aplicación exponencial distorsiona el volumen de una variedad dada. La curvatura escalar (obtenida como la traza métrica del tensor de Ricci) es una generalización natural de la curvatura de Gauss y proporciona un invariante de la estructura Riemanniana.

Dado que toda variedad admite infinitas métricas de Riemann una cuestión natural es la búsqueda de “métricas óptimas” en el sentido que la distribución de ciertos objetos geométricos sobre la variedad sea lo más uniforme posible. Para ello, una vez fijado el objeto geométrico a estudiar se considerarán variaciones de la métrica con el objetivo de detectar los posibles mínimos de dichas variaciones o, al menos, sus puntos críticos. Así, las superficies minimales aparecen de forma natural como las superficies críticas para el funcional de área bajo variaciones normales.

Nuestro objetivo es estudiar los puntos críticos del funcional de Hilbert-Einstein que mide la curvatura escalar total de una variedad, esto es

$$\mathbf{S} : g \mapsto \mathbf{S}(g) = \int_M \tau_g dV_g$$

para cualquier métrica g sobre una variedad compacta M , donde τ_g y dV_g son la curvatura escalar y el elemento de volumen sobre M asociados a la métrica de Riemann g . Para ello consideraremos variaciones de la métrica $g[t] = g + th$ en la dirección de un campo de tensores simétrico h con el objetivo de calcular $\frac{d}{dt} \mathbf{S}(g[t])|_{t=0}$, lo que dará lugar al tensor de Einstein $G = \rho - \frac{\tau}{2}g$.

Teniendo en cuenta que la curvatura escalar es el doble de la curvatura de Gauss de cualquier superficie, el Teorema de Gauss-Bonnet muestra que todas las métricas son críticas en dimensión dos, ya que el funcional es constantemente $\mathbf{S}(g) = 4\pi\chi(M)$ para cualquier métrica de Riemann, siendo $\chi(M)$ la característica de Euler-Poincaré de M . El objetivo central de este trabajo es mostrar que, en dimensiones superiores, las métricas críticas para el funcional de Hilbert-Einstein se corresponden con aquellas para las que el tensor de Ricci es cero cuando se consideran variaciones arbitrarias. En la situación más restrictiva de considerar solamente variaciones que preserven el volumen, se tiene que las métricas críticas se corresponden con las métricas de Einstein ($\rho = \frac{\tau}{n}g$) en dimensión $n \geq 3$.

Esta misma pregunta surge en el campo de la Relatividad General, buscando aquellas métricas que reflejen el comportamiento del Universo observable como variedad de dimensión 4. La forma de afrontar este problema es usando el método variacional del principio de mínima acción. Para ello se define la acción del sistema, que no es más que el producto de la energía de un proceso por el tiempo que dura el mismo. En este caso se trata de un objeto masivo en el tejido espacio-temporal del universo curvando a dicho tejido. Así como ocurre con otros fenómenos físicos, se espera que la deformación resultante coincida con la obtenida de minimizar la acción. Para obtener resultados coincidentes con las observaciones experimentales, será necesario restringir la acción y resolver el problema de Lagrange asociado. Por lo tanto, el desarrollo matemático en variedades de Riemann tendrá una aplicación directa en la Cosmología y será la herramienta fundamental en el estudio de la gravitación.

Para poder calcular los puntos críticos del funcional de Hilbert-Einstein comenzaremos por introducir brevemente aquellos conceptos previos necesarios para el desarrollo del trabajo. Para ello se dedicará el Capítulo 1 a establecer la notación que usaremos, especialmente la relacionada con tensores y campos de vectores. Acto seguido, en el segundo capítulo se definirán las métricas y variedades de Riemann, principal objeto de estudio.

En el Capítulo 3 se introduce el concepto de conexión, herramienta imprescindible para la diferenciación en variedades. En particular, se definirá la conexión de Levi-Civita que usaremos en el resto del estudio por sus buenas propiedades algebraicas y diferenciables, y su relación con la métrica definida sobre la variedad.

El cuarto capítulo estará dedicado a las geodésicas y a la aplicación exponencial, de donde se derivarán las coordenadas normales, que serán de gran utilidad en los desarrollos teóricos posteriores.

En el Capítulo 5 introduciremos el tensor de curvatura y sus propiedades, la curvatura seccional y el tensor de curvatura de Ricci.

Antes de adentrarnos en el Capítulo 7 en las variedades de Einstein y el problema variacional del funcional de Hilbert-Einstein, estudiaremos en el sexto capítulo la relación entre las métricas definidas en una variedad y en sus subvariedades, lo que nos permite describir los espacios modelo de curvatura seccional constante.

Finalmente, en el capítulo 7 estudiamos las métricas de Einstein. Mientras que toda variedad de dimensión 2 verifica la condición de Einstein en cada punto, la correspondiente situación en dimensión tres es mucho más rígida. Mostramos que en dicha dimensión las únicas métricas de Einstein son las de curvatura seccional constante. La situación ya es distinta en dimensión cuatro, donde las variedades producto $\mathbb{S}^2(R) \times \mathbb{S}^2(R)$ constituyen los primeros ejemplos no triviales de variedades de Einstein. Obtenemos la expresión del gradiente del funcional de Hilbert-Einstein y finalmente obtenemos la caracterización de las variedades de Einstein como los puntos críticos de la curvatura escalar total para variaciones que mantengan constante el volumen. Terminaremos estableciendo la conexión directa con la Relatividad General.

Capítulo 1

Conceptos previos y notación

Este primer capítulo introductorio servirá para fijar la notación a utilizar en el resto del trabajo y revisar conceptos básicos de geometría diferencial y álgebra tratados en asignaturas del grado. Las demostraciones de los resultados enunciados en este capítulo, así como la profundización en cada uno de los conceptos puede ser consultadas en [5], [7] o [8].

1.1. Tensores en espacios vectoriales

Los campos de tensores son una herramienta fundamental en la geometría diferencial. Mientras que para el cómputo de otros operadores, como las derivaciones, no es suficiente con conocer su valor en un punto dado, los tensores quedan determinados por su valor en un cierto punto y la evaluación de cantidades previamente conocidas en dicho punto. En este trabajo usaremos de forma continuada tensores y campos de tensores sobre variedades, como serán los campos de vectores, la métrica de Riemann y los tensores de curvatura entre otros.

Definición 1.1. Dado un espacio vectorial V de dimensión finita, denotaremos como V^* su espacio dual. Definimos un **tensor k -covariante y ℓ -contravariante** como una aplicación multilineal

$$F : V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Notación 1.2. Un tensor k -covariante y ℓ -contravariante también se denotará por tensor (ℓ, k) o (ℓ, k) -tensor. El espacio de todos los (ℓ, k) -tensores sobre el espacio vectorial V se denotará por $T_\ell^k(V)$, y se toma $T^0(V) = \mathbb{R}$.

Definición 1.3. Dados dos tensores $F \in T_\ell^k(V)$, $G \in T_s^r(V)$, se define el **producto tensorial** de ambos como el tensor de tipo $k + r$, $\ell + s$ determinado por:

$$F \otimes G(\omega^1, \dots, \omega^{\ell+s}, Y_1, \dots, Y_{k+r}) = F(\omega^1, \dots, \omega^\ell, Y_1, \dots, Y_k)G(\omega^{\ell+1}, \dots, \omega^{\ell+s}, Y_{k+1}, \dots, Y_{k+r}),$$

para cualesquiera $\omega^1, \dots, \omega^{\ell+s} \in V^*$ y $Y_1, \dots, Y_{k+r} \in V$.

Dada una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ del espacio vectorial V , y su correspondiente base dual $\{\eta^1, \dots, \eta^n\}$ de V^* , podemos expresar cualquier tensor $F \in T_\ell^k(V)$, usando el convenio de Einstein, como:

$$F = F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_\ell} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_\ell} \otimes \eta^{i_1} \otimes \dots \otimes \eta^{i_k}.$$

1.2. Variedades diferenciables

A continuación recordaremos los conceptos básicos de las variedades diferenciables que constituirán la base sobre la cual trabajaremos.

Las **variedades diferenciables** se corresponden con los pares de la forma $(M, [\mathcal{A}]_\infty)$, o simplemente M , donde M es un espacio topológico Hausdorff y localmente euclidiano, y $[\mathcal{A}]_\infty$ es una estructura diferenciable sobre M . Asumiremos para lo que resta que todas las variedades serán además paracompactas, segundo numerables y conexas.

Denotaremos por $\mathfrak{F}(M)$ al conjunto de funciones diferenciables de una variedad M en \mathbb{R} : $\mathfrak{F}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es diferenciable } C^\infty\}$. Una función $F : M \rightarrow N$ entre variedades diferenciables se dirá que es **diferenciable** si existe una expresión local de F en cada punto de M que es diferenciable. Equivalentemente, $F : M \rightarrow N$ es diferenciable si el pullback preserva el espacio de funciones diferenciables. Es decir, dada $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces $F^*(f) = (f \circ F)$ es diferenciable.

Diremos que una aplicación $v : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ es un **vector tangente** a la variedad M en p si es lineal, $v(f + g) = v(f) + v(g)$, $v(\lambda f) = \lambda v(f)$, y verifica una regla de Leibnitz para el producto, $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$, para cada $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

Denotaremos por $T_p M$ al **espacio tangente** a una variedad M en un punto $p \in M$. Denotaremos por **fibrado tangente** a la unión disjunta de los espacios tangentes a M en cada uno de sus puntos $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$.

Dada una variedad diferenciable M , se define un **campo de vectores** sobre M como una sección diferenciable de la proyección del fibrado tangente. A lo largo del trabajo necesitaremos en numerosas ocasiones trabajar directamente sobre el espacio tangente a la variedad. Definiremos una *referencia local* para TM como una base de campos de vectores $\{E_1, \dots, E_n\}$ localmente definidos de forma que para cada punto $p \in M$ se tenga que $\{E_1|_p, \dots, E_n|_p\}$ es una base de $T_p M$.

La diferenciable de un campo de vectores puede ser entendida de forma equivalente en términos de la diferenciable de la sección local del fibrado tangente, de su expresión en coordenadas, o en términos de determinar una derivación en el espacio de funciones diferenciables $\mathfrak{F}(M)$.

Dada una aplicación diferenciable entre dos variedades $F : M \rightarrow N$, se define la **aplicación**

tangente a F o pushforward en un punto $p \in M$ como $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$, tal que $F_{*p}(v)(h) = v(h \circ F)$, con $v \in T_p M$ y $h \in \mathfrak{F}(N)$.

Se denotará por **k -forma** sobre una variedad M como una sección diferenciable del fibrado exterior de grado k , $\omega : p \in M \mapsto \omega_p \in \Lambda^k(T_p M)$ donde ω_p es una k -forma lineal en p (aplicación multilineal y antisimétrica sobre $T_p M \times \dots \times T_p M$). Denotaremos con $\Lambda^k(TM)$ al espacio de k -formas diferenciables sobre M . Además, entenderemos la diferenciabilidad de forma equivalente en el sentido de actuar diferenciablemente sobre campos de vectores.

Dadas tres variedades M_1, M_2 y M_3 , y dos aplicaciones diferenciables $F : M_1 \mapsto M_2$ y $G : M_2 \mapsto M_3$, entonces, el **pullback** de G bajo F es la aplicación $F^*G : M_1 \mapsto M_3$ definida por $F^*G = G \circ F$. En particular, si tenemos una aplicación diferenciable $F : M \mapsto N$ entre variedades, F^* será una aplicación entre los espacios cotangentes $F^* : T^*N \rightarrow T^*M$ actuando sobre 1-formas ω sobre N y definido como $(F^*(\omega))_p(X) = \omega_{F(p)}(F_{*p}(X))$.

Observación 1.4. Cuando hablemos de diferenciabilidad de una función, a menos que se especifique lo contrario, nos referiremos a \mathcal{C}^∞ . Hablaremos en general de una variedad diferenciable M de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Los abiertos coordenados de la variedad serán denotados como el par $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^n))$, siendo la base del espacio tangente a una variedad M en un punto $p \in M$, $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\} = \{\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}\} = \{\partial_1, \dots, \partial_n\}$, y la correspondiente base del espacio dual $\{dx^1, \dots, dx^n\}$.

Denotamos por **fibrado de (ℓ, k) -tensores** sobre M a la unión disjunta de los espacios de (ℓ, k) -tensores del espacio vectorial tangente a una variedad M en un punto p :

$$T_\ell^k(M) := \bigsqcup_{p \in M} T_\ell^k(T_p M).$$

Un **campo de tensores sobre M** es por tanto una sección del fibrado de de tensores $T_\ell^k M$. Los campos de tensores pueden ser caracterizados por el hecho de que una aplicación $\Omega : \Lambda^1(TM) \times \dots \times \Lambda^1(TM) \times \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ está inducida por un (ℓ, k) -campo de tensores si y solo si es multilineal sobre $\mathfrak{F}(M)$. Tanto los campos de vectores como las formas diferenciables pueden entenderse como casos particulares de campos de tensores.

Para terminar con este capítulo introduciremos el concepto de forma de volumen e integral sobre una variedad que necesitaremos en la definición de la curvatura escalar total.

Dada una variedad diferenciable orientada de dimensión n , una n -forma diferencial ω se dirá que es una **forma de volumen** de M si $\omega_p \neq 0$ para cualquier punto p de la variedad. En particular, teniendo en cuenta que la dimensión de $\Lambda^n(TM)$ es 1, la clase de equivalencia de ω define una orientación sobre la variedad.

Consideremos una variedad diferenciable segundo numerable orientada M , con dimensión n . Sea ω una forma de volumen sobre M y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con soporte

compacto contenido en un abierto coordenado $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$. Sea $f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ la expresión local de la n -forma $f\omega$. Entonces, la **integral de f en M** es:

$$\int_M f = \int_M f\omega = \int_{\varphi(\mathcal{U})} f \circ \varphi^{-1} \in \mathbb{R}.$$

También presentamos el teorema de Stokes y remitimos a [8] para su demostración y una mayor profundización en la integración en variedades diferenciables.

Teorema 1.5 (Teorema de Stokes). *Para una variedad diferenciable M segundo numerable orientada de dimensión n con frontera ∂M orientada de forma compatible con la variedad, y ω una $(n-1)$ -forma diferencial sobre M con soporte compacto, se verifica $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$.*

Capítulo 2

Métricas de Riemann

Una de las ideas principales que motivan el estudio de la geometría de Riemann es que permite explicar todas las cantidades geométricas en una variedad desde un punto de vista intrínseco. De esta forma, se elimina cualquier tipo de dependencia con el espacio ambiente, para tratar problemas que no pueden abordarse fácilmente desde el punto de vista de subvariedades en \mathbb{R}^n .

Un producto escalar en un espacio vectorial V es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineal, simétrica y definida positiva. Para superficies en \mathbb{R}^3 la primera forma fundamental daba lugar a un producto escalar en cada espacio tangente a la superficie, simplemente considerando la restricción del producto escalar de \mathbb{R}^3 . En este capítulo estableceremos productos escalares en el espacio tangente a la variedad a partir de una métrica definida en la misma, lo que dará lugar a las variedades de Riemann. Los resultados de este capítulo así como las demostraciones no indicadas, pueden consultarse en [3] o en [8].

Definición 2.1. Una **métrica de Riemann** sobre una variedad diferenciable M es un $(0,2)$ -campo de tensores $g \in \mathcal{T}_0^2(M)$ sobre M verificando:

- (i) Es simétrica: $g(X, Y) = g(Y, X)$,
- (ii) Es definida positiva: $g(X, X) \geq 0$ y $g(X, X) = 0$ si y solo si $X = 0$,

para cualesquiera campos de vectores X, Y en M .

Una métrica de Riemann define un producto escalar en cada uno de los espacios tangentes a M . Denominamos **variedad de Riemann** al par (M, g) donde M es una variedad diferenciable y g es una métrica de Riemann.

La diferenciabilidad de la métrica de Riemann puede entenderse equivalentemente mediante su acción sobre campos de vectores o a través de su lectura en coordenadas. A partir de una métrica de Riemann, podemos definir la **norma** de un vector tangente X a una variedad M en un punto p como $\|X\| = \sqrt{g(X, X)}$, y el ángulo que forman dos vectores no nulos $X, Y \in T_pM$

como $\cos \theta = \frac{g(X,Y)}{\|X\| \|Y\|}$, siendo los dos vectores ortonormales si su norma es 1 y forman un ángulo de $\frac{\pi}{2}$.

Muchas veces necesitaremos restringirnos a subvariedades dentro de una variedad de mayor dimensión, o identificar variedades más abstractas dentro de otras más conocidas. En la siguiente proposición veremos que somos capaces de trasladar las propiedades riemannianas de una variedad a otra, siempre que exista una inmersión entre ellas. En particular, nos permite restringir las características riemannianas de una variedad de Riemann a sus subvariedades. De esta forma podremos estudiar la métrica original pero en un entorno más cómodo o que tiene más interés. Este resultado será de gran ayuda en el Capítulo 6 que versará sobre subvariedades y las propiedades que adquieren por encontrarse en un entorno Riemanniano.

Dada una aplicación diferenciable $F : M \mapsto N$ entre variedades, se dice que es una inmersión en $p \in M$ si F_{*p} es inyectiva. F es una inmersión si lo es en cada punto.

Proposición 2.2. *Dadas (M, g) una variedad de Riemann, N una variedad diferenciable y $F : N \rightarrow (M, g)$ una inmersión, entonces F^*g es una métrica de Riemann sobre la variedad N , y (N, F^*g) es una variedad de Riemann.*

Observación 2.3. En caso trabajar con superficies en (\mathbb{R}^3, g_0) , con g_0 el producto escalar usual, puesto que la inclusión $\iota : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión, el resultado establece que ι^*g_0 es una métrica en la superficie, y además será la Primera Forma Fundamental de S .

Dadas dos variedades de Riemann (M, g) y (\tilde{M}, \tilde{g}) y un difeomorfismo local $F : M \rightarrow \tilde{M}$, diremos que F es una **isometría** si $F^*\tilde{g} = g$, y en tal caso se dirá que (M, g) y (\tilde{M}, \tilde{g}) son isométricas.

Dada una referencia local de TM $\{E_1, \dots, E_n\}$ y su correspondiente dual $\{\eta^1, \dots, \eta^n\}$, la expresión de local de una métrica de Riemann g sobre la variedad M es:

$$g = g_{ij} \eta^i \otimes \eta^j,$$

donde $g_{ij} = g(E_i, E_j)$. En particular, en caso de tomar un entorno coordenado podemos escribir:

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g_{ij} dx^i dx^j$$

con $dx^i dx^j = \frac{1}{2}(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i)$.

Teorema 2.4. *Toda variedad paracompacta y segundo numerable admite métricas de Riemann.*

Demostración. Sea $\{\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha\}$ un recubrimiento de M , y sea $\{f_\alpha\}$ la partición de la unidad subordinada al recubrimiento. Denotemos por g_0 la métrica en \mathbb{R}^n y construimos, para cada α un tensor simétrico y definido positivo de tipo $(0,2)$ como $\varphi_\alpha^*g_0$ definido en el abierto \mathcal{U}_α . Se define $g := \sum_\alpha f_\alpha \varphi_\alpha^*g_0$. Este tensor será una métrica sobre M .

Por ser $\varphi_\alpha^* g_0$ simétricas para todo α , entonces es claro que g también es simétrico. Además, como $f_\alpha \geq 0$ y $\sum_\alpha f_\alpha = 1$, es claro que $g(X, X) \geq 0$ y, si $X = 0$ entonces $g(X, X) = 0$. Finalmente veamos que si $g(X, X) = 0$ entonces $X = 0$.

Fijado un punto $p \in M$, $g(X, X) = \sum_\alpha f_\alpha(p) g_{0_{\varphi_\alpha(p)}}((\varphi_\alpha)_* X_p, (\varphi_\alpha)_* X_p) = 0$. Como existe al menos un α para el que $f_\alpha(p) \neq 0$, necesariamente $g_{0_{\varphi_\alpha(p)}}((\varphi_\alpha)_* X_p, (\varphi_\alpha)_* X_p) = 0$, de donde se sigue que $\varphi_\alpha(p) X_p = 0$, luego por ser φ_α un difeomorfismo, $X_p = 0$. \square

Observación 2.5. Dado que toda variedad de dimensión n puede considerarse como subvariedad embebida de \mathbb{R}^{2n} por el teorema del embebimiento fuerte de Whitney [14] se obtiene que toda variedad admite una métrica inducida como subvariedad del espacio euclídeo. Más sorprendente aún es el resultado de J. F. Nash [11] que prueba que para cualquier variedad, toda métrica de Riemann es la métrica inducida de un espacio euclídeo de dimensión menor o igual que $\frac{1}{2}n(n+1)(3n+11)$. Estos resultados están fuera del alcance de este trabajo, pero muestran el carácter distinguido de las variedades de Riemann con respecto a otras situaciones como la geometría de Lorentz [10].

Presentamos a continuación dos operadores que usaremos extensivamente en el cálculo de curvaturas. Los operadores bemol y sostenido nos permitirán transformar tensores de tipo (0,2) en tensores de tipo (1,1) y viceversa, lo que nos permitirá tomar trazas y definir nuevos tensores de interés.

Definición 2.6 (Subir y bajar índices). Sea (M, g) una variedad de Riemann. La 1-forma asociada a un campo de vectores viene dada por $\flat : X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto X^\flat \in \Lambda^1(TM)$, tal que $X^\flat(Y) := g(X, Y)$, con $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Su expresión local es: $X^\flat = g(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \cdot) = g_{ij} X^i dx^j$. Se dice que la 1-forma métricamente equivalente a un campo de vectores X se obtiene **bajando un índice**.

El campo de vectores asociado a una 1-forma viene dado por $\sharp : \omega \in \Lambda^1(TM) \mapsto \mathfrak{X}(M)$, verificando que para cualquier $X \in \mathfrak{X}(M)$, $g(\sharp\omega, X) = \omega(X)$. Se dice que el campo de vectores métricamente equivalente a una 1-forma se obtiene **subiendo índices**. Su expresión local es: $\sharp\omega = (g_{ij})^{-1} \omega_j \frac{\partial}{\partial x^i} = g^{ij} \omega_j \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Ejemplo 2.7. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Definimos el **campo de vectores gradiente de f** como $\text{grad } f = \nabla f := \sharp df$, obtenido a partir de la diferencial de la función f (1-forma), subiendo un índice. Teniendo en cuenta la definición de la aplicación sostenido, el **gradiente de una función** verificará $df(X) = g(\nabla f, X)$, para cualquier campo de vectores X sobre la variedad M . En consecuencia, podemos obtener la expresión local del gradiente usando la matriz inversa de la matriz asociada a la métrica g^{ij} , y aplicando df a los campos de vectores coordenados, resultando:

$$\nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_{x^j}.$$

Ejemplo 2.8. Sea H un (0,2)-tensor simétrico sobre una variedad de Riemann (M, g) . Si subimos un índice, tendremos que $\sharp H = h$ es un (1,1)-tensor sobre M , y por lo tanto tiene sentido calcular

su traza. En términos de las componentes de h , su valor se obtiene como: $\text{tr}(h) = h_i^i$. Por lo tanto, podemos definir la **traza de H con respecto a g** como:

$$\text{tr}_g H = \text{tr } \sharp H = \text{tr } h.$$

Dado que $h_i^j = g^{jk} H_{ik}$, y como H es simétrico, considerando una referencia ortonormal:

$$\text{tr}_g H = h_i^i = g^{ij} H_{ij}.$$

En particular, si tenemos una referencia ortonormal $\{E_1, \dots, E_n\}$, la traza de $\sharp H = h$, o equivalentemente la de H con respecto a g es:

$$\text{tr}_g H = \text{tr } h = \sum_i g(hE_i, E_i).$$

Estos dos ejemplos tendrán especial importancia en las definiciones de tensor de curvatura de Ricci y curvatura escalar.

Veremos más adelante que el funcional de Hilbert-Einstein involucra la integral de la curvatura escalar en la variedad. Para poder realizar integrales sobre una variedad hemos visto en la definición de la integral sobre variedades en el Capítulo 1 que necesitamos un elemento de volumen. Dado que en las variedades de Riemann contamos con una estructura más rica que en variedades diferenciables, podemos definir una forma de volumen intrínsecamente relacionada con la métrica.

Lema 2.9. *Dada una variedad de Riemann (M, g) orientada, existe un único elemento de volumen dV (n -forma diferencial sobre M distinta de cero) verificando que dada una base ortonormal orientada positivamente $\{E_1, \dots, E_n\}$ del espacio tangente $T_p M$, para todo $p \in M$, se tiene que $dV(E_1, \dots, E_n) = 1$. El elemento de volumen puede definirse para cualquier referencia local como*

$$dV = \sqrt{\det(g_{ij})} \eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^n.$$

Capítulo 3

Conexiones

Dedicaremos este capítulo a introducir el concepto de conexión y transporte paralelo en las variedades de Riemann, asociadas a las cuales existe una conexión distinguida. La conexión de Levi Civita será la herramienta fundamental en el cálculo de los tensores de curvatura.

3.1. Motivación

Al fin de poder normalizar qué es la curvatura en variedades de Riemann necesitamos establecer en primer lugar qué entendemos por geodésicas. Las geodésicas serán aquellas curvas con aceleración nula, pero, tal y como veremos a continuación, necesitaremos una interpretación libre de coordenadas de esta propiedad. Consideremos la parametrización de la circunferencia unidad, $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ en coordenadas cartesianas:

$$\alpha : t \in \mathbb{R} \rightarrow \alpha(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t).$$

Derivando respecto al tiempo cada una de sus coordenadas podemos obtener la velocidad y su aceleración:

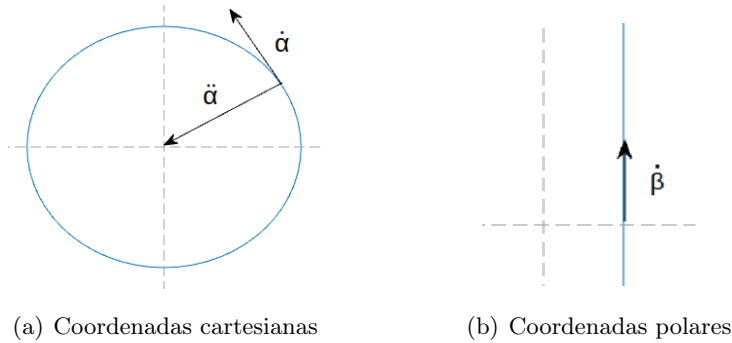
$$\dot{\alpha}(t) = (-\sin t, \cos t), \quad \ddot{\alpha}(t) = -(\cos t, \sin t) = -\alpha(t).$$

Por otro lado, también podemos parametrizar la circunferencia usando coordenadas polares:

$$\beta : t \in \mathbb{R} \rightarrow \beta(t) = (r(t), \theta(t)) = (1, t).$$

Dado que ambas parametrizaciones representan la misma curva y están conectadas por un difeomorfismo, cabría esperar que sus velocidades y aceleraciones también se correspondieran. Derivando las coordenadas de β tenemos:

$$\dot{\beta}(t) = (0, 1), \quad \ddot{\beta}(t) = (0, 0).$$



(a) Coordenadas cartesianas

(b) Coordenadas polares

Aunque la velocidad si se corresponde entre ambas parametrizaciones, no ocurre lo mismo para la aceleración, pues $\ddot{\alpha}(t) \neq 0$, mientras que $\ddot{\beta}(t) = 0$ en todo punto $t \in \mathbb{R}$. De esta manera, observamos que el proceso de segunda derivada depende de las coordenadas elegidas.

Para proseguir con el estudio debemos identificar el problema en el ejemplo de la circunferencia unidad. Hemos visto que no tenemos dificultades a la hora de obtener la velocidad de la curva en distintas parametrizaciones. Sin embargo, es en la derivación de la velocidad donde surgen las discrepancias. Sea γ una curva diferenciable en una variedad de Riemann M definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Si usamos directamente la definición usual de derivada:

$$\ddot{\gamma}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dot{\gamma}(t+h) - \dot{\gamma}(t)}{h}. \quad (3.1)$$

Examinando cada uno de los términos que aparecen en la expresión (3.1) observamos que mientras que $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$, $\dot{\gamma}(t+h) \in T_{\gamma(t+h)}M$, es decir, estamos comparando dos objetos que pertenecen a espacios tangentes distintos. Para que tenga sentido esta substracción debemos “conectar” mediante un isomorfismo los dos espacios tangentes de forma que los términos que aparecen en el numerador de (3.1) se puedan identificar con vectores en el mismo espacio. La noción de conexión permitirá trasladar (utilizando el desplazamiento paralelo) uno de los vectores al otro espacio tangente consiguiendo finalmente la invariancia en la definición de la aceleración.

3.2. Conexiones

Para poder solucionar los problemas relacionados con la diferenciación no solo de funciones, sino que también de campos de vectores, tendremos que establecer una manera adecuada de calcular las derivadas direccionales. Para ello consideremos primeramente el caso de superficies en \mathbb{R}^{n+1} . La derivada direccional de un campo de vectores Y sobre la superficie, en la dirección definida por un campo de vectores X en un punto p de la superficie será:

$$D_X Y|_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(p + tX) - Y(p)}{t},$$

que al estar definida en el espacio ambiente, carece de problemas de definición. En el caso de que X sea un campo de vectores tangente a la superficie, podemos considerar únicamente la

parte tangencial de la derivada direccional simplemente restando la proyección sobre la dirección normal a la superficie. Esta derivación se denominará *derivación covariante*.

En este capítulo generalizaremos la derivada direccional introduciendo el concepto de derivación de un campo de vectores sobre una variedad respecto a otro. No necesitaremos a priori una métrica definida sobre la variedad diferenciable. Sin embargo, para definir derivaciones covariantes con propiedades particulares interesantes, recurriremos a la métrica de Riemann.

Definición 3.1. Dada una variedad M definimos **conexión** como el operador:

$$\begin{aligned} D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto D_X Y, \end{aligned}$$

verificando:

- (i) $D_X Y$ es \mathbb{R} -lineal en la segunda componente: $D_X(aY_1 + bY_2) = aD_X Y_1 + bD_X Y_2$.
- (ii) D verifica la regla de Leibniz en la segunda componente: $D_X(fY) = X(f)Y + fD_X Y$.
- (iii) $D_X Y$ es tensorial en la primera componente: $D_{h_1 X_1 + h_2 X_2} Y = h_1 D_{X_1} Y + h_2 D_{X_2} Y$.

para cualesquiera campos de vectores en M , X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 , funciones f, h_1, h_2 definidas sobre M y constantes $a, b \in \mathbb{R}$.

Para obtener la expresión local de una conexión definimos en primer lugar los símbolos de Christoffel.

Definición 3.2. Dado un abierto coordinado $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^n))$, se definen los **símbolos de Christoffel** Γ_{ij}^k de una conexión D como las funciones $\Gamma_{ij}^k : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ determinadas por:

$$D_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k}.$$

Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ dos campos de vectores diferenciables con expresiones locales

$$X = X^i \partial_{x^i}, \quad Y = Y^j \partial_{x^j}.$$

Teniendo en cuenta las propiedades en la Definición 3.1 la siguiente es la expresión local de una conexión:

$$\begin{aligned} D_X Y &= D_{X^i \partial_{x^i}} Y^j \partial_{x^j} \stackrel{(iii)}{=} X^i D_{\partial_{x^i}} Y^j \partial_{x^j} \\ &\stackrel{(ii)}{=} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \partial_{x^j} + X^i Y^j D_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \partial_{x^j} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k} \\ &= \left\{ X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right\} \partial_{x^k}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

de la que se sigue el resultado:

Lema 3.3. *Sea D una conexión en M . Para cada punto $p \in M$ y cualesquiera campos de vectores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, el vector $(D_X Y)_p \in T_p M$ depende únicamente del valor del campo X en el punto $p \in M$ y del valor del campo de vectores Y a lo largo de la curva integral de X que pasa por $p \in M$.*

Demostración. Teniendo en cuenta la expresión local de la conexión D , evaluando en el punto $p \in M$ tenemos:

$$(D_X Y)_p = \left\{ X_p^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} \right)_p + X_p^i Y_p^j (\Gamma_{ij}^k)_p \right\} (\partial_{x^k})_p.$$

En caso de contar con otro campo de vectores $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ verificando que $X_p = \tilde{X}_p$, entonces:

$$(D_{\tilde{X}} Y)_p = \left\{ \tilde{X}_p^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} \right)_p + \tilde{X}_p^i Y_p^j (\Gamma_{ij}^k)_p \right\} (\partial_{x^k})_p,$$

de donde se sigue que la única dependencia de la componente \tilde{X} es su valor en el punto $p \in M$ dado que $X_p^i = \tilde{X}_p^i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Reescribiendo la expresión de la conexión D como:

$$(D_X Y)_p = \left\{ X(Y^k)_p + X_p^i Y_p^j (\Gamma_{ij}^k)_p \right\} (\partial_{x^k})_p = \left\{ dY^k(X_p) + X_p^i Y_p^j (\Gamma_{ij}^k)_p \right\} (\partial_{x^k})_p,$$

tenemos por un lado un sumando que depende del valor de Y en p , y por otro lado tenemos un sumando que depende de los valores de Y sobre la curva integral de X que pasa por el punto p . Por lo tanto, la dependencia que tenemos en la componente Y es solamente en el valor que toma dicho campo de vectores a lo largo de la curva integral de la primera componente pasando por $p \in M$. \square

Observación 3.4. Dada una variedad M que admite un atlas formado por una sola carta, existe una correspondencia biyectiva entre las conexiones en M y los símbolos de Christoffel dada por la expresión (3.2).

Teorema 3.5 (Existencia de conexiones). *Toda variedad paracompacta y segundo numerable admite al menos una conexión.*

Demostración. Consideremos un atlas localmente finito de la variedad M , $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$. Sabemos, por el Lema 3.4, que para cada uno de los abiertos coordenados existe una conexión. Para cada recubrimiento localmente finito $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ existe una partición de la unidad subordinada a dicho recubrimiento. Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ dicha partición de la unidad. Entonces:

$$D_X Y = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha (D_X Y)|_{\mathcal{U}_\alpha} = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha D_X^\alpha Y.$$

Bastará con probar que este operador verifica las propiedades de una conexión, teniéndose así la conexión buscada. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $h, h_1, h_2 \in \mathfrak{F}(M)$:

(i) $D_X Y$ es \mathbb{R} -lineal en la segunda componente:

$$\begin{aligned} D_X(aY_1 + bY_2) &= \sum_{\alpha \in A} f_\alpha D_X^\alpha(aY_1 + bY_2) = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha(aD_X^\alpha Y_1 + bD_X^\alpha Y_2) \\ &= a \sum_{\alpha \in A} f_\alpha D_X^\alpha Y_1 + b \sum_{\alpha \in A} f_\alpha D_X^\alpha Y_2 = aD_X Y_1 + bD_X Y_2. \end{aligned}$$

(ii) D verifica la regla de Leibniz en la segunda componente:

$$\begin{aligned} D_X(hY) &= \sum_{\alpha \in A} f_\alpha D_X^\alpha(hY) = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha((Xh)Y + hD_X^\alpha Y) \\ &= (Xh)Y + h \sum_{\alpha \in A} f_\alpha D_X^\alpha Y = (Xh)Y + hD_X Y. \end{aligned}$$

(iii) $D_X Y$ es tensorial en la primera componente:

$$\begin{aligned} D_{h_1 X_1 + h_2 X_2} Y &= \sum_{\alpha \in A} f_\alpha D_{h_1 X_1 + h_2 X_2}^\alpha Y = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha(h_1 D_{X_1}^\alpha Y + h_2 D_{X_2}^\alpha Y) \\ &= h_1 \sum_{\alpha \in A} f_\alpha(D_{X_1}^\alpha Y) + h_2 \sum_{\alpha \in A} f_\alpha(D_{X_2}^\alpha Y) = h_1 D_{X_1} Y + h_2 D_{X_2} Y. \end{aligned}$$

□

3.3. Campos de vectores a lo largo de curvas

En el ejemplo del inicio del capítulo hemos trabajado con algunos conceptos relacionados con curvas diferenciables sobre variedades. Presentaremos a continuación sus definiciones formales y usaremos las conexiones para resolver el problema en el cálculo de la aceleración.

Definición 3.6. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva diferenciable. Se define la **velocidad** $\dot{\gamma}$ en un instante $t \in I$ como la aplicación tangente a γ en $\gamma(t)$ (**pushforward**) $(\gamma_*)_{\gamma(t)} = (\gamma_*)_t(\frac{d}{dt}) \in T_{\gamma(t)}M$, de forma que $\dot{\gamma}(t)(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)$ para todo $t \in I$ y cualquier función diferenciable $f \in \mathfrak{F}(M)$. Así, obtenemos la noción usual de velocidad, que en su expresión local resulta $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^i(t)\partial_{x^i}$.

Definición 3.7. Un **campo de vectores a lo largo de una curva** γ se define como la aplicación $V : I \subset \mathbb{R} \mapsto TM$ determinada por $t \mapsto V(t) \in T_{\gamma(t)}M$, y se denotará por $\mathfrak{X}(\gamma)$ al espacio de campos de vectores a lo largo de γ . Dado un campo de vectores a lo largo de γ diremos que es **extensible** si existe un campo de vectores definido en un entorno de la imagen de γ , \tilde{V} tal que $V(t) = \tilde{V}_{\gamma(t)}$.

Esta última definición viene motivada por la velocidad de una curva, que es el ejemplo natural de campo de vectores a lo largo de una curva.

3.3.1. Derivadas covariantes a lo largo de curvas

Empezaremos estudiando la derivada covariante de campos de vectores a lo largo de curvas, para luego generalizar las ideas a campos de tensores. En particular, la derivada covariante actuará sobre campos de vectores tangentes a lo largo de una curva y devolverá campos de vectores tangentes a lo largo de dicha curva.

Lema 3.8. *Sea M una variedad de Riemann y D una conexión sobre M . Si γ es una curva en M , entonces la conexión D determina un operador $D_t : \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$ que es único y verifica,*

$$(i) \ D_t \text{ es } \mathbb{R}\text{-lineal: } D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tW,$$

$$(ii) \ D_t \text{ verifica la regla del producto: } D_t(f(t)V(t)) = \dot{f}(t)V(t) + f(t)D_tV(t),$$

$$(iii) \ \text{Si } V(t) \text{ es extensible, entonces para toda extensión } \tilde{V} \text{ se cumple que } D_tV(t) = D_{\dot{\gamma}(t)}\tilde{V}_{\gamma(t)},$$

para $a, b \in \mathbb{R}$, $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$, $f \in \mathfrak{F}(I)$. Denominaremos **derivada covariante de V a lo largo de γ** a D_tV .

Demostración. Comenzamos demostrando la unicidad de la derivada covariante. Supongamos entonces que tenemos un operador D_t que verifica las propiedades (i)-(ii)-(iii). En cada punto $t_0 \in I$ se tiene que el vector $D_tV(t_0)$ solo depende de los valores D_tV de V en un intervalo conteniendo a t_0 y tendrá como expresión local $V(t) = V^j(t)\partial_{x^j}$. Entonces,

$$\begin{aligned} D_tV(t_0) &= D_t(V^j(t_0)\partial_{x^j}) \stackrel{(i)-(ii)}{=} \dot{V}^j(t_0)\partial_{x^j} + V^j(t_0)D_{\dot{\gamma}(t_0)}\partial_{x^j} \\ &= \left(\dot{V}^k(t_0) + V^j(t_0)\dot{\gamma}^i(t_0)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t_0)) \right) \partial_{x^k}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

de donde se sigue la unicidad del operador D_t .

Por otro lado podemos demostrar la existencia tomando como expresión de D_tV la construida en (3.3). Si la imagen de γ está contenida en una sola carta, entonces (3.3) define D_tV , y es rutinario comprobar que verifica las propiedades (i)-(ii)-(iii). Si $\gamma(I)$ no está contenida en una sola carta, tomamos un recubrimiento localmente finito formado por cartas, definiendo D_tV en cada uno de los abiertos coordenados como en (3.3). Dada la unicidad ya probada, D_tV está bien definida en la intersección de los abiertos coordenados. \square

3.4. Derivada covariante y campos de tensores

Hemos definido una conexión actuando sobre campos de vectores, pero podemos extender su acción a campos de tensores. Exponemos a continuación dos de los principales resultados, pudiendo consultarse los detalles en [3], [5] y [8].

Lema 3.9. *Sea D una conexión en una variedad M . Para cada $T \in T_\ell^k M$ existe un único operador, que seguiremos denotando por D , verificando:*

(i) D verifica una regla del producto: $D_X(F \otimes G) = (D_X F) \otimes G + F \otimes (D_X G)$.

(ii) D conmuta con las contracciones.

Además el operador D actúa sobre campos de vectores y funciones del mismo modo que lo hacía la conexión D .

A partir de estas propiedades se puede estudiar la acción de la derivada covariante sobre una 1-forma. Para un campo de vectores X y una 1-forma ω , la derivada covariante $D_X \omega$ es la 1-forma $D_X \omega : Y \in \mathfrak{X}(M) \mapsto (D_X \omega)(Y)$.

Definiendo el tensor de tipo (1,1) $T = \omega \otimes Y$, tenemos, por la propiedad (i) que al realizar la contracción de T , $D_X c(T) = D_X \omega(Y) = c(D_X \omega \otimes Y) = (D_X \omega)(Y) + \omega(D_X Y)$. Entonces

$$(D_X \omega)(Y) = D_X \omega(Y) - \omega(D_X Y).$$

Se sigue entonces directamente que $F \in T_\ell^k(M)$, $Y_i \in \mathfrak{X}(M)$ campos de vectores y $\omega^j \in T^1 M$, 1-formas:

$$\begin{aligned} (D_X F)(\omega^1, \dots, \omega^\ell, Y_1, \dots, Y_k) &= X(F(\omega^1, \dots, \omega^\ell, Y_1, \dots, Y_k)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{\ell} F(\omega^1, \dots, D_X \omega^j, \dots, \omega^\ell, Y_1, \dots, Y_k) \\ &\quad - \sum_{i=1}^k F(\omega^1, \dots, \omega^\ell, Y_1, \dots, D_X Y^i, \dots, Y_k). \end{aligned}$$

Lema 3.10 (Expresión local de la derivada covariante de un campo de tensores). *Dada una conexión D sobre una variedad M , podemos obtener las componentes de la expresión local de la derivada covariante de un (ℓ, k) -campo de tensores F como:*

$$F^{j_1 \dots j_\ell}_{i_1 \dots i_k; m} = \partial_{x^m} F^{j_1 \dots j_\ell}_{i_1 \dots i_k} + \sum_{s=1}^{\ell} F^{j_1 \dots r \dots j_\ell}_{i_1 \dots i_k} \Gamma_{mr}^{j_s} - \sum_{s=1}^k F^{j_1 \dots j_\ell}_{i_1 \dots r \dots i_k} \Gamma_{m i_s}^r.$$

3.5. Transporte paralelo

El transporte paralelo será la herramienta que nos permita trasladar vectores de un espacio tangente a otro. De esta forma, encontraremos una solución al problema presentado en el ejemplo al inicio de este capítulo.

Definición 3.11. Sea M una variedad, D una conexión sobre M y $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva en M . Diremos que un campo de vectores $V(t)$ a lo largo de α es **paralelo** a lo largo de α respecto a D si $D_t V(t) = 0$, para todo $t \in I$.

De forma análoga a las conexiones, seremos capaces de demostrar la existencia del transporte paralelo a lo largo de una curva dada. Presentaremos a continuación una serie de resultados previos que nos permitirán concluir el teorema. Sus demostraciones pueden encontrarse en [6].

Teorema 3.12 (Existencia y unicidad de solución para las EDO lineales). *El problema de valor inicial*

$$\dot{V}^j(t) = \sum_{i=1}^n f_i^j(t)V^i(t), \quad V^j(t_0) = v_0^j, \quad (3.4)$$

tiene solución en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ dado para cualesquiera funciones diferenciables $f_i^j : I \rightarrow \mathbb{R}$ arbitrarias con $i, j \in \{1, \dots, n\}$, y dicha solución es única para cada $t_0 \in I$ y cada valor inicial $(v_0^1, \dots, v_0^n) \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.13 (de prolongación de soluciones). *Si $V : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\tilde{V} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ son dos soluciones de (3.4) con las mismas condiciones iniciales, entonces $J \subset I$ y $V = \tilde{V}$ en J .*

Teorema 3.14. *Sean $\alpha : I \rightarrow M$ una curva diferenciable en M , $t_0 \in I$, y $v_0 \in T_{\alpha(t_0)}M$ un vector tangente a M . Existe un único campo de vectores paralelo $V(t)$ a lo largo de α tal que $V(t_0) = v_0$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que la imagen de la curva está contenida en un abierto coordenado. A partir de la expresión (3.3), y usando la definición de campo de vectores paralelo, tendremos que V es paralelo a lo largo de α si, para cada $k = 1, \dots, n$,

$$\dot{V}^k(t) = -V^k(t)\dot{\alpha}^i(t)\Gamma_{ij}^k(\alpha(t)).$$

Como la condición inicial que debe verificar V es $V(t_0) = v_0$, estamos ante un problema de valor inicial como el presentado en (3.4), y por el Teorema 3.12 tenemos garantizada la existencia y unicidad de solución para el mismo que, por el Teorema 3.13, podemos prolongar a todo el dominio I . Dado que el sistema de EDOs es homogéneo, la estructura del espacio de ecuaciones será de espacio vectorial.

Consideremos ahora el caso en que la imagen de la curva no está contenida en un solo abierto coordenado. Consideremos entonces $b_0 = \sup\{b \mid \text{Existe un único transporte paralelo en } [t_0, b]\}$. Denotemos por V a dicho transporte paralelo que está definido en $[t_0, b_0)$. Si $b_0 \notin I$, entonces hemos terminado. Si $b_0 \in I$, sea $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^n))$ una carta conteniendo a $\alpha(b_0 - \delta, b_0 + \delta)$ para algún $\varepsilon > 0$. Entonces, como la imagen de α restringida a este intervalo está contenida en un abierto coordenado, existe un único campo de vectores paralelo \tilde{V} en $(b_0 - \varepsilon, b_0 + \varepsilon)$ que satisface $\tilde{V}(b_0 - \varepsilon/2) = V(b_0 - \varepsilon/2)$. Por unicidad, $V = \tilde{V}$ en la intersección de sus dominios, luego tendríamos que \tilde{V} es una extensión de V definida en puntos $t > b_0$ lo cual contradice la definición de b_0 . Por lo tanto, existe un único campo de vectores paralelo a lo largo de α definido en $I \subset \mathbb{R}$ y tal que $V(t_0) = v_0$. \square

Finalmente, definimos a partir de estos resultados el operador que nos permitirá “trasladar” vectores tangentes a la variedad a lo largo de curvas en la misma.

Definición 3.15. Sea α una curva sobre M definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ con $t_0, t_1 \in I$. Se define el **transporte paralelo** de $p = \alpha(t_0)$ a $q = \alpha(t_1)$ a lo largo de α como la aplicación:

$$\begin{aligned} {}^\alpha\mathcal{P}_{t_0}^{t_1} : T_{\alpha(t_0)}M &\longrightarrow T_{\alpha(t_1)}M \\ v_0 &\longmapsto {}^\alpha\mathcal{P}_{t_0}^{t_1}(v_0) = V(t_1), \end{aligned}$$

donde $V(t)$ es el único campo de vectores paralelo a lo largo de α con $V(t_0) = v_0$.

Proposición 3.16. *El operador ${}^\alpha\mathcal{P}_{t_0}^{t_1}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración. Esta propiedad del operador transporte paralelo se obtiene de las propiedades de espacio vectorial del espacio de soluciones de las ecuaciones diferenciales que determinan a los transportes paralelos. Sean $v, w \in T_{\alpha(t_0)}M$, $V(t)$, $W(t)$ campos de vectores paralelos a lo largo de $\alpha(t)$ con condiciones iniciales $V(t_0) = v$, $W(t_0) = w$. Entonces tenemos:

$${}^\alpha\mathcal{P}_{t_0}^{t_1}(v) = V(t_1), \quad {}^\alpha\mathcal{P}_{t_0}^{t_1}(w) = W(t_1).$$

Probemos la linealidad del operador.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y consideremos el campo de vectores a lo largo de α dado por $aV + bW$. Dada la estructura de espacio vectorial del espacio de soluciones del problema (3.4), este campo de vectores también es paralelo con condición inicial $av + bw$. Entonces, el desplazamiento paralelo de $av + bw$ viene dado por:

$${}^\alpha\mathcal{P}_{t_0}^{t_1}(av + bw) = aV(t_1) + bW(t_1) = a{}^\alpha\mathcal{P}_{t_0}^{t_1}(v) + b{}^\alpha\mathcal{P}_{t_0}^{t_1}(w).$$

Probaremos ahora la inyectividad del desplazamiento paralelo, ya que de ser un operador inyectivo, puesto que es lineal y los dos espacios vectoriales $T_{\alpha(t_0)}$ y $T_{\alpha(t_1)}$ tienen la misma dimensión, se tendrá que es un isomorfismo. Para ello, sea $v \in T_{\alpha(t_0)}M$ tal que ${}^\alpha\mathcal{P}_{t_0}^{t_1}(v) = 0 = V(t_1)$, donde V es el campo de vectores paralelo a lo largo de α con condición inicial $V(t_0) = v$. Como V es solución del sistema (3.4), que es homogéneo, y podemos considerar su condición inicial $V(t_1) = 0$, necesariamente $V \equiv 0$, luego $V(t_0) = v = 0$, de donde se sigue la inyectividad. \square

Este resultado nos permite realizar el desplazamiento paralelo de una forma sencilla y cómoda si se conocen las bases de los espacios tangentes en el punto de partida y su transportada en el punto final. Por ejemplo, en el caso de superficies en \mathbb{R}^3 , si contamos con una geodésica γ que une el punto inicial $p = \gamma(t_0)$ y final $q = \gamma(t_1)$, entonces unas bases, relacionadas por el transporte paralelo del plano tangente a la superficie en p y q son respectivamente $\{\dot{\gamma}(t_0), (N_p \wedge \dot{\gamma}(t_0))\}$ y $\{\dot{\gamma}(t_1), (N_q \wedge \dot{\gamma}(t_1))\}$, en donde N es el campo de vectores normal a la superficie. De esta forma, dado $v = a\dot{\gamma}(t_0) + b(N_p \wedge \dot{\gamma}(t_0))$, su transportado paralelo será $w = a\dot{\gamma}(t_1) + b(N_q \wedge \dot{\gamma}(t_1))$.

Ahora que ya tenemos una forma de relacionar dos espacios tangentes a la variedad M y sus vectores, podemos expresar la derivada covariante en términos del desplazamiento paralelo.

Proposición 3.17. *Consideremos dos campos de vectores sobre M , $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y la curva integral de X , α , con $\alpha(0) = p$, siendo $p \in M$. Se verifica:*

$$(D_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{({}^\alpha \mathcal{P}_0^t)^{-1}(Y(\alpha(t))) - Y(p)}{t}.$$

Demostración. Consideremos una base cualquiera del espacio tangente a M en p , $\{e_1, \dots, e_n\}$, y denotemos por $\{E_1(t), \dots, E_n(t)\}$ a los vectores obtenidos al desplazar paralelamente a lo largo de α la base de $T_p M$. Como hemos visto que el transporte paralelo es un isomorfismo de espacios vectoriales, para cada valor de t se tiene que $\{E_1(t), \dots, E_n(t)\}$ es una base de $T_{\alpha(t)} M$. Dado que $Y(\alpha(t))$ es un campo de vectores a lo largo de α , podemos expresarlo como $Y(\alpha(t)) = \sum_k f_k(t) E_k(t)$, y calcular de esta forma su transportado inverso:

$$\begin{aligned} ({}^\alpha \mathcal{P}_0^t)^{-1}(Y(\alpha(t))) &= ({}^\alpha \mathcal{P}_0^t)^{-1} \left(\sum_k f_k(t) E_k(t) \right) = \sum_k ({}^\alpha \mathcal{P}_0^t)^{-1}(f_k(t) E_k(t)) \\ &= \sum_k f_k(t) ({}^\alpha \mathcal{P}_0^t)^{-1}(E_k(t)) = \sum_k f_k(t) e_k. \end{aligned}$$

A partir de esta expresión, podemos trasladar la curva de vectores tangentes definida por $Y(\alpha(t))$ a $T_p M$, induciendo la curva de vectores tangentes

$$\tilde{Y} : t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto \tilde{Y}(t) := ({}^\alpha \mathcal{P}_0^t)^{-1}(Y(\alpha(t))) \in T_p M.$$

La derivada de la curva \tilde{Y} en $t = 0$ es:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \tilde{Y}(t) \right|_{t=0} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{({}^\alpha \mathcal{P}_0^t)^{-1}(Y(\alpha(t))) - Y_p}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ({}^\alpha \mathcal{P}_0^t)^{-1}(Y(\alpha(t))) = \left(\left. \frac{d}{dt} f_k(t) e_k \right) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{df_k(t)}{dt} \right|_{t=0} e_k + f_k(t) \left. \frac{de_k}{dt} \right|_{t=0} = f'_k(0) e_k. \end{aligned}$$

Por otro lado, recordemos que α es la curva integral del campo de de vectores X , por lo que

$$(D_t Y)_{t=0} = (D_{\dot{\alpha}} Y)_{t=0} = D_{\dot{\alpha}(0)} Y(\alpha(0)) = D_{X_p} Y_p = (D_X Y)_p.$$

Además, como los campos de vectores $\{E_1(t), \dots, E_n(t)\}$ son paralelos a lo largo de la curva α ($D_t(E_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$), que es curva integral de X , se sigue:

$$\begin{aligned} D_t Y &= D_t(\sum_k f_k(t) E_k(t)) = \sum_k D_t(f_k(t) E_k(t)) = \sum_k D_t(f_k(t) E_k(t)) \\ &= \sum_k (f'_k(t) E_k(t) + f_k(t) D_t E_k(t)) = \sum_k f'_k(t) E_k(t), \end{aligned}$$

de donde se sigue que $D_t Y|_{t=0} = f'_k(0) e_k$.

Finalmente, juntando los resultados vistos hasta el momento podemos concluir que :

$$(D_X Y)_p = D_t Y|_{t=0} = \tilde{Y}'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{({}^\alpha \mathcal{P}_0^t)^{-1}(Y(\alpha(t))) - Y(p)}{t}.$$

□

3.6. Torsión de la derivada covariante: conexiones simétricas

Hasta ahora hemos visto una forma de derivar campos de vectores sobre una variedad: la derivada covariante. Sin embargo, existen otras definiciones como la derivada de Lie. Aunque no vamos a entrar en detalles respecto a esta forma de derivar campos de vectores, introduciremos el concepto de torsión y algunas de sus propiedades que pueden servir para relacionar la derivada de Lie y la derivada covariante. Además, este concepto está íntimamente relacionado con la conexión de Levi-Civita que definiremos en la siguiente sección.

Definición 3.18. Definimos la **torsión de una derivada covariante** (o conexión) D como el campo de tensores de tipo (1,2) dado por $T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y]$ y se dice que D es **simétrica o libre de torsión** si $T(X, Y) = 0$, con $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrarios.

Proposición 3.19. Consideremos una derivada covariante D en M . Los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) D es simétrica.

(ii) D actúa de forma simétrica sobre los campos de vectores coordenados. Es decir, para cualquier carta $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^n))$ se verifica $D_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = D_{\partial_{x^j}} \partial_{x^i}$.

(iii) Los símbolos de Christoffel asociados a D son simétricos $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Demostración. Veamos en primer lugar que (i) implica (ii). Por ser D simétrica, $T(X, Y) = 0$. Además, sabemos que $[\partial_{x^i}, \partial_{x^j}] = 0$, por ser ∂_{x^i} y ∂_{x^j} campos coordenados. Por tanto:

$$0 = T(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) = D_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} - D_{\partial_{x^j}} \partial_{x^i} - [\partial_{x^i}, \partial_{x^j}] = D_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} - D_{\partial_{x^j}} \partial_{x^i}.$$

Así, $D_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = D_{\partial_{x^j}} \partial_{x^i}$, como queríamos probar.

Veamos ahora que (ii) implica (iii). Teniendo en cuenta que $D_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k}$, se sigue que: $0 = D_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} - D_{\partial_{x^j}} \partial_{x^i} = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_{x^k}$, con lo que se obtiene la simetría de los símbolos de Christoffel en los argumentos (i, j) .

Finalmente, veamos que (iii) implica (i). Consideremos dos campos de vectores sobre M cualesquiera, con expresiones locales: $X = X^i \partial_{x^i}$, $Y = Y^j \partial_{x^j}$. Entonces:

$$\begin{aligned} D_X Y - D_Y X &= \{X(Y^k) - Y(X^k) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k - Y^i X^j \Gamma_{ij}^k\} \partial_{x^k} \\ &= \{X(Y^k) - Y(X^k) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k - Y^j X^i \Gamma_{ji}^k\} \partial_{x^k} = [X, Y]. \end{aligned}$$

Y por lo tanto, teniendo en cuenta la definición de torsión, se sigue el resultado. \square

3.7. Conexión de Levi-Civita

En el Lema 2.9 hemos obtenido un elemento de volumen sobre las variedades de Riemann que tiene en cuenta la estructura proporcionada por la métrica. Inspirados en la idea de involu-

crar la métrica en todos los pasos y elementos que construirán el funcional de Hilbert-Einstein, definiremos a continuación la conexión de Levi-Civita conteniendo la información de la métrica de Riemann.

Comenzaremos estudiando algunas propiedades generales de la relación entre la derivada covariante y la métrica de Riemann definida sobre la variedad, terminando con el teorema fundamental de la geometría de Riemann. Antes de empezar, debe recordarse que una métrica de Riemann g definida sobre M es un $(0,2)$ -tensor simétrico y definido positivo que induce un producto escalar definido positivo en T_pM . Por lo tanto, dados dos campos de vectores sobre M , Y y Z , se tiene que $g(Y, Z) \in \mathfrak{F}(M)$.

Definición 3.20. Sea (M, g) una variedad de Riemann y D una conexión sobre M . Se dice que D es **compatible** con la métrica g si el transporte paralelo ${}^\alpha\mathcal{P}_p^q$ se realiza por isometrías. Equivalentemente, para cualquier curva en la variedad y campos de vectores paralelos a lo largo de la curva V, W , se tiene que $g(V, W) = cte$.

Proposición 3.21. Dada (M, g) una variedad de Riemann y una conexión D sobre M son equivalentes:

(i) D es compatible con la métrica.

(ii) Dados V, W campos de vectores a lo largo de una curva α en M , se verifica que:

$$\frac{d}{dt}g(V, W) = g(D_tV, W) + g(V, D_tW). \quad (3.5)$$

Demostración.

(ii) \Rightarrow (i) Consideremos en la condición (ii) dos campos de vectores paralelos a lo largo de una curva α dada. Entonces $D_tV = D_tW = 0$, por lo tanto, $\frac{d}{dt}g(V, W) = 0$, luego $g(V, W) = cte$. de donde se sigue que la conexión D es compatible con la métrica.

(i) \Rightarrow (ii) Consideremos ahora una conexión D compatible con la métrica g y sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva arbitraria en M . Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de $T_{\alpha(t_0)}M$. De la Proposición 3.16 se concluye que a partir de una base de $T_{\alpha(t_0)}M$, podemos obtener mediante el transporte paralelo una base de $T_{\alpha(t)}M$. Denotemos por $\{E_1(t), \dots, E_n(t)\}$ dicha base. En este caso la expresión local para V, W campos de vectores a lo largo de la curva α es:

$$V = V^i E_i, \quad W = W^j E_j.$$

Por ser E_i campos de vectores paralelos a lo largo de α , $\forall i = 1, \dots, n$, podemos calcular sus derivadas covariantes como:

$$D_tV = \frac{dV^i}{dt} E_i, \quad D_tW = \frac{dW^j}{dt} E_j,$$

Entonces

$$g(D_tV, W) + g(V, D_tW) = g\left(\frac{dV^i}{dt}, W^i\right) + g\left(V^i, \frac{dW^i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(V^i W^i) = \frac{d}{dt}g(V, W).$$

□

Observación 3.22. Si D es compatible con la métrica g y α es la curva integral de X , de forma que $\alpha(t_0) = p$, entonces:

$$D_{X_p}g(Y, Z) = \frac{d}{dt}g(Y, Z)|_{t_0} = g(D_{X_p}Y, Z)_p + g(Y, D_{X_p}Z)_p,$$

Como esto es cierto para p arbitrario, se tendrá que una conexión D es **compatible** con la métrica si se verifica $D_Xg(Y, Z) = g(D_XY, Z) + g(Y, D_XZ)$ para cualesquiera X, Y, Z campos de vectores en M .

Teorema 3.23 (Teorema fundamental de la geometría de Riemann). *Sea (M, g) una variedad de Riemann. Existe una única conexión ∇ simétrica y compatible con la métrica determinada por*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_XY, Z) = & Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ & + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X) + g([X, Y], Z), \end{aligned} \quad (3.6)$$

para X, Y, Z campos de vectores diferenciables sobre M arbitrarios.

Nos referiremos a la expresión (3.6) como fórmula de Koszul y la conexión ∇ definida por ella se denominará conexión de **Levi Civita**.

Demostración. En primer lugar demostraremos que si tenemos una conexión simétrica y compatible con la métrica, entonces se verifica la fórmula de Koszul. Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrarios. Por un lado, $\nabla g = 0$ por ser la conexión compatible, entonces:

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) - g(\nabla_XY, Z) - g(Y, \nabla_XZ) &= 0, \\ Yg(X, Z) - g(\nabla_YX, Z) - g(X, \nabla_YZ) &= 0, \\ Zg(X, Y) - g(\nabla_ZX, Y) - g(Y, \nabla_ZY) &= 0. \end{aligned}$$

Sumando las dos primeras expresiones anteriores y restando la tercera, tenemos:

$$\begin{aligned} 0 = & Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) - g(\nabla_XY, Z) - g(\nabla_YX, Z) \\ & + g(\nabla_ZX, Y) - g(Y, \nabla_XZ) - g(X, \nabla_YZ) + g(X, \nabla_ZY). \end{aligned}$$

Por otro lado, como la conexión ∇ ha de ser simétrica, luego $[X, Y] = \nabla_XY - \nabla_YX$, se sigue que:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_XY, Z) = & Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ & + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X) + g([X, Y], Z). \end{aligned}$$

Para probar la unicidad, consideremos dos conexiones simétricas y compatibles con la métrica ∇_1 y ∇_2 y veamos que son iguales. Por ser simétricas y compatibles, ambas verificarán la ecuación (3.6). Restando la fórmula de Koszul para cada conexión se tiene $g(\nabla_X^1Y - \nabla_X^2Y, Z) = 0$ para cualesquiera campos X, Y, Z , luego $\nabla_X^1Y = \nabla_X^2Y$, y en consecuencia, $\nabla^1 = \nabla^2$.

Un cálculo estándar demuestra que el operador ∇ definido por la fórmula de Koszul determina una conexión. Además, dicha conexión es simétrica y adaptada a la métrica g . \square

Sea $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^n))$ una carta de M . La expresión local de (3.6) es:

$$2g(\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j}, \partial_{x^l}) = \partial_{x^i} g(\partial_{x^j}, \partial_{x^l}) + \partial_{x^j} g(\partial_{x^l}, \partial_{x^i}) - \partial_{x^l} g(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}).$$

Teniendo en cuenta las definiciones de los símbolos de Christoffel, y la definición de los elementos de la matriz de la métrica $g_{ij} = g(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})$, podemos reescribir esta expresión como:

$$2\Gamma_{ij}^m g_{mk} = \partial_{x^i} g_{jk} + \partial_{x^j} g_{ik} - \partial_{x^l} g_{ij}.$$

Multiplicando por la inversa de la matriz de la métrica a ambos lados de la ecuación tenemos:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_{x^i} g_{jk} + \partial_{x^j} g_{ik} - \partial_{x^l} g_{ij}). \quad (3.7)$$

Observación 3.24. A partir de la expresión (3.7) se sigue que los símbolos de Christoffel son invariantes ante isometrías locales.

Terminamos este capítulo introduciendo conceptos ya conocidos del análisis, como son el Hessiano o la divergencia de un campo de vectores, pero en variedades de Riemann y usando la conexión de Levi-Civita. Para los resultados que veremos a continuación y en los siguientes capítulos debemos recordar que la contracción de índices y la derivación covariante conmutan. En particular nos interesa aplicar esta propiedad al tensor de curvatura de Ricci, que, una vez subido uno de los índices, es un tensor de tipo (1,1).

Definición 3.25. Dada una función $f \in \mathfrak{F}(M)$, se define el **Hessiano** de f como el campo de tensores tipo (0,2) dado por $\text{Hess}(f)(X, Y) = XY(f) - (\nabla_X Y)(f)$, con ∇ la conexión de Levi-Civita de la variedad de Riemann (M, g) .

Proposición 3.26 (Propiedades del Hessiano). *El Hessiano de $f \in \mathfrak{F}(M)$ es simétrico y se verifica que $\text{Hess}(f)(X, Y) = g(h_f(X), Y)$, con h_f campo de tensores de tipo (1,1) definido como $h_f(X) = \nabla_X \nabla f = \nabla_X \text{grad } f$.*

Demostración. Veamos en primer lugar que el hessiano es simétrico:

$$\begin{aligned} \text{Hess}(f)(X, Y) - \text{Hess}(f)(Y, X) &= XY(f) - (\nabla_X Y)(f) - YX(f) + (\nabla_Y X)(f) \\ &\stackrel{\nabla \text{ simétrica}}{=} XY(f) - [X, Y](f) - YX(f) = 0. \end{aligned}$$

Veamos ahora que podemos calcular el hessiano usando el gradiente de la función f y la métrica de Riemann.

El gradiente de f , $\nabla f = \sharp df$, verifica $g(\nabla f, Z) = df(Z) = Z(f)$. Por ser la conexión de Levi-Civita compatible con la métrica, $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$. Tomando $Z = \nabla f$,

$$g(\nabla_X \nabla f, Y) = Xg(\nabla f, Y) - g(\nabla f, \nabla_X Y) = XY(f) - \nabla_X Y(f).$$

\square

Para un entorno coordinado $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^n))$, y una función $f \in \mathfrak{F}(M)$, la expresión local del hessiano de f es $\text{Hess}(f) = (\text{Hess}(f))_{ij} dx^i \otimes dx^j$. Las componentes $(\text{Hess}(f))_{ij}$ pueden obtenerse como $(\text{Hess}(f))_{ij} = \text{Hess}(f) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$. Teniendo en cuenta la expresión local de la diferencial de f , $df = \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k$, y la expresión local del gradiente de f , $\nabla f = g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^k}$, entonces:

$$\begin{aligned} (\text{Hess}(f))_{ij} &= \text{Hess}(f) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = g \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla f, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) (f) = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} f - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} f. \end{aligned}$$

Así como el Hessiano de una función se deriva del gradiente de la misma, podemos definir nuevos operadores a partir del primero. Por ejemplo, el **laplaciano** de una función $f \in \mathfrak{F}(M)$ será la traza de su Hessiano: $\Delta f = \text{tr}_g \text{Hess}(f) = \text{tr}(h_f)$.

Definición 3.27. Sea $\{E_1, \dots, E_n\}$ una referencia ortonormal, y X campo de vectores. Definimos la **divergencia** de X como la traza de ∇X , es decir,

$$\text{div } X = \sum g(\nabla_{E_i} X, E_i).$$

Se define la **divergencia** de un campo de tensores F tipo (0,2) simétrico como

$$(\text{div } F)(X) = \sum_i (\nabla_{E_i} F)(X, E_i).$$

Observación 3.28. Considerando la métrica del espacio euclídeo en coordenadas cartesianas, dado que $g_{ij} = \delta_{ij}$ se tiene que los símbolos de Christoffel se anulan idénticamente. Por tanto las nociones anteriores de Hessiano, Laplaciano y divergencia se corresponden con las conocidas del espacio euclídeo en coordenadas cartesianas.

El teorema de la divergencia se obtiene como caso particular del Teorema de Stokes (Teorema 1.5) y lo usaremos en varias ocasiones en el último capítulo. A continuación presentamos su enunciado y remitimos a [8] para su demostración.

Teorema 3.29 (Teorema de la divergencia). *Sea (M, g) una variedad de Riemann compacta orientada con frontera ∂M . Sea \tilde{g} la métrica inducida en la frontera y sea N el campo de vectores normales a la frontera. Entonces*

$$\int_M \text{div}(X) dV_g = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle dV_{\tilde{g}},$$

para cualquier campo de vectores X en M .

En particular, si la variedad no tiene frontera, entonces:

$$\int_M \text{div}(X) dV_g = 0.$$

Capítulo 4

Geodésicas y la aplicación exponencial

4.1. Geodésicas

De la misma forma que ocurría en superficies regulares en \mathbb{R}^3 , las curvas geodésicas en una variedad de Riemann serán aquellas que minimizan localmente la longitud del camino entre dos puntos suficientemente próximos. Además, están caracterizadas por esta propiedad, es decir, si una curva minimiza el camino entre dos puntos, entonces dicha curva será geodésica.

Para una curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ sobre una variedad M sobre la cual se ha definido una conexión D , podemos definir la **aceleración** de γ como la derivada covariante de la velocidad de γ respecto a la conexión D . En caso de que su aceleración sea nula, entonces diremos que la curva es una **geodésica**. Si $\gamma : I \rightarrow M$ es una geodésica, entonces su velocidad es constante:

$$\frac{d}{dt}g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 2g(D_t\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0.$$

Por lo tanto, el parámetro de una geodésica será proporcional a la longitud de arco:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(t)\| dt = c(t - t_0).$$

Observación 4.1. Debemos observar que el hecho de que una curva sea geodésica depende de la parametrización, por lo que se debería especificar que, en caso de que la aceleración de una curva γ sea nula, entonces es una **geodésica parametrizada**. Sin embargo, en lo que resta de trabajo trataremos indistintamente las geodésicas y las geodésicas parametrizadas, refiriéndonos a una curva geodésica como aquella cuya parametrización por la longitud de arco, o proporcional, es una geodésica parametrizada.

El siguiente resultado y su demostración pueden encontrarse en [9].

Teorema 4.2 (Existencia y unicidad de geodésicas). *Dada una variedad M y D una conexión sobre M , para cada $p \in M$, $v \in T_pM$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, existen un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ tal que $t_0 \in I$*

y $\gamma : I \rightarrow M$ una geodésica verificando $\gamma(t_0) = p$, $\dot{\gamma}(t_0) = v$. Además, si $\beta : J \rightarrow M$, $t_0 \in J$ es otra geodésica verificando $\beta(t_0) = p$, $\dot{\beta}(t_0) = v$, entonces $\beta|_{I \cap J} \equiv \gamma|_{I \cap J}$.

De las propiedades de las isometrías y la definición de la conexión de Levi-Civita se sigue el siguiente resultado.

Lema 4.3. *Sea $F : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ una isometría entre dos variedades de Riemann. Entonces se verifica:*

- *F preserva la conexión de Levi-Civita: $F_{*p}(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{F_*X}(F_*Y)_{F(p)}$ en cada punto $p \in M$ y $F(p) \in \tilde{M}$.*
- *Para una curva α en M y un campo de vectores X a lo largo de α , entonces F conserva la derivada covariante: $F_{*p}(D_t X) = \tilde{D}_t(F_*X)$.*
- *F conserva el carácter geodésico de las curvas. Dada una geodésica γ en M , con punto inicial p y velocidad inicial v , $F \circ \gamma$ es una geodésica en \tilde{M} con punto inicial $F(p)$ y velocidad inicial $F_{*p}(v)$.*

Consideremos ahora un abierto coordenado $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^n))$ de una variedad de Riemann (M, g) . Sea $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ una curva en \mathcal{U} . Entonces su aceleración es nula si:

$$0 = D_t \dot{\gamma}(t) = \left(\ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t) \Gamma_{ij}^k(t) \right) \partial_{x^k}(\gamma(t)).$$

Es decir, las componentes de una curva geodésica deben verificar el sistema de ecuaciones de segundo orden no lineal:

$$\ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t) \Gamma_{ij}^k(t) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

Para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden, usualmente se reduce el orden del mismo aumentando la dimensión. Usaremos esta misma idea en nuestro caso buscando el campo de vectores solución de (4.1) en el fibrado tangente TM en vez de hacerlo directamente sobre M . Para ello pasaremos de n ecuaciones de segundo orden, a $2n$ ecuaciones de primer orden, pero que seguirán siendo no lineales. Recurriremos a la idea de flujo, por lo que presentamos a continuación un resultado auxiliar que necesitaremos más adelante y cuya prueba puede consultarse en [8].

Teorema 4.4. *Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, con $\mathcal{U} \subset M$ abierto en la variedad M . Para cada punto $p \in \mathcal{U}$ existe un entorno abierto $p \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, un número real $\delta > 0$, y una función diferenciable $\vartheta : (-\delta, \delta) \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ que determina la única curva integral de X , $\beta_q(t) = \vartheta(t, q)$, tal que $\beta_q(0) = q \in \mathcal{V}$. A la curva β_q se le denomina flujo local de X en \mathcal{U} .*

Los puntos de TM son de la forma $\xi = (p, v)$, donde p es un punto de la variedad M y v es un vector perteneciente a $T_p M$, cuya expresión local en un entorno coordenado $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^n))$

es $v = v^i \partial_{x^i}$. Entonces, las coordenadas inducidas de un punto $\xi = (p, v)$ en $T\mathcal{U} = \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$ serán $(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$.

Una curva arbitraria sobre la variedad γ define una curva en TM dada por $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$. Si en particular consideramos una geodésica, se verificará el sistema (4.1), luego $\tilde{\gamma}(t)$ será solución del siguiente sistema no lineal de primer orden en TM :

$$\begin{cases} \frac{dx^k}{dt} = v^k, \\ \frac{dv^k}{dt} = -\Gamma_{ij}^k v^i v^j, \quad k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4.2)$$

Definimos un campo de vectores G sobre TM con expresión local $G_{(p,v)} = v^k \frac{\partial}{\partial x^k} - v^i v^j \Gamma_{ij}^k(p) \frac{\partial}{\partial v^k}$ en las coordenadas inducidas anteriores. Este campo de vectores se denomina **campo geodésico**, y por como está definido, sus curvas integrales serán curvas $\hat{\gamma}(t)$ en TM cuyas proyecciones en M , $\pi \circ \hat{\gamma}(t)$ son geodésicas que pasan a tiempo 0 por el punto p con velocidad v . Por otro lado, dada una geodésica γ en M con punto inicial p y velocidad inicial v , la curva $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ es una curva integral de G con condición inicial $\xi = (p, v)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & TM \\ & \searrow & \downarrow \pi \\ & & M \\ \gamma = \pi \circ \tilde{\gamma} & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{(\gamma, \dot{\gamma})} & TM \\ & \searrow & \downarrow \pi \\ & & M \\ \gamma & & \end{array}$$

El campo de vectores geodésico está caracterizado (independientemente de las coordenadas utilizadas) por su acción sobre funciones diferenciables en TM . Para cada tal función y cualquier punto $\xi = (p, v) \in TM$ se tiene que (ver [8])

$$G_{\xi}(f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\gamma_v(t), \dot{\gamma}_v(t))$$

donde γ_v es la geodésica en M con condiciones iniciales $\gamma_v(0) = p$, $\dot{\gamma}_v(0) = v$.

Lema 4.5 (Homogeneidad de las geodésicas). *Sea $p \in M$ un punto de la variedad de Riemann (M, g) , y denotemos por γ_v a la geodésica que a tiempo $t = 0$ pasa por el punto p con velocidad v , y está definida en un intervalo $(-\delta, \delta)$ con $\delta > 0$. Entonces, para cualquier valor real $a > 0$, se verifica que γ_{av} está definida en $(-\delta/a, \delta/a)$ y $\gamma_v(at) = \gamma_{av}(t)$.*

Demostración. Partiremos de la existencia de $\gamma_v(at)$ y veamos que existe, y es geodésica, γ_{av} verificando las condiciones iniciales $\gamma_{av}(0) = p$, $\dot{\gamma}_{av}(0) = av$.

Sea $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_v(at)$ definida en $(-\delta/a, \delta/a)$. Por un lado se verifica $\tilde{\gamma}(0) = \gamma_v(0) = p$. Por otro lado, dada la expresión local de $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ y $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}^1, \dots, \tilde{\gamma}^n)$, tenemos que $\dot{\tilde{\gamma}}^i = a\dot{\gamma}^i$, luego $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = a\dot{\gamma}(0) = av$.

Calculemos ahora la derivada covariante de $\tilde{\gamma}$:

$$\begin{aligned}\tilde{D}_t \dot{\tilde{\gamma}}(t) &= \left(\ddot{\tilde{x}}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(\tilde{\gamma})(t) \dot{\tilde{x}}^i(t) \dot{\tilde{x}}^j(t) \right) \partial_{x^k} \\ &= \left(a^2 \ddot{\gamma}^k(at) + a^2 \Gamma_{ij}^k(\gamma(at)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \right) \partial_{x^k} = a^2 D_t \dot{\gamma}(at) = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos concluir que $\tilde{\gamma}$ es geodésica y que además coincide con γ_{av} . \square

Como corolario de estos resultados podemos enunciar la siguiente proposición, que usaremos más adelante en la definición de la aplicación exponencial. Su demostración puede encontrarse en [8].

Proposición 4.6. *Sea (M, g) una variedad de Riemann, $p \in M$. Existen un entorno \mathcal{U} de p y un número real $\varepsilon > 0$ de forma que para todo punto $q \in \mathcal{U}$ y todo vector tangente $w \in T_q M$ con longitud menor que ε , existe una única geodésica γ_w definida en un intervalo I conteniendo a $(-1, 1)$ y que a tiempo $t = 0$ pasa por q con velocidad w .*

4.2. La aplicación exponencial

Fijado un punto $p \in M$ arbitrario, tal como hicimos en la sección anterior, denotaremos con $\gamma_v(t)$ la geodésica definida en un intervalo $(-\delta, \delta)$ verificando $\gamma_v(0) = p$ y $\dot{\gamma}_v(0) = v$. Denotaremos por \mathcal{E} al subconjunto de TM que será el dominio de definición de la aplicación exponencial: $\mathcal{E} = \{\xi = (p, v) \in TM \text{ tales que la curva integral del campo de vectores geodésico que pasa por } \xi \text{ está definida hasta tiempo } t = 1\}$.

Debido a que el campo de vectores geodésico es diferenciable, existirá un entorno abierto \mathcal{W} de $\{0\} \times TM$ en $\mathbb{R} \times TM$ de forma que el flujo local $\vartheta : \mathcal{W} \rightarrow TM$ tal que $\vartheta_{(p,v)}(t) = \vartheta(t, (p, v))$ es diferenciable. Además, su flujo local estará definido en un abierto que contiene a un intervalo abierto que contiene a $t = 0$.

Definición 4.7. La aplicación exponencial se define como la aplicación que asocia a cada $\xi \in \mathcal{E}$ el punto $\exp(\xi) = \pi(\vartheta(1, \xi)) = \gamma_v(1) \in M$. Para cada $p \in M$, se denotará la restricción de la aplicación exponencial a $\mathcal{E}_p := \mathcal{E} \cap T_p M$ como \exp_p .

Proposición 4.8. *Para una variedad de Riemann (M, g) se verifica:*

(i) *El conjunto \mathcal{E} es un subconjunto abierto de TM . Para cada $p \in M$, \mathcal{E}_p es estrellado respecto al origen.*

(ii) *Dado $\xi = (p, v) \in TM$, se verifica que $\gamma_v = \exp_p(tv) = \exp(p, tv)$.*

(iii) *La aplicación exponencial es diferenciable.*

Demostración. Para probar la primera propiedad observamos que dado un vector $v \in \mathcal{E}_p$, entonces γ_v estará definida en el conjunto $[0, 1]$, y por lo tanto $\exp(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t)$ está definida, de donde se sigue que \mathcal{E}_p es estrellado. En el caso en que $(p, v) \in \mathcal{E}$, o equivalentemente γ_v estuviese definida en $[0, 1]$, la curva integral (maximal) de G_ξ con condición inicial $\xi = (p, v)$ también lo estaría. Entonces $(1, (p, v))$ pertenece al abierto \mathcal{W} definido al inicio de la sección y por tanto existe un entorno abierto de $(1, (p, v)) \in \mathbb{R} \times TM$ en el cual está definido G_ξ , lo que conlleva que \mathcal{E} es un abierto.

La segunda propiedad se sigue directamente de la homogeneidad de las geodésicas. Finalmente, la tercera propiedad se sigue de la definición de la aplicación exponencial, ya que al ser la composición de aplicaciones diferenciables, será diferenciable. \square

Proposición 4.9. *Dada una isometría F entre dos variedades de Riemann (M, g) y (\tilde{M}, \tilde{g}) , y un punto $p \in M$ arbitrario, el siguiente diagrama es conmutativo en los dominios donde esté definido.*

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{F_*} & T_{F(p)} \tilde{M} \\ \exp_p \downarrow & & \downarrow \exp_{F(p)} \\ M & \xrightarrow{F} & \tilde{M} \end{array}$$

La demostración de esta proposición se sigue directamente del Lema 4.3 y de las propiedades de la aplicación exponencial enunciadas en la Proposición 4.8.

4.2.1. Coordenadas normales

A continuación presentaremos las coordenadas normales obtenidas a partir de la aplicación exponencial. Hemos visto en la sección anterior que la aplicación exponencial es diferenciable, sin embargo, no hemos obtenido una expresión explícita de su diferencial. En la siguiente proposición veremos que la diferencial de la exponencial en el origen $0 \in T_p M$ es la identidad y por lo tanto, \exp_p es un difeomorfismo local en un entorno del origen para todo punto $p \in M$.

Proposición 4.10. *Dado un punto $p \in M$, la aplicación exponencial en p , \exp_p , es un difeomorfismo local. En particular, $(\exp_p)_* 0 = \text{id}_{T_p M}$.*

Demostración. Como $T_p M$ es un espacio vectorial, podemos identificar $T_0(T_p M) = T_p M$, por lo que tiene sentido que $(\exp_p)_* 0 = \text{id}_{T_p M}$. Probado esto se seguirá que es un isomorfismo, y por el teorema de la aplicación inversa para variedades diferenciables, se seguirá que \exp_p es un difeomorfismo local en un entorno del origen.

Sea entonces $v \in T_p M$ y calculemos $(\exp_p)_* 0(v)$. Para realizar este cálculo necesitamos una curva

en T_pM que represente al vector v , y la más sencilla posible es $\alpha(t) = tv$, $t \in \mathbb{R}$. Esta curva tiene como punto inicial el 0 y velocidad constante v , por lo tanto podemos escribir

$$(\exp_p)_*0(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp_p \circ \alpha)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_v(t) = v.$$

□

A partir de la aplicación exponencial se define **entorno normal** de un punto $p \in M$ como la imagen de un entorno donde la exponencial sea un difeomorfismo a través de \exp_p .

Definición 4.11 (Coordenadas normales). Se definen las **coordenadas normales centradas en p** como la carta en M , (\mathcal{U}, φ) donde \mathcal{U} es un entorno normal de p y $\varphi = E^{-1} \circ \exp_p^{-1}$, siendo $E: \mathbb{R}^n \rightarrow T_pM$, $E(x^1, \dots, x^n) = x^i E_i$ el isomorfismo inducido por una base ortonormal $\{E_i\}$ de T_pM .

Observación 4.12. De la definición de coordenadas normales se sigue la existencia de una correspondencia biunívoca entre las cartas de coordenadas normales y las bases ortonormales de T_pM .

Se denotarán por **geodésicas radiales** a las curvas geodésicas que pasan por p para $t = 0$ y están definidas en un entorno normal de p .

Lo más interesante de las coordenadas normales para los objetivos de este trabajo son sus propiedades, ya que simplificarán cuantiosamente los cálculos que realizaremos en los últimos capítulos. A continuación enumeramos aquellas propiedades que necesitaremos más adelante y su demostración puede encontrarse en [5].

Proposición 4.13 (Propiedades de las coordenadas normales). *Consideremos una carta de coordenadas normales centradas en p , $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^n))$. Entonces:*

(i) *Dado un vector $v \in T_pM$, la expresión local de la geodésica radial $\gamma_v(t)$ es:*

$$\gamma_v(t) = (tv^1, \dots, tv^n),$$

definida para aquellos valores de t para los cuales $\gamma_v(t) \in \mathcal{U}$, y siendo v^i , $i = 1, \dots, n$ las coordenadas de v en T_pM .

(ii) *El punto central $p \in M$ se corresponde con el origen en coordenadas normales.*

(iii) *Las componentes de la métrica expresadas en coordenadas normales verifican $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$.*

(iv) *Las primeras derivadas parciales de las componentes de la métrica g_{ij} y los símbolos de Christoffel en coordenadas normales se anulan en el centro: $\partial_{x^k} g_{ij}(p) = 0$, $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$.*

Capítulo 5

Curvatura

Ejemplo 5.1. Consideremos (\mathbb{R}^n, g_0) , con g_0 la métrica en coordenadas cartesianas. En este caso, los símbolos de Christoffel son todos nulos, $\Gamma_{ij}^k = 0$. Para cada campo de vectores $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ se verifica:

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} Z &= \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} Z^k \partial_k = \nabla_{\partial_i} \left(\partial_j Z^k \partial_k + Z^k \cancel{\Gamma_{ik}^r} \partial_r \right) = \partial_i \partial_j Z^k \partial_k + \cancel{\Gamma_{ik}^r} (\partial_j Z^k) \partial_r \\ &= \partial_i \partial_k Z^k \partial_k = \partial_j \partial_i Z^k \partial_k = \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} Z.\end{aligned}$$

Vemos que en el caso más sencillo podremos intercambiar las derivadas según campos de vectores coordenados. Este hecho, que permite construir referencias locales ortonormales y paralelas, no es generalizable a otras variedades.

Para cuantificar la curvatura de una variedad comenzaremos con la definición del tensor de curvatura de Riemann, a partir del cual podremos definir las distintas curvaturas y será el nexo de unión de las mismas. La conmutatividad en las derivadas covariantes del espacio Euclídeo, cuando se expresa de forma general sin coordenadas, viene determinada por $\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = \nabla_{[X, Y]} Z$, lo que motiva la siguiente definición.

Definición 5.2. Sea (M, g) una variedad de Riemann. Se define el **tensor de curvatura** como el (1,3)-campo de tensores sobre M dado por: $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$, con X, Y y Z campos de vectores diferenciables.

Aunque la conexión y el producto corchete no son objetos tensoriales, un cálculo directo muestra que R es efectivamente un campo de tensores de tipo (1,3). Para poder usar este tensor de forma más sencilla, consideraremos su expresión local en un entorno coordenado $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^n))$. La expresión local del tensor de curvatura como tensor de tipo (1,3) tiene la

forma: $R = R_{ijk}{}^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_{x^l}$, donde los coeficientes se obtienen como:

$$\begin{aligned} R_{ijk}{}^l \partial_{x^l} &= R(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) \partial_{x^k} = \nabla_{\partial_{x^i}} \nabla_{\partial_{x^j}} \partial_{x^k} - \nabla_{\partial_{x^j}} \nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^k} - \nabla_{[\partial_{x^i}, \partial_{x^j}]} \partial_{x^k} \\ &= \nabla_{\partial_{x^i}} \Gamma_{jk}^r \partial_{x^r} - \nabla_{\partial_{x^j}} \Gamma_{ik}^r \partial_{x^r} = \partial_i \Gamma_{jk}^l \partial_{x^l} + \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ir}^l \partial_{x^l} - \partial_j \Gamma_{ik}^l \partial_{x^l} - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l \partial_{x^l} \\ &= \left(\partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ir}^l - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l \right) \partial_{x^l}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Observación 5.3. La expresión local de los coeficientes del tensor de curvatura (5.1) sólo depende de los símbolos de Christoffel. Por lo tanto, tomando coordenadas normales en un punto fijado p de una variedad de Riemann, obtendremos una expresión muy simplificada para el cálculo de los coeficientes.

Como consecuencia, y dado que los símbolos de Christoffel son invariantes ante isometrías locales, se sigue inmediatamente que si $F : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ es una isometría local entre dos variedades de Riemann, entonces se conservará el tensor de curvatura:

$$\tilde{R}_{F(p)}(F_*X, F_*Y)F_*Z = F_*p(R_p(X, Y)Z).$$

Observación 5.4. Las componentes del tensor métrico, expresadas en coordenadas normales, son funciones cuyos primeros términos en el desarrollo de Taylor son:

$$g_{\alpha\beta}(\exp_p(x^i e_i)) = \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} R_{i\alpha j\beta}(p) x^i x^j + \dots,$$

por lo que el tensor de curvatura representa la primera obstrucción al carácter constante de dichas funciones. Los siguientes términos del desarrollo de Taylor pueden consultarse en [4].

De forma análoga al cálculo realizado cuando calculamos el laplaciano de una función, podemos transformar el tensor de curvatura en un tensor tipo (0,4) bajando un índice, es decir, usando el operador bemol.

Definición 5.5. Se define el **tensor de curvatura de Riemann** como el (0,4)-campo de tensores $R = R^\flat$ determinado por $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$, con X, Y, Z y W campos de vectores diferenciables. Su expresión local es:

$$R = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l, \quad R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}{}^m.$$

5.1. Propiedades del tensor de curvatura

Así como la conexión de Levi-Civita destacaba por sus propiedades de compatibilidad con la métrica, el tensor de curvatura también presenta una serie de propiedades algebraicas y diferenciables muy útiles en el estudio variacional que realizaremos en el último apartado.

Proposición 5.6 (Propiedades algebraicas del tensor de curvatura). *Sea (M, g) una variedad de Riemann. Entonces el tensor de curvatura verifica las siguientes identidades algebraicas:*

$$(i) \quad R(X, Y, Z, T) = -R(Y, X, Z, T) \quad y \quad R(X, Y, Z, T) = -R(X, Y, T, Z),$$

$$(ii) \quad R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y),$$

$$(iii) \quad R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0,$$

donde X, Y, Z, T son campos de vectores en M .

La propiedad (iii) anterior recibe el nombre de **primera identidad de Bianchi**.

Proposición 5.7. Sea (M, g) una variedad de Riemann. La derivada covariante del tensor de curvatura verifica

$$(\nabla_X R)(Y, Z)T + (\nabla_Y R)(Z, X)T + (\nabla_Z R)(X, Y)T = 0. \quad (5.2)$$

para cualesquiera X, Y, Z, T campos de vectores en M .

Demostración. Fijado un punto $p \in M$, sean X, Y, Z, T campos coordenados correspondientes a un sistema de coordenadas normales centrado en p . Entonces, en p , se tiene que:

$$\begin{aligned} (\nabla_X R)(Y, Z)T &= \nabla_X R(Y, Z)T - R(\nabla_X Y, Z)T - R(Y, \nabla_X Z)T - R(Y, Z)\nabla_X T \\ &= \nabla_X R(Y, Z)T = \nabla_X \nabla_Y \nabla_Z T - \nabla_X \nabla_Z \nabla_Y T. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} &(\nabla_X R)(Y, Z)T + (\nabla_Y R)(Z, X)T + (\nabla_Z R)(X, Y)T \\ &= \nabla_X \nabla_Y \nabla_Z T - \nabla_X \nabla_Z \nabla_Y T + \nabla_Y \nabla_Z \nabla_X T - \nabla_Y \nabla_X \nabla_Z T + \nabla_Z \nabla_X \nabla_Y T - \nabla_Z \nabla_Y \nabla_X T \\ &= R(X, Y)\nabla_Z T + R(Z, X)\nabla_Y T + R(Y, Z)\nabla_X T = 0. \end{aligned}$$

□

Definición 5.8. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con un producto interior. Un **tensor de curvatura algebraico** es una aplicación multilinear $A : V \times V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ verificando las identidades algebraicas de la Proposición 5.6.

Un caso particular del tensor de curvatura algebraico, y que usaremos en la definición de curvatura seccional es $R^0(X, Y, Z, T) = g(Y, Z)g(X, T) - g(X, Z)g(Y, T)$, para cualesquiera campos de vectores definidos sobre una variedad de Riemann (M, g) .

Definición 5.9. Dada una variedad de Riemann (M, g) , un punto $p \in M$ arbitrario y un subespacio de dimensión 2, $\sigma \subset T_p M$, se define la **curvatura seccional** en $p \in M$ del plano σ como:

$$K_p(\sigma) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{R^0(X, Y, Y, X)},$$

donde $\{X, Y\}$ es una base arbitraria de σ .

Observación 5.10. La curvatura seccional está bien definida ya que, para X, Y vectores no nulos y linealmente independientes, $R^0(X, Y, Y, X) = g(Y, Y)g(X, X) - g(X, Y)g(X, Y) > 0$.

La curvatura seccional no depende de la elección de los vectores linealmente independientes escogidos como base de $\sigma \subset T_p M$. En efecto, sean $\{X, Y\}$ y $\{X', Y'\}$ dos bases arbitrarias de σ , $X' = aX + bY$, $Y' = cX + dY$. El determinante de la matriz de cambio de base es igual a $(ad - bc)^2$. Utilizando las propiedades algebraicas del tensor de curvatura y su carácter \mathbb{R} -lineal se verifica que

$$R(X', Y', Y', X') = R(X, Y, Y, X)(ad - bc)^2.$$

Dado que el tensor de curvatura algebraico también es \mathbb{R} -lineal y verifica las mismas identidades algebraicas que el tensor de curvatura, es inmediato que

$$R^0(X', Y', Y', X') = (ad - bc)^2(g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)g(X, Y)).$$

Por lo tanto,

$$\frac{R(X', Y', Y', X')}{R^0(X', Y', Y', X')} = \frac{(ad - bc)^2 R(X, Y, Y, X)}{(ad - bc)^2 R(X, Y, Y, X)} = K_p(\sigma),$$

obteniéndose así la independencia de la base escogida.

La curvatura seccional es función del punto p en la variedad y del subespacio de dimensión 2 $\sigma \subset T_p M$. Se presentan dos posibilidades: que la curvatura seccional no dependa del punto escogido en la variedad, o que para cada uno de los puntos, no dependa del subespacio. A continuación presentamos una condición suficiente y necesaria para la independencia de $K_p(\sigma)$ de σ .

Proposición 5.11. *Una variedad de Riemann (M, g) tiene curvatura seccional constante $c(p) \in \mathbb{R}$ en un punto $p \in M$ si, y solo si, $R_p(X, Y, Z, T) = c(p)R_p^0(X, Y, Z, T)$.*

Demostración.

“ \Leftarrow ” Basta con considerar $Z = Y$, $T = X$, de donde se sigue que $R(X, Y, Y, X) = cR^0(X, Y, Y, X)$ luego $K_p(\sigma) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{R^0(X, Y, Y, X)} = c(p)$.

“ \Rightarrow ” Consideremos $\tilde{R} = R - cR^0$. Si probamos que $\tilde{R} = 0$, entonces habremos terminado. Por hipótesis, como la curvatura seccional es constante, tenemos que $\tilde{R}(X, Y, Y, X) = 0$, para cualesquiera $X, Y \in T_p M$. Si ahora consideramos $Z, W \in T_p M$ arbitrarios,

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{R}(X + Y, Z, Z, X + Y) \\ &= \cancel{\tilde{R}(X, Z, Z, X)} + \cancel{\tilde{R}(Y, Z, Z, Y)} + \tilde{R}(X, Z, Z, Y) + \tilde{R}(Y, Z, Z, X), \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{R}(X, Y, Z, T) + \tilde{R}(Y, Z, X, T) + \tilde{R}(Z, X, Y, T) \\ &= \tilde{R}(X, Y, Z, T) - \tilde{R}(Y, X, Z, T) - \tilde{R}(X, Z, Y, T) = 3\tilde{R}(X, Y, Z, T). \end{aligned}$$

□

Corolario 5.12. *Sea (M, g) una variedad de Riemann conexa con $\dim(M) \geq 3$. La curvatura seccional K_g es constante en M , es decir, no depende del punto ni del plano en donde se calcula, si, y solo si, es constante en cada punto, es decir, independiente del plano escogido para cada $p \in M$.*

Demostración. La implicación hacia la izquierda es directa. Veamos la implicación hacia la derecha. Por la Proposición 5.11 sabemos que si $K_p = c_p$, entonces $R(X, Y)Z = cR^0(X, Y)Z$. Sustituyendo $R = cR^0$ en la segunda identidad de Bianchi, y teniendo en cuenta que al estar trabajando con una métrica de Riemann y con la conexión de Levi-Civita, la primera es paralela, entonces $\nabla_X R^0(Y, Z)T = 0$ para cualesquiera campos de vectores,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_X R(Y, Z)T + \nabla_Y R(Z, X)T + \nabla_Z R(X, Y)T \\ &= \nabla_X (cR^0(Y, Z)T) + \nabla_Y (cR^0(Z, X)T) + \nabla_Z (cR^0(X, Y)T) \\ &= dc(X)R^0(Y, Z)T + dc(Y)R^0(Z, X)T + dc(Z)R^0(X, Y)T. \end{aligned}$$

Como esto se verifica para campos $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrarios, podemos tomar en particular, fijado un X unitario, Y, Z unitarios ortogonales entre sí y además ortogonales a X , y $T = Z$. En este caso,

$$\begin{aligned} 0 &= dc(X)R^0(Y, Z)Z + dc(Y)R^0(Z, X)Z + dc(Z)R^0(X, Y)Z \\ &= dc(X)(g(Z, Z)Y - \cancel{g(Y, Z)Z}) + dc(Y)(\cancel{g(X, Z)Z} - g(Z, Z)X) + dc(Z)(\cancel{g(Y, Z)X} - \cancel{g(X, Z)Y}) \\ &= dc(X)Y - dc(Y)X. \end{aligned}$$

Finalmente, como X, Y son ortogonales, necesariamente $dc \equiv 0$ lo que finaliza la demostración. \square

Definición 5.13. Se define el **tensor de Ricci o tensor curvatura de Ricci** como el campo de tensores tipo (0,2) obtenido de la contracción del primer y último índices del tensor de curvatura. Denotando por $\{E_1, \dots, E_n\}$ una base ortonormal arbitraria

$$\rho(X, Y) = \text{tr}(Z \rightarrow R(Z, X)Y) = \sum_i R(E_i, X, Y, E_i),$$

y cuyas componentes son $\rho_{ij} = g^{km} R_{kijm}$. A partir del tensor de Ricci se define el **operador de Ricci**, que no es más que el tensor de tipo (1,1) obtenido al subir uno de los índices de ρ , $\text{Ric}_i^j = \rho_{ik} g^{kj}$. Si ahora calculamos la traza del operador de Ricci obtenemos la **curvatura escalar**: $\tau = \text{tr}_g \rho = g^{ij} \rho_{ij}$.

Es fácil de comprobar que el tensor de curvatura de Ricci ρ es simétrico:

$$\rho(X, Y) = \sum_i R(E_i, X, Y, E_i) = \sum_i R(Y, E_i, E_i, X) = \sum_i R(E_i, Y, X, E_i) = \rho(Y, X).$$

Su carácter tensorial se sigue directamente de ser una contracción de un tensor.

Observación 5.14. Consideremos la forma de volumen ω de una variedad Riemanniana (M, g) orientada $\omega = \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Sea $\theta_p(u) = \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})(\exp_p(u))}$ la función densidad de volumen definida en un entorno del origen de T_pM . Los primeros términos en su desarrollo en serie de Taylor vienen dados por

$$\theta_p(\exp_p(x^i e_i)) = 1 - \frac{1}{6} \rho_{ij}(p) x^i x^j + \dots,$$

por lo que el tensor de Ricci puede interpretarse como una medida de la forma en que la aplicación \exp_p distorsiona el volumen. Los siguientes términos del desarrollo de Taylor pueden consultarse en [4].

Observación 5.15. De la expresión del tensor de curvatura de Ricci observamos que se trata de hacer una especie de promedio de todas las curvaturas seccionales. En particular, para cada $X \in T_pM$ unitario, $\rho(X, X)$ es la suma de todas las curvaturas seccionales correspondientes a los $n - 1$ planos en T_pM ortogonales entre sí y que contienen a X .

Ejemplo 5.16. Estudiaremos ahora el caso en que la curvatura seccional es constante: $K_p(\sigma) = c$, que implica $R_p = cR_p^0$. En este caso, considerando que la variedad de Riemann (M, g) sobre la que estamos trabajando tiene dimensión n :

$$\begin{aligned} \rho(X, Y) &= \sum_i R(E_i, X, Y, E_i) = c \sum_i R^0(E_i, X, Y, E_i) \\ &= c \sum_i (g(X, Y)g(E_i, E_i) - g(X, E_i)g(Y, E_i)) = c(n - 1)g(X, Y). \end{aligned}$$

Tenemos entonces que existe una relación directa entre la métrica de la variedad y el tensor de curvatura de Ricci, lo que motivará la definición de variedades de Einstein.

Cabe mencionar además que, en caso de variedades de dimensión 2, dado que solo existe un único plano tangente en cada uno de los puntos, la curvatura seccional es siempre constante en cada punto respecto al plano escogido. Por lo tanto, para variedades de dimensión 2, siempre se tendrá que el tensor de curvatura en un punto es proporcional a la métrica:

$$\rho_p(X, Y) = c(p)g(X, Y).$$

Capítulo 6

Subvariedades

En este capítulo estudiaremos la relación entre las geometrías de una variedad de Riemann (\tilde{M}, \tilde{g}) y una subvariedad (M, g) de la misma. Buscaremos relaciones entre las conexiones de Levi-Civita y las curvaturas definidas en M y en el espacio ambiente con la intención de construir modelos para los espacios de curvatura seccional constante.

Sea \tilde{M} una variedad diferenciable. Decimos que $M \subset \tilde{M}$ es una **subvariedad inmersa** de \tilde{M} si la inclusión $\iota : M \rightarrow \tilde{M}$ es una inmersión. Se dirá que es una **subvariedad regular** de \tilde{M} si M es un subespacio topológico de \tilde{M} y la inclusión $\iota : M \rightarrow \tilde{M}$ es un embebimiento. En [7] se prueba que una aplicación entre dos variedades diferenciables es una inmersión si, y solo si, es un embebimiento local. Dado que nuestro interés es en cuestiones locales, supondremos a lo largo de este capítulo que todas las subvariedades son embebidas.

Definición 6.1. Sea (\tilde{M}, \tilde{g}) una variedad de Riemann y $\iota : M \rightarrow \tilde{M}$ una inmersión. Diremos que ι es una **inmersión isométrica** si $g = \iota^*\tilde{g}$. Para una variedad de Riemann (\tilde{M}, \tilde{g}) , diremos que $(M, g = \iota^*\tilde{g})$ es una **subvariedad de Riemann** de \tilde{M} si M es una subvariedad regular de \tilde{M} .

Comenzaremos estableciendo la relación entre las conexiones de Levi-Civita definidas en el espacio ambiente \tilde{M} , $\tilde{\nabla}$, y en la subvariedad M , ∇ . Recordemos que una conexión es un operador que actúa sobre dos campos de vectores sobre una variedad, y que devuelve otro campo de vectores. Por lo tanto, si queremos establecer una relación entre ∇ y $\tilde{\nabla}$, necesitaremos relacionar los campos de vectores tangentes a M y los campos de vectores tangentes a \tilde{M} .

Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y denotemos por $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ a dos extensiones cualesquiera de X e Y al espacio ambiente \tilde{M} , $\tilde{X}|_M = X$, $\tilde{Y}|_M = Y$. Sobre los campos \tilde{X} y \tilde{Y} podemos hacer actuar el operador $\tilde{\nabla}$, y a continuación restringir el campo de vectores obtenido a M :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\tilde{M}) \\ (X, Y) &\longmapsto \tilde{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_M . \end{aligned}$$

Observación 6.2. El valor de $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}|_M$ es independiente de la elección de las extensiones de los campos X e Y . En efecto pues si consideramos un punto $p \in M$ arbitrario, y tomamos coordenadas locales $(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^{\tilde{n}})$ determinadas por el hecho de ser M una subvariedad regular.

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}_p &= \left\{ \tilde{X}(\tilde{Y}^k) + \tilde{X}^i\tilde{Y}^j\tilde{\Gamma}_{ij}^k \right\} \Big|_p \partial_{x^k}(p) = \left\{ \tilde{X}_p(\tilde{Y}^k) + \tilde{X}_p^i\tilde{Y}_p^j\tilde{\Gamma}_{ij}^k(p) \right\} \partial_{x^k}(p) \\ &=_{\tilde{X}_p=X_p, \tilde{Y}_p=Y_p} \left\{ X_p(\tilde{Y}^k) + X_p^iY_p^j\tilde{\Gamma}_{ij}^k(p) \right\} \partial_{x^k}(p) =_{X_p(\tilde{Y}^k)=d\tilde{Y}_p^k(X_p)} \left\{ X_p(Y^k) + X_p^iY_p^j\tilde{\Gamma}_{ij}^k(p) \right\} \partial_{x^k}(p). \end{aligned}$$

Para cada uno de los puntos $p \in M$ podemos hacer una descomposición del espacio tangente a \tilde{M} en el espacio tangente a M en p y su ortogonal: $T_p(\tilde{M}) = T_pM \oplus T_p^\perp(M)$. De esta forma, podemos descomponer el campo de vectores $\tilde{\nabla}_X Y$ en una componente en TM y en una componente ortogonal: $\tilde{\nabla}_X Y = (\tilde{\nabla}_X Y)^\top + (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp$.

Para relacionar las distintas cantidades y operadores intrínsecos definidos en las dos variedades necesitaremos la **segunda forma fundamental**. Esta se define como la aplicación $\text{II} : (X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto \text{II}(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp \in \mathfrak{X}^\perp(M)$.

Proposición 6.3. *La segunda forma fundamental es simétrica y $\mathfrak{F}(M)$ -bilineal.*

Demostración. Veamos en primer lugar que la segunda forma fundamental es simétrica. Para ello consideremos dos campos de vectores X e Y sobre M . Entonces:

$$\text{II}(X, Y) - \text{II}(Y, X) = (\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X)^\perp = ([X, Y])^\perp = 0.$$

$\in TM$

Para estudiar la bilinealidad, bastará con probarlo para una de sus componentes, siguiéndose por simetría que la otra componente también es bilineal. Dado que la conexión de Levi-Civita es tensorial sobre la primera componente, $\text{II}(fX, Y) = \tilde{\nabla}_{fX} Y = f\tilde{\nabla}_X Y = f\text{II}(X, Y)$, con lo que se obtiene el resultado. \square

La segunda forma fundamental proporciona la componente normal de $\tilde{\nabla}_X Y$. A continuación consideramos la componente tangencial, que coincidirá con la conexión de Levi-Civita de la subvariedad.

Teorema 6.4 (Fórmula de Gauss). *Sea (\tilde{M}, \tilde{g}) una variedad de Riemann, (M, g) una subvariedad de Riemann de \tilde{M} . Dados dos campos de vectores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se verifica que*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \text{II}(X, Y).$$

Demostración. Por lo tanto, bastará con comprobar que la componente tangente a M de $\tilde{\nabla}_X Y$ coincide con $\nabla_X Y$. Gracias a la unicidad de la conexión de Levi-Civita, bastará con comprobar que la aplicación $\tilde{\nabla}^\top$ definida como

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}^\top : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \tilde{\nabla}^\top(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X Y)^\top = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y})_M^\top, \end{aligned}$$

es una conexión sobre M simétrica y compatible con g . Evaluando siempre en puntos de M es fácil comprobar que $\tilde{\nabla}^\top$ verifica las propiedades de las conexiones. Dado que

$$\tilde{\nabla}_X^\top Y - \tilde{\nabla}_Y^\top X = (\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X)^\top = [X, Y]^\top = [X, Y],$$

$\in TM$

entonces la conexión es simétrica. Y finalmente se comprueba que es compatible con la métrica g . Considerando $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X Z) \\ &\stackrel{Y, Z \in \mathfrak{X}(M)}{=} g((\tilde{\nabla}_X Y)^\top, Z) + g(Y, (\tilde{\nabla}_X Z)^\top) = g(\tilde{\nabla}_X^\top Y, Z) + g(Y, \tilde{\nabla}_X^\top Z). \end{aligned}$$

□

A partir de la fórmula de Gauss se sigue la interpretación directa de que la segunda forma fundamental no es más que una medida de la diferencia entre la conexión de Riemann intrínseca en M y la conexión de Riemann de la variedad ambiente. Veremos a continuación que servirá para relacionar los tensores de curvatura de M y \tilde{M} , por lo que también participará en la cuantificación de sus diferencias.

Hasta ahora solo hemos considerado campos de vectores tangentes a la subvariedad M . Estudiaremos a continuación la derivada covariante de campos de vectores normales a la subvariedad respecto a campos de vectores tangentes. Sea $U \in \mathfrak{X}^\perp(M)$ un campo de vectores normal a M . Si $Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $\tilde{g}(U, Y) = 0$ en todos los puntos $p \in M$. Sin embargo, la derivada covariante de un campo de vectores se puede descomponer en una componente normal y otra tangencial a la subvariedad, por lo que dado otro campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X U, Y)$ será en general no nulo.

Teorema 6.5 (Ecuación de Weingarten). *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $U \in \mathfrak{X}^\perp(M)$, que pueden ser extendidos de forma arbitraria a la variedad ambiente \tilde{M} , entonces para cualquier punto de M*

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X U, Y) = -\tilde{g}(\text{II}(X, Y), U).$$

La demostración se sigue de forma inmediata de la compatibilidad de la métrica y la conexión de Levi Civita. Basta considerar $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{U} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ extensiones a la variedad ambiente de los campos X, Y y U . Dada la compatibilidad de la conexión de Levi-Civita y la métrica \tilde{g} de \tilde{M} , se tiene $\tilde{X}\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{U}) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{U}) + \tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{U})$.

Al restringirnos a la subvariedad M : $X\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{U})|_M \stackrel{0}{=} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, U) + \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X U)$.

Entonces se llega a la ecuación de Weingarten: $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X U, Y) = \tilde{g}(\text{II}(X, Y), U) = -\tilde{g}(\text{II}(X, Y), U)$.

Podemos ahora relacionar los tensores de curvatura definidos en la variedad ambiente \tilde{M} y la subvariedad M a partir de la llamada ecuación de Gauss.

Teorema 6.6 (Ecuación de Gauss). *Dados $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ campos de vectores tangentes a M , se verifica:*

$$\tilde{R}(X, Y, Z, T) = R(X, Y, Z, T) - \tilde{g}(\text{II}(X, T), \text{II}(Y, Z)) + \tilde{g}(\text{II}(X, Z), \text{II}(Y, T)).$$

Demostración. Denotemos indistintamente por X, Y, Z, T a los campos de vectores tangentes a M y a cualquier extensión de los mismos al espacio ambiente.

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X, Y, Z, T) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z, T) \\
&= \tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_X(\nabla_Y Z + \text{II}(Y, Z)) - \tilde{\nabla}_Y(\nabla_X Z + \text{II}(X, Z)) - (\nabla_{[X, Y]} Z + \text{II}([X, Y], Z)), T\right) \\
&= g(\nabla_X \nabla_Y Z, T) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X(\text{II}(Y, Z)), T) - g(\nabla_Y \nabla_X Z, T) \\
&\quad - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y(\text{II}(X, Z)), T) - g(\nabla_{[X, Y]} Z, T) \\
&= R(X, Y, Z, T) - g(\text{II}(X, T), \text{II}(Y, Z)) + g(\text{II}(Y, T), \text{II}(X, Z)).
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 6.7. Como aplicación de los resultados vistos hasta el momento podemos considerar el caso particular de una hipersuperficie M en \mathbb{R}^n . Sea $N \in \mathfrak{X}^\perp(M)$ un campo de vectores unitario ortogonal a M fijado. Por ser unitario $\tilde{g}(N, N) = 1$, para cualquier campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene $0 = X\tilde{g}(N, N) = 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X N, N)$, y por tanto, $\tilde{\nabla}_X N = (\tilde{\nabla}_X N)^\top$. Se define el **operador de configuración** como el campo de tensores de tipo $(1, 1)$ sobre M determinado por $X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto s(X) = -\tilde{\nabla}_X N$. Utilizando la ecuación de Weingarten, se tiene que el operador configuración es autoadjunto:

$$g(s(X), Y) = -g(\tilde{\nabla}_X N, Y) = \tilde{g}(\text{II}(X, Y), N) = \tilde{g}(\text{II}(Y, X), N) = -g(\tilde{\nabla}_Y N, X) = g(X, s(Y)).$$

Consecuentemente, como M es una hipersuperficie, la dimensión del espacio tangente es $n - 1$, luego $\text{II}(X, Y) = \tilde{g}(\text{II}(X, Y), N)N$. Podemos definir a partir de esta condición un campo de tensores de tipo $(0, 2)$ sobre M $h(X, Y) = \tilde{g}(\text{II}(X, Y), N) = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X N, Y) = \tilde{g}(s(X), Y)$, que es equivalente a la segunda forma fundamental.

Si ahora particularizamos a una superficie S en \mathbb{R}^3 podremos obtener el teorema Egregium de Gauss, que establece que la curvatura de Gauss de una superficie es invariante bajo isometrías.

Teorema 6.8. *Dada una superficie regular S de \mathbb{R}^3 , la curvatura de Gauss en un punto $p \in M$ coincide con la curvatura seccional del plano $T_p M$, y por lo tanto:*

$$K_p = \frac{R(u_1, u_2, u_2, u_1)}{R^0(u_1, u_2, u_2, u_1)},$$

para una base cualquiera $\{u_1, u_2\}$ de $T_p M$.

Demostración. Fijado un campo de vectores N normal a S , hemos visto que el operador configuración es un $(1, 1)$ -campo de tensores autoadjunto, por lo que, para cada punto $p \in M$, s diagonaliza en una base ortonormal de $T_p M$. Denotemos por λ_1, λ_2 los dos autovalores reales de s respecto a una base ortonormal $\{E_1, E_2\}$. De la ecuación de Gauss, para el caso particular de \mathbb{R}^3 y la métrica usual, tenemos que:

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{R}(E_1, E_2, E_2, E_1) \\
&= R(E_1, E_2, E_2, E_1) - g(\text{II}(E_1, E_1), \text{II}(E_2, E_2)) + g(\text{II}(E_1, E_2), \text{II}(E_2, E_1)) \quad (6.1) \\
&= R(E_1, E_2, E_2, E_1) - \lambda_1 \lambda_2,
\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$K_p(T_pM) = \frac{R(E_1, E_2, E_2, E_1)}{\underbrace{R^0(E_1, E_2, E_2, E_1)}_{=1}} = R(E_1, E_2, E_2, E_1) = \lambda_1 \lambda_2 = \det(s).$$

Por lo tanto, la curvatura de Gauss se conservará a través de isometrías. \square

Como corolario de este ejemplo, y teniendo en cuenta la definición de curvatura escalar y su relación con la curvatura seccional, se sigue que en superficies en \mathbb{R}^3 la curvatura escalar es el doble que la curvatura de Gauss.

Ejemplo 6.9. *Variedades con curvatura seccional constante positiva: la esfera de radio R .*

$\mathbb{S}^n(R)$ puede obtenerse como la imagen inversa del valor regular R de la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Por lo tanto, un vector normal a $\mathbb{S}^n(R)$ unitario es $N = \frac{1}{2R} \nabla f$. Además, $\text{Hess}(f) = 2g$. Entonces, si consideramos dos campos de vectores $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n(R))$, tenemos:

$$\text{II}(X, Y) = \frac{1}{2R} \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle N = \frac{1}{2R} \text{Hess}(f)(X, Y) N = \frac{1}{R} g(X, Y) N.$$

Por lo tanto,

$$R(X, Y, Z, T) = \langle \text{II}(X, T), \text{II}(Y, Z) \rangle - \langle \text{II}(X, Z), \text{II}(Y, T) \rangle = \frac{1}{R^2} R^0(X, Y, Z, T).$$

Teniendo en cuenta los resultados 5.11 y 6.8 concluimos que la curvatura de Gauss de la esfera de radio R es constante e igual a $\frac{1}{R^2}$.

Ejemplo 6.10. *Variedades con curvatura seccional constante negativa: el modelo del hiperboloide del espacio hiperbólico.*

La métrica definida en el espacio de Minkowski viene dada por el producto escalar $g_0(\vec{x}, \vec{x}) = (x_1)^2 + \dots + (x_n)^2 - (x_{n+1})^2$. Esta métrica no es una métrica de Riemann, pues no es definida positiva. Se definen así los vectores temporales ($g_0(\vec{x}, \vec{x}) < 0$) y espaciales ($g_0(\vec{x}, \vec{x}) > 0$), siendo los vectores con $g_0(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ el cono de luz. El espacio hiperbólico de radio $R > 0$ se define como $\mathbb{H}^n(R) = \{\vec{x} \in \mathbb{L}^{n+1} \text{ tales que } g_0(\vec{x}, \vec{x}) = -R^2, x_{n+1} > 0\}$, es decir como la imagen recíproca de $-R^2$ para la aplicación $f : \mathbb{L}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2$.

Realizamos ahora un argumento análogo al de la esfera para obtener la curvatura de $\mathbb{H}^n(R)$. En primer lugar, calculemos el gradiente de f .

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = 2x_1 dx^1 + \dots + 2x_n dx^n - 2x_{n+1} dx^{n+1},$$

$$\nabla f(\vec{x}) = \sharp df(\vec{x}) = df_k g^{kl} \partial_l(\vec{x}) = 2x_1 \partial_1 + \dots + 2x_n \partial_n - (-2x_{n+1}) \partial_{n+1} = 2\vec{x}.$$

Entonces $g(\nabla f, \nabla f) = 4g(\vec{x}, \vec{x}) = -4R^2$, lo que nos permite definir un campo de vectores normal a $\mathbb{H}^n(R)$ y unitario como $N = \frac{1}{2R} \nabla f$, $\|N\| = -1$. A partir de este campo de vectores normal al espacio hiperbólico podemos ver que la métrica $\iota^* g_0$ obtenida al restringir la métrica

del espacio de Minkowski si es de Riemann, aunque g_0 no lo sea. En efecto, pues dado un punto $p \in \mathbb{H}^n(R)$, podemos descomponer el espacio tangente a \mathbb{L}^{n+1} en p en la suma directa: $T_p\mathbb{L}^{n+1} = T_p\mathbb{H}^n(R) \oplus (T_p\mathbb{H}^n(R))^\perp$. Ahora bien, $(T_p\mathbb{H}^n(R))^\perp$ está generado por N , el cual tiene norma negativa. Tras esta descomposición, y teniendo en cuenta que $g_0(N, N) < 0$, podemos escoger una base de $T_p\mathbb{L}^{n+1}$ de forma que la matriz asociada a la métrica sea:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & (g_0)|_{\mathbb{H}^n(R)} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & < 0 \end{array} \right).$$

Por el teorema de Sylvester, y teniendo en cuenta ahora que la métrica en la base de coordenadas cartesianas tiene por matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

necesariamente $(g_0)|_{\mathbb{H}^n(R)}$ es definida positiva, y por tanto ι^*g_0 es una métrica de Riemann.

Dado que la segunda forma fundamental opera sobre campos de vectores tangentes a $\mathbb{H}^n(R)$ devolviendo campos de vectores normales al espacio hiperbólico, necesariamente $\text{II}(X, Y) = \lambda N$, con $g_0(\text{II}(X, Y), N) = g_0(\lambda N, N) = -\lambda$, luego

$$\lambda = -g_0(\text{II}(X, Y), N) = g_0(\nabla_X N, Y) = \frac{1}{2R}g_0(\nabla_X \nabla f, Y) = \frac{1}{2R}\text{Hess}(f)(X, Y).$$

La matriz asociada a la métrica de Minkowski es constante y por tanto los símbolos de Christoffel son nulos, y la matriz Hessiana de f está formada por las segundas derivadas de f y es diagonal:

$$\begin{pmatrix} 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

es decir $\text{Hess}(f)(X, Y) = 2g_0(X, Y)$. En conclusión $\text{II}(X, Y) = \frac{1}{R}g_0(X, Y)N$. En consecuencia obtenemos el resultado buscado:

$$R(X, Y, Z, T) = \frac{1}{R^2}g(X, T)g(Y, Z) \underbrace{g(N, N)}_{=-1} - \frac{1}{R^2}g(X, Z)g(Y, T) \underbrace{g(N, N)}_{=-1} = \frac{-1}{R^2}R^0(X, Y, Z, T).$$

de donde se sigue que la curvatura seccional es constantemente $K = -1/R^2$.

Capítulo 7

Variedades de Einstein

Una variedad de Riemann (M, g) es **Einstein** si el tensor de Ricci es un múltiplo escalar de la métrica en cada punto de la variedad. De una forma más general, si existe una función $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cualquier par de campos de vectores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\rho(X, Y) = \lambda g(X, Y). \quad (7.1)$$

Si n es la dimensión de la variedad (M, g) con la que estamos trabajando, de la Definición 5.13 de curvatura escalar observamos que en caso de que se verifique (7.1), entonces tendremos:

$$\tau = \operatorname{tr}_g \rho = \operatorname{tr} \operatorname{Ric} = \lambda \operatorname{tr}_g g \underset{(\star)}{=} n\lambda,$$

en donde hemos usado en (\star) que para bases ortonormales, la métrica es la identidad, y por lo tanto su traza es igual a la dimensión de la variedad. Despejando la función λ en la ecuación anterior, (7.1) se convierte en:

$$\rho = \frac{\tau}{n}g. \quad (7.2)$$

Ejemplo 7.1. En el caso de variedades de dimensión 2 hemos visto que la curvatura seccional coincide con la curvatura de Gauss ya que solo existe un plano tangente a la variedad. Por lo tanto en cada punto $p \in M$ tenemos $\rho = \frac{\tau}{2}g$, lo que muestra que toda variedad de dimensión 2 verifica la condición de Einstein anterior. En consecuencia el estudio de las métricas de Einstein se considera solo en dimensiones mayores.

Ejemplo 7.2. En el ejemplo anterior hemos visto como para variedades de Riemann de dimensión 2 siempre se tiene que el tensor de curvatura de Ricci es proporcional a la métrica donde la constante de proporcionalidad puede variar con el punto. Para variedades de dimensión mayor o igual que 3 existe un caso particular para el que se llega al mismo resultado que antes. Si (M, g) es una variedad de Riemann verificando que la curvatura seccional K_p es constante (independiente del plano σ escogido), entonces, por el Corolario 5.12, $K_p = c_p \equiv c$ es constante para todos los puntos de la variedad. Se sigue por lo tanto, a partir del Ejemplo 5.16 que $\rho_p = c(n-1)g_p$. Tomando trazas a ambos lados, $\tau = c(n-1)n$ luego $c = \frac{\tau}{n(n-1)}$, y finalmente, $\rho = \frac{\tau}{n(n-1)}g$.

En el capítulo 3 hemos introducido los conceptos de divergencia de un campo de vectores y de un campo de tensores en la Definición 3.27. Podremos usarlos ahora para relacionar la variación del tensor de curvatura y la variación de la curvatura escalar.

Lema 7.3. *La diferencial de la curvatura escalar y la divergencia del tensor de Ricci verifican:*

$$\operatorname{div} \rho = \frac{1}{2} d\tau.$$

Demostración. Teniendo en cuenta que la conexión de Levi-Civita conmuta con las contracciones y usando las propiedades algebraicas y diferenciales del tensor de curvatura, se sigue que:

$$d\tau(X) = X(\tau) = \nabla_X \tau = \nabla_X (\operatorname{tr}(\rho)) = \operatorname{tr}(\nabla_X \rho).$$

Mostraremos entonces que $\operatorname{tr}(\nabla_X \rho) = 2 \operatorname{div} \rho(X)$, obteniendo el resultado buscado. Para una base ortonormal $\{E_i\}_{i=1}^n$,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\nabla_X \rho) &= \sum_{i,j} g((\nabla_X R)(E_i, E_j)E_j, E_i) \\ &= - \sum_{i,j} (g((\nabla_{E_i} R)(E_j, X)E_j, E_i) + g((\nabla_{E_j} R)(X, E_i)E_j, E_i)) \\ &= \sum_{i,j} (g((\nabla_{E_i} R)(E_j, X)E_i, E_j) + g((\nabla_{E_j} R)(E_i, X)E_j, E_i)) \\ &= 2 \sum_{i,j} g((\nabla_{E_i} R)(E_j, X)E_i, E_j) = 2 \sum_i (\nabla_{E_i} \rho)(X, E_i) = 2 \operatorname{div} \rho(X). \end{aligned}$$

□

Corolario 7.4. *Para cualquier variedad de Riemann se verifica:*

$$\operatorname{div} \rho = \operatorname{div} \left(\frac{\tau}{2} g \right). \quad (7.3)$$

Demostración. Teniendo en cuenta el lema previo, la demostración de este resultado se reduce a probar que $\frac{1}{2} d\tau = \operatorname{div}(\frac{\tau}{2} g)$. Dado un campo de vectores X arbitrario, usando que la métrica es paralela,

$$\frac{1}{2} \operatorname{div}(\tau g)(X) = \frac{1}{2} \sum_i (\nabla_{E_i}(\tau g))(X, E_i) = \frac{1}{2} \sum_i (\nabla_{E_i} \tau) g(X, E_i) = \frac{1}{2} \nabla_X \tau = \frac{1}{2} d\tau(X).$$

□

Observación 7.5. La relación (7.2) establecía una relación entre el tensor de curvatura de Ricci y la métrica a través de la curvatura escalar, $\operatorname{div} \rho = \operatorname{div} \left(\frac{\tau}{n} g \right)$. De forma análoga a la demostración del resultado previo, podemos desarrollar el término derecho de la igualdad aplicándolo a un campo de vectores X arbitrario:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{\tau}{n} g \right) (X) &= \frac{1}{n} \operatorname{div}(\tau g)(X) = \frac{1}{n} \sum_i (\nabla_{E_i}(\tau g))(X, E_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_i (\nabla_{E_i} \tau) g(X, E_i) = \frac{1}{n} \nabla_X \tau = \frac{1}{n} d\tau(X). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Ahora bien, acabamos de ver en el Lema 7.3 que $\operatorname{div} \rho(X) = \frac{1}{2} d\tau(X)$. Por lo tanto, a menos que $n = 2$, se tendrá que $d\tau = 0$ y por tanto la curvatura escalar de cualquier variedad de Einstein es constante (dado que estamos trabajando con variedades conexas).

En el Ejemplo 7.2 hemos visto que una variedad de Riemann con curvatura seccional constante es de Einstein. El recíproco es cierto en dimensión tres, donde toda variedad de Einstein tiene curvatura seccional constante.

Proposición 7.6. *Si (M, g) es una variedad de Einstein de dimensión 3, entonces la curvatura seccional es constante.*

Demostración. Consideremos una referencia ortonormal del espacio tangente $\{E_1, E_2, E_3\}$. Como estamos en una variedad de Einstein, $\rho = \frac{\tau}{3}g$, con τ constante. El tensor de Ricci se puede obtener como $\rho(X, X) = \sum_i R(E_i, X, X, E_i)$, luego

$$\rho_{11} = R_{2112} + R_{3113} = \frac{\tau}{3}, \quad \rho_{22} = R_{1221} + R_{3223} = \frac{\tau}{3}, \quad \rho_{33} = R_{1331} + R_{2332} = \frac{\tau}{3}.$$

Como este sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas R_{1221} , R_{1331} , y R_{2332} es determinado tendrá solución única $R_{ijji} = \frac{\tau}{6}$ para $i < j$. Dado que $\{E_1, E_2, E_3\}$ es una base ortonormal arbitraria, tendremos que $K(\{E_i, E_j\}) = R_{ijji} = \frac{\tau}{6}$, de donde se sigue, en virtud del Corolario 5.12, el resultado. \square

En consecuencia la condición de Einstein se considera solo para variedades de dimensión mayor o igual a cuatro.

Ejemplo 7.7. Veamos el caso $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ considerando la métrica producto. Observaremos que no tiene curvatura constante, pero es una métrica de Einstein. Sea $\{E_1, \dots, E_4\}$ una base ortonormal de $T_p M$, para cualquier punto de M , con E_1, E_2 tangentes a la primera esfera y E_3, E_4 a la segunda esfera en el producto. Para calcular las curvaturas seccionales, tenemos que considerar todos los planos tangentes a la variedad en el punto p . En particular, calcularemos la curvatura seccional para todos los planos generados por dos de los vectores de la base. Si por ejemplo consideramos un plano $\sigma = \langle \{E_2, E_4\} \rangle$, denotaremos para simplificar $K_p(\sigma) = K_{24}$. Como estamos trabajando con esferas unidad, ya hemos visto en el Ejemplo 6.9 que la curvatura en \mathbb{S}^2 es 1, por lo tanto $K_{12} = K_{34} = 1$. Para el resto de combinaciones, en donde aparecen elementos cruzados de los dos factores del producto, la curvatura seccional se anula, $K_{13} = K_{14} = K_{23} = K_{24} = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} \rho(E_1, E_1) &= K_{12} + K_{13} + K_{14} = 1, & \rho(E_2, E_2) &= K_{21} + K_{23} + K_{24} = 1, \\ \rho(E_3, E_3) &= K_{31} + K_{32} + K_{34} = 1, & \rho(E_4, E_4) &= K_{41} + K_{42} + K_{43} = 1, \\ \rho(E_i, E_j) &= 0, \text{ si } i \neq j, & \rho_{ij} &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Realizando la traza de ρ tenemos que $\tau = 4 = n$. Entonces, dado que estamos trabajando con una base ortonormal y la matriz asociada a la métrica es la identidad, llegamos a que $\rho = \frac{\tau}{4}g$. Luego $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ es una variedad de Einstein que no tiene curvatura seccional constante.

Definición 7.8. Dada una variedad de Riemann (M, g) se define el **tensor de Einstein** como el tensor de tipo $(0,2)$ simétrico

$$G = \rho - \frac{\tau}{2}g.$$

Según el Teorema 7.4, la divergencia del tensor de Einstein para cualquier variedad de Riemann es nula.

7.1. El funcional de Hilbert-Einstein

La particularidad de las geodésicas en variedades de Riemann es que son aquellas curvas que minimizan localmente la distancia entre puntos de la variedad. Las superficies minimales son aquellas que minimizan localmente el área. En esta sección nos preguntamos si existe alguna propiedad parecida relacionada con la métrica de Riemann definida sobre la variedad que haga que sea óptima. La curvatura escalar es constante para variedades de Einstein, lo que podría interpretarse como que tiene una curvatura óptimamente distribuida. Sin embargo, necesitamos una forma de cuantificar e interpretar qué entendemos por una curvatura escalar (o una métrica) óptima. Para ello consideraremos el funcional de Hilbert-Einstein y realizaremos variaciones sobre el mismo para encontrar sus puntos críticos y las condiciones que estos deben cumplir.

Observación 7.9. El estudio de la estabilidad de las métricas críticas para el funcional de Hilbert-Einstein está fuera del objetivo de este trabajo, así como su carácter minimizante. Nos centraremos exclusivamente en el cómputo de las métricas que son críticas para las variaciones del funcional bajo distintas restricciones, y no estudiaremos si son puntos óptimos.

Ejemplo 7.10 (Superficies minimales.). En este ejemplo realizaremos variaciones sobre las parametrizaciones, que implicarán variaciones en su primera forma fundamental, y como consecuencia en el elemento de volumen, lo que nos servirá para ilustrar en un entorno conocido las técnicas que utilizaremos a continuación en variedades de mayor dimensión. Consideremos una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ orientada por N , y con $-dN$ el operador forma.

Utilizaremos u_1, u_2 como nomenclatura de las coordenadas de una parametrización $(\mathcal{U}, \mathfrak{x})$, $\mathfrak{x}(u_1, u_2) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2))$. Denotaremos por g_{ij} a la primera forma fundamental de S haciendo referencia a $g_{ij} = \langle \mathfrak{x}_{u_i}, \mathfrak{x}_{u_j} \rangle$. La segunda forma fundamental se denotará por $h_{ij} = \langle N, \mathfrak{x}_{ij} \rangle = -\langle N_i, \mathfrak{x}_j \rangle$. La primera forma fundamental, la segunda forma fundamental y el operador forma se relacionan como $(dN) = -(g_{ij})^{-1}(L_{ij})$.

Sobre la superficie S podemos calcular dos curvaturas distintas, la curvatura de Gauss de S en un punto $p \in S$, $K(p) = \det(-dN_p)$, y la curvatura media de S en p , $H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-dN_p)$, y ambas pueden ser expresadas usando los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales:

$$K(p) = \frac{L_{11}L_{22} - (L_{12})^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \quad H(p) = \frac{1}{2}L_i^i = \frac{L_{11}g_{22} - 2L_{12}g_{12} + L_{22}g_{11}}{2 \det(g_{ij})}. \quad (7.5)$$

Consideremos el elemento de área en un punto $p \in S$ como la 2-forma

$$dA_p : T_p S \times T_p S \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \longmapsto dA_p(v, w) = \det(v, w, N(p)).$$

En particular, dada una parametrización $(\mathcal{U}, \mathfrak{x})$ con campos coordenados $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$, el elemento de área está determinado por $dA_p(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} = \sqrt{\det(g_{ij})}$, con lo que la 2-forma de área está dada localmente por $dA = \sqrt{\det(g_{ij})} du_1 \wedge du_2$. Si consideramos un rectángulo $\hat{Q} \subset \mathcal{U}$ imagen a través de la parametrización $\mathfrak{x}(u_1, u_2)$ de un rectángulo $Q \subset \mathbb{R}^2$, el área de \hat{Q} se obtiene como $A(\hat{Q}) = \int_Q \sqrt{g} du_1 du_2$. Nuestra intención ahora es caracterizar aquellas superficies que son puntos críticos para el funcional de área.

Realizaremos una variación normal sobre la parametrización $\mathfrak{x}(u_1, u_2)$ definida como la parametrización resultante de desplazar la superficie en la dirección del campo de vectores normal unitario una cantidad determinada por una función diferenciable h , dando lugar a una superficie parametrizada $\mathfrak{x}[t](u_1, u_2) = \mathfrak{x}(u_1, u_2) + t h(u_1, u_2) N(u_1, u_2)$. Dado que \mathfrak{x} es una parametrización, existirá al menos un entorno $(-\varepsilon, \varepsilon)$ de t para el cual $\mathfrak{x}[t]$ esté bien definida.

En este caso, la variación normal originará una variación en el rectángulo \hat{Q} , que denotaremos por $\hat{Q}[t]$. Para calcular el área de este nuevo rectángulo necesitamos conocer la expresión de la primera forma fundamental para la parametrización $\mathfrak{x}[t]$, en particular, de $\mathfrak{x}[t]_1$ y $\mathfrak{x}[t]_2$.

$$\mathfrak{x}[t]_1 = \frac{\partial \mathfrak{x}[t]}{\partial u_1} = \mathfrak{x}_1 + t \frac{\partial h}{\partial u_1} N + t h N_1, \quad \mathfrak{x}[t]_2 = \frac{\partial \mathfrak{x}[t]}{\partial u_2} = \mathfrak{x}_2 + t \frac{\partial h}{\partial u_2} N + t h N_2.$$

Entonces,

$$g[t]_{ij} = g_{ij} + 2th \langle \mathfrak{x}[t]_i, N_j \rangle + t^2 (h^2 \langle N_i, N_j \rangle + \partial_i h \partial_j h) = g_{ij} - 2th L_{ij} + t^2 (h^2 \langle N_i, N_j \rangle + \partial_i h \partial_j h),$$

de donde se sigue que si g_{ij} es definida positiva, entonces $g[t]_{ij}$ también lo será para t suficientemente pequeño.

Consideremos el funcional de área sobre el cual realizaremos la variaciones: $A : t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto A(\hat{Q}[t]) = \int_Q \sqrt{g[t]_{11}g[t]_{22} - (g[t]_{12})^2} du_1 du_2$. Queremos resolver la ecuación $\frac{dA}{dt}|_{t=0} = 0$ para encontrar las condiciones que debe verificar S para ser minimal, esto es, crítica para las variaciones

normales de área.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_Q \sqrt{\det(g[t]_{ij})} du_1 du_2 = \int_Q \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sqrt{\det(g[t]_{ij})} du_1 du_2 \\
&= \int_Q \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(g[t]_{ij}) du_1 du_2 \\
&= \int_Q \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij})}} \left(\frac{dg[t]_{11}}{dt}\Big|_{t=0} g_{22} + g_{11} \frac{dg[t]_{22}}{dt}\Big|_{t=0} - 2g_{12} \frac{dg[t]_{12}}{dt}\Big|_{t=0} \right) du_1 du_2 \\
&= \int_Q \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} (-2hL_{ij}g_{22} - 2hL_{22}g_{11} - 4hL_{12}g_{12}) du_1 du_2 \\
&= \int_Q -\frac{h}{\det(g_{ij})} (L_{11}g_{22} + L_{22}g_{11} - 2L_{12}g_{12}) \sqrt{\det(g_{ij})} du_1 du_2 \\
&\stackrel{eq(7.5)}{=} - \int_Q 2hH \sqrt{\det(g_{ij})} du_1 du_2.
\end{aligned}$$

Bastará con considerar ahora como función arbitraria h la curvatura media H , lo que implicaría que una superficie será minimal si, y solo si, $H \equiv 0$.

En conclusión, si consideramos $-2H$ como el gradiente del funcional de área, entonces la superficie dada por la parametrización \mathbf{x} es minimal si, y solo si, el funcional de área es estacionario, es decir, $H \equiv 0$.

Definición 7.11. Dada una variedad de Riemann (M, g) compacta y orientada, con elemento de volumen $dV_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, se define el **funcional de Hilbert-Einstein** como el funcional \mathbf{S} que asocia a cada métrica de Riemann su curvatura escalar total:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
g &\longmapsto \mathbf{S}_g = \int_M \tau_g dV_g,
\end{aligned}$$

donde \mathcal{M} denota todas las posibles métricas de Riemann sobre la variedad M .

Definición 7.12. Fijada una métrica g sobre una variedad M se define una **variación de la métrica** en la dirección h según el parámetro t como

$$g[t] := g + th,$$

donde h es un campo de tensores simétrico de tipo $(0,2)$ y t es un parámetro real.

Observación 7.13. Como la matriz asociada a la métrica de Riemann definida sobre una variedad en una base ortonormal es la identidad, se tiene que, para valores de t suficientemente pequeños, la variación de la métrica está bien definida y $g[t]$ es no degenerada.

Definición 7.14. Sea $g[t] = g + th$ una variación de la métrica sobre M . Denotaremos por $\delta\mathbf{S}(t)$ a la derivada direccional de \mathbf{S} en la dirección de h , es decir:

$$\delta\mathbf{S}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{S}(g + th).$$

Ejemplo 7.15. Si la variedad de Riemann M tiene dimensión 2, entonces, por el teorema de Gauss-Bonnet, la curvatura total escalar será constante e igual a $4\pi\chi(M)$, con $\chi(M)$ la característica de Euler de M . Por lo tanto, sea cual sea la variación que consideremos de la métrica, la curvatura escalar total seguirá siendo la misma y constante, por lo que todas las métricas son puntos críticos del funcional de Hilbert-Einstein.

Para poder resolver el problema variacional presentado, necesitamos en primer lugar obtener una expresión del mismo. Para ello comenzamos calculando la derivada con respecto al parámetro t del elemento de volumen.

Lema 7.16. *Dada la métrica $g[t] = g + th$ y su elemento de volumen asociado $dV[t]$, se verifica que:*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} dV[t] = \frac{1}{2} \operatorname{tr}_g(h) dV_g.$$

Demostración. La demostración para el caso de dimensión 2 se ha visto en el Ejemplo 7.10. Para el caso $n \geq 3$ consideremos inicialmente una matriz cuadrada de dimensión $n \times n$, A , con coeficientes a_{ij} . Denotemos por A_{ij} a los menores de A resultantes de la eliminación de la i -ésima fila y la j -ésima columna. Entonces la matriz de adjuntos de A tiene por elementos $\operatorname{adj} A = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$. Por otro lado, la relación entre la matriz inversa de A y la matriz de adjuntos es $(\operatorname{adj} A)^t = \det A A^{-1}$. Por lo tanto: $\det A = \sum_{i,j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$. Si consideramos los coeficientes de la matriz A como variables tenemos que

$$\frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} = (\operatorname{adj} A)_{ij} = \det A A_{ji}^{-1}.$$

Volvamos ahora al cálculo de la derivada del diferencial de volumen: $dV[t] = \sqrt{\det g[t]} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

$$\frac{d}{dt} \sqrt{\det g[t]} = \frac{1}{2\sqrt{\det g[t]}} \frac{d}{dt} \det g[t] = \frac{1}{2\sqrt{\det g[t]}} \underbrace{\frac{\partial \det g[t]}{\partial g[t]_{ij}}}_{\det g[t]^{-1} h_{ij}} \frac{\partial g[t]_{ij}}{\partial t}.$$

Entonces $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sqrt{\det g[t]} = \frac{1}{2\sqrt{\det g}} \det g g^{ji} h_{ij} = \frac{1}{2} \sqrt{\det g} \operatorname{tr}_g(h)$, y por lo tanto

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} dV[t] = \left. \frac{d\sqrt{\det g_t}}{dt} \right|_{t=0} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \frac{1}{2} \operatorname{tr}_g(h) \sqrt{\det g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \frac{1}{2} \operatorname{tr}_g(h) dV_g.$$

□

Para simplificar la notación definimos a continuación el producto escalar de dos tensores. Empezaremos por su definición en el nivel algebraico pasando a continuación a su extensión a variedades de Riemann.

Definición 7.17. Sea V un espacio vectorial sobre el que se ha definido un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, con matriz asociada g , y sea $\{e_i\}_i$ una base ortonormal de V . Dados dos tensores de tipo

(0,2) simétricos $T = T_{ij}e^i \otimes e^j$ y $S = S_{ij}e^i \otimes e^j$ sobre V , definimos el **producto escalar de T y S** como:

$$\langle T, S \rangle = T_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}S_{ij}g^{i\alpha}g^{j\beta}.$$

Como caso particular de interés del producto escalar de dos tensores tipo (0,2) simétricos destacamos

$$\langle T, g \rangle = T_{ij}g^{ij} = \text{tr}_g T.$$

Para el caso de variedades de Riemann (M, g) , podemos definir un producto escalar de dos campos de tensores de tipo (0,2) simétricos considerando su evaluación en los puntos de la variedad. Para el elemento de volumen dV_g definido sobre M , podemos definir productos escalares sobre la variedad en los cuales estén involucrados integrales. Para la siguiente definición recordemos que hemos denotado por $T_\ell^k(M)$ al fibrado de (ℓ, k) -tensores sobre la variedad M .

Definición 7.18. Dada una variedad de Riemann (M, g) compacta definimos:

$$\begin{aligned} \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : T_0^2(M) \times T_0^2(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (T, S) &\longmapsto \langle\langle T, S \rangle\rangle = \int_M \langle T, S \rangle dV_g. \end{aligned}$$

En la definición anterior, considerando una referencia local ortonormal $\{E_1, \dots, E_n\}$ tenemos $\langle\langle T, S \rangle\rangle = \int_M \sum_{i,j} T(E_i, E_j)S(E_j, E_i) dV_g$, es decir, para una referencia ortonormal, el producto interno en la Definición 7.18 no es más que la integral de la traza total del tensor tipo (2,2) determinado por $T \otimes \hat{S}$, donde \hat{S} es el campo de tensores tipo (2,0) métricamente equivalente a S . Además, dado que el producto escalar es definido positivo, $\langle\langle T, S \rangle\rangle \geq 0$.

A partir del producto escalar observamos que para aquellas variaciones $g + th$ que mantengan el volumen constante, $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_M dV[t] = 0$:

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_M dV[t] = \int_M \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} dV[t] = \int_M \langle h, g \rangle dV_g = \langle\langle h, g \rangle\rangle.$$

Es decir, la métrica y el tensor h son ortogonales como campos de tensores.

Usando la notación introducida por el producto escalar, procedemos finalmente al cálculo de las variaciones del funcional de Hilbert-Einstein.

Teorema 7.19 (Variación de la curvatura escalar total). *Dada una variedad diferenciable compacta y orientable M y dada $g[t] = g + th$ una variación de la métrica g sobre M , se tiene que:*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} S(g[t]) = \left\langle\left\langle \frac{\tau}{2}g - \rho, h \right\rangle\right\rangle$$

Demostración. Para la demostración de este resultado, además del teorema de la divergencia, usaremos las propiedades de las coordenadas normales, en particular, las enunciadas en la Proposición 4.13. Fijaremos un punto $p \in M$ y denotaremos por (x^1, \dots, x^n) un sistema de coordenadas normales centradas en p . En este caso, $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ y $\partial_i g_{jk}(p) = 0$, para cualesquiera $i, j, k = 1, \dots, n$. Los cálculos que se realizarán a continuación se entenderán locales, es decir, evaluados en el punto p .

Necesitaremos la expresión de $\frac{d}{dt}g[t]^{ij}$. Partiremos del hecho de que $g[t]_{il}g[t]^{jl} = \delta_i^j$. Entonces:

$$0 = \frac{d}{dt}g[t]_{il}g[t]^{jl} = \left(\frac{d}{dt}g[t]_{il}\right)g[t]^{jl} + g[t]_{il}\left(\frac{d}{dt}g[t]^{jl}\right).$$

Por definición de $g[t] = g + th$, tenemos que, $0 = h_{il}g[t]^{jl} + g[t]_{il}\left(\frac{d}{dt}g[t]^{jl}\right)$. Multiplicando por $g[t]^{ij}$, se tiene

$$0 = \frac{d}{dt}g[t]^{kl}g[t]_{ik}g[t]^{ij} + g[t]^{kl}h_{ik}g[t]^{ij} = \frac{d}{dt}g[t]^{kl}\delta_k^j + g[t]^{kl}h_{ik}g[t]^{ij} = \frac{d}{dt}g[t]^{jl} + g[t]^{kl}g[t]^{ij}h_{ik}.$$

Como consecuencia, evaluando en $t = 0$,

$$\frac{d}{dt}g^{jl} = -g^{kl}g^{ij}h_{ik} = -h^{lj}.$$

Debemos de obtener la derivada del funcional de Einstein, y por lo tanto, necesitamos la derivada de la curvatura escalar, pues ya hemos obtenido la derivada de $dV[t]$ en el Lema 7.16. Para ello comenzamos obteniendo la derivada temporal de los símbolos de Christoffel. Dado que las primeras derivadas de la métrica se anulan en p y

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\partial_i g[t]_{jl} = \partial_i h_{jl} = (\nabla_i h)(\partial_j, \partial_l) = \partial_i h_{jl} - h(\nabla_i \partial_j, \partial_l) - h(\partial_j, \nabla_i \partial_l) = \partial_i h_{jl},$$

se sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Gamma[t]_{ij}^k &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left\{\frac{g[t]^{kl}}{2}(\partial_i g[t]_{jl} + \partial_j g[t]_{il} - \partial_l g[t]_{ij})\right\} \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}g[t]^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) + \frac{1}{2}g^{kl}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\partial_i g[t]_{jl} + \partial_j g[t]_{il} - \partial_l g[t]_{ij}) \\ &= \frac{1}{2}g^{kl}((\nabla_i h)_{jl} + (\nabla_j h)_{il} - (\nabla_l h)_{ij}). \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} R(\partial_i, \partial_j)\partial_k &= \nabla_i \nabla_j \partial_k - \nabla_j \nabla_i \partial_k = \nabla_i \Gamma_{jk}^l \partial_l - \nabla_j \Gamma_{ik}^l \partial_l \\ &= \partial_i \Gamma_{jk}^l \partial_l + \Gamma_{jk}^l \nabla_i \partial_l - \partial_j \Gamma_{ik}^l \partial_l - \Gamma_{ik}^l \nabla_j \partial_l = \{\Gamma_{jk}^l - \Gamma_{ik}^l\} \partial_l, \end{aligned}$$

con lo que se tiene que $R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l$. Para calcular su derivada temporal denotando con X, Y, Z, V campos de vectores obtenidos como combinaciones lineales de los campos coordenados correspondientes a un sistema de coordenadas normales centrado en p , y evaluando en el punto p , se sigue:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 h)(X, Y; Z, V) &= (\nabla_V(\nabla_Z h))(X, Y) \\ &= \nabla_V(\nabla h)(X, Y; Z) - \nabla h(\nabla_V X, Y; Z) - \nabla h(X, \nabla_V Y; Z) - \nabla h(X, Y; \nabla_V Z) \\ &= \nabla_V(\nabla_Z h)(X, Y) - (\nabla_{\nabla_V Z} h)(X, Y) - (\nabla_Z h)(\nabla_V X, Y) - (\nabla_Z h)(X, \nabla_V Y) \\ &= \nabla_V \{ \nabla_Z h(X, Y) - h(\nabla_Z X, Y) - h(X, \nabla_Z Y) \}, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $(\nabla^2 h)(\partial_i, \partial_j; \partial_k, \partial_l) = \partial_k \partial_l h_{ij}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R[t]_{ijk}^l &= \frac{d}{dt} \partial_i \Gamma_{jk}^l - \frac{d}{dt} \partial_j \Gamma_{ik}^l \\ &= \frac{1}{2} \partial_i g^{lp} \{ (\nabla_j h)_{kp} + (\nabla_k h)_{jp} - (\nabla_p h)_{jk} \} - \frac{1}{2} \partial_j g^{lp} \{ (\nabla_i h)_{kp} + (\nabla_k h)_{ip} - (\nabla_p h)_{ik} \} \\ &= \frac{1}{2} g^{lp} \{ \nabla_{ij}^2 h_{kp} + \nabla_{ij}^2 h_{jp} - \nabla_{ip}^2 h_{jk} - \nabla_{ji}^2 h_{kp} - \nabla_{jk}^2 h_{ip} + \nabla_{jp}^2 h_{ik} \}. \end{aligned}$$

Calcularemos ahora la derivada temporal de las componentes tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho[t]_{ik} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_{qik}^q = \frac{1}{2} g^{qp} \{ \nabla_{qi}^2 h_{kp} + \nabla_{qk}^2 h_{ip} - \nabla_{qp}^2 h_{ik} - \nabla_{iq}^2 h_{kp} - \nabla_{ik}^2 h_{qp} + \nabla_{ip}^2 h_{qk} \} \\ &= \frac{1}{2} g^{pq} \{ -\nabla_{ik}^2 h_{pq} + \nabla_{qk}^2 h_{ip} - \nabla_{pq}^2 h_{ik} + \nabla_{qi}^2 h_{pk} \}. \end{aligned}$$

Finalmente, podemos obtener la expresión de la derivada temporal de la curvatura escalar teniendo en cuenta que, para una aplicación $f \in \mathfrak{F}(M)$, se tiene que en coordenadas normales y evaluando en el punto p , $\Delta f = \text{tr}_g(\text{Hess}(f)) = g^{ik} \text{Hess}(f)_{ik} = g^{ik} (\frac{\partial^2 f}{\partial_i \partial_j} - \Gamma_{ij}^k \partial_k f) = g^{ik} \nabla_{ij}^2 f$,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tau[t] &= \rho_{ik} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g[t]^{ki} \right) + \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho[t]_{ik} \right) g^{ki} \\ &= -\rho_{ik} h^{ik} + \frac{1}{2} g^{ik} g^{pq} \{ -\nabla_{ik}^2 h_{pq} + \nabla_{qk}^2 h_{ip} - \nabla_{pq}^2 h_{ik} + \nabla_{qi}^2 h_{pk} \} \\ &= -\langle \rho, h \rangle + \text{div}_1 \text{div}_2 h - g^{ik} g^{p1} \nabla_{ik}^2 h_{pq} = -\langle h, \rho \rangle + \text{div}_1 \text{div}_2 h - \Delta \text{tr}_g h, \end{aligned}$$

en donde hemos señalado el argumento en el cual se realiza la contracción en el tensor h en el cálculo de la divergencia.

Para calcular la derivada del funcional de Hilbert-Einstein, bastará integrar las expresiones obtenidas hasta el momento, para lo que usaremos el teorema de la divergencia:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_M \tau[t] dV[t] &= \int_M \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tau[t] dV_g + \int_M \tau[t] \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} dV[t] \\ &= \int_M \{ -\langle \rho, h \rangle - \Delta \text{tr}_g h + \text{div}_1 \text{div}_2 h \} dV_g + \int_M \frac{1}{2} \tau \langle h, g \rangle dV_g \\ &= \int_M \langle -\rho + \frac{\tau}{2} g, h \rangle dV_g = \langle \langle -\rho + \frac{\tau}{2} g, h \rangle \rangle. \end{aligned}$$

□

Ahora que hemos obtenido la expresión para las variaciones del funcional de Hilbert-Einstein ya estamos en disposición de saber cuáles son los puntos críticos de dicho funcional. En particular, tendremos que una variedad de Riemann (M, g) es S -crítica si $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} S(g[t]) = 0$, para cualquier variación de g , es decir, para cualquier h . Esto ocurre si, y solo si, $\langle \rho - \frac{\tau}{2} g, h \rangle = 0$, $\forall h \in T_0^2(M)_{sim}$, es decir, si, y solo si, $\rho - \frac{\tau}{2} g = 0$.

Hemos visto que para variedades de dimensión 2, esto siempre se cumple, por lo que no podemos distinguir aquellas métricas que sean óptimas.

Para el caso de variedades con dimensión mayor que 2,

$$\tau = \operatorname{tr}_g \rho = \operatorname{tr} \left(\frac{\tau}{2} g \right) = \frac{\tau}{2} \operatorname{tr}_g g = \frac{\tau}{2} n,$$

de donde se sigue que $\tau = \frac{\tau}{2} n$ y por lo tanto $(n - 2)\tau = 0$. Como, por hipótesis, $n > 2$, necesariamente $\tau = 0$, lo cual implicaría que $\rho = 0$ y se dice que la variedad (M, g) es Ricci llana.

Además del propio resultado matemático al que hemos llegado, existen profundas consecuencias físicas asociadas al mismo. Para entender la aplicación del tensor de Einstein $\rho - \frac{\tau}{2}g$ en campos como la Relatividad General debemos recordar en primer lugar el caso particular newtoniano de la ecuación de Poisson. La ecuación de Poisson es una ecuación elíptica en derivadas parciales usada en diversos campos de la física y toma la forma $\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho$ en el ámbito de la gravedad newtoniana, relacionando de esta forma el campo gravitatorio \mathbf{g} y la densidad ρ de un objeto masivo. Si además el campo gravitacional es conservativo, derivará de un potencial ϕ , y la ecuación de Poisson resulta $\nabla^2 \phi = -4\pi G\rho$.

Con esta idea, Einstein intentó comprender la gravedad newtoniana dentro del marco de Relatividad General, por lo que se hacía necesario encontrar una ecuación diferencial que relacionara el tensor de energía de la materia y la métrica del espacio. Dado que la ecuación de Poisson de la gravedad newtoniana depende de las segundas derivadas del potencial ϕ , el tensor derivado de la métrica debería contener solamente derivadas segundas de $g_{\mu\nu}$, su divergencia debería ser nula, y la dependencia con las derivadas segundas debería ser lineal. Es pues el tensor de Einstein estudiado hasta el momento el candidato perfecto.

De esta discusión, para el caso del Universo regido por la métrica de Lorentz $ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2$, $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, resultan las **Ecuaciones de campo de Einstein**: $G = \rho - \frac{\tau}{2}g = T$, donde T es el tensor de energía-momento conteniendo toda la información de la densidad de energía y momento del sistema. La métrica de la variedad se interpreta como el potencial gravitacional de la materia. En el Teorema 7.19 hemos visto que las variedades que minimizan el tensor de curvatura total son aquellas con $G = \rho - \frac{\tau}{2}g = 0$, es decir, el caso de variedades Ricci llanas donde el tensor de energía-momento es nulo, el vacío. Estos espacios son denominados **espacios de Einstein especiales**.

Para obtener puntos críticos distintos de las métricas Ricci llanas debemos restringir el funcional de Einstein. Hasta ahora hemos considerados todas las variaciones de la métrica g posibles, independientemente de los cambios en el volumen de la variedad asociados. A continuación nos restringiremos a variaciones de la métrica para las cuales el volumen total no cambia, lo que implica que pasaremos de un problema variacional a un problema de multiplicadores de Lagrange.

Teorema 7.20. *Sea (M, g) una variedad de Riemann compacta de dimensión $n \geq 3$ y $g[t] = g + th$ una variación de la métrica g de forma que $\operatorname{Vol}(M, g[t]) = \int_M dV[t]$ es constante. Entonces $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{S}(g[t]) = 0$ si y solo si (M, g) es una variedad de Einstein.*

Demostración. Tenemos que probar que la restricción de \mathbf{S} al subconjunto $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ de métricas

con volumen constante tiene un punto crítico condicionado en las variedades de Einstein. Como el volumen es constante $\langle\langle h, g \rangle\rangle = 0$. Entonces, en el Teorema 7.19,

$$0 = \frac{d}{dt}|_{t_0} S(g[t]) = \left\langle\left\langle \frac{\tau}{2}g - \rho, h \right\rangle\right\rangle,$$

para todo campo de tensores h ortogonal a g . Así pues se tiene que el tensor de Einstein $\frac{\tau}{2}g - \rho$ ha de ser un múltiplo del tensor métrico: $\frac{\tau}{2}g - \rho = \lambda g$ para alguna función $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$. Tomando trazas se sigue que $\rho = \frac{\tau}{n}g$, entonces $\rho = \left(\lambda + \frac{\tau}{2}\right)g$, lo que muestra que (M, g) es una variedad de Einstein. \square

Siguiendo la aplicación directa a la Relatividad General vista para el caso sin restricciones, el hecho de que las variedades de Einstein sean críticas para el funcional restringido tiene implicaciones importantes.

Ante las incompatibilidades detectadas entre las observaciones del Universo y las Ecuaciones de campo de Einstein, Einstein introdujo un término a mayores sin dar explicación de su significado, pero que era necesario para que las observaciones y la teoría coincidiesen. Este término es Λg , donde Λ es la llamada constante cosmológica, y a día de hoy, sigue sin saberse qué representa exactamente. Las ecuaciones de campo con constante cosmológica resultan

$$\rho - \frac{\tau}{2}g + \Lambda g = T.$$

Entonces, para el caso de un espacio vacío, $T = 0$, obtenemos que $\rho = \frac{\tau}{2}g - \Lambda g$, es decir, la constante cosmológica es el coeficiente de Lagrange del problema variacional con restricciones que acabamos de resolver. Tomando trazas a ambos lados, y teniendo en cuenta que estamos en una variedad de dimensión 4 (espacio-tiempo) resulta

$$\tau = 4\frac{\tau}{2} - 4\Lambda \Rightarrow \Lambda = \frac{\tau}{4}.$$

Esto implica que la constante cosmológica está acoplada a la métrica, específicamente con la curvatura escalar. Aunque la curvatura escalar es cuatro veces mayor que la constante cosmológica, llama la atención que un objeto que antes no estábamos considerando contribuye a la curvatura del Universo.

La constante cosmológica fue introducida principalmente para evitar el colapso del Universo que se derivaba de los modelos esféricos que solo consideraban materia y radiación. Esta constante serviría para contrarrestar parte de la fuerza de gravedad pero como no existían pruebas experimentales ni observaciones de la misma en la época, se dedujo que debería ser suficientemente pequeña como para ser indetectable.

Tras el análisis de distintos modelos en los que se involucraba la constante cosmológica, se observó que la densidad de energía asociada a la constante cosmológica permitía la conservación de la densidad de energía total en el universo, por lo que se le denominó energía de vacío.

Actualmente se asocia la constante cosmológica a la energía oscura (diferente a la materia oscura) y según el modelo “Benchmark” del Universo, que es el que mejor se ajusta a las observaciones, corresponde con el 68 % de su contenido. La materia bariónica, de la cual estamos formados nosotros y las estrellas, es solamente el 4 % del Universo.

Bibliografía

- [1] B. Andrews; C. Hopper. *The Ricci flow in Riemannian geometry. A complete proof of the differentiable 1/4-pinching sphere theorem*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Heidelberg (2011).
- [2] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Reprint of the 1987 edition, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin (2008).
- [3] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides **10** Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro (1979).
- [4] A. Gray, *Tubes*, Advanced Book Program, Addison-Wesley Publ. Co., Redwood City, CA (1990).
- [5] W. Kühnel, *Differential geometry. Curves—surfaces—manifolds*, Third edition, Translated from the 2013 German edition by Bruce Hunt, with corrections and additions by the author, Student Mathematical Library **77** American Mathematical Society, Providence (2015).
- [6] S. Lang, *Undergraduate analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York (1997).
- [7] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics **218** Springer, New York (2013).
- [8] J. M. Lee, *Introduction to Riemannian manifolds*, Graduate Texts in Mathematics **176** Springer, Cham (2018).
- [9] J. M. Lee, *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, Graduate Texts in Mathematics **176**. Springer-Verlag, New York (1997).
- [10] O. Müller, M. Sánchez, Lorentzian manifolds isometrically embeddable in \mathbb{L}^n . *Trans. Amer. Math. Soc.* **363** (2011), 5367–5379.
- [11] J. F. Nash, The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Ann. of Math. (2)* **63** (1956), 20–63.

- [12] J. Plebanski; A. Krasinski, *An introduction to general relativity and cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge (2006).
- [13] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, Second edition, Cambridge University Press, New York, (2009).
- [14] H. Whitney, The self-intersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space. *Ann. of Math. (2)* **45** (1944), 220–246.