



FACULDADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

MODELOS DE EPIDEMIAS
USANDO ECUACIONES
DIFERENCIALES ORDINARIAS

Olivia Amigo Armstrong

Junio, 2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

**MODELOS DE EPIDEMIAS
USANDO ECUACIONES
DIFERENCIALES ORDINARIAS**

Olivia Amigo Armstrong

Junio, 2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de conocimiento: Análisis Matemático
Título: Modelos de epidemias usando ecuaciones diferenciales ordinarias
Breve descripción del contenido
Los modelos de compartimentos SIR en epidemiología dividen la población en Susceptibles, Infectados y Recuperados. Se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y sirven para estudiar cómo evoluciona una epidemia usando modelos sencillos. Se aplicará a un caso real y concreto.

Índice

Resumen	VIII
Introducción	XI
1. Preliminares	1
1.1. Historia de la epidemiología	1
1.2. Ecuaciones diferenciales	2
1.3. Función de Lambert	4
2. Modelo SIR	7
2.1. Formulación	7
2.2. Existencia y unicidad de solución	10
2.3. Pico de infectados	10
2.4. Estudio analítico	14
2.4.1. Propiedades de la solución	16
2.4.2. Diferenciabilidad, clase y analiticidad de la solución	17
2.5. Estimación de parámetros	18
2.6. Número máximo de infectados	20
2.7. S en función de I	22
2.8. Cálculo de S_∞	25

3. Ejemplos y aspectos novedosos	27
3.1. Ejemplos	27
3.1.1. Caso ficticio	27
3.1.2. COVID-19 en la zona sanitaria de A Coruña y Cee	30
3.2. Gemelos digitales	31
I. Tabla de datos de la peste en Eyam	33
Bibliografía	35

Resumen

El estudio de las epidemias es una disciplina crucial, que se ocupa de comprender la propagación de enfermedades infecciosas y su impacto en las poblaciones. Estudiar las epidemias es fundamental para comprender cómo se propagan las enfermedades, identificar factores de riesgo, desarrollar estrategias de control y tomar decisiones informadas en salud pública. En este trabajo se abordarán los modelos de epidemias utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias, centrándose en el modelo SIR. Se proporciona una contextualización histórica, se realiza un análisis matemático completo del modelo, se presentan ejemplos de aplicación y se discuten tendencias futuras como los gemelos digitales.

Abstract

The study of epidemics is a crucial discipline within epidemiology, which deals with understanding the spread of infectious diseases and their impact on populations. Studying epidemics is essential for understanding how diseases spread, identifying risk factors, developing control strategies, and making informed decisions in public health. This work will address epidemic models using ordinary differential equations, focusing on the SIR model. It provides a historical context, conducts a comprehensive mathematical analysis of the model, presents application examples, and discusses future trends such as digital twins.

Introducción

Las epidemias han sido un desafío para la humanidad a lo largo de la historia, y comprender su comportamiento es crucial para garantizar la salud y el bienestar de las sociedades. En este sentido, los modelos matemáticos se han convertido en una herramienta invaluable para analizar y predecir el curso de las epidemias. Estos modelos nos permiten visualizar cómo se propagan las enfermedades, evaluar el impacto de diferentes intervenciones y tomar decisiones informadas para controlar su avance.

Primeramente, en el capítulo 1, se contextualizará el tema de los modelos matemáticos aplicados a la epidemiología. Se hará un breve recorrido por la historia de esta rama de la medicina y se arrojará algo de luz respecto a cuándo, cómo y por qué surgen los primeros modelos epidemiológicos. Además, se incluyen nociones básicas respecto a la conocida función de Lambert, que será de gran ayuda para resolver cuestiones del capítulo siguiente.

Principalmente, en esta memoria se explorará el modelo clásico más sencillo: el modelo SIR. En el capítulo 2, la construcción del sistema de ecuaciones diferenciales que representa el modelo quedará totalmente determinada. Así mismo, se probará la existencia y unicidad de solución de dicho sistema y, a pesar de no obtener una expresión explícita de esta, obtendremos información acerca de su diferenciabilidad, analiticidad y otras características interesantes.

Uno de los objetivos de modelar una epidemia es conocer su gravedad, respondiendo a preguntas como cuántos individuos se verán afectados y necesitarán un tratamiento o cuál será el máximo número de individuos infectados que requerirán atención en un mismo instante. Se llama brote de una enfermedad al periodo de tiempo en el que el número de infectados crece hasta llegar a un punto crítico para luego decrecer. En el momento en el que se alcanza el máximo es cuando pueden darse las situaciones más críticas de la epidemia por falta de recursos, colapso de centros sanitarios, etc. En este mismo capítulo calcularemos dónde se producirá el pico de infectados y la cifra de infectados en ese instante. El capítulo terminará con el cálculo del número final de susceptibles, un dato muy interesante a nivel epidemiológico, ya que muestra la expansión de una epidemia y la porción de población que nunca llegó a contagiarse.

En el capítulo 3 se propondrán ejemplos, tanto reales como ficticios, con la finalidad de

entender el funcionamiento del modelo y ver su aplicación en la vida real. Y finalmente, los últimos párrafos de la memoria estarán dedicados a conocer otras posibilidades y tendencias como son los gemelos digitales, que tienen una aplicación directa a los modelos epidemiológicos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Historia de la epidemiología

Una *epidemia* es una enfermedad que ataca a un gran número de individuos en el mismo período de tiempo, afectando a una proporción excesivamente grande de la población. Así mismo, la *epidemiología* es la rama de la medicina cuyo objetivo es determinar los factores que intervienen en la aparición y propagación de las epidemias [1]. Una epidemia puede darse en pequeña escala por un virus gastrointestinal que se extiende con gran rapidez a todos los miembros de una familia. Pero a lo largo de la historia, la sociedad ha vivido grandes crisis debidas a epidemias que se han extendido por numerosos países de los cinco continentes.

Haciendo un recorrido en el tiempo [1], Hipócrates fue el primero en clasificar las enfermedades en agudas, crónicas, endémicas y epidémicas. El libro *De contagione et contagiosis morbis* asentó las bases de la epidemiología, pues, en él, Girolamo Fracastoro (1478-1553) proponía la existencia de pequeños cuerpos invisibles capaces de autorreplicarse y pasar de un individuo a otro y, por tanto, causantes de enfermedades y de su contagio. No fue posible comprobar esta teoría hasta que los avances tecnológicos lo permitieron. Con la invención del microscopio, Anton van Leeuwenhoek (1632- 1723) logró ver esos cuerpos, hasta ahora invisibles. Louis Pasteur (1822-1895) y Robert Koch (1843- 1910) confirman esta teoría y promueven la higiene como método de prevención de enfermedades, lo que fue una aportación muy significativa en ese momento.

Pero no es hasta el siglo XIX, a raíz de la epidemia del cólera, cuando las matemáticas dejan de desempeñar un papel únicamente estadístico en este ámbito. Aquí es cuando da comienzo la etapa de la epidemiología moderna, con la implementación de métodos matemáticos nuevos. Los modelos matemáticos desempeñan un papel esencial en la epidemiología al permitir comprender y predecir el proceso de propagación de enfermedades. Estos modelos son sistemas dinámicos ¹ que

¹Un sistema dinámico es un concepto físico y matemático que describe la evolución en el tiempo de un sistema

simulan el flujo entre grupos poblacionales teniendo en cuenta factores como la transmisibilidad del patógeno, el tamaño y estructura de la población, y las interacciones entre individuos.

El modelo matemático de la malaria de Ross (1857-1932) [2] fue el primer modelo epidemiológico, publicado en el 1915. En él se consideraba una población de tamaño P y consistía en 12 ecuaciones que involucraban, entre otros, los siguientes parámetros:

- n, m, i y e , denotando las tasas de natalidad, mortalidad, inmigración y emigración de la población afectada por la enfermedad
- v , la suma de las anteriores
- N, M, I y E , las mismas pero para la población no afectada
- V , la suma de las anteriores
- r , la proporción de la población afectada que se recupera por unidad de tiempo
- c , la tasa de infección

Uno de los primeros modelos epidemiológicos compartimentales fue el desarrollado por Kermack (1898-1970) y McKendrick (1876-1943) en el 1927, ver [2]. Este modelo divide la población en Susceptibles, Infectados y Recuperados y, a partir de la asunción de una tasa de contagio y otra de recuperación, determina el flujo entre estos tres grupos. Kermack y McKendrick explican en sus artículos la existencia de un umbral a partir del cual la enfermedad se propaga y desarrollan una fórmula para predecir la dimensión de la epidemia. Un caso particular de este modelo se conoce actualmente como modelo SIR y lo estudiaremos en profundidad en el capítulo 2.

1.2. Ecuaciones diferenciales

Una *ecuación diferencial* [3] es una relación que involucra una «función incógnita» y cierto número de sus derivadas. En particular, si la función incógnita es una función de una sola variable, entonces se trata de una *ecuación diferencial ordinaria*. El *orden* de la ecuación se refiere al de la derivada de mayor orden que en ella aparece. La forma general de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es:

$$F(t, x, x') = 0 \tag{1.1}$$

[1]

donde $t \in \mathbb{R}$ es la variable temporal y $x \in \mathbb{R}$ la variable espacial. Gracias al teorema de la función implícita, bajo hipótesis muy generales que se cumplirán en la gran mayoría de las aplicaciones prácticas, tendremos garantizado que 1.1 se puede escribir en *forma normal*:

$$x'(t) = f(t, x). \quad (1.2)$$

En general, se supondrá que $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en un subconjunto abierto D de \mathbb{R}^2 .

Una *solución* de la ecuación 1.2 es una función $x(t)$ que cumple:

- $(t, x(t)) \in D$ para todo $t \in I$
- $x'(t) = f(t, x)$ para todo $t \in I$

Las ecuaciones diferenciales pueden ser *lineales*, si son de la forma $x(t) = a(t)x + b(t)$, o *no lineales*. Para las últimas, generalmente no es posible dar una solución explícita, por lo que recurrimos a resultados teóricos para obtener información a cerca de esta.

De la misma manera que hemos considerado ecuaciones individuales, podemos considerar *sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Esta vez, el sistema físico o proceso que queremos describir está descrito por n variables, y la variación de cada x_i dependerá de t , de x_i y del resto de variables. Un sistema de EDOs tendrá la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.3)$$

De esta manera, una solución de 1.3 será una n -upla de funciones $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ definidas en un cierto I de \mathbb{R} cumpliendo:

$$\frac{dx_i}{dt}(t) = f_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad i = 1, \dots, n \quad \forall t \in I$$

Por último, llamamos *problema de valor inicial* al ejercicio de encontrar una solución de la EDO o sistema de EDOs que cumpla una cierta condición inicial del tipo $x(t_0) = x_0$ o, escrito de otra forma,

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \dots, \quad x_n(t_0) = x_n^0$$

donde x_i^0 son valores conocidos.

En conocimiento de estos conceptos básicos acerca de las ecuaciones diferenciales, hablemos de los casos que se contemplarán en esta investigación. Durante todo el trabajo se presentarán situaciones en las que la tasa de transferencia no depende del tamaño de los compartimentos en el pasado y en el instante de la transferencia [4]. Por esto se usarán ecuaciones diferenciales ordinarias en la construcción de los modelos y no otro tipo de ecuaciones como ecuaciones en diferencias o integrales. Además, veremos que estas ecuaciones van a ser no lineales por la forma en que interactúan el número de infectados y el número de susceptibles.

En la primera sección apareció el término de *enfermedad endémica*. Al contrario que en una epidemia, en una enfermedad endémica existe un flujo en la población de susceptibles por diversos factores, ya sea natalidad, mortalidad, inmigración,... [4]. En este trabajo no contemplaremos tal flujo. Supondremos que la población total permanece constante y veremos que la porción que ocupan los infectados tenderá a 0 por el carácter decreciente del grupo de susceptibles.

Además del SIR existen otros modelos que contemplan más grupos poblacionales como la población portadora, los expuestos a la enfermedad, los hospitalizados u otras que surgen al contemplar variantes como la vacunación imperfecta o la inmunidad temporal [1]. Así pues, el modelo SIR es el modelo más sencillo y, por ende, no es el más realista. No obstante, se han detectado comportamientos muy similares de modelos más complejos, y por eso su estudio es de gran interés.

1.3. Función de Lambert

Lo tratado en esta sección será de utilidad para desarrollar las secciones 2.7 y 2.8.

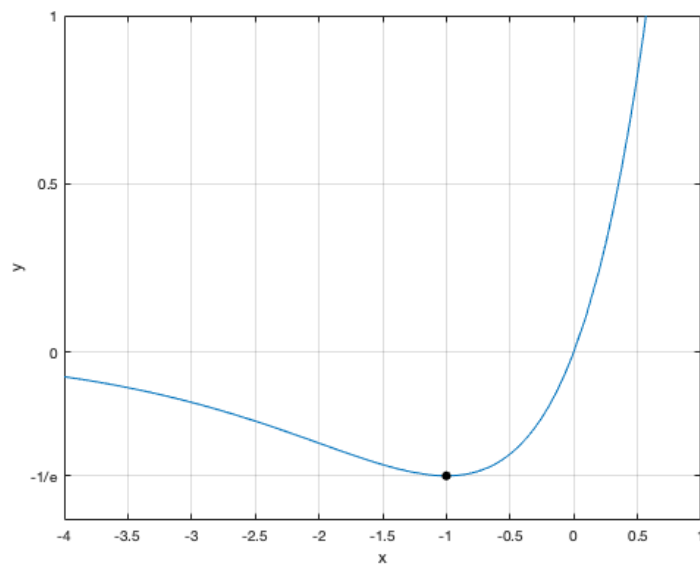
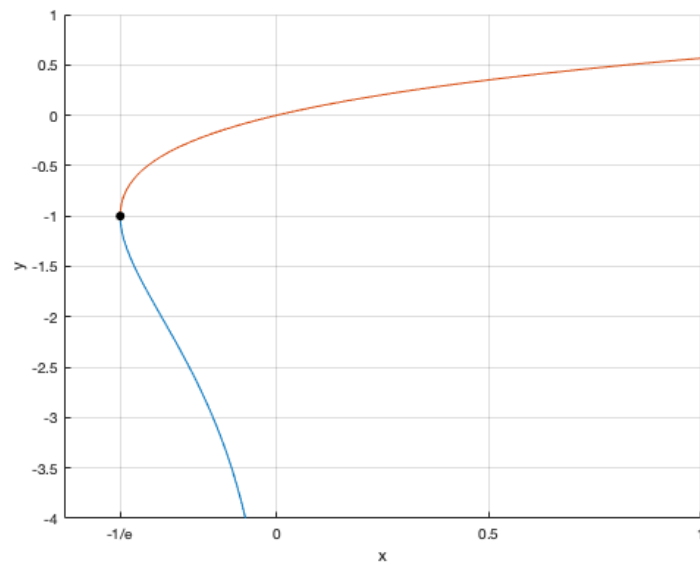
La función de Lambert [5], cuya gráfica podemos ver en la Figura 1.2, se define como la inversa de la función $\varphi(x) = xe^x$ (Figura 1.1) y se denota por \mathcal{W} . Analizando la derivada de φ ,

$$\varphi'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

vemos que se anula en $x = -1$ y, además, $\varphi(-1) = -\frac{1}{e}$. Es decir, φ tiene un mínimo en $x = -1$, donde vale $-\frac{1}{e}$. De este modo, la función de Lambert estará definida en el intervalo $[-\frac{1}{e}, \infty)$ con dos ramas:

- $\mathcal{W}_0(x) \geq -1$, definida en $[-\frac{1}{e}, \infty)$ y creciente.
- $\mathcal{W}_{-1}(x) \geq -1$, definida en $(-\frac{1}{e}, \infty)$ y decreciente.

Por otro lado, a la izquierda del punto crítico, la función φ crece asintóticamente hacia 0. De este modo, la función de Lambert tendrá dos valores en el intervalo $[-\frac{1}{e}, 0)$ y solo uno en el intervalo $[0, \infty)$.

Figura 1.1: xe^x Figura 1.2: $\mathcal{W}(z)$

Capítulo 2

Modelo SIR

Este capítulo contiene la parte fundamental de esta memoria y todo lo demás girará entorno a lo que aquí se explica, que es el modelo clásico SIR. Primeramente, se construirá el sistema de 3 ecuaciones diferenciales ordinarias asociado al modelo y, seguidamente, se probará la existencia y unicidad de solución del mismo. A continuación se predecirá el momento en el que se produce el pico de infectados y el número máximo de estos. En el estudio analítico del modelo demostraremos el cumplimiento de algunas propiedades interesantes del mismo. Para conocer la evolución de la epidemia estimaremos los parámetros que la rigen. Llegando al final, veremos que el número de Susceptibles puede expresarse en función de los Infectados, al igual que al contrario, y por último conoceremos la forma de comprobar la expansión que tuvo una epidemia.

2.1. Formulación

Uno de los primeros triunfos de las matemáticas en la epidemiología fue la formulación de un modelo simple por Kermack y McKendrick, ver capítulo 2 del libro [4]. Un caso particular de este es el modelo compartimental determinista más sencillo al que ahora conocemos como modelo SIR. Este divide la población en tres grupos:

- Susceptibles, aquellos individuos que pueden contraer la enfermedad.
- Infectados, aquellos que han contraído la enfermedad.
- Recuperados, aquellos que se han recuperado y que, por tanto, han adquirido la inmunidad permanente o, de lo contrario, que han fallecido.

El flujo entre ellos es de dirección y sentido únicos como se puede ver en el diagrama de la

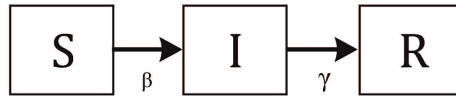


Figura 2.1: Flujo

figura 2.1

Con el fin de formular este modelo debemos hacer ciertas suposiciones a cerca de los parámetros que rigen el flujo entre los compartimentos. En nuestro caso, buscaremos una tasa de contagio y otra de recuperación.

En [4] se explica que el valor más usado para la transmisión de la enfermedad es el *índice de acción de masas* β . Se supone que en una población de tamaño N , un individuo provoca βN contactos suficientes para transmitir la enfermedad por unidad de tiempo, entendiéndose por contacto aquel que por darse entre un infectado y un susceptible ya supone el contagio del susceptible. Si la probabilidad de que un contacto aleatorio se produzca con un susceptible es $\frac{S}{N}$, entonces se producirán $(\beta N) \frac{S}{N}$ contagios por infectado y unidad de tiempo, o lo que es lo mismo, βSI contagios por unidad de tiempo. De esta manera obtenemos la primera ecuación:

$$S' = -\beta SI$$

Por otro lado, es muy común asumir que una cantidad α de infectados se recuperan o fallecen por unidad de tiempo. De este modo, los individuos abandonarían la clase de Infectados a una tasa constante de αI . Pero una tasa de recuperación proporcional al número de infectados carece de sentido epidemiológico y requiere de una explicación matemática más completa.

Consideremos, como en [4], un conjunto de individuos que se contagian a la vez y denotemos por $u(s)$ a aquellos que siguen enfermos tras s unidades de tiempo. Supongamos entonces que una fracción α de estos, dejan el estado infeccioso por unidad de tiempo. Esto matemáticamente se escribe como sigue,

$$u' = -\alpha u.$$

Esta es una ecuación diferencial elemental que resolvemos de la siguiente manera:

$$\frac{u'}{u} = -\alpha \Rightarrow \int \frac{u'}{u} du = - \int \alpha ds \Rightarrow \ln u = -\alpha s + C \Rightarrow u = e^{-\alpha s} C$$

Imponiendo la condición inicial $C = u(0)$ queda,

$$u(s) = u(0)e^{-\alpha s}$$

De este modo la fracción de los individuos infectados que abandonan esta clase s unidades de tiempo después de infectarse es $e^{-\alpha s}$ y, por esto, la duración del período infeccioso se distribuye exponencialmente con media $\int_0^\infty e^{-\alpha s} ds = \frac{1}{\alpha}$, que es la hipótesis que realmente estamos asumiendo. En conclusión, la segunda ecuación del sistema es:

$$R' = \alpha I$$

Del mismo modo que obtuvimos las dos ecuaciones anteriores, obtendremos la ecuación para los Infectados $I' = \beta SI - \alpha I$ y, en conjunto, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$S' = -\beta SI \tag{2.1}$$

$$I' = \beta SI - \alpha I \tag{2.2}$$

$$R' = \alpha I \tag{2.3}$$

A lo largo de esta memoria será de crucial importancia conocer el término de *número reproductivo básico*, definido por $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\alpha} N$ y que surge de la siguiente forma. En [4] se explica que I será una cantidad positiva en cualquier instante, ya que estamos hablando en términos poblacionales. Vemos entonces que $I' > 0$ si $\frac{\beta}{\alpha} S > 1$, es decir, la población de Infectados aumentará mientras se cumpla que $\frac{\beta}{\alpha} S > 1$. Supongamos que en una población de tamaño N aparece un pequeño número de infectados I_0 . Inicialmente es tan pequeño ¹ que el número de susceptibles podría aproximarse por el total de la población: $S_0 = N$.

Teniendo en cuenta lo anterior, la cantidad $\frac{\beta}{\alpha} N$ determina si estos infectados darán lugar a una epidemia, y esto es precisamente el *número reproductivo básico* \mathcal{R}_0 . De este modo, si $\mathcal{R}_0 < 1$ la infección no proliferará dado que $I' < 0$. En otras palabras, el número reproductivo básico puede verse como el número de segundos infectados producidos por un solo infectado en una población completamente susceptible.

El modelo SIR no es muy realista dada su sencillez. A pesar de esto, se han detectado comportamientos muy similares de modelos más complejos, y por eso nos interesa su estudio.

¹Este número inicial de infectados no tiene por qué ser pequeño, pero es a menudo el caso al comienzo de una epidemia en una ciudad, por ejemplo, si es un viajero quien trae la infección.

2.2. Existencia y unicidad de solución

Queremos saber si, desde el punto de vista matemático y dadas unas condiciones iniciales, el sistema tiene solución y si esta es única. Dadas las siguientes condiciones iniciales

$$S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0$$

probemos la existencia y unicidad de solución.

En general estamos considerando el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) & x \in \mathbb{R}^n \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

donde $f: U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y U es un abierto de \mathbb{R}^{n+1} .

Teorema 2.1 (Existencia y unicidad de solución [6]). *Sea $f(t, x)$ una función continua y localmente lipschitziana en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y sea (t_0, x_0) un punto de U . Entonces, existe $\epsilon \geq 0$ tal que el problema de valor inicial 2.4 tiene solución en el intervalo $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, y es única.*

En nuestro caso, $x = (S, I, R)$ y $f(t, x) = (-\beta SI, \beta SI - \alpha I, \alpha I)$, vemos que f es continua en todo el espacio \mathbb{R}^4 . Para ver que la función es Lipschitziana, es suficiente comprobar que existe la derivada de f con respecto a x y que esta es continua en \mathbb{R}^n . Consideremos, por tanto, la jacobiana de f :

$$\begin{pmatrix} -\beta I & -\beta S & 0 \\ \beta I & \beta S - \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Claramente, todos los elementos de la matriz jacobiana son continuos, que es a donde queríamos llegar. En consecuencia, hemos probado que el sistema tiene una única solución.

2.3. Pico de infectados

Cuando medimos el número de casos de una patología respecto al tiempo podemos dibujar un gráfico al que llamamos curva epidemiológica 2.2. Esta es de gran utilidad para la detección precoz y el control de los brotes en una epidemia. El objetivo será evitar que la curva crezca

de forma brusca e intentar “aplanarla” todo lo posible para, de esa forma, evitar colapsos en los centros sanitarios, por ejemplo.

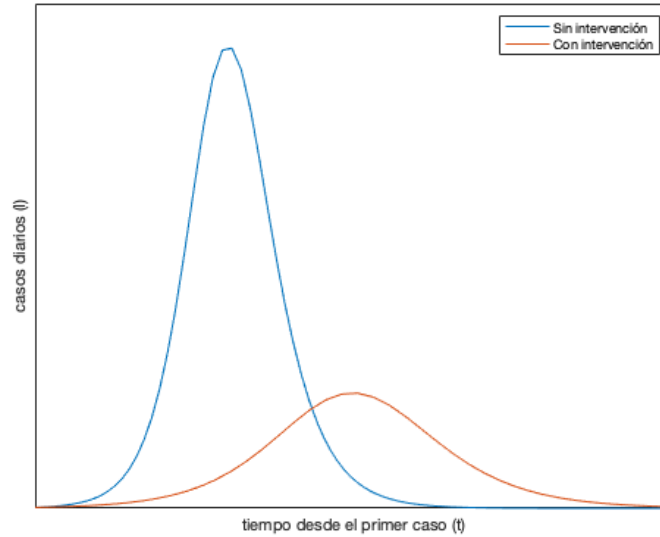


Figura 2.2: Curva epidemiológica

Ligado a esto, surge un nuevo objetivo: conocer el momento en el que se producirá el pico de infectados. Queremos calcular el tiempo t en el que $I(t)$ alcanza su máximo, es decir, donde $I'(t) = 0$. Recordemos que $I'(t) = \beta SI - \alpha I$, que será 0 si y solo si $S = \frac{\alpha}{\beta}$. En el siguiente desarrollo del artículo [7] se calcula una expresión del tiempo en función de S para poder introducir esta última condición.

A partir de la ecuación 2.1 calculamos la derivada segunda de S :

$$S''(t) = -\beta [S'(t)I(t) + S(t)I'(t)]$$

Aquí podemos despejar I' ,

$$I'(t) = -\frac{1}{\beta S(t)} [S''(t) + \beta S'(t)I(t)] \quad (2.5)$$

y sustituyendo $I(t)$ por $-\frac{S'(t)}{\beta S(t)}$ (ecuación 2.1), obtenemos

$$I'(t) = -\frac{1}{\beta} \left[\frac{S''(t)}{S(t)} - \left(\frac{S'(t)}{S(t)} \right)^2 \right]$$

Teniendo en cuenta la expresión 2.5 y las ecuaciones 2.1 y 2.2:

$$-\frac{1}{\beta S(t)} [S''(t) + \beta S'(t)I(t)] = \beta S(t) \left(-\frac{S'(t)}{\beta S(t)} \right) - \alpha \left(-\frac{S'(t)}{\beta S(t)} \right)$$

o equivalentemente

$$\frac{S''(t)}{S(t)} - \left(\frac{S'(t)}{S(t)} \right)^2 + \alpha \frac{S'(t)}{S(t)} - \beta S'(t) = 0 \quad (2.6)$$

Ahora consideramos el cambio de variable $S'(t) = \frac{1}{\phi}$. Así tendremos

$$\phi' = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dS} \frac{dS}{dt} = \frac{d\phi}{dS} \frac{1}{\phi}$$

y también

$$S''(t) = -\frac{\phi'}{\phi^2} = -\frac{1}{\phi^3} \phi \phi' = -\frac{1}{\phi^3} \frac{d\phi}{dS}$$

Con este cambio de variable podemos hacer operaciones sobre la ecuación 2.6

$$\frac{S''}{S} - \left(\frac{S'}{S} \right)^2 + \alpha \frac{S'}{S} - \beta S' = 0 \Rightarrow S'' - \frac{S'^2}{S} + \alpha S' - \beta S' S = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\phi^3} \frac{d\phi}{dS} - \frac{1}{\phi^2} + \frac{\alpha}{\phi} - \beta \frac{S}{\phi}$$

para obtener, finalmente, una ecuación diferencial ordinaria de Bernoulli:

$$\frac{d\phi}{dS} + \frac{\phi}{S} + (aS - b)\phi^2 = 0$$

Para resolver la ecuación diferencial de Bernoulli comenzamos por considerar el cambio $z = \frac{1}{\phi} = S'$ para transformar la ecuación en una de tipo lineal. Por un lado,

$$z = \frac{1}{\phi} = S' \Rightarrow \frac{\phi'}{\phi^2} = -z'$$

Por otro lado, la ecuación diferencial es equivalente a

$$\frac{\phi'}{\phi^2} + \frac{1}{S\phi} + \beta S - \alpha = 0$$

donde, sustituyendo por lo anterior, obtenemos la ecuación diferencial lineal:

$$-z' + \frac{z}{S} + \beta S - \alpha = 0$$

Para resolver esta última consideremos $z(s) = u(s)v(s) \Rightarrow z'(s) = u'(s)v(s) + u(s)v'(s)$ y sustituyamos en la ED lineal,

$$-u'v - uv' + \frac{uv}{S} + \beta S - \alpha = 0 \Rightarrow -u'v + u\left(\frac{v}{S} - v'\right) + \beta S - \alpha = 0$$

A continuación calcularemos la función $v(s)$ de manera que $\frac{v}{S} - v' = 0$. Es una ecuación diferencial de variables separadas. Su resolución es la siguiente:

$$\frac{v}{S} = v' \Rightarrow \frac{v'}{v} = \frac{1}{S} \Rightarrow \int \frac{v'}{v} = \int \frac{1}{S} \Rightarrow \ln v = \ln S + C_1 \Rightarrow v(S) = C_2 S$$

De este modo la ecuación queda

$$-u' C_2 S + \beta S - \alpha = 0 \Rightarrow u' = \frac{\beta}{C_2} - \frac{\alpha}{C_2 S} \Rightarrow \int u' dS = \frac{1}{C_2} \int (\beta - \frac{\alpha}{S}) dS \Rightarrow u(S) = \frac{1}{C_2} (\beta S - \alpha \ln S + C)$$

Por tanto, en la expresión de z , las constantes C_2 se cancela y nos queda:

$$z(S) = S(\beta S - \alpha \ln S + C) = \frac{1}{\phi(S)} \Rightarrow \phi(S) = \frac{1}{S(\beta S - \alpha \ln(S) + C)}$$

Para determinar la constante tenemos que

$$\phi(S_0) = \frac{1}{S'(0)} = \frac{1}{S_0(\beta S_0 - \alpha \ln(S_0) + C)},$$

empleando la ecuación 2.1

$$\beta S_0 - \alpha \ln(S_0) + C = \frac{S'(0)}{S(0)} = -\beta I(0)$$

y entonces

$$C = -\beta I_0 - \beta S_0 + \alpha \ln(S_0)$$

Hemos obtenido la siguiente expresión de ϕ :

$$\phi(S) = \frac{1}{S(\beta(S - I_0 - S_0) - \alpha \ln(\frac{S}{S_0}))}$$

Ahora bien, notemos que

$$\frac{1}{S'(t)} = \phi(S(t)) = \frac{1}{S(t)(\beta(S(t)) - I_0 - S_0) - \alpha \ln(\frac{S(t)}{S_0})}$$

e integrando se tiene

$$\int_{t_0}^t 1 dt = \int_{t_0}^t \frac{S'(t)}{S(t)(\beta(S(t)) - I_0 - S_0) - \alpha \ln(\frac{S(t)}{S_0})} dt$$

que implica

$$t - t_0 = \int_{S_0}^S \frac{ds}{s(\beta(s) - I_0 - S_0) - \alpha \ln(\frac{s}{S_0})} dt$$

Para $t_0 = 0$ esto es

$$t = \int_{S_0}^S \frac{ds}{s(\beta(s) - I_0 - S_0) - \alpha \ln(\frac{s}{S_0})} dt$$

Finalmente, el tiempo en el que ocurre el pico de infectados es cuando $S = \frac{\alpha}{\beta}$ como ya habíamos dicho. En ese caso,

$$t_{pico} = \int_{S_0}^{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{ds}{s(\beta(s) - I_0 - S_0) - \alpha \ln(\frac{s}{S_0})} dt$$

2.4. Estudio analítico

En la sección 2.2 se prueba la existencia de solución para el sistema de ecuaciones diferenciales. Por lo general, un sistema de ecuaciones no lineales no puede resolverse de forma explícita, pero podemos realizar un estudio analítico para conocer algunos de los aspectos de esta solución. El siguiente desarrollo se encuentra recogido en [7].

Si consideramos las ecuaciones 2.1 y 2.2 del sistema, podemos escribir

$$R'(t) = -\frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{S'(t)}{S(t)} \right). \quad (2.7)$$

Al integrar esta expresión respecto al tiempo:

$$\frac{\alpha}{\beta} \ln S(t) = -R(t) + C \Rightarrow \ln S(t) = -\frac{\beta}{\alpha} R(t) + C \Rightarrow S(t) = C \exp\left(-\frac{\beta}{\alpha} R(t)\right)$$

Imponiendo las condiciones iniciales $S(0) = S_0$ y $R(0) = 0$:

$$S(0) = C \exp\left(-\frac{\beta}{\alpha} R(0)\right) \Rightarrow C = S_0$$

En resumen, integrando la ecuación 2.7 hemos obtenido

$$S(t) = S_0 \exp\left(-\frac{\beta}{\alpha} R(t)\right). \quad (2.8)$$

Derivando esta última expresión de $S(t)$ dos veces nos queda

$$S'(t) = -S_0 \frac{\beta}{\alpha} R'(t) \exp\left(-\frac{\beta}{\alpha} R(t)\right) \quad (2.9)$$

y

$$S''(t) = -S_0 \frac{\beta}{\alpha} R''(t) \exp\left(-\frac{\beta}{\alpha} R(t)\right) + S_0 \frac{\beta^2}{\alpha^2} R'(t)^2 \exp\left(-\frac{\beta}{\alpha} R(t)\right) \quad (2.10)$$

y derivando la expresión de $R'(t)$ de la que partimos, obtenemos:

$$R''(t) = -\frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{S''(t)S(t) - S'(t)^2}{S(t)^2} \right). \quad (2.11)$$

Ahora vamos a sustituir las últimas expresiones obtenidas (2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11), en la ecuación 2.6, con lo que llegaremos a una ecuación diferencial de segundo orden para $R(t)$

$$R''(t) = S_0 \beta \exp\left(-\frac{\beta}{\alpha} R(t)\right) R'(t) - \alpha R'(t). \quad (2.12)$$

Ahora introduzcamos el cambio de variable

$$u(t) = \exp\left(-\frac{\alpha}{b} R(t)\right) \quad (2.13)$$

para sustituirlo en la EDO anterior y obtener

$$u(t)u''(t) - [u'(t)]^2 + [b - S_0 a u(t)]u(t)u'(t) = 0. \quad (2.14)$$

Si resolviésemos esta ecuación diferencial ordinaria no lineal con la condición inicial 2.7 tendríamos la expresión de $S(t)$:

$$S(t) = S_0 u(t) \quad (2.15)$$

A partir de esta podemos sacar las otras dos ya que, por un lado

$$R'(t) = \alpha I(t) = -\frac{\alpha S'(t)}{\beta S(t)} = -\frac{\alpha u'(t)}{\beta u(t)} \quad (2.16)$$

y por tanto

$$R(t) = -\frac{\alpha}{\beta} \ln(u(t)) \quad (2.17)$$

y finalmente,

$$I(t) = N - S(t) - R(t) = N - S_0 u(t) + \frac{\alpha}{\beta} \ln(u(t)) \quad (2.18)$$

2.4.1. Propiedades de la solución

A pesar de no poder proporcionar una solución explícita del problema, podemos probar que cumple ciertas propiedades. Estas vienen recogidas en [2].

- La población se mantiene constante e igual a N .

En efecto, $S'(t) + I'(t) + R'(t) = 0$ y por tanto, como $S(0) + I(0) + R(0) = N$, $S(t) + I(t) + R(t) = N$ constante.

- $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ son no negativas, puesto que hablamos en términos de poblaciones.
- Cuando t tiende a infinito, $S(t)$ decrece al límite $S_\infty > 0$, $I(t)$ tiende a 0 y $R(t)$ crece convergiendo a $R_\infty < N$.

Como solo nos interesan las soluciones positivas y para $t \geq 0$, si $S(0) = 0$ entonces $S(t) = 0$ para todo $t \geq 0$; mientras que si $S(0) > 0$, $S(t) \leq N$ y la solución está acotada y se puede prolongar para todo $t \geq 0$.

A la vista de la ecuación 2.1, $S(t)$ es decreciente. Teniendo en cuenta que está acotada inferiormente, $S(t) \geq 0$, deducimos que $S(t)$ tiene límite cuando t tiende a infinito, el cual denotaremos por S_∞ . Fijándonos ahora en la ecuación 2.3, vemos que $R(t)$ es creciente.

Además, está acotada superiormente por N y, por lo tanto, $R(t)$ tiene límite cuando t tiende a infinito y lo denotaremos por R_∞ . Por último, $I(t) = N - S(t) - R(t)$ por lo que también tendrá límite cuando t tiende a infinito. Además, este límite es necesariamente 0. Veamos esto último.

Consideremos el caso $\mathcal{R}_0 < 1$. Esto significa que $S(0) < \frac{\alpha}{\beta}$ y que, por tanto, I decrece en el instante inicial pues su derivada es $I'(0) < 0$. Teniendo en cuenta el carácter decreciente de S , $S(t) < \frac{\alpha}{\beta}$ para todo $t > 0$ y entonces, $I(t)$ será decreciente para todo $t > 0$. Como además está acotado inferiormente por 0, podemos asegurar que existe el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = I_\infty \geq 0.$$

A continuación demostraremos que $I_\infty = 0$ por reducción al absurdo, así que suponemos que $I_\infty > 0$. A partir de 2.3 sabemos que $R'(0) = \alpha I(0) \geq \alpha I_\infty > 0$ y $R'(t) \geq \alpha I_\infty$, por lo que $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \infty$, lo cual es una contradicción.

Ahora consideremos el caso contrario al anterior: $\mathcal{R}_0 > 1$. Esto es $S(0) > \frac{\alpha}{\beta}$ y $I'(0) > 0$, por lo que el número de infectados crece en el instante inicial. Podemos probar que existirá un cierto instante t^* en el cual S valga exactamente la cantidad $\frac{\alpha}{\beta}$ y de ese modo, aplicando el carácter decreciente de S se tendrá que $S(t) < \frac{\alpha}{\beta}$ a partir de ese instante y volveremos a las circunstancias del caso anterior.

Si la condición $S(t) > \frac{\alpha}{\beta}$ se cumpliera para todo $t > 0$, $I(t)$ crecería en todo $t > 0$. Pero teniendo en cuenta 2.3, $R'(t)$ sería creciente y $R_\infty = \infty$, lo cual es una contradicción. Así, existirá un t^* tal que $S(t^*) = \frac{\alpha}{\beta}$ y $I'(t^*) = 0$. Nuevamente, y como anunciamos antes, usamos el carácter decreciente de S para afirmar que $S(t) < \frac{\alpha}{\beta}$ para todo $t > t^*$ y consecuentemente, $I(t)$ será decreciente para $t > t^*$. Razonando como en el primer caso, el límite de $I(t)$ cuando t tiende a infinito existe y es 0.

2.4.2. Diferenciabilidad, clase y analiticidad de la solución

Finalmente, podemos dar algunas pinceladas más acerca de las características de la solución, basándonos en el teorema de la función implícita [8].

Teorema 2.2 (Teorema de la función implícita). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un abierto, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ y $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación tal que*

- $F \in \mathcal{C}^1$
- $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$
- $\det D_y F(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$

Entonces existen respectivas bolas $B[\bar{x}, \alpha]$ y $B[\bar{y}, \beta]$ de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m y una aplicación $f: B[\bar{x}, \alpha] \rightarrow B[\bar{y}, \beta]$ continua en $B[\bar{x}, \alpha]$ y de clase 1 en $B(\bar{x}, \alpha)$ cumpliendo:

- $f(\bar{x}) = \bar{y}$
- $F(x, f(x)) = 0$, para todo $x \in B[\bar{x}, \alpha]$
- Los únicos puntos del conjunto $B[\bar{x}, \alpha] \times B[\bar{y}, \beta]$ que satisfacen la expresión $F(x, y) = 0$ son los de la gráfica de f
- $Df(x)$ se puede obtener aplicando la regla de la cadena sobre la aplicación idénticamente nula

$$\begin{aligned} B(\bar{x}, \alpha) &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto F(x, f(x)) \end{aligned}$$

$$\text{Así, } Df(x) = -(D_y F(x, f(x)))^{-1} \circ D_x F(x, f(x)).$$

Además, si F es de clase p en Ω , entonces f es de clase p en $B(\bar{x}, \alpha)$

En nuestro caso, $f(t, x) = (-\beta SI, \beta SI - \alpha I, \alpha I)$ claramente es de clase $\mathcal{C}^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ para cualquier $p \geq 1$, por lo tanto, podemos afirmar que la solución del sistema es de clase \mathcal{C}^∞ y, consecuentemente, diferenciable. Además, el teorema asegura que si $f(x, t)$ es analítica, también lo será la solución $x(t)$, y lo primero se cumple dado que f es diferenciable. En resumen, la solución del sistema es diferenciable, de clase infinito y analítica.

2.5. Estimación de parámetros

Es importante estimar los parámetros que rigen la evolución de la epidemia para poder determinarla. En esta sección desarrollaremos una expresión que relacionará el número de Susceptibles final e inicial junto con el *número reproductivo básico*, y que se conoce como *relación del tamaño final*. Gracias a esta relación podremos estimar los parámetros del modelo y veremos cómo hacerlo en un ejemplo concreto.

La ecuación 2.1 podemos reescribirla como $-\frac{d}{dt}(\ln S) = \beta I$. Integrando entre $t = 0$ y $t = \infty$ se tiene la siguiente igualdad

$$\ln S(0) - \ln S_\infty = \beta \int_0^\infty I(t) dt.$$

Por otro lado, la ecuación 2.2 puede reescribirse como $\frac{dI}{dt} = -\frac{dS}{dt} - \alpha I$. Volviendo a integrar como antes y teniendo en cuenta que $I_\infty = 0$ se tiene

$$-I(0) = S(0) - S_\infty - \alpha \int_0^\infty I(t) dt$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\ln S(0) - \ln S_\infty}{\beta} &= \frac{I(0) + S(0) - S_\infty}{\alpha} \Rightarrow \ln S(0) - \ln S_\infty = \frac{\beta}{\alpha} (I(0) + S(0) - S_\infty) \Rightarrow \\ \ln \frac{S(0)}{S_\infty} &= \frac{\beta}{\alpha} (N - S_\infty) = \mathcal{R}_0 \left(1 - \frac{S_\infty}{N}\right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Esta expresión implícita de S_∞ se conoce como *relación del tamaño final*. La podemos encontrar en [2] y a continuación se explicará una de sus aplicaciones: la estimación de los parámetros del modelo.

La fórmula 2.19 nos da una relación entre el número reproductivo básico y las cantidades S_0 y S_∞ . Estas últimas pueden estimarse mediante estudios serológicos antes y después de una epidemia, pero la estimación que hiciésemos de \mathcal{R}_0 empleando estos datos sería retrospectiva y solo podría obtenerse una vez que la epidemia ya hubiese ocurrido. Por eso también nos interesa buscar otra manera de estimar estos parámetros.

Si inicialmente $S_0 \approx N$, la ecuación de I puede aproximarse por $I' = (\beta N - \alpha)I$. Es decir, el número de infectados crece exponencialmente con una tasa de crecimiento inicial $r = \beta N - \alpha = \alpha(\mathcal{R}_0 - 1)$. Esta tasa r puede estimarse a partir de los datos de incidencia al inicio de la epidemia. Como podemos medir N y α , β puede calcularse como

$$\beta = \frac{r + \alpha}{N}$$

No obstante, esta aproximación no es muy exacta debido a la falta de datos e información insuficiente de los casos, sobre todo cuando la enfermedad es desconocida. A continuación veremos un ejemplo tomado de [4] y que nos ayudará a clarificar el problema de estimación de parámetros.

Ejemplo 2.3 (Epidemia de peste en Eyam). Se trata de la epidemia de peste que se desarrolló en el pueblo inglés de Eyam durante los años 1665 y 1666. La población inicial de esta localidad era de 350 habitantes, de los cuales solo sobrevivieron 83.

Esta epidemia tuvo dos brotes, pero el primero fue relativamente leve. Sin contar este primer brote, este caso cumple perfectamente las hipótesis del modelo, por lo que podemos estudiar la epidemia desde mediados de mayo hasta mediados de octubre del 66 aplicando el modelo SIR, partiendo de una población inicial compuesta por 254 susceptibles, $S_0 = 254$; y 7 infectados,

$I_0 = 7$. Como ya se dijo, la peste dejó 83 supervivientes, por lo que $S_\infty = 83$. Podemos ver los datos recogidos en este período de tiempo en el Cuadro I.1.

Aplicando la fórmula 2.19 podemos despejar $\frac{\alpha}{\beta}$ como se ve a continuación:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{N - S_\infty}{\ln S_0 - \ln S_\infty}$$

y sustituyendo los datos obtenemos:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{254 + 7 - 83}{\ln 254 - \ln 83} \approx 159,1426$$

Para acabar de estimar el valor de β y α , sabemos que el periodo de infección es de 11 días, o lo que es lo mismo, 0,3667 meses. Por esto, sabemos que $\alpha = \frac{1}{0,3667} \approx 2,7273$ y, consecuentemente, $\beta = \frac{2,7273}{159,1426} \approx 0,01715$.

2.6. Número máximo de infectados

De acuerdo con la sección 2.3, la epidemia alcanzará el pico de infectados cuando $S = \frac{\alpha}{\beta}$. El objetivo de esta sección será expresar I en función de S para calcular el número máximo de infectados, introduciendo ese valor de S . Dado que $S + I + R = N$, podemos calcular R una vez conocidas S e I , por lo que podemos prescindir de una de las ecuaciones y quedarnos con el sistema autónomo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= -\beta SI \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \beta SI - \alpha I \end{aligned}$$

con condiciones iniciales

$$S(0) = S_0, I(0) = I_0 \text{ y } S_0 + I_0 = N.$$

Para escribir I en función de S resolvamos el sistema.

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\beta SI - \alpha I}{-\beta SI} = \frac{\alpha - \beta S}{\beta S} \Rightarrow \int dI = \int \frac{\alpha}{\beta S} - 1 dS = \frac{\alpha}{\beta} \int \frac{dS}{S} - \int 1 dS \Rightarrow I = \frac{\alpha}{\beta} \ln S - S + C$$

La integral primera del sistema es entonces $F(S, I) = I + S - \frac{\alpha}{\beta} \ln(S)$, definida en $(0, \infty) \times \mathbb{R}$.

Imponiendo las condiciones iniciales obtendremos

$$I(0) + S(0) - \frac{\alpha}{\beta} \ln S(0) = C \Rightarrow N - \frac{\alpha}{\beta} \ln S_0 = C$$

Y, por tanto, la solución será $I = N - S + \frac{\alpha}{\beta} \ln S - \frac{\alpha}{\beta} \ln S_0$ o equivalentemente,

$$I = N - S + \frac{\alpha}{\beta} \ln \frac{S}{S_0}. \quad (2.20)$$

Esta expresión describe las órbitas de las soluciones del problema de valor inicial en el plano (S,I). Retomemos el ejemplo de la peste de Eyam para dibujar la órbita de soluciones. Recordemos que $S_0 = 254$, $I_0 = 7$, $N = 261$ y $\frac{\alpha}{\beta} \approx 159$. Así, la expresión anterior quedaría: $I = 261 - S + 159 \ln \frac{S}{254}$, cuya gráfica se muestra en la figura 2.3.

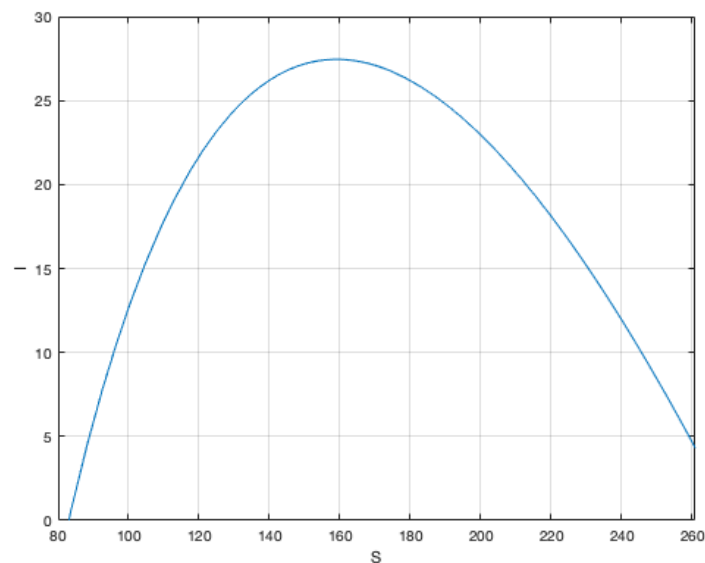


Figura 2.3: Órbita de soluciones en el plano (S,I)

Como el valor máximo de I se alcanza cuando su derivada es nula y esto ocurre cuando $S = \frac{\alpha}{\beta}$, sustituyendo en la ecuación obtenemos el número máximo de infectados que viene dado por:

$$I_{max} = S_0 + I_0 - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \ln \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \ln S_0 \quad (2.21)$$

2.7. S en función de I

En la sección anterior vimos que I puede expresarse en términos de S , y puede surgir la duda de si es cierto el recíproco. Para ver esto de forma más sencilla consideremos el teorema de la función implícita para una variable [9]

Teorema 2.4 (Teorema de la función implícita, caso de una variable). *Supongamos una relación implícita del tipo $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$. Esta ecuación define implícitamente a x_k como función de las demás variables en un entorno de un punto $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ si y solo si:*

- $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$, es decir, el punto verifica la relación implícita dada.
- La función F y sus n parciales $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ son continuas en un entorno de a
- $\frac{\partial F}{\partial x_k}(a) \neq 0$

Además, de cumplirse estas hipótesis, la derivada parcial de x_k respecto a cualquier x_i se calcula mediante:

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i}(a) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(a)}{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a)}$$

La ecuación 2.20 nos da una relación entre el número de susceptibles y el de infectados que podemos escribir como $F(I, S) = 0$ definiendo

$$F(I, S) = I + S - N - \frac{\alpha}{\beta} \ln \frac{S}{S_0} = 0,$$

donde F es continua y diferenciable para todo $I > 0$ y $S > 0$, y cuyas derivadas parciales también son continuas. Observemos que

$$\frac{\partial F}{\partial I} = 1 \neq 0$$

y entonces, por el teorema de la función implícita, sabemos que I puede ser expresado en términos de S , como en la ecuación 2.20, para cualquier punto (I, S) que verifique la relación implícita. Además, se tiene que

$$\frac{\partial I}{\partial S} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial S}}{\frac{\partial F}{\partial I}} = -1 + \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{S}.$$

Ahora nos preguntamos si S puede ser expresada como función de I , es decir, cuándo es distinta de 0 la derivada parcial de F respecto de S . Vemos que

$$\frac{\partial F}{\partial S} = 1 - \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{S} = 0$$

si y solo si

$$S = \frac{\alpha}{\beta}.$$

que es donde se alcanza el pico de infectados y se anula la derivada de I . De este modo podremos aplicar el teorema de la función implícita cuando $S \neq \frac{\alpha}{\beta}$ y, para este caso, se tendrá:

$$\frac{\partial S}{\partial I} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial I}}{\frac{\partial F}{\partial S}} = \frac{-1}{1 - \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{S}}.$$

A continuación daremos una expresión de S en función de I para valores de S distintos de $\frac{\alpha}{\beta}$, y para ello utilizaremos la función de Lambert, introducida en la sección 1.3 del capítulo anterior.

Partimos de la expresión implícita $F(I, S) = 0$

$$F(I, S) = I + S - N - \frac{\alpha}{\beta} \ln \frac{S}{S_0} = 0.$$

Desglosando el logaritmo de la división en la diferencia de logaritmos se tiene

$$I + S - N - \frac{\alpha}{\beta} \ln S + \frac{\alpha}{\beta} \ln S_0 = 0,$$

y multiplicando por $\frac{\beta}{\alpha}$ y asilando los términos con S quedará

$$\frac{\beta}{\alpha} S - \ln S = \frac{\beta}{\alpha} (N - I) - \ln S_0.$$

A continuación cambiamos el signo de la ecuación y sumamos $\ln \frac{\beta}{\alpha}$ a ambos lados,

$$\ln \frac{\beta}{\alpha} + \ln S - \frac{\beta}{\alpha} S = \frac{\beta}{\alpha} (I - N) + \ln S_0 + \ln \frac{\beta}{\alpha},$$

y agrupamos la suma de logaritmos en el logaritmo del producto,

$$\ln \frac{\beta}{\alpha} S - \frac{\beta}{\alpha} S = \frac{\beta}{\alpha} (I - N) + \ln \frac{\beta}{\alpha} S_0.$$

Finalmente aplicamos la exponencial y obtenemos

$$-\frac{\beta}{\alpha} S e^{-\frac{\beta}{\alpha} S} = -e^{\frac{\beta}{\alpha} (I - N) + \ln \frac{\beta}{\alpha} S_0}.$$

Así, para $w = -\frac{\beta}{\alpha}S$ y $z = -e^{\frac{\beta}{\alpha}(I-N)+\ln\frac{\beta}{\alpha}S_0}$, la expresión anterior es precisamente $we^w = z$, que podemos resolver utilizando la función de Lambert. De este modo, $S = -\frac{\alpha}{\beta}\mathcal{W}(-e^{\frac{\beta}{\alpha}(I-N)+\ln\frac{\beta}{\alpha}S_0})$.

Anteriormente advertimos la existencia de dos posibles soluciones siempre que $-\frac{1}{e} < z < 0$. En este caso, $z = -e^{\frac{\beta}{\alpha}(I-N)+\ln\frac{\beta}{\alpha}S_0} < 0$ para todo I y $z > -\frac{1}{e}$ si y solo si

$$-e^{\frac{\beta}{\alpha}(I-N)+\ln\frac{\beta}{\alpha}S_0} > -\frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{\frac{\beta}{\alpha}(I-N)+\ln\frac{\beta}{\alpha}S_0+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha}(I-N) + \ln\frac{\beta}{\alpha}S_0 + 1 < 0$$

Es decir, tendremos dos soluciones reales si y solo si

$$\mathcal{E}(I) := \frac{\beta}{\alpha}(I-N) + \ln\frac{\beta}{\alpha}S_0 < -1$$

Prestando atención a la derivada de esta expresión como función de I se tiene,

$$\mathcal{E}'(I) = \frac{\beta}{\alpha} \geq 0$$

para todo I . Esto quiere decir que \mathcal{E} es monótona creciente en todo I por lo que alcanzará su máximo en I_{max} , cuya expresión era 2.21. De acuerdo con esto,

$$\mathcal{E}(I_{max}) = \frac{\beta}{\alpha}(S_0 + I_0 - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \ln\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \ln S_0 - N) + \ln\frac{\beta}{\alpha}S_0,$$

teniendo en cuenta que $S_0 + I_0 - N = -R_0 = 0$

$$\frac{\beta}{\alpha}(-\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \ln\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \ln S_0) + \ln\frac{\beta}{\alpha}S_0 = -1 + \ln\frac{\alpha}{\beta} - \ln S_0 + \ln\frac{\beta}{\alpha}S_0$$

Y aplicando las propiedades del logaritmo,

$$\mathcal{E}(I_{max}) = -1 + \ln\frac{\alpha}{\beta} + \ln\frac{\frac{\beta}{\alpha}S_0}{S_0} = -1 + \ln\frac{\alpha}{\beta} + \ln\frac{\beta}{\alpha} = -1 + \ln\frac{\alpha\beta}{\beta\alpha} = -1$$

En definitiva, para $0 < I < I_{max}$ se tendrán dos soluciones dadas por

$$S = -\frac{\alpha}{\beta}\mathcal{W}_0(-e^{\frac{\beta}{\alpha}(I-N)+\ln\frac{\beta}{\alpha}S_0})$$

$$S = -\frac{\alpha}{\beta}\mathcal{W}_{-1}(-e^{\frac{\beta}{\alpha}(I-N)+\ln\frac{\beta}{\alpha}S_0})$$

y cuando se alcanza el pico de infectados, $S = -\frac{\alpha}{\beta}\mathcal{W}(-e^{-1})$, que es en efecto, $\frac{\alpha}{\beta}$.

2.8. Cálculo de S_∞

El cálculo de S_∞ es un problema muy importante desde el punto de vista epidemiológico y su obtención es otra de las aplicaciones de la función \mathcal{W} de Lambert. En esta sección veremos que podemos obtener una expresión del tipo $we^w = z$ donde el término w involucre S_∞ de manera que se pueda despejar una vez aplicada la función \mathcal{W} .

Para esto, primero expresaremos S en función de R combinando las ecuaciones 2.1 y 2.3 e integrando entre 0 y t :

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t) = -\beta S(t)\frac{R'(t)}{\alpha}$$

así,

$$\frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{\beta}{\alpha}R'(t)$$

e integrando,

$$\ln S(t) - \ln S_0 = -\frac{\beta}{\alpha}[R(t) - R_0].$$

De esta expresión podemos despejar $S(t)$ y obtenemos

$$S(t) = e^{\ln S_0 - \frac{\beta}{\alpha}[R(t) - R_0]} = S_0 e^{-\frac{\beta}{\alpha}[R(t) - R_0]}.$$

Como queremos conocer el valor de S_∞ tomamos límites cuando t tiende a ∞ en la expresión anterior

$$S_\infty = S_0 e^{-\frac{\beta}{\alpha}[R_\infty - R_0]}$$

Para continuar, el objetivo será obtener una expresión del tipo $we^w = z$ y de este modo poder aplicar la función \mathcal{W} . Para ello, reescribiremos la ecuación anterior teniendo en cuenta que $I_\infty = 0$ y por tanto $S_\infty = N - I_\infty - R_\infty = N - R_\infty$:

$$N - R_\infty = S_0 e^{-\frac{\beta}{\alpha}[R_\infty - R_0]}$$

equivalentemente,

$$N - R_\infty = S_0 e^{-\frac{\beta}{\alpha}[R_\infty - N + N - R_0]} = S_0 e^{-\frac{\beta}{\alpha}[R_\infty - N]} e^{-\frac{\beta}{\alpha}[N - R_0]}$$

multiplicando por $-\frac{\beta}{\alpha}$,

$$\frac{\beta}{\alpha}[R_{\infty} - N] = -\frac{\beta}{\alpha}S_0e^{-\frac{\beta}{\alpha}[R_{\infty}-N]}e^{-\frac{\beta}{\alpha}[N-R_0]}$$

y finalmente:

$$\frac{\beta}{\alpha}[R_{\infty} - N]e^{\frac{\beta}{\alpha}[R_{\infty}-N]} = -\frac{\beta}{\alpha}S_0e^{-\frac{\beta}{\alpha}[N-R_0]}$$

Ahora podemos aplicar la función de Lambert y quedará

$$\frac{\beta}{\alpha}[R_{\infty} - N] = \mathcal{W}\left(-\frac{\beta}{\alpha}S_0e^{-\frac{\beta}{\alpha}[N-R_0]}\right)$$

y finalmente,

$$S_{\infty} = -\frac{\alpha}{\beta}\mathcal{W}\left(-\frac{\beta}{\alpha}S_0e^{-\frac{\beta}{\alpha}[N-R_0]}\right).$$

Capítulo 3

Ejemplos y aspectos novedosos

En este capítulo veremos dos ejemplos que apoyarán los resultados obtenidos hasta ahora y que permitirán comprender la aplicación real del modelo SIR. En la última sección se expone, de forma introductoria, el tema de los gemelos digitales para conocer su aplicación a los modelos de epidemias, concretamente al modelo SIR.

3.1. Ejemplos

3.1.1. Caso ficticio

En esta primera sección veremos un caso ficticio que facilite la comprensión del modelo y la interpretación de las gráficas que se obtengan. En primer lugar, consideremos las variables poblacionales como fracciones del total. De este modo, N será igual a 1 y S , I y R , cantidades entre 0 y 1.

En el capítulo anterior ya se ha visto que, para ciertas condiciones iniciales, i.e., $S(0) = S_0 \geq 0$, $I(0) = I_0 \geq 0$ y $R(0) = R_0 \geq 0$, el modelo SIR tiene una única solución de manera que $S(t) + I(t) + R(t) = 1$ para todo $t \geq 0$. Supongamos los siguientes valores iniciales:

$$\begin{cases} S_0 = 0,99 \\ I_0 = 0,01 \\ R_0 = 0 \end{cases}$$

Además, supongamos que el período infeccioso de la enfermedad son 3 días, por lo que la tasa de recuperación es $\alpha = 1/3$. Y por último, a la tasa de contagio le daremos el valor $\beta = 1/2$. Así se tendrá el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} S' = -\frac{1}{2}SI \\ I' = \frac{1}{2}SI - \frac{1}{3}I \\ R' = \frac{1}{3}I \end{cases}$$

Usando MATLAB es posible calcular la solución del sistema de forma numérica y representarla gráficamente como se ve en la Figura 3.1. Ahí se muestra la evolución de los tres grupos poblacionales: Los Susceptibles en azul, los Infectados en rojo y los Recuperados en amarillo. Vemos que, de acuerdo a lo dicho en el capítulo anterior, el número de Infectados tiende a 0, y las poblaciones de Susceptibles y Recuperados se estabilizan en algún valor entre 0 y 1.

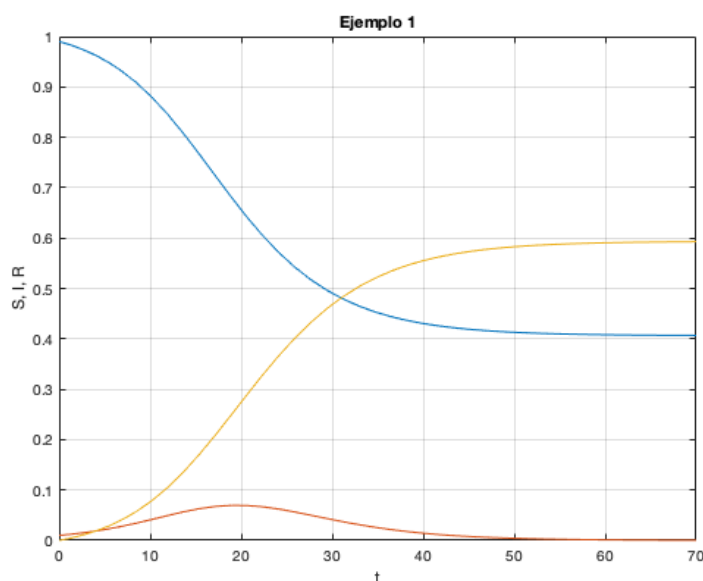


Figura 3.1: Solución numérica

También se aprecia el pico de infectados, que en este caso es

$$I_{max} = 0,99 + 0,01 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \ln \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \ln 0,99 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\ln \frac{200}{297} \right) \approx 0,0697$$

Recordemos que es posible escribir I en función de S como vimos al desarrollar la ecuación 2.20. La siguiente expresión describe la órbita de soluciones del problema en el plano (S, I) , representada en la Figura 3.2.

$$I = 1 - S + \frac{2}{3} \ln \frac{S}{0,99}.$$

Pero a su vez, también es posible escribir S en función de I , como vimos en la sección 2.7,

gracias a la función de Lambert. Las dos ramas de la gráfica de esa expresión (ver 3.3) vienen dadas por las ecuaciones siguientes:

$$S = -\frac{2}{3}\mathcal{W}_0\left(-e^{\frac{3}{2}(I-1)+\ln\frac{297}{200}}\right)$$

$$S = -\frac{2}{3}\mathcal{W}_{-1}\left(-e^{\frac{3}{2}(I-1)+\ln\frac{297}{200}}\right)$$

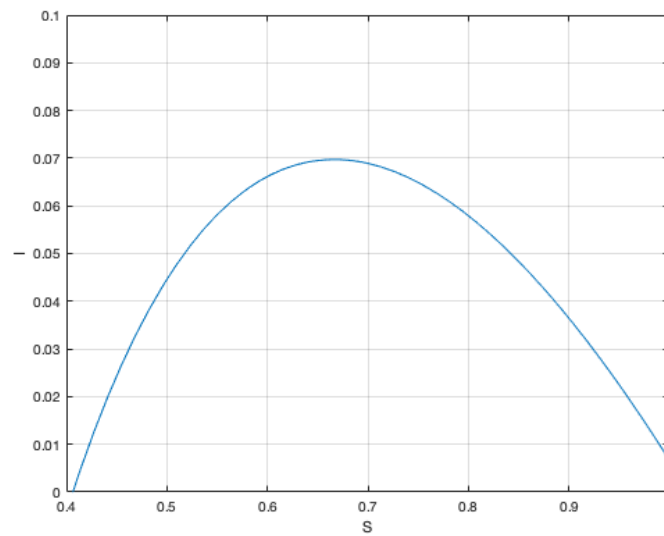


Figura 3.2: I en función de S

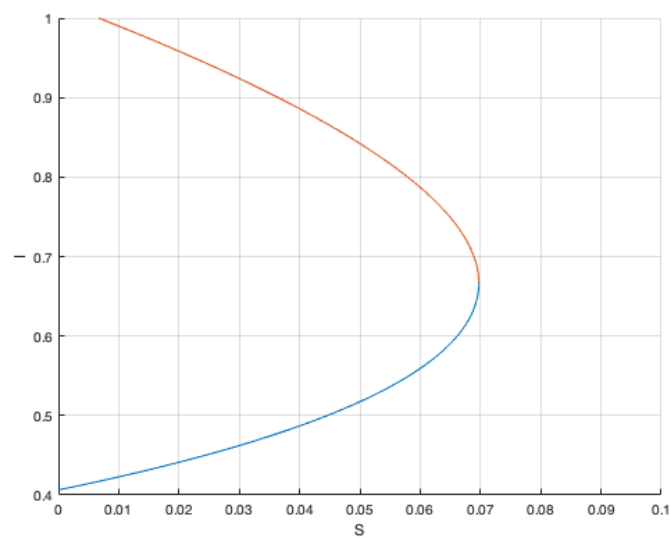


Figura 3.3: S en función de I

3.1.2. COVID-19 en la zona sanitaria de A Coruña y Cee

En esta ocasión se tratará un caso real y de tremenda actualidad: la pandemia del Covid-19. Cuando una enfermedad se extiende por una porción especialmente grande de la población, adquiere la calidad de epidemia; y el fenómeno en el que una epidemia se extiende por numerosos países de los 5 continentes, adquiriendo gran relevancia a nivel mundial, se conoce como pandemia. Esto es lo que ha sucedido en los últimos años con el virus SARS-CoV-2. Los primeros casos se detectan en diciembre de 2019 en la ciudad de Wuhan, China. Al virus le llevó muy poco tiempo extenderse por la población china y, no mucho más, aparecer en otros países hasta que, finalmente, el 4 de marzo de 2020 se confirma el primer caso en Galicia.

Para el análisis se usará la base de datos del SERGAS [10] y se tomarán los datos de los meses desde marzo de 2020 hasta marzo del 2021. Nuestro estudio comenzará el día 15 de marzo de 2020, donde los datos recogen la cifra de 65 infectados, por lo que $I_0 = 65$. El número de habitantes en la zona sanitaria de A Coruña es 546977, y sabemos que $R_0 = 0$ y por tanto $I_0 + S_0 = N$. Por último conocemos el número de casos acumulados hasta marzo de 2021, $R_\infty = 24288$, por lo que también conocemos $S_\infty = N - R_\infty$. En resumen, $N = 546977$, $S_0 = 546912$, $I_0 = 65$, $R_0 = 0$ y $S_\infty = 522689$.

Estimemos los parámetros como se hizo en la sección 2.5, a partir de la relación del tamaño final 2.19,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{N - S_\infty}{\ln S_0 - \ln S_\infty} = \frac{546977 - 522689}{\ln 546912 - \ln 522689} = 536143,9$$

Respecto al período infeccioso de la enfermedad, hay opiniones variadas que se mueven en el intervalo de 10 y 14 días. Suponiendo que el período infeccioso es de 10 días, $\alpha = 0,1$ y $\beta = 1,87 \times 10^{-7}$. Finalmente, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} S' = -1,87 \times 10^{-7} \cdot SI \\ I' = 1,87 \times 10^{-7} \cdot SI - 0,1 \cdot I \\ R' = 0,1 \cdot I \end{cases}$$

con condiciones iniciales $S_0 = 546912$, $I_0 = 65$, $R_0 = 0$.

La solución numérica se ve en la Figura 3.4. En la figura 3.5 se muestra con más detalle la curva de la población de Infectados en función del tiempo y puede apreciarse el pico de infectados, que en este caso es:

$$I_{max} = 546912 + 65 - 536143,9 + 536143,9 \ln(536143,9) - 536143,9 \ln(546912) \approx 171,7087$$

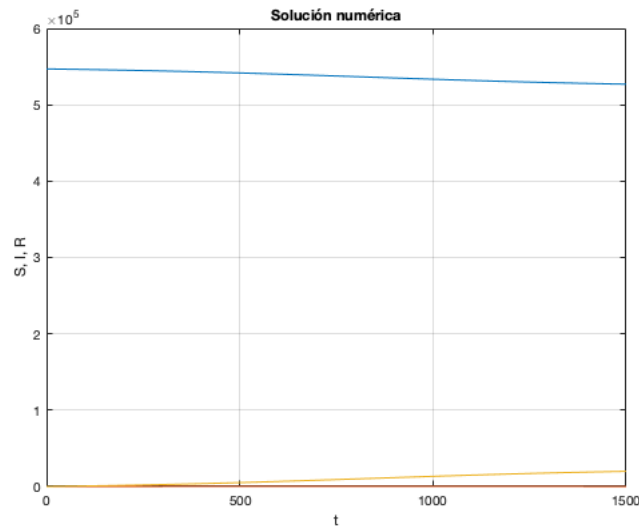


Figura 3.4: Solución numérica

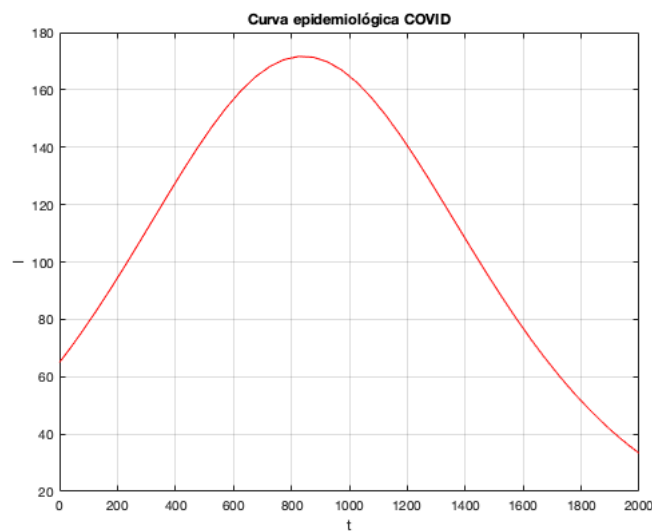


Figura 3.5: Curva epidemiológica del COVID

3.2. Gemelos digitales

Actualmente, vivimos en un contexto de transformación digital donde la tecnología está integrada en muchas áreas de conocimiento y procesos industriales. En este último capítulo se introducirá el tema de gemelos digitales (*Digital Twins*, DT) y su aplicación a los modelos de epidemias, basándonos en el estudio realizado por Iván Area, Juan J. Nieto y F. Adrián Fernández, recogido en el artículo [11].

En esencia, un gemelo digital es una copia de un objeto físico o proceso real que existe en el ordenador y que ayuda a entender y optimizar el comportamiento del objeto real. La principal diferencia entre un DT y un modelo matemático clásico son las interacciones bilaterales a tiempo real entre el avatar y el objeto real. De este modo, un DT nos permite obtener un modelo más preciso para comprender y predecir mejor el comportamiento del sistema y así configurar el objeto real de forma adecuada y obtener procesos más eficientes.

Ahora bien, ¿de qué manera se pueden aplicar los gemelos digitales en el estudio de las epidemias? En un modelo matemático clásico, las derivadas se pueden sustituir por derivadas de Stieltjes. Este enfoque es de gran utilidad cuando el sistema de ecuaciones diferenciales tiene impulsos o períodos de latencia, que es precisamente el caso cuando se trata de modelos epidemiológicos. A medida que avanza una epidemia, los parámetros van cambiando y los impulsos de los que hablamos pueden entenderse como las correcciones que se hacen en el modelo original para considerar los nuevos datos.

De este modo, el modelo digital de un modelo SIR se puede construir de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t}(t, t_s) = -\beta(t_s)S(t, t_s)I(t, t_s), \\ \frac{\partial I}{\partial t}(t, t_s) = \beta(t_s)S(t, t_s)I(t, t_s) - \alpha(t_s)I(t, t_s), \\ \frac{\partial R}{\partial t}(t, t_s) = \alpha(t_s)I(t, t_s), \end{cases}$$

donde t y t_s son respectivamente el tiempo del sistema y otra variable que podemos llamar “tiempo lento”. Podemos considerar esta nueva variable temporal como una mucho más lenta que t a través de la cual se ven reflejados los ciclos de la epidemia. De esta forma, los cambios que sufran los parámetros α y β , que ahora dependen de t_s , se verán reflejados en el modelo.

Anexo I

Tabla de datos de la peste en Eyam

Mes (1666)	S	I
Julio 3/4	235	14.4
Julio 19	201	22
Agosto 3/4	153.5	29
Agosto 19	121	21
Septiembre 3/4	108	8
Septiembre 19	97	8
Octubre 3/4	desconocido	desconocido
Octubre 19	83	0

Cuadro I.1: Datos epidemia en Eyam

Bibliografía

- [1] Nieto Roig, J.J., (2013). Modelos matemáticos de las epidemias, páginas 67-79 del Capítulo 2 de *Las matemáticas del planeta Tierra*. FECYT, Madrid. <https://www.fecyt.es/es/publicacion/unidad-didactica-matematicas-del-planeta-tierra>
- [2] Bacaër, N. (2011). *A short history of mathematical population dynamics*. Springer-Verlag, London.
- [3] Fernández, C., Vagas Montaner, J.M. (1992). *Ecuaciones diferenciales: Ecuaciones lineales*. Pirámide, Madrid.
- [4] Brauer, F., Castillo-Chavez, C., Feng, Z. (2019). *Mathematical models in epidemiology*. Springer-Verlag, New York.
- [5] Rodríguez, J. C., Muñoz, J. M. S. (2022). Una introducción de la función de Lambert para bachillerato y primeros cursos universitarios de Cálculo. *Lecturas matemáticas*, 43(2), 91-109.
- [6] Fernández, C., Vagas Montaner, J.M. (1992). *Ecuaciones diferenciales: Ecuaciones no lineales*. Pirámide, Madrid.
- [7] Srivastava, H. M., Area, I., Nieto, J. J. (2021). Power-series solution of compartmental epidemiological models. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 18(4), 3274-3290. <https://www.aimspress.com/article/doi/10.3934/mbe.2021163>
- [8] Somoza, L., Los Teoremas de la Función Implícita y de la Inversa. (2019). Diferenciación de funciones de varias variables reais. Universidad de Santiago de Compostela. https://cv.usc.es/pluginfile.php/580603/mod_resource/content/4/tema7.pdf (Mayo, 2023)
- [9] Apuntes de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria http://www2.ulpgc.es/hege/almacen/download/7082/7082944/trans_tema_4.pdf
- [10] SERGAS. *Datos coronavirus*. <https://coronavirus.sergas.gal/datos/#/gl-ES/coruna> (Mayo, 2023)

- [11] Area, I., Fernández, F.J., Nieto, J. J., Fernández, F.A. (2022). Concept and solution of digital twin based on a Stieltjes differential equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(12), 7239-7933. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/mma.8252>