



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

La derivada de Stieltjes y sus espacios de funciones

Carlos Villanueva Mariz

2021–2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

La derivada de Stieltjes y sus espacios de funciones

Carlos Villanueva Mariz

7/22

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Análisis Matemático

Título: La derivada de Stieltjes y sus espacios de funciones

Director: Fernando Adrián Fernández Tojo

Breve descripción del contenido

La teoría de derivadas de Stieltjes y su aplicación a las ecuaciones diferenciales fue desarrollada con detalle recientemente en [15]. Este trabajo tiene como objetivo estudiar la definición y propiedades básicas de la derivada de Stieltjes, sus espacios de funciones, y otros conceptos relacionados con la misma.

Índice general

Resumen	III
1. Introducción	1
2. Preliminares	3
3. Derivadores	5
4. g-topologías	9
4.1. Construcción y propiedades	9
4.2. Compacidad en $\mathcal{B}\mathcal{C}_g([a, b])$	15
5. Teoría de la medida	19
5.1. Medidas de Lebesgue-Stieltjes	19
5.2. El teorema de Kolmogorov-Riesz en $L_g^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	27
6. La derivada de Stieltjes	33
6.1. Definición y propiedades	33
6.2. Teorema fundamental del cálculo y espacios de funciones g-derivables	36
7. Aplicaciones	45
8. Apéndice	49

Resumen

La idea de la derivada de Stieltjes consiste en diferenciar con respecto a una función creciente y continua por la izquierda $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sustituyendo los cocientes $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ por $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}$. La existencia de un teorema fundamental del cálculo permite considerar problemas diferenciales con derivadas de Stieltjes, que unifican diversos tipos de ecuaciones diferenciales.

Abordar estas cuestiones requiere estudiar generalizaciones similares de la topología usual de \mathbb{R} y la medida de Lebesgue. Además de lo estrictamente necesario para la teoría de la derivada de Stieltjes, se expondrán otros aspectos interesantes de dichas generalizaciones y algunos resultados originales.

Abstract

The idea of the Stieltjes derivative consists in differentiating with respect to a nondecreasing and left-continuous function $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, swapping the quotients $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ for $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}$. The existence of a fundamental theorem of calculus enables the formulation of differential problems with Stieltjes derivatives, which unify several kinds of differential equations.

Studying these topics requires analysing similar generalizations of the usual topology in \mathbb{R} and the Lebesgue measure. Besides the strictly necessary tools for the theory of Stieltjes derivatives, other interesting aspects of said generalizations will be considered, including some original results.

1. Introducción

La derivada de Stieltjes se define como la derivada con respecto a otra función, llamada derivador. Más concretamente, si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente y continua por la izquierda, la derivada de Stieltjes de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $t \in \mathbb{R}$ vendrá dada, con ciertos matices, por

$$f'_g(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(s) - f(t)}{g(s) - g(t)} \text{ si } g \text{ es continua en } t,$$
$$f'_g(t) = \lim_{s \rightarrow t^+} \frac{f(s) - f(t)}{g(s) - g(t)} \text{ si } g \text{ es discontinua en } t.$$

Aunque conceptos parecidos habían sido estudiados con anterioridad, en [17] se demuestra que las EDO, las ecuaciones con escalas de tiempo y las ecuaciones diferenciales con impulsos son un caso particular de problemas diferenciales con derivadas de Stieltjes. Además, estos últimos son útiles en la modelización de procesos en los que la característica estudiada presenta cambios bruscos a lo largo del tiempo (un ejemplo ilustrativo que figura en [15] estudia la reproducción de los gusanos de seda). Desarrollar una teoría para esta derivada, y especialmente plantear un teorema fundamental del cálculo, requiere detenerse en otras construcciones (topología y medida) asociadas al derivador.

En el Capítulo 2 se recogen diversos resultados y conceptos previos.

En el Capítulo 3 se definen los derivadores, objeto aparentemente sencillo, pero cuyas propiedades determinarán la naturaleza del resto de construcciones.

La g -continuidad jugará el papel, de forma menos directa que en el caso usual, de "derivada cero". Para estudiarla, en el Capítulo 4 se introducen las g -topologías, que no son más que topologías inducidas por una pseudométrica. Posteriormente se muestran resultados de compacidad en espacios de funciones g -continuas, que reaparecerán en el último capítulo para demostrar la existencia de solución de problemas con derivadas de Stieltjes. Como resultados originales se incluyen la relación entre g -continuidad y g -continuidad uniforme y una demostración completa de la segunda numerabilidad de las g -topologías.

Una de las motivaciones originales de esta derivada consiste en dotar a la integral de Lebesgue-Stieltjes de un teorema fundamental del cálculo (aunque el trabajo sigue más bien el camino inverso). A ella se dedica la primera mitad del Capítulo 5; en la segunda se combinan varios resultados para adaptar a este contexto el teorema de Kolmogorov-Riesz sobre compacidad en $L^p(\mathbb{R})$.

En el Capítulo 6 se introduce finalmente la derivada de Stieltjes. Haciendo uso de lo desarrollado anteriormente, se analizan sus propiedades y se presentan algunos de sus espacios de funciones. Como novedades, cabe destacar la demostración de una propiedad análoga a la lipschitzianidad para las funciones de $\mathcal{B}\mathcal{C}_g^1([a, b])$ y una posible forma de dotar de estructura a $\mathcal{B}\mathcal{D}_g([a, b])$ (otro espacio más problemático).

Para finalizar, en el Capítulo 7 se lleva a cabo una breve introducción a las ecuaciones diferenciales con derivadas de Stieltjes, las cuales requieren herramientas de todos los capítulos anteriores.

2. Preliminares

En esta sección figuran una serie de definiciones y resultados que se manejarán a lo largo del trabajo. El primer grupo de ellas cobrará importancia en la demostración de la segundo numerabilidad de las g -topologías (Proposición 4.12), mientras que el último involucra conceptos importantes sobre espacios métricos, normados, y de compacidad en los mismos. Se incluye entre uno y otro la definición de función de variación acotada.

Definición 2.1. La topología generada por la base $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, se llama *topología de Sorgenfrey*.

Definición 2.2. Un *espacio Lindelöf* es un espacio topológico en el que cualquier recubrimiento abierto admite un subrecubrimiento numerable. Si cualquier subespacio de un espacio topológico X es Lindelöf, X se dice *Lindelöf hereditario*.

La demostración de los dos siguientes resultados puede consultarse en [16, pg. 79], y con mayor detalle en [2].

Lema 2.3. Un espacio topológico X es Lindelöf hereditario si y solo si dada cualquier familia de abiertos \mathcal{U} existe $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ numerable tal que $\bigcup_{V \in \mathcal{U}_0} V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.

Proposición 2.4. \mathbb{R} con la topología usual y con la de Sorgenfrey es Lindelöf hereditario.

Pasemos ahora a las funciones de variación acotada. Dado un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, denotaremos por $\mathcal{F}(I)$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de I .

Definición 2.5. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que g es de *variación acotada* si

$$V(g, I) := \sup_{S \in \mathcal{F}(I)} \sum_{k=0}^{n-1} |g(s_{k+1}) - g(s_k)| < \infty,$$

donde $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ y $s_1 < s_2 < \dots < s_n$. $V(g, I)$ recibe el nombre de *variación total*.

Por último, los preliminares de espacios métricos.

Definición 2.6. Una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio métrico (M, d) se dice de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_j, f_k) < \varepsilon$, para cualesquiera $j, k \geq N$.

Definición 2.7. Un espacio métrico (M, d) se dice *completo* si cualquier sucesión de Cauchy es convergente en M .

Definición 2.8. Un espacio vectorial normado $(V, \|\cdot\|)$ que sea completo con la distancia inducida por la norma se denomina *espacio de Banach*.

Definición 2.9. Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que $U \subset X$ es *relativamente compacto* si \overline{U} es compacto.

Definición 2.10. Sea (M, d) un espacio métrico. $U \subset M$ se dice *totalmente acotado* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $F_\varepsilon \subset U$ tal que $U \subset \bigcup_{x \in F_\varepsilon} B_M(x, \varepsilon)$. F_ε recibe el nombre de ε -red.

Proposición 2.11 ([6, Theorem 7.5]). Sea (M, d) un espacio métrico, $A \subset M$. Son equivalentes:

- (1) A es totalmente acotado.
- (2) Toda sucesión en A tiene una subsucesión de Cauchy.

Si además (M, d) es completo, las anteriores son equivalentes a

- (3) A es relativamente compacto.

Definición 2.12. Sean V, W espacios normados. $T : V \rightarrow W$ se dice *compacto* si $T(U)$ es relativamente compacto para todo U acotado.

Teorema 2.13 (del punto fijo de Schauder [5, pg. 136]). Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $K \subset X$ cerrado, acotado, convexo y no vacío. Entonces, cualquier operador continuo $T : K \rightarrow K$ tal que $T(K)$ está contenido en un subconjunto compacto de K tiene al menos un punto fijo.

3. Derivadores

Introducimos a continuación uno de los conceptos centrales del trabajo, el de derivador, y también la definición de sus conjuntos distinguidos y su descomposición en parte continua y de salto. Esta sección resume contenido de [8], añadiendo algunos ejemplos y generalizando la definición de pseudoinversa.

Definición 3.1 (Derivador). Una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua por la izquierda y creciente recibirá el nombre de *derivador*.

Denotando por $g(t^+)$ el límite por la derecha de g en t , definimos para tales funciones los conjuntos

$$D_g := \{t \in \mathbb{R} : g(t^+) - g(t) > 0\},$$

$$C_g := \{t \in \mathbb{R} : g \text{ es constante en } (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \text{ para algún } \varepsilon > 0\}.$$

Es decir, D_g es el conjunto de discontinuidades del derivador (numerable, por ser g creciente) y C_g el conjunto de puntos contenidos en el interior de un intervalo en el que g es constante. Por definición, C_g es abierto, y podemos escribir $C_g = \bigcup_{n \in \Lambda} (a_n, b_n)$, donde Λ es numerable y la unión es disjunta (los intervalos son las componentes conexas de C_g). Denotaremos $N_g^- := \{a_n\}_{n \in \Lambda} \setminus D_g$, $N_g^+ := \{b_n\}_{n \in \Lambda} \setminus D_g$ y $N_g := N_g^- \cup N_g^+$; si $t \in \mathbb{R}$, $\Delta^+ g(t) = g(t^+) - g(t)$ es el salto de g en t .

Definición 3.2 (Parte continua y parte de salto). Dado un derivador g , definimos $g^B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g^B(t) := \begin{cases} \sum_{s \in [0, t) \cap D_g} \Delta^+ g(s), & t > 0, \\ - \sum_{s \in [t, 0) \cap D_g} \Delta^+ g(s), & t \leq 0, \end{cases}$$

que es continua por la izquierda y creciente. También lo es la aplicación $g^C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ obtenida como

$$g^C(t) := g(t) - g^B(t).$$

Nos referiremos a g^C y g^B como las partes *continua* y de *salto*, respectivamente, asociadas a g .

Veamos varios ejemplos de derivadores, sus conjuntos distinguidos y sus descomposiciones.

Ejemplo 3.3. (1) Sea $g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g_1(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0], \\ 1, & x \in (0, 1], \\ x, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

En este caso,

- $D_{g_1} = \{0\}$, $C_{g_1} = (0, 1)$, $N_{g_1}^+ = \{1\}$ y $N_{g_1}^- = \emptyset$.
- Las partes continua y de salto de g_1 satisfacen

$$g_1^B(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ 1, & x \in (0, \infty), \end{cases} \quad g_1^C(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0], \\ 0, & x \in (0, 1], \\ x-1, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

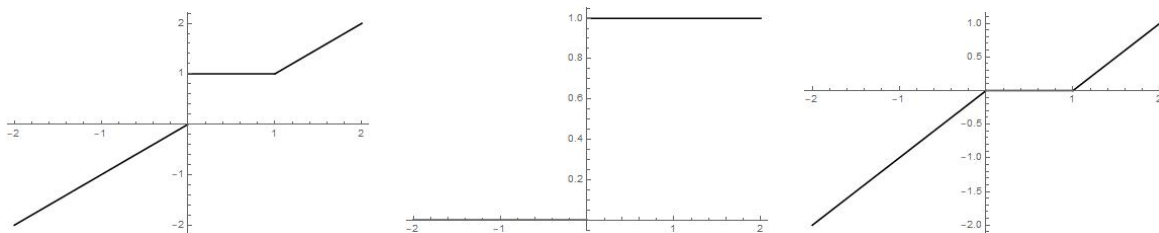


Fig. 3.1. Gráficas de g_1 , g_1^B y g_1^C , respectivamente.

(2) Sea $C \subset [0, 1]$ el conjunto de Cantor. $U = [0, 1] \setminus C$ es abierto, así que puede expresarse como $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$, donde la unión es disjunta. Consideremos la función dada por

$$g_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n}, & x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c_n}{3^n} \in C \text{ con } c_n \in \{0, 1\}, \\ \sup_{y \leq x, y \in C} g_2(y), & x \in [0, 1] \setminus C, \\ 1, & x \in (1, \infty), \end{cases}$$

que no es más que la extensión a \mathbb{R} de la función de Cantor. Entonces,

- $D_{g_2} = \emptyset$, $C_{g_2} = (-\infty, 0) \cup U \cup (1, \infty)$, $N_{g_2}^+ = \{0\} \cup \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $N_{g_2}^- = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{1\}$.
- Como g_2 es continua en \mathbb{R} , $g_2^C(t) = g_2(t)$ y $g_2^B(t) = 0$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$.

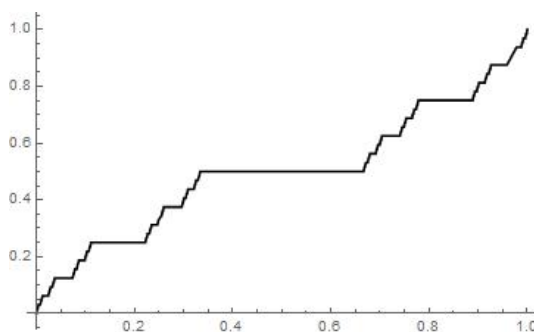


Fig. 3.2. Representación de la función de Cantor.

(3) Supongamos que $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$, y sea $g_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma:

$$g_3(x) = \begin{cases} x + \sum_{q_n \in [0,x) \cap \mathbb{Q}} 2^{-n}, & x > 0, \\ x - \sum_{q_n \in [x,0) \cap \mathbb{Q}} 2^{-n}, & x \leq 0. \end{cases}$$

Esta función es estrictamente creciente y continua por la izquierda. Además,

- $D_{g_3} = \mathbb{Q}$, $C_{g_3} = N_{g_3}^+ = N_{g_3}^- = \emptyset$.

- g_3^B satisface

$$g_3^B(x) = \begin{cases} \sum_{q_n \in [0,t) \cap \mathbb{Q}} 2^{-n}, & x > 0, \\ - \sum_{q_n \in [t,0) \cap \mathbb{Q}} 2^{-n}, & x \leq 0, \end{cases}$$

y $g_3^C(x) = x$. Derivadores como este, con un conjunto denso de discontinuidades, complican considerablemente el estudio sistemático de muchas propiedades (como por ejemplo la caracterización de las funciones de g -derivada cero, que se abordará con ciertas restricciones en el Capítulo 6).

Para finalizar se exponen la definición y propiedades de la pseudoinversa de g^C , que tendrá un papel importante en la descomposición de la medida de Stieljes asociada a g , y en la adaptación del teorema de Kolmogorov-Riesz a $L_g^p(\mathbb{R})$ (ver Sección 5.2).

Definición 3.4 (Pseudoinversa de g^C). Dado un intervalo $[a, b]$ y un derivador $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos la pseudoinversa de la parte continua g^C en el intervalo $[g^C(a), g^C(b)]$ como

$$\gamma : x \in [g^C(a), g^C(b)] \rightarrow \gamma(x) = \min \{t \in [a, b] : g^C(t) = x\} \in [a, b].$$

Ejemplo 3.5. Recordemos que para la función de Cantor, $g_2(x) = g^C(x)$ si $x \in [0, 1]$. Teniendo en cuenta que g_2 es constante en las componentes conexas de $[0, 1] \setminus C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$, $\gamma : [0, 1] \rightarrow$

$[0, 1]$ viene dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} a_n, & \{t\} = g_2((a_n, b_n)), \\ x, & t = g_2(x) \text{ con } x \in C. \end{cases}$$

Proposición 3.6 ([8, Proposition 2.6]). *La pseudoinversa de g^C satisface las siguientes propiedades:*

- Para todo $x \in [g^C(a), g^C(b)]$, $g^C(\gamma(x)) = x$.
- Para todo $t \in [a, b]$, $\gamma(g^C(t)) \leq t$.
- Para todo $t \in [a, b] \setminus (C_g \cup N_{g^C}^+)$, $\gamma(g^C(t)) = t$.
- γ es estrictamente creciente.
- γ es continua por la izquierda en todo punto, y continua en $x \in [g^C(a), g^C(b)] \setminus g^C(C_g)$.

Podemos definir la pseudoinversa en todo $g^C(\mathbb{R})$ como $\gamma(x) := \min \{t \in \mathbb{R} : g^C(t) = x\}$ siempre que no exista $t \in \mathbb{R}$ con g^C constante en $(-\infty, t]$ y $g(t) < g(s)$ si $t < s$ (ya que el conjunto $\{s \in \mathbb{R} : g^C(s) = g^C(t)\}$ no estaría acotado inferiormente). Cuando esto suceda, podría escogerse $\gamma(g^C(t)) := t$, pero se evitará esta situación en la demostración del Teorema 5.31, en el que la pseudoinversa juega un papel importante. Fuera de este caso problemático, las propiedades de la Proposición 3.6 siguen siendo ciertas.

4. g -topologías

Los primeros espacios asociados a un derivador que consideraremos son los de funciones g -continuas (Definición 4.6). Aunque la relación entre la g -continuidad y la g -derivabilidad es más complicada que en el caso usual (es decir, con g igual a la identidad), estas consideraciones topológicas serán necesarias para la construcción de espacios de funciones g -derivables con buen comportamiento. Combinando información de [15] y [1], se estudiarán propiedades de las funciones g -continuas y las g -topologías; en la segunda parte se exponen diversos resultados de tipo Ascoli-Arzelà, que serán relevantes a la hora de demostrar la existencia de solución de ecuaciones diferenciales con derivadas de Stieljes.

4.1. Construcción y propiedades

Definición 4.1 (g -topología). Si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un derivador, la topología generada sobre \mathbb{R} por los conjuntos

$$B_g(x, r) := \{y \in \mathbb{R} : |g(y) - g(x)| < r\} = g^{-1}((g(x) - r, g(x) + r)), \quad x \in \mathbb{R}, r > 0, \quad (4.1)$$

recibe el nombre de g -topología, y la denotaremos por τ_g . Equivalentemente, podemos definirla como la topología determinada por la pseudométrica

$$\rho(x, y) = |g(x) - g(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

en la cual las bolas abiertas son de la forma (4.1).

Observación 4.2. Si $U \in \tau_{usual}$, $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$, luego

$$g^{-1}(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}((a_n, b_n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{g(x) \in (a_n, b_n) \\ (g(x) - r_x, g(x) + r_x) \subset (a_n, b_n)}} g^{-1}((g(x) - r_x, g(x) + r_x)),$$

es decir, τ_g es la menor topología que hace que la aplicación $g : (\mathbb{R}, \tau_g) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{usual})$ sea continua. Por tanto, la topología generada por la pseudométrica de g coincide con su topología inicial.

Definición 4.3 (g -continuidad). Una función $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es g -continua en un punto $t \in A$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$ para todo $s \in A$ cumpliendo $|g(t) - g(s)| < \delta$.

Si f es g -continua en todo punto $t \in A$, decimos que es g -continua en A . Si δ no depende de t , f es g -uniformemente continua.

El siguiente resultado aporta información sobre las propiedades de las funciones g -continuas.

Proposición 4.4 ([9, Proposition 3.2]). Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es g -continua, se cumple que

- (1) f es continua por la izquierda en todo punto $t_0 \in (a, b]$,
- (2) si g es continua en $t_0 \in (a, b]$, también lo es f ,
- (3) f es constante en cualquier intervalo $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ en el que g lo sea.

Al contrario de lo que sucede en el caso usual, las funciones g -continuas no tienen porqué estar acotadas. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.5. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$g(t) = \begin{cases} t, & t \leq 0, \\ t + 1, & t > 0, \end{cases}$$

y $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{1}{t}, & t > 0. \end{cases}$$

La segunda función es g -continua en $[-1, 1]$, y sin embargo no está acotada en dicho intervalo. Efectivamente, si $t \neq 0$ la g -continuidad se reduce a la continuidad usual; en $t = 0$, tomando $\delta = 1/2$, $|g(t) - g(0)| < 1/2$ implica $t < 0$, y por tanto $|f(t) - f(0)| = 0 < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$.

Definición 4.6. $\mathcal{C}_g([a, b], \mathbb{R})$ es el conjunto de funciones g -continuas en $[a, b]$ con valores en \mathbb{R} . Se define $\mathcal{B}\mathcal{C}_g([a, b], \mathbb{R})$ como el subconjunto de las funciones acotadas de $\mathcal{C}_g([a, b], \mathbb{R})$.

Otra conclusión que se extrae del Ejemplo 4.5 es que las funciones g -continuas en un intervalo $[a, b]$ no son necesariamente uniformemente g -continuas; esto es consecuencia de la posible falta de compacidad de $([a, b], \tau_g)$ (ver la Sección 4.2). Sin embargo, sí existe una conexión.

Proposición 4.7. Para una función $f \in \mathcal{C}_g([a, b], \mathbb{R})$ son equivalentes

- (1) f es uniformemente g -continua,
- (2) f es reglada (existen los límites laterales en cada punto).

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Supongamos en primer lugar que f no es reglada. Al ser las funciones g -continuas continuas por la izquierda, hay al menos un punto $t \in [a, b]$ para el que no existe el

límite por la derecha. Por tanto, podemos escoger $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty \subset (t, b]$ convergentes a t tales que $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \alpha > 0$. Como g es reglada (por ser creciente), $|g(x_n) - g(y_n)| \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, y concluimos que f no es g -uniformemente continua.

(2) \Rightarrow (1) Supongamos ahora que f es reglada, y sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ fijado.

- Si $t \in [a, b] \setminus D_g$, existe $\delta_t > 0$ con $|f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{4}$ si $|g(s) - g(t)| < \delta_t$, y por la continuidad de g en t , existe también $\eta(\delta_t) > 0$ con $|g(s) - g(t)| < \delta_t$ para todo $s \in (t - \eta(\delta_t), t + \eta(\delta_t))$. Sea $I_t := (t - \eta(\delta_t), t + \eta(\delta_t)) \cap [a, b]$.
- Si $t \in [a, b] \cap D_g$, existe δ_t^1 con $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$ si $x, y \in (t, t + \delta_t^1)$. Existen también $\delta_t^2 > 0$ tal que $|f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{4}$ si $|g(s) - g(t)| < \delta_t^2$, y $\eta(\delta_t^2)$ con $|g(s) - g(t)| < \delta_t^2$ para $s \in (t - \eta(\delta_t^2), t]$ (ya que g es continua por la izquierda). Sea $I_t := (t - \eta(\delta_t^2), t + \delta_t^1) \cap [a, b]$.

$\{I_t\}_{t \in [a, b]}$ es un recubrimiento abierto de $([a, b], \tau_u)$, luego existe un subrecubrimiento finito $\{I_{t_i}\}_{i=1}^n \cup \{\hat{I}_{\hat{t}_j}\}_{j=1}^m$, donde $t_i \in [a, b] \setminus D_g$ y $\hat{t}_j \in [a, b] \cap D_g$. Podemos suponer, eliminando intervalos redundantes, que ninguno está contenido en la unión de los demás, y que están ordenados de modo que

$$I_i \cap I_{i+1} \neq \emptyset \text{ y } I_i \cap I_{i+k} = \emptyset \text{ si } k \geq 2. \quad (4.2)$$

Recordemos que para un intervalo I , $V(g, I)$ denota la variación total de g en I (que no tiene porqué ser cerrado, ver Definición 2.5). Consideremos

$$\delta := \min \left\{ \left\{ \frac{V(g, I_s)}{2} : s \in \{t_1, \dots, t_n, \hat{t}_1, \dots, \hat{t}_m\} \text{ y } V(g, I_s) > 0 \right\} \cup \left\{ \frac{g(\hat{t}_j^+) - g(\hat{t}_j)}{2} : j = 1, \dots, m \right\} \right\} > 0,$$

y veamos que

$$|f(s) - f(t)| < \varepsilon \text{ para todo } s, t \in [a, b], s < t \text{ tal que } |g(t) - g(s)| = V(g, [t, s]) < \delta.$$

Por definición de δ , no puede haber ningún $\hat{t}_i \in D_g$ en $[t, s)$. Existen I_{i_1}, \dots, I_{i_n} cumpliendo (4.2) tales que $t \in I_{i_1}$ y $s \in I_{i_n}$; podemos suponer también, eliminando intervalos del principio o del final, que $I_{i_2}, \dots, I_{i_{n-1}} \subset (s, t)$ (el resto de casos son más sencillos, pues involucran solamente uno o dos intervalos).

Como $|g(s) - g(t)| < \delta$, de nuevo por definición de δ , $V(g, I_{i_2}) = \dots = V(g, I_{i_{n-1}}) = 0$ y gracias a (4.2), g es constante en $\bigcup_{k=2}^{n-1} I_{i_k}$. Por ser g -continua, f también es constante en I_{i_j} , para todo $j = 2, \dots, n-1$, así que si escogemos $t_{i_j, i_{j+1}} \in I_{i_j} \cap I_{i_{j+1}}$ para $j = 1, \dots, n-1$, se verifica que

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &\leq |f(t) - f(t_{i_1})| + |f(t_{i_1}) - f(t_{i_1, i_2})| + |f(t_{i_1, i_2}) - f(t_{i_2})| \\ &\quad + \dots + |f(t_{i_{n-1}}) - f(t_{i_{n-1}, i_n})| + |f(t_{i_{n-1}, i_n}) - f(t_{i_n})| + |f(t_{i_n}) - f(s)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 0 + \dots + 0 + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 4.8. *En la Proposición 4.7, como $f \in \mathcal{C}_g([a, b], \mathbb{R})$ es continua en los puntos de $[a, b] \setminus D_g$, y continua por la izquierda en $[a, b]$, f es reglada si y solo si existen los límites por la derecha de f en los puntos de D_g .*

Proposición 4.9 ([9, Theorem 3.4]). *$(\mathcal{B}\mathcal{C}_g([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Como $\mathcal{B}\mathcal{C}_g([a, b]) \subset \mathcal{B}([a, b])$, que es un espacio de Banach con la norma del supremo, basta comprobar que $\mathcal{B}\mathcal{C}_g([a, b])$ es un subespacio cerrado.

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}\mathcal{C}_g([a, b])$ convergente a $f \in \mathcal{B}([a, b])$, y veamos que f es g -continua en $x_0 \in [a, b]$, para x_0 arbitrario (ya sabemos que f es acotada). Fijado $x_0 \in [a, b]$, si $N \in \mathbb{N}$ es tal que $\|f - f_N\|_\infty < \varepsilon/3$, podemos escoger $\delta > 0$ tal que $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3$ si $|g(x) - g(x_0)| < \delta$, y así,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \|f - f_N\|_\infty + |f_N(x) - f_N(x_0)| + \|f_N - f\|_\infty < \varepsilon$$

siempre que $|g(x) - g(x_0)| < \delta$, por lo que f es g -continua en x_0 . ■

Vayamos con algunas propiedades de las g -topologías. Los resultados relacionados con su clasificación (Proposición 4.10, Corolario 4.13 y Teorema 4.14) proceden de [1]. La segunda numerabilidad aparece demostrada con un error en [9, Proposition 2.1], y aunque este es señalado en otros artículos ([15, Remark 2.18]), no llega a ofrecerse una prueba correcta (lo que falta en esa demostración es considerar como posibles extremos de intervalos elementos de los conjuntos distinguidos del derivador).

Proposición 4.10 ([1, Proposition 3.9]). *Sean $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivadores. Entonces, g_1 es g_2 -continua si y solo si $C_{g_2} \subset C_{g_1}$ y $D_{g_1} \subset D_{g_2}$.*

Demostración. Supongamos primero que g_1 es g_2 continua. Si $t \in C_{g_2}$, entonces existe $\delta > 0$ tal que g_2 es constante en $(t - \delta, t + \delta)$. Como g_2 es constante en $[t - \delta/2, t + \delta/2]$, también lo es g_1 en ese mismo intervalo, luego $t \in C_{g_1}$.

Por otro lado, si $t \in \mathbb{R} \setminus D_{g_2}$, g_2 es continua en t . Por la g_2 -continuidad de g_1 , g_1 también es continua en ese punto, y $t \in \mathbb{R} \setminus D_{g_1}$. Así, $D_{g_1} \subset D_{g_2}$.

Imaginemos ahora que $C_{g_2} \subset C_{g_1}$ y $D_{g_1} \subset D_{g_2}$, y sea $t \in \mathbb{R}$. Demostrar que g_1 es g_2 -continua en t equivale a comprobar que para cada $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$0 \leq g_1(s) - g_1(t) < \varepsilon, \text{ para todo } s \geq t \text{ tal que } 0 \leq g_2(s) - g_2(t) < \delta_1, \quad (4.3)$$

$$0 \leq g_1(t) - g_1(s) < \varepsilon, \text{ para todo } s < t \text{ tal que } 0 \leq g_2(t) - g_2(s) < \delta_2. \quad (4.4)$$

Para comprobar que (4.3) se verifica, consideremos $A_t := \{s \in [t, +\infty) : g_2(s) = g_2(t)\}$. Si A_t no estuviese acotado superiormente, tendríamos que $g_2(s) = g_2(t)$ para todo $s \in [t, +\infty)$, en cuyo caso $(t, +\infty) \subset C_{g_2} \subset C_{g_1}$. De este modo, $g_1(s) = g_1(t)$ para todo $s \in [t, +\infty)$, y (4.3) se verifica para cualquier $\delta_1 > 0$. Si A_t estuviese acotado superiormente, podemos considerar $a_t = \sup A_t \in [t, +\infty)$. Por definición, $g_2(s) = g_2(t)$ para todo $s \in [t, a_t)$, y $g_2(s) > g_2(t)$ para cualquier $s \in (a_t, +\infty)$, gracias a lo cual $(t, a_t) \subset C_{g_2} \subset C_{g_1}$, y $g_1(s) = g_1(t)$ para $s \in [t, a_t)$. Debido a la continuidad por la izquierda de g_1 y g_2 , tenemos que $g_2(s) = g_2(t)$ y $g_1(s) = g_1(t)$ para todo $s \in [t, a_t]$.

Si $a_t \in D_{g_1}$, por hipótesis, $a_t \in D_{g_2}$, y podemos tomar $\delta_1 = g_2(a_t^+) - g_2(a_t)$. En ese caso, $\{s \geq t : 0 \leq g_2(s) - g_2(t) < \delta_1\} = [t, a_t]$, y se tiene (4.3). Si, por el contrario $a_t \notin D_{g_1}$, g_1 es continua por la derecha en a_t , y existe $\delta' > 0$ tal que

$$0 \leq g_1(s) - g_1(a_t) < \varepsilon \text{ para todo } s \geq a_t \text{ tal que } 0 \leq s - a_t < \delta', \quad (4.5)$$

así que es suficiente demostrar la existencia de $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 \leq s - a_t < \delta' \text{ para todo } s \geq a_t \text{ tal que } 0 \leq g_2(s) - g_2(a_t) < \delta_1. \quad (4.6)$$

Esto es inmediato si $a_t = t$; si $a_t > t$, basta recordar que g_1 y g_2 son constantes en $[t, a_t]$.

Gracias a la definición de a_t y la continuidad de g_2 en a_t , existe $s' \in (a_t, a_t + \delta')$ tal que $g_2(a_t) < g_2(s') < g_2(a_t + \delta')$. Tomando $\delta_1 = g_2(s') - g_2(a_t)$, tenemos la afirmación (4.6).

Para comprobar (4.4), definimos $B_t := \{s \in (-\infty, t] : g_2(s) = g_2(t)\}$. Si B_t no está acotado inferiormente, razonamos como en el primer caso. Si lo está, tomamos $b_t = \inf B_t \in (-\infty, t]$. Por definición, $g_2(s) = g_2(t)$ para todo $s \in (b_t, t]$ y $g_2(s) < g_2(t)$ para todo $s \in (-\infty, b_t)$. En particular, $(b_t, t) \subset C_{g_2} \subset C_{g_1}$, lo que garantiza que $g_1(s) = g_1(t)$ para todo $s \in (b_t, t]$ (como los derivadores pueden no ser continuos por la derecha, ya no podemos garantizar que b_t pertenezca al intervalo).

Si $b_t \in D_{g_2}$, escogiendo $\delta_2 = g_2(b_t^+) - g_2(b_t)$, se cumple que $\{s \leq t : 0 \leq g_2(t) - g_2(s) < \delta_2\} = (b_t, t]$, y se tiene (4.4). Si $b_t \notin D_{g_2}$, entonces $b_t \notin D_{g_1}$, lo que garantiza que g_1 y g_2 son constantes en $[b_t, t]$. Además, como g_1 es continua por la izquierda en b_t , existe $\delta'' > 0$ tal que

$$0 \leq g_1(b_t) - g_1(s) < \varepsilon \text{ para todo } s \leq b_t \text{ tal que } 0 \leq b_t - s < \delta'',$$

y con razonamientos análogos a los ya vistos, (4.4) también se verifica. ■

De forma análoga al caso estándar, se puede demostrar el siguiente resultado.

Proposición 4.11. *Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es g-continua si y solo si es continua la aplicación entre espacios topológicos $f : (\mathbb{R}, \tau_g) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{usual})$.*

Proposición 4.12. *El conjunto*

$$\mathcal{C} = (\{(a, b) : a \in \mathbb{Q} \cup D_g \cup N_g^+ \text{ y } b \in \mathbb{Q} \cup D_g \cup N_g^-\} \cup \{(c, d] : c \in \mathbb{Q} \cup D_g \cup N_g^+, d \in D_g\}) \cap \tau_g \quad (4.7)$$

es una base de τ_g . Por tanto, las g -topologías son segundo numerables, y además $\tau_g \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (ver la Definición 5.1).

Demostración. En primer lugar, veamos que los conjuntos de la forma $(c, d] \in \tau_g$ (con $d \in D_g$ y c cualquier número real) son unión numerable de elementos de \mathcal{C} . Si $c \in D_g$, no hay nada que demostrar, y si $c \notin D_g$ se tiene que $(c, c + 1/n) \notin C_g$ para ningún n (o de lo contrario $(c, d] \notin \tau_g$). De ello se deduce que tiene que existir una sucesión $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (c, d] \cap (\mathbb{Q} \cup D_g \cup N_g^+)$ convergente a c , y tal que $f(c_n) < f(t)$ para todo $t > c_n$. En esas condiciones, $(c_n, d] \in \mathcal{C}$, y $(c, d] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (c_n, d]$. Un razonamiento similar es válido para $(a, b) \in \tau_g$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Cualquier elemento de τ_g es unión de bolas abiertas, las cuales son siempre de la forma

$$g^{-1}((\alpha, \beta)) = \{t \in \mathbb{R} : \alpha < g(t) < \beta\}, \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta.$$

Es inmediato comprobar que $g^{-1}((\alpha, \beta)) = (a, b]$ si $b \in D_g$ y $g(b) < \beta \leq g(b^+)$, y que $g^{-1}((\alpha, \beta)) = (a, b)$ en caso contrario.

Por tanto, si $U \in \tau_g$, existen dos familias arbitrarias $\{(a_i, b_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ y $\{(a_j, b_j]\}_{j \in \mathcal{J}}$ con $b_j \in D_g$, tales que

$$U = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} (a_i, b_i) \cup \bigcup_{j \in \mathcal{J}} (a_j, b_j].$$

Tanto con la topología usual como con la de Sorgenfrey, \mathbb{R} es Lindelöf hereditario, así que ambas uniones admiten un subrecubrimiento numerable. Es decir,

$$U = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i) \cup \bigcup_{j \in J} (a_j, b_j],$$

donde $I \subset \mathcal{I}$ y $J \subset \mathcal{J}$ son numerables. Así, U es unión numerable de conjuntos que a su vez son unión numerable (por lo demostrado al principio) de elementos de \mathcal{C} , y hemos terminado. ■

Corolario 4.13. *Si $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son derivadores, teniendo en cuenta la Observación 4.2, la Proposición 4.10 y la proposición anterior, las siguientes condiciones son equivalentes*

- (1) g_1 es g_2 -continua y g_2 es g_1 -continua.
- (2) $C_{g_2} = C_{g_1}$ y $D_{g_1} = D_{g_2}$.
- (3) $\tau_{g_1} = \tau_{g_2}$.

Teorema 4.14 (clasificación de g -topologías, [1, Theorem 3.12]). *En el conjunto G de todos los derivadores tenemos la siguiente relación de equivalencia:*

$$g_1 \sim g_2 : \iff \tau_{g_1} = \tau_{g_2}.$$

Sea $\mathcal{G} := G|_{\sim}$ y $\mathcal{H} = \{(C, D) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) : C \text{ abierto, } D \text{ numerable, } C \cap D = \emptyset\}$. Entonces, la aplicación $\Phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$, $\Phi([g]) = (C_g, D_g)$, es una biyección.

Demostración. Por el Corolario 4.13, Φ está bien definida y es inyectiva. Para comprobar que es sobreyectiva, consideremos la medida de Lebesgue μ en \mathbb{R} , y denotemos $\llbracket a, b \rrbracket := [\min\{a, b\}, \max\{a, b\}]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces, si $(C, D) \in \mathcal{H}$ con $D = \{d_n\}_{n \in \Lambda}$ y Λ numerable, definimos $g_{C,D} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g_{C,D}(t) := \text{sign}(t)\mu(\llbracket 0, t \rrbracket \setminus C) + \sum_{\substack{d_n \in D \\ d_n < t}} 2^{-n}.$$

Esta función es un derivador, y además $D_g = D$ y $C_g = C$. Φ es por tanto sobreyectiva. ■

4.2. Compacidad en $\mathcal{BC}_g([a, b])$

Siguiendo [10], en lo que resta de capítulo se exponen resultados sobre compacidad en $\mathcal{BC}_g([a, b])$.

Definición 4.15. Sea X un conjunto e (Y, d) un espacio métrico. Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es *totalmente acotada* si $f(X)$ es totalmente acotado. Denotamos por $K(X, Y)$ la familia de aplicaciones totalmente acotadas de X en Y con la distancia inducida por d , es decir, $d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$.

Cuando $(Y, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, como un subconjunto de \mathbb{R} es totalmente acotado si y solo si es acotado, $K(X, \mathbb{R}) = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ (funciones acotadas de X en \mathbb{R}). Así,

$$\mathcal{BC}_g(I, \mathbb{R}) = \mathcal{BC}((I, \tau_g), (\mathbb{R}, \tau_{usual})) \subset K((I, \tau_g), (\mathbb{R}, |\cdot|)) = \mathcal{B}((I, \tau_g), (\mathbb{R}, |\cdot|)).$$

Dado un derivador arbitrario g , el espacio topológico $([a, b], \tau_g)$ no tiene porqué ser compacto (ni tampoco Hausdorff, pues los puntos de cada componente conexa de C_g están a distancia cero). Efectivamente, si consideramos

$$g(t) = \begin{cases} t, & t \leq 0, \\ t + 1, & t > 0, \end{cases}$$

la aplicación $g|_{[-1,1]} : ([-1, 1], \tau_g) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{usual})$ es continua, pero $g([-1, 1]) = [-1, 0] \cup (1, 2]$ no es compacto, por lo que tampoco puede serlo $[-1, 1]$.

Este hecho obliga a manejar versiones muy generales del teorema de Ascoli-Arzelà.

Teorema 4.16 (Ascoli-Arzelà-Vala [18, Theorem 1]). Sea $K(X, Y)$ con la topología inducida por la métrica de Y , y $S \subset K(X, Y)$. Entonces S es totalmente acotado si y solamente si

- (1) $S(x) := \{f(x) \in Y : f \in S\}$ es totalmente acotado para todo $x \in X$;
- (2) S es equivariante, es decir, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe un recubrimiento finito $\{X_k\}_{k=1}^m$ de X tal que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ para todo $x, y \in X_k$, con $k = 1, \dots, m$, y para toda $f \in S$.

Observación 4.17. Aun cuando sobre X se tenga una topología, los conjuntos del recubrimiento mencionado en la segunda condición del Teorema 4.16 son arbitrarios (es decir, no tienen porqué ser abiertos de dicha topología).

Definición 4.18 (g-equicontinuidad). Un conjunto $S \subset \mathcal{B}\mathcal{C}_g([a, b], \mathbb{R})$ es *g-equicontinuo* si, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y $t \in [a, b]$ existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ para todo $f \in S$ y cualquier $s \in [a, b]$ que satisfaga $|g(s) - g(t)| < \delta$. Se define la *g-equicontinuidad uniforme* análogamente.

Definición 4.19 (g-estabilidad). Un conjunto $S \subset \mathcal{B}\mathcal{C}_g([a, b], \mathbb{R})$ es *g-estable* si para cada $t \in [a, b) \cap D_g$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ y un recubrimiento finito $\{X_k\}_{k=1}^m$ de $[t, t + \delta) \cap [a, b]$ tales que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para todo $f \in S$ y cualesquiera $x, y \in X_k$, con $k = 1, \dots, m$.

Añadiendo el conjunto $\{t\}$, es equivalente pedir que $\{X_k\}_{k=1}^m$ recubra $(t, t + \delta)$ en vez de $[t, t + \delta)$.

Lema 4.20. Sea $S \subset \mathcal{B}\mathcal{C}_g([a, b], \mathbb{R})$. Si S es uniformemente *g-equicontinuo*, entonces es *g-equicontinuo* y *g-estable*.

Demostración. La *g-equicontinuidad* de S es inmediata. Sean $t \in [a, b) \cap D_g$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Sea $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para cualesquiera $f \in S$ y $x, y \in [a, b]$ tales que $|g(x) - g(y)| < \rho$. Como g es no decreciente, existen los límites laterales en todo punto, por lo que podemos encontrar un $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $|g(x) - g(y)| < \rho$ para todo $x, y \in (t, t + \delta)$, y S es *g-estable*. ■

El recíproco del lema anterior no es cierto; como contraejemplo podemos tomar

$$g(t) = \begin{cases} t, & t \leq 0, \\ t + 1, & t > 0, \end{cases} \quad f(t) = \begin{cases} t, & t \leq 0, \\ \text{sen}\left(\frac{1}{t}\right), & t > 0, \end{cases}$$

y $S = \{f\}$. Se tiene no obstante el siguiente resultado sobre la relación entre *g-equicontinuidad* y *g-equicontinuidad uniforme*.

Proposición 4.21. Sea $F \subset \mathcal{B}\mathcal{C}_g([a, b], \mathbb{R})$ *g-equicontinuo*. Entonces son equivalentes

- (1) F es uniformemente *g-equicontinuo*,

(2) para cada $t \in [a, b] \cap D_g$ y $f \in F$, existe $\lim_{s \rightarrow t^+} f(s) \in \mathbb{R}$ uniformemente en F .

Demostración. Es análoga, realizando los cambios oportunos, a la de la Proposición 4.7 (de hecho, podría haberse demostrado primero este resultado para obtener el otro como corolario, tomando $F = \{f\}$). ■

Teorema 4.22 ([10, Theorem 4.14]). *Un conjunto $S \subset \mathcal{BC}_g([a, b], \mathbb{R})$ es totalmente acotado si y solamente si*

(1) $S(t)$ es acotado para todo $t \in [a, b]$;

(2) S es g-equicontinuo;

(3) S es g-estable.

Demostración. Veamos en primer lugar que estamos en las hipótesis del Teorema 4.16. Para cada $t \in [a, b]$, $S(t) \subset \mathbb{R}$ es acotado, y por tanto totalmente acotado, por lo que se verifica la primera condición. Falta comprobar que S es equivariante.

Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Para cada $t \in [a, b]$, existe $\delta_t \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $f \in S$ y $s \in [a, b]$ con $|g(s) - g(t)| < \delta_t$. Si $t \in [a, b] \setminus D_g$, por la continuidad de g en t , $g((t - \rho_t, t + \rho_t) \cap [a, b]) \subset (g(t) - \delta_t, g(t) + \delta_t)$ para algún $\rho_t \in \mathbb{R}^+$. Si $t \in D_g$, gracias a la continuidad por la izquierda de g , lo mismo sucede para $(t - \sigma_t, t] \cap [a, b]$ para algún $\sigma_t \in \mathbb{R}^+$. Debido a la g-estabilidad, existe también $\eta_t \in \mathbb{R}^+$ y un recubrimiento finito $\{X_{t,k}\}_{k=1}^{m_t}$ de $[t, t + \eta_t) \cap [a, b]$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para todo $f \in S$, $x, y \in X_{t,k}$ y $k = 1, \dots, m_t$. El conjunto

$$\{(t - \rho_t, t + \rho_t) \cap [a, b] : t \in [a, b] \setminus D_g\} \cup \{(t - \rho_t, t + \sigma_t) \cap [a, b] : t \in D_g\}$$

es un recubrimiento abierto de $([a, b], \tau_u)$, por lo que admite un subrecubrimiento finito $\{I_{t_i}\}_{i=1}^j$.

Consideremos el recubrimiento finito de $[a, b]$

$$\begin{aligned} \mathcal{U} := & \{(t_i - \rho_{t_i}, t_i + \rho_{t_i}) \cap [a, b] : i \in \{1, \dots, j\} \text{ y } t_i \notin D_g\} \\ & \cup \{(t_i - \rho_{t_i}, t_i] \cap [a, b] : i \in \{1, \dots, j\} \text{ y } t_i \in D_g\} \\ & \cup \{[t_i, t_i + \eta_{t_i}) \cap X_{t_i, k_i} : i \in \{1, \dots, j\}, t_i \in D_g \text{ y } k_i \in \{1, \dots, m_{t_i}\}\}. \end{aligned}$$

Si $x, y \in (t_i - \rho_{t_i}, t_i + \rho_{t_i}) \cap [a, b]$ para algún $t_i \notin D_g$ o $x, y \in (t_i - \rho_{t_i}, t_i] \cap [a, b]$ con $t_i \in D_g$, entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(t_i)| + |f(t_i) - f(y)| < \varepsilon \text{ para toda } f \in S.$$

Por otro lado, si $x, y \in [t_i, t_i + \eta_{t_i}) \cap X_{t_i, k_i}$ para $t_i \in D_g$ y $k_i \in \{1, \dots, m_{t_i}\}$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para cualquier $f \in S$. De este modo, S es equivariante, y por tanto totalmente acotado.

Asumamos ahora que S es totalmente acotado. En particular, S es acotado ($\sup_{f \in S} \|f\|_\infty < \infty$), por lo que también lo es $S(t) \subset \mathbb{R}$ para cada $t \in [a, b]$. Sean $t \in [a, b]$, $\{f_1, \dots, f_n\}$ una $\frac{\varepsilon}{3}$ -red de S , y $\delta > 0$ tal que $|f_k(s) - f_k(t)| < \varepsilon/3$ si $|g(s) - g(t)| < \delta$ para todo $k = 1, \dots, m$. Si $f \in S$, $\|f - f_k\|_\infty < \varepsilon/3$ para algún k , luego si $|g(s) - g(t)| < \delta$,

$$|f(s) - f(t)| \leq |f(s) - f_k(s)| + |f_k(s) - f_k(t)| + |f_k(t) - f(t)| < \varepsilon,$$

y S es g -equicontinuo. De nuevo gracias al Teorema 4.16, como S es totalmente acotado, es equivalente, lo que implica de forma inmediata la g -estabilidad (basta intersectar los conjuntos del recubrimiento obtenido para $\varepsilon > 0$ con intervalos de la forma $[t, t + \delta)$, para $t \in D_g$). ■

Corolario 4.23. *Sea $S \subset \mathcal{BC}_g([a, b])$. Si S satisface*

- (1) $S(t)$ acotado para todo $t \in [a, b]$ y
- (2) S uniformemente g -equicontinuo,

entonces es totalmente acotado.

demostrar el corolario anterior de forma independiente no habría requerido una versión tan general del teorema de Ascoli-Arzelà. Teniendo en cuenta la Proposición 4.21, una familia de funciones de $\mathcal{BC}_g([a, b])$ que satisfaga las condiciones del Teorema 4.23 está en las hipótesis del siguiente resultado de Hildebrandt sobre compacidad en espacios de funciones regladas.

Teorema 4.24 ([14, Theorem 1]). *Las siguientes condiciones son necesarias y suficientes para que una familia F de funciones regladas definidas en un intervalo $[a, b]$ sea totalmente acotada:*

- (1) las funciones de F están acotadas uniformemente,
- (2) la convergencia a los límites laterales en cada punto se produce uniformemente en F (Hildebrandt se refiere a esta propiedad como equiconvergencia).

5. Teoría de la medida

Formular un teorema fundamental del cálculo para la g -derivada requiere la construcción de una medida a partir del derivador. Con [15] como referencia, se repasarán conceptos básicos para luego introducir la construcción y propiedades relevantes de las medidas de Lebesgue-Stieltjes, y los espacios de funciones a los que dan lugar. Finalmente, extendiendo resultados de [8], se demuestra una versión del conocido teorema de compacidad de Kolmogorov-Riesz para $L_g^p(\mathbb{R})$.

5.1. Medidas de Lebesgue-Stieltjes

Definición 5.1. Dado un conjunto X , diremos que $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ es una σ -álgebra en X si se cumplen las siguientes condiciones:

- (1) $\emptyset \in \Sigma$.
- (2) Si $E \in \Sigma$, entonces $X \setminus E \in \Sigma$.
- (3) Si $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$, entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma$.

(X, Σ) se dice un *espacio medible*.

Sea X un conjunto y Σ una σ -álgebra en X . Una *medida* en Σ es una función $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ que satisface

- (1) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (2) si $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ es tal que $E_k \cap E_j = \emptyset$ para $k \neq j$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

A la terna (X, Σ, μ) se la llama *espacio de medida* y a los conjuntos de Σ *conjuntos medibles*.

Si X es además un espacio topológico con la topología τ , Σ se dice una σ -álgebra de Borel con respecto a τ y μ una *medida de Borel con respecto a τ* si $\tau \subset \Sigma$. Denotando por $\mathcal{B}(\tau)$ la menor σ -álgebra que contiene a la topología, Σ es de Borel con respecto a τ si y solo si $\mathcal{B}(\tau) \subset \Sigma$.

Definición 5.2 (medida de Lebesgue-Stieltjes). Sea $X \subset \mathbb{R}$ y (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida. La medida μ es de *Lebesgue-Stieltjes* si satisface:

- (1) $\mathcal{B}(\tau_{usual}) \subset \mathcal{M}$, donde τ_{usual} es la topología de X relativa a la usual.
- (2) $\mu(A) < +\infty$ para todo conjunto acotado $A \in \mathcal{M}$.

Definición 5.3. Dado un conjunto X , una *medida exterior* es una aplicación $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ que satisface:

- (1) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
- (2) si $A \subset B$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,
- (3) para cualquier familia numerable $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(X)$,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Definición 5.4. Dado un conjunto X , una *semiálgebra* es una familia $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de X que cumple

- (1) $A, B \in \mathcal{C} \implies A \cap B \in \mathcal{C}$,
- (2) para cualquier $A \in \mathcal{C}$, existen $B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathcal{C}$ dos a dos disjuntos tales que $A^c = \bigcup_{i=1}^k B_i$.

El siguiente resultado es muy importante en teoría de la medida, por lo que puede encontrarse en casi cualquier libro sobre el tema (por ejemplo, en [4, Theorem 1.3.3]).

Teorema 5.5 (de Extensión de Carathéodory). Sea X un conjunto, $\mathcal{C} \in \mathcal{P}(X)$ una semiálgebra y $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty]$ cumpliendo

- (1) $\varphi(\emptyset) = 0$,
- (2) para cualquier familia $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, se tiene que

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Entonces, la aplicación $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ dada por

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n) : \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

es una medida exterior; el conjunto

$$\mathcal{M}_{\mu^*} = \{A \in \mathcal{P}(X) : \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (X \setminus A)) \text{ para todo } E \in \mathcal{P}(X)\}$$

es una σ -álgebra sobre X , y la restricción $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ es una medida sobre \mathcal{M}_{μ^*} .

Además, supongamos que existe $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}$ cumpliendo $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ y $\varphi(F_n) < +\infty$ para $n = 1, 2, \dots$. Entonces, si $\tilde{\mu}$ es una medida sobre la σ -álgebra generada por \mathcal{C} , $\sigma(\mathcal{C})$, tal que $\tilde{\mu} = \varphi$ en \mathcal{C} , entonces $\tilde{\mu} = \mu^*$ en $\sigma(\mathcal{C})$ (μ es única sobre $\sigma(\mathcal{C})$).

Observación 5.6. Por construcción, $\mu^*(A) = \varphi(A)$ si $A \in \mathcal{C}$. Además, $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$, y por tanto $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$. Por otro lado, la medida obtenida en el teorema anterior es completa ($B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ si $\mu^*(B) = 0$).

Con este resultado podemos construir una medida de Lebesgue-Stieltjes a partir de una función creciente y continua por la izquierda.

Ejemplo 5.7. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua por la izquierda y creciente. Considérese la familia de subconjuntos de \mathbb{R}

$$\mathcal{C} = \{[a, b) : -\infty < a < b \leq +\infty\} \cup \{(-\infty, a) : -\infty < a \leq +\infty\} \cup \{\emptyset\},$$

y la aplicación, $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty]$ dada por

$$\varphi(I) = \begin{cases} 0 & \text{si } I = \emptyset, \\ g(b) - g(a) & \text{si } I = [a, b), a, b \in \mathbb{R}, a < b, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - g(a) & \text{si } I = [a, +\infty), a \in \mathbb{R}, \\ g(a) - \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) & \text{si } I = (-\infty, a), a \in \mathbb{R}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) & \text{si } I = \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.1)$$

En esta situación, se verifican las hipótesis del Teorema de extensión de Carathéodory. Teniendo en cuenta la definición de \mathcal{C} , y que $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$, $\mathcal{B}(\tau_u) \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$. Además, si $A \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$ es acotado, $A \subset [-M, M)$ para algún $M > 0$, y así

$$0 \leq \mu(A) \leq \mu([-M, M)) = \mu^*([-M, M)) = \varphi([-M, M)) = g(M) - g(-M) < \infty,$$

por lo que la medida μ obtenida a través del Teorema 5.5 es de Lebesgue-Stieltjes. La denotaremos como μ_g , y la correspondiente σ -álgebra, como $\mathcal{L}\mathcal{S}_g$. La medibilidad con respecto a $\mathcal{L}\mathcal{S}_g$ se denominará g -medibilidad, y la integral de una función g -medible con respecto a μ_g se escribirá

$$\int_E f(s) d\mu_g(s), \quad E \in \mathcal{L}\mathcal{S}_g.$$

Por otro lado, denotamos por $\mathcal{L}_g^1(X, \mathbb{R}) \equiv \mathcal{L}^1(X, \mathcal{L}\mathcal{S}_g, \mu_g)$ el espacio de las funciones integrables con respecto a μ_g definidas en un conjunto g -medible X . $\mathcal{L}_g^p(X, \mathbb{R})$ se define de manera análoga a los espacios \mathcal{L}^p usuales, y también como en el caso habitual $L_g^p(X, \mathbb{R})$ es el cociente de $\mathcal{L}_g^p(X, \mathbb{R})$ por la relación de equivalencia de igualdad en μ_g -casi todo punto.

Observación 5.8. Cuando el derivador g está definido en un intervalo $[a, b]$, en vez de en todo \mathbb{R} , podemos construir una medida de Lebesgue-Stieltjes sobre $[a, b]$ considerando

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(a) & \text{si } x \leq a, \\ g(x) & \text{si } a < x \leq b, \\ g(b) & \text{si } x > b, \end{cases}$$

la σ -álgebra $\mathcal{M}_{[a,b]} = \{A \cap [a, b] : A \in \mathcal{L}\mathcal{S}_{\tilde{g}}\}$ y el espacio de medida $([a, b], \mathcal{M}_{[a,b]}, \mu_{\tilde{g}}|_{\mathcal{M}_{[a,b]}})$.

Observación 5.9. Una consecuencia inmediata de la Proposición 4.12 es que las funciones g -continuas, por ser Borel-medibles, son g -medibles. Además, $\mathcal{B}\mathcal{C}_g([a, b]) \subset \mathcal{L}_g^p([a, b])$, con $1 \leq p \leq \infty$.

Observación 5.10. Con un proceso similar al del Ejemplo 5.7 es posible construir medidas de Lebesgue-Stieltjes a partir de funciones no decrecientes y continuas por la derecha (tomando intervalos semi-abiertos por la izquierda, en vez de por la derecha). Es más, dado un derivador g , si definimos

$$\hat{g}(x) := \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus D_g, \\ \lim_{t \rightarrow x^+} g(t) & \text{si } x \in D_g, \end{cases}$$

la medida así obtenida para \hat{g} , que es continua por la derecha y creciente, $\mu_{\hat{g}}$, coincide con μ_g en $\mathcal{L}\mathcal{S}_{\hat{g}} = \mathcal{L}\mathcal{S}_g$. Más generalizaciones de esto involucran al espacio de funciones de variación acotada en un intervalo, $\mathcal{B}\mathcal{V}([a, b], \mathbb{R})$. Tales funciones admiten una descomposición de la forma $g = g_1 - g_2$, con g_1 y g_2 crecientes (tomando por ejemplo $g_1(x) = V(g, [a, x])$ y $g_2(x) = V(g, [a, x]) - g(x)$); además, si g es continua por la izquierda, g_1 y g_2 también pueden escogerse continuas por la izquierda. Así, g_1 y g_2 son derivadores, y podemos definir una medida con signo asociada a g de la siguiente forma:

$$\mu_g(A) := \mu_{g_1}(A) - \mu_{g_2}(A), \quad A \in \mathcal{L}\mathcal{S}_g := \mathcal{L}\mathcal{S}_{g_1} \cap \mathcal{L}\mathcal{S}_{g_2} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [a, b].$$

Por otro lado, las medidas de Lebesgue-Stieltjes pueden tener puntos de medida positiva. Efectivamente,

$$\mu_g(\{a\}) = \mu_g\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a, a + \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_g\left(\left[a, a + \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (g(a + 1/n) - g(a)) = g(a^+) - g(a).$$

La interpretación geométrica que se muestra a continuación está basada en [11].

Observación 5.11. Si g es un derivador, podemos visualizar la integral de Stieltjes de f con respecto a g como el área de la región del plano determinada por la curva $(g(t), f(t))$ y el eje x . Si g tiene un salto en t_0 , completamos el espacio tomando $y = f(t_0)$; con esta explicación se comprueba claramente que C_g no tiene efecto en la integración, pues en las zonas de constancia de g no hay área (ver la Figura 5.1 y la Proposición 5.16).

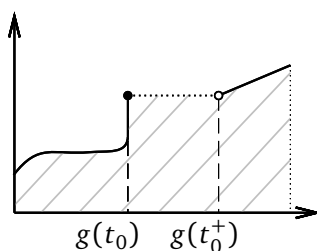


Fig. 5.1. Representación de la curva $(g(t), f(t))$, y, en gris, la integral de f con respecto a g .

Observación 5.12. Teniendo en cuenta que, para $a \in \mathbb{R}$,

$$[a, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a+n-1, a+n), \quad (-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a-n, a-n+1),$$

y $\mathbb{R} = (-\infty, a) \cup [a, +\infty)$, podemos computar la medida exterior asociada a g como

$$\mu_g^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (g(b_n) - g(a_n)) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n), \text{ con } a_n, b_n \in \mathbb{R} \text{ para todo } n \right\}.$$

Los siguientes resultados técnicos (Lema 5.13, Teorema 5.14, Proposición 5.15 y Proposición 5.16) extienden cuestiones conocidas para la medida de Lebesgue a las medidas de Stieltjes.

Lema 5.13 ([15, Lemma 1.49]). Sean un derivador g y una familia de intervalos con extremos reales $\{[a_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces existe otra familia $\{[c_n, d_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos dos a dos disjuntos y extremos reales satisfaciendo

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [c_n, d_n), \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi([c_n, d_n)) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi([a_n, b_n)),$$

donde φ está definida como en la ecuación (5.1).

Teorema 5.14 ([15, Theorem 1.50]). Sea g un derivador y μ_g^* la medida exterior determinada por el mismo. Entonces,

$$\mu_g^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (g(b_n) - g(a_n)) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n), \text{ donde } a_n, b_n \in \mathbb{R} \text{ y la unión es disjunta} \right\}.$$

Sea

$$\mathcal{S} = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \text{ existen } \{[a_k, b_k)\}_{k=1}^N \text{ dos a dos disjuntos tales que } f = \sum_{k=1}^N \chi_{I_k} \right\}.$$

Veamos un resultado de aproximación (que tiene como corolario inmediato la densidad de las funciones escalonadas en L_g^1).

Proposición 5.15 ([15, Proposition 1.51]). Sea g un derivador y E un conjunto g -medible cumpliendo $\mu_g(E) < +\infty$. Entonces, existe una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - \chi_E(x)| dg(x) = 0.$$

Además, existe una subsucesión de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a χ_E en g -casi todo punto de \mathbb{R} .

Proposición 5.16 ([17, Propositions 2.5, 2.6]). Si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente y continua por la izquierda,

- (1) D_g es numerable;
- (2) $\mu_g(G_g) = \mu(N_g) = 0$.

En la siguiente proposición se comprueba que cualquier medida de Lebesgue-Stieltjes coincide (al menos sobre $\mathcal{B}(\tau_{usual})$) con una como la del Ejemplo 5.7.

Proposición 5.17 ([15, Proposition 1.56]). Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida con μ de Lebesgue-Stieltjes. Entonces, existe una función creciente y continua por la izquierda $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mu([a, b)) = g(b) - g(a), a, b \in \mathbb{R}, a < b. \quad (5.2)$$

Demostración. Considérese la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$g(x) = \begin{cases} -\mu([x, 0)) & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ \mu([0, x)) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Por construcción, g es creciente. Dado $x \in \mathbb{R}$, veamos que es continua por la izquierda. Al ser creciente, sabemos que existe el límite por la izquierda en x , y que además

$$\lim_{t \rightarrow x^-} g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x - 1/n).$$

Si $x > 0$, $x - 1/n > 0$ para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, y por definición de g y las propiedades de μ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x - 1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu([0, x - 1/n)) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, x - 1/n)\right) = \mu([0, x)) = g(x).$$

Si $x \leq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x - 1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\mu([x - 1/n, 0)) = -\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [x - 1/n, 0)\right),$$

donde la última intersección es $[x, 0)$ si $x < 0$, y \emptyset si $x = 0$. En ambos casos, el límite coincide con $g(x)$.

Queda comprobar que se satisface (5.2). Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si $a = 0$ o $b = 0$, no hay nada que demostrar. Si $0 < a < b$,

$$\mu([0, b]) = \mu([0, a] \cup [a, b]) = \mu([0, a]) + \mu([a, b]),$$

y entonces

$$\mu([a, b]) = \mu([0, b]) - \mu([0, a]) = g(b) - g(a).$$

Si $a < 0 < b$,

$$\mu([a, b]) = \mu([a, 0] \cup [0, b]) = \mu([a, 0]) + \mu([0, b]) = g(b) - g(a).$$

Por último, si $a < b < 0$,

$$\mu([a, 0]) = \mu([a, b] \cup [b, 0]) = \mu([a, b]) + \mu([b, 0]),$$

de lo que obtenemos que

$$\mu([a, b]) = \mu([a, 0]) - \mu([b, 0]) = g(b) - g(a),$$

y hemos concluido. ■

Definición 5.18 (g-continuidad absoluta). Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un derivador, y $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación. Diremos que F es *absolutamente g-continua* en $[a, b]$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para cualquier familia de intervalos abiertos disjuntos dos a dos $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^k$ satisfaciendo

$$\sum_{n=1}^k (g(b_n) - g(a_n)) < \delta,$$

se tiene que

$$\sum_{n=1}^k |F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon.$$

Denotaremos por $\mathcal{AC}_g([a, b], \mathbb{R})$ el conjunto de las funciones absolutamente g-continuas con valores en \mathbb{R} .

Observación 5.19. Es inmediato comprobar que $\mathcal{AC}_g([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_g([a, b], \mathbb{R})$, y que además las funciones absolutamente g-continuas son uniformemente g-continuas (y por tanto regladas).

Definición 5.20 (g-lipschitzianidad). Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un derivador, y $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación. Diremos que F es *g-lipschitziana* si existe $M > 0$ tal que

$$|f(s) - f(t)| \leq M|g(s) - g(t)|, \text{ para todo } s, t \in [a, b].$$

Igual que en el caso usual, una función g-lipschitziana es absolutamente g-continua. g^C y g^B son ejemplos de funciones g-lipschitzianas. Efectivamente,

$$|g^C(s) - g^C(t)| \leq |g(s) - g(t)| \text{ y } |g^B(s) - g^B(t)| \leq |g(s) - g(t)|.$$

Proposición 5.21 ([15, Proposition 3.30]). Si $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente g -continua, entonces es de variación acotada.

Demostración. Veamos primero que si $t \in (a, b)$, entonces existe $\rho > 0$ tal que $[t - \rho, t + \rho] \subset (a, b)$ y $V(f, [t - \rho, t + \rho]) < \infty$. Sea δ tal que para cualquier familia disjunta de intervalos $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^m$

$$\sum_{n=1}^m (g(b_n) - g(a_n)) < \delta \implies \sum_{n=1}^m |f(b_n) - f(a_n)| < 1.$$

Sabemos además, por ser f uniformemente g -continua, que existe $f(t^+)$. Escogemos ρ de modo que se satisfaga (tomando el mínimo de forma oportuna)

- $g(t - \rho) - g(t) < \delta$,
- $g(t + \rho) - g(t^+) < \delta/2$,
- $|f(s) - f(t^+)| < 1$ para $s \in (t, t + \rho]$.

Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_l\}$ una partición de $[t - \rho, t + \rho]$. Sin pérdida de generalidad, podemos añadirle t , así que supongamos que $x_j = t$. Gracias a que

$$\sum_{k=1}^j (g(x_k) - g(x_{k-1})) = g(t) - g(t - \rho) < \delta \text{ y } \sum_{k=j+2}^l (g(x_k) - g(x_{k-1})) = g(t + \rho) - g(x_{j+1}) < \delta,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l |f(x_k) - f(x_{k-1})| &\leq \sum_{k=1}^j |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(t^+) - f(t)| \\ &\quad + |f(x_{j+1}) - f(t^+)| + \sum_{k=j+2}^l |f(x_k) - f(x_{k-1})| < 3 + |f(t^+) - f(t)| < \infty. \end{aligned}$$

Como la partición fue tomada de forma arbitraria, $V(f, [t - \rho, t + \rho]) < \infty$. Un razonamiento similar funciona también con a y b , para los que obtenemos intervalos $[a, a + \rho]$, $[b - \rho, b]$ en los que la variación total de f es finita. Por la compacidad de $[a, b]$, existe una familia finita $\{[t_i - \rho_{t_i}, t_i + \rho_{t_i}] \cap [a, b]\}_{i=1}^N$ que recubre $[a, b]$, y así,

$$V(f, [a, b]) \leq \sum_{i=1}^N V(f, [t_i - \rho_{t_i}, t_i + \rho_{t_i}]) < \infty. \quad \blacksquare$$

Como consecuencia de la Proposición 5.21 y la Observación 5.10, una función absolutamente g -continua proporciona una medida con signo, que será absolutamente continua con respecto a μ_g . Recíprocamente, las medidas absolutamente continuas con respecto de μ_g son siempre de esa forma. Detalles al respecto pueden consultarse en [15].

5.2. El teorema de Kolmogorov-Riesz en $L_g^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

En lo que sigue, se demuestra la versión del teorema de Kolmogorov-Riesz para $L_g^p(\mathbb{R})$. Para ello se hace uso de la pseudoinversa de la parte continua de un derivador. Por simplicidad, supondremos que g^C no es constante en un intervalo no acotado inferiormente (evitamos tener que modificar la definición de γ). La medida de Stieltjes asociada a g^C de un intervalo en que dicha función sea constante es cero, así que en cualquier caso la situación descartada es más sencilla que la general.

Lema 5.22 ([8, Lemma 2.2]). *Las aplicaciones g , g^C y g^B satisfacen las siguientes propiedades:*

- (1) Dado $A \in \mathcal{M}_g$, existe $B \in G_\sigma$ (B es intersección numerable de abiertos) y $C \in M_g$ tal que $A, C \subset B$, $\mu_g(C) = 0$ y $A = B \setminus C$.
- (2) Dado $A \in \mathcal{M}_g$, existe $B \in F_\sigma$ (B es unión numerable de cerrados) y $C \in M_g$ tal que $B \cap C = \emptyset$, $\mu_g(C) = 0$ y $A = B \cup C$.
- (3) $\mathcal{M}_g \subset \mathcal{M}_{g^C}$.
- (4) $\mathcal{M}_{g^B} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Demostración. Veamos primero que

$$\mu_g(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_g([a_n, b_n]) : A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \right\} = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_g((a_n, b_n)) : A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n) \right\}.$$

Dado $\{(a_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$, tenemos que

$$\mu_g^*(A) \leq \mu_g^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n) \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_g^*((a_n, b_n)),$$

y por tanto, $\mu_g(A) \leq \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_g((a_n, b_n)) : A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n) \right\}$. Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$ y $\{(a_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$, existe $\{(\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ cumpliendo $[a_n, b_n] \subset (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)$ y $\mu_g^*((\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)) \leq \mu_g^*([a_n, b_n]) + \varepsilon/2^n$. Así, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_g^*((\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_g^*([a_n, b_n]) + \varepsilon$, y tomando ínfimos,

$$\inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_g((a_n, b_n)) : A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n) \right\} \leq \mu_g(A).$$

Una vez comprobado esto, pueden demostrarse los dos primeros apartados de forma similar a como lo haríamos con conjuntos Lebesgue-medibles.

Para el tercero, tomemos $A \in \mathcal{M}_g$. Existen $B \in F_\sigma$ y $C \in \mathcal{M}_g$ cumpliendo $\mu_g(C) = 0$, $B \cap C = \emptyset$ y $A = B \cup C$. Tenemos además que $B \in \mathcal{B}(\tau_{usual}) \subset \mathcal{M}_{g^C}$ y, como $\mu_{g^C}^*(C) \leq \mu_g^*(C) = 0$ (recordar que

$\mu_{g^c}([a, b]) = g^c(b) - g^c(a) \leq g(b) - g(a) = \mu_g([a, b])$ y el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{g^c}, \mu_{g^c})$ es completo, $C \in \mathcal{M}_{g^c}$. Así, $A \in \mathcal{M}_{g^c}$.

Por último, si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, entonces $A = (A \setminus D_{g^B}) \cup (A \cap D_{g^B})$. Teniendo en cuenta que

$$\mu_{g^B}(\mathbb{R} \setminus D_g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{g^B}([-n, n] \setminus D_g) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_{g^B}([-n, n]) - \mu_{g^B}([-n, n] \cap D_g)) = 0,$$

al ser los dos últimos sumandos iguales a $\sum_{d_n \in D_g \cap [-n, n]} \Delta^+ g(d_n)$, y que $A \setminus D_{g^B} = A \setminus D_g \subset \mathbb{R} \setminus D_g$, $\mu_{g^B}^*(E \setminus D_{g^B}) = 0$, y $A \setminus D_{g^B} \in \mathcal{M}_{g^B}$. Finalmente, $A \cap D_{g^B} \in \mathcal{B}(\tau_{usual}) \subset \mathcal{M}_{g^B}$, luego $A \in \mathcal{M}_{g^B}$. ■

Lema 5.23. Dada una función $f \in \mathcal{L}_g^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_g = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_{g^c} + \sum_{s \in D_g} f(s) \Delta^+ g(s).$$

Demostración. En [8, Lemma 2.3] se demuestra para intervalos acotados de la forma $[a, b]$. Aplicando ese caso y el teorema de convergencia dominada a $f_n = \chi_{[-n, n]} f$ se sigue el resultado para \mathbb{R} . ■

Corolario 5.24. Dado $E \in \mathcal{M}_g$, se cumple que

$$\mu_g(E) = \mu_{g^c}(E) + \sum_{s \in E \cap D_g} \Delta^+ g(s).$$

Definición 5.25 (Morfismo medible). Dados dos espacios medibles (X, Σ_X) y (Y, Σ_Y) , un morfismo medible es una función $f : X \rightarrow Y$ tal que $f^{-1}(F) \in \Sigma_X$ para cualquier $F \in \Sigma_Y$.

Proposición 5.26 (extensión de [8, Proposition 2.7]). Dado un derivador $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y \mathcal{L} la σ -álgebra de Lebesgue:

- La parte continua $g^c : (\mathbb{R}, \mathcal{M}_g) \rightarrow (g^c(\mathbb{R}), \mathcal{L})$ es un morfismo medible.
- La pseudoinversa de la parte continua $\gamma : (g^c(\mathbb{R}), \mathcal{L}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{M}_g)$ es un morfismo medible.

Demostración. Sea $E \subset g^c(\mathbb{R})$ tal que $E \in \mathcal{L}$. Entonces, existen $F \in F_\sigma$ y $N \in \mathcal{L}$ tales que $\mu(N) = 0$, $F \cap N = \emptyset$ y $E = F \cup N$. Es inmediato que $(g^c)^{-1}(F) \in \mathcal{B}(\tau_u) \subset \mathcal{M}_{g^c}$, así que si comprobamos que $\mu_{g^c}^*((g^c)^{-1}(N)) = 0$, la primera afirmación quedaría demostrada.

Como $\mu(N) = 0$, para cada $\varepsilon > 0$ existe una familia disjunta $\{[c_n, d_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $N \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [c_n, d_n] \subset g^c(\mathbb{R})$ (salvo a lo sumo un punto, lo cual no afecta al resto de la demostración, pues g^c es continua) y $\sum_{n \in \mathbb{N}} (d_n - c_n) < \varepsilon$. Se tiene entonces que $(g^c)^{-1}([c_n, d_n]) = [\gamma(c_n), \gamma(d_n))$, luego $(g^c)^{-1}(N) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\gamma(c_n), \gamma(d_n))$. Consecuentemente,

$$\mu_{g^c}^*((g^c)^{-1}(N)) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{g^c}^*([\gamma(c_n), \gamma(d_n))) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (g^c(\gamma(d_n)) - g^c(\gamma(c_n))) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (d_n - c_n) < \varepsilon,$$

y como ε fue fijado arbitrariamente, $\mu_{g^C}^*((g^C)^{-1}(N)) = 0$.

Tomemos ahora $E \subset \mathbb{R}$ tal que $E \in \mathcal{M}_{g^C}$. Existen $F \in F_\sigma$ y $N \in \mathcal{M}_{g^C}$ satisfaciendo $\mu_g(N) = 0$, $F \cap N = \emptyset$ y $E = F \cup N$. Como γ es estrictamente creciente, es Borel-medible, y $\gamma^{-1}(F) \in \mathcal{B}(\tau_{usual}) \subset \mathcal{L}$. Basta probar entonces que $\mu^*(\gamma^{-1}(N)) = 0$, donde μ^* es la medida exterior de Lebesgue. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos una familia disjunta $\{[c_n, d_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $N \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [c_n, d_n]$ y $\sum_{n \in \mathbb{N}} (g^C(d_n) - g^C(c_n)) < \varepsilon$. Teniendo en cuenta que $\gamma^{-1}([c_n, d_n]) \subset [g^C(c_n), g^C(d_n)]$,

$$\mu^*(\gamma^{-1}(N)) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(\gamma^{-1}([c_n, d_n])) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*([g^C(c_n), g^C(d_n)]) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (g^C(d_n) - g^C(c_n)) < \varepsilon,$$

e igual que antes, $\mu^*(\gamma^{-1}(N)) = 0$. ■

Corolario 5.27. Dada una función $f \in \mathcal{L}_g^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_g = \int_{g^C(\mathbb{R})} f \circ \gamma \, d\mu + \sum_{s \in D_g} f(s) \Delta^+ g(s),$$

donde μ denota la medida de Lebesgue.

Demostración. Consideremos los espacios medibles $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{g^C})$ y $(g^C(\mathbb{R}), \mathcal{L})$. Gracias a la proposición anterior, la función $f \circ \gamma : g^C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, y $g^C : \mathbb{R} \rightarrow g^C(\mathbb{R})$ es un morfismo medible, y por tanto

$$\int_{g^C(\mathbb{R})} f \circ \gamma \, dg_*^C \mu_{g^C} = \int_{\mathbb{R}} (f \circ \gamma \circ g^C) \, d\mu_{g^C},$$

donde

$$g_*^C \mu_{g^C} : E \in \mathcal{L} \rightarrow g_*^C \mu_{g^C}(E) = \mu_{g^C}((g^C)^{-1}(E))$$

es la medida *pushforward* en $(g^C(\mathbb{R}), \mathcal{L})$. Para $(c, d) \subset g^C(\mathbb{R})$, se cumple que $g_*^C \mu_{g^C}((c, d)) = \mu_{g^C}((g^C)^{-1}(c, d)) = d - c$, y podemos asegurar que $g_*^C \mu_{g^C} = \mu$ (por la unicidad de la medida de Lebesgue en \mathcal{L}). Así,

$$\int_{g^C(\mathbb{R})} f \circ \gamma \, dg_*^C \mu_{g^C} = \int_{g^C(\mathbb{R})} f \circ \gamma \, d\mu.$$

Finalmente, como $\mu_{g^C}(C_{g^C} \cup N_{g^C}^+) = 0$ y $\gamma(g^C(s)) = s$ para todo $s \in \mathbb{R} \setminus (C_{g^C} \cup N_{g^C}^+)$,

$$\int_{\mathbb{R}} (f \circ \gamma \circ g^C) \, d\mu_{g^C} = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_{g^C}. \quad \blacksquare$$

La demostración de los siguientes resultados clásicos sobre compacidad en espacios L^p puede consultarse en [12, Theorems 4,5].

Teorema 5.28. Un subconjunto de ℓ^p , con $1 \leq p < \infty$, es totalmente acotado si y solamente si

- (1) es puntualmente acotado,
- (2) para todo $\varepsilon > 0$ existe n tal que para cualquier x del conjunto,

$$\sum_{k>n} |x_k|^p < \varepsilon^p.$$

Teorema 5.29 (de compacidad de Kolmogorov-Riesz). Supongamos que $1 \leq p < \infty$. Un subconjunto \mathcal{F} de $L^p(\mathbb{R})$ es totalmente acotado si y solamente si

- (1) \mathcal{F} es acotado,
- (2) para todo $\varepsilon > 0$ existe algún R tal que, para todo $f \in \mathcal{F}$,

$$\int_{|x|>R} |f(x)|^p dx < \varepsilon^p,$$

- (3) para todo $\varepsilon > 0$ existe $\rho > 0$ tal que para todo $f \in \mathcal{F}$ y $h \in \mathbb{R}$ con $|h| < \rho$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p dx < \varepsilon^p.$$

Observación 5.30. Es posible demostrar que la segunda y tercera condición implican la primera, y que esta es por tanto redundante (ver [13]).

Recordemos que la pseudoinversa de un derivador g, γ , está definida en el conjunto $g^C(\mathbb{R})$. Por tanto, para una familia $\mathcal{G} \subset L^p_g(\mathbb{R})$, el conjunto $\mathcal{G} \circ \gamma := \{f \circ \gamma : f \in \mathcal{G}\}$ está contenido en $L^p(g^C(\mathbb{R}))$. Este último puede embeberse en $L^p(\mathbb{R})$ definiendo sus funciones como cero fuera de $g^C(\mathbb{R})$, por lo que supondremos que $\mathcal{G} \circ \gamma$ está contenido en $L^p(\mathbb{R})$.

Teorema 5.31. Supongamos que $1 \leq p < \infty$ y que $D_g = \{d_1, d_2, \dots\}$. Un subconjunto \mathcal{G} de $L^p_g(\mathbb{R})$ es totalmente acotado si y solamente si

- (1) $\{f(d_n) : f \in \mathcal{G}\} \subset \mathbb{R}$ acotado para cada $d_n \in D_g$,
- (2) para todo $\varepsilon > 0$ existe n tal que para cualquier $f \in \mathcal{G}$,

$$\sum_{k>n} |f(d_k)|^p \Delta^+ g(d_n) < \varepsilon,$$

- (3) $\{f \circ \gamma : f \in \mathcal{G}\} \subset L^p(\mathbb{R})$ acotado,
- (4) para todo $\varepsilon > 0$ existe algún R tal que, para todo $f \in \mathcal{G}$,

$$\int_{|x|>R} |f \circ \gamma(x)|^p dx < \varepsilon^p,$$

(5) para todo $\varepsilon > 0$ existe $\rho > 0$ tal que para todo $f \in \mathcal{G}$ y $h \in \mathbb{R}$ con $|h| < \rho$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f \circ \gamma(x+h) - f \circ \gamma(x)|^p dx < \varepsilon^p.$$

Demostración. Si $f, g \in L_g^p(\mathbb{R})$, gracias al Corolario 5.27, se cumple que

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{L_g^p}^p &= \int_{\mathbb{R}} |f - g|^p d\mu_g = \int_{g^c(\mathbb{R})} |f \circ \gamma - g \circ \gamma|^p d\mu + \sum_{s \in D_g} |f(s) - g(s)|^p \Delta^+ g(s) \\ &= \|f \circ \gamma - g \circ \gamma\|_{L^p}^p + \|((f(d_n) - g(d_n))\Delta^+ g(d_n))^{1/p})_{n \in \mathbb{N}}\|_{\ell^p}^p. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Supongamos que $\mathcal{G} \subset L_g^p(\mathbb{R})$ es totalmente acotado. Está claro, por la igualdad anterior, que una ε -red de \mathcal{G} induce una ε -red en los conjuntos $\{f \circ \gamma : f \in \mathcal{G}\} \subset L^p(\mathbb{R})$ y $\{(f(d_n)\Delta^+ g(d_n))^{1/p}\}_{n \in \mathbb{N}} : f \in \mathcal{G}\} \subset \ell^p$, que son por tanto totalmente acotados. Como consecuencia de los Teoremas 5.29 y 5.28, la familia \mathcal{G} tiene que satisfacer las cinco condiciones (para la primera de ellas es suficiente observar que $\{f(d_n)\Delta^+ g(d_n))^{1/p} : f \in \mathcal{G}\}$ está acotado si y solo si lo está $\{f(d_n) : f \in \mathcal{G}\}$).

Veamos finalmente que si se verifican las condiciones, toda sucesión en \mathcal{G} admite una subsucesión de Cauchy, lo cual equivale a que \mathcal{G} sea totalmente acotado (Proposición 2.11); tomemos para ello $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$. Los conjuntos $\{f \circ \gamma : f \in \mathcal{G}\} \subset L^p(\mathbb{R})$ y $\{(f(d_n)\Delta^+ g(d_n))^{1/p}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^p$ están en las hipótesis de los Teoremas 5.28 y 5.29, respectivamente, así que $\{f_n \circ \gamma\}_{n \in \mathbb{N}}$ admite una subsucesión $\{f_{n_k} \circ \gamma\}_{k \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en $L^p(\mathbb{R})$; $\{(f_{n_k}(d_j)\Delta^+ g(d_j))^{1/p}\}_{j \in \mathbb{N}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ admite a su vez una subsucesión $\{(f_{n_{k_l}}(d_j)\Delta^+ g(d_j))^{1/p}\}_{j \in \mathbb{N}}\}_{l \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en ℓ^p . De nuevo por (5.3), $\{f_{n_{k_l}}\}_{l \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de Cauchy de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $L_g^p(\mathbb{R})$. ■

Observación 5.32. Teniendo en cuenta la Observación 5.30, en el Teorema 5.31 la tercera condición es prescindible (se mantiene para preservar las similitudes con la formulación más habitual del teorema de Kolmogorov-Riesz).

6. La derivada de Stieltjes

En este capítulo se trata el concepto que da nombre al trabajo. La primera parte está dedicada a la definición de la g -derivada, que presenta ciertas complicaciones, y a algunas de sus propiedades básicas, mientras que en la segunda se expone el Teorema Fundamental del Cálculo para la misma, y los espacios de funciones g -derivables que permite considerar. Ambas reúnen información de [8] y [15].

6.1. Definición y propiedades

Definición 6.1 (g -derivada). Definimos la *derivada de Stieltjes*, o g -derivada, de una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto $t \in [a, b] \setminus C_g$ como

$$f'_g(t) = \begin{cases} \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(s) - f(t)}{g(s) - g(t)}, & t \notin D_g, \\ \lim_{s \rightarrow t^+} \frac{f(s) - f(t)}{g(s) - g(t)}, & t \in D_g, \end{cases} \quad (6.1)$$

siempre y cuando existan los límites, en cuyo caso decimos que f es g -derivable en t . Cuando $t \in N_g^- \cup N_g^+$, la g -derivada en t debe interpretarse de la siguiente manera:

$$f'_g(t) = \begin{cases} \lim_{s \rightarrow t^+} \frac{f(s) - f(t)}{g(s) - g(t)}, & t \in N_g^+, \\ \lim_{s \rightarrow t^-} \frac{f(s) - f(t)}{g(s) - g(t)}, & t \in N_g^-. \end{cases} \quad (6.2)$$

Si suponemos que $a \notin N_g^-$ y $b \notin C_g \cup N_g^+ \cup D_g$, podemos definir la g -derivada en los puntos $t \in (a_n, b_n) \subset C_g$ como $f'_g(t) := f'_g(b_n)$, siempre y cuando f sea g -derivable en $b_n \in N_g^+$.

Observación 6.2. Puesto que $\mu_g(C_g) = 0$, la derivabilidad en los puntos de C_g no es excesivamente relevante, pero la definición anterior evita tener que excluirlos constantemente, además de ser coherente con la construcción de los espacios \mathcal{C}_g^k , que veremos más adelante.

Observación 6.3. Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tenemos las siguientes condiciones necesarias para la existencia de g -derivada en los puntos de $[a, b] \setminus C_g$:

- Si $a \in [a, b] \setminus C_g$, entonces $a \notin N_g^-$, ya que de lo contrario necesitaríamos conocer los valores de f a la izquierda de a (donde no está definida) para calcular la g -derivada.

- Si $b \in [a, b] \setminus C_g$, entonces $b \notin N_g^+ \cup D_g$, por el mismo motivo (f no está definida a la derecha de b).
- Para $t \in [a, b] \cap D_g$, existe $f(t^+)$. Esta condición es también suficiente, y

$$f'_g(t) = \lim_{s \rightarrow t^+} \frac{f(s) - f(t)}{g(s) - g(t)} = \frac{f(t^+) - f(t)}{g(t^+) - g(t)}$$

en este caso.

- Dado $t \in (a, b) \cap N_g^-$ y $\varepsilon > 0$, puesto que el límite en (6.2) se toma por la izquierda, existe $\delta > 0$ tal que si $s < t$ y $g(t) - g(s) < \delta$, $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$. Decimos en ese caso que f es g -continua por la izquierda en t (lo cual implica continuidad por la izquierda en el sentido usual).
- Si $t \in (a, b) \cap N_g^+ \setminus D_g$ y $\varepsilon > 0$, puesto que el límite en (6.2) se toma por la derecha, existe $\delta > 0$ tal que si $s > t$ y $g(s) - g(t) < \delta$, $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$. Decimos en ese caso que f es g -continua por la derecha en t (lo cual implica continuidad por la derecha en el sentido usual, pues $t \notin D_g$; si $t \notin D_g$, la g -continuidad por la derecha sigue siendo cierta al tomar $\delta < g(t^+) - g(t)$).
- Cuando $t \in (a, b) \setminus (C_g \cup D_g \cup N_g)$, f es g -continua en t .

Ejemplo 6.4. Al contrario de lo que sucede con los conceptos clásicos, la g -derivabilidad no implica la g -continuidad. Consideremos las funciones $g, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$g(t) = \begin{cases} t, & \text{si } t \leq 0, \\ t + 1, & \text{si } t > 0, \end{cases} \quad f(t) = \begin{cases} t, & \text{si } t < 0, \\ t + 1, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Como existe $f(0^+)$, tenemos por (6.1) que $f'_g(0) = \frac{f(0^+) - f(0)}{g(0^+) - g(0)} = 0$. Sin embargo, f no es continua por la izquierda en 0, y f no puede ser g -continua en ese punto.

Observación 6.5. De un modo similar a la derivada usual, la derivada de Stieltjes admite una interpretación geométrica: si g es continua en x_0 , $f'_g(x_0)$ coincide con el límite de las pendientes de las rectas secantes a la curva $(g(t), f(t))$ pasando por los puntos $(g(x_0), f(x_0))$ y $(g(x), f(x))$, con x cada vez más próximo a x_0 ; si g tiene una discontinuidad en x_0 , $f'_g(x_0) = \frac{f(x_0^+) - f(x_0)}{g(x_0^+) - g(x_0)}$, es decir, la derivada es igual a la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(g(x_0), f(x_0))$ y $(g(x_0^+), f(x_0^+))$, hecho coherente con el caso anterior, pues no hay más rectas secantes con las que aproximarse a x_0 . Aplicar este procedimiento a $x_0 \in C_g$ proporciona rectas secantes de pendiente infinita, poniendo de manifiesto que no hay forma inmediata de definir la derivada de Stieltjes en esos puntos.

Esta interpretación sugiere la posibilidad de adaptar teoremas clásicos como el de Rolle o el del valor medio. Para g continua y estrictamente creciente en $[a, b]$ (situación menos problemática y más cercana a la derivada usual) es posible hacerlo.

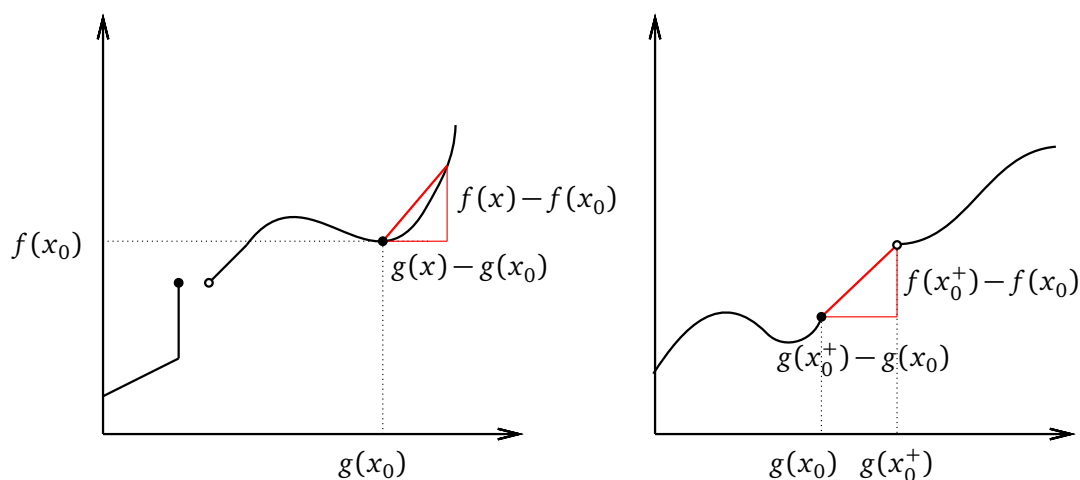


Fig. 6.1. Representaciones de la curva $(g(t), f(t))$.

Teorema 6.6. Sea $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y g -derivable en (a, b) , $h(a) = h(b)$, g estrictamente creciente y continua en $[a, b]$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ con $h'_g(c) = 0$.

Demostración. Por ser continua, h tiene máximo y mínimo en $[a, b]$. Podemos suponer que son distintos, o h sería constante y $h'_g = 0$ en (a, b) , y también que el máximo satisface $M > h(a) = h(b)$ (de lo contrario razonaríamos de forma análoga con el mínimo).

Sea $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = \max_{x \in [a, b]} h(x)$, y veamos que $h'_g(c) = 0$ (al ser g continua y estrictamente creciente, podemos tomar el límite por el lado que sea necesario).

- Si $h'_g(c) > 0$, existen $\varepsilon, \delta > 0$ con $h(y) - h(c) > \varepsilon(g(y) - g(c)) > 0$ si $y \in (c, c + \delta)$, y no hay máximo en c .
- Si $h'_g(c) < 0$, para $\varepsilon, \delta > 0$ adecuados, $h(y) - h(c) > -\varepsilon(g(y) - g(c)) > 0$ en $(c - \delta, c)$, y tampoco hay máximo en c .

Por tanto, $h'_g(c) = 0$. Este resultado sigue siendo cierto si g presenta discontinuidades (en esos puntos, $h'_g(t) = \frac{h(t^+) - h(t)}{g(t^+) - g(t)} = 0$), pero en el teorema del valor medio no se podrá prescindir de la continuidad de g . ■

Teorema 6.7. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y g -derivable en (a, b) , g estrictamente creciente y continua en $[a, b]$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ con $f'_g(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Demostración. Tomando $r = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ y $\phi(x) = f(x) - rg(x)$, ϕ es continua en $[a, b]$, g -derivable

en (a, b) , y cumple

$$\phi(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(a) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(b) = \phi(b).$$

Por el teorema anterior, existe $c \in (a, b)$ cumpliendo $\phi'_g(c) = f'_g(c) - r = 0$, y $f'_g(c) = r = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. ■

La demostración del siguiente resultado para $t \notin C_g$ puede consultarse en [15]. En [8] se amplía a los puntos de C_g .

Proposición 6.8. Sean $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un derivador tal que $a \notin N_g^-$ y $b \notin C_g \cup N_g^+ \cup D_g$. Si para $t \in [a, b]$ definimos

$$t^* = \begin{cases} t, & t \notin C_g, \\ b_n, & t \in (a_n, b_n) \subset C_g, \end{cases}$$

con $b_n \in N_g^+$, y f_1 y f_2 son dos funciones g -derivables en t , entonces

(1) $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ es g -derivable en t para cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'_g(t) = \lambda_1 (f_1)'_g(t) + \lambda_2 (f_2)'_g(t),$$

(2) $f_1 f_2$ es g -derivable en t y

$$(f_1 f_2)'_g(t) = (f_1)'_g(t) f_2(t^*) + (f_2)'_g(t) f_1(t^*) + (f_1)'_g(t) (f_2)'_g(t) \Delta^+ g(t^*), \quad (6.3)$$

(3) si $f_2(t^*) (f_2(t^*) + (f_2)'_g(t) \Delta^+ g(t^*)) \neq 0$, f_1/f_2 es g -derivable en t y

$$\left(\frac{f_1}{f_2} \right)'_g(t) = \frac{(f_1)'_g(t) f_2(t^*) - (f_2)'_g(t) f_1(t^*)}{f_2(t^*) (f_2(t^*) + (f_2)'_g(t) \Delta^+ g(t^*))}.$$

Observación 6.9. El último término de (6.3) convierte la derivación de orden superior de productos en una cuestión delicada (que puede verse con detalle en [7]).

6.2. Teorema fundamental del cálculo y espacios de funciones g -derivables

Veamos primero el caso usual.

Teorema 6.10 (Fundamental del Cálculo para la Integral de Lebesgue). Sea $f \in \mathcal{L}^1([a, b], \mathbb{R})$. Entonces la función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) := F(a) + \int_a^x f(t)dt,$$

es derivable en casi todo punto, y $F'(x) = f(x)$ para casi todo $x \in [a, b]$. Además, $F \in \mathcal{AC}([a, b], \mathbb{R})$, y toda función de $\mathcal{AC}([a, b], \mathbb{R})$ es de esa forma.

Sorprendentemente, el resultado análogo para la derivada de Stieltjes sigue siendo cierto (y se puede demostrar además de forma muy similar, como en [17]).

Teorema 6.11 (Fundamental del Cálculo para la Derivada de Stieltjes). Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un derivador, y $f \in \mathcal{L}_g^1([a, b], \mathbb{R})$. Entonces, la función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(t) = \int_{[a,t)} f(s)d\mu_g,$$

está bien definida, $F \in \mathcal{AC}_g([a, b], \mathbb{R})$, y

$$F'_g(t) = f(t), \quad \text{para } \mu_g\text{-casi todo } t \in [a, b].$$

Teorema 6.12 (Fundamental del Cálculo para la para la Integral de Lebesgue-Stieltjes). Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un derivador. Una función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es g -absolutamente continua en $[a, b]$ si y solo si verifica:

- (1) existe $F'_g(t)$ para μ_g -casi todo $t \in [a, b]$;
- (2) $F'_g \in \mathcal{L}_g^1([a, b], \mathbb{R})$;
- (3) para cada $t \in [a, b]$,

$$F(t) = F(a) + \int_{[a,t)} F'_g(s)dg(s).$$

Definición 6.13 (espacio \mathcal{C}_g^1). Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $a \notin N_g^-$ y $b \notin C_g \cup N_g^+ \cup D_g$. Entonces $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pertenece a $\mathcal{C}_g^1([a, b], \mathbb{R})$ si satisface

- (1) $f \in \mathcal{C}_g([a, b], \mathbb{R})$
- (2) existe $f'_g(x)$ para todo $x \in [a, b]$,
- (3) existe $h \in \mathcal{C}_g([a, b], \mathbb{R})$ tal que $h(x) = f'_g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Definición 6.14 (espacio \mathcal{C}_g^k). Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $a \notin N_g^-$ y $b \notin C_g \cup N_g^+ \cup D_g$. Dado $k \in \mathbb{N}$, definimos $\mathcal{C}_g^0([a, b], \mathbb{R}) = \mathcal{C}_g([a, b], \mathbb{R})$ y $\mathcal{C}_g^k([a, b], \mathbb{R})$ de forma recursiva como

$$\mathcal{C}_g^k([a, b], \mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{C}_g^{k-1}([a, b], \mathbb{R}) : (f_g^{k-1})'_g \in \mathcal{C}_g^0([a, b], \mathbb{R})\},$$

donde $f_g^{(0)} = f$ y $f_g^k = (f_g^{k-1})'_g$. Definimos también $\mathcal{C}_g^\infty([a, b], \mathbb{R}) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_g^n([a, b])$.

Definición 6.15 (espacios $\mathcal{B}\mathcal{C}_g^k$). Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $a \notin N_g^-$ y $b \notin C_g \cup N_g^+ \cup D_g$. Teniendo en cuenta que las funciones g -continuas pueden ser no acotadas, consideramos el espacio

$$\mathcal{B}\mathcal{C}_g^1([a, b], \mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{C}_g^1([a, b], \mathbb{R}) : f, f'_g \in \mathcal{B}\mathcal{C}_g([a, b], \mathbb{R})\},$$

y análogamente para $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{B}\mathcal{C}_g^k([a, b], \mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{C}_g^k([a, b], \mathbb{R}) : f_g^{(n)} \in \mathcal{B}\mathcal{C}_g([a, b], \mathbb{R}), \forall n = 0, \dots, k\}.$$

Sobre estos espacios vectoriales consideraremos la norma

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_k : \mathcal{B}\mathcal{C}_g^k([a, b]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \|f\|_k = \sum_{0 \leq i \leq k} \|f_g^{(i)}\|_\infty, \end{aligned}$$

con la que serán espacios de Banach (Teorema 6.24).

Proposición 6.16. Si $f \in \mathcal{B}\mathcal{C}_g^1([a, b], \mathbb{R})$, entonces f es g -lipschitziana con constante de Lipschitz $\|f'_g\|_\infty$.

Demostración. Sean $s, t \in [a, b]$, $s < t$ y $M > \|f'_g\|_\infty$. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{A} = \{x \in [s, t] : |f(y) - f(s)| \leq M|g(y) - g(s)| \forall y \in [s, x]\}.$$

Veamos que $[s, s + \delta] \subset \mathcal{A}$ para algún $\delta > 0$:

- Si $s \in (N_g^- \cup C_g) \setminus D_g$, basta tomar δ de modo que g sea constante en $[s, s + \delta]$. Como $f \in \mathcal{B}\mathcal{C}_g^1([a, b])$, f es constante en $[s, s + \delta]$.
- En cualquier otro caso, es posible tomar el límite por la derecha para calcular $f'_g(s)$. Para δ suficientemente pequeño,

$$\left| \frac{f(y) - f(s)}{g(y) - g(s)} \right| < M, \forall y \in [s, s + \delta].$$

Sea $c := \sup \mathcal{A}$. Gracias a la continuidad por la izquierda de f y g , $c \in \mathcal{A}$. Si $c < t$, razonando como para s ,

$$|f(y) - f(c)| < M|g(y) - g(c)|, \forall y \in [c, c + \delta_c],$$

y así,

$$\begin{aligned} |f(y) - f(s)| &\leq |f(y) - f(c)| + |f(c) - f(s)| \leq M|g(y) - g(c)| + M|g(c) - g(s)| \\ &= M(g(y) - g(c)) + M(g(c) - g(s)) = M|g(y) - g(s)|, \forall y \in [c, c + \delta_c]. \end{aligned}$$

Como $c \in \mathcal{A}$, la desigualdad también se da si $y \in [s, c]$, por lo que c no podría ser el supremo de \mathcal{A} . Por tanto, $c = t$, y como s, t y M fueron escogidos de forma arbitraria, concluimos que

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f'_g\|_\infty |g(x) - g(y)|, \text{ para todo } x, y \in [a, b],$$

como queríamos. ■

Observación 6.17. Un hecho curioso de la demostración anterior es la imposibilidad de realizar la inducción real "hacia la izquierda", es decir, desde t hasta s (en los puntos de $D_g \cap D_f$, por ejemplo, no podemos llevar a cabo ese tipo de razonamiento, pues la derivada se toma por la derecha y nada garantiza que por la izquierda f y g sean constantes, como se hace en la Proposición 6.16).

Recordemos que las funciones g -lipschitzianas son absolutamente g -continuas, por lo que podemos aplicarles el Teorema 6.12.

Corolario 6.18. *Se tiene que $\mathcal{B}\mathcal{C}_g^1([a, b]) \subset \mathcal{A}\mathcal{C}_g([a, b])$. Por tanto, para toda $f \in \mathcal{B}\mathcal{C}_g^1([a, b])$,*

$$f(x) = f(a) + \int_{[a, x)} f'_g(s) d\mu_g.$$

Observación 6.19. En la Proposición 6.16 solo se utilizan la acotación de la derivada, la continuidad por la izquierda de las funciones de $\mathcal{B}\mathcal{C}_g^1([a, b])$, y que estas son constantes en intervalos $[s, t]$ en los que lo es el derivador. Por tanto, sigue siendo cierta para funciones con esas propiedades, aunque no estén en $\mathcal{B}\mathcal{C}_g^1([a, b])$.

Proposición 6.20. *Sea $f \in \mathcal{C}_g([a, b])$. Entonces $f'_g(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$ si y solo si f es constante.*

Demostración. Está claro que si f es constante, $f'_g(t) = 0$. Para la otra implicación, teniendo en cuenta la Observación 6.19, podemos razonar como en la Proposición 6.16 con una constante de Lipschitz arbitrariamente pequeña (es decir, f es g -lipschitziana con constante de Lipschitz 0, y por tanto constante). ■

Observación 6.21. Si se prescinde de la g -continuidad, caracterizar el núcleo del operador derivada es mucho más complicado, particularmente cuando el derivador presenta un comportamiento similar al de la última función del Ejemplo 3.3, donde D_g tiene puntos de acumulación (que son los que ocasionan problemas a la hora de probar resultados del tipo de la Proposición 6.16).

El siguiente lema completa la información del Corolario 6.18.

Lema 6.22 ([8, Lemma 3.14]). Dada $h \in \mathcal{BC}_g([a, b])$, consideremos

$$H : x \in [a, b] \rightarrow H(x) = \int_{[a, x]} h(s) d\mu_g.$$

Entonces $H'_g(x) = h(x)$ para todo $x \in [a, b]$, y por tanto $H \in \mathcal{BC}_g^1([a, b])$.

Demostración. Como $h \in \mathcal{BC}_g([a, b]) \subset \mathcal{L}_g^1([a, b])$, $H \in \mathcal{AC}_g([a, b])$, así que basta comprobar que $H'_g(x) = h(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Distinguimos tres casos:

- Si $x \in D_g$,

$$\begin{aligned} H'_g(x) &= \lim_{s \rightarrow x^+} \frac{H(s) - H(x)}{g(s) - g(x)} = \lim_{s \rightarrow x^+} \frac{1}{g(s) - g(x)} \int_{[x, s]} h(s) d\mu_g \\ &= \frac{\int_{\{x\}} h(s) d\mu_g}{g(x^+) - g(x)} = \frac{h(x) \Delta^+ g(x)}{\Delta^+ g(x)} = h(x). \end{aligned}$$

- Para $x \in [a, b] \setminus (C_g \cup D_g)$, la g -derivada se computa como el límite

$$\lim_{s \rightarrow x} \frac{H(s) - H(x)}{g(s) - g(x)},$$

en el conjunto $D_x = \{s \in [a, b] : g(s) \neq g(x)\}$, en el que está definida $F(\cdot) = \frac{H(\cdot) - H(x)}{g(\cdot) - g(x)}$. Sea $\varepsilon > 0$; como h es g -continua y g es continua en x , existe $\delta > 0$ tal que $|h(u) - h(x)| < \varepsilon$ si $|u - x| < \delta$. Si $s \in [a, b] \cap D_x$, $s - x < \delta$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \frac{H(s) - H(x)}{g(s) - g(x)} - h(x) \right| &= \left| \frac{1}{g(s) - g(x)} \int_{[x, s]} h(u) d\mu_g(u) - h(x) \right| \\ &= \frac{1}{|g(s) - g(x)|} \left| \int_{[x, s]} (h(u) - h(x)) d\mu_g(u) \right| \\ &\leq \frac{1}{|g(s) - g(x)|} \int_{[x, s]} |h(u) - h(x)| d\mu_g(u) \leq \frac{1}{|g(s) - g(x)|} \int_{[x, s]} \varepsilon d\mu_g(u) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Lo mismo sucede si $s \in [a, b] \cap D_x$ y $x - s < \delta$, así que

$$\lim_{s \rightarrow x} \frac{H(s) - H(x)}{g(s) - g(x)} = h(x).$$

- Por último, si $x \in (a_n, b_n) \subset C_g$,

$$H'_g(x) = H'_g(b_n) = h(b_n) = h(x),$$

gracias a la definición de la g -derivada en C_g y la continuidad por la izquierda de h . ■

Observación 6.23. Combinados, el Corolario 6.18 y la Proposición 6.22 nos dicen que las funciones de $\mathcal{B}\mathcal{C}_g^k([a, b])$ son precisamente integrales de Stieltjes de funciones de $\mathcal{B}\mathcal{C}_g^{k-1}([a, b])$, de forma similar a lo que sucede en $\mathcal{C}^k([a, b], \mathbb{R})$ con la integral de Lebesgue.

Teorema 6.24. $(\mathcal{B}\mathcal{C}_g^k([a, b]), \|\cdot\|_k)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Veámoslo para $k = 1$ (el caso $k \geq 2$ es análogo). Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}\mathcal{C}_g^1([a, b])$. Entonces $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{(f_n)'_g\}_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy en el espacio de Banach $(\mathcal{B}\mathcal{C}_g([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$, por lo que existen $f, g \in \mathcal{B}\mathcal{C}_g([a, b])$ tales que $f_n \rightarrow f$ y $(f_n)'_g \rightarrow h$ en $\mathcal{B}\mathcal{C}_g([a, b])$. Veamos que existe $f'_g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, y que además $f'_g = h$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|(f_n)'_g - h\|_\infty \leq \varepsilon/(g(b) - g(a))$ para $n \geq N$. Gracias al Corolario 6.18, sabemos que

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_{a,x} (f_n)'_g(s) d\mu_g, \forall x \in [a, b],$$

y que para cada $n \geq N$,

$$\left| \int_{a,x} (f_n)'_g(s) d\mu_g - \int_{a,x} h(s) d\mu_g \right| \leq \int_{a,x} |(f_n)'_g(s) - h(s)| d\mu_g \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

Así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a,x} (f_n)'_g(s) d\mu_g = \int_{a,x} h(s) d\mu_g$$

uniformemente en $[a, b]$, y por tanto

$$f(x) = f(a) + \int_{a,x} h(s) d\mu_g.$$

Como $h \in \mathcal{B}\mathcal{C}_g([a, b])$, por el Lema 6.22, $f'_g(x) = h(x)$ para todo $x \in [a, b]$, como queríamos. ■

Observación 6.25. La clave de la demostración anterior está en la posibilidad de recuperar las funciones de $\mathcal{B}\mathcal{C}_g^1([a, b])$ como integrales de su derivada. En [8], ese resultado se obtiene a partir de otros más generales sobre la integral de Kurzweil-Stieltjes.

Sería interesante disponer de un espacio de funciones g -derivables menos restrictivo que $\mathcal{B}\mathcal{C}_g^k$. Sin embargo, si se renuncia a la g -continuidad de las funciones y sus derivadas, dotar a tal espacio de una topología con propiedades deseables (continuidad del operador derivada y equivalencia con la estructura conocida al restringirse a $\mathcal{B}\mathcal{C}_g^k([a, b])$) no es inmediato. Para cerrar la sección, se expone una posible forma de abordar el problema.

Definición 6.26. Dado un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{B}\mathcal{D}_g([a, b], \mathbb{R})$ denota al espacio vectorial de las funciones g -derivables de $[a, b]$ en \mathbb{R} con derivada acotada.

Observación 6.27. Si tomamos $\|f\|_* := \|f\|_\infty + \|f'_g\|_\infty$, $(\mathcal{B}\mathcal{D}_g([a, b]), \|\cdot\|_*)$ es un espacio normado, pero no necesariamente completo.

Para ver esto, consideremos el conjunto y la función de Cantor, $C \subset [0, 1]$ y $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (Ejemplo 3.3). $U = [0, 1] \setminus C$ es abierto, así que $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$, con $\{(a_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ disjuntos.

Sean ahora, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n = \{(a_{n,k}, b_{n,k})\}_{k=1}^n$, donde $a_{n,k} < a_{n,k+1}$ y $b_{n,k} < b_{n,k+1}$ para $k = 1, \dots, n-1$. Definimos

$$f_n(t) := \begin{cases} g(a_{n,1}), & t \leq a_{n,1}, \\ g(a_{n,k}), & t \in (a_{n,k}, a_{n,k+1}], k = 1, \dots, n-1, \\ g(a_{n,n}), & t > a_{n,n}. \end{cases}$$

En la Figura 6.2 se ilustra el tipo de funciones consideradas. Se satisface que $(f_n)'_g(t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$; como además $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\mathcal{B}\mathcal{D}_g([a, b]), \|\cdot\|_*)$. Sin embargo, no puede ser convergente en ese mismo espacio, ya que la única posibilidad es que lo haga a g , y $g'_g(t) = 1$ para todo $t \in [0, 1]$ (y por tanto $\|g'_g - (f_n)'_g\|_\infty = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$).

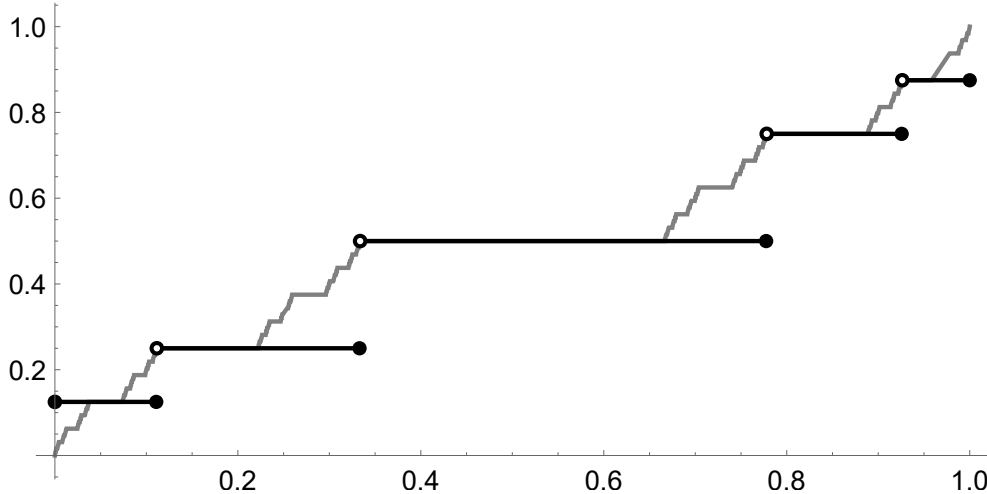


Fig. 6.2. Representación de g y f_3 , donde los $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^3$ son $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $(\frac{2}{3}, \frac{7}{9})$ y $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$.

Definición 6.28. Dados $x, y \in \mathbb{R}$,

$$l(x, y) := \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{1 + y^2}}.$$

Proposición 6.29. l es una métrica en \mathbb{R} . Además, $l(x, y) = \sin \theta$, donde $\theta \in [0, \pi]$ es el ángulo entre los vectores $(1, x)$ y $(1, y)$.

Demostración. Está claro que $l(x, y) \geq 0$, y que $l(x, y) = 0$ implica $x = y$. Además, $l(x, y) = l(y, x)$. La desigualdad triangular es algo técnica (y guarda poca relación con lo que sigue), por lo que se incluye en el apéndice. Para la última observación basta tener en cuenta que $l(x, y) = \frac{\|(1, x, 0) \times (1, y, 0)\|_2}{\|(1, x, 0)\|_2 \|(1, y, 0)\|_2}$, y recordar que $\|\vec{a} \times \vec{b}\|_2 = \|\vec{a}\|_2 \|\vec{b}\|_2 \sin \theta$, con $\theta \in [0, \pi]$ el ángulo (mínimo) entre los vectores \vec{a} y \vec{b} . ■

Definición 6.30. Para $f, h \in \mathcal{BD}_g([a, b])$, definimos

$$\Gamma(f, h) := \sup_{\substack{s, t \in [a, b] \\ g(s) \neq g(t)}} l\left(\frac{f(s) - f(t)}{g(s) - g(t)}, \frac{h(s) - h(t)}{g(s) - g(t)}\right),$$

y a partir de esta,

$$d(f, h) := \|f - h\|_\infty + \|f'_g - h'_g\|_\infty + \Gamma(f, h).$$

Teorema 6.31. $(\mathcal{BD}_g([a, b]), d)$ es un espacio métrico completo.

Demostración. Está claro que si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{BD}_g([a, b]), d)$, existen f y h tales que $f_n \rightarrow f$ y $(f_n)'_g \rightarrow h$ en $(\mathcal{B}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$. Veamos que $f'_g(t) = h(t)$ para todo $t \in [a, b]$.

Sea entonces $t \in [a, b]$, y supongamos que la g -derivada en ese punto se calcula tomando el límite por la derecha (el resto de casos son análogos). El objetivo es realizar una cota de la forma

$$\left| \frac{f(s) - f(t)}{g(s) - g(t)} - h(t) \right| \leq \left| \frac{f(s) - f(t)}{g(s) - g(t)} - \frac{f_N(s) - f_N(t)}{g(s) - g(t)} \right| + \left| \frac{f_N(s) - f_N(t)}{g(s) - g(t)} - (f_N)'_g(t) \right| + \left| (f_N)'_g(t) - h(t) \right|,$$

donde N es suficientemente grande y $s \in [t, s_N)$. Teniendo en cuenta la interpretación del seno, para que la función l se aproxime a cero debe darse alguna de las siguientes circunstancias:

- x e y se aproximan ambos a infinito (o menos infinito),
- x se aproxima a infinito, e y a menos infinito,
- x e y son próximos entre sí (y no se acercan a más o menos infinito).

Ahora bien, para un N grande y s_N suficientemente próximo a t , tenemos controlado en cota el valor de $\frac{f_N(s) - f_N(t)}{g(s) - g(t)}$ (cercano a $(f_N)'_g(t)$, que está acotado uniformemente). Como $\Gamma(f_n, f_N)$ es pequeño si $n \geq N$, la única posibilidad en $[t, s_N)$, si se toman los índices de forma adecuada, es que $\left| \frac{f_n(s) - f_n(t)}{g(s) - g(t)} - \frac{f_N(s) - f_N(t)}{g(s) - g(t)} \right|$ sea próximo a cero para $n \geq N$, y consecuentemente también

$$\left| \frac{f(s) - f(t)}{g(s) - g(t)} - \frac{f_N(s) - f_N(t)}{g(s) - g(t)} \right|.$$

Gracias a lo anterior y la definición de d , $f'_g(t) = h(t)$.

Se tendrá, puesto que l es continua, que $f_n \xrightarrow{d} f$, y que $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ (en particular hay convergencia puntual). ■

Como consecuencia del teorema anterior se tiene el siguiente corolario.

Corolario 6.32. El operador derivada $\partial_g : (\mathcal{B}\mathcal{D}_g([a, b], \mathbb{R}), d) \rightarrow (\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $\partial_g f = f'_g$ es continuo.

Teorema 6.33. $(\mathcal{B}\mathcal{C}_g^1([a, b]), d)$ tiene la misma topología que $(\mathcal{B}\mathcal{C}_g^1([a, b]), \|\cdot\|_{\mathcal{B}\mathcal{C}_g^1})$.

Demostración. Es equivalente comprobar que para cualesquiera $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{f\} \subset \mathcal{B}\mathcal{C}_g^1([a, b])$

$$f_n \xrightarrow{d} f \iff f_n \xrightarrow{\mathcal{B}\mathcal{C}_g^1} f.$$

Por definición de d , la primera implicación es inmediata. Para la segunda, basta observar que si $f_n \xrightarrow{\mathcal{B}\mathcal{C}_g^1} f$, se tiene la siguiente cota para los cocientes incrementales:

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{s, t \in [a, b] \\ g(s) \neq g(t)}} \left| \frac{f(s) - f(t)}{g(s) - g(t)} - \frac{f_n(s) - f_n(t)}{g(s) - g(t)} \right| &= \sup_{\substack{s, t \in [a, b] \\ g(s) \neq g(t)}} \left| \frac{1}{g(s) - g(t)} \int_{[t, s]} (f'_g(u) - (f_n)'_g(u)) dg(u) \right| \\ &\leq \|f'_g - (f_n)'_g\|_\infty. \end{aligned}$$

Así, $\Gamma(f_n, f) \rightarrow 0$, y $d(f_n, f) \rightarrow 0$. ■

Observación 6.34. Gracias al Teorema 6.33, la inclusión $(\mathcal{B}\mathcal{C}_g^1([a, b]), \|\cdot\|_{\mathcal{B}\mathcal{C}_g^1}) \hookrightarrow (\mathcal{B}\mathcal{D}_g([a, b]), d)$ es un embebimiento.

7. Aplicaciones

Con la teoría desarrollada hasta ahora podemos abordar problemas de valor inicial de la forma

$$x'_g(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (7.1)$$

donde $t_0, T \in \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ y $f : [t_0, t_0 + T] \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$. El interés de las ecuaciones con derivadas de Stieljes reside en el hecho de que generalizan diversos tipos de ecuaciones diferenciales (detalles al respecto pueden consultarse en [17], y en [3] puede verse una aplicación a una situación real). Siguiendo [15] y [9], en esta sección se exponen algunas definiciones y resultados básicos sobre las soluciones de (7.1), sus propiedades, y su existencia. Denotaremos a partir de ahora $I_\kappa = [t_0, t_0 + \kappa)$, $\kappa \in (0, T]$ y $I = [t_0, t_0 + T)$. \bar{I}_κ será la clausura de I_κ en $(\mathbb{R}, \tau_{usual})$.

Definición 7.1. Una solución de (7.1) en I_κ , con $\kappa \in (0, T]$, es una función $x \in \mathcal{AC}_g(\bar{I}_\kappa, \mathbb{R}^n)$ tal que $x(t_0) = x_0$, $x(t) \in X$ para todo $t \in I_\kappa$ y

$$x'_g(t) = f(t, x(t)), \quad \text{para } g\text{-casi todo punto } t \in I_\kappa.$$

Si $\kappa = T$, se dice x es una *solución global*; si $\kappa \in (0, T)$, x es una *solución local*.

Observación 7.2. Gracias al Teorema Fundamental del Cálculo, la derivada de Stieltjes de una x en las hipótesis anteriores existe en g -casi todo punto, por lo que la definición anterior tiene sentido. Además, $x \in \mathcal{AC}_g(\bar{I}_\kappa, \mathbb{R}^n)$ es solución en I_κ si y solamente si satisface

$$x(t) = x_0 + \int_{[t_0, t)} f(s, x(s)) dg(s), \quad t \in \bar{I}_\kappa.$$

Definición 7.3. Sea X un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^n . Una función $f : [a, b] \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *g-Carathéodory* si satisface

- (1) para todo $x \in X$, $f(\cdot, x)$ es g -medible,
- (2) para g -casi todo punto $t \in [a, b]$, $f(t, \cdot)$ es continua en X ,
- (3) para todo $r > 0$, existe $h_r \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$ tal que

$$\|f(t, x)\| \leq h_r(t) \quad \text{para } g\text{-casi todo } t \in [a, b], \text{ y cualquier } x \in X \text{ con } \|x\| \leq r.$$

La demostración del siguiente lema puede encontrarse en [9].

Lema 7.4 ([9, Lemma 7.2]). Sea X un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^n y $f : [a, b] \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ g -Carathéodory. Entonces, para cualquier $x \in \mathcal{BC}_g([a, b])$, $f(\cdot, x(\cdot))$ es g -medible, y además $f(\cdot, x(\cdot)) \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$.

Teorema 7.5 ([9, Theorem 7.5]). Sea $r > 0$ y $f : [t_0, t_0 + T] \times \overline{B(x_0, r)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ g -Carathéodory. Entonces, existe $\kappa \in (0, T]$ tal que (7.1) tiene solución en I_κ .

Demostración. Sea $R = r + \|x_0\|$. Como f es g -Carathéodory, existe $h_R \in \mathcal{L}_g^1(I, [0, \infty))$ tal que

$$\|f(t, x)\| \leq h_R(t) \text{ para } g\text{-casi todo } t \in I, x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq R.$$

En concreto, si $x \in \overline{B(x_0, r)}$, como $\|x\| - \|x_0\| \leq \|x - x_0\| \leq r$,

$$\|f(t, x)\| \leq h_R(t) \text{ para } g\text{-casi todo } t \in I, x \in \overline{B(x_0, r)}.$$

Tomemos ahora $\kappa \in (0, T]$ tal que

$$\int_{[t_0, t_0 + \kappa)} h_R(s) dg(s) \leq r,$$

y definamos

$$K = \{x \in \mathcal{BC}_g(\bar{I}_\kappa, \mathbb{R}^n) : \|x(t) - x_0\| \leq r \text{ para todo } t \in \bar{I}_\kappa\},$$

y $T : K \rightarrow K$ como

$$Tx(t) = x_0 + \int_{[t_0, t)} f(s, x(s)) dg(s), t \in \bar{I}_\kappa.$$

Es sencillo comprobar que K es un subconjunto no vacío, cerrado y acotado del espacio de Banach $(\mathcal{BC}_g(\bar{I}_\kappa, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ (la función constante igual a x_0 pertenece a K). Si $x, y \in K$ y $t \in [0, 1]$,

$$\|tx(s) + (1-t)y(s) - x_0\| \leq t\|x(s) - x_0\| + (1-t)\|y(s) - x_0\| \leq r \text{ para } s \in \bar{I}_\kappa,$$

y K también es convexo. Por otro lado, $T(K) \subset \mathcal{AC}_g(\bar{I}_\kappa, \mathbb{R}^n)$, y además, como

$$\|Tx(t) - x_0\| \leq \int_{[t_0, t)} \|f(s, x(s))\| dg(s) \leq \int_{[t_0, t_0 + \kappa)} h_R(s) dg(s) \leq r, \text{ para cualquier } t \in \bar{I}_\kappa,$$

T está bien definido.

Comprobemos que es secuencialmente continuo (por ser K un espacio métrico esto equivale a la continuidad de T). Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ converge a $x \in K$, entonces

$$\|Tx_n - Tx\|_\infty \leq \int_{[t_0, t_0 + \kappa)} \|f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))\| dg(t).$$

Por ser f g -Carathéodory (más concretamente, debido a la segunda condición),

$$\|f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))\| \rightarrow 0, \text{ para } g\text{-casi todo } t \in [t_0, t_0 + \kappa),$$

y

$$\|f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))\| \leq 2h_R(t) \text{ para } g\text{-casi todo } t \in [t_0, t_0 + \kappa),$$

así que gracias al teorema de convergencia dominada,

$$Tx_n \rightarrow Tx \text{ en } \mathcal{B}\mathcal{C}_g(\bar{I}_\kappa, \mathbb{R}^n),$$

y T es continuo.

Comprobemos para finalizar que T es compacto, viendo que $T(K)$ satisface las dos condiciones del Corolario 4.23. La primera de ellas es inmediata. Teniendo en cuenta que, si $Tx \in T(K)$,

$$|Tx(t) - Tx(s)| = \left\| \int_{[s,t]} f(u, x(u)) dg(u) \right\| \leq \int_{[s,t]} h_R(u) dg(u), \text{ para cualesquiera } t, s \in \bar{I}_\kappa,$$

y que $h_R \in \mathcal{L}_g^1(I, [0, \infty))$, el conjunto $T(K)$ es uniformemente g -equicontinuo. Estamos por tanto en las condiciones del corolario, así que $T(K)$ es totalmente acotado, luego relativamente compacto, y el operador T es compacto.

Podemos aplicar el teorema de punto fijo de Schauder, así que T tiene un punto fijo, que es solución de (7.1). ■

En las siguientes proposiciones se comprueba que, bajo condiciones adecuadas, las soluciones de (7.1) lo son en el sentido usual, es decir, en todo el intervalo en que estén definidas.

Proposición 7.6 (extensión de [9, Proposition 7.6]). *Sea $x : [t_0, t_0 + \kappa] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una solución de (7.1), y $f(\cdot, x(\cdot))$ g -continua en $[t_0, t_0 + \kappa]$. Entonces, si $t^* \in [t_0, t_0 + \kappa)$ para cualquier $t \in [t_0, t_0 + \kappa)$,*

$$x'_g(t) = f(t, x(t)) \text{ para todo } t \in [t_0, t_0 + \kappa).$$

Demostración. Por definición, al tener los puntos de discontinuidad medida positiva, $x'_g(t) = f(t, x(t))$ en $t \in [t_0, t_0 + \kappa) \cap D_g$; veámoslo para los puntos de $[t_0, t_0 + \kappa) \setminus (C_g \cup D_g)$. Por ser x solución, sabemos que

$$x(t) = x_0 + \int_{[t_0, t)} f(s, x(s)) dg(s), t \in \bar{I}_\kappa.$$

Si fijamos $t \in [t_0, t_0 + \kappa) \setminus (C_g \cup D_g)$, al no ser g constante en ningún entorno de t , necesariamente $g(s) < g(t)$ para $s < t$, $g(s) > g(t)$ para $s > t$ o se dan ambas situaciones. En el primer caso, si

$s \in [t_0, t)$, se verifica que

$$(g(t) - g(s)) \inf_{s \leq r < t} f(r, x(r)) = \mu_g([s, t]) \inf_{s \leq r < t} f(r, x(r)) \leq \int_{[s, t]} f(r, x(r)) d\mu_g = x(t) - x(s) \\ \leq \mu_g([s, t]) \sup_{s \leq r < t} f(r, x(r)) = (g(t) - g(s)) \sup_{s \leq r < t} f(r, x(r)).$$

Por tanto, como $f(\cdot, x(\cdot))$ es continua en t , existe

$$\lim_{s \rightarrow t^-} \frac{x(s) - x(t)}{g(s) - g(t)} = f(t, x(t)),$$

así que en los casos en los que la g -derivada se calcule como el límite por la izquierda (es decir, si $g(s) = g(t)$ en $[t, t + \delta]$) hemos terminado. Un razonamiento análogo funciona si la derivada se calcula como el límite por la derecha, y combinando procedimientos sucede lo esperado en los puntos en los que el límite se toma por ambos lados.

Para finalizar, si $t \in [t_0, t_0 + \kappa) \cap C_g$, como $f(\cdot, x(\cdot))$ es g -continua y $t^* \in [t_0, t_0 + \kappa)$,

$$x'_g(t) = x'_g(t^*) = f(t^*, x(t^*)) = f(t, x(t)). \quad \blacksquare$$

Definición 7.7. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, y $(t_0, x_0) \in A$. Diremos que f es $(g \times \text{Id})$ -continua en (t_0, x_0) si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t_0, x_0)\| < \varepsilon \text{ si } (t, x) \in A, |g(t) - g(t_0)| < \delta, \|x - x_0\| < \delta.$$

f será $(g \times \text{Id})$ -continua en A cuando lo sea en todos los puntos de A .

La noción de $(g \times \text{Id})$ -continuidad es equivalente a la continuidad con respecto a la topología producto $\kappa_g \times \kappa$. Como es de esperar, cuando f sea $(g \times \text{Id})$ -continua, las soluciones de (7.1) tienen buenas propiedades.

Corolario 7.8. Sea $f : [t_0, t_0 + T] \times \overline{B(x_0, r)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función $(g \times \text{Id})$ -continua, y tal que existe $h \in \mathcal{L}_g^1(I, [0, \infty))$ cumpliendo

$$\|f(t, x)\| \leq h(t) \text{ en } g\text{-casi todo } t \in I, \text{ y para todo } x \in \overline{B(x_0, r)}.$$

Entonces existe $\kappa \in (0, T]$ tal que (7.1) tiene solución, la cual verifica la ecuación en todo I_κ , y además es g -continua en I_κ .

Demostración. El Teorema 7.5 garantiza la existencia de una solución absolutamente g -continua $x : \bar{I}_\kappa \rightarrow \mathbb{R}^n$. Recortando el intervalo de ser necesario, podemos asegurar que $t^* \in I_\kappa$ para cualquier $t \in I_\kappa$. Por otro lado, la $(g \times \text{Id})$ -continuidad de f permite afirmar (ya que x es en particular g -continua) que $f(\cdot, x(\cdot))$ es g -continua en \bar{I}_κ . Podemos aplicar ahora la Proposición 7.6, y se sigue el resultado. ■

8. Apéndice

Se incluye a continuación la desigualdad triangular que quedó por demostrar en la Proposición 6.29.

Proposición 8.1. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y

$$l(x, y) := \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + y^2}}.$$

Entonces, para cualquier $z \in \mathbb{R}$,

$$l(x, y) \leq l(x, z) + l(z, y)$$

Demostración. Usando la simetría de l , supongamos sin pérdida de generalidad que $x < y$, y veamos que la función

$$f : z \in \mathbb{R} \rightarrow f(z) = l(x, z) + l(y, z) - l(x, y),$$

satisface $f(z) \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$ (nótese que si $x = y$, $f(z) = 2l(y, z) \geq 0$). Por un lado,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{|z - x|}{\sqrt{1 + z^2}\sqrt{1 + x^2}} + \frac{|z - y|}{\sqrt{1 + z^2}\sqrt{1 + y^2}} - \frac{|y - x|}{\sqrt{1 + y^2}\sqrt{1 + x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + y^2}\sqrt{1 + z^2}} \left(|z - x|\sqrt{1 + y^2} + |z - y|\sqrt{1 + x^2} - (y - x)\sqrt{1 + z^2} \right). \end{aligned}$$

Consideremos la función

$$g(z) = |z - x|\sqrt{1 + y^2} + |z - y|\sqrt{1 + x^2} - (y - x)\sqrt{1 + z^2},$$

que es dos veces derivable en $\mathbb{R} \setminus \{x, y\}$, y además,

$$g''(z) = -\frac{(y - x)}{(z^2 + 1)^{3/2}} < 0.$$

Por tanto, en caso de tener algún extremo relativo en $(-\infty, x), (x, y), (y, \infty)$, este es máximo estricto (por ser cóncava, g satisface que $g(s) < g(t) + g'(t)(s - t)$ para s y t en cualquier intervalo en que dicha función sea derivable). Comprobemos qué sucede en cada caso:

(1) $z \in (x, y)$. Veamos que

$$g(z) = (z - x)\sqrt{1 + y^2} + (y - z)\sqrt{1 + x^2} - (y - x)\sqrt{1 + z^2} \geq 0, \quad \forall z \in [x, y].$$

Efectivamente, como $g(x) = g(y) = 0$, necesariamente $g(z) \geq 0$ para todo $z \in (x, y)$, o de lo contrario habría un mínimo absoluto (y por tanto relativo) en (x, y) , que sabemos que no es posible.

(2) $z \in (y, \infty)$. Igual que antes, $g(y) = 0$. Si definimos

$$h(z) = \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+z^2},$$

se tendrá que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{h(z)} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{y-x}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{y^2+1} + \sqrt{x^2+1} - y + x}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}} > \frac{|y| + |x| - y + x}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}} \geq 0. \end{aligned}$$

Como $h(z) > 0$, existe M tal que $g(z) > 0$ para cualquier $z \geq M$. Si $g(z) < 0$ en algún punto de (y, M) , g debe tener un mínimo relativo en ese intervalo (puesto que es continua en $[y, M]$, $g(y) = 0$ y $g(M) > 0$), pero esto no es posible por el mismo motivo que en el primer apartado.

(3) $z \in (-\infty, x)$. Análogo al caso anterior (de hecho el límite es el mismo cuando z tiende a $-\infty$).

■

Bibliografía

- [1] Albés, I.M., Tojo, F.A.F: *Existence and Uniqueness of Solution for Stieltjes Differential Equations with Several Derivators*. Mediterranean Journal of Mathematics **18**(5) (2021)
- [2] Anónimo: *The Sorgenfrey line is hereditarily Lindelöf*. Mathematics Stack Exchange. URL <https://math.stackexchange.com/users/8348/user642796>. Acceso: 28-06-22
- [3] Area, I., Fernández, F.J., Nieto, J.J., Tojo, F.A.F: *Concept and solution of digital twin based on a Stieltjes differential equation*. Mathematical Methods in the Applied Sciences (2022)
- [4] Athreya, K.B., Lahiri, S.N.: *Measure Theory and Probability Theory*. Springer London, Limited (2006)
- [5] Bonsall, F: *Lectures on Some Fixed Point Theorems of Functional Analysis*. No. n.º 26 in *Lectures on Some Fixed Point Theorems of Functional Analysis*. Tata Institute of Fundamental Research (1962)
- [6] Carothers, N.L.: *Real analysis*. Cambridge University Press
- [7] Fernández, F.J., Albés, I.M., Tojo, F.A.F: *Consequences of the product rule in Stieltjes differentiability*
- [8] Fernández, F.J., Márquez Albés, I., Tojo, F.A.F: *On first and second order linear Stieltjes differential equations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications **511**(1), 126,010 (2022)
- [9] Frigon, M., Pouso, R.L.: *Theory and applications of first-order systems of Stieltjes differential equations*. Advances in Nonlinear Analysis **6**(1), 13–36 (2017)
- [10] Frigon, M., Tojo, F.A.F: *Stieltjes differential systems with nonmonotonic derivators*. Boundary Value Problems **2020**(1) (2020)
- [11] Hanche-Olsen, H.: *Visualization of Riemann–Stieltjes Integrals*. MathOverflow. URL <https://mathoverflow.net/users/802/harald-hanche-olsen>. Acceso: 28-06-22
- [12] Hanche-Olsen, H., Holden, H.: *The Kolmogorov–Riesz compactness theorem*. Expositiones Mathematicae **28**(4), 385–394 (2010)

-
- [13] Hanche-Olsen, H., Holden, H., Malinnikova, E.: *An improvement of the Kolmogorov–Riesz compactness theorem*. *Expositiones Mathematicae* **37**(1), 84–91 (2019)
- [14] Hildebrandt, T.H.: *Compactness in the Space of Quasi-Continuous Functions*. *The American Mathematical Monthly* **73**(4P2), 144–145 (1966)
- [15] Márquez Albés, I.: *Differential problems with Stieltjes derivatives and applications* (2020). Tesis Doctoral (USC)
- [16] Nagata, J.i.: *Encyclopedia of general topology*. Elsevier/North-Holland (2004)
- [17] Pouso, R.L., Rodríguez, A.: *A new unification of continuous, discrete and impulsive calculus through Stieltjes derivatives*. *Real Analysis Exchange* **40**(2), 319–354 (2015)
- [18] Vala, K.: *On compact sets of compact operators*. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Mathematica* (1964)