



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Fórmulas de Cuadratura

Laura Rodríguez Sieira

2023/2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Fórmulas de Cuadratura

Laura Rodríguez Sieira

Xullo, 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA





---

# Traballo proposto

<b>Área de Coñecemento: Matemática Aplicada</b>
<b>Título: Fórmulas de cuadratura</b>
<b>Breve descripción do contido</b>  Tomando como base os conceptos aprendidos no grao, avanza-se no estudo de métodos de integración numérica. Acompañando ao desenvolvemento teórico ou descriptivo, programaranse algúns desos métodos en ordenador.
<b>Recomendacións</b>
<ul style="list-style-type: none"><li>· Primeira etapa (novembro): determinación e lectura de bibliografía e concreción de puntos e obxectivos xerais do traballo.</li><li>· Segunda etapa (decembro en diante): estudo dos métodos numéricos, programación dalgúns deles e redacción continuada.</li></ul> <p>En ambas etapas:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>· Entrega de borradores ao titor para a súa revisión e corrección.</li><li>· Reunións quincenais co titor para comprobar progresos.</li></ul>
<b>Titor</b>
Óscar López Pouso.

# Índice

<b>Resumo</b>	<b>VIII</b>
<b>Introdución</b>	<b>XI</b>
<b>1. Concepto de fórmula de cuadratura. Nocións previas</b>	<b>1</b>
1.1. Fórmula de cuadratura . . . . .	1
1.2. Erro de cuadratura e grao de precisión . . . . .	2
<b>2. Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico</b>	<b>5</b>
2.1. O erro das fórmulas de cuadratura de tipo i.p. . . . .	10
2.2. Transformacións afíns sobre os coeficientes dunha fórmula de cuadratura . . . . .	17
2.3. Propiedades dos coeficientes das fórmulas de cuadratura de tipo i.p. . . . .	18
2.4. Fórmulas de cuadratura con coeficientes non negativos . . . . .	20
<b>3. Fórmulas de Newton-Cotes</b>	<b>21</b>
3.1. Obtención dos coeficientes de cuadratura. . . . .	22
3.2. Erro das fórmulas de Newton-Cotes. . . . .	24
<b>4. Aproximación de integrais da forma <math>\int_a^b f(x)w(x)dx</math>.</b>	<b>33</b>
<b>5. Convergencia das fórmulas de cuadratura</b>	<b>37</b>
<b>6. Fórmulas de Gauss</b>	<b>41</b>

---

6.1. Polinomios ortogonais . . . . .	42
6.2. Problema de Gauss . . . . .	44
6.3. Expresión do erro para as fórmulas de Gauss . . . . .	47
6.4. Fórmulas de Gauss-Legendre en $(-1, 1)$ . . . . .	47
<b>7. Fórmulas compostas</b>	<b>51</b>
7.1. Fórmulas de Newton-Cotes pechadas compostas . . . . .	52
7.1.1. Fórmula do trapecio composta . . . . .	54
7.1.2. Fórmula de Simpson composta . . . . .	54
7.2. Convergencia das fórmulas compostas . . . . .	55
<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>



---

## Resumo

Neste traballo abordaremos o estudo de métodos numéricos para o cálculo aproximado da integral definida a través de diversas fórmulas de cuadratura. En primeiro lugar, falaremos das fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico (de tipo i.p.) e daremos unhas pinceladas comúns a todas elas. Estudaremos en profundidade dous casos importantes das fórmulas de tipo i.p.: as fórmulas de Newton-Cotes e as fórmulas de Gauss. Por último, estudaremos as fórmulas de cuadratura compostas, que tratan de obter mellores resultados.

Veremos como obter os coeficientes de cada respectiva fórmula, e para as gaussianas tamén os nodos de cuadratura. En cada caso falaremos do erro de cuadratura e daremos algún que outro resultado acerca da converxencia.

## Abstract

In this paper we will address the study of numerical methods for the approximate calculation of the definite integral through various quadrature formulas. First of all, we will talk about polynomial interpolatory quadrature formulas and we will offer a common glimpse to all of them. We will study in depth two important cases of the polynomial interpolatory quadrature formulas: the Newton-Cotes formulae and the Gaussian quadrature. Finally we will study composite quadrature formulae, which try to obtain better results.

We will see how to obtain the coefficients of each respective formula and, for Gaussians, also the quadrature nodes. In each case we will talk about the quadrature error and give several results about convergence.



# Introdución

Historicamente, coñécese como cuadratura ao cálculo aproximado de integrais. Esta necesidade de calcular aproximacións, en lugar do valor exacto da integral, pode vir motivada por diversos motivos, como poden ser:

- O descoñecemento dunha primitiva da función que se integra.
- O cálculo dunha primitiva do integrando é complexo ou incluso impreciso.
- Só coñecemos o valor da función a integrar nunha cantidade finita de puntos.

O labor recollido neste traballo consistirá entón en desenvolver métodos numéricos para aproximar o valor da integral definida a través dunha combinación lineal dos valores tomados polo integrando nunha serie de nodos ou puntos, que como veremos se traducirá na elección apropiada dos nodos e coeficientes de cuadratura.

Estudaremos fórmulas de cuadratura que resultan de aproximar o valor da integral definida a través de

$$\int_a^b p_n(x) dx, \quad (1)$$

sendo  $p_n$  o polinomio de interpolación de  $f$  relativo aos puntos  $x_1, \dots, x_n$ . Estas fórmulas coñecerémolas co nome de fórmulas de tipo interpolatorio polinómico (de tipo i.p.).

Comezaremos falando das *fórmulas simples*, que se basean na idea de integrar o polinomio de interpolación de Lagrange en todo o intervalo  $[a, b]$ . Inclúense neste grupo algunhas fórmulas ben coñecidas, como son a fórmula do trapecio, a fórmula de Simpson ou a fórmula do punto medio ou de Poncelet. Trataremos tamén importantes consideracións acerca do erro destas fórmulas e diversas propiedades.

Destacaremos dentro das fórmulas simples as fórmulas de Newton-Cotes, que estudaremos en profundidade no Capítulo 3.

Posteriormente, no Capítulo 5, fixarémonos nas limitacións de ditas fórmulas, que non escaparon á vista de autores como Carl Runge e George Pólya, e que nos levarán a introducir un segundo

caso importante de fórmulas simples: as fórmulas de Gauss. Falaremos delas no Capítulo 6, prestando certa atención ao caso particular das fórmulas de Gauss-Legendre.

Chegaremos neste capítulo a recoñecer a mellora de precisión destas fórmulas fronte ás de Newton-Cotes.

Finalmente, no Capítulo 7 falaremos das *fórmulas compostas*, que tratan de dar forma á idea de obter unha precisión razoable sobre un intervalo grande. Basearanse na división do intervalo de integración en subintervalos para logo aplicar en cada un unha fórmula de baixo grado.

Estudaremos algúns exemplos importantes, como a fórmula do trapecio composta ou a fórmula de Simpson composta.

Recolleremos, por último, un resultado que proba a converxencia destas fórmulas.

# Capítulo 1

## Concepto de fórmula de cuadratura.

### Nocións previas

Neste capítulo comezaremos introducindo unha serie de definicións e de conceptos básicos sobre os que máis tarde desenvolveremos os métodos para a aproximación das integrais definidas. Podemos ver os conceptos tratados neste capítulo en [10] (páxs. 106-110).

#### 1.1. Fórmula de cuadratura

O noso obxectivo será estudar diversos métodos numéricos para o cálculo aproximado de integrais definidas

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx, \quad (1.1)$$

sendo  $(a, b)$  un intervalo real, limitado e non baleiro.

A idea xeral dos métodos numéricos que consideraremos será, coñecidos os valores exactos do integrando nun número finito de puntos,  $f(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , aproximar o valor de (1.1) a través dunha combinación lineal dos mesmos, que recibe o nome de *fórmula de cuadratura*:

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i). \quad (1.2)$$

Os puntos  $x_i$  son os *puntos* ou *nodos de cuadratura*, que supoñemos ordenados de menor a maior, e os  $A_i$  son os *pesos* ou *coeficientes de cuadratura*, que teremos que calcular.

## 1.2. Erro de cuadratura e grao de precisión

Definimos o *erro de cuadratura ou truncamento* como a diferenza entre o valor exacto da integral  $I(f)$ , e o seu valor aproximado,  $Q_n(f)$ :

$$I(f) = Q_n(f) + E_n(f), \quad (1.3)$$

onde o símbolo  $E_n(f)$  representa o erro de cuadratura. Notemos que  $E_n$  é unha función lineal.

Este erro pode ser arbitrariamente alto para calquera fórmula dada aínda que a función que consideremos no integrando sexa moi regular. Vexámolo cun exemplo: consideremos a función  $f_c(x) = c \prod_{i=1}^n (x - x_i)^2$ , con  $x \in (a, b)$  e para un certo  $c \in \mathbb{R}$ , entón:

$$I(f_c) = c \int_a^b \prod_{i=1}^n (x - x_i)^2 dx = c \int_a^b (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 dx. \quad (1.4)$$

Probaremos que  $\{I(f_c)\}_{c \in \mathbb{R}} = \mathbb{R}$ :

Por ser  $(x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 \geq 0$ , para todo  $x \in (a, b)$ , sendo  $(a, b)$  un intervalo real calquera, tense  $\int_a^b (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 dx > 0$ .

O contido hacia a dereita é inmediato, vexamos agora o outro contido. Por hipótese, a integral é non nula, existe e toma un valor real. Por tanto, para cada  $k \in \mathbb{R}$  podemos tomar  $c = \frac{k}{\int_a^b (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 dx} \in \mathbb{R}$ , para obter  $I(f_c) = k$ , o que remata a proba.

Por outra banda:

$$Q_n(f_c) = \sum_{i=1}^n A_i f_c(x_i) = \sum_{i=1}^n (A_i c \prod_{j=1}^n (x_i - x_j)^2) = 0. \quad (1.5)$$

Por tanto,  $\{Q_n(f_c)\}_{c \in \mathbb{R}} = \{0\}$ , o que implica que o erro cometido na aproximación pode ser tan grande como queiramos ao escollermos a constante  $c$ .

É importante tamén notar que para calquera  $c \in \mathbb{R}$  é posible calcular  $I(f_c)$  con tanta precisión como se queira, elixindo unha cuadratura adecuada, como veremos nos próximos capítulos.

Logo, o problema de integración numérica será elixir os nodos e coeficientes para conseguir unha boa aproximación  $Q_n(f)$  de  $I(f)$  para moitas clases de funcións, é dicir, o problema básico de integración numérica é minimizar o erro de cuadratura  $E_n(f)$  para moitas clases de funcións.

Para cuantificar o erro dunha fórmula de cuadratura empregaremos o concepto de *erro ou grao de precisión*.

**Definición 1.1.** Dise que unha fórmula de cuadratura é *de orde  $m$*  ou que *ten grao de precisión  $m$* , con  $m \in \mathbb{N}$ , se

$$E_n(x^k) = 0 \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, m \quad (1.6)$$

$$\text{e } E_n(x^{m+1}) \neq 0. \quad (1.7)$$

Logo unha fórmula de orde  $m$  non integra exactamente ningún polinomio de grao  $m + 1$ .

Que unha fórmula de cuadratura sexa de orde  $m$  non significa que non calcule exactamente a integral para ningún polinomio de grao  $s$  con  $s \geq m + 2$ , pero si implica que haberá algún polinomio dese grao que non integre de forma exacta.

Vexamos esto último: supoñemos que unha fórmula de orde  $m$  integra exactamente os polinomios de grao  $s$ , con  $s \geq m + 2$ , entón cumpriríase que  $E_n(x^s + x^{m+1})$  e  $E_n(x^s)$  son 0 simultaneamente, pero isto non pode ser, xa que daquela:

$$E_n(x^s + x^{m+1}) - E_n(x^s) = E_n(x^{m+1}) = 0, \quad (1.8)$$

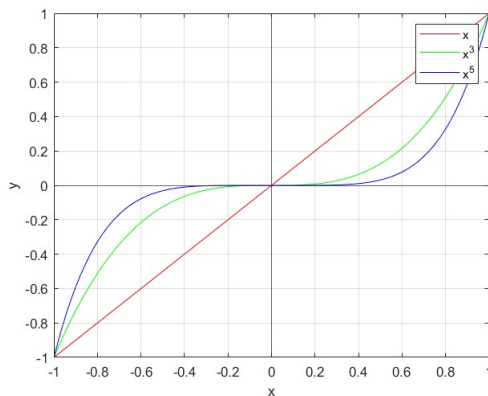
chegando así a unha contradición, xa que por definición de fórmula de orde  $m$  cúmprese que  $E_n(x^{m+1}) \neq 0$ .

Atopamos entón un número infinito de polinomios de grao  $s \geq m + 2$  que a fórmula non integra exactamente.

*Observación 1.2.* Denotamos, para cada  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\mathbb{P}_m$  como o espazo dos polinomios de grao menor ou igual ca  $m$ . Se unha fórmula de cuadratura é de orde  $m$ , entón é exacta en  $\mathbb{P}_m$ , é dicir, unha fórmula de cuadratura é de orde  $m$  se, e so se,  $m$  é o maior enteiro tal que a fórmula é exacta en  $\mathbb{P}_m$ .

*Observación 1.3.* Se na Definición (1.1) se cumpre só a condición (1.6), é dicir,  $E_n(x^k) = 0$ , para  $k = 0, 1, \dots, m$ , dicimos que a fórmula será *polo menos de orde m*.

Un exemplo de que unha fórmula de cuadratura de orde  $m$  pode integrar de forma exacta polinomios de orde  $m + 2$  témolo ao aproximar as integrais dos monomios  $x^k$ , con  $k$  impar coa fórmula do trapecio, que veremos máis adiante que ten orde 1. Na seguinte figura vese claramente que, dados os monomios  $x$ ,  $x^3$  e  $x^5$  e un intervalo  $(-a, a)$ , a fórmula do trapecio aproxima as 3 integrais por  $\int_{-a}^a x dx = \frac{a^2 - a^2}{2} = 0$ .





## Capítulo 2

# Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico

Introduciremos en primeiro lugar o concepto de polinomio de interpolación (ver por exemplo [8], páxs. 38-40):

Sexan  $n$  puntos distintos,

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n, \quad (2.1)$$

nos cales  $f$  está definida e pode ser avaliada. Chamamos *polinomio de interpolación de  $f$  relativo aos puntos  $x_1, \dots, x_n$* , e denotámolo por  $p_n(x)$ , ao único polinomio de grao  $\leq n - 1$  tal que

$$p_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Empregando a fórmula de Lagrange, o polinomio de interpolación  $p_n(x)$  toma a seguinte expresión:

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(x), \quad (2.3)$$

onde os  $l_i$ , con  $i \in \{1, \dots, n\}$ , son os *polinomios fundamentais de Lagrange* relativos aos puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$l_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (2.4)$$

É dicir,  $l_i(x)$  é o único polinomio de grao  $\leq n - 1$  tal que  $l_i(x_j) = \delta_{ij}$  para  $j = 1, \dots, n$ .

As fórmulas de cuadratura obtidas ao aproximar a integral definida  $\int_a^b f(x) dx$  por  $\int_a^b p_n(x) dx$  son as que se coñecen como *fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico*. De agora en diante, denotarémolas por *fórmulas de tipo i.p.*

As fórmulas de cuadratura de tipo i.p. que estudaremos en primeiro lugar coñécense como

*fórmulas simples*, e basearanse na integración do polinomio de interpolación de Lagrange en todo o intervalo.

Vexamos en primeiro lugar que a expresión  $\int_a^b p_n(x)dx$  representa unha fórmula de cuadratura. Para isto, basta substituír o polinomio de interpolación  $p_n$  pola fórmula dada por Lagrange:

$$\int_a^b p_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=1}^n f(x_i)l_i(x)dx \stackrel{(1)}{=} \sum_{i=1}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x)dx \stackrel{(2)}{=} \sum_{i=1}^n f(x_i)A_i, \quad (2.5)$$

onde en (1) empregamos que a suma é finita para podela intercambiar coa integral, e en (2) empregamos a seguinte igualdade:

$$A_i = \int_a^b l_i(x)dx, \quad (2.6)$$

o que proba que  $\int_a^b p_n(x)dx$  é unha fórmula de cuadratura.

Disto deducimos en primeiro lugar que as fórmulas de tipo i.p. son exactamente as fórmulas de cuadratura nas que os coeficientes veñen dados por (2.6). Esta caracterización das fórmulas de tipo i.p. danos un primeiro método para calcular os coeficientes de cuadratura. Vexámolo cun exemplo:

**Exemplo 2.1.** Imos obter os coeficientes de cuadratura  $A_1$  e  $A_2$  da seguinte fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_1 f(a) + A_2 f(b). \quad (2.7)$$

Calculamos en primeiro lugar os  $l_i(x)$  empregando a fórmula (2.4):

$$l_1(x) = \frac{x-b}{a-b}, \quad l_2(x) = \frac{x-a}{b-a}. \quad (2.8)$$

Empregando o método dado pola fórmula (2.6):

$$A_1 = \int_a^b l_1(x)dx = \frac{b-a}{2}, \quad A_2 = \int_a^b l_2(x)dx = \frac{b-a}{2}. \quad (2.9)$$

Obtemos así a coñecida como *fórmula do trapecio*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]. \quad (2.10)$$

Veremos máis adiante que esta fórmula é *de orde 1*.

**Teorema 2.2.** [*De caracterización das fórmulas de tipo i.p.*]. Unha fórmula de cuadratura de  $n$  nodos,  $\sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$ , é de tipo i.p. se, e so se, é polo menos de orde  $n-1$ .

*Demostración.* Probaremos en primeiro lugar a implicación cara á dereita. Supoñemos que a fórmula  $\sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$  é de tipo i.p., é dicir:

$$A_i = \int_a^b l_i(x)dx, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.11)$$

e queremos ver que integra exactamente polinomios de grao  $\leq n - 1$ .

Sexa  $p \in \mathbb{P}_{n-1}$ :

$$\int_a^b p(x) dx \stackrel{(1)}{=} \int_a^b \sum_{i=1}^n p(x_i) l_i(x) dx, = \sum_{i=1}^n p(x_i) \int_a^b l_i(x) dx = \sum_{i=1}^n p(x_i) A_i \quad (2.12)$$

onde en (1) empregamos que  $p$  é o seu propio polinomio de interpolación de Lagrange. Isto séguese de que  $p$  é un polinomio de grao  $\leq n - 1$  e o polinomio de interpolación de Lagrange coincide con  $p$  nos nodos e é tamén de grao  $\leq n - 1$ . Concluimos entón que cando a integral a aproximar é a dun polinomio de grao  $\leq n - 1$ , a fórmula é exacta.

Probaremos agora a outra implicación, é dicir, queremos ver que  $A_i = \int_a^b l_i(x) dx$ .

Como a fórmula é exacta para polinomios de grao  $\leq n - 1$ , é exacta para os polinomios fundamentais de Lagrange:

$$\int_a^b l_i(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j l_i(x_j) = \sum_{j=1}^n A_j \delta_{ij} = A_i \quad (2.13)$$

Como o anterior se cumpre para todo  $i = 1, \dots, n$ , concluimos a proba.  $\square$

**Definición 2.3.** Cando unha fórmula de cuadratura de tipo i.p. de  $n$  puntos é de orde maior que  $n - 1$ , dirase que a fórmula é *superexacta*.

O Teorema 2.2 proporciónanos outro método para calcular os coeficientes das fórmulas de tipo i.p., xa que ao seren estas polo menos de orde  $n - 1$ , é dicir, exactas en  $\mathbb{P}_{n-1}$ , equivale a que integrarán exactamente os monomios da forma  $x^k$ , con  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ :

$$\sum_{i=1}^n A_i x_i^k = \int_a^b x^k dx. \quad (2.14)$$

Se desenvolvemos o lado dereito da igualdade calculando a integral do monomio:

$$\int_a^b x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_a^b = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}. \quad (2.15)$$

Entón obtemos a seguinte fórmula:

$$\sum_{i=1}^n A_i x_i^k = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (2.16)$$

que nos proporciona o sistema:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \dots + A_n = b - a \\ A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = \frac{b^2 - a^2}{2} \\ \vdots \\ A_1 x_1^{n-1} + A_2 x_2^{n-1} + \dots + A_n x_n^{n-1} = \frac{b^n - a^n}{n} \end{cases} \quad (2.17)$$

Esta forma de calcular os coeficientes de cuadratura coñécese como *método dos coeficientes indeterminados*.

**Exemplo 2.4.** A continuación, imos obter os coeficientes de cuadratura  $A_1$  e  $A_2$  da fórmula do trapecio (Exemplo 2.1) empregando o método dos coeficientes indeterminados, e comprobaremos que obtemos os mesmos resultados que calculándoos coa fórmula (2.6).

Polo método dos coeficientes indeterminados, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 &= b - a, \\ A_1 a + A_2 b &= \frac{b^2 - a^2}{2}, \end{cases} \quad (2.18)$$

do que obtemos as solucións:

$$A_1 = A_2 = \frac{b - a}{2}, \quad (2.19)$$

e acadamos igualmente a fórmula do trapecio. Esta fórmula é por construción de orde 1 (polo Teorema 2.2), e ademais é exactamente de orde 1 xa que non integra exactamente  $f(x) = x^2 \in \mathbb{P}_2$ , por exemplo, no intervalo  $(1, 2)$ .

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{7}{3}. \quad (2.20)$$

Pero, se empregamos a fórmula do trapecio:

$$\frac{b - a}{2} [a^2 + b^2] = \frac{5}{2}, \quad (2.21)$$

co que probamos que esta fórmula é exactamente de orde 1.

**Exemplo 2.5.** Imos calcular agora un valor aproximado de  $\int_1^2 2^x dx$  empregando a fórmula de tipo i.p. asociada aos nodos de cuadratura  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$  a través da resolución do sistema para calcular os coeficientes.

A continuación presentamos un programa de *MATLAB* chamado *coef.m* que implementa o cálculo dos coeficientes da fórmula de cuadratura simple de tipo i.p. asociada a uns determinados nodos, coñecidos a función  $f$  e o intervalo  $[a, b]$ .

```
function [A]=coef(a,b,x)
%Leemos os datos do exemplo 2.4
data
n = length(x);
%Creamos en primeiro lugar a matriz de coeficientes:
M = zeros(n);
for i = 1:n
    M(i,1:n) = x.^(i-1);
end
```

```

%Creamos agora o vector do segundo membro, o termo independente:
sm = arrayfun(@(k) (b.^k - a.^k)./k, 1:n);
%Finalmente calculamos os coeficientes de cuadratura:
fprintf('\n\n* Coeficientes de cuadratura:');
A = M\transpose(sm)
end

```

Cos datos do Exemplo 2.5, este programa proporciónanos a seguinte saída de MATLAB:

```
* Coeficientes de cuadratura:
```

```
A =
```

```

-1/24
13/24
13/24
-1/24

```

Así chegamos á seguinte fórmula de cuadratura de tipo i.p.:

$$\int_1^2 f(x)dx \approx -\frac{1}{24}(f(0) + f(3)) + \frac{13}{24}(f(1) + f(2)). \quad (2.22)$$

Por tanto,

$$\int_1^2 2^x dx \approx -\frac{1}{24}(1 + 2^3) + \frac{13}{24}(2 + 2^2) = \frac{23}{8}. \quad (2.23)$$

*Observación 2.6.* O sistema do método dos coeficientes indeterminados ten solución única, xa que a forma deste sistema ven dada pola ecuación (2.14), é dicir, cumpre que integra exactamente os monomios da forma  $x^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ , ou o que é o mesmo, é polo menos de orde  $n - 1$ . Por tanto, en virtude do Teorema 2.2, é unha fórmula de tipo i.p., o que equivale a que os seus coeficientes veñan univocamente determinados por (2.6).

*Observación 2.7.* Nótese que da primeira ecuación do sistema obtemos que  $\sum_{i=1}^n A_i = b - a$ , é dicir, para que unha fórmula de tipo i.p. sexa polo menos de orde 0, a suma dos coeficientes debe ser igual á lonxitude do intervalo  $(a, b)$ .

Esta regra deixa de ser válida se, como se fará no Capítulo 4, a integral que se aproxima é da forma  $\int_a^b f(x)w(x)dx$ , sendo  $w(x)$  unha función peso. Neste caso debe cumprirse que  $\sum_{i=1}^n A_i = \int_a^b w(x)dx$ .

*Observación 2.8.* A matriz asociada ao sistema do método dos coeficientes indeterminados vólvese mal condicionada a medida que o número de nodos aumenta, facendo que a precisión do método perda valor.

### 2.1. O erro das fórmulas de cuadratura de tipo i.p.

Introducimos en primeiro lugar un teorema que nos permita estudar o erro de interpolación polinómica cando a función dada cumpra unhas determinadas características.

**Teorema 2.9.** [*Erro da interpolación polinómica de Lagrange*] Supoñamos que  $x_1, \dots, x_n$  son  $n$  puntos distintos, e sexa  $x \in \mathbb{R}$ . Supoñamos que  $f$  é unha función continua en  $[\alpha_x, \beta_x]$  e  $n$  veces derivable en  $(\alpha_x, \beta_x)$ , sendo

$$\alpha_x = \min\{x_1, \dots, x_n, x\} \quad e \quad \beta_x = \max\{x_1, \dots, x_n, x\}. \quad (2.24)$$

Sexa  $p_n$  o polinomio de interpolación de  $f$  relativo aos nodos  $x_1, \dots, x_n$ . Entón, existe  $\xi_x \in (\alpha_x, \beta_x)$  tal que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!} \pi_n(x), \quad (2.25)$$

con  $\pi_n(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$ .

Tendo en conta que a expresión do erro das fórmulas de tipo i.p. vén dado por

$$E_n(f) = \int_a^b (f(x) - p_n(x)) dx, \quad (2.26)$$

deducimos do teorema precedente que o erro dunha fórmula de cuadratura de tipo i.p. é a integral do erro de interpolación, é dicir:

$$E_n(f) = \int_a^b \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!} \pi_n(x) dx. \quad (2.27)$$

Porén, a expresión do erro dada en (2.27) non é práctica, no sentido de que non nos achega información acerca do grao de precisión da fórmula. Por iso, estamos máis interesados en representacións do erro da forma

$$E_n(f) = K f^{(m+1)}(\xi), \quad f \in C^{m+1}([c, d]) \quad (2.28)$$

para certo  $\xi \in (c, d)$  onde  $K$  é unha constante non nula e  $[c, d]$  é o menor intervalo pechado que contén a  $[a, b]$  e aos nodos de interpolación. Deste xeito, sería claro que a fórmula tería grao de precisión  $m$ , xa que  $E_n(x^k) = 0$ , para  $k = 0, 1, \dots, m$  e  $E_n(x^{m+1}) \neq 0$ .

Ademais, unha expresión do erro como a de (2.28) permitiríanos calcular de forma exacta a integral de polinomios de grao  $m + 1$  sen mais que sumar o erro ao valor aproximado pola fórmula.

A continuación, daremos unha expresión da forma (2.28) para cando  $(a, b) \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \emptyset$ . Neste caso estaremos en posición de aplicar o teorema do valor medio do cálculo integral, na versión dada en [9] (Capítulo 6, exercicio 28, páxina 281), que refina o resultado afirmando que o punto  $\xi$  pode ser tomado no intervalo aberto.

**Teorema 2.10.** [*Teorema do valor medio do cálculo integral*] Sexa  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  un intervalo limitado e non baleiro. Sexa  $u$  unha función continua en  $[a, b]$  e sexa  $g$  unha función de  $L^1(a, b)$  que non cambia de signo esencialmente en  $[a, b]$ . Entón, existe  $\xi \in (a, b)$  tal que

$$\int_a^b u(x)g(x)dx = u(\xi) \int_a^b g(x)dx. \quad (2.29)$$

**Teorema 2.11.** Sexan  $n$  puntos distintos,  $x_1 < \dots < x_n$  e consideramos a súa fórmula de cuadratura de tipo i.p. correspondente:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i). \quad (2.30)$$

Supoñamos que

$$\pi_n(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n) \quad (2.31)$$

non cambia de signo en  $[a, b]$  e que  $f \in C^n([c, d])$ , sendo  $c = \min\{a, x_1\}$  e  $d = \max\{b, x_n\}$ . Entón existe  $\eta \in (c, d)$  tal que

$$E_n(f) = \frac{f^{(n)}(\eta)}{n!} \int_a^b \pi_n(x)dx. \quad (2.32)$$

*Demostración.* Cando  $(a, b) \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \emptyset$ ,  $\pi_n(x)$  non cambia de signo en  $[a, b]$ , o que equivale a dicir que todos os nodos  $x_i$  están fóra de  $(a, b)$  (notemos que non estamos excluindo que algún dos nodos poida tomar os valores  $a$  ou  $b$ ). De (2.26) temos que

$$E_n(f) = \int_a^b (f(x) - p_n(x))dx = \int_a^b \frac{(f(x) - p_n(x))}{\pi_n(x)} \pi_n(x)dx, \quad (2.33)$$

e en virtude do teorema do valor medio do cálculo integral, existe  $\xi \in (a, b)$  tal que

$$E_n(f) = \frac{(f(\xi) - p_n(\xi))}{\pi_n(\xi)} \int_a^b \pi_n(x)dx. \quad (2.34)$$

É importante ter en conta que o uso do Teorema 2.10 é admisible aínda que algún dos nodos,  $x_i$ , tome algún dos valores  $a$  ou  $b$ , xa que a continuidade da función  $u$  (nas notacións do Teorema 2.10) queda garantida coa existencia en  $\mathbb{R}$  do límite

$$\lim_{x \rightarrow x_i} \frac{(f(x) - p_n(x))}{\pi_n(x)} \stackrel{(0/0)}{=} \frac{f'(x_i) - p'_n(x_i)}{\underbrace{\pi'_n(x_i)}_{\neq 0}}. \quad (2.35)$$

Resulta tamén esencial que  $\xi$  poida tomarse no aberto  $(a, b)$ , xa que así aseguramos que  $\pi_n(\xi) \neq 0$ . Empregando agora o Teorema 2.9, podemos afirmar a existencia dun  $\eta \in (c, d)$  tal que

$$\frac{f(\xi) - p_n(\xi)}{\pi_n(\xi)} = \frac{f^{(n)}(\eta)}{n!}. \quad (2.36)$$

Tendo en conta (2.34), esta última igualdade remata a proba.  $\square$

Este resultado é débil, xa que a suposición de que os nodos  $x_i$  estén fóra do interior do intervalo de integración resulta moi restritiva e non permite abarcar moitos casos.

*Observación 2.12.* Nas condicións do Teorema 2.11 bastaría con pedir  $f$  continua en  $[c, d]$  e  $n$  veces diferenciable en  $(c, d)$ .

*Observación 2.13.* O feito de pedir que todos os nodos  $x_i$  estén fóra do interior do intervalo implica que  $\pi_n(x)$  é un polinomio que non cambia de signo en  $[a, b]$ , polo tanto  $\int_a^b \pi_n(x) dx \neq 0$ . Deste feito e da fórmula (2.32) deducimos que as fórmulas de cuadratura de tipo i.p. que teñen todos os seus nodos fóra de  $(a, b)$  son exactamente de orde  $n - 1$ , é dicir, non poden ser superexactas.

**Exemplo 2.14.** Obteñamos o erro para a fórmula do trapecio:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)). \quad (2.37)$$

Neste caso, os nodos de cuadratura son  $x_1 = a$  e  $x_2 = b$ , sendo  $n = 2$ . Por tanto,  $\pi_2(x) = (x-a)(x-b)$ ,  $c = a$  e  $d = b$ . Polo Teorema 2.11 sabemos que, se  $f \in C^2([a, b])$ , entón existirá  $\eta \in (a, b)$  tal que

$$E_2(f) = \frac{f''(\eta)}{2!} \int_a^b (x-a)(x-b) dx = \frac{f''(\eta)}{2} \left(-\frac{1}{6}(b-a)^3\right) = -\frac{1}{12} f''(\eta)(b-a)^3, \quad (2.38)$$

de onde deducimos que a fórmula do trapecio é de orde 1, xa que para  $f(x) = 1$  e para  $f(x) = x$ ,  $E_2(x) = 0$ , pero se tomamos  $f(x) = x^2$ ,  $f''(x) = 2$  e entón

$$E_2(x^2) = -\frac{1}{6}(b-a)^3 \neq 0, \quad (2.39)$$

o que concorda co obtido no Exemplo 2.4.

**Exercicio 2.15.** Continuamos traballando nas condicións do Exemplo 2.5. Recordamos que a fórmula que obtiveramos, asociada aos nodos  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$  e  $x_4 = 3$  para aproximar a integral  $\int_1^2 2^x dx$  viña dada por

$$\int_1^2 f(x) dx \approx -\frac{1}{24}(f(0) + f(3)) + \frac{13}{24}(f(1) + f(2)), \quad (2.40)$$

que nos achega a seguinte aproximación da integral definida

$$\int_1^2 2^x dx \approx -\frac{1}{24}(1 + 2^3) + \frac{13}{24}(2 + 2^2) = \frac{23}{8} = 2,875, \quad (2.41)$$

Dado que  $(1, 2) \cap \{0, 1, 2, 3\} = \emptyset$ , se se cumpre que  $f \in C^4([0, 3])$ , estaremos en condicións de aplicar o Teorema 2.11: Existirá  $\eta \in (0, 3)$  tal que

$$E_4(f) = \frac{f^4(\eta)}{4!} \int_1^2 x(x-1)(x-2)(x-3) = \frac{f^4(\eta)}{4!} \frac{11}{30}, \quad (2.42)$$

e sabendo que  $f^4(x) = 2^x \ln(2)^4$ , para algún  $\eta \in (0, 3)$

$$E_4(2^x) = \frac{2^\eta \ln(2)^4}{24} \frac{11}{30}. \quad (2.43)$$

Posto que  $\eta \in (0, 3)$ , podemos acotar o erro como segue

$$\frac{2^0 \ln(2)^4}{24} \frac{11}{30} = 0,003526647\dots < E_4(2^x) < 0,02821317\dots = \frac{2^3 \ln(2)^4}{24} \frac{11}{30}. \quad (2.44)$$

Agora ben, podemos calcular o valor exacto da integral:

$$\int_1^2 2^x dx = \frac{2}{\ln 2} = 2,885390\dots \quad (2.45)$$

Logo, por (2.41),  $E_4(2^x) = 0,01039\dots$ , en consonancia con (2.44).

*Observación 2.16.* En casos nos que non sexa aplicable o Teorema 2.11, a seguinte acotación será sempre válida para calquera fórmula de tipo i.p.:

$$|E_n(f)| \leq \frac{1}{n!} \left( \max_{x \in [c,d]} |f^n(x)| \right) \int_a^b |\pi_n(x)| dx. \quad (2.46)$$

É habitual que haxa nodos de cuadratura no interior do intervalo de integración, polo que nestes casos a fórmula dada polo Teorema 2.11 non será válida. Tentaremos atopar unha fórmula similar que sexa útil de forma xeral.

Sexan  $r - 1 \geq 0$  nodos de cuadratura no intervalo aberto  $(a, b)$ , tal que

$$x_1 < \dots < x_i \leq a < x_{i+1} < \dots < x_{i+r-1} < b \leq x_{i+r} < \dots < x_n. \quad (2.47)$$

Agora a fórmula do erro dada pola ecuación (2.26) podémola reescribir como segue

$$\begin{aligned} E_n(f) &= \int_a^b (f(x) - p_n(x)) dx = \int_a^b \frac{(f(x) - p_n(x))}{\pi_n(x)} \pi_n(x) dx \\ &= \int_a^{x_{i+1}} \frac{(f(x) - p_n(x))}{\pi_n(x)} \pi_n(x) dx + \dots + \int_{x_{i+r-1}}^b \frac{(f(x) - p_n(x))}{\pi_n(x)} \pi_n(x) dx \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{(f(\xi_1) - p_n(\xi_1))}{\pi_n(\xi_1)} \int_a^{x_{i+1}} \pi_n(x) dx + \dots + \frac{(f(\xi_r) - p_n(\xi_r))}{\pi_n(\xi_r)} \int_{x_{i+r-1}}^b \pi_n(x) dx \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{f^n(\eta_1)}{n!} \int_a^{x_{i+1}} \pi_n(x) dx + \dots + \frac{f^n(\eta_r)}{n!} \int_{x_{i+r-1}}^b \pi_n(x) dx, \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde en (1) empregamos, en cada unha das  $r$  integrais, o Teorema 2.10, con

$$\xi_1 \in (a, x_{i+1}), \dots, \xi_r \in (x_{i+r-1}, b) \quad (2.49)$$

e en (2) o Teorema 2.9, con

$$\eta_1, \dots, \eta_r \in (x_1, x_n). \quad (2.50)$$

Introducimos a continuación a notación siguiente:

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= a, \\ \zeta_k &= x_{i+k}, \quad k = 1, \dots, r-1 \text{ e} \\ \zeta_r &= b.\end{aligned}\tag{2.51}$$

Denotemos también

$$C_k = \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k} \pi_n(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, r.\tag{2.52}$$

*Observación 2.17.* Notemos que en cada intervalo  $[\zeta_{r-1}, \zeta_r]$ , a cantidad  $\pi_n(x)$  non cambia de signo, pero necesariamente os signos en  $[\zeta_{r-1}, \zeta_r]$  e en  $[\zeta_r, \zeta_{r+1}]$  son opostos.

Se temos que a derivada  $n$ -ésima de  $f$  é continua en  $[x_1, x_n]$ , polo visto en (2.48), teremos que

$$E_n(f) = \sum_{k=1}^r \frac{C_k}{n!} f^{(n)}(\eta_k).\tag{2.53}$$

Ademais, pola Observación 2.17, sabemos que as constantes  $C_k$  alternan de signo, é dicir,

$$\text{signo}(C_{k-1}) = \text{signo}(-C_k) = \text{signo}(C_{k+1}).\tag{2.54}$$

Por tanto, o erro pode ser escrito en forma de dúas sumas:

$$E_n(f) = \frac{1}{n!} \{C_1 f^{(n)}(\eta_1) + C_3 f^{(n)}(\eta_3) + \dots\} + \frac{1}{n!} \{C_2 f^{(n)}(\eta_2) + C_4 f^{(n)}(\eta_4) + \dots\}.\tag{2.55}$$

Para simplificar aínda máis esta última expresión, empregaremos o lema seguinte.

**Lema 2.18.** *Sexa  $g$  unha función continua en  $[a, b]$  e sexan  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  un conxunto de números tales que ou ben todos eles son non negativos, ou ben todos eles son non positivos cumprindo*

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = A.\tag{2.56}$$

*Entón, para cada conxunto de  $n$  puntos  $\{x_k\}_{k=1}^n \subset [a, b]$ , existe un  $\xi \in [a, b]$  tal que*

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k g(x_k) = Ag(\xi).\tag{2.57}$$

*Demostración.* O caso  $A = 0$  é trivial. Supoñamos entón que  $A \neq 0$ .

Por ser  $g$  continua nun intervalo pechado, sabemos que a función acadará máximo ( $M$ ) e mínimo ( $m$ ) en  $[a, b]$  (podemos ver este resultado en [5], Capítulo 2, Teorema 4.3, páx. 51). Así mesmo, polo Teorema dos valores intermedios ([5], Capítulo 2, Teorema 4.4, páx. 52), sabemos que  $g$  acadará todos os valores entre  $m$  e  $M$ . É obvio que

$$m \leq g(x_k) \leq M, \quad k = 1, 2, \dots, n,\tag{2.58}$$

e, se os  $\alpha_k$  son non negativos (en consecuencia  $A > 0$ ), isto implica que

$$\alpha_k m \leq \alpha_k g(x_k) \leq \alpha_k M, \quad (2.59)$$

Se sumamos en cada caso para  $k = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \alpha_k m &\leq \sum_{k=1}^n \alpha_k g(x_k) \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k M, \\ Am &\leq \sum_{k=1}^n \alpha_k g(x_k) \leq AM, \\ m &\leq \frac{1}{A} \sum_{k=1}^n \alpha_k g(x_k) \leq M. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Por tanto, para algún  $\xi \in [a, b]$ ,  $\sum_{k=1}^n \alpha_k g(x_k) = Ag(\xi)$ .

Agora ben, se os  $\alpha_k$  son non positivos ( $A < 0$ ),

$$\alpha_k m \geq \alpha_k g(x_k) \geq \alpha_k M, \quad (2.61)$$

sumando en cada caso para  $k = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \alpha_k m &\geq \sum_{k=1}^n \alpha_k g(x_k) \geq \sum_{k=1}^n \alpha_k M, \\ Am &\geq \sum_{k=1}^n \alpha_k g(x_k) \geq AM, \\ m &\leq \frac{1}{A} \sum_{k=1}^n \alpha_k g(x_k) \leq M, \end{aligned} \quad (2.62)$$

e chegamos igualmente ao resultado buscado.  $\square$

*Observación 2.19.* Observemos que o lema anterior é análogo ao teorema do valor medio para integrais, e por tanto as probas de ambos aseméllanse tamén.

Volvendo agora á expresión (2.55), por unha aplicación directa do Lema 2.18 temos que

$$E_n(f) = \frac{1}{n!} \{K_i f^{(n)}(\eta_i) + K_p f^{(n)}(\eta_p)\}, \quad (2.63)$$

onde os subíndices  $i$  (impar) e  $p$  (par) fan notar que en  $K_i$  se suman os  $C_k$  con  $k$  impar e en  $K_p$  os  $C_k$  con  $k$  par:

$$K_i = C_1 + C_3 + \dots, \quad K_p = C_2 + C_4 + \dots \quad (2.64)$$

$$e \text{ con } x_1 \leq \eta_p, \quad \eta_i \leq x_n. \quad (2.65)$$

No caso de que os nodos de interpolación sexan equidistantes, os resultados anteriores poden ser modificados para expoñer a dependencia do erro do parámetro  $h$ .

Recordemos que estamos no caso en que pode haber nodos dentro e fóra do intervalo de integración, é dicir,

$$\begin{array}{cccccccccccc} | & | & & | & | & & | & | & & | & | & & | \\ \hline x_1 & x_2 & \dots & x_i & x_{i+1} & \dots & x_{i+r-1} & x_{i+r} & \dots & x_n & x \end{array} \quad (2.66)$$

con  $x_i \leq a < x_{i+1}$  e  $x_{i+r-1} < b \leq x_{i+r}$ . Introduzamos o cambio de variable de  $x$  a  $t$  tal que  $x = x_1 + (t-1)h$ . Ademais temos o polinomio de grao  $n$  en  $t$ ,  $w_n(t) = (t-1)\cdots(t-n)$ , que podemos relacionar co polinomio en  $x$ ,  $\pi_n(x)$  a través do cambio de variable como segue

$$\begin{aligned} \pi_n(x_1 + (t-1)h) &= (x_1 + (t-1)h - x_1) \cdots (x_1 + (t-1)h - x_1 - (n-1)h) = \\ &= h^n(t-1)\cdots(t-n) = h^n w_n(t). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Obtemos entón a seguinte relación entre os polinomios

$$\pi_n(x) = h^n w_n(t), \text{ se } x = x_1 + (t-1)h. \quad (2.68)$$

As integrais  $C_k$  poden ser tamén reescritas en función de  $h$  e  $t$ :

$$C_k = \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k} \pi_n(x) dx = \int_{i+k-1}^{i+k} h^n h w_n(t) dt = h^{n+1} \underbrace{\int_{i+k-1}^{i+k} w_n(t) dt}_{B_k} = h^{n+1} B_k, \quad (2.69)$$

sendo a definición de  $B_k = \int_{i+k-1}^{i+k} w_n(t) dt$  válida para  $k = 2, \dots, r-1$ , según a notación introducida en (2.51). No caso dos extremos  $a = \xi_0$  e  $b = \xi_r$ , sexan  $t_a$  e  $t_b$  as distancias de  $a$  e  $b$  a  $x_1$  medidas en número de nodos, respectivamente, é dicir,

$$t_a = \frac{a - x_1}{h} \quad e \quad t_b = \frac{b - x_1}{h}. \quad (2.70)$$

Entón, os casos extremos escribímoslos como

$$B_1 = \int_{t_a}^{i+1} w_n(t) dt \quad e \quad B_r = \int_{i+r-1}^{t_b} w_n(t) dt. \quad (2.71)$$

Cumprírase que  $i \leq t_a < i+1$  e  $i+r-1 < t_b \leq i+r$ , e como tomamos  $x \in (a, b)$ , sobre os intervalos  $[x_{i+r-1}, x_{i+r}]$ , equivalente aos da forma  $[i+r-1, i+r]$ ,  $w_n(t)$  non cambia de signo. Logo, nos intervalos  $[t_a, i+1]$  e  $[i+r-1, t_b]$ ,  $w_n(t)$  non cambia de signo. Polo tanto

$$|B_1| \leq \left| \int_i^{i+1} w_n(t) dt \right| \quad e \quad |B_r| \leq \left| \int_{i+r-1}^{i+r} w_n(t) dt \right|. \quad (2.72)$$

Empregando o resultado obtido en (2.63) chegamos a que

$$E_n(f) = \frac{h^{n+1}}{n!} \{L_i f^n(\eta_i) + L_p f^n(\eta_p)\}, \quad (2.73)$$

onde  $x_1 < \eta_p$ ,  $\eta_i < x_n$  e  $L_i = B_1 + B_3 - \dots$ ,  $L_p = B_2 + B_4 + \dots$ .

Temos demostrado en xeral que se  $f^{(n)}$  é continua no intervalo  $[c, d]$  (menor intervalo contendo aos nodos de cuadratura, a  $a$  e a  $b$ ), entón a fórmula de cuadratura de tipo i.p. que usa  $n$  nodos equidistantes ten un erro da forma (2.63), e ademais,

$$|E_n(f)| \leq \frac{h^{n+1}}{n!} \max_{\xi \in [c, d]} |f^{(n)}(\xi)| \int_{t_a}^{t_b} |w_n(t)| dt. \quad (2.74)$$

Esta última estimación é válida independentemente da localización dos nodos respecto do intervalo de integración.

No caso de que  $(a, b) \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \emptyset$ , a fórmula análoga á do Teorema 2.11 sería

$$E_n(f) = \frac{h^{n+1}}{n!} f^{(n)}(\xi) \int_{t_a}^{t_b} w_n(t) dt, \quad \xi \in (a, b). \quad (2.75)$$

## 2.2. Transformacións afíns sobre os coeficientes dunha fórmula de cuadratura

Supoñamos coñecida unha fórmula de cuadratura asociada aos nodos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  para integrar no intervalo  $(a, b)$ :

$$\int_a^b g(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i g(t_i) + E(g). \quad (2.76)$$

O noso obxectivo é construír unha fórmula de cuadratura para  $\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} f(x) dx$  a partir da xa coñecida, sendo  $(\bar{a}, \bar{b})$  un novo intervalo.

Consideraremos que ambos intervalos,  $(a, b)$  e  $(\bar{a}, \bar{b})$ , son limitados e non baleiros.

Tomamos en primeiro lugar unha transformación afín da forma  $\varphi(t) = mt + c$ , que nos relacione ambos intervalos, de xeito que  $\varphi(a) = \bar{a}$  e  $\varphi(b) = \bar{b}$ .

Resulta natural entón empregar o cambio de variable  $x = \varphi(t)$ , válido para calquera función de  $L^1(\bar{a}, \bar{b})$ :

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} f(x) dx = \varphi'(t) \int_a^b f(\varphi(t)) dt = m \int_a^b f(\varphi(t)) dt. \quad (2.77)$$

Se aproximamos agora a integral definida en  $(a, b)$  da función  $g = f \circ \varphi$  coa fórmula (2.76) chegamos a que:

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} f(x) dx = m \int_a^b f(\varphi(t)) dt = m \left[ \sum_{i=1}^n A_i f(\varphi(t_i)) + E(f(\varphi)) \right] = \sum_{i=1}^n \bar{A}_i f(x_i) + \bar{E}(f), \quad (2.78)$$

onde na última igualdade engadimos a notación seguinte:

$$\begin{cases} x_i = \varphi(t_i) & \forall i = 1, \dots, n, \\ \bar{A}_i = mA_i & \forall i = 1, \dots, n, \\ \bar{E}(f) = mE(f \circ \varphi). \end{cases} \quad (2.79)$$

**Definición 2.20.** Sexan  $\sum_{i=1}^n A_i g(t_i)$  e  $\sum_{i=1}^n \bar{A}_i f(x_i)$  fórmulas de cuadratura en  $(a, b)$  e  $(\bar{a}, \bar{b})$  respectivamente, e sexa  $\varphi(t) = mt + c$  o cambio de variable que relaciona ambos intervalos tal que  $\varphi(a) = \bar{a}$  e  $\varphi(b) = \bar{b}$ . Se se cumpren as ecuacións de (2.79), entón diremos que as fórmulas descritas son *fórmulas homólogas*.

*Observación 2.21.* A última ecuación de (2.79) evidencia que dúas fórmulas homólogas teñen o mesma orde ou grao de precisión.

Disto último e do Teorema 2.2 dedúcese doadamente a seguinte proposición.

**Proposición 2.22.** *Dúas fórmulas homólogas son de tipo i.p. se, e só se, o é unha delas.*

**Proposición 2.23.** *Os coeficientes dunha fórmula de cuadratura son invariantes por translacións.*

Esta última proposición ten unha sinxela explicación tendo en conta que  $\varphi$  é unha translación se, e só se,  $m = 1$ . A igualdade dos coeficientes é inmediata entón sen máis que observar a segunda ecuación de (2.79).

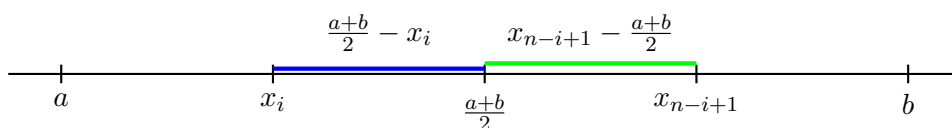
Esta última proposición permite calcular de forma máis sinxela os coeficientes, considerando a translación con  $\bar{a} = 0$ .

### 2.3. Propiedades dos coeficientes das fórmulas de cuadratura de tipo i.p.

Un caso de especial interese para as fórmulas de cuadratura de tipo i.p. é cando os nodos de cuadratura están simetricamente distribuídos respecto do punto medio do intervalo de integración.

**Proposición 2.24.** *Supoñamos que os nodos dunha fórmula de cuadratura de tipo i.p.  $\sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$  están simetricamente distribuídos respecto do punto medio do intervalo de integración, é dicir:*

$$\frac{a+b}{2} - x_i = x_{n-i+1} - \frac{a+b}{2}, \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1 \quad (2.80)$$



Entón  $A_i = A_{n-i+1}$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

**Corolario 2.25.** *Unha fórmula de cuadratura*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \quad (2.81)$$

é exacta en  $\mathbb{P}_{n-1}$ , é dicir, é de tipo i.p., se se cumpren as 3 propiedades seguintes de forma simultánea:

1. A fórmula é exacta para os monomios  $x^k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ ,  $k$  par,
2.  $\frac{a+b}{2} - x_i = x_{n-i+1} - \frac{a+b}{2}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,
3.  $A_i = A_{n-i+1}$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

*Demostración.* É suficiente con demostrar que a fórmula integra exactamente o polinomio  $(c-x)^m$ , para calquera  $m \in \mathbb{N}$  impar, onde  $c$  é o punto medio do intervalo,  $c = \frac{a+b}{2}$ :

$$\int_a^b (c-x)^m dx = \sum_{i=1}^n A_i (c-x_i)^m = 0, \quad (2.82)$$

onde a última igualdade vén dada do feito de que ao ser  $m$  impar,  $c-x_i = x_{n-i+1} - c$  e  $A_i = A_{n-i+1}$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , os sumandos vanse anulando 2 a 2.  $\square$

**Exemplo 2.26.** Vexamos como, aproveitando a simetría dos nodos, obtemos o mesmo resultado que no Exemplo 2.5, onde calculamos os coeficientes de cuadratura cun programa de MATLAB.

Polo método dos coeficientes indeterminados, o sistema vén dado por:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 & = 1 \\ A_2 + 2A_3 + 3A_4 & = \frac{3}{2} \\ A_2 + 4A_3 + 9A_4 & = \frac{7}{3} \\ A_2 + 8A_3 + 27A_4 & = \frac{15}{4} \end{cases} \quad (2.83)$$

Os nodos de cuadratura,  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$  están simetricamente distribuídos respecto do punto medio do intervalo,  $\frac{a+b}{2} = \frac{3}{2}$ . Por tanto, pola Proposición 2.24, cumprírase que  $A_2 = A_3$  e  $A_1 = A_4$ . Ademais, polo Corolario 2.25, sabemos que as ecuacións que proceden de impoñer exactitude para os monomios  $x^k$ , con  $k$  impar serán redundantes, é dicir, para  $k = 1$  e  $k = 3$ :

$$\text{para } k = 1 : \int_0^3 x^1 dx = \frac{3}{2} = A_2 + 2A_3 + 3A_4, \quad \text{a segunda ecuación} \quad (2.84)$$

e

$$\text{para } k = 3 : \int_0^3 x^3 dx = \frac{15}{4} = A_2 + 8A_3 + 27A_4, \quad \text{a cuarta ecuación} \quad (2.85)$$

resultarán redundantes.

O sistema simplificado será:

$$\begin{cases} 2A_3 + 2A_4 = 1 \\ 5A_3 + 9A_4 = \frac{7}{3}, \end{cases} \quad (2.86)$$

que ten como solucións  $A_1 = A_4 = -\frac{1}{24}$  e  $A_2 = A_3 = \frac{13}{24}$ , como no Exemplo 2.5.

## 2.4. Fórmulas de cuadratura con coeficientes non negativos

Na práctica será difícil dispor dos valores exactos de  $f(x_i)$ , o que se traducirá en erros de redondeo á hora de aproximar  $f(x_i)$ , sendo o valor realmente empregado

$$\tilde{f}(x_i) = f(x_i) + \rho_i, \quad (2.87)$$

onde  $\rho_i$  é o *erro local de redondeo*. Daquela, o erro cometido realmente na aproximación será

$$\tilde{E}_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n A_i \tilde{f}(x_i) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) - \sum_{i=1}^n A_i \rho_i = E_n(f) - R_n(f). \quad (2.88)$$

En (2.88),

$$R_n(f) = \sum_{i=1}^n A_i \rho_i. \quad (2.89)$$

é o *erro de redondeo acumulado*.

Poñámonos agora na situación de que os erros locais de redondeo están limitados, é dicir,  $|\rho_i| \leq \rho$  para  $i = 1, \dots, n$ , entón

$$|R_n(f)| \leq \rho \sum_{i=1}^n |A_i|, \quad (2.90)$$

cota que se acada cando  $\rho_i = \rho \operatorname{signo}(A_i)$  ( $\rho \operatorname{signo}(A_i) A_i = \rho |A_i|$ ). Suporemos ademais que a fórmula ten orde  $\geq 0$ , é dicir, que integra de forma exacta as constantes, entón  $\sum_{i=1}^n A_i = b - a$  (polo que os  $A_i$  non poden ser todos non positivos).

No caso de que todos os  $A_i$  sexan non negativos,

$$|R_n(f)| \leq \rho \sum_{i=1}^n |A_i| = \rho \sum_{i=1}^n A_i = \rho(b - a), \quad (2.91)$$

e en caso contrario

$$\sum_{i=1}^n |A_i| > \sum_{i=1}^n A_i = (b - a) \implies \rho \sum_{i=1}^n |A_i| > \rho(b - a), \quad (2.92)$$

de maneira que no caso de que os coeficientes poidan ser negativos, o valor máximo que pode tomar  $R_n(f)$  será maior que no caso de que todos os  $A_i$  sexan non negativos. Isto implica que será vantaxoso o uso de fórmulas nas que todos os  $A_i \geq 0$ , sobre todo se  $|E_n(f)| \leq |R_n(f)|$ .

## Capítulo 3

# Fórmulas de Newton-Cotes

Dentro das fórmulas de tipo i.p., falaremos nesta sección das denominadas *fórmulas de Newton-Cotes*. Estas caracterízanse pola escolla dos nodos de cuadratura:  $x_1, \dots, x_n$  distribuídos de xeito equidistante no intervalo  $[a, b]$ , e separados uns dos outros por un *paso*,  $h$ , de xeito que  $x_i = x_1 + (i - 1)h$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Débese cumprir, ademais, que  $a = x_1 - kh$  e  $b = x_n + kh$ , sendo  $k = 0$  ou  $k = 1$  en ambos casos.

Escribiremos de forma xeral como segue

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_1 - kh}^{x_n + kh} f(x)dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_1 + (i - 1)h) + E_n(f), \quad (3.1)$$

onde

$$A_i = \int_a^b l_i(x)dx = \int_{x_1 - kh}^{x_n + kh} l_i(x)dx. \quad (3.2)$$

Na notación que acabamos de definir para os extremos do intervalo, segundo teñamos  $k = 1$  ou  $k = 0$ , falaremos de *fórmulas de Newton-Cotes abertas ou pechadas*.

**Definición 3.1.** Se  $k = 0$ , e en consecuencia  $a = x_1$  e  $b = x_n$ , falaremos de *fórmulas de Newton-Cotes pechadas*, que se caracterizan porque os extremos do intervalo de integración se inclúen como nodos de cuadratura. Adaptamos a notación do xeito seguinte:

$$x_i = x_1 + (i - 1)h = a + (i - 1)h, \quad \text{para } i = 1, \dots, n,$$

$$b - a = x_n - x_1 = (n - 1)h,$$

$$h = \frac{b-a}{n-1}.$$

**Definición 3.2.** Se  $k = 1$ , e en consecuencia  $a = x_1 - h$  e  $b = x_n + h$ , falaremos de *fórmulas de Newton-Cotes abertas*, nas que os extremos do intervalo de integración non se inclúen como nodos de cuadratura. A notación quedaría como segue:

$$x_i = x_1 + (i - 1)h = a + ih, \quad \text{para } i = 1, \dots, n,$$

$$b - a = x_n - x_1 = (n + 1)h,$$

$$h = \frac{b-a}{n+1}.$$

*Observación 3.3.* De forma xenérica, podemos empregar a notación seguinte con  $k \in \{0, 1\}$

$$x_i = a + (i - 1 + k)h, \quad \text{para } i = 1, \dots, n,$$

$$b - a = (n - (-1)^k)h,$$

$$h = \frac{b-a}{n-(-1)^k}.$$

### 3.1. Obtención dos coeficientes de cuadratura.

Obteñamos en primeiro lugar unha fórmula para calcular os coeficientes máis explícita, empregando a definición dos  $A_i$  a partir dos polinomios fundamentais de Lagrange. Recordamos que

$$l_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (3.3)$$

Se agora definimos

$$w_n(t) = (t - 1) \cdots (t - n), \quad (3.4)$$

e tendo en conta que  $x_i = x_1 + (i - 1)h$  para  $i = 1, \dots, n$ , para  $x = x_1 + (t - 1)h$ :

$$\begin{aligned} l_i(x_1 + (t - 1)h) &= \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x_1 + (t - 1)h - (x_1 + (j - 1)h)}{x_1 + (i - 1)h - (x_1 + (j - 1)h)} = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{t - j}{i - j} \\ &= \frac{\frac{w_n(t)}{(t-i)}}{(i-1)!(n-i)!} (-1)^{n-i} \\ &= (-1)^{n-i} \frac{1}{(i-1)!(n-i)!} \frac{w_n(t)}{t-i} \\ &= \frac{(-1)^{n-i}}{n!} \binom{n}{i-1} \frac{w_n(t)}{t-i}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

empregando na última igualdade a notación do Binomio de Newton. Por tanto, para  $i = 1, \dots, n$

$$A_i = \int_{x_1 - kh}^{x_1 + kh} l_i(x) dx \stackrel{(1)}{=} \int_{-k}^{n-1+k} l_i(x_1 + (t - 1)h) h dt = \frac{(-1)^{n-i}}{n!} \binom{n}{i-1} h \int_{-k}^{n-1+k} \frac{w_n(t)}{t-i} dt. \quad (3.6)$$

onde en (1) empregamos o cambio de variable  $x = x_1 + (t - 1)h$ .

Introducindo a notación seguinte

$$\alpha_i(k) = \frac{(-1)^{n-i}}{n!} \binom{n}{i-1} \int_{-k}^{n-1+k} \frac{w_n(t)}{t-i} dt, \quad (3.7)$$

Podemos escribir os coeficientes de cuadratura como segue

$$A_i = h \alpha_i(k). \quad (3.8)$$

*Observación 3.4.* A vantaxe de escribir os coeficientes de cuadratura como en (3.8) é que os coeficientes  $\alpha_i(k)$  dependen só de  $n, i$  e  $k$ , non de  $h$ . Isto pode resultar de grande utilidade tendo en conta que os  $\alpha_i(k)$  son os coeficientes da fórmula de Newton-Cotes cando  $h = 1$ , é dicir, cando o intervalo de integración é  $[-k, n - 1 + k]$ , polo que podemos calcular os  $A_i$  nun determinado  $[a, b]$  calculando primeiro os coeficientes no *intervalo de referencia*  $[-k, n - 1 + k]$  e aplicar logo (3.8). Ademais, grazas á distribución simétrica dos nodos, basta con calcular os coeficientes para  $i \leq \frac{n+1}{2}$ .

A pesar de dispor dunha fórmula para calcular os coeficientes de forma explícita, na práctica resulta máis sinxelo empregar o método dos coeficientes indeterminados. Grazas á invarianza por translacións, resultará útil supoñer  $a = 0$  ou  $x_1 = 0$ , así como aproveitar a simetría dos nodos para reducir o sistema á metade, como vimos na Proposición 2.24.

Vexamos algúns exemplos importantes de fórmulas de Newton-Cotes.

**Exemplo 3.5. [Fórmula de Newton-Cotes pechada de 2 puntos: fórmula do trapecio]**

Como a fórmula debe ser pechada, os extremos do intervalo de integración serán nodos, e como só inclúe 2 puntos,  $n = 2$ ,  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$  e  $h = \frac{b-a}{n-1} = b - a$ .

Como os coeficientes son invariantes por translacións, podemos supor que  $a = 0$  e  $b = h$ , e grazas á simetría dos nodos, temos que  $A_1 = A_2 = \frac{b-a}{2} = \frac{h}{2}$ . Por tanto,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)), \quad (3.9)$$

que é a *fórmula do trapecio*.

**Exemplo 3.6. [Fórmula de Newton-Cotes pechada de 3 puntos: fórmula de Simpson]**

Como no exemplo anterior,  $n = 3$ ,  $a = x_1$ ,  $x_2 = a + h$ ,  $b = x_3 = a + 2h$  e  $h = \frac{b-a}{2}$ . Podemos supoñer novamente que  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = h$  e  $x_3 = 2h$ . Ademais, pola simetría dos nodos, teremos que  $A_1 = A_3$ , e que a ecuación do sistema procedente de impoñer exactitude para  $x^k$  con  $k$  impar resultará redundante. Por tanto, o sistema quedará como segue:

$$\begin{cases} 2A_1 + A_2 &= 2h \\ 4A_1 + A_2 &= \frac{8}{3}h, \end{cases} \quad (3.10)$$

e, por tanto,

$$A_1 = \frac{h}{3} = A_3 \quad e \quad A_2 = \frac{4}{3}h, \quad (3.11)$$

co que a fórmula resultante será

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)). \quad (3.12)$$

**Exemplo 3.7** (Fórmula de Newton-Cotes aberta de 1 punto: fórmula de Poncelet). Neste caso, como a fórmula é aberta e só inclúe 1 punto,  $n = 1$ ,  $x_1 = \frac{a+b}{2}$  e  $h = \frac{b-a}{2}$ . Por tanto, a ecuación que debe cumprirse é  $A_1 = b - a = 2h$ , e a fórmula resulta ser

$$\int_a^b f(x)dx = 2hf(x_1). \quad (3.13)$$

### 3.2. Erro das fórmulas de Newton-Cotes.

A expresión do erro dada no Teorema 2.11 non será válida para as fórmulas de Newton-Cotes, xa que non sendo na fórmula do trapecio, non se cumpre que  $(a, b) \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \emptyset$ .

Para estudar o erro introduciremos novamente o cambio de variable  $x = x_1 + (t - 1)h$ , a expresión de

$$\pi_n(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n) \quad (3.14)$$

e a ecuación (2.68):  $\pi_n(x) = h^n w_n(t)$  se  $x = x_1 + (t - 1)h$ , para  $t \in [1, n]$ .

Introduzamos a notación seguinte, que podemos ver en [4]:

$$\Omega_n(x) = \int_a^x \pi_n(s)ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.15)$$

e así mesmo algúns conceptos das *diferenzas divididas*, que poden consultarse tamén en [4].

Partindo de  $n$  puntos  $(x_1, \dots, x_n)$  podemos escribir o polinomio de interpolación de Lagrange da forma

1. progresiva (de 1 a  $n - 1$ ):

$$p_n(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) + \cdots + f[x_1, x_2, \dots, x_n](x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}), \quad (3.16)$$

ou

2. regresiva (de  $n$  a 2):

$$p_n(x) = f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + \cdots + f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1](x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_2), \quad (3.17)$$

onde os termos  $f[x_1], f[x_1, \dots, x_i]$  con  $i = 2, \dots, n$  denotan as *diferenzas divididas*.

**Definición 3.8.** [Diferenzas divididas] Sexan  $n$  puntos,  $x_i$ , e as súas imaxes,  $f(x_i)$  con  $i = 1, \dots, n$ , defínense as *diferenzas divididas* como segue:

$$f[x_k] = f(x_k), \quad k = 1, \dots, n,$$

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k}, \quad k = 1, \dots, n - 1,$$

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i}] = \frac{f[x_{k+1}, \dots, x_{k+i}] - f[x_k, \dots, x_{k+i-1}]}{x_{k+i} - x_k}, \quad k = 1, \dots, n - i,$$

Tendo en conta que podemos escribir o polinomio de interpolación de Lagrange,  $p_n$  da forma (3.16) e a definición anterior, obtemos unha forma de expresar o erro de interpolación polinómica en función das diferenzas divididas

$$f(x) - p_n(x) = \pi_n(x)f[x_1, x_2, \dots, x_n, x]. \quad (3.18)$$

Para esta sección precisaremos o seguinte resultado:

**Teorema 3.9.** *Sexan  $x, x_1, \dots, x_k$   $k+1$  puntos distintos e sexa  $f(y)$  unha función continuamente diferenciable ata orde  $k$  no intervalo*

$$\min(x, x_1, \dots, x_k) < y < \max(x, x_1, \dots, x_k). \quad (3.19)$$

Entón, para un certo  $\xi = \xi_x$  nese intervalo

$$f[x_1, \dots, x_k, x] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}. \quad (3.20)$$

Comezaremos en primeiro lugar coas fórmulas de Newton-Cotes pechadas cun número impar de nodos, é dicir, con  $n$  impar.

Introduciremos uns lemas que nos serán precisos neste caso.

**Lema 3.10.** *Coa notación introducida,  $x_{(n+1)/2} = \frac{a+b}{2}$  denota o centro do intervalo  $[a, b]$  e cúmprese que*

$$\pi_n(x_{(n+1)/2} + \epsilon) = (-1)^n \pi_n(x_{(n+1)/2} - \epsilon). \quad (3.21)$$

**Lema 3.11.** *Sendo  $\epsilon \neq x_j$ , con  $j = 1, \dots, n$ , para  $a < \epsilon + h \leq x_{(n+1)/2}$  tense que  $|\pi_n(\epsilon + h)| < |\pi_n(\epsilon)|$ .*

**Lema 3.12.** *Para  $n$  impar*

1.  $\Omega_n(a) = \Omega_n(b) = 0$ ,
2.  $\Omega_n(x) > 0$ ,  $a < x < b$ .

*Demostración. 1:*

Pola propia definición de  $\Omega_n(x)$ , (3.15), é obvio que  $\Omega_n(a) = 0$ . Agora ben,

$$\Omega_n(b) = \int_a^{x_{(n+1)/2}} \pi_n(s) ds + \int_{x_{(n+1)/2}}^b \pi_n(s) ds \stackrel{(1)}{=} \int_a^{x_{(n+1)/2}} \pi_n(s) ds - \int_a^{x_{(n+1)/2}} \pi_n(s) ds = 0, \quad (3.22)$$

onde en (1) aplicamos o Lema 3.10.

Para o apartado 2 do Lema, proporcionamos unha idea intuitiva de demostración a través da Figura 3.1, onde representamos as gráficas de  $\pi_n$  e  $\Omega_n$  para  $n$  impar ( $n = 7$ ). Na gráfica da

esquerda vemos a antisimetría de  $\pi_n$  para  $n$  impar (como deducimos do Lema 3.10) e vemos tamén que entre  $a$  e  $x_2$  crece máis do que decrece entre  $x_2$  e  $x_3$ , e así sucesivamente ata o punto medio,  $x_4$  (como deducimos do Lema 3.11), e ao contrario dende  $x_4$  a  $b$  (novamente Lema 3.10). Tendo en conta que  $\Omega'_n(x) = \pi_n(x)$ , polo teorema fundamental do cálculo, permítenos deducir o gráfico de  $\Omega_n$ , á dereita, sempre positivo.

Esta idea da demostración podería formalizarse, como podemos consultar en [4].  $\square$

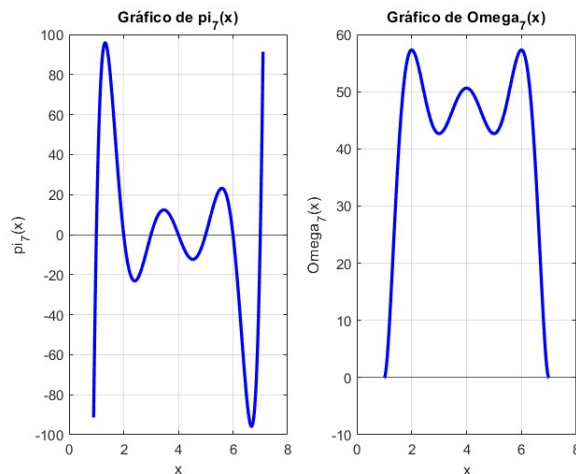


Figura 3.1: Positividade de  $\Omega_7(x) = \int_a^x \pi_7(s)ds$ . con  $x_i = i$ , para  $i = 1, \dots, 7$  e  $[a, b] = [1, 7]$

Agora ben, se asumimos que  $f$  ten  $n + 1$  derivadas continuas, empregamos integración por partes e o lema previo, o erro virá dado por:

$$\begin{aligned} E_n(f) &= \int_a^b \pi_n(x) \frac{f(x) - p_n(x)}{\pi_n(x)} = \int_a^b \frac{d\Omega_n(x)}{dx} f[x_1, \dots, x_n, x] dx \\ &= \underbrace{\Omega_n(x) f[x_1, \dots, x_n, x]}_0 \Big|_a^b - \int_a^b \Omega_n(x) \frac{d}{dx} f[x_1, \dots, x_n, x] dx. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Adaptando un resultado que podemos ver en [4], (Capítulo 6, exercicio 7, páx. 255),

$$f[x_1, \dots, x_n, x, x] = \frac{d}{dx} f[x_1, \dots, x_n, x], \quad (3.24)$$

e por un resultado mencionado tamén en [4], (Capítulo 6, exercicio 6, páx. 255) sabemos que  $\frac{d}{dx} f[x_1, \dots, x_n, x]$  é continua para  $x \in [a, b]$  se os puntos  $x_1, \dots, x_n$  son distintos. Tendo en conta que  $\Omega_n$  non cambia de signo en  $[a, b]$ , estamos en posición de aplicar o teorema do valor medio do cálculo integral (Teorema 2.10), obtendo así que

$$- \int_a^b \Omega_n(x) f[x_1, \dots, x_n, x, x] dx = -f[x_1, \dots, x_n, \xi, \xi] \int_a^b \Omega_n(x) dx. \quad (3.25)$$

Empregando agora o Teorema 3.9, obtemos

$$E_n(f) = -\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \int_a^b \Omega_n(x) dx, \quad a < \eta < b, \quad (3.26)$$

e integrando por partes

$$\int_a^b \Omega_n(x) dx = \underbrace{x\Omega_n(x)}_0 \Big|_a^b - \int_a^b x \frac{d}{dx} \Omega_n(x) dx = - \int_a^b x \pi_n(x) dx, \quad (3.27)$$

de onde sabemos que  $-\int_a^b x \pi_n(x) dx > 0$ , xa que  $\Omega_n(x) > 0$ , para todo  $x \in (a, b)$ .

Obtemos entón o resultado seguinte:

**Teorema 3.13.** [*Representación do erro para as fórmulas de Newton-Cotes pechadas con  $n$  impar*] Neste caso consideramos unha partición do intervalo  $[a, b]$  orixinada por un número impar de nodos. Se  $f \in C^{n+1}([a, b])$ , existe  $\eta \in (a, b)$  tal que

$$E_n(f) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \int_a^b x \pi_n(x) dx. \quad (3.28)$$

A continuación, vexamos que ocorre no caso das fórmulas de Newton-Cotes pechadas cun número par de nodos ( $n$  par).

Recordemos que  $\pi_n$  non cambia de signo en  $[b-h, b]$ , polo tanto,

$$E_n(f) = \int_a^{b-h} \pi_n(x) \frac{f(x) - p_n(x)}{\pi_n(x)} dx + \int_{b-h}^b \pi_n(x) \frac{f(x) - p_n(x)}{\pi_n(x)} dx = \quad (3.29)$$

$$= \int_a^{b-h} \pi_n(x) f[x_1, \dots, x_n, x] dx + \frac{f^{(n)}(\xi'_x)}{n!} \int_{b-h}^b \pi_n(x) dx, \quad (3.30)$$

onde para a segunda integral seguimos o mesmo procedemento que en (2.48). Para a primeira integral, escribimos  $\pi_n(x) = \pi_{n-1}(x)(x - x_n)$  e  $\Omega_{n-1}(x) = \int_a^x \pi_{n-1}(s) ds$ .

Por como definimos as diferenzas divididas en (3.8), teremos que

$$\int_a^{b-h} \pi_n(x) f[x_1, \dots, x_n, x] dx = \int_a^{b-h} \frac{d\Omega_{n-1}(x)}{dx} (f[x_1, \dots, x_{n-1}, x] - f[x_1, \dots, x_n]) dx. \quad (3.31)$$

Agora  $n-1$  é impar, e por tanto, polo Lema 3.12,  $\Omega_{n-1}(a) = \Omega_{n-1}(b-h) = 0$ , de onde

$$\int_a^{b-h} \frac{d\Omega_{n-1}(x)}{dx} dx = 0, \quad (3.32)$$

por Barrow. Polo tanto a parte da integral na que multiplica á constante  $f[x_1, \dots, x_n]$  será nula, e aplicando ao restante integración por partes e os Teoremas 2.10 e 3.9, chegamos ao seguinte

$$\int_a^{b-h} \pi_n(x) f[x_1, \dots, x_n, x] dx = -\frac{f^{(n)}(\xi'')}{n!} \int_a^{b-h} \Omega_{n-1}(x) dx, \quad a < \xi'' < b. \quad (3.33)$$

Deste xeito, obtemos que

$$E_n(f) = -f^{(n)}(\xi'') \underbrace{\frac{1}{n!} \int_a^{b-h} \Omega_{n-1}(x) dx}_B + f^{(n)}(\xi') \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{b-h}^b \pi_n(x) dx}_{-A}. \quad (3.34)$$

Agora ben, como  $n$  é par,  $\pi_n(x) > 0$  para  $x > x_n = b$ , por tanto  $\pi_n(x) \leq 0$  para  $b-h \leq x \leq b$ , e en consecuencia  $A > 0$  en  $[b-h, b]$ . No referido a  $B$ , por ser  $n-1$  impar, deducimos facilmente do Lema 3.12 que  $B > 0$ .

Daquela, se  $f^{(n)}$  é continua en  $[a, b]$ , aplicando o Lema 2.18 temos que existirá un  $\xi \in [\xi', \xi'']$  tal que

$$E_n(f) = -(A + B)f^{(n)}(\xi). \quad (3.35)$$

Ademais, tendo en conta que  $\pi_n(x) = \frac{d\Omega_{n-1}(x)}{dx}(x-b)$  e aplicando integración por partes:

$$\int_a^{b-h} \pi_n(x) dx = \int_a^{b-h} \frac{d\Omega_{n-1}(x)}{dx}(x-b) dx = \underbrace{\Omega_{n-1}(x)(x-b)|_a^{b-h}}_0 - \int_a^{b-h} \Omega_{n-1}(x) dx, \quad (3.36)$$

é dicir

$$A + B = -\frac{1}{n!} \int_a^b \pi_n(x) dx, \quad (3.37)$$

obtemos finalmente o resultado seguinte:

**Teorema 3.14.** [*Representación do erro para as fórmulas de Newton-Cotes pechadas con  $n$  par*] Neste caso consideramos unha partición do intervalo  $[a, b]$  orixinada por un número par de nodos. Se  $f \in C^n([a, b])$ , existe  $\eta \in (a, b)$  tal que

$$E_n(f) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \int_a^b \pi_n(x) dx. \quad (3.38)$$

*Observación 3.15.* Dos Teoremas 3.13 e 3.14 deducimos que as fórmulas cun número impar de nodos ( $n$  impar) son de orde  $n$  e por tanto superexactas. Porén, as fórmulas con  $n$  par son de orde  $n-1$ . É por isto que na práctica serán preferibles as fórmulas cun número impar de nodos, e no caso de aumentar  $n$ , convén facelo de dous en dous.

Podemos modificar os resultados dos Teoremas 3.13 e 3.14 para notar a dependencia do erro do parámetro  $h$ . Baixo as hipóteses dos devanditos teoremas:

$$E_n(f) = \begin{cases} \frac{M_n}{(n+1)!} h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi), & M_n = \int_1^n t w_n(t) dt < 0 \text{ se } n \text{ impar} \\ \frac{M'_n}{n!} h^{n+1} f^{(n)}(\xi), & M'_n = \int_1^n w_n(t) dt < 0 \text{ se } n \text{ par} \end{cases} \quad (3.39)$$

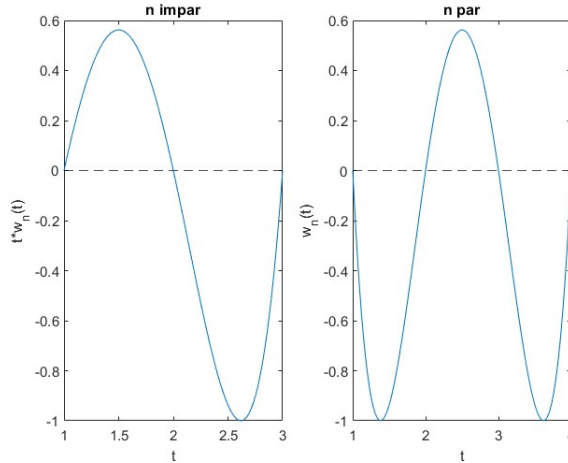


Figura 3.2: **[Fórmulas de N-C pechadas]** Vemos como a parte da gráfica que está por debaixo do eixo de abscisas ten maior peso que a que está por enriba. Por iso  $M_n$  e  $M'_n$  son negativos.

Na Figura 3.2 ilustramos as funcións  $tw_n(t)$  para  $n = 3$  impar e  $w_n(t)$  para  $n = 4$  par no caso das fórmulas de N-C pechadas:

Estudemos o erro para as fórmulas de Newton-Cotes abertas, distinguindo novamente os casos segundo  $n$  sexa par ou impar.

En ambos casos consideraremos  $n$  nodos en  $(a, b)$ , nos que non estarán incluídos os extremos do intervalo de integración, é dicir  $a = x_0$  e  $b = x_{n+1}$ .

**Teorema 3.16.** *[Representación do erro para as fórmulas de Newton-Cotes abertas con  $n$  impar]* Sexan  $n$  impar e  $f \in C^{n+1}([a, b])$ . Existe  $\eta \in (a, b)$  tal que

$$E_n(f) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \int_a^b x \pi_n(x) dx, \tag{3.40}$$

$$\text{onde } K_n = \int_a^b x \pi_n(x) dx > 0. \tag{3.41}$$

**Teorema 3.17.** *[Representación do erro para as fórmulas de Newton-Cotes abertas con  $n$  par]* Sexan  $n$  par e  $f \in C^n[a, b]$ . Existe  $\eta \in (a, b)$  tal que

$$E_n(f) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \int_a^b \pi_n(x) dx, \tag{3.42}$$

$$\text{onde } K'_n = \int_a^b \pi_n(x) dx > 0. \tag{3.43}$$

De forma análoga aos casos das fórmulas de Newton-Cotes pechadas, podemos tamén expresar

os resultados en termos de  $h$ . Entón, baixo as hipóteses dos Teoremas 3.16 e 3.17:

$$E_n(f) = \begin{cases} \frac{K_n}{(n+1)!} h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi), & K_n = \int_0^{n+1} tw_n(t)dt > 0 \text{ se } n \text{ impar} \\ \frac{K'_n}{n!} h^{n+1} f^{(n)}(\xi), & K'_n = \int_0^{n+1} w_n(t)dt > 0 \text{ se } n \text{ par} \end{cases} \quad (3.44)$$

Ilustramos na Figura (3.3) as funcións  $tw_n(t)$ , para  $n$  impar e  $w_n(t)$  para  $n$  par no caso das fórmulas de N-C abertas.

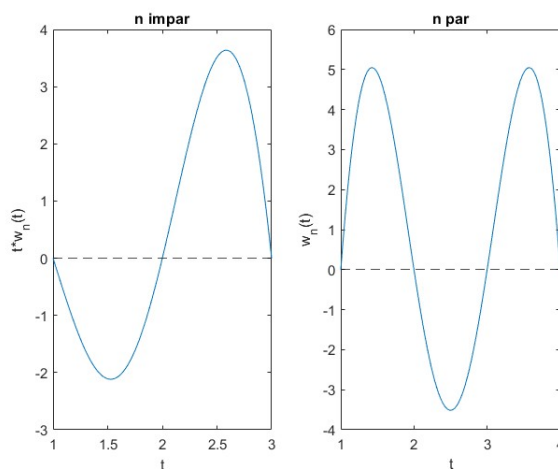


Figura 3.3: [Fórmulas de N-C abertas] Neste caso a parte da gráfica que está por enriba do eixo de abscisas ten maior peso que a que está por debaixo. Por iso  $K_n$  e  $K'_n$  son positivos.

*Observación 3.18.* Outra opción para calcular os coeficientes  $M_n$ ,  $M'_n$ ,  $K_n$  e  $K'_n$  consiste en avaliar o erro que se comete coa fórmula ao integrar  $x^k$ , sendo  $k$  o menor enteiro tal que  $E_n(x^k) \neq 0$  nun intervalo calquera. Isto é,  $k = n + 1$  se  $n$  impar e  $k = n$  se  $n$  par.

**Exemplo 3.19 (Erro para a Fórmula de Simpson).** A fórmula calculada no Exemplo 3.6 vén dada pola expresión

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)), \quad (3.45)$$

é dicir, temos:  $n = 3$ ,  $a = x_1$ ,  $x_2 = a + h$ ,  $x_3 = b = a + 2h$  e  $h = \frac{b-a}{2}$ . Polo Teorema 3.13, se  $f \in C^4([a, b])$ , existirá un  $\xi \in (a, b)$  tal que

$$E_3(f) = \frac{M_3}{4!} h^5 f^{(4)}(\xi), \text{ sendo} \quad (3.46)$$

$$M_3 = \int_1^3 tw_3(t)dt = \int_1^3 t(t-1)(t-2)(t-3)dt = -\frac{4}{15}. \quad (3.47)$$

Outra forma de calcular  $M_3$ , seguindo o descrito na Observación 3.18, sería calculando directamente o erro cometido ao aproximar a integral de  $x^k$ , con  $k = 4$  nun intervalo calquera. Tomamos, por exemplo o intervalo  $[1, 3]$ , con  $x_1 = a = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = b = 3$  e  $h = 1$ :

$$E_3(x^4) = \int_1^3 x^4 dx - \frac{h}{3}(f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)) = \int_1^3 x^4 dx - \frac{1}{3}(1 + 4 \cdot 2^4 + 3^4) = -\frac{4}{15}, \quad (3.48)$$

agora ben,

$$E_3(x^4) = \frac{4!}{4!} M_3 1^5 = M_3 = -\frac{4}{15}. \quad (3.49)$$



## Capítulo 4

# Aproximación de integrais da forma $\int_a^b f(x)w(x)dx.$

Nesta sección o problema a estudar é unha versión máis xeral do que xa coñecemos. Analizaremos fórmulas de tipo i.p. para aproximar a integral

$$\int_a^b f(x)w(x)dx, \quad (4.1)$$

sendo  $w(x)$  unha *función peso*, e permitindo nalgúns casos ao intervalo  $(a, b)$  ser non limitado.

**Definición 4.1. [Función peso]** Sexa  $I = (a, b)$  un intervalo real, aberto e non baleiro, limitado ou non. Definimos unha *función peso en  $I$*  como unha función  $w : I \rightarrow \mathbb{R}$  cumprindo as seguintes características:

1.  $w$  é medible e  $w \geq 0$  en c.t.p. de  $I$ ,
2.  $\int_a^b x^n w(x)dx \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,
3.  $\int_a^b w(x)dx > 0$ .

*Observación 4.2.* Na definición anterior sería equivalente cambiar a condición 3 por

$$m(A) > 0, \text{ onde } A = \{x \in I : w(x) > 0\}, \quad (4.2)$$

ou tamén substituíla por

$$\left\{ p \text{ polinomio tal que } p \geq 0 \text{ e } \int_a^b p(x)w(x) = 0 \right\} \implies p \equiv 0. \quad (4.3)$$

Vexamos esta última implicación:

Por ser  $w$  unha función peso,  $w \geq 0$  en *c.t.p. de*  $I$ , por tanto  $p(x)w(x) \geq 0$  en *c.t.p. de*  $I$ . Engadindo a condición  $\int_a^b p(x)w(x)dx = 0$ , deducimos que entón  $p(x)w(x) = 0$  en *c.t.p. de*  $I$ , é dicir, se  $B = \{x \in I : p(x)w(x) \neq 0\}$ ,  $m(B) = 0$ . En consecuencia,  $p(x)w(x) = 0 \ \forall x \in I \setminus B$ .

Definimos agora  $A = \{x \in I : w(x) > 0\}$ . Por ser  $w$  función peso,  $m(A) > 0$ , e por tanto teremos que  $p(x)w(x) = 0$  para todo  $x \in A \setminus B$ . Deducimos entón que

$$p(x) = 0 \ \forall x \in A \setminus B, \quad (4.4)$$

pero daquela  $A \setminus B$  sería precisamente o conxunto de raíces dun polinomio non nulo, que ao ser este finito, tería medida nula, pero  $m(A \setminus B) = m(A) - m(A \cap B) = m(A) > 0$ . Chegamos entón a unha contradicción con supoñer que  $p$  era un polinomio non nulo e concluímos que  $p \equiv 0$ .

*Observación 4.3.* A condición 2 da Definición 4.1 implica que  $\int_a^b p(x)w(x)dx \in \mathbb{R}$  para todo polinomio  $p$ . Isto permite empregar fórmulas de tipo i.p. aínda cando o intervalo  $(a, b)$  sexa non limitado.

*Observación 4.4.* Se  $w$  é continua en  $(a, b)$ , será automaticamente unha función medible en  $(a, b)$ . Sumado ao feito de que  $w(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ , obtemos que  $\int_a^b w(x)dx > 0$  se a integral é finita. En consecuencia,  $w$  será unha función peso se cumpre a condición 2 da Definición 4.1.

*Observación 4.5.* Se na Definición 4.1  $(a, b)$  é un intervalo limitado,  $x^n$  será unha función limitada en  $[a, b]$ , logo poderíamos debilitar a condición 2 pedindo só que  $\int_a^b w(x)dx < \infty$ .

Todas estas observacións poden ser resumidas na seguinte proposición.

**Proposición 4.6.** *Se  $(a, b)$  é un intervalo limitado e  $w$  é unha función continua e positiva en  $(a, b)$  tal que  $\int_a^b w(x)dx < \infty$ , entón  $w$  é unha función peso en  $(a, b)$ .*

**Exemplo 4.7.** Se tomamos  $w(x) = 1$ , é doado probar que será unha función peso en calquera intervalo limitado  $(a, b)$ , xa que cumpre que

1.  $w(x) = 1$  é continua en  $(a, b)$ ,
2.  $w(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ ,
3.  $\int_a^b w(x)dx = \int_a^b 1dx = b - a < \infty$ .

Pola Proposición 4.6, temos que  $w(x) = 1$  é unha función peso, que se coñece como *peso de Legendre*.

Os resultados vistos para o caso  $w \equiv 1$  pódense xeneralizar ao caso de calquera función peso,  $w$ , por tanto de agora en diante chamaremos fórmulas de cuadratura de tipo i.p. ás aproximacións

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)w(x)dx, \quad (4.5)$$

sendo  $p_n(x)$  o polinomio de interpolación de Lagrange de  $f$  relativo aos nodos  $x_1 < \dots < x_n$ .

Teriamos que

$$\int_a^b p_n(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i), \quad (4.6)$$

onde

$$A_i = \int_a^b l_i(x)w(x)dx, \quad \text{para } i = 1, \dots, n, \quad (4.7)$$

empregando a notación  $l_i(x)$  para referirnos aos polinomios fundamentais de Lagrange.

O erro de cuadratura defínese de xeito evidente como

$$E_n(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{i=1}^n A_i f(x_i), \quad (4.8)$$

e as nocións de orde e exactitude en  $\mathbb{P}_m$  adecúanse propiamente.

Escribimos a adaptación do Teorema 2.2, que nos será de utilidade nos capítulos seguintes.

**Teorema 4.8.** [*Caracterización das fórmulas de tipo i.p.*] Unha fórmula de cuadratura de  $n$  nodos,  $\sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$ , é de tipo i.p. se, e só se, é polo menos de orde  $n - 1$ .

Para o cálculo dos  $A_i$ , empregamos o método dos coeficientes indeterminados, que agora consistirá na resolución do sistema con ecuacións

$$\sum_{i=1}^n A_i x_i^k = \int_a^b x^k w(x)dx, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (4.9)$$

Para os resultados sobre invariancia dos coeficientes por translacións (Sección 2.2) e sobre propiedades dos coeficientes das fórmulas de cuadratura de tipo i.p. con nodos simetricamente distribuídos respecto do punto medio (Sección 2.3), os resultados adáptanse de forma análoga a como fixemos co Teorema 2.2. De igual xeito, para a aproximación de integrais con función peso  $w \neq 1$ , temos os resultados análogos ao Teorema 2.11 (erro para as fórmulas de tipo i.p. cando  $(a, b) \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \emptyset$ ) e á Observación 2.16 (acotación do erro para calquera fórmula de tipo i.p.).



## Capítulo 5

# Converxencia das fórmulas de cuadratura

O obxectivo principal das fórmulas de cuadratura é que sexan exactas para integrandos dunha clase determinada.

Sexa  $(a, b)$  un intervalo limitado e non baleiro, sexa  $w$  unha función peso en  $(a, b)$  e  $f$  unha función calquera definida en  $[a, b]$ . Nesta sección empregaremos a notación seguinte para definir as fórmulas de cuadratura:

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^n A_{n,i} f(x_{n,i}), \quad (5.1)$$

con  $x_{n,i} \in [a, b]$ , para todo  $i = 1, \dots, n$  e para todo  $n$ . Con esta notación tratamos de evidenciar que os nodos van cambiando cando o fai  $n$ .

Consideramos entón unha sucesión de fórmulas de cuadratura con nodos en  $[a, b]$ ,  $\{Q_n(f)\}$ , tal que para cada  $n$ ,  $Q_n(f)$  é unha aproximación de  $\int_a^b f(x)w(x)dx$ .

**Definición 5.1.** Diremos que as fórmulas de cuadratura  $\{Q_n(f)\}$  son converxentes para a función  $f$  se se cumpre a igualdade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx. \quad (5.2)$$

Cando  $n \rightarrow \infty$ , as fórmulas de Newton-Cotes diverxen, incluso para moitas funcións analíticas. O fallo destas fórmulas para valores elevados de  $n$  fíxose evidente a partir da publicación de Carl Runge sobre interpolación polinómica, [7]. Neste artigo amósase o que agora coñecemos como *fenómeno de Runge*, é dicir, como o uso de polinomios de grao elevado para axustar unha función pode conducir a oscilacións e erros.

A conclusión fíxose aínda máis rigurosa grazas a George Pólya, co resultado seguinte, que podemos ver en [6]:

**Teorema 5.2.** [Teorema de Pòlya] Sexan  $(a, b)$  un intervalo limitado e non baleiro e  $w$  unha función peso en  $(a, b)$ . Supoñamos que todos os nodos  $x_{n,i}$  están en  $[a, b]$ . Entón equivalen:

(a) Para toda función  $f \in C([a, b])$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx$ .

(b) Cúmprense:

(i) Para todo polinomio  $p$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(p) = \int_a^b p(x)w(x)dx$ .

(ii) Existe unha constante  $M > 0$  tal que  $\sum_{i=1}^n |A_{n,i}| \leq M$  para todo  $n$ .

Antes de ver a proba, veremos un resultado necesario para construíla, que é un corolario do teorema de Banach-Steinhaus.

**Proposición 5.3.** Sexan  $E$  e  $F$  dous espazos de Banach,  $D$  un subespazo vectorial denso en  $E$ ,  $\{L_n\}$  unha sucesión de aplicacións lineais e continuas de  $E$  en  $F$  e  $L$  unha aplicación lineal e continua de  $E$  en  $F$ . Para ter a igualdade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n x = Lx, \quad \forall x \in E, \quad (5.3)$$

é necesario e suficiente que se cumpran:

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n x = Lx$ , para todo  $x \in D$ ,

(ii) Existe  $M > 0$ , constante, tal que  $\|L_n\| \leq M$  para todo  $n$ .

A continuación, presentamos a demostración do Teorema 5.2:

*Demostración.* Vexamos que se cumpren as hipóteses da proposición anterior nas condicións do Teorema 5.2. Consideramos  $E = C([a, b])$ , o espazo das funcións continuas en  $[a, b]$  dotado da norma:

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad (5.4)$$

e  $F = \mathbb{R}$  coa norma usual do valor absoluto. Sexa a aplicación

$$L : f \in C([a, b]) \rightarrow L(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx \in \mathbb{R}, \quad (5.5)$$

que é claramente lineal.

Podemos afirmar que  $L$  é tamén continua, xa que

$$|L(f)| \leq \underbrace{\left( \int_a^b w(x) \right)}_{\in \mathbb{R}} \|f\|. \quad (5.6)$$

Sexa  $L_n = (Q_n)|_{C([a,b])}$ , é dicir,

$$L_n : f \in C([a, b]) \rightarrow L_n(f) = \sum_{i=1}^n A_{n,i} f(x_{n,i}) \in \mathbb{R}. \quad (5.7)$$

Como todos os  $x_{n,i}$  están en  $[a, b]$ ,

$$|L_n(f)| = \left| \sum_{i=1}^n A_{n,i} f(x_{n,i}) \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n |A_{n,i}| \right) \|f\|, \quad (5.8)$$

polo que  $L_n$  tamén é lineal e continua, e tomando  $f \in C([a, b])$  tal que  $\|f\| \leq 1$ ,

$$\|L_n\| = \max_{f \in C([a,b])} |L_n(f)| \leq \max_{f \in C([a,b])} \left| \sum_{i=1}^n A_{n,i} f(x_{n,i}) \right| \leq \sum_{i=1}^n |A_{n,i}| \max_{f \in C([a,b])} \|f\| \leq \sum_{i=1}^n |A_{n,i}|. \quad (5.9)$$

Ademais, se  $f(x_{n,i}) = \text{signo}(A_{n,i})$ :

$$L_n(f) = \sum_{i=1}^n A_{n,i} \text{signo}(A_{n,i}) = \sum_{i=1}^n |A_{n,i}| \quad (5.10)$$

e por tanto

$$\|L_n\| = \sum_{i=1}^n |A_{n,i}|. \quad (5.11)$$

Sexa  $D = \{p|_{[a,b]} : p \text{ polinomio}\}$ . Polo teorema de aproximación de Weierstrass, sabemos que  $D$  é denso en  $E = C([a, b])$ , o que finaliza a demostración aplicando a proposición anterior.  $\square$

**Corolario 5.4.** *Nas mesmas hipóteses que as do Teorema 5.2, se todos os coeficientes  $A_{n,i}$  son non negativos, as fórmulas de cuadratura converxen para toda  $f \in C([a, b])$  se, e só se, converxen para todo polinomio.*

*Demostración.* Se converxe para toda función  $f \in C([a, b])$ , en particular converxe para todo polinomio. Agora ben, se converxe para todo polinomio, escollemos o polinomio  $p \equiv 1$ , entón

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_{n,i} = \int_a^b w(x) dx \in \mathbb{R}, \quad (5.12)$$

por tanto a sucesión  $\sum_{i=1}^n |A_{n,i}| = \sum_{i=1}^n A_{n,i} \leq \int_a^b w(x) dx$  está limitada. Finalmente aplicando o Teorema 5.2 obtemos o resultado.  $\square$

Dado que as fórmulas de cuadratura de tipo i.p. proceden de efectuar a aproximación

$$\int_a^b f(x) w(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) w(x) dx, \quad (5.13)$$

tense que

$$\int_a^b p_n(x) w(x) dx = \sum_{i=1}^n A_{n,i} f(x_{n,i}) = Q_n(f), \quad (5.14)$$

onde

$$A_{n,i} = \int_a^b l_{n,i}(x)w(x)dx, \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (5.15)$$

e  $l_{n,i}$  é o polinomio fundamental de Lagrange.

Por tanto, no caso das fórmulas de cuadratura de tipo i.p., o Teorema 5.2 e o Corolario 5.4 reescribense no resultado seguinte:

**Proposición 5.5.** *Nas hipóteses do Teorema 5.2, cúmprese:*

1. *Para toda función  $f \in C([a, b])$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f) = \int_a^b p_n(x)w(x)dx$  se, e só se, existe unha constante  $M > 0$ , independente de  $n$ , tal que*

$$\sum_{i=1}^n |A_{n,i}| = \sum_{i=1}^n \left| \int_a^b l_{n,i}(x)w(x)dx \right| \leq M. \quad (5.16)$$

2. *As fórmulas de cuadratura de tipo i.p. e coeficientes non negativos converxen para toda  $f \in C([a, b])$ .*

No relativo ás fórmulas de Newton-Cotes, pódese probar que a sucesión  $\{\sum_{i=1}^n A_{n,i}\}$  non está limitada, e por tanto as fórmulas de Newton-Cotes non converxen cando  $n \rightarrow \infty$  para toda  $f \in C([a, b])$ .

A continuación falaremos das fórmulas de Gauss, que son de tipo i.p. e con coeficientes non negativos, e por tanto converxentes para as funcións continuas en compactos.

## Capítulo 6

# Fórmulas de Gauss

Sexa  $(a, b)$  non baleiro, limitado ou non.

Vimos no Teorema 4.8 que unha fórmula de tipo i.p. con  $n$  puntos para aproximar unha integral da forma

$$\int_a^b f(x)w(x)dx, \quad w \text{ función peso}, \quad (6.1)$$

é polo menos de orde  $n-1$ , que pode aumentar a orde  $n$  no caso de que  $(a, b)$  sexa limitado,  $w \equiv 1$  e  $n$  impar considerando a fórmula de N-C aberta ou pechada correspondente (ver Observación 3.15).

Plantexamos entón a pregunta seguinte:

*Cal é o máximo valor de  $m \geq n$  tal que ao escoller de forma específica os nodos  $x_1, \dots, x_n$ , a fórmula de tipo i.p. correspondente sexa exacta en  $\mathbb{P}_m$ ?*

O teorema seguinte dá unha resposta parcial á pregunta exposta.

**Teorema 6.1.** *Unha fórmula de cuadratura de  $n$  puntos non pode ter orde de exactitude superior a  $2n-1$ .*

*Demostración.* Sexa

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \quad (6.2)$$

unha fórmula de cuadratura de  $n$  puntos. Basta con atopar un polinomio  $p$  de grao  $2n$  para o que a fórmula non sexa exacta. Consideramos:

$$p(x) = \left( \prod_{i=1}^n (x - x_i) \right)^2. \quad (6.3)$$

O grao do polinomio é  $2n$  e posto que  $p \geq 0$  e  $p \not\equiv 0$ , necesariamente

$$\int_a^b p(x)w(x)dx > 0, \quad (6.4)$$

(ver proba de (4.3)). Por outra parte,

$$\sum_{i=1}^n A_i p(x_i) = 0, \quad (6.5)$$

polo que a fórmula non é exacta para  $p$ .  $\square$

Veremos que a orde  $2n - 1$  só se pode alcanzar se os  $n$  nodos e os  $n$  coeficientes se escollen de forma óptima. As fórmulas de  $n$  puntos que son exactas en  $\mathbb{P}_{2n-1}$  reciben o nome de *fórmulas de Gauss*.

As fórmulas de cuadratura de Gauss baséanse na teoría dos polinomios ortogonais, pola analogía entre o cálculo dos nodos de cuadratura e os ceros de ditos polinomios.

## 6.1. Polinomios ortogonais

As nocións recollidas nesta sección pódense atopar en [1] e en [8].

Sexa  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  un intervalo non baleiro, limitado ou non, e sexa  $w$  unha función peso en  $(a, b)$ .

Sexa  $\mathbb{P}$  o espazo de todos os polinomios con coeficientes en  $\mathbb{R}$ .

Pódese probar que a forma bilineal

$$\{p, q\} \in \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow (p, q)_w = \int_a^b p(x)q(x)w(x)dx \in \mathbb{R} \quad (6.6)$$

define un produto escalar en  $\mathbb{P}$ .

A norma asociada a este produto escalar vén dada por:

$$\|p\|_w = \sqrt{(p, p)_w} = \left( \int_a^b p(x)^2 w(x) dx \right)^{1/2}. \quad (6.7)$$

**Definición 6.2.** Sexan  $p, q \in \mathbb{P}$ . Dirase que  $p$  e  $q$  son *ortogonais* respecto de  $w$  se se cumpre

$$(p, q)_w = 0, \quad (6.8)$$

e denótase como  $p \perp_w q$ .

**Definición 6.3.** Sexa  $X$  un subconxunto non baleiro de  $\mathbb{P}$ . Dirase que un polinomio  $p$  é ortogonal a  $X$  respecto de  $w$ , se  $p \perp_w q$ , para todo  $q \in X$ . Denotarase como  $p \perp_w X$ .

**Definición 6.4.** Sexa  $X$  un subconxunto non baleiro de  $\mathbb{P}$ . Dirase que  $X$  é un *conxunto ortogonal* respecto de  $w$  se

$$p \perp_w q \quad \forall p, q \in X, \quad p \neq q. \quad (6.9)$$

Se ademais,  $\|p\|_w = 1$  para todo  $p \in X$ , o conxunto  $X$  dirase *ortonormal* respecto de  $w$ .

**Definición 6.5.** Unha sucesión de polinomios  $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$  dirase que é unha *sucesión de polinomios ortogonais* se o conxunto  $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$  é ortogonal.

É posible ortogonalizar a sucesión de polinomios  $\{1, x, x^2, \dots\}$  respecto do produto escalar  $(\cdot, \cdot)_w$ .

**Teorema 6.6.** *Existe polo menos unha sucesión (e por tanto existen infinitas) de polinomios ortogonais  $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$  tal que  $\psi_0 \neq 0$  e*

$$\text{grao}(\psi_n) = n, \quad \forall n, \quad (6.10)$$

**Definición 6.7.** Dada unha sucesión como a que se describe no Teorema 6.6, diremos que  $\psi_n$  é o *polinomio ortogonal de grao  $n$* .

Para unha sucesión como a do Teorema 6.6 cúmprese que:

- (i) Para cada  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , o conxunto  $\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n\}$  é unha base ortogonal de  $\mathbb{P}_n$ .
- (ii) Para todo  $n$ ,  $\psi_{n+1} \perp_w \mathbb{P}_n$ .

**Teorema 6.8.** *Sexa  $n \in \mathbb{N}$  e  $S = \{p \in \mathbb{P}_n : p \perp_w \mathbb{P}_{n-1}\}$  o ortogonal de  $\mathbb{P}_{n-1}$  en  $\mathbb{P}_n$ . Se  $p \in S$ , entón ou ben  $p \equiv 0$ , ou ben  $\text{grao}(p) = n$ . Ademais  $\dim(S) = 1$  (é dicir, o ortogonal de  $\mathbb{P}_{n-1}$  en  $\mathbb{P}_n$  ten dimensión 1).*

**Teorema 6.9.** *Se  $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$  e  $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$  son dúas sucesións coma as do Teorema 6.6, entón para cada  $n$  existe un  $a_n \neq 0$  real tal que*

$$\psi_n = a_n \phi_n. \quad (6.11)$$

**Corolario 6.10.** *Existe unha única sucesión  $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$  de polinomios mónicos (é dicir, con coeficiente principal igual a 1) ortogonais tal que  $\text{grao}(\psi_n) = n$  para todo  $n$ .*

**Corolario 6.11.** *Existe como moito unha sucesión  $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$  de polinomios estandarizados (é dicir,  $\psi_n(1) = 1, \forall n$ ) ortogonais tal que  $\text{grao}(\psi_n) = n, \forall n$ .*

A sucesión descrita no Corolario 6.10 existe sempre. Agora ben, a sucesión da que se fala no Corolario 6.11 existirá se, e só se, para unha sucesión como a descrita no Teorema 6.6 se ten que  $\psi_n(1) \neq 0$  para todo  $n$ .

O teorema seguinte (que podemos ver en [8], páx 151-152) explica como se constrúe por recurrencia dita sucesión.

**Teorema 6.12.** *A sucesión de polinomios definida por*

$$\psi_0(x) = 1, \quad (6.12)$$

$$\psi_1(x) = x - a_1 \quad (6.13)$$

$$\psi_n(x) = (x - a_n)\psi_{n-1}(x) - b_n\psi_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \quad (6.14)$$

con

$$a_n = \frac{(x\psi_{n-1}, \psi_{n-1})_w}{(\psi_{n-1}, \psi_{n-1})_w}, \quad \text{se } n \geq 1 \quad (6.15)$$

e

$$b_n = \frac{(x\psi_{n-1}, \psi_{n-2})_w}{(\psi_{n-2}, \psi_{n-2})_w} = \frac{(\psi_{n-1}, \psi_{n-1})_w}{(\psi_{n-2}, \psi_{n-2})_w}, \quad \text{se } n \geq 2, \quad (6.16)$$

é a única sucesión de polinomios mónicos ortogonais tal que

$$\text{grao}(\psi_n) = n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (6.17)$$

*Observación 6.13.* Os polinomios

$$\frac{\psi_n}{\|\psi_n\|_w}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.18)$$

forman unha base ortonormal do espazo de polinomios.

A continuación presentamos un resultado que será de gran importancia para desenvolver as fórmulas de Gauss, cuxa demostración podemos consultar por exemplo en [4] (Capítulo 5, teorema 4).

**Teorema 6.14.** *Sexa  $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$  unha sucesión como a descrita no Teorema 6.6. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , as  $n$  raíces do polinomio ortogonal de grao  $n$ ,  $\psi_n$ , son reais, distintas e están situadas no interior de  $(a, b)$ .*

*Observación 6.15.* Polo Teorema 6.9 sabemos ademais que as raíces do polinomio ortogonal de grao  $n$ ,  $\psi_n$ , están univocamente definidas.

## 6.2. Problema de Gauss

Chamamos *Problema de Gauss* ao plantexado pola pregunta seguinte:

*Existe unha forma óptima de escoller os nodos  $x_1, \dots, x_n$  para que a fórmula de tipo i.p. correspondente sexa exacta en  $\mathbb{P}_{2n-1}$ ?*

O teorema que presentamos a continuación proporciona resposta á pregunta exposta anteriormente. Podemos consultalo en [10] (Capítulo 3.8, Teoremas 1 e 4).

**Teorema 6.16 (Caracterización dos nodos das fórmulas de Gauss).** *Sexa  $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$  unha sucesión como a descrita no Teorema 6.6. Entón a fórmula de cuadratura*

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i), \quad (6.19)$$

con

$$A_i = \int_a^b l_i(x)w(x)dx, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.20)$$

é exacta en  $\mathbb{P}_{2n-1}$  se, e só se,  $x_1, \dots, x_n$  son as raíces de  $\psi_n$  (polinomio ortogonal de grao  $n$ ).

*Demostración.* “ $\Rightarrow$ ” Supoñamos primeiramente que a fórmula é exacta en  $\mathbb{P}_{2n-1}$ , é dicir, que

$$\int_a^b p(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^n A_i p(x_i), \quad \forall p \in \mathbb{P}_{2n-1}. \quad (6.21)$$

Queremos ver que  $\prod_{i=1}^n (x - x_i) \perp_w \mathbb{P}_{n-1}$ , xa que entón teríamos dous polinomios de grao  $n$  ortogonais a  $\mathbb{P}_{n-1}$ :  $\psi_n$  e  $\prod_{i=1}^n (x - x_i)$ . Polo Teorema 6.8 (dinos que o ortogonal a  $\mathbb{P}_{n-1}$  en  $\mathbb{P}_n$  ten dimensión 1), existirá  $k_n \neq 0$  (coeficiente principal de  $\psi_n$ ) tal que

$$\psi_n(x) = k_n \prod_{i=1}^n (x - x_i), \quad (6.22)$$

chegando así a que os nodos  $x_1, \dots, x_n$  son as raíces de  $\psi_n$ . Daquela, sexa  $q \in \mathbb{P}_{n-1}$ : claramente  $q(x) \prod_{i=1}^n (x - x_i) \in \mathbb{P}_{2n-1}$ , e pola exactitude da fórmula para estes polinomios,

$$\int_a^b q(x) \prod_{i=1}^n (x - x_i) w(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j q(x_j) \prod_{i=1}^n (x_j - x_i) = 0, \quad (6.23)$$

por tanto,

$$\prod_{i=1}^n (x - x_i) \perp_w \mathbb{P}_{n-1}, \quad (6.24)$$

como queríamos ver.

“ $\Leftarrow$ ” Supoñamos agora que  $x_1, \dots, x_n$  son as raíces de  $\psi_n$ . Do Teorema 6.14 sabemos que son todas distintas e que pertencen ao aberto  $(a, b)$ , polo que poderían ser os nodos dunha fórmula de cuadratura de  $n$  puntos. Sexan  $A_i$  os coeficientes dados por (6.20), entón

$$\int_a^b p(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^n A_i p(x_i), \quad \forall p \in \mathbb{P}_{n-1}, \quad (6.25)$$

por ser a fórmula de tipo i.p. e con  $n$  nodos.

Sexa agora  $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ , con  $\text{grao}(p) \geq n$ . Se facemos a división euclidiana de  $p$  entre  $\psi_n$ , podemos atopar dous polinomios  $q, r \in \mathbb{P}_{n-1}$  ( $2n - 1 - (n) = n - 1$ ) tales que

$$p(x) = \psi_n(x)q(x) + r(x). \quad (6.26)$$

Por tanto, como  $\psi_n \perp_w \mathbb{P}_{n-1}$

$$(\psi_n, q)_w = \int_a^b \psi_n(x)q(x)w(x)dx = 0 \Rightarrow \int_a^b p(x)w(x)dx = \int_a^b r(x)w(x)dx, \quad (6.27)$$

e como a fórmula é exacta en  $\mathbb{P}_{n-1}$

$$\int_a^b r(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^n A_i r(x_i). \quad (6.28)$$

Por último,

$$p(x_i) = \underbrace{\psi_n(x_i)q(x_i)}_0 + r(x_i) = r(x_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.29)$$

co cal

$$\int_a^b p(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^n A_i p(x_i), \quad (6.30)$$

é dicir, a fórmula é exacta en  $\mathbb{P}_{2n-1}$ .  $\square$

*Observación 6.17.* Fixados o intervalo  $(a, b)$ , a función peso  $w$  e o enteiro  $n$ , existe unha única fórmula de cuadratura con  $n$  nodos exacta en  $\mathbb{P}_{2n-1}$ , que necesariamente será de tipo i.p. e que é a fórmula de Gauss. Isto débese a que ao seren os nodos as raíces de  $\psi_n$  e os coeficientes dados por (6.20), ambos están univocamente determinados.

**Definición 6.18.** Os coeficientes  $A_i$  das fórmulas de Gauss chámanse *números de Chistoffel*, son positivos e veñen dados por

$$A_i = \frac{1}{(\psi_n(x_i))^2} \int_a^b \left( \frac{\psi_n(x)}{x - x_i} \right)^2 w(x)dx, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.31)$$

onde  $\psi_n$  é o polinomio ortogonal de grao  $n$ .

Podemos consultar a proba da positividade dos números de Christoffel en [10] (capítulo 3, Teorema 4, páx. 138-139).

Vimos no Capítulo 5 que as fórmulas de Newton-Cotes non converxen ao valor verdadeiro da integral cando  $n \rightarrow \infty$ . Vexamos agora que ocorre no caso das fórmulas de Gauss. Empregaremos para este resultado novamente a notación introducida en dita sección:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^n A_{n,i} f(x_{n,i}). \quad (6.32)$$

**Teorema 6.19.** *Dada unha sucesión de fórmulas de Gauss en  $[a, b]$  limitado,*

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^n A_{n,i} f(x_{n,i}) + E_n(f). \quad (6.33)$$

*Se  $f(x)$  é continua en  $[a, b]$ , entón esta sucesión de fórmulas converxen ao valor verdadeiro da integral.*

A proba deste teorema séguese do visto no Capítulo 5 sobre converxencia das fórmulas de cuadratura, concretamente na Proposición 5.5.

### 6.3. Expresión do erro para as fórmulas de Gauss

O teorema que presentamos a continuación pódese atopar en [8], se ben formulado dun xeito lixeiramente distinto.

**Teorema 6.20 (Erro para as fórmulas de Gauss).** *Sexa  $w$  unha función peso en  $(a, b)$ , con  $(a, b)$  limitado e non baleiro, e sexa  $\sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$  a fórmula de cuadratura de Gauss de  $n$  puntos relativa ao peso  $w$ . Se  $f \in C^{2n}([a, b])$ , entón existe  $\xi \in (a, b)$  tal que*

$$E_n(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b (\bar{\psi}_n(x))^2 w(x)dx, \quad (6.34)$$

sendo  $\bar{\psi}_n$  o polinomio mónico ortogonal de grao  $n$ .

Comparando as fórmulas de Newton-Cotes coa integración gaussiana, esta última produce resultados máis precisos, e temos que ao aumentar o número de nodos, o erro diminúe. Ademais, é sinxelo calcular os nodos e coeficientes das fórmulas de Gauss, aínda para un número elevado de puntos, como se pode ver en [2].

### 6.4. Fórmulas de Gauss-Legendre en $(-1, 1)$

A fórmula de Gauss-Legendre de  $n$  puntos en  $(-1, 1)$  é a fórmula de Gauss que resulta de tomar o intervalo de integración  $(a, b) = (-1, 1)$  e como función peso o peso de Legendre:

$$w(x) = 1, \quad \forall x \in (-1, 1). \quad (6.35)$$

Será por tanto a única fórmula de cuadratura de orde  $2n - 1$  dada por

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i). \quad (6.36)$$

Para obter a fórmula calcularemos primeiramente os nodos,  $x_1, \dots, x_n$ , resolvendo a ecuación  $L_n(x) = 0$ , onde  $L_n$  é o polinomio de Legendre, que podemos ver en [4] (5.3.4, ecuación 29) e vén dado pola expresión

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n), \quad n \geq 1. \quad (6.37)$$

A continuación os coeficientes  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , empregando o método dos coeficientes indeterminados (dado polo Teorema 2.2). Introducimos tamén algunhas propiedades que nos serán de axuda á hora de realizar os cálculos, como por exemplo

$$L_n(-x) = (-1)^n L_n(x) \Rightarrow x_i = x_{n-i+1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.38)$$

e pola Proposición 2.24

$$A_i = A_{n-i+1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.39)$$

Para as fórmulas de Gauss-Legendre en  $(-1, 1)$ , a fórmula do erro vén dada pola expresión seguinte (podémola ver en [3], 4.3.3):

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^3} \frac{f^{2n}(\xi)}{2n+1}. \quad (6.40)$$

Calculamos a modo de exemplo a fórmula de Gauss-Legendre para  $n = 1$ .

**Exemplo 6.21 (Fórmula de Gauss-Legendre para  $n = 1$ ).**

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_1 f(x_1). \quad (6.41)$$

O nodo  $x_1$  será a raíz de  $L_1(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(x^2 - 1) = x$ .

$$L_1(x) = x = 0 \iff x = 0 \Rightarrow x_1 = 0. \quad (6.42)$$

Polo método dos coeficientes indeterminados,  $A_1$  resulta de impoñer exactitude para  $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}_0$ ,

$$A_1 x_1^0 = \int_{-1}^1 1 dx = 2 \Rightarrow A_1 = 2. \quad (6.43)$$

Polo tanto a fórmula de Gauss-Legendre para  $n = 1$ , que será exacta en  $\mathbb{P}_{2n-1} = \mathbb{P}_1$  ven dada por:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2f(0), \quad (6.44)$$

que como vemos coincide coa fórmula de Poncelet en  $(a, b) = (-1, 1)$ . Esta é a única fórmula que pertence simultaneamente ás fórmulas de Newton-Cotes e a fórmulas de Gauss, xa que as fórmulas de Newton-Cotes de  $n$  puntos son como moito de orde  $n$ , orde 1 neste caso, e as fórmulas de Gauss son de orde  $2n - 1$ , tamén orde 1 neste caso. Calculemos por último o erro cometido empregando a fórmula (6.40):

$$E_1(f) = \frac{2^3(1!)^4}{(2!)^3} \frac{f''(\xi)}{3} = \frac{f''(\xi)}{3}, \quad (6.45)$$

que naturalmente coincide co da fórmula de Poncelet para  $h = 1$ .

É posible calcular “a man” os nodos e coeficientes das fórmulas de Gauss-Legendre para  $n \leq 5$ . Para  $n$  maior é preciso calculalos numericamente, aínda que os nodos e os coeficientes das fórmulas de Gauss-Legendre en  $(-1, 1)$  están tabulados.

Antes de falar da converxencia das fórmulas de Gauss-Legendre, daremos algunhas nocións de sumas de Riemann que podemos consultar en [10] e que nos serán de utilidade.

Sexa  $[a, b]$  un intervalo limitado e non baleiro e  $f$  unha función definida para todo  $x \in [a, b]$ . Sexan

$$a = \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < \xi_{n+1} = b \quad (6.46)$$

unha partición de  $n + 1$  puntos en  $[a, b]$  que orixina  $n$  subintervalos da forma  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ . Collemos en cada un dos  $n$  subintervalos un punto,  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Definición 6.22.** Definimos a suma de Riemann para  $f$  baseada nos puntos  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, n + 1$  e  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  como segue

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^n (\xi_{i+1} - \xi_i) f(x_i). \quad (6.47)$$

Definimos tamén a lonxitude máxima dos subintervalos como

$$L_n(f) = \max_{1 \leq i \leq n} (\xi_{i+1} - \xi_i). \quad (6.48)$$

**Definición 6.23.** Se asumimos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) = 0$  e se cumpre que o límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\xi_{i+1} - \xi_i) f(x_i) \quad (6.49)$$

existe e é independente da elección dos puntos  $\xi_i$  e  $x_i$  que definen  $S_n$ , entón definimos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = \int_a^b f(x) dx. \quad (6.50)$$

A continuación expoñemos un resultado cuxa demostración podemos ver en [10] e que nos permitirá deducir información acerca da converxencia das fórmulas de Gauss-Legendre en  $(-1, 1)$  cando  $n \rightarrow \infty$ .

**Teorema 6.24.** *A fórmula de Gauss-Legendre de  $n$  puntos,*

$$\int_{-1}^1 f(x) \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i), \quad (6.51)$$

*é unha suma de Riemann.*

Como consecuencia inmediata do teorema e da definición de integral definida como límite de sumas de Riemann (Definición 6.22), temos que dada unha sucesión de fórmulas de Gauss-Legendre, se facemos que  $n$  tenda a infinito, esta sucesión converxe ao verdadeiro valor da integral sempre que esta exista. Notemos que o resultado non require que a función  $f$  sexa continua para que converxa ao valor da integral, basta con que a integral exista.

Por último, se consideramos un intervalo  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  limitado e non baleiro, considerando a transformación afín  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\varphi : t \in [-1, 1] \rightarrow \varphi(t) = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} \in [a, b], \quad (6.52)$$

podemos deducir de (6.36) a fórmula de Gauss-Legendre en  $(a, b)$  sen máis que aplicar o cambio de variable  $x = \varphi(t)$ .

Aseguramos que é a fórmula de Gauss xa que as fórmulas homólogas teñen a mesma orde.

## Capítulo 7

# Fórmulas compostas

Ate agora as fórmulas empregadas eran de tipo i.p. Aproximabamos o valor de  $\int_a^b f(x)$  pola integral dun polinomio que aproximaba á función  $f$  en todo o intervalo de integración  $[a, b]$ . É dicir, ate agora empregabamos só fórmulas de cuadratura simples.

Para obter unha precisión razoable sobre un intervalo de integración grande, non chega cunha aproximación polinómica de baixo grao, e como xa vimos no Capítulo 5, aumentando a orde das fórmulas de tipo i.p. con nodos equidistantes non chegabamos a resultados satisfactorios (fenómeno de Runge e coeficientes de signos alternos que incrementan o erro de redondeo).

Porén, é posible construír fórmulas de cuadratura con nodos e coeficientes sinxelos que proporcionen, en moitos casos, boas aproximacións. Serán as chamadas fórmulas compostas, e a idea básica detrás delas será dividir o intervalo de integración en subintervalos (da mesma lonxitude normalmente), e aplicar en cada un unha fórmula de baixo grao de precisión. As aproximacións serán mellores porque a lonxitude dos subintervalos é pequena. Veremos algunhas das fórmulas máis usuais. Podemos atopar os contidos desta sección en [4].

Sexa a integral a aproximar

$$\int_a^b f(x)dx, \quad (7.1)$$

onde  $(a, b)$  é un intervalo limitado. Dividimos  $[a, b]$  en  $m$  subintervalos de igual lonxitude,  $H$ , sendo

$$H = \frac{b - a}{m}. \quad (7.2)$$

Sexan ademais

$$y_j = a + (j - 1)H, \quad j = 1, \dots, m + 1 \quad (7.3)$$

os puntos que orixinan a partición en  $m$  subintervalos, sendo  $y_1 = a$  e  $y_{m+1} = b$ , e de xeito que

cada subintervalo será da forma  $[y_j, y_{j+1}]$ ,  $j = 1, \dots, m$ , entón

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^m \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)dx. \quad (7.4)$$

### 7.1. Fórmulas de Newton-Cotes pechadas compostas

Sexa  $n$  un enteiro e  $h = \frac{H}{n-1}$ . En cada  $[y_j, y_{j+1}]$ , aproximamos  $\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)dx$  cunha fórmula de Newton-Cotes pechada de  $n$  puntos, é dicir,

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)dx = \sum_{i=1}^n A_i^{(j)} f(y_j + (i-1)h) + E_n^{(j)}(f), \quad (7.5)$$

onde os coeficientes  $A_i^{(j)}$  son independentes de  $j$ , xa que vimos na Proposición 2.23 que eran invariantes por translacións. De feito, por (3.8) sabemos que podemos escribir os coeficientes das fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes como

$$A_i^{(j)} = h\alpha_i, \quad (7.6)$$

onde  $\alpha_i$  depende unicamente de  $n$  e de  $i$ , non de  $j$  (isto implica que os coeficientes en cada subintervalo para un mesmo  $n$  e  $i$  son iguais), por tanto,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{j=1}^m \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)dx = h \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \alpha_i f(y_j + (i-1)h) + \sum_{j=1}^m E_n^{(j)}(f) \\ &= h \sum_{i=1}^n \alpha_i \left\{ \sum_{j=1}^m f(y_j + (i-1)h) \right\} + \sum_{j=1}^m E_n^{(j)}(f). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Agora ben, dado que  $y_{j+1} = y_j + (n-1)h$ , os valores  $f(y_{j+1})$  para  $j = 1, \dots, m-1$  aparecen na suma dúas veces, por tanto escribiremos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= h \left\{ \alpha_1 f(y_1) + \alpha_n f(y_{m+1}) + (\alpha_1 + \alpha_n) \sum_{j=1}^{m-1} f(y_{j+1}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_i \left( \sum_{j=1}^m f(y_j + (i-1)h) \right) \right\} + E_{m,n}^{(j)}(f), \end{aligned} \quad (7.8)$$

onde  $E_{m,n}^{(j)}(f) = \sum_{j=1}^m E_n^{(j)}(f)$ . Como neste caso empregamos a mesma fórmula de Newton-Cotes pechada en todos os subintervalos, podemos obter unha expresión máis sinxela para o erro. Recordamos as expresións do erro para a fórmula de Newton-Cotes pechada en  $[y_j, y_{j+1}]$  segundo a paridade de  $n$ :

· Se  $n$  é impar e  $f \in C^{n+1}([y_j, y_{j+1}])$ , existe  $\xi_j \in (y_j, y_{j+1})$  tal que

$$E_n^{(j)}(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_j)}{(n+1)!} h^{n+2} M_n, \quad M_n = \int_1^n t \omega_n(t) dt < 0. \quad (7.9)$$

· Se  $n$  é par e  $f \in C^n([y_j, y_{j+1}])$ , existe  $\xi_j \in (y_j, y_{j+1})$  tal que

$$E_n^{(j)}(f) = \frac{f^{(n)}(\xi_j)}{n!} h^{n+1} M_n, \quad M_n = \int_1^n \omega_n(t) dt < 0. \quad (7.10)$$

Recordamos tamén a expresión de  $\omega_n(t) = (t-1) \cdots (t-n)$ .

Conseideramos primeiramente o caso no que  $n$  impar e  $f \in C^{n+1}([a, b])$  e desenvolvemos a fórmula do erro:

$$E_{m,n}(f) = \sum_{j=1}^m E_n^{(j)}(f) = \frac{1}{(n+1)!} h^{n+2} M_n \sum_{j=1}^m f^{(n+1)}(\xi_j), \quad (7.11)$$

Agora ben, como  $f \in C^{n+1}([a, b])$ ,  $f^{(n+1)}$  é continua en  $[a, b]$  e os puntos  $\xi_j \in (a, b)$ , para todo  $j$ , por tanto polo teorema dos valores intermedios, existe  $\eta \in (a, b)$  tal que

$$\sum_{j=1}^m f^{(n+1)}(\xi_j) = m f^{(n+1)}(\eta), \quad (7.12)$$

xa que

$$\min_{x \in [\xi_1, \xi_m]} f^{(n+1)}(x) \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f^{(n+1)}(\xi_j) \leq \max_{x \in [\xi_1, \xi_m]} f^{(n+1)}(x). \quad (7.13)$$

Logo,

$$E_{m,n}(f) = \frac{1}{(n+1)!} h^{n+2} M_n m f^{(n+1)}(\eta). \quad (7.14)$$

Ademais, sabemos que  $H = \frac{b-a}{m}$  e  $h = \frac{H}{n-1}$ , por tanto  $hm = \frac{b-a}{n-1}$ , e entón

$$E_{m,n}(f) = \frac{b-a}{(n+1)!(n-1)} h^{n+1} M_n f^{(n+1)}(\eta), \quad (7.15)$$

ou ben en función de  $H$ ,

$$E_{m,n}(f) = \frac{b-a}{(n+1)!} \frac{M_n}{(n-1)^{n+2}} H^{n+1} f^{(n+1)}(\eta), \quad M_n = \int_1^n t \omega_n(f) dt < 0, \quad (7.16)$$

obtemos a fórmula para o erro no caso de  $n$  impar e  $f \in C^{n+1}([a, b])$ .

De forma análoga,

$$E_{m,n}(f) = \frac{b-a}{n!} \frac{M_n}{(n-1)^{n+1}} H^n f^{(n)}(\eta), \quad M_n = \int_1^n \omega_n(f) dt < 0, \quad (7.17)$$

sería a fórmula para o erro no caso de  $n$  par e  $f \in C^n([a, b])$ .

Esta forma de escribir a fórmula do erro fai notar que para un  $n$  fixado e unha  $f$  suficientemente regular, podemos facer o erro tan pequeno como queiramos facendo  $H \rightarrow 0$  (máis subintervalos). Deste xeito, deducimos que as fórmulas de cuadratura compostas poden ser moi precisas aínda cando a función  $f$  do integrando non teña derivadas de alta orde.

Vexamos a continuación algunhas das fórmulas de cuadratura máis usuais, como son a fórmula do trapecio composta ( $n = 2$ ) e a fórmula de Simpson ( $n = 3$ ).

### 7.1.1. Fórmula do trapecio composta

Tendo en conta a fórmula obtida no Exemplo 3.5, considerando un intervalo  $[x_1, x_2]$  con  $h = x_2 - x_1$  e coa expresión do erro obtida no Exemplo 2.14, para  $f \in C^2([x_1, x_2])$  a fórmula do trapecio simple vén dada por :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^3}{12}f''(\xi), \quad \xi \in (x_1, x_2). \quad (7.18)$$

Notemos que  $A_1 = A_2 = \frac{h}{2}$ , por tanto por (3.8),  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ . Consideremos agora un intervalo  $[a, b]$  dividido en  $m$  subintervalos  $[y_j, y_{j+1}]$ ,  $j = 1, \dots, m$  de igual lonxitude  $H$ . Obtemos a fórmula do trapecio composta aplicando a cada subintervalo  $[y_j, y_{j+1}]$  a fórmula do trapecio simple. Facemos uso entón da fórmula (7.8):

$$\int_a^b f(x) = h \left\{ \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) + \sum_{j=1}^{m-1} f(y_{j+1}) \right\} + E_{m,n}(f), \quad (7.19)$$

e aplicando agora a fórmula do erro para  $n$  par (7.29),

$$E_{m,2}(f) = \frac{b-a}{2!} \frac{M_2}{1^3} H^2 f''(\eta) \stackrel{(1)}{=} \frac{b-a}{2!} M_2 h^2 f''(\eta), \quad \eta \in (a, b), \quad (7.20)$$

onde en (1) empregamos que neste caso  $h = H$ . Tendo en conta agora que

$$M_2 = \int_1^2 (t-1)(t-2)dt = -\frac{1}{6}, \quad (7.21)$$

entón, como  $h = H$ , podemos escribir  $y_{j+1} = a + jh$ , e finalmente:

$$\int_a^b f(x) = h \left\{ \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) + \sum_{j=1}^{m-1} f(a + jh) \right\} - \frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta). \quad (7.22)$$

### 7.1.2. Fórmula de Simpson composta

Recordamos que a fórmula de Simpson simple nun intervalo  $[x_1, x_3]$ , con punto medio  $x_2$ , para unha función  $f \in C^4([x_1, x_3])$  viña dada por

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)) - \frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi), \quad (7.23)$$

para un certo  $\xi \in (x_1, x_3)$  e  $h = \frac{x_3 - x_1}{2}$ , como vimos nos Exemplos 3.6 e 3.19.

Notemos que neste caso  $A_1 = A_3 = \frac{h}{3}$  e  $A_2 = \frac{4}{3}h$ , por tanto  $\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$  e  $\alpha_2 = \frac{4}{3}$ . Para construír a fórmula de Simpson composta, teñamos en conta que

$$n = 3, \quad h = \frac{H}{2} = \frac{b-a}{2m}, \quad \text{e } y_{j+1} = y_j + 2h = a + 2jh, \quad (7.24)$$

por tanto aplicando (7.8):

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left\{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(y_{j+1}) + 4 \sum_{j=1}^m f(y_j + h) \right\} + E_{m,3}(f). \quad (7.25)$$

Empregando a fórmula do erro para  $n$  impar (7.16):

$$E_{m,3}(f) = \frac{b-a}{4!} \frac{M_3}{2^5} H^4 f^{(4)}(\eta) = \frac{b-a}{4!} \frac{M_3}{2} h^4 f^{(4)}(\eta), \quad (7.26)$$

e tendo en conta que

$$M_3 = \int_1^3 t(t-1)(t-2)(t-3)dt = -\frac{4}{15}, \quad (7.27)$$

o erro virá dado por

$$E_{m,3}(f) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\eta) \quad (7.28)$$

para certo  $\eta \in (a, b)$  e  $f \in C^4([a, b])$ . Por tanto,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left\{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(a + 2jh) + 4 \sum_{j=1}^m f(a + (2j-1)h) \right\} - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\eta).}$$

(7.29)

## 7.2. Converxencia das fórmulas compostas

Sexa  $(a, b)$  un intervalo limitado e non baleiro e sexa para cada  $m \in \mathbb{N}$  unha partición en  $[a, b]$  da forma

$$a = y_1 < y_2 < \dots < y_m < y_{m+1} = b. \quad (7.30)$$

Para  $j = 1, \dots, m$ , sexa a lonxitude de cada subintervalo

$$H_j = y_{j+1} - y_j \quad (7.31)$$

e supoñamos que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \max_{1 \leq j \leq m} H_j \right) = 0$  (ao aumentar o número de subintervalos a lonxitude de todos diminúe).

Fixado  $n \in \mathbb{N}$ , sexa

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^n \hat{A}_{n,i} f(\hat{s}_i), \quad (7.32)$$

a fórmula de cuadratura de  $n$  puntos en  $[0, 1]$ , onde os puntos  $\hat{s}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , representan unha partición en  $[0, 1]$  e  $\hat{A}_{n,i}$  son os coeficientes da fórmula de cuadratura no intervalo de referencia  $[0, 1]$  ( $\alpha_{n,i}$ ).

En cada intervalo  $[y_j, y_{j+1}]$  consideramos a fórmula de cuadratura homóloga de aplicar á fórmula (7.32) a transformación afín

$$\varphi_j(s) = H_j s + y_j, \quad (7.33)$$

tal que se  $s = 0$ ,  $\varphi_j(0) = y_j$  e se  $s = 1$ ,  $\varphi_j(1) = y_j + h_j = y_{j+1}$ . Teriamos por tanto en cada subintervalo  $[y_j, y_{j+1}]$  a fórmula de cuadratura

$$Q_n^{(j)}(f) = \sum_{i=1}^n A_{n,i}^{(j)} f(x_i^{(j)}), \quad (7.34)$$

sendo

$$A_{n,i}^{(j)} = H_j \hat{A}_{n,i} \quad \text{e} \quad x_i^{(j)} = \varphi_j(\hat{s}_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.35)$$

Consideramos agora en  $[a, b]$  a fórmula de cuadratura composta

$$Q_{m,n}(f) = \sum_{j=1}^m Q_n^{(j)}(f) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n A_{n,i}^{(j)} f(x_i^{(j)}). \quad (7.36)$$

Neste caso  $n$  está fixado e indica que a partición no intervalo de referencia  $[0, 1]$  ten  $n$  nodos. A pregunta que nos facemos agora é baixo que condicións sobre a fórmula (7.32) e sobre  $f$  se cumpre

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Q_{m,n}(f) = \int_a^b f(x) dx. \quad (7.37)$$

Coa notación que acabamos de introducir, temos o seguinte resultado que resolve a pregunta proposta.

**Teorema 7.1.** *Supoñamos que a fórmula de cuadratura (7.32) é exacta en  $\mathbb{P}_0$  e ten todos os nodos en  $[0, 1]$  ( $\hat{s}_i \in [a, b]$ ,  $i = 1, \dots, n$ ). Entón, cúmprese (7.37) para toda  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , onde  $\mathcal{R}([a, b])$  denota o conxunto de funcións Riemann-integrables en  $[a, b]$ .*

*Demostración.* Coa notación introducida temos que  $A_{n,i}^{(j)} = H_j \hat{A}_{n,i}$ , e por tanto

$$Q_{m,n}(f) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n H_j \hat{A}_{n,i} f(x_i^{(j)}) = \sum_{i=1}^n \hat{A}_{n,i} \sum_{j=1}^m H_j f(x_i^{(j)}). \quad (7.38)$$

Notemos agora que  $\sum_{j=1}^m H_j f(x_i^{(j)})$  é unha suma de Riemann para  $f$  en  $[a, b]$  por ser  $H_j = y_{j+1} - y_j$  e  $x_i^{(j)} \in [y_j, y_{j+1}]$ .

Por definición de suma de Riemann (Definición 6.22), temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m H_j f(x_i^{(j)}) = \int_a^b f(x) dx. \quad (7.39)$$

Entón,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Q_{m,n} = \sum_{i=1}^n \hat{A}_{n,i} \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx, \quad (7.40)$$

onde a última igualdade séguese de que, por ser a fórmula (7.32) exacta en  $\mathbb{P}_0$ ,  $\sum_{i=1}^n \hat{A}_{n,i} = 1$ .  $\square$

Deste resultado deducimos a convergencia das fórmulas de Newton-Cotes compostas e das fórmulas de Gauss-Legendre compostas.



# Bibliografía

- [1] Borwein, P. e Erdelyi, T. (1995) *Polynomials and Polynomial Inequalities*, 1st ed., Springer New York, New York.
- [2] Gil, A., Segura, J. e Temme, N. M. *Fast and reliable high-accuracy computation of Gauss–Jacobi quadrature*, Numerical Algorithms, 87(4) (2021), pp. 1391-1419.
- [3] Hammerlin, G., Hoffmann, K.-H. (1991) *Numerical Mathematics*, 1sd ed., Springer-Verlag, New York.
- [4] Isaacson, E. e Keller, H. B. (1994). *Analysis of numerical methods*, Dover Publications, New York.
- [5] Lang, S. (1990). *Introducción al análisis matemático*, Addison-Wesley Iberoamericana, Argentina.
- [6] Pólya, G. *Ber die Konvergenz von Quadraturverfahren*, Mathematische Zeitschrift, 37 (1933), pp. 264-286.
- [7] Runge, C. *Über empirische funktionen und die interpolation zwischen äquidistanten ordinaten*, Z. Math. Phys., 46 (1901), pp. 224-243.
- [8] Stoer, J. e Bulirsch, R. (1993). *Introduction to numerical analysis*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.
- [9] Stromberg, K. (1996). *An Introduction to classical real analysis*, 1st ed., Chapman and Hall, London.
- [10] Stroud, A.H. (1974). *Numerical quadrature and solution of ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York.