materia

Hidráulica I

unidade didáctica 5

Análise dimensional

Marcos Sánchez Carricoba, Gregorio Iglesias Rodríguez e Rodrigo Carballo Sánchez

Departamento de Enxeñaría Agroforestal

Escola Politécnica Superior

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

VICERREITORÍA DE ESTUDANTES, CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA

titulación

Grao en Enxeñaría Civil

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

unidade **didáctica** 5

Análise dimensional

Marcos Sánchez Carricoba, Gregorio Iglesias
Rodríguez e Rodrigo Carballo Sánchez
Departamento de Enxeñaría Agroforestal
Escola Politécnica Superior

unidadedidáctica
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Deseño
Unidixital

Edita
Vicerreitoría de Estudantes, Cultura
e Formación Continua da
Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

Imprime
Unidixital
Servizo de Edición Dixital da
Universidade de Santiago de Compostela
Dep. Legal: C 2363-2011
ISBN 978-84-9887-777-9

MATERIA: Hidráulica I
TITULACIÓN: Grao en Enxeñaría Civil
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

Unidade I. Introdución a mecánica de fluídos
Unidade II. Cinemática de fluídos
Unidade III. Dinámica de fluídos. Ecuacións fundamentais
Unidade IV. Relacións integrais
Unidade V. Análise dimensional
- Introdución
- Soporte teórico para a adimensionalización
- Proceso de adimensionalización
- Consideracións na selección de variables
- Distinción entre dimensións básicas e dimensións de referencia
- Unicidade dos produtos adimensionais
- Principais números adimensionais
- Modelización física
- Exercicios

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Esta Unidade Didáctica (en diante UD) constitúe un material de apoio para o seguimento dunha parte da materia de Hidráulica I. De entrada non existe ningún prerrequisito legal para poder cursar esta materia. Non obstante, considérase recomendable ter cursado previamente, e superado con éxito, Matemáticas I, II e III e Física I e II, por proporcionar unha base axeitada para a comprensión da materia.

Nesta UD expóñense os conceptos básicos de análise dimensional e impartiranse nocións fundamentais de modelización física. Non obstante, considérase indispensable a asistencia a clase e a realización de actividades complementarias para a total comprensión dos distintos conceptos por parte do alumno.

A análise dimensional é unha ferramenta conceptual empregada na Enxeñería Hidráulica e noutras ramas da enxeñería, así como da física ou química, para a simplificación do estudo de calquera fenómeno no que están involucradas diversas magnitudes físicas en forma de variables independentes.

OS OBXECTIVOS

Mediante o desenvolvemento dos contidos que se expoñen nesta UD pretende infundirse no alumno, ademais dunha serie de coñecementos, capacidades para formular a solución dun problema de Enxeñería Hidráulica mediante a combinación da análise dimensional e a modelización física. Para adquirir estes coñecementos e capacidades é necesario compaxinar esta UD con outro material e actividades (clases, seminarios,prácticas…). Os principais aspectos que se pretende que o alumno domine con claridade son:

1. Comprender o concepto de semellanza e as súas implicacións para a modelización física.
2. Coñecer os distintos tipos de semellanza e saber aplicar o indicado para cada tipo de modelo.
3. Adquirir as ferramentas necesarias para decidir que aproximacións son aceptables e cales non o son á hora de escoller as variables para a formulación dun problema.
4. Manexar con soltura os dous sistemas de referencia en que se expresan as dimensións das variables en Mecánica de Fluídos: FLT e MLT.
5. Saber calcular as relacións entre as variables en prototipo e en modelo, con obxecto de poder deseñar un modelo físico.

OS PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

Os contidos da UD impartiranse mediante:

- Clases expositivas: leccións maxistrais expositivo-interrogativas. A explicación dos contidos apóiase en presentacións audiovisuais. Ademais estimularase aos alumnos para que participen activamente nelas.
- Seminarios: grupos reducidos de alumnos, coordinados por un profesor, elaboraran un traballo sobre aspectos de interese relacionados coa análise dimensional. Este traballo deberá ser entregado para a súa avaliación. En función do transcorrer da materia, poderase propoñer a exposición do traballo fronte ao resto dos compañeiros.
- Prácticas de laboratorio: nelas os alumnos poderán realizar ensaios físicos para complementar algún dos problemas propostos para resolver mediante análise dimensional. Unha vez realizadas as prácticas entregarase un informe para a avaliación do seu seguimento por parte do alumno. Este informe deberase entregar antes do exame práctico da materia e será requisito indispensable para poder realizar a proba.
- A asistencia ás clases prácticas será obrigatoria para todos os alumnos polo tanto levarase un control exhaustivo da asistencia. Un número de faltas superior ao 10% terá unha repercusión negativa na nota final, sempre é cando non existan motivos de forza maior que xustifiquen as ausencias. Pola contra a participación activa nas clases prácticas terá unha repercusión positiva na nota final da materia.

Os alumnos disporán dunha serie de ferramentas de apoio para o correcto seguimento da materia:

- Horas de titoría: nas que o profesor solucionará dubidas puntuais de forma individualizada.
- Materiais en liña: disporase dunha plataforma web onde se subirátodo o material empregado nas clases e seminarios. Ademais esta web poderase empregar para comunicar ao profesor cos alumnos ou a estes entre si.

OS CONTIDOS BÁSICOS

1. Introdución

En gran parte dos problemas cos que se pode atopar un enxeñeiro interveñen numerosas variables. En xeral, non existe unha formulación que relacione estas variables ou, de existir, esta é complexa. A primeira alternativa que se pode formular é a análise mediante experimentación da relación entre parellas de variables nas que, por un lado, está a variable de interese e, polo outro, as demais variables consideradas no problema. Este proceso presenta dúas grandes dificultades. Por unha banda está a complexidade (ou imposibilidade, nalgúns casos) de establecer unha relación entre todas as variables. A outra constitúea a dificultade de levar a cabo todos estes experimentos (e.g. casos nos que realizar experimentos para distintos valores dunha variable é extremadamente complexo).

A outra alternativa é a análise dimensional. O obxectivo que se pretende mediante esta é a simplificación do estudo do problema. Se antes o que se pretendía era establecer unha relación entre a variable de interese é as distintas variables do problema, o que agora se busca é o agrupamento de variables de modo que o número de conxuntos sexa menor que as variables existentes. Deste modo o que se intenta é establecer unha relación entre conxuntos de variables,

$$f = f(x_1, x_2, x_3 ..., x_n)\,. \qquad [1]$$

Para facilitar a comprensión do concepto, a continuación formúlase un pequeno exemplo.

<u>Exemplo 1</u>

Quérese resolver o problema da caída de presión por unidade de lonxitude do fluxo nunha canalización. O fluxo nunha canalización horizontal prodúcese pola diferenza de presión (Δp) ao longo da mesma (Figura 1), é dicir, pola existencia dun gradiente de presión. A caída de presión prodúcese pola fricción debida ao rozamento das moléculas do fluído entre si e coas paredes do conduto. O sentido do fluxo é cara a puntos de menor presión (de p cara $p - \Delta p$ na Figura 1).

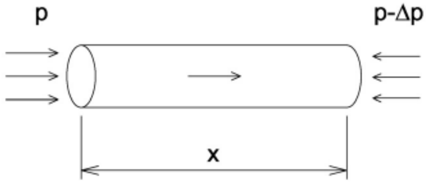

Figura 1. Esquema do fluxo nunha condución a presión.

Tendo en conta a breve descrición da caída de presión por unidade de lonxitude, pódense definir as principais variables que interveñen no problema:

- Caída de presión por unidade de lonxitude (Δp_l)
- Velocidade do fluxo (v)
- Viscosidade dinámica (μ)
- Densidade (ρ)
- Diámetro do conduto (D)

Se se pretende resolver o problema sen aplicar análise dimensional hai que conseguir, mediante experimentación en laboratorio, determinar a relación entre a caída de presión e as demais variables por separado e posteriormente, establecer unha relación conxunta:

$$\Delta p_l = f(v, \mu, \rho, D) .$$

Deste xeito obtéñense relacións($\Delta p_l - v$); ($\Delta p_l - \mu$); ($\Delta p_l - \rho$);($\Delta p_l - D$). Como se indicou previamente, o estudo destes pares de variables pode resultar extremadamente complexo. Por exemplo, facer experimentos para analizar a variación de Δp_l con μ formula dificultades prácticas importantes e, ademais, supón un custo elevado. En cambio, se se formula a adimensionalización do problema preténdese o agrupamento das variables de modo que se formen conxuntos adimensionais, chamados tamén produtos ou monomios adimensionais. Como o indica o seu nome, estes produtos han de cumprir unha condición, que é a de non ter dimensións.

En mecánica de fluídos poden empregarse dous sistemas de dimensións intimamente ligados entre si. Por un lado está o sistema MLT onde as dimensións de referencia son masa, lonxitude e tempo. Por outro lado atópase o sistema FLT: forza, lonxitude e tempo. O paso dun sistema a outro é moi sinxelo, simplemente consiste en aplicar a II Lei de Newton:

$$F = ma .$$

Volvendo sobre o problema da caída de presión por unidade de lonxitude, hai que analizar as dimensións das distintas variables. Pódese empregar calquera dos dous sistemas, neste casodecídese empregar o MLT.

As dimensións da caída de presión por unidade de lonxitude pódense determinar a partir da propia definición de Δp_l. Se se considera unha variación de presión Δp ao longo dunha distancia d, a caída de presión por unidade de lonxitude vén dada por:

$$\Delta p_l = \frac{\Delta p}{d} = \frac{F}{dA} \doteq \frac{F}{LL^2} = FL^{-3} , \qquad \Delta p_l \doteq ML^{-2}T^{-2}$$

onde A representa área e L, lonxitude. O operador $\doteq$ indica equivalencia dimensional. Nesta ecuación temos as dimensións da caída de presión por unidade de lonxitude no sistema FLT. Para pasar ao sistema MLT hai que ter en conta que $F=MLT^{-2}$, de modo que,

$$\Delta p_l \doteq ML^{-2}T^{-2}$$

- A velocidade, na súa expresión máis sinxela, é a distancia percorrida nun determinado tempo (*t*)

$$v = \frac{d}{t} \doteq LT^{-1}.$$

- Para obter as dimensións da viscosidade dinámica cómpre recordar a súa definición. Segundo a Lei de Fricción de Newton,

$$\tau = \mu \frac{du}{dz} \Rightarrow \mu = \tau \left(\frac{du}{dz} \right)^{-1}$$

  onde τ é a tensión tanxencial nun fluído newtoniano e *du/dz* é o gradiente de velocidades a través dunha sección constante. En termos dimensionais, a mesma ecuación pode expresarse como:

$$\mu \doteq \frac{FL^{-2}}{\frac{LT^{-1}}{L}} = \frac{FL^{-2}}{T^{-1}} = FL^{-2},$$

  pero a análise estase a realizar empregando MLT, polo cal as dimensión de μ neste sistema son

$$\mu \doteq FL^{-2}T = (MLT^{-2})L^{-2}T = ML^{-1}T^{-1}.$$

- Respecto as dimensións da densidade,

$$\rho = \frac{m}{V} \doteq ML^{-3}$$

  onde *m* é a masa e *V,* o volume.

- A dimensión do diámetro é

$$D \doteq L.$$

Coñecendo as dimensións de todas as variables que interveñen no problema, coa análise dimensional preténdese agrupar estas de modo que o conxunto non teña dimensións ($F^0L^0T^0$ ou $M^0L^0T^0$). Existe un procedemento para a elaboración destes produtos adimensionais que se describe máis adiante (no apartado *3. Proceso de Adimensionalización*).Sen embargo, dun xeito intuitivo (e con certa base na experiencia) poden formularse os seguintes parámetros adimensionais:

$$\Pi_1 = \frac{D\Delta p_l}{\rho v^2}, \quad \Pi_2 = \frac{\rho v D}{\mu}$$

Desta forma o problema inicial con cinco variables convértese nun problema con dous produtos adimensionais – unha simplificación importante. Agora o único necesario é buscar unha función de transferencia (Φ) que relacione ambos produtos adimensionais:

$$\Pi_1 = \Phi \Pi_2$$

A determinación desta función de transferencia xa esta fóra do que se pode conseguir mediante a análise dimensional; é dicir, debe obterse mediante a realización dunha serie de experimentos.

En resumo, coa análise dimensional conséguese simplificar a resolución dun problema reducindo o número de relacións entre variables a considerar. Como complemento á análise dimensional, é necesaria a posterior realización de ensaios para determinar a relación entre os distintos produtos adimensionais.

2. Soporte teórico para a adimensionalización

O soporte teórico fundamental da análise dimensional é o Teorema Pi de Buckingham. Este teorema demostra que nun problema físico no que interveñen$k$ variables con r dimensións de referencia, as variables poden agruparse en

$$n = k - r \qquad [2]$$

produtos adimensionais. Estes produtos ou monomios adimensionais represéntanse pola letra grega Π (pi), motivo polo que se denominan tamén termos Pi.

O método para determinar os parámetros adimensionais consiste en seleccionar r variables e empregalas como variables repetidas xunto cunha das outras variables non repetidas. Cada produto será combinación dunha das variables non repetidas e as distintas variables repetidas elevadas a un expoñente, de modo que as dimensión do produto sexan cero.

3. Proceso de adimensionalización

Pode definirse unha metodoloxía para a creación dos distintos monomios adimensionais. Os pasos a seguir son:

a) Lista de variables

O primeiro paso é a identificación de todas as variables que son relevantes no problema analizado. Deben seleccionarse as variables necesarias para representar os fenómenos importantes no problema, pero non máis. É dicir, debe prescindirse das variables pouco relevantes co fin de non complicar innecesariamente a análise. Por descontado, a experiencia é importante á hora de determinar que variables son relevantes.

b) Dimensións de referencia

Hai que identificar as dimensións de cada variable que se considera. O número de dimensións de referencia será igual ás dimensións independentes (dimensións ou conxuntos destas que son linealmente independentes, é dicir, que non se poden pór como combinación doutras xa seleccionadas) que aparecen nas distintas variables e que, en xeral, será coincidente co número de dimensións das distintas variables (esta casuística analízase con maior detalle no apartado *5. Distinción entre dimensións básicas e dimensións de referencia*).

c) Número de monomios adimensionais

Aplicando o Teorema Pi de Buckingham (*2. Soporte teórico da adimensionalización*) determínase o número de termos pi que hai que obter mediante a análise dimensional.

d) Variables repetidas

Este paso consiste na selección das variables repetidas. As variables repetidas chámanse así porque aparecen en tódolos termos pi que se formulen; haberá tantas como dimensión de referencia. O primeiro que hai que ter claro é que variable se está a considerar, e se interesa tela repetida ou non. Nunca debe escollerse como variable repetida a que interesa analizar. Outra consideración que se debe ter en conta é que as variables repetidas han de ser dimensionalmente independentes. Unha boa técnica para a selección das variables repetidas é escoller primeiro a variable máis sinxela dimensionalmente, é dicir, a que teña un menor número de dimensións. A partir de aquí defínense as demais variables repetidas engadindo as dimensiónsde referencia que faltan.

e) Produtos adimensionais

Os distintos produtos adimensionais fórmanse de tal modo que en cada un se inclúa unha das variables non repetidas (as variables que interveñen no problema a excepción das seleccionadas como repetidas) e todas as variables repetidas elevadas a cadanseu expoñente. Os valores dos expoñentes serán tales que o monomio sexa adimensional. Como regra xeral, para o primeiro produto (Π_1)tómase como variable non repetida aquela que se pretende estudar.

f) Adimensionalidade do produto

Neste paso o que se pretende é asegurarse de que os produtos formulados cumpren coa adimensionalidade. Trátase de garantir que non se cometeu ningún erro nos pasos anteriores.

g) Ecuación adimensional

Partindo dun problema cun número inicial de variables *k*, simplifícase de tal xeito que queda unha relación entre $n = k - r$ produtos adimensionais, sendo *r* o número de dimensións de referencia:

$$\Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \Pi_3, ..., \Pi_n) \qquad [3]$$

4. Consideracións na selección de variables

A selección de variables faise a partir dos coñecementos previos de hidráulica. Na definición das variables que interveñen no problema é importante o criterio do enxeñeiro.

Non obstante hai que ter en conta 3 grupos de variables:

- Xeometría (altura, diámetro, lonxitude, etc.)
- Características do fluídos (viscosidade, densidade)
- Efectos externos (presións, forzas, velocidades)

Co fin de evitar variables innecesarias, se temos unha expresión do modo:

$$y = f(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \qquad [4]$$

e outra expresión,

$$z = g(u_3, u_4, u_5) \qquad [5]$$

de tal xeito que as variables u_3, u_4 e u_5 aparecen en ambas da mesma forma, neste caso poden substituírse por *g* en *y*; a expresión resultante é:

$$y = f(u_1, u_2, g) \qquad [6]$$

Isto significa que é necesario asegurarse da independencia das variables; de non ser o caso, débense aproveitar as relacións entre as variables para reducir o seu número.

5. Distinción entre dimensións básicas e dimensións de referencia

Como se indica no apartado *1. Introdución*, na análise dimensional pódense empregar indistintamente dous sistemas de referencia: MLT e FLT. Se os resultados difiren segundo se utilice un ou outro sistema, estase a cometer un erro na determinación das dimensións de referencia. Se no problema interveñen as tres dimensións básicas (Masa, Lonxitude e Tempo ou Forza, Lonxitude e Tempo), téndese a pensar que as dimensións de referencia son tres. Non obstante, non ten porque haber tres variables dimensionalmente independentes. Vexamos un pequeno exemplo.:

<u>Exemplo 2</u>

Disponse dun depósito cilíndrico (diámetro *d*) que ten o perímetro da base apoiado nunha estrutura metálica. O depósito contén un líquido de densidade *ρ,* e quere analizarse a frecha *f* no centro da base do depósito.

Na simplificación do problema considéranse as variables máis relevantes, que son:

- O diámetro do depósito (*d*)
- A altura de auga no depósito (*h*)
- O espesor da base do depósito (*e*)
- O modulo de elasticidade do material que constitúe a base do depósito (*E*)
- O peso especifico do líquido (*γ*)
- A frecha na base do depósito (*f*)

Poderíanse considerar outras variables como pode ser as viscosidade dinámica (*μ*), non obstante, e como se indicou previamente, só se deben considerar as variables relevantes. Neste caso *μ* pode desprezarse por atoparse o fluído en repouso.

No seguinte debuxo móstrase unha representación esquemática do problema formulado:

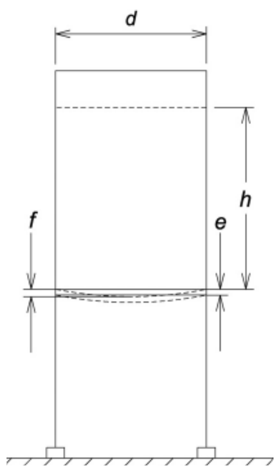

Figura 2. Esquema dun depósito cilindrico elevado.

Na táboa seguinte analízanse as dimensións de cada unha das variables consideradas en ambos sistemas de referencia, masa-lonxitude-tempo (MLT) e forza-lonxitude-tempo (FLT).

Sistema / Variables	MLT	FLT
f	L	L
h	L	L
e	L	L
d	L	L
γ	FL^{-3}	$ML^{-2}T^{-2}$
E	FL^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$

Como vemos,o número de dimensións básicas é distinto en función do sistema de referencia empregado. A primeira vista parecería que empregando os sistemas FLT e MLT o número de dimensións de referencia é dous e tres, respectivamente. Aplicando sobre este desenvolvementoo Teorema Pi de Buckinghamobtense:

	Sistema de referencia	
	FLT	MLT
Número de variables (k)	6	6
Dimensións de referencia (r)	2	3
Produtos adimensionais (n=k-r)	4	3

Como se pode apreciar, obten se un número distinto de produtos adimensionais en función do sistema de referencia seleccionado. Segundo se indica con anterioridade, o resultado ten que ser o mesmo independentemente do sistema de referencia empregado, polo cal se esta a cometer un erro neste razoamento. Este erro reside en que empregando o sistema MLT o número de dimensións de referencia non é tres senón dous, e polo tanto o número de variables repetidas é dous tamén. Aínda que as dimensións básicas sexan tres, tan só existen dúas dimensións de referencia. Se se pretende seleccionar tres variables repetidas, como habería que facer de haber tres dimensións de referencia, a terceira variable repetida sería ben *E* ou ben *γ,* en función de cal das dúas tivese sido previamente seleccionada. Non obstante, cada unha destas é combinación lineal da outra e unha das demais variables (dimensionalmente as catro son iguais).

6. Unicidade dos produtos adimensionais

A través da análise dimensional determínanse os distintos produtos adimensionais. O número destes produtos pódese obter empregando o Teorema Pi de Buckingham; non obstante, o proceso de formación dos mesmos ten unha flexibilidade elevada, polo que é posible chegar a solucións distintas para un mesmo problema. Por este motivo os termos Pi que se poden formar non son únicos, e poderán ser distintos segundo o proceder durante a análise dimensional. Esta non é unha cuestión relevante xa que o único verdadeiramente importante é a simplificación do problema formando produtos independentes.

Por este motivo un monomio adimensional pódese substituír por unha combinación deste con outro dos termos Pi, sempre que se cumpra a adimensionalidade dos distintos produtos, isto é, se existe un problema do tipo

$$\Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, ..., \Pi_n) \qquad [7]$$

pode definirse un Π_2' tal que:

$$\Pi_2' = \Pi_2 \times \Pi_3 \qquad [8]$$

polo que a solución do problema mediante análise dimensional será unha expresión do tipo:

$$\Pi_1 = \Phi_2(\Pi_2', \Pi_3, \Pi_4, ..., \Pi_n) \qquad [9]$$

ou ben

$$\Pi_1 = \Phi_3(\Pi_2, \Pi_2', \Pi_4, ..., \Pi_n) \qquad [10]$$

Aínda que se formulen tres solucións a un mesmo problema todas son igual de válidas e eficaces, pois con todas se consegue o obxectivo pretendido: a simplificación do problema.

7. Principais números adimensionais

En mecánica de fluídos existe unha gran cantidade de produtos adimensionais, algúns deles son de especial relevancia e aparecen nun número elevado de problemas de enxeñaría hidráulica. Neste apartado amósanse estes produtos e unha breve descrición dos mesmos.

7.1. Número de Reynolds

O número de Reynolds pódese considerar como o máis importante en mecánica de fluídos e defínese como un ratio entre as forzas de inercia (F_i) e as forzas viscosas (F_v),

$$\text{Re} = \frac{F_i}{F_v} = \frac{\rho v L}{\mu} \qquad [11]$$

onde L é a lonxitude característica, que en condutos de sección circular é o seu diámetro (expresión habitual do número de Reynolds).

As forzas de inercia son as forzas asociadas á aceleración do fluído. As forzas viscosas son as debidas ao rozamento interno entre as partículas do fluído. Se o Re é moi alto, as F_v son desprezables respecto as F_i (e.g. fluxo nunha tubaria a gran velocidade); pola contra se Re é moi baixo as F_i son desprezables respecto as F_v (e.g. fluxo sobre unha calzada onde o espesor de auga e a velocidade son moi pequenos).

7.2. Número de Froude

O número de Froude defínese como unha relación entre forzas de inercia (F_i) e forzas gravitacionais (F_g), en xeral exprésase como a relación entre a raíz cadrada de ambas:

$$\text{Fr} = \frac{\sqrt{F_i}}{\sqrt{F_g}} = \frac{v}{\sqrt{gl}} \qquad [12]$$

Este parámetro é de especial relevancia en fluxos en lámina libre. O seu nome débese a William Froude, un arquitecto naval británico que desenvolveu a idea de empregar modelos de barcos en canles e propuxo leis de semellanza para fluxos en superficie libre. Esta é a semellanza de Froude, de vital importancia nos traballos con modelos a escala en laboratorio, e que indica que o número de Froude debe ser o mesmo no prototipo real e no modelo a escala:

$$\text{Fr}_p = \text{Fr}_m \Rightarrow \frac{v_p}{\sqrt{g_p L_p}} = \frac{v_m}{\sqrt{g_m L_m}} \qquad [13]$$

Por exemplo, se se pretende ensaiar nunha canle de ondas un modelo a escala 1:30 dun convertedor de enerxía da ondada para un estado se mar de altura de onda H_p=6m e período T_p=13s, e aplicando semellanza de Froude, as condicións na canle deben ser:

Un factor de escala 1:30 quere dicir que as lonxitudes no modelo han de ser 30 veces inferiores que no prototipo ($L_p/L_m=30$) polo que a altura de onda na canle será 0.20m.
En canto ao período,

$$\frac{v_p}{\sqrt{g_p L_p}} = \frac{v_m}{\sqrt{g_m L_m}} \Rightarrow \frac{\frac{L_p}{T_p}}{\sqrt{gL_p}} = \frac{\frac{L_m}{T_m}}{\sqrt{gL_m}} \Rightarrow \frac{L_p}{T_p\sqrt{gL_p}} = \frac{L_m}{T_m\sqrt{gL_{pm}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{L_p}}{T_p} = \frac{\sqrt{L_m}}{T_m} \Rightarrow \frac{T_p}{T_m} = \sqrt{\frac{L_p}{L_m}}$$

como $L_p/L_m=30$

$$\frac{T_p}{T_m} = \sqrt{30} \Rightarrow T_m = \frac{T_p}{\sqrt{30}} = \frac{13}{\sqrt{30}} = 2.37s$$

7.3. Número de Euler

O número de Euler relaciona as forzas debidas á presión (F_p) coas forzas inerciais:

$$\mathrm{Eu} = \frac{F_p}{F_i} = \frac{p}{\rho v^2} \qquad [14]$$

Esta mesma relación pode expresarse en termos de caída de presión (Δp):

$$\mathrm{Eu} = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho v^2} \Rightarrow \text{coeficiente de presión} \qquad [15]$$

Se Δp inclúe a presión de vapor (p_v), este parámetro denomínase *coeficiente de cavitación.* A cavitación prodúcese cando a presión nun fluído se reduce por debaixo de p_v polo que o fluído pasa a estado gasoso. Deste modo xéranse burbullas de gas no fluído. Estas burbullas implosionan ao chegar a zonas con velocidades menores que onde se formaron (tendo en conta a Ec. de Bernoulli: a menor velocidade, maior presión). A cavitación é un problema que se pode presentar nas hélices dos barcos ou en rotores de turbinas; neste caso, os elementos afectados poden sufrir danos importantes polas mencionadas implosións.

7.4. Número de Mach

En fluxos de gases a altas velocidades prodúcense cambios de presión, densidade e temperatura polo que deben considerarse os efectos da compresibilidade do fluxo. Unha das ferramentas para considerar estes efectose o número de Mach (Ma). Ma é unha medida da velocidade relativa que se define como o cociente entre a velocidade do fluxo e a velocidade do son no fluído.

$$\text{Ma} = \frac{v}{c} \qquad [16]$$

onde v é a velocidade do corpo e c a velocidade do son no fluído en cuestión.

En termos de forza, Ma representa a relación entre as forzas de inercia e as orixinadas pola compresibilidade do fluído. Se o número de Mach é suficientemente baixo pódese desprezar a compresibilidade do fluído. Usualmente asúmese fluxo incompresible para $Ma<0.3$, non obstante este valor pode variar en función do problema. Aínda que se desprecen os efectos da compresibilidade para analizar un certo problema,*stricto sensu* non existen fluídos incompresibles: todos son compresibles en maior ou menor medida.

7.5. Número de Strouhal

Este parámetro expresa a relación entre a aceleración local e a aceleración convectiva, dúas forzas de inercia. Cómpre recordar:

$$\text{aceleración local} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad [17]$$

$$\text{aceleración convectiva} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \qquad [18]$$

O número de Strouhal é de interese en fluxos oscilantes nos que a expresión da corrente ten forma

$$u = U\cos(\omega t) \qquad [19]$$

onde ω é a frecuencia angular. Adimensionalizando esta expresión obtense

$$\frac{u}{U} = u^{*} = \cos(\frac{\omega L}{U}t^{*}) \qquad [20]$$

A aceleración local é o resultado do carácter oscilante do fluído e aumenta co incremento de ωL.

Os valores de forzas, momentos, fricción,… en fluxos oscilatorios son función dos números de Reynolds e Strouhal. Algúns fluxos que poderían parecer perfectamente estacionarios, teñen en realidade un comportamento oscilatorio que depende de Re. Este é o curioso caso da rúa de remuíños de Kármán (von Kármán vortex street) na estela dun corpo romo nunha corrente estacionaria. Tras o corpo xéranse unha serie de remuíños alternantes. Se a frecuencia de desprendemento destes remuíños é próxima a unha frecuencia propia da estrutura, pode aparecer resonancia (e.g. o asubío dos cables eléctricos debido á acción do vento).

7.6. Número de Weber

O número de Weber relaciona as forzas de inercia (F_i) coas debidas a tensión superficial (F_σ):

$$\text{Wb} = \frac{F_i}{F_\sigma} = \frac{\rho L v^3}{\sigma} \qquad [21]$$

onde σé a tensión superficial.

Este parámetro tan só é de importancia cando é de orde unitaria ou inferior, o que ocorre normalmente cando a curvatura dun líquido é comparable coa profundidade (gotas, fluxos capilares,…). Se *Wb* é grande, os seus efectos son desprezables.

8. Modelización física

Para axudar no deseño de máquinas e/ou estruturas hidráulicas empréganse frecuentemente modelos a escala. Isto permite unha observación visual do fluxo e a obtención de certos datos numéricos de variables de interese; por exemplo, profundidades de fluxo, distribucións de velocidades, forzas sobre corpos,etc.

Se se van obter datos cuantitativos correctos dun estudo con modelo, debe haber semellanza dinámica entre o modelo e o prototipo. Esta semellanza require (i) que exista semellanza xeométrica exacta e (ii) que a razón de presións dinámicas nos puntos correspondentes sexa unha constante. O segundo requirimento pode expresarse como unha similitude cinemática; por exemplo, as liñas de corrente deben ser xeometricamente semellantes.

A semellanza xeométrica esténdese á rugosidade do modelo e do prototipo. Se o modelo está construído a unha escala 1:10, seguindo o principio de semellanza de Froude, a altura das proxeccións das rugosidades debe estar na mesma proporción. Para garantir que as presións dinámicas están na mesma proporción en puntos correspondentes do modelo e do prototipo, as relacións entre varios tipos de forzas deben ser as mesmas neses puntos. Isto implica que ten que existir unha semellanza estrita nos principais números adimensionais (apartado 6. *Principais números adimensionais*), sobre todo *Re, Fr, Wb* e *Ma*.

O estrito cumprimento deste requirimento é xeralmente imposible de lograr, exceptuando un modelo a escala 1:1 (que por outra banda perdería parte do sentido da modelización física). Non obstante, e afortunadamente, en moitas ocasións algunhas forzas son desprezables respecto a outras, polo que só é necesario garantir semellanza dos números que relacionen as forzas predominantes.

Exercicios

Exercicios resoltos

<u>Exercicio 1</u>

Queremos colocar un instrumento de medición de correntes, un ADCP (*Acoustic Doppler Current Profiler*), cunha xeometría cilíndrica nunha rexión costeira na que existen importantes correntes. O que se pretende é analizar como afectan estas a estabilidade do equipo, é dicir, a forza de arrastre (F_D) que o fluxo exerce sobre o ADCP. Para o estudo do problema recorrese á análise dimensional e posteriormente, nun canal de ensaios, determínase a función de transferencia. Realiza a análise dimensional do problema empregando o sistema de referencia FLT.

Destacar que se propón o uso dun sistema de referencia para que o alumno siga o mesmo camiño que aquí se expón e así poda apoiarse nesta UD se así o precisa para a resolución do problema.

Representación gráfica do problema:

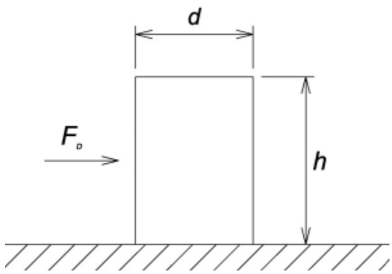

Figura 3. Esquema dun ADCP somerxido.

En primeiro lugar, é seguindo o esquema formulado no epígrafe, cómpre identificar as variables que interveñen no problema e desbotar as que teñan unha baixa importancia relativa. Deste modo podemos considerar como variables de interese o diámetro do ADCP (d), a altura do ADCP (h) a densidade do fluído (ρ), a viscosidade dinámica (μ), a velocidade da corrente (v) e, por suposto, a forza de arrastre (F_D) que se produce como consecuencia da existencia dunha corrente e que é a variable que se quere analizar. Existen outras variables que interveñen no problema, como pode ser a rugosidade do fondo ou do propio ADCP, e que non se consideran posto que a súa influencia é mínima.

A continuación hai que determinar as dimensións de referencia, para o cal resulta interesante ver as dimensións de todas as variables. Pode empregarse tanto o sistema FLT como o MLT, neste caso óptase polo primeiro aínda que ambos son igual de válidos:

$$d \doteq L;\ h \doteq L;\ \rho \doteq FL^{-4}T;\ \mu \doteq FL^{-2}T;\ v \doteq LT^{-1};\ F_D \doteq F$$

Analizando as dimensións de todas as variables, vese que existen tres dimensións de referencia, xa que aparecen as tres dimensións de forma independente. Para determinar o número de produtos adimensionais aos que se debe chegar aplícase o Teorema Pi de Buckingham:

$$n = k - r$$

sabendo que o número de variables consideradas é k=6 e hai r=3 dimensións de referencia, o número de monomios adimensionais a determinar é:

$$n = k - r = 6 - 3 = 3$$

O primeiro paso para a formación dos distintos produtos adimensionais consiste na selección das variables repetidas, que serán tantas como dimensións de referencia, por tanto son tres variables repetidas. A primeira que non se debe seleccionar é a F_D, excluíndo esta tratase de ir escollendo variables en orde crecente de dimensións que conteñen, isto é:

- *$d \doteq L$ neste punto podería seleccionarse de igual modo a altura do ADCP (h)*
- *$v \doteq LT^{-1}$ seleccionamos unha variable que engada unha dimensión de referencia*
- *$\rho \doteq FL^{-4}T^{2}$ aquí tamén se podería considerar igualmente a viscosidade dinámica (μ)*

Chegado a este punto é o momento de formar os tres monomios adimensionais. En cada monomio debe incluírse unha das variables non repetidas e unha combinación das variables repetidas elevadas a un expoñente de modo que o produto teña dimensións $F^0L^0T^0$ .Isto é:

$$\Pi_1 = F_D d^a v^b \rho^c \doteq F^0 L^0 T^0$$

pode formularse un sistema de ecuacións que permita obter o valor dos coeficientes a, b e c.

$\Pi_1 \doteq F(L)^a (LT^{-1})^b (FL^{-4}T^2)^c = F^0L^0T^0$

$(F) \Rightarrow 0 = 1 + c \Rightarrow$ *c=-1*

$(L) \Rightarrow 0 = a + b - 4c$ *sabendo que c=-1 e que b=-2*$\Rightarrow$ *a=-2*

$(T) \Rightarrow 0 = -b + 2c$ *sabendo que c=-1*$\Rightarrow$ *b=-2*

de tal forma que o monomio Π_1 quedaría:

$$\Pi_1 = F_D d^{-2} v^{-2} \rho^{-1} = \frac{F_D}{d^2 v^2 \rho}$$

Esta mesma metodoloxía emprégase para os outros dous produtos adimensionais que se sabe que hai que determinar con base no Teorema Pi de Buckingham. Deste modo,

$$\Pi_2 = \mu d^d v^e \rho^f \doteq F^0 L^0 T^0$$

de igual modo pode formularse un sistema de ecuacións que permita obter o valor dos coeficientes d, e e f.

$\Pi_2 \doteq (FL^{-2}T)(L)^d (LT^{-1})^e (FL^{-4}T^2)^f = F^0 L^0 T^0$

$(F) \Rightarrow 0 = 1 + f \Rightarrow$ *f=-1*

$(L) \Rightarrow 0 = -2 + d + e - 4f$ *sabendo que f=-1 e que e=-1* $\Rightarrow$ *d=-1*

$(T) \Rightarrow 0 = 1 - e + 2f$ *sabendo que f=-1* $\Rightarrow$ *e=-1*

de tal forma que o monomio Π_2 *quedaría:*

$$\Pi_2 = \mu d^{-1} v^{-1} \rho^{-1} = \frac{\mu}{dv\rho}$$

Desta mesma forma obtense o último dos monomios adimensionais,

$$\Pi_3 = h d^g v^h \rho^i \doteq F^0 L^0 T^0$$

ao igual que nos casos anteriores, pódese formular un sistema de ecuacións que permita obter o valor dos coeficientes g, h e i.

$\Pi_3 \doteq (L)(L)^g (LT^{-1})^h (FL^{-4}T^2)^i = F^0 L^0 T^0$

$(F) \Rightarrow 0 = i \Rightarrow$ *i=0*

$(L) \Rightarrow 0 = 1 + g + h - 4i$ *sabendo que i=0 e que h=0* $\Rightarrow$ *g=-1*

$(T) \Rightarrow 0 = -h + 2i$ *sabendo que i=0* $\Rightarrow$ *h=0*

de tal forma que o monomio Π_3 *quedaría:*

$$\Pi_3 = h d^{-1} v \rho = \frac{h}{d}$$

Tras este proceso, xa se teñen formados os produtos adimensionais, só se precisa obter unha función de transferencia:

$$\Pi_1 = \phi_1(\Pi_2, \Pi_3)$$

isto é,

$$\frac{F_D}{d^2 v^2 \rho} = \phi_1\left(\frac{\mu}{dv\rho}, \frac{h}{d}\right)$$

onde ϕ_1 é a función de transferencia que se determinará mediante experimentación. Se invertemos un dos monomios (Π_2), de forma que a expresión nos quede en función do número de Reynolds,

$$R_e = \frac{dv\rho}{\mu},$$

a análise dimensional segue sendo valida, só cambia a función de transferencia que pasa de ser outra distinta (ϕ_2).

Así, a expresión que permite determinar a forza de arrastre sobre un cilindro somerxido queda:

$$\frac{F_D}{d^2 v^2 \rho} = \phi_2\left(\frac{dv\rho}{\mu}, \frac{h}{d}\right)$$

Ata aquí nos leva a análise dimensional, para a obtención da función de transferencia (ϕ_2), e polo tanto para a resolución total do problema, é necesario recorrer á experimentación en laboratorio.

Exercicio 2

Pretende somerxerse unha esfera nunha rexión litoral na que se atopará baixo a acción dun fluxo de velocidade *v.* Tendo en conta as características do fluído (ρ e μ) e as características do corpo somerxido (o seu diámetro *d*), determinar unha expresión para a forza de arrastre (F_D) empregando o sistema de referencia MLT, de maneira que a viscosidade dinámica μ so apareza nun dos produtos adimensionais.

Este exercicio é moi similar ao Exercicio 1 polo que o seu desenvolvemento tamén o é. Por este motivo, e considerando que o alumno xa debeu adquirir unhas capacidades na materia, este exercicio resólvese dun xeito máis esquemático.

-Variables e dimensións:

$$d \doteq L;\ \rho \doteq ML^{-3};\ \mu \doteq ML^{-1}T^{-1};\ v \doteq LT^{-1};\ F_D \doteq F$$

-Número de termos Pi:

$$k = 5, r = 3 \Rightarrow n = 2$$

-Variables repetidas:

d, v e ρ (poderíase seleccionar μ ou ρ, pero o feito de que no enunciado se nos indique que μ só pode aparecer nun produto imposibilita escoller esta como variable repetida)

-Formación dos monomios:

$$\Pi_1 = F_D d^a v^b \rho^c \doteq M^0 L^0 T^0$$

$$\Pi_2 = \mu d^d v^e \rho^f \doteq M^0 L^0 T^0$$

$$a=-2;\ b=-2;\ c=-1;\ d=-1;\ e=-1;\ f=-1$$

Polo que os termos Pi resultantes son:

$$\Pi_1 = \frac{F_D}{d^2 v^2 \rho};\ \Pi_2 = \frac{\mu}{dv\rho}$$

-Ecuación adimensional: expresión para a forza de arrastre

$$\frac{F_D}{d^2 v^2 \rho} = \phi_1\left(\frac{\mu}{dv\rho}\right)$$

ou o que é o mesmo

$$\frac{F_D}{d^2 v^2 \rho} = \phi_2\left(\frac{dv\rho}{\mu}\right)$$

de forma que temos unha expresión para a forza de arrastre en función dun dos principais números adimensionais destacados nesta UD: o número de Reynolds.

Exercicio 3

En condicións de fluxo laminar, o caudal Q ao través dun pequeno conduto de sección triangular de lado b e de lonxitude L é función da viscosidade dinámica μ, da caída de presión por unidade de lonxitude $\Delta p/L$ e de b. Mediante análise dimensional, e empregando o sistema de referencia MLT, escribir unha expresión que relacione Q coas demais variables.

-Variables e dimensións:

$$Q \doteq L^3 T^{-1};\ \mu \doteq M L^{-1} T^{-1};\ \Delta p / L \doteq M L^{-2} T^{-2};\ b \doteq L$$

-Número de termos Pi:

$$k = 4,\ r = 3 \Rightarrow n = 1$$

-Variables repetidas:

μ, Δp/L e b (non tería sentido seleccionar Q posto que se trata da variable de interese)

-Formación dos monomios:

Neste caso tan só existe un termo Pi, isto implica que este termo é constante, e por consecuencia pode determinarse o valor de Q como a relación entre as variables repetidas e unha constante (a diferenza das outras ocasións nas que se relacionaban mediante unha función de transferencia:

$$\Pi_1 = Q\mu^a \Delta p / L^b b^c \doteq M^0 L^0 T^0$$

$$a=1;\ b=-1;\ c=-4$$

Polo que o termo Pi resultantes é:

$$\Pi_1 = \frac{Q\mu}{\Delta p_l b^4} = C$$

sendo C a mencionada constante

-Ecuación adimensional: expresión para o caudal Q

$$Q = \frac{\Delta p_l b^4 C}{\mu}$$

Problemas de aplicación

A maiores dos exercicios resoltos, inclúense nesta UD unha serie de problemas de aplicación para que o alumno realice como preparación da materia. Nestes non se desenvolven os distintos pasos, se non que tan só se expón o enunciado do exercicio e a súa solución co fin de fomentar un maior traballo do alumno. Ademais da solución, nalgúns deste problemas aparecen palabras claves para facilitar a aproximación a solución. As dúbidas que poidan xurdir sobre a realización dos mesmos serán resoltas polo profesor da materia nas titorías individuais ou de grupo.

Problema 1

Estudando o transporte de area polas ondas oceánicas, Shields postulou no 1936 que o esforzo cortante inducido polas ondas no fondo (τ) necesario para mover as partículas depende da gravidade (*g*), do tamaño (*d*) e a densidade (ρ_p) das partículas e da densidade (ρ) e a viscosidade (μ) da auga. Obter os produtos adimesionaisaxeitados para este problema, que deron lugar ao célebre diagrama de transporte de area de Shields.

Solución:

$$\Pi_1 = \frac{\tau}{\rho g d}; \Pi_2 = \frac{\rho g^{1/2} d^{3/2}}{\mu}; \Pi_3 = \frac{\rho}{\rho_p}$$

Problema 2

O período de oscilación (T) dunha onda superficial na auga considérase que é función da densidade (ρ), da lonxitude de onda (λ), da profundidade (h), da gravidade (g) e da tensión superficial (σ). Reescribe esta relación de forma adimensional. ¿Que ocorre cando σ é desprezable? Nota: Cóllase como variables repetidas ρ, λ e g.

Solución:

$$\frac{Tg^{1/2}}{\lambda^{1/2}} = \phi_1\left(\frac{h}{\lambda}, \frac{\sigma}{\rho g \lambda^2}\right)$$

Se σ é desprezable a análise resultante será:

$$\frac{Tg^{1/2}}{\lambda^{1/2}} = \phi_2\left(\frac{h}{\lambda}\right)$$

Problema 3

O número de Moton (Mo), empregado para correlacionar estudos de dinámica de burbullas, é unha combinación adimensional da aceleración da gravidade (g), a viscosidade dinámica (μ), a densidade (ρ) e do coeficiente de tensión superficial (γ). Obténase unha expresión para Mo sabendo que é proporcional a g.

Solución:

$$\text{Mo} = \frac{g\mu^4}{\rho\gamma^3}$$

AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

Realizarase un seguimento continuo da aprendizaxe do alumnado por medio das actividades e tarefas levadas a cabo tanto dentro como fóra da aula. Así, entregaranse boletíns que conterán cuestións e problemas relacionados coa unidade didáctica e que se resolverán seminarios interactivos. Nestas sesións valorarase tanto a participación activa de todos os estudantes como o grao de acerto na resolución das cuestións formuladas. Indíquese que non se penalizará a incorrecta solución ao problema ou cuestión senón que se tratará de ver o esforzo realizado e, de ser o caso, onde falla o razoamento. Estes seminarios serán moi útiles para intentar ver o grao de asimilación da materia por parte do alumnado.

Tamén se valorará positivamente a asistencia ás clases expositivas e a participación activa nas mesmas polo que se realizará un minucioso control de asistencia. Ademais, valorarase o esmero posto na realización da práctica de laboratorio, así como os resultados obtidos e o informe entregado onde se detallarán as tarefas levadas a cabo e os resultados.

Por último, realizarase unha proba escrita tanto dos contidos teóricos como prácticos. Para a superación con éxito da materia será necesario unha valoración positiva nesta proba escrita, ademais da realización das actividades anteriormente citadas (boletíns de exercicios, práctica de laboratorio, asistencia ásclases expositivas e seminarios…).

BIBLIOGRAFÍA

WHITE, Frank (2003):*Mecánica de Fluídos*, McGraw Hill

BUCKINGHAM, E. (1914). *On physically similar systems; Illustrations of the use of dimensional equations*,Physical Review, 4, 345-376

STREETER, Victore WYLIE,Benjamin (1988): *Fluid Mechanics*, Boston: WCB/McGraw Hill.

FRANZINI, Joseph e FINNEMORE, Jhon (1999): *Mecánica de Fluídos con aplicaciones en igeniería,*McGraw Hill

GILES, Ranald(1979):*Teoría y problemas de mecánica de los fluidos e hidráulica,* McGraw Hill

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

Impreso en papel 100% reciclado e libre de cloro

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

ISBN 978-84-9887-777-9