FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

De lonxitudes, áreas e volumes a medidas: un breve percorrido histórico

Claudia Johanna Quintans Vinke

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

De lonxitudes, áreas e volumes a medidas: un breve percorrido histórico

Claudia Johanna Quintans Vinke

Febreiro, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: De lonxitudes, áreas e volumes a medidas: un breve percorrido histórico
Breve descrición do contido:
O concepto de medida ten as súas orixes nas nocións (intuitivas nos seus comezos) de lonxitude, área e volume, que xorden de necesidades prácticas e teñen unha longa historia de máis de 5000 anos. O obxecto deste traballo é realizar un breve percorrido pola evolución destes conceptos, estreitamente relacionados co concepto de integral.
Recomendacións
Outras observacións

Índice xeral

Resumo

A necesidade de calcular lonxitudes, áreas ou volumes preséntasenos de forma habitual: á hora de comparar precios ao facer a compra, ou cando decidimos que camiño tomar, medimos de forma natural as cantidades antes de elixir. Entendemos de forma intuitiva o cálculo de moitas áreas e volumes, mais engadir rigor matemático a estas ideas non e unha tarea sinxela.
Neste traballo faremos un percorrido histórico seguindo o desenvolvemento de diversas aproximacións e cálculos que tiveron lugar nesta busca de rigor, rematando coas disciplinas que finalmente tomaron dita tarefa: Teoría da Medida e Cálculo Integral.

Abstract

The need to evaluate distances, areas or volumes happens upon us on a regular fashion: when comparing prices while shopping, or when deciding which route to take, we measure the discerning amounts in a natural way before choosing. We understand the calculations for many areas and volumes on an intuitive level, but filling these ideas with mathematical rigor is no simple task.
Through this paper we will undertake a historical course, following the development of several estimates and calculations as said rigor was sought, culminating in the two disciplines that ended up taking care of it: Measure and Integral Calculus.

Introdución

O obxectivo deste traballo é plasmar as ideas relacionadas coa medida que naceron a partir da necesidade, e estudar a evolución das mesmas ao longo do tempo, partindo de ideas soamente prácticas.

A partir dos conceptos puramente intuitivos coma a medición das áreas de campos de cultivo, o proceso de medida foi refinándose pouco a pouco ata o punto de depender do cálculo integral, e proceder a desenvolverse paralelo a este. Así, revisaremos os cálculos de áreas e volumes estudados xa na Antiga Grecia, e como co nacemento da integral se propicia, en primeiro lugar, á resolución dos problemas de integración. Consecuentemente tamén se traballarán os “inversos” a estes: os problemas de tanxentes, relacionados intimamente co concepto de medida.

Observamos a continuación a evolución paralela da integral e o concepto de medida, rematando trala aparición da medida por excelencia: a de Lebesgue. Completaremos o traballo mecionando outras medidas notables, e facendo unha revisión rápida do concepto actual de medida.

Na nosa exposición evitaremos en moitas ocasións entrar e detalles cando o tema tratado non sexa directamente relevante para o proceso da medida, só mencionando e non desenvolvendo algúns dos conceptos, máis xeralmente estes casos serán indicados explicitamente. Engadiremos tamén en diversas ocasións exemplos, que non sempre construiremos dende cero.

Capítulo 1

Introdución dos Conceptos Iniciais

Ao longo deste capítulo imos ver como foron emerxendo de forma natural e intuitiva os conceptos de lonxitude, área e volume. Para isto imos comezar polas antigas civilizacións, cuxo único interés eran medidas concretas (polo seu uso práctico), e iremos vendo coma nacen os conceptos propiamente ditos da Antiga Grecia en adiante, integrando paulatinamente o uso de indivisibles.

1.1. Primeiras Civilizacións

Comezamos o noso percorrido coas antigas civilizacións de Exipto e Mesopotamia, nas cales foi necesario desenvolver técnicas elementais de medición xeométrica, entre outros motivos, para o cobro de impostos. Destacamos aquí o papiro Rhind (de orixe exipcia), cuxo contido é principalmente unha listaxe de problemas solucionados, dos cales aproximadamente 20 tratan do cálculo de áreas (de campos de cultivo) e volumes (de hórreos).

Nestas resolucións non aparecen fórmulas, senón métodos explícitos de cálculo. Non obstante, podemos deducir a partir destes exercicios que os métodos exipcios para o cálculo de áreas foron probablemente derivados de métodos dunha análise elemental. Interesantemente, un dos exercicios do papiro Rhind encontra unha aproximación moi boa de π mediante o cálculo da área dun círculo:

$$\left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{256}{81}r^2 = 3{,}1605r^2. \tag{1.1}$$

Con respecto a Mesopotamia, aínda que tampouco utilizaba unha fórmula explícita, a civilización babilónica non só calculaba correctamente as áreas de triángulos e trapecios xunto aos volumes de cilindros e prismas, senón que tamén utilizaba de forma empírica o

Teorema de Pitágoras máis dun milenio antes da época do grego, facendo exercicios prácticos como manter a hipotenusa dun triángulo constante e observar como cambiaba un cateto ao modificarse o outro.

Podemos concluír, en definitiva, que os exipcios e os babilónicos contaban cun abano de habilidades xeométricas para a resolución de problemas. Non obstante, estas resolucións eran puramente prácticas, carecendo dun método xeral explícito, ao cal debemos engadir que en ningún momento se fai distinción entre resultados aproximados e exactos.

1.2. Grecia

Imos agora estudar o avance levado a cabo pola civilización grega antiga (aproximadamente entre os séculos VII e II antes de Cristo).

A civilización grega adopta inicialmente os coñecementos desenvoltos en Babilonia e Exipto, e procede a engadir os seus propios resultados grazas aos matemáticos da época e ás súas inquedanzas, entre as que é notable o problema da cuadratura do círculo.

O primeiro matemático notable, Tales de Mileto, demostra diversos resultados, entre os cales atópase o que hoxe coñecemos como Teorema de Tales.

Destacamos tamén a Pitágoras e á súa escola, a mans dos cales aparecen tamén diversos avances, entre eles estudos das relacións entre triángulos (e outras figuras) e as súas áreas. O seu lema é que "todo é número", pensando "número" no sentido grego: como un enteiro positivo, sendo as fraccións da forma $\frac{a}{d}$ non números, senón relacións entre números.

A primeira dificultade á que se afronta a escola pitagórica é o que eles chaman inconmensurables: magnitudes que non poden ser expresadas como un número ou ratio entre dous números (o que hoxe chamamos números irracionais). A súa aversión a ditas magnitudes levaralles a necesitar unha forma de calcular que non requira utilizalas.

Sabemos polos *Elementos* de Euclides que os gregos comezaron a entender a multiplicación de dúas magnitudes a e b, en concreto dúas lonxitudes, como a área dun rectángulo de lados a e b. Isto lévalles á solución de $ax = b^2$ ao pensar nun cadrado de lado b e un rectángulo de lados a e x, permitíndolles efectivamente esquivar os números irracionais.

Defínense entón operacións con áreas, o cal da lugar a posibles comparacións: por exemplo, as áreas de dous rectángulos coa mesma altura compáranse mirando a relación das súas bases e súmanse xuntándoos. Este proceso pódese estender a calquera tipo de magnitude xeométrica.

Habitualmente os gregos manexaban só algunhas regras básicas como a monotonía e a aditividade para o cálculo de áreas, presentando unha aversión permanente a tomar límites e ao concepto do infinito, polo que requiren desenvolver un método alternativo a estas ferramentas.

Concretamente, o que hoxe coñecemos como "Principio de Eudoxo" tratábase de, tendo como obxectivo calcular a área dunha figura curvilínea S, xerar unha secuencia de polígonos P_n cuxa área se soubese calcular e se aproximase cada vez máis á de S, tralo cal íase disminuíndo en cada paso a diferencia $S - P_n = \varepsilon$ das áreas e ver mediante unha redución ao absurdo que para un paso n suficientemente grande ε sería arbitrariamente pequeno. Dito proceso recibe o nome de "método de esgotamento".

1.2.1. Volumes na Antiga Grecia

Se P é un cono ou pirámide, a fórmula para calcular o volume de P é

$$v(P) = \frac{Ah}{3}, \tag{1.2}$$

(sendo A a área da base e h a altura). Tradicionalmente este resultado atribúese a Demócrito (quen foi, segundo as palabras de Arquímedes, o primeiro en descubrilo), mais non aportou unha proba. O primeiro en facer isto foi Eudoxo, mediante o método de esgotamento (ver fig. 1.1): xerou dúas series de cilindros, $\{P_n\}$ e $\{Q_n\}$, de forma que para cada paso $n \in \mathbb{N}$, P_n e Q_n representan os n cilindros de altura $\frac{h}{n}$ inscribindo e circunscribindo a P respectivamente.

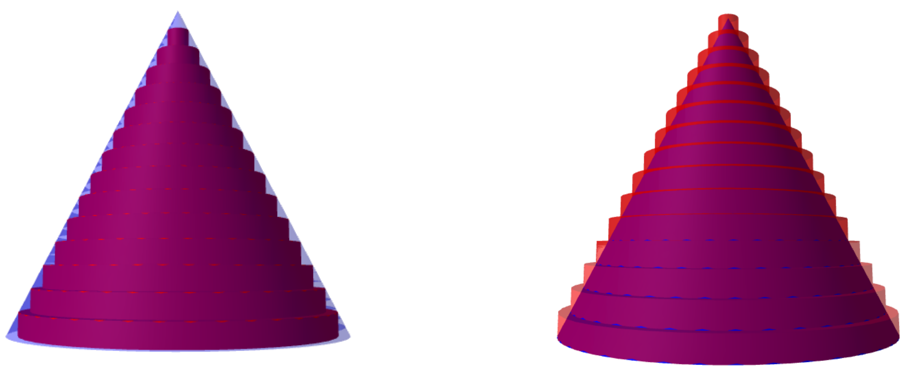

Figura 1.1: Representación do método de esgotamento con cilindros inscritos (esquerda) e circunscritos (dereita).

Por outra banda, Euclides enuncia e demostra que, sendo S, T esferas de radios s, t; a relación entre os seus volumes é

$$\frac{v(S)}{v(T)} = \frac{s^3}{t^3}, \tag{1.3}$$

o cal permite calcular doadamente o volume dunha a partir do da outra. A demostración é, de feito, unha de cinco que Euclides fai co mesmo método, demostrando en cada unha que $v(A) = k \cdot v(B)$, sendo k constante.

Dada a falta de límites, empregou o método de esgotamento: suponse que $v(A) < k \cdot v(B)$ e inscríbense figuras de volume coñecido ata obter unha contradición, momento no cal se fai o mesmo con $v(A) > k \cdot v(B)$.

Estes resultados levaron aos gregos á conclusión de que dous sólidos con seccións paralelas iguais (a unha altura dada da base) deben ter volumes iguais.

1.2.2. Arquímedes

Nos seus tratados amosa varias demostracións, mais é claro que as mesmas non son a forma orgánica na cal obtivo os resultados [6]. O seu método principal para a investigación facía uso do infinito, o cal levábaIle a facer probas a maiores dada a desconfianza grega hacia o mesmo. Dita técnica foi descoñecida ata 1906, cando, co rexurdir de *O método*, foi atopada unha descrición da mesma feita por Arquímedes nunhas cartas persoais.

Un dos temas que tratou foi a medida nun círculo. Concretamente, foi o primeiro en probar que as constantes π_1 e π_2 para $A = \pi_1 \cdot r^2$ e $C = 4\pi_2 \cdot r$, sendo r o radio, coinciden (estas relacións para o cálculo da área e circunferencia dun círculo eran coñecidas en Grecia). Fíxoo amosando que $A = \frac{rC}{2}$ mediante unha redución ao absurdo, isto é, que a área dun círculo coincide coa dun triángulo de base igual á súa circunferencia e altura igual ao seu radio. Achegou a maiores unha aproximación de dita constante, segundo a cal $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$, a cal obtivo calculando as áreas do polígono de 96 lados inscrito e do circunscrito.

Matemáticos anteriores obtiveron a área dun segmento de círculo e de hipérbola, pero segundo Arquímedes ningún buscara a cuadratura dun segmento de parábola, sendo esta definida como unha das seccións cónicas (ver fig. 1.2). Arquímedes demostra que dado un segmento de parábola P e inscribindo un triángulo rectángulo T nela (ver fig. 1.3), a área de P será catro terzos da de T. En dita demostración utiliza unha vez máis a dobre redución ao absurdo.

Por outra banda, Arquímedes non logrou resolver o problema da área encerrada por un segmento da elipse (outra cónica, ver fig. 1.4), pero si da elipse completa. Sendo os seus

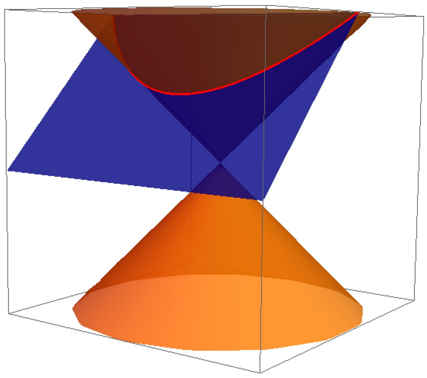

Figura 1.2: Definición da parábola (en vermello) como a intersección entre un plano e o cono.

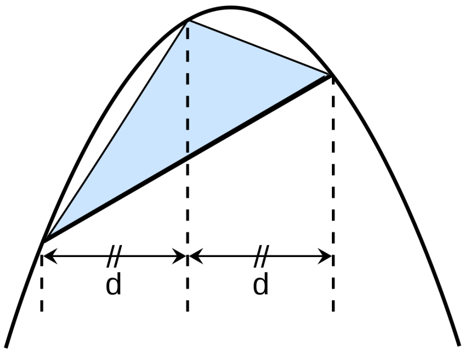

Figura 1.3: Arquímedes inscribe un triángulo no segmento de parábola.

semieixes maior e menor a e b, probou que $A = \pi ab$ mediante o método do esgotamento, sendo isto unha xeneralización da área do círculo ($a = b = r$). Xa vimos que Euclides

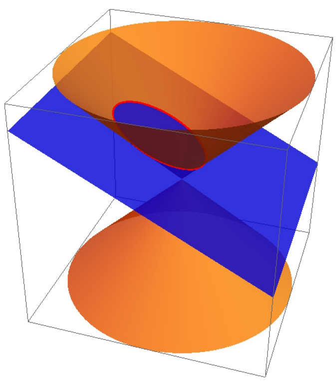

Figura 1.4: Definición da elipse (en vermello) como a intersección entre un plano e o cono.

probou que a área dunha esfera é da forma

$$V = \alpha \cdot r^3. \tag{1.4}$$

Arquímedes completa a fórmula, probando que

$$\alpha = \frac{4\pi}{3}, \tag{1.5}$$

e engade que

$$S = 4\pi \cdot r^2 \tag{1.6}$$

para a súa superficie.

Con respecto á esfera, Arquímedes utilizou unha vez máis a redución ao absurdo dobre para demostrar que $a(S) = 4\pi \cdot r^2$ e realizou unha demostración análoga para ver que $v(S) = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$.

Moitas das súas demostracións seguen o método de comprensión, un subcaso de dobre redución ao absurdo, no cal o obxectivo é demostrar que unha magnitude xeométrica S coincide cunha magnitude dada C. Trátase de construír dúas sucesións $\{L_n\}$ e $\{U_n\}$ cumprindo que $L_n < S < U_n$ e $L_n < C < U_n$ para todo n, e formar a dobre redución para ver que $S = C$ utilizando que $U_n - L_n < \varepsilon$ ou que $\frac{U_n}{L_n} < \alpha$ (sendo ambas aproximacións análogas, con ε próximo a cero e α próximo a un).

Dito método ve moito uso nos traballos de Arquímedes relacionados cos sólidos de revolución. Entre os resultados que aporta achamos, en termos actuais, unha proba de que dado un paraboloide de revolución P inscrito nun cilindro de radio r e altura h o seu volume é

$$v(P) = \frac{\pi r^2 h}{2}. \tag{1.7}$$

Da mesma forma achou o volume dun elipsoide de revolución E con semieixes a e b, revolucionado en torno ao eixe de coordenadas que conten o semieixe b:

$$v(E) = \frac{4\pi a^2 b}{3}. \tag{1.8}$$

Arquímedes utilizou unha "construción por talladas" para o cálculo de moitas destas figuras de revolución.

Varios autores consideran a Arquímedes o primeiro en descubrir o cálculo. Non obstante, no seu traballo faltan tres das claves desta disciplina:

1. Límites explícitos.

2. Recoñecemento da relación entre os problemas de área e tanxentes.

3. Creación e uso de métodos xerais para cálculos de áreas e volumes (empezaba sempre de cero).

Isto lévanos a dicir que Arquímedes non levaba a cabo cálculo propiamente dito. Isto non resta mérito ao seu traballo, o cal sementou as bases do que máis adiante sería o cálculo [5].

1.3. Período Escuro

O camiño ás técnicas infinitesimais preparado por Arquímedes non foi transitado ata o século XVII.

Un dos maiores factores que impediron máis avances en Grecia foi a clara separación que tiña lugar entre a Xeometría, na cal se centraba o seu análise, e a Aritmética, á cal ignoraban na súa maior parte. Traballaban con magnitudes xeométricas, non numéricas, co que a notación verbal facía imposible a xeración de algoritmos para a resolución de problemas (posto que escondía as similitudes entre problemas similares). A maior virtude das Matemáticas gregas era a súa maior debilidade: a necesidade de rigor absoluto. Foi este rigor o que impediu o desenvolvemento dos números irracionais e favoreceu o pavor ao infinito.

Todas as técnicas alxébricas desenvoltas polos babilonios foron ignoradas polos gregos, pois non casaban co seu concepto de número e o seu requerimento de solucións exactas. Non servía de nada saber que a área do círculo era πr^2, xa que só se podían comparar círculos con círculos e cadrados con cadrados. Non había ningún motivo para desenvolver ecuacións de orde superior, posto que non se correspondían con ningunha das magnitudes xeométricas coñecidas.

O coñecemento transmitíase principalmente de forma oral, pois non había unha escritura clara. Se, por causas externas, desaparecía a tradición oral, a xeración seguinte tiña que dedicar o seu tempo a descifrar a versión escrita, o que non lle deixaba espazo a progresar co coñecemento. Se engadimos a estes factores internos causas externas como as queimas de bibliotecas, podemos entender o parón que recibiron as Matemáticas gregas.

Coa chegada do imperio romano tivo lugar un retroceso. O máis semellante á trasmisión do coñecemento matemático grego que tivo lugar foi a popularización de "manuais" formados por un pastiche de coñecemento grego procedente de diversas fontes, frecuentemente contraditorias entre si. Estes manuais foron practicamente a única fonte de coñecemento científico dispoñible na Europa occidental nos inicios da Idade Media.

O escritor máis notable neste período, Boethius, creou entre outros un manual de aritmética. Estaba composto por unha versión acurtada dunha compilación anterior de traballos ás mans de Pitágoras e Platón, incluíndo unha táboa de multiplicar tamaño 10x10. O seu outro manual no eido das Matemáticas trataba a Xeometría, e nel só estaban os enunciados dalgunhas proposicións dos primeiros catro libros de *Os Elementos* de Euclides.

O grao de entendemento no mundo occidental continuou minguando ata o século XI. O matemático máis famoso de dito século, Franco de Liege, dedicou a maior parte dos seus esforzos a tentar resolver o problema da cuadratura do círculo, que hoxe en día sabemos irresoluble.

Afortunadamente, parte da sabiduría grega foi preservada polo imperio bizantino e, máis adiante, pola hexemonía árabe na área mediterránea.

Destacamos aquí a al-Khwarizmi, quen redactou libros de texto en Aritmética e Álxebra. O primeiro deles foi unha tese sobre a forma de calcular dos hindús, que utilizaban tanto números racionais como raíces irracionais e dispuñan dun sistema de numeración decimal con notación posicional e un elemento cero. O segundo libro, *al-Jabr wa-l-Muqabala*, deu orixe á palabra álxebra.

A súa redacción é totalmente retórica e verbal, escribindo os números con palabras, o cal é un retroceso comparándoo con literatura anterior. O maior mérito de al-Khwarizmi é que o seu traballo repopularizou o uso de números en lugar de magnitudes xeométricas, facendo uso de algoritmos para resolver ecuacións. Estos algoritmos eran verificados, de forma similar á grega, a través de diversas construcións xeométricas. Utilizaba no seu traballo tres tipos de cantidades, as que chamaba raíces (x), cadrados (x^2) e números (constantes). Así, $x^2 + 10x = 39$ era para el "un cadrado e dez das súas raíces equivalen a trinta e nove", e o seu método para solucionar dita ecuación sería:

1. Coller a metade das raíces (10/2=5),
2. Multiplicar esta cantidade por si mesma (5·5=25),
3. Sumarlle o "número" (25+39=64),
4. Calcular a súa raíz cadrada (8),
5. E restar a metade das raíces (8-5=3),

3 é o resultado obtido, sendo sempre a raíz positiva a atopada. En notación moderna, diriamos que a raíz positiva de $x^2 + 2bx = c$ é $-b + \sqrt{b^2 + c}$.

Nos séculos IX e X traducíronse numerosos tratados do grego ao árabe. Algúns destes textos só chegaron a nós grazas a ditas traducións, ás cales os árabes engadiron probas alternativas e xeneralizacións.

Destacamos no século XI, a época dorada das matemáticas arabes, que Al-Haitham (Alhazen) demostrou que de revolucionar un segmento de parábola arredor da súa base, o volume obtido é $8/15$ veces o volume do cilindro circunscrito.

Tras preservar e enriquecer as Matemáticas gregas por catro séculos, no século XII a ciencia árabe comezou a declinar. Afortunadamente, por entón a Europa occidental xa saíra das sombras, recollendo o relevo.

No Medievo comezan a aparecer de xeito natural diversos problemas de series infinitas. A primeira suma de series infinita en ser probada foi

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{n}{2^n}+\cdots=2, \tag{1.9}$$

sendo a demostración obtida por Swineshead e exposta de forma verbal.
En torno ao 1350 Oresme formulou, de forma máis xenérica, a serie xeométrica

$$\frac{a}{k}+\frac{a}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\cdots+\frac{a}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^n+\cdots=a, \tag{1.10}$$

sendo $k>1$ un enteiro e incluíndo o caso

$$1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots=\frac{4}{3}, \tag{1.11}$$

utilizado por Arquímedes de forma especial. A súa demostración é que

$$a=\frac{a}{k}\left[1+\left(1-\frac{1}{k}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n-1}\right]+a\left(1-\frac{1}{k}\right)^n a\left(1-\frac{1}{k}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{1.12}$$

Oresme demostra así mesmo que a serie harmónica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+... \tag{1.13}$$

é diverxente. Este é o primeiro caso dunha serie cuxa diverxencia non é obvia (posto que os seus sumandos converxen a 0) en ser probada como tal.

Este estudo de series infinitas continúa nos séculos XV e XVI de forma exclusivamente verbal, aceptándose os límites infinitos.

No Renacemento vemos un progreso veloz na área da Álxebra, que anteriormente non era máis que unha "bolsa de xogos" e non un método xeral. Era necesario facer unha distinción clara entre o papel da variable descoñecida e os coeficientes para evitar confusión. A notación que colleu tracción foi a de Viète, que separou os roles das variables e dos parámetros, permitindo centrar a atención na resolución do problema en cuestión.

O paso final no nacemento das Matemáticas co uso de infinitesimais foi a creación da Xeometría Analítica por parte de Descartes e Fermat. A idea básica era marcar a correspondencia entre unha ecuación $f(x, y) = 0$ e os puntos do plano que a satisfacían. Tanto Descartes como Fermat pensaban nas incógnitas nesta relación como segmentos de línea en lugar de números.

Fermat adheriuse á notación de Viète, mentres que Descartes creou o que hoxe en día é a notación alxébrica estandar. Ambos tiñan como obxectivo aplicar a Álxebra renacentista aos problemas presentes na Xeometría. Descartes partía dun problema xeométrico e o convertía nunha ecuación alxébrica, a cal resolvía. Por outra banda, Fermat comezaba cunha ecuación alxébrica e estudaba as propiedades xeométricas da súa curva correspondente, clasificando así o tipo de figura obtida.

A noción dunha "variable" foi necesaria no desenvolvemento do cálculo. A Xeometría Analítica proporcionou, pois, un campo de traballo para as técnicas infitesimais do século XVII e as técnicas necesarias para elucidalas.

1.4. Bibliografía Destacada

Fixemos neste primer capítulo especial uso do libro *The Historical Development of the Calculus* escrito por Edwards, [5]. A principal axuda prestada por dito documento foi a xeración dunha base inicial sobre a cal foi posible traballar e expandir.
Fixemos uso tamén, aínda que en menor medida, da referencia [6], de onde obtivemos información relacionada con Arquímedes.

Capítulo 2

Nacemento da Integral

O concepto de integral foi desenvolto ao longo do tempo, concretamente entre os séculos XVI e XIX. Neste apartado imos presenciar os diversos feitos que favoreceron a súa constitución, ata chegar a un proceso primitivo que integra as funciones sen discriminación, non preocupándose de se dito cálculo é posible ou non. Esta distinción será un punto de discusión máis adiante, sendo nos dous primeiros séculos máis de interese o desenvolvemento dun proceso práctico.
Seguiremos polo tanto o nacemento dos indivisibles e dos problemas de tanxentes, sendo estes últimos de interese para nós debido ao Teorema Fundamental do Cálculo. Remataremos este capítulo cunha rápida revista aos resultados do noso interese obtidos polos matemáticos máis notables deste período.

2.1. Primeiros Indivisibles

A mediados do século XVI, tiña lugar un entendemento xeral dos traballos de Arquímedes, o que sinala o comezo dunha etapa posterior de progreso.

O método de esgotamento, tan utilizado en Grecia, foi refinado e aplicado a moitos problemas. Con todo, segue sendo longo e aparatoso, e comezan a desenvolverse novos métodos, máis doados de usar e sinxelos. As demostracións de Arquímedes considéranse exemplares con respecto ao rigor requerido, emporiso, os matemáticos do momento prefiren atopar resultados cunha velocidade maior, sacrificando a exactitude. Nas palabras de Huygens: "O máis importante é o método de descubrimento, e polo tanto debemos, por enriba de todo, seguir un método claro, aforrándonos a nós mesmos a tarefa de escribir e aos nosos lectores a tarefa de ler." [12, pág. 189].

Neste período, xa superada a aversión grega ao infinito, tivo lugar un uso libre de números irracionais e desenvolvéronse diversas técnicas formais grazas á álxebra simbólica.

Isto deu lugar á aparición de diversas ferramentas infinitesimais e a unha aritmetización de problemas tradicionalemnte xeométricos. Un dos conceptos que aparecen son os indivisibles: anacos nos cales se subdivide unha figura xeométrica co obxectivo de facilitar o cálculo da súa área ou volume.

2.1.1. Kepler e Cavalieri

Kepler é principalmente coñecido polo seu traballo na astronomía (as 3 leis de Kepler), mais o seu traballo con respecto ás áreas e volumes comeza por necesidade: o seu tratado *Nova stereometria doliorum vinanriorum* ten como obxectivo permitir aos comerciantes de viño saber os volumes dos seus barrís de forma exacta. Determinou neste traballo os volumes de máis de 90 sólidos de revolución. É interesante notar que os resultados en *stereometria* están feitos sen rigor, baixo a seguridade que sentía Kepler de poder demostralos rigurosamente de ser necesario.

O seu método baseábase en dividir un sólido dado nun número infinito de pezas infinitesimais, os indivisibles, cun tamaño e forma convenientes. Demostrou deste feito o Teorema de Pappus, isto é, formando un toro revolucionando unha circunferencia con radio a a unha distancia $b > a$ do eixo, dá

$$V = 2\pi^2 a^2 b \tag{2.1}$$

como a fórmula para o volume do toro.

Cavalieri tamén desenvolveu o concepto dos indivisibles, mais atópanse dúas diferencias significativas entre o seu proceso e o de Kepler:

1. Kepler comezaba cada cálculo desde cero, imaxinando cada figura dada e os seus infinitesimais de forma independente ás súas experiencias anteriores. Mentres, Cavalieri compoñía correspondencias entre dúas figuras xeométricas e os seus indivisibles, atopando un ratio entre os mesmos. Tipicamente o volume dunha das figuras era coñecido, o que permitía atopar o da outra grazas ao ratio.

2. Por unha banda Kepler pensaba os indivisibles dunha figura como figuras na mesma dimensión (e dicir, os indivisibles dunha área eran áreas e os dun volume, volumes), mais, pola outra, Cavalieri os concibía nunha dimensión menor. Así, para el, un volume consiste en áreas, e unha área en segmentos de recta. Notamos que non está claro se Cavalieri consideraba estas unidades indivisibles con ou sen grosor, posto que nalgúns casos daba a entender que o tiñan e, en outros, que non.

Cavalieri estaba máis interesado no uso dos indivisibles que en definir a súa natureza con exactitude, declarando que “o rigor é traballo da filosofía, non das matemáticas”.

O seu método de comparar dúas figuras xeométricas baséase no que a día de hoxe coñecemos como Teorema de Cavalieri, o cal tentou demostrar cun argumento de superposición.

Teorema 2.1 (Teorema de Cavalieri). *Se dous sólidos teñen a mesma altura, e as seccións feitas por planos paralelos as bases á mesma distancia delas están sempre relacionadas polo mesmo ratio, entón os volumes dos sólidos tamén están relacionados por dito ratio.*

Este Teorema considérase un precursor do Teorema de Fubini (que permite calcular unha integral múltiple mediante integración iterada). O seu uso principal é a posibilidade de acurtar moitos cálculos de área/volume.

Cavalieri traballou tamén nun método para calcular o volume dun sólido dadas as súas seccións transversais, o cal levoulle a conxecturar o resultado

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{Z};\ n > 0, \tag{2.2}$$

o cal recibiría ao longo de dous séculos probas por parte de Fermat, Pascal e Roberval. Todos eles utilizaron

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}, \tag{2.3}$$

límite que ao subdividir $[0, a]$ en n subintervalos iguales e construír os P_n e Q_n rectángulos habituais, lévanos a

$$a(P_n) = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} \left(1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k\right), \tag{2.4}$$

$$a(Q_n) = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} \left(1^k + 2^k + \cdots + n^k\right). \tag{2.5}$$

Estas dúas igualdades relaciónanse con $a(S)$:

$$a(P_n) \leq a(S) \leq (Q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a^{k+1}}{k+1} \leq a(S) \leq \frac{a^{k+1}}{k+1} \Rightarrow \int_0^a x^n dx = a(S) = \frac{a^{k+1}}{k+1}. \tag{2.6}$$

2.1.2. O nacemento das potencias fraccionarias

A cuadratura de curvas da forma $y = x^k$ (non sendo k un enteiro positivo) non foi estudada ata que John Wallis introduciu os exponentes racionais e negativos (que máis adiante foron unha clara influencia para Newton). Wallis sabía que, de ser k un enteiro positivo,

$$\int_0^1 x^k dx = \lim_{n\to\infty} \frac{0^k + 1^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + \cdots + n^k}, \tag{2.7}$$

límite que obtivo de forma empírica, calculando o resultado para valores pequenos de k. Inferiu ademais que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{0^k + 1^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + \cdots + n^k} = \frac{1}{k+1} \tag{2.8}$$

para todos os k enteiros non negativos. Foi entón cando Wallis relacionou a notación, hoxe estándar,

$$x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p \tag{2.9}$$

e introduciu os exponentes irracionais.

O seguinte paso que tomou foi conxecturar que

$$\int_0^a x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{a^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q}+1} = \frac{q}{p+q} a^{\frac{p+q}{q}} \tag{2.10}$$

sendo $\frac{p}{q} > 0$, o cal foi posteriormente probado por Fermat e Torricelli.

2.1.3. Rectificación da curva

O problema de rectificación - isto é, dada unha curva, construír un segmento de recta coa mesma lonxitude - foi considerado irresoluble ata finais dos 1650s, momento no cal se atopou resposta mediante a aplicación de técnicas infinitesimais.

A primeira curva en ser estudada de esta forma foi, a mano de William Neil, $y^2 = x^3$ (1657). A súa análise consistiu en, collendo o intervalo real $0 \leq x \leq a$, subdividilo en n subintervalos (sendo n arbitrariamente grande) e denominar o i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Sexan os puntos (x_{i-1}, y_{i-1}) e (x_i, y_i) pertencentes á curva, e s_i a lonxitude do segmento de curva entre eles,

$$s_i \cong \left[(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.11}$$

co cal a lonxitude da curva, s,

$$s \cong \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.12}$$

É interesante notar que, para axudarse neste último cálculo, Neil definiu como curva auxiliar a parábola $z = x^{1/2}$.

Unha posible visión xeral do proceso auxiliar seguido por Neil sería a seguinte:

Dada a curva $y = f(x)$ en $[0, a]$, tómase unha curva auxiliar $z = g(x)$ para a cal a área A_i encerrada en $[0, x_i]$ é

$$A_i = \int_0^{x_i} g(x)dx = f(x_i) = y_i \tag{2.13}$$

co cal

$$y_i - y_{i-1} = A_i - A_{i-1} \cong g(x_i)(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow \tag{2.14}$$

$$\Rightarrow s \cong \sum_{i=1}^{n} \left[1 + (g(x))^2\right]^{\frac{1}{2}} (x_i - x_{i-1}); \tag{2.15}$$

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + [g(x)]^2} dx. \tag{2.16}$$

Cos coñecementos actuais, é fácil ver a través do Teorema Fundamental do Cálculo que a curva auxiliar idónea é sempre $g(x) = f'(x)$.

2.2. Problemas de Tanxentes

A excepción duns poucos problemas illados, as rectas tanxentes non foron estudadas ata mediados do século XVII. O noso interese neles reside na súa relación cos problemas de áreas, a cal foi formándose ao longo do século.

Nos anos 1630 e 1640 tivo lugar unha análise inicial a mans de Torricelli e Roberval, na cal os problemas de tanxentes eran tratados a través do concepto inicial de movemento instantáneo.

Foi no último tercio do século XVII cando unha combinación entre as novas técnicas de cálculo de tanxentes e os novos problemas e métodos de cálculo de áreas deu orixe á disciplina matemática do cálculo.

O primeiro en atacar os problemas de tanxentes, Fermat, fíxoo a través da técnica da "pseudo-igualdade" ou adigualdade, que tamén utilizou en problemas de maximización e minimización. Ilustremos este método cun problema deste tipo: Dado un perímetro P, achar os lados A, B do rectángulo tendo dito perímetro (isto é, sendo $A + B = P$) e área maximal. Considerando A a incógnita a buscar,

1. $A(P - A) = AP - A^2$ é a área máxima.

2. Substitímos A por $A - E$ (sendo E unha cantidade arbitrariamente pequena):

$$AP - PE - A^2 - E^2 + 2AE$$

3. Adigualando ($\sim$) ambas expresións e borrando os termos comúns, obtemos que

$$2AE - PE - E^2 \sim 0$$

4. O cal, dividindo por E, lévanos a que

$$2A - P - E \sim 0$$

5. Podemos agora despreciar os termos que conteñen E, posto que é arbitrariamente pequena.

$$2A - P \sim 0 \Rightarrow A \sim \frac{1}{2}P$$

6. Do cal concluímos que a área será máxima cando $A = B = P - A$, isto é, cando a figura sexa un cadrado.

Fermat fixo uso deste mesmo método para probar que a tanxente s dunha parábola nun punto x será $s = \frac{f(x)}{f'(x)}$, ecuación na que identifica a pendente da recta tanxente á curva, $y = f(x)$, coa derivada, $f'(x)$.

Outro enfoque foi o tomado por Descartes, quen argallou un método de natureza máis alxébrica, co cal influenciou o desenvolvemento próximo do cálculo.

Este método, cuxa aplicación requería numerosos cálculos, non era factible a nivel práctico, mais inspirou as regras de Hudde e Sluse, as seguintes técnicas en aparecer, as cales non imos describir posto que son unha desviación con respecto ao que buscamos describir neste traballo.

Ditas regras, e outros métodos similares, recibiron derivacións infinitesimais inspiradas polas ideas de Fermat. Un destes novos métodos foi o presentado por Barrow, cuxo traballo trata os problemas de tanxencias e cuadraturas dende un punto de vista relativamente clásico e xeométrico, adoptando a definición grega de "recta tanxente". Describiu entre outras cousas unha modificación propia dun método ideado por Fermat para construír rectas tanxentes a unha curva dada da forma $f(x, y) = 0$. Podemos ver este último enfoque como unha versión analítica da regla de Sluse.

2.3. Teorema Fundamental do Cálculo

A aplicación inicial dos conceptos de tempo e movemento ás curvas e tanxentes levou a Torricelli e Barrow (e James Gregory, un matemático que obtivo resultados similares lixeiramente antes pero morreu antes de gañar recoñecemento) a desenvolver un entendemento intuitivo da relación inversa entre a diferenciación e a integración a través dos problemas de tanxentes e cuadraturas.

Por unha banda, un movemento levado a cabo por un obxecto pode ser representado como unha curva marcando a súa posición en cada instante de tempo. Nese caso, a pendente da recta tanxente á curva en cada punto será a velocidade do obxecto nese momento.

Por outra banda, dada unha curva representando a velocidade do obxecto en distintos momentos, a distancia total percorrida sería igual á área debaixo da curva (conclusión á que se chegou grazas aos indivisibles).

Estas dúas representacións, obtidas de forma independente, teñen unha relación clara: a pendente na primeira coincide en todo momento coa ordenada da segunda. Podemos ver esta relación, atopada tanto por Torricelli coma por Barrow, como un proto-Teorema Fundamental do Cálculo: un resultado que, aínda que non pode ser considerado unha formulación do TFC, estaba a pocos pasos de selo. Traxicamente, ningún dos dous perseguiron este concepto ata a súa conclusión. O máis preto ao que se achegaron foi a mans de Barrow na súa *Lecture X*, cando afirma e proba que una recta construída é tanxente (no sentido grego) á área cuberta por unha curva [4]. Se nese momento o tivese demostrado no sentido analítico, podería ser considerada a primeira formulación do TFC.

O que levou a cabo tal fito foi Isaac Newton.
Tras calcular $dy/dx = \dot{y}/\dot{x}$ para $f(x, y) = 0$, plantexouse o seguinte problema: cómo obter y en termos de x a partir de

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \phi(x),$$

isto é, o que hoxe se coñece como o problema de antidiferenciación. Destácase tamén que Newton recoñeceu o que chamamos unha ecuación diferencial, $g(x, \dot{y}/\dot{x}) = 0$ e remarcou que, de resolvela de forma xeral, todos os casos serían resoltos en consecuencia.
Na súa lista de problemas de Outubro do 1666, Newton enuncia por vez primeira a segunda formulación do TFC de forma explícita,

$$\frac{dA}{dx} = y,$$

sendo A a área debaixo da curva $y = f(x)$. Este momento pode ser considerado coma a introdución das técnicas xerais algorítmicas sistematizables. As técnicas infinitesimais, que como xa vimos eran utilizadas para calcular áreas e tanxentes, baseábanse en levar a cabo unha suma de elementos de área indivisibles - o novo método presentado por Newton, pola súa conta, determinaba primeiro o ritmo de cambio da área con respecto a x e logo calculábaa a través da diferenciación. Isto aclarou, por primeira vez, a relación exacta entre as tanxentes e as áreas. Curiosamente, Newton ignoraba a constante de integración ao longo de todo este proceso.[1]

Outro avance aportado por Newton é a integración por cambio de variable. En termos

[1]En la actualidad, el TFC tiene dos formulaciones comunes:

Teorema 2.2 (Teorema Fundamental do Cálculo - Primeira Formulación)**.** *Sexa $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ unha función Riemann-integrable en $[a,b]$, e $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ unha primitiva de f (isto é, unha función continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b) tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $a < x < b$). Entón:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Teorema 2.3 (Teorema Fundamental do Cálculo - Segunda Formulación)**.** *Sexa $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ unha función Riemann integrable, e F a súa función integral (isto é, $F(x) = \int_a^x f(s)ds$). Entón F é derivable en $[a,b]$ e $F'(x) = f(x)$ para todo x en $[a,b]$.*

actuais, dadas $v = f(x)$ e $y = g(z)$, con s e t as áreas encerradas por elas respectivamente,

$$\frac{\dot{s}}{\dot{t}} = \frac{v\dot{x}}{y\dot{z}}. \tag{2.17}$$

Sendo $\dot{x} = 1$ (e polo tanto $\dot{s} = v$), $y = \dot{t}/\dot{z}$. Se supoñemos que $s = t$,

$$\dot{s} = \dot{t} = v \Rightarrow y = \frac{v}{\dot{z}}. \tag{2.18}$$

De ser z tal que $z = \phi(x)$ ou $x = \psi(z)$, chegamos a que

$$y = \frac{v}{\dot{z}} = \frac{f(x)}{\phi'(x)} = \frac{f(\psi(z))}{\phi'(\psi(z))} \Rightarrow y = f(\psi(z))\psi'(z). \tag{2.19}$$

Co cal Newton quere dicir que

$$\int f(x)dx \tag{2.20}$$

se transforma en

$$\int f(\psi(z))\psi'(z)dz. \tag{2.21}$$

Esta non é a única ocasión na cal Newton fai uso da técnica de cambio de variable. De feito, no proceso de facer cuadraturas, utiliza unha xeneralización, na cal só asume a relación

$$t = F(x, v) + ks \tag{2.22}$$

con k constante e utiliza unha transformación que incorpora integración por partes.

2.4. Resultados de Matemáticos Notables

2.4.1. Outras achegas de Newton

Newton publica no seu tratado do 1671 dúas táboas de integrais, xunto as cales inclúe certos cálculos de áreas co obxectivo de ilustrar o seu uso.
A primeira delas chámase "Catálogo dalgunhas curvas relacionadas coas figuras rectilíneas" e inclúe curvas $y = f(z)$ cunha función primitiva $t = F(z)$ calculable explicitamente, sexa de forma directa ou por diferenciación inversa.
A segunda táboa, titulada "Catálogo dalgunhas curvas relacionadas coas seccións cónicas", trata das $y = f(x)$ tales que a área correspondente é expresable coma a cuberta por unha sección cónica.

É interesante notar que Newton consideraba o uso de indivisibles un atallo (mais non susbtituto) dos límites nas rigurosas probas matemáticas.

Unha última aportación da man de Newton foi o seu uso dos "triángulos característicos" para o cálculo da lonxitude do arco dunha curva.

2.4.2. Leibniz e Euler

No traballo de Gottfried Leibniz destaca o seu cálculo infinitesimal, en concreto a súa notación. Por exemplo, en notación funcional a regra da cadea ten este aspecto:

$$h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x))g'(x), \tag{2.23}$$

o cal resulta pouco intuitivo a nivel visual. Non obstante, facendo uso da notación diferencial, o mesmo resultado aparece como

$$z = f(y);\ y = g(x)\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \tag{2.24}$$

o cal dá a impresión de ser certo aínda sen ter coñecemento previo do resultado. A versión integral,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du, \tag{2.25}$$

ensina outro dos descobrementos de Leibniz: utilizando o cambio de variable $u = g(x),\ du = g'(x)dx$ vemos que se mantén unha invariabilidade frente aos cambios de variable.

Dado o papel principal dos diferenciais e as integrales no cálculo de Leibniz, vese máis e máis clara a relación inversa entre eles.

Outra das achegas de Leibniz son os triángulos característicos, unha xeneralización da construción triangular utilizada por Pascal, a cal permitía aplicar o método a problemas de rectificacións e cuadraturas.

Máis adiante Lebiniz descubriu o que coñecemos como “trasmutación”: un método de transformación que permitía a derivación de todos os resultados de cuadraturas no plano coñecidos. Tendo como base o principio de Cavalieri, para dúas rexións do plano A e B subdivididas en indivisibles, creamos unha correspondencia un a un entre eles, tendo dous indivisibles relacionados á mesma área. Entón A é derivado de B por unha transmutación, e ambos teñen a mesma área. Este proceso permitía a Leibniz obviar cambios de variable e integración por partes.

Pola súa banda Leonhard Euler é considerado o maior matemático do século XVIII ([5, cap. 10]) e non sen motivo. Restrinxíndonos só ao seu labor relacionado co noso traballo, tras fixar o concepto de función por primeira vez e definir formalmente as funcións logarítmicas, exponenciais e trigonométricas entre outras, Euler utilizou no seu *Calculi Differentialis* as expansións en series infinitas de diversas funcións elementais para derivar os diferenciais (no sentido de Leibniz) das mesmas. Así, diminúe os cálculos á derivación de polinomios, que logo agrupa novamente de ser posible.

2.5. Bibliografía Destacada

Neste capítulo utilizamos, unha vez máis, o libro *The Historical Development of the Calculus* de Edwards, [5] coma base inicial, sobre a cal expandimos coa axuda de *A Source Book in Mathematics, 1200-1800* de Struik, [12].

Capítulo 3

Evolución da Integral e Nacemento da Medida

Neste capítulo imos visitar o desenvolvemento do concepto de integral co obxectivo de entender o proceso e as inspiracións que levaron a Lebesgue e posteriores ao seu concepto de medida.

3.1. Medida

Ao longo do proceso de desenvolvemento do concepto de medida presenciamos unha evolución constante, na cal buscarase sempre o cumprimento de propiedades intuitivas, coma a monotonía (se sabemos canto mide algo, outro obxecto que o conteña terá que medir o mesmo ou máis) e a aditividade (a medida de dúas cousas separadas será a suma das súas medidas).

3.2. As Series de Fourier

O concepto de integral ata o século XIX foi, como xa vimos, sinxelamente "a operación inversa á derivación", sendo dita derivación o proceso relacionado cos problemas de tanxencialidade. As funcións integradas mediante este método eran habitualmente continuas, aínda que tamén estaba definido para funcións cun número finito de descontinuidades.

Foi neste panorama (1807) no cal Fourier expuxo as súas series. A idea baséabase en que dada unha función $f(x)$ acotada en $[-a, a]$, era posible expresala como

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right], \tag{3.1}$$

con

$$a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx, \qquad b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx. \tag{3.2}$$

Isto obrígoulle a facer dúas suposicións importantes: por unha banda asumir que $f(x)$, $f(x)\cos(mx)$ e $f(x)\,\mathrm{sen}(mx)$ son integrables para todo $m \in \mathbb{R}$, e que para unha serie infinita, a integración termo a termo é válida. Ambas conxeturas recibiron numerosas dúbidas. A primeira foi cuestionada rápidamente, mentres que a segunda foi xeralmente aceptada ata 1826, momento no cal Abel a cuestionou e amosou un contraexemplo.

Nos anos 1870-71 Heine e Cantor engadiron progreso ás series de Fourier, demostrando que a representación dunha función como serie de Fourier é única (e reafirmando no proceso que o problema da integración termo a termo era non trivial), mentres que Dini e Ascoli aportaron máis información con respecto aos coeficientes.

En 1875 Du Bois-Reymond probou que dada unha función acotada e integrable no sentido de Riemann cunha posible expresión en serie trigonométrica, esta sería a súa serie de Fourier, resultado que contribuiu ampliamente á difusión das series de Fourier.

Foron estas series as que impulsaron a Riemann a comezar o seu estudo da integral [9], experimentando cos límites da integral definida por Cauchy, a cal revisaremos a continuación.

3.3. A Integral de Cauchy

Vendo que a integración precisaba unha base sólida, Cauchy define por primeira vez en 1821 a integral por si mesma:

Definición 3.1. Sexa $f(x)$ unha función continua. Chámase **integral definida** de $f(x)$ en $[a, b]$ ao límite das sumas

$$S_P = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) \tag{3.3}$$

asociadas a cada partición $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ de $[a, b]$ de forma que $\|P\|$ (o supremo das lonxitudes dos intervalos) tenda a 0.

Engade ademais unha extensión a algunhas das funcións, non necesariamente acotadas, cun número finito de descontinuidades no intervalo:
Sexa $f(x)$ función continua no conxunto $[a, c) \cup (c, b]$, presentando unha única descontinuidade en c, $a < c < b$. Entón, se existen os límites

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a}^{c-\varepsilon} f(t)dt \text{ e } \lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(t)dt, \tag{3.4}$$

definimos

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(t)dt + \lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_{c+\varepsilon}^b f(t)dt. \tag{3.5}$$

No caso de presentar $n > 1$ descontinuidades, repítese o proceso.

Cauchy expón tamén tres teoremas ao respecto:

Dada $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ con f continua,

Teorema 3.2. *$F(x)$ será unha primitiva de $f(x)$. Equivalentemente, $f(x) = F'(x)$.*

Teorema 3.3. *Todas as funcións primitivas de $f(x)$ nun intervalo $[a, b]$ son da forma $F(x)+k$, sendo k unha constante. Isto implica que, sexa $G(x)$ unha función cuxa derivada é continua,*

$$\int_a^x G'(t)dt = (G(x) + k) - (G(a) + k) = G(x) - G(a).$$

Teorema 3.4. *Sexa $G(x)$ unha función. De ser $G'(x) = 0$ para todos os puntos $x \in [a, b]$, entón (por 3.3) $G(x)$ é constante en $[a, b]$.*

Estes tres teoremas motivarán en gran parte o estudo de integrais, posto que un dos obxectivos na busca dunha extensión da integral a máis variedade de funcións será o cumprimento ou reformulación deles.

Pouco despois Dirichlet reformula as condicións impostas no traballo de Cauchy da seguinte forma:

Definición 3.5. f é integrable no intervalo $[a, b]$ se existe unha función continua e única F (salvo constantes) tal que para todo $[c, d] \subset [a, b]$ cumprindo que f sexa continua en $[c, d]$, verífícase a igualdade

$$F(d) - F(c) = \int_c^d f(t)dt,$$

independentemente de se f é acotada en $[a, b]$ ou non.

3.4. A Integral de Riemann

O seguinte en afrontar o concepto de integral é Riemann, impulsado como xa comentamos polo estudo da integral de Cauchy e a representación de funcións a través de series trigonométricas, en especial das series de Fourier [9]. Os resultados obtidos neste método son a día de hoxe a integral usual. Observemos o proceso:

Publicado por Dedekind en 1867 de forma posterior a súa morte, o traballo de Riemann parte da definición 3.1 e engade condicións necesarias e suficientes de integrabilidade ao corpo de funcións $f(x)$. Sinala ademais que coa súa definición de integral é posible integrar funcións presentando infinitas descontinuidades nun intervalo.

Unha destas condicións, á que el considera evidente, é

Proposición 3.6. *Sexa ω_i a oscilación de f en $[x_{i-1}, x_i]$, intervalo da partición $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$, e sexa $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$. Entón*

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta_i = 0.$$

Dita afirmación foi posteriormente probada por Thomae. Coa notación actual, 3.6 quere dicir que

$$\overline{\int} f = \underline{\int} f, \tag{3.6}$$

no intervalo de integración, sendo $\overline{\int} f$ e $\underline{\int} f$ as integrais superior e inferior, respectivamente.

Riemann proba ademais que 3.6 é equivalente a que

Proposición 3.7. *Para todo ε, $\delta > 0$, pódese atopar $d > 0$ tal que $\|P\| < d$ implica que*

$$s(P, \delta) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Delta_i < \varepsilon$$

sendo $\lambda_i = 1$ cando $\omega_i \geq \delta$, e nulo notro caso.

3.4.1. Consecuencias directas

Foi este último resultado o que levou a Hankel, un discípulo de Riemann, a estudar a integrabilidade de funcións con respecto á natureza de conxuntos como a súa imaxe. Notando que as clasificacións habituais non eran aplicables, estableceu a súa propia, para a cal definiu un concepto análogo á oscilación ω_i de Riemann.

Definición 3.8. Sexa f unha función. Dirase que o **salto** de f nun punto x é maior ou igual que $r > 0$ se para cada $\varepsilon > 0$ existe un h tal que $|h| < \varepsilon$ de forma que $|f(x+h) - f(x)| \geq r$. Chamamos S_r ao conxunto $\{x : f \text{ ten salto maior ou igual ca } r \text{ en } x\}$.

Así, concluíu que as funcións eran das clases:

1. Funcións continuas.

2. Funcións presentando una cantidade finita de descontinuidades en cada intervalo a ser estudado.

3. Funcións presentando infinitas descontinuidades en cada intervalo a ser estudado.

   a) Funcións para as que S_r é diseminado[1] para todo r, ás cales chama *funcións puntualmente descontinuas.*

   b) Funcións para as que existe un r para o cal S_r é denso en algún intervalo, ás cales chama *funcións totalmente descontinuas.*

Hankel afirmou que unha función pertencente á clase 3 era integrable se, e só se, pertencía a subcategoría a).

Non obstante, en 1875 o matemático británico Henry John Smith pubricou [11] dous métodos para a construción de conxuntos diseminados, usándoos para atopar un contraexemplo a dita afirmación, e rechazando tamén a creencia de que tódolos conxuntos diseminados tiñan contido nulo. Mais este documento non chegou ao continente por un tempo, e polo tanto os seus resultados non foron considerados inmediatamente.

Ata 1878 mantívose pois a categorización de Hankel. Foi neste momento no cal Dini, tras amosar dúbidas acerca do sistema de Hankel, separa por primeira vez os conxuntos de 1ª especie e demostra que teñen contido 0. Aínda que non o comunicou de forma explícita, podemos supoñer debido as súas dúbidas que diferenciaba aos conxuntos de 1ª especie dos diseminados [1].

Por outra banda, en 1871 Hankel sinalou que aínda sendo, por exemplo, a función

$$F(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2} dx \tag{3.7}$$

continua, $F'(x)$ non pertence ao conxunto denso formado polas descontinuidades da función subintegral, o cal aparentemente contradicía a validez de 3.2 no entorno da integral de Riemann. Novamente a solución aportaa Dini máis adiante, engadindo as "catro derivadas" dunha función $f(x)$: $D_+f(x), D_-f(x), D^+f(x)$ e $D^-f(x)$. Tras demostrar que todas tiñan os mesmos extremos en cada intervalo, co cal de ser unha é integrable o son as catro e as súas integrais coinciden, reformula 3.2 e 3.3 no contexto da integral de Riemann:

Teorema 3.9. *Dada $F(x) = \int_a^x f$, entón a diferencia entre cada unha das catro derivadas $D_+F(x), D_-F(x), D^+F(x)$ e $D^-F(x)$ e f é unha función de integral nula para cada intervalo.*

Este resultado significa, en termos actuais, que $\left(\int_a^x f\right)' = f(x)$ en casi todo punto.

Teorema 3.10. *Sexa F función continua tal que unha das súas catro derivadas, á cal denotaremos DF, sexa integrable. Entón $\int_a^b DF = F(b) - F(a)$.*

[1] Dicimos que un conxunto é diseminado ou denso en ningunha parte cando o interior da súa clausura é o conxunto baleiro.

Dini destacou nos seus traballos que a hipótese de integrabilidade sobre a derivada non resultaba superflua, sendo o primeiro en notar este feito.

Nos anos oitenta os estudos centráronse en estudar as propiedades dos conxuntos infinitos. Tras darse a coñecer a existencia de conxuntos diseminados con contido exterior positivo, comezou finalmente a formarse a teoría da medida.

En 1881 Volterra constrúe, cun proceso similar ao de Smith, un subconxunto de $[0, 1]$ pechado e diseminado cun contido exterior maior ca $\frac{2}{3}$, o cal utilizou ademais para probar a existencia dunha función da clase 3-a de Hankel non integrable no sentido Riemann, outra das conxeturas expostas por Dini.

3.5. Achegas de Harnack

3.5.1. Conxuntos de medida cero

Harnack desenvolveu no seu traballo o concepto do que el chama "conxuntos discretos": o que hoxe consideramos conxuntos con contido cero, e utilizouno para formular unha corrección sobre o afirmado por Hankel. En termos modernos,

Teorema 3.11. *Sexa f función, f é integrable no seu dominio $\Leftrightarrow$ Para todo $r > 0$, S_r ten contido cero.*

(Lembremos que $S_r = \{x : f \text{ ten salto maior ou igual ca } r \text{ en } x\}$, visto na def 3.8). Posteriormente Harnack define a "igualdade en xeral":

Definición 3.12. Dúas funcións f e g son *iguais en xeral* se, para todo $r > 0$, o conxunto $\{x\colon |f(x) - g(x)| \geq r\}$ é de contido cero.

Proba ademais que dúas funcións integrables e iguais en xeral teñen a mesma integral.

3.5.2. A integral de Harnack

Non obstante, a maior achega que fixo Harnack ao desenvolvemento da integral foi a súa propia, coñecida hoxe en día como "Integral de Harnack", que estendía a definición de Riemann ás funcións f non acotadas nos entornos dos puntos pertencentes a un conxunto de contido cero. Isto é, sexa U_f un conxunto de contido cero e sexan $I_1, \ldots, I_n$ n intervalos (con n finito) tales que

$$U_f \subset U = \bigcup_{i=1}^{n} I_i. \tag{3.8}$$

Defínese entón

$$\int_a^b f = \lim_{m(U) \to 0} \int_a^b f_U, \tag{3.9}$$

sendo $m(U)$ a lonxitude de U.

Esta integral comparte algunhas propiedades coa de Riemann, mais non todas: por exemplo, a función suma de dúas funcións integrables no sentido de Harnack non é necesariamente integrable nese mesmo sentido [8]. Ademais, 3.3 non se cumpre para esta integral. Con respeto a este último problema, Harnack e o primeiro en centrarse no que actualmente chamamos "continuidade absoluta", demostrando que a súa integral cumpría 3.9 para as funcións absolutamente continuas integrables.

3.5.3. Conxuntos e contidos

Harnack interesouse polos conxuntos de contido non nulo a partir do traballo de Cantor, quen definiu o contido exterior dun subconxunto acotado $E \subset \mathbb{R}^n$ como

$$J(E) = \lim_{r \to 0} F(r), \tag{3.10}$$

sendo

$$F(r) = \int_{\prod(r)} dx_1 \ldots dx_n; \tag{3.11}$$

$$\prod(r) = \bigcup_{p \in E} P, \text{ sendo } P = B(p, r). \tag{3.12}$$

Neste proceso Cantor asume que a cantidade de bólas necesarias P para a construción de $\prod(r)$ é finita, o cal é xustificable na actualidade (posto que ao ser E acotado, $\overline{E}$ é compacto), mais non o era daquela. Contando con dita finitude, a integral

$$\int_P dx_1 \ldots dx_n \tag{3.13}$$

ten sentido para calquera dos P, polo que $F(r)$ está correctamente definida.

Cantor demostrou algunhas propiedades do seu contido, como que $J(E) = J(\overline{E})$ e que

$$J(A \cup B) = J(A) + J(B) \Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B}, \tag{3.14}$$

mais é Harnack quen resolve a confusión debida aos recubrimentos por conxuntos infinitos que podían ter lugar cando $J(E) = 0$, producindo unha contradición con respecto á definición de "conxunto con contido cero". Para isto, Harnack limita (na recta real) os recubrimentos, permitindo só os formados por unha cantidade finita de intervalos, e demostra os resultados de Cantor nesas condicións, achegándose ao que máis adiante sería a medida de Jordan.

3.6. O concepto de Medibilidade

É necesario notar que Stolz publica, orixinalmente, a súa propia definición de contido en $\mathbb{R}$:

Definición 3.13. Sexa $E \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$, e sexa (P_n) unha sucesión monótona de particións de $[a, b]$ cumprindo que $||P_n|| \longrightarrow 0$. Entón constrúese unha sucesión $(L(P_n))$ formada polas sumas das lonxitudes dos intervalos de P_n cuxa intersección con E é non baleira en cada paso n. Entón o límite (que non depende da partición escollida)

$$\lim_{n \to \infty} L(P_n) \tag{3.15}$$

é a medida de E.

A definición feita por Harnack coincide pois coa formulada por Stolz. Stolz estendeu ademais esta definición a conxuntos acotados no plano real.

É importante notar que nestes momentos este concepto de medida non estaba ampliamente relacionado co feito de ter a función unha integral definida ou non: considerábase que o conxunto dos puntos do plano delimitados pola gráfica dunha función f sempre tiñan área, independientemente da integrabilidade de f.

Peano criticou esta difusa relación e abordou a definición concreta do concepto de área en 1887. No seu proceso define as ideas de punto interior, exterior e de frontera nun conxunto $A \subset \mathbb{R}^n$, apartando os casos $n = 1, 2, 3$.
Define así para $A \subset \mathbb{R}^2$ a área interior de A como o supremo das áreas das rexións polígonais contidas por A, $c_i(A)$, e a área exterior como ínfimo das áreas das rexións poligonais contendo ao conxunto, $c_e(A)$, sendo unha rexión poligonal aquela formada por un número finito de triángulos. Peano chama entón *área* de A a $c(A) = c_i(A) = c_e(A)$ cando as áreas interior e exterior coinciden, e en caso contrario afirma que a área de A non é comparable á dun polígono.

Peano nota ademais que, se denotamos á fronteira de A como ∂A, $c_e(A) = c_i(A) + c_e(\partial A)$, de onde conclue que un conxunto teñe área se e só se a súa fronteira ten área exterior nula. Utilizando os conceptos de integral superior e integral inferior, demostrou que, dada f non negativa no intervalo $[a, b]$ e sendo E o seu recinto de coordenadas,

$$\overline{\int_a^b} f = c_e(E) \tag{3.16}$$

$$\underline{\int_a^b} f = c_i(E) \tag{3.17}$$

co cal f é integrable se e só se E ten área no sentido de Peano.

3.6.1. A medida de Jordan

O concepto de medibilidade é introducido por primeira vez de forma explícita en 1892 da man de Jordan, motivado no seu estudo das integrais múltiples. Tras notar que, aínda que o papel da función na integral fora fortemente estudado e analizado, os efectos producidos polo dominio de integración non. Asumíase sempre que o dominio E tiña unha determinada área, finitamente aditiva, o cal non era un feito demostrado e, ao coller dominios arbitrarios, deixaba de resultar evidente.

Jordan define, pois:

Definición 3.14. Sexa $E \subset \mathbb{R}^n$, diremos que E é **medible** se $c_i(E) = c_e(E)$.

A maiores demostra que, de ser E unha unión disxunta de $E_1 \dots E_n$,

$$\sum_{j=1}^{n} c_i(E_j) \leq c_i(E) \leq c_e(E) \leq \sum_{j=1}^{n} c_e(E_j). \tag{3.18}$$

De onde se deduce que, de ser tódolos E_j medibles, tamén o é E. De feito, nese caso tense que

$$c(E) = \sum_{j=1}^{n} c(E_j). \tag{3.19}$$

Dada unha función acotada f definida sobre $E \subset \mathbb{R}^n$, con $E = \cup E_j$ unha partición en conxuntos medibles de E, Jordan define as sumas superior e inferior de f relativas a dita partición como

$$U = \sum_{j=1}^{n} M_j c(E_j); \qquad L = \sum_{j=1}^{n} m_j c(E_j), \tag{3.20}$$

con $M_j = \sup_{E_j} f$ e $m_j = \operatorname{ínf}_{E_j} f$, e demostra que os límites de U e L, aos que chama integral por exceso e por defecto, existen cando $|E_j| \to 0$. Remata definindo que f é integrable cando corresponden as integrais por exceso e defecto. De non ser E medible, Jordan define a integral de f en E como

Definición 3.15. Sexa (E_n) unha sucesión crecente de conxuntos medibles de forma que $c_i(E) = \operatorname{lím} c(E_n)$. Entón a sucesión $\left(\int_{E_n} f\right)$ ten límite, e definimos a integral $\int_E f = \operatorname{lím}\left(\int_{E_n} f\right)$.

3.6.2. A teoría da medida de Borel

Borel publica en 1898 *Leçons sur la theorie de fonctions*, monografía na cal aparece por primeira a teoría da medida de forma axiomática (influenciado por Drach). Supoñendo, para simplificar, que tódolos E están contidos en $[0, 1]$, Borel postula:

1. A medida e sempre non negativa, isto é, un valor positivo ou medida nula.

2. Se E é a unión de n numerable de intervalos non rampantes (isto é, con interiores disxuntos entre sí), e a lonxitude total destes intervalos é s, entón a medida de E é s.

3. Se E é a unión de E_n disxuntos, e a medida de cada un é s_n, entón E ten medida e $c(E) = \sum s_n$.

4. Sexa E con medida s, e sexa $E' \subset E$ con medida s'. Entón $E \backslash E'$ ten medida, e esta vale $s - s'$.

Os conxuntos nos cales se pode definir unha medida que cumpra con estes axiomas chámanse medibles. ademais, a existencia de conxuntos complicados de estudar deu lugar a que Borel propuxese a seguinte desigualdade:

Proposición 3.16. *Sexa A un conxunto de medida r. Entón, todo conxunto E que o conteña terá asignada unha medida $\geq r$, sexa ou non medible.*

Os axiomas propostos por Borel implican que a clase dos conxuntos medibles contén aos abertos (polo segundo axioma) e aos pechados (polo cuarto). ademais, polos puntos terceiro e cuarto, esta clase é o que hoxe en día chamamos unha $\sigma-$álxebra.

Borel consideraba a súa medida coma unha menos xeral ca medida de Jordan, e aclara que os obxectivos que el buscaba cumprir no seu traballo eran distintos aos perseguidos por Jordan [2].

3.7. A Integral e a Medida de Lebesgue

A integral de Lebesgue aporta coma efecto colateral a súa teoría da medida, que el define para $A \subseteq \mathbb{R}$, e sería estendida por diversos matemáticos no futuro. Lebesgue non tivo en ningún momento o obxectivo de medir: a teoría da medida non era do seu interese. As súas descubertas foron, pois, involuntarias, e encadradas posteriormente no campo da teoría da medida.

As primeiras ideas de Lebesgue con respeto á teoría da medida apareceron na revista francesa *Comptes Rendus* entre 1899 e 1901, e foron ampliadas na súa tese *Integrale, Longeur, Aire*, publicada en 1902. Inspirándose nas ideas de Borel e Drach, presenta a teoría da medida de forma axiomática co obxectivo de adxudicar a cada $E \subset \mathbb{R}$ acotado unha medida non negativa $m(E)$:

1. $\exists A \subset \mathbb{R}$ con $m(A) \neq 0$.

2. $m(A+t) = m(A)$ para todo $A \subset \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Sexan (A_n) disxuntos, entón

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n). \tag{3.21}$$

É clara consecuencia destes axiomas que $m([0,1]) \neq 0$. Tomando por convención $m([0,1]) = 1$, podemos deducir entón que dado un intervalo $I \subset [0,1]$, tómase $m(I) = L(I)$, isto é, a lonxitude de I.

Coma m é non negativa e cumpre co terceiro axioma, deducimos que é monótona, de onde, sexa $E \subset \mathbb{R}$ e sexan I_i intervalos de forma que

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i. \tag{3.22}$$

Entón, en caso de poder definirse a medida de E, será

$$m(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} L(I_i). \tag{3.23}$$

Así, defínese a medida exterior de E, $m_e(E)$, coma o ínfimo de 3.23 utilizando distintos recubrimentos.

Considerando a clase de conxuntos $E \subset \mathbb{R}$ tales que, sexa $[a,b]$ cumprindo que $E \subset [a,b]$,

$$m_e(E) + m_e([a,b]\backslash E) = b - a. \tag{3.24}$$

Define entón a medida interior de E como

$$m_i(E) = b - a - m_e([a,b]\backslash E), \tag{3.25}$$

o cal implica que E pertence a clase que cumpre (3.24) se, e só se, $m_i(E) = m_e(E)$. Lebesgue chamou aos conxuntos desta clase **medibles**, e declarou que, para os conxuntos medibles, $m(E) = m_i(E) = m_e(E)$. Observando a desigualdade

$$c_i(E) \leq m_i(E) \leq m_e(E) \leq c_e(E), \tag{3.26}$$

deduce ademais que os conxuntos Jordan-medibles son Lebesgue-medibles, e a medida coincide. Establece a maoires que E é medible se, e só se, existen dous conxuntos de Borel $A \subset E \subset B$ tales que

$$m(A) = m(E) = m(B). \tag{3.27}$$

O interese espertado polo traballo de Lebesgue reside non no seu desenvolvemento da teoría da medida, que pódese considerar unha simple extensión das ideas de Borel, se non na súa integral, desenvolta a partir da teoría xa exposta.

O seu primeiro paso é o seu estudo da integral de Riemann, a través do cal Lebesgue achega unha xeneralización xeométrica da noción de integral:

Definición 3.17. Sexa f acotada en $[a, b]$ e sexa E_f o recinto limitado pola gráfica de f. Se E_f (e polo tanto, E_f^+, E_f^- tamén) é medible, pode definirse a integral de f:

$$\int_a^b f = m(E_f^+) - m(E_f^-). \tag{3.28}$$

E define de maneira análoga as integrais inferior e superior.

A súa seguinte achega é unha definición alternativa da súa integral: no canto de particionar o intervalo sobre o cal se define a función f, divide a súa imaxe. Dados m, M cumprindo que $m \leq f \leq M$, e dada (a_n) unha partición de $[m, M]$, definimos entón

$$E_i = \{x \colon a_i \leq f(x) \leq a_{i+1}\}. \tag{3.29}$$

É fácil ver que E_f está comprendido entre os rectángulos de base E_i, altura a_i e os de base E_i e altura a_{i+1}, de onde se deduce que a súa medida está entre

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i m(E_i) \leq m(f) \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1} m(E_i). \tag{3.30}$$

Se tomamos $||P||$ como a norma da partición (a_n), podemos escribir que

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1} m(E_i) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i m(E_i) \leq ||P||(b - a), \tag{3.31}$$

co cal, asumindo que E_i é medible para cada un dos i, lévanos a que

$$\int_a^b f = \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a_i m\left(E_i\right) = \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} m\left(E_i\right) \tag{3.32}$$

De feito, Lebesgue proba que, de ser f Lebesgue-integrable, o conxunto

$$\{x\colon f(x) > r\} \tag{3.33}$$

é medible para todo $r \in \mathbb{R}$, de onde é doado comprobar que os E_i son medibles.

Lebesgue chama a estas funcións **funcións medibles**. Podemos polo tanto afirmar que Lebesgue demostrou que, dada unha función medible e acotada, esta función é integrable, e a súa integral ten o valor 3.32. Esta nova definición permite a Lebesgue probar as propiedades usuais da integral e atopar algunhas novas, entre as que destaca a posibilidade de integrar, entre outras, a función de Dirichlet, que era ata entón o contraexemplo modelo. De feito, é interesante notar que Lebesgue proba que todas as funcións á súa disposición son medibles, e non é capaz de construír unha función non medible. Por outra banda Lebesgue atopa, utilizando a súa definición de conxunto medible, que unha función é Riemann-integrable cando o seu conxunto dos seus puntos de descontinuidade ten medida cero, o cal permítelle construír todas as funcións Lebesgue-integrables que non sexan integrables no sentido de Riemann que necesite.

O segundo teorema de Cauchy (3.3) é unha vez máis reformulado, agora por Lebesgue co obxectivo de encadrarlo na súa teoría. Así:

Teorema 3.18. *Sexa f unha función medible. Se existe f' e é acotada en $[a, b]$, entón f' é integrable no intervalo, e*

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a). \tag{3.34}$$

Teorema 3.19. *Sexa (f_n) unha sucesión de funciones medibles e uniformemente acotadas sobre E conxunto medible. Se (f_n) converxe puntualmente a f en E, entón*

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n. \tag{3.35}$$

O seu seguinte paso no desenvolvemento da súa integral foi definir as integrais de funcións medibles, acotadas ou non, definidas no intervalo $(-\infty, \infty)$, coa condición de que 3.32 converxa absolutamente, o cal implica que f é integrable se, e só se, o é $|f|$. Demostra a maiores que

$$\lim_{a\to\infty} \int_{\{x:\, |f(x)|>a\}} |f| = 0, \tag{3.36}$$

co cal aborda 3.3 para funcións non acotadas:

Teorema 3.20. *Sexa f' finita, f' é integrable se, e só se, f é de variación acotada. Nese caso,*

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a). \tag{3.37}$$

Pouco despois Lebesgue fixo uso destes avances para, en 1904, atacar o problema da integración asignando a cada función f acotada en $[a, b]$ un número $\int_a^b f \in \mathbb{R}$ e presentar a súa teoría de forma axiomática [7].

Nesta formulación axiomática Lebesgue implica dous feitos importantes:

$$\int_a^b kf = k \int_a^b f, \text{ sendo } k \in \mathbb{R}, \tag{3.38}$$

e

$$\int_a^b 1 = b - a, \tag{3.39}$$

de onde se conclue que a única difinición posible para $\int \chi_E$, sendo E medible, é $m(E)$. Comprobamos así que a evolución da integral e a da medida transcurren en todo momento de forma paralela.

3.8. Outras Adaptacións e Usos da Medida

Coma xa mencionamos antes, Lebesgue traballou principalmente en $\mathbb{R}$. Foron diversos matemáticos posteriores os que estenderon os seus resultados a dominios máis xerais, comezando por áreas ($\mathbb{R}^2$) e volumes ($\mathbb{R}^3$) e máis adiante a calquera $\mathbb{R}^n$ con n natural. Esta insistencia básase en parte na boa compatibilidade entre a medida de Lebesgue e outras ferramentas de traballo en $\mathbb{R}^n$, coma as propiedades de conxuntos abertos e pechados.

Ademais, a medida de Lebesgue non foi nin por asomo a última etapa no desenvolvemento da teoría da medida. Diversos modelos foron aparecendo, aplicables a distintos conxuntos, incluíndo X arbitrarios. Un exemplo notable é o traballo de Kolmogorov, que aplicou as capacidades da medida de Lebesgue ao intervalo $[0, 1]$ para o cálculo de probabilidades.

3.9. Concepto Actual da Medida

Revisemos brevemente o concepto actual de medida obtido pola evolución constante representada neste traballo. Para isto, imos primeiro a definir o concepto de σ-álxebra, posto que é o entorno no cal búscase definir as medidas actualmente.

Definición 3.21. Dado un conxunto $X \neq \emptyset$, dicimos que $M \subseteq \mathbb{P}(X) = \{A/A \subseteq X\}$ é unha σ-álxebra sobre X cando cumpre que:

- $\emptyset \in M$.
- $A \in M \Rightarrow X \backslash A \in M$.
- $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in M$.

Parte da interese nesta definición débese a que, en ocasións, o conxunto $\mathbb{P}(X)$ (sempre unha σ-álxebra) é máis complicado de traballar do que realmente é necesario nese caso, e noutras é necesaria a posibilidade dun entorno maior ao habitual, aínda que non se utiliza con tanta frecuencia.
Plasmamos agora o concepto actual de medida:

Definición 3.22. Dada M unha σ-álxebra sobre X, chamaremos á función

$$\mu \colon M \longrightarrow [0, \infty] \tag{3.40}$$

unha medida se:

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- Para $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ cumprindo que $A_i \cap A_j = \emptyset$ cando $i \neq j$,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right). \tag{3.41}$$

Nun principio, a medida parece requerir cumprir unha serie de condicións intuitivas:

- Un conxunto baleiro debe ter medida nula.
- A medida de calqueira conxunto debe ser non negativa.
- Para dous conxuntos disxuntos, a medida da súa unión é a suma das súas medidas. Esta propiedade exténdese a unha suma numerable de conxuntos.

Se definísemos

$$\mu\colon U \in M \longrightarrow \mu(U) \in [0, \infty] \tag{3.42}$$

medida, estas condicións tradúcense a:

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- $\mu(U) \geq 0$.
- Sexan U_i tales que $i \in \mathbb{N}$, e $U_i \cap U_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Entón

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(U_i). \tag{3.43}$$

Non obstante, aparecen dificultades con respecto ao cumprimento destas condicións, sendo un exemplo habitual de ditas trabas o conxunto de Vitali para as medidas en $\mathbb{R}$, particularmente a de Lebesgue. Buscáronse varias definicións de medida, mais vendo que sempre aparecía algún conxunto non medible, a solución para evitar imprevistos foi definir cada medida para unha serie de conxuntos, tantos coma fose posible.

3.9.1. A Medida de Lebesgue no entorno actual

Verifiquemos agora que a medida de Lebesgue, e en concreto a súa extensión a $\mathbb{R}^n$ (levada a cabo por matemáticos posteriores), cumpre as condicións necesarias para ser unha medida propia. Isto é, 3.9.

Imos comezar vendo que a medida exterior de Lebesgue, m, non é suficiente. Se a m fose unha medida, todos os conxuntos de $\mathbb{R}$ serían Lebesgue medibles (por (3.24)), o cal, asumindo o Axioma da Elección, contradí diversos exemplos de conxuntos non medibles, coma podemos ver no traballo de Rudin [10, Th. 2.22 e corolario].

Vexamos que é unha medida exterior[2]:

[2]Definimos o concepto de medida exterior como:

Definición 3.23. Dado un conxunto X, chamaremos á función

$$m\colon \mathbb{P}(X) \longrightarrow [0, \infty] \tag{3.44}$$

unha medida exterior sobre X se:

- Para $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{P}(X)$

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m\left(A_n\right). \tag{3.45}$$

- $m(\emptyset) = 0$.
- $A \subseteq B \subset X \Rightarrow m(A) \leq m(B)$.

Dado

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{R}^n) \tag{3.46}$$

e sexa $\varepsilon > 0$ arbitrariamente fixado, existe para cada $i \in \mathbb{N}$ un recubrimento por cubos $\{C_{i,j}\}_{j=1}^{\infty}$ cumprindo que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(C_{i,j}) < m(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}. \tag{3.47}$$

É claro que $\{C_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$ é entón un recubrimiento de $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$. Polo tanto,

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(C_{i,j}) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(C_{i,j})\right) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left(m(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) + \varepsilon, \tag{3.48}$$

co cal se cumpre a primeira condición de medida exterior, sendo as outras dúas validas por definición. Podemos entón utilizar:

Proposición 3.24. *$A \subseteq X$ é medible se, para calquera $B \subseteq X$,*

$$m(B) = m(B \cap A) + m(B \cap A^c). \tag{3.49}$$

Vexamos agora que a hoxe chamada medida de Lebesgue si é medida coa axuda do teorema de extensión de Carathéodory.

Teorema 3.25 (Teorema de Extensión de Carathéodory)**.** *Sexa m unha medida exterior. Entón defínese*

$$M = \{A \subseteq X,\ \textit{tal que } A \textit{ medible}\}\,; \quad \mu\,|_M, \tag{3.50}$$

sendo M unha σ-álxebra e μ unha medida.

Aplicandolle dito Teorema á medida exterior de Lebesgue obteñense L, a σ-álxebra, e μ, a medida de Lebesgue, cuxas propiedades son:

a) $A_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_i > a\} \in L$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

b) Todo cubo $C \subset \mathbb{R}^n$ é medible, e a súa medida é $m(C) = \mu(C) = \mathrm{Vol}(C)$.

c) Todos os conxuntos abertos son medibles. Todos os conxuntos pechados son medibles.

Aínda que podería ser de interese estudar a relación entre os pasos intermedios no desevolvemento de medida e o concepto actual, esta e outras ideas escapan do alcance de este traballo, posto que a maior parte delas limítase a unha formalización e restruturacións: por exemplo, o feito de trasladar a definición de medida á σ-álxebra.

Bibliografía

[1] F. BOMBAL *La teoría de la medida: 1875-1925. Seminario de Historia de la Matemática I*, Universidad Complutense de Madrid, pág 107-144.

[2] E. BOREL *Leçons sur les fonctions entières*, Gauthier-Villars, 1900.

[3] S. B. CHAE *Lebesgue integration*, Springer Science & Business Media, 1995.

[4] J. M. CHILD *The geometrical lectures of Isaac Barrow*, Chicago and London, 1916.

[5] C. H. EDWARDS, JR., *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, 1979.

[6] T. L. HEATH, *A Manual of Greek Mathematics*, Oxford University Press, 1931.

[7] H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Vol. 267. American Mathematical Soc., 2003.

[8] I. N. PESIN, *Classical and Modern Integration Theories*, Academic Press, 1971.

[9] B. RIEMANN *On the representation of a function by a trigonometric series*, 1854, as ch. XII of *Bernhard Riemann Collected Papers*, BAKER, ROGER, CHARLES CHRISTENSON, AND HENRY ORDE, 2004.

[10] W. RUDIN *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Editions, 1987.

[11] H. J. SMITH *On the integration of discontinuous functions*, Proceedings of the London Mathematical Society 6, 1875, pág 140-153.

[12] D. J. STRUIK, *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Cambridge MA: Harvard University Press, 1969.