



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Introducción a la Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales

Aida Vázquez Pardo

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Introducción a la Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales

Aida Vázquez Pardo

Julio, 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Trabajo propuesto

|   |
|---|
| <b>Área de Coñecemento: Análisis Matemático</b>   |
| <b>Título: Introducción a la Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales</b>   |
| <b>Titora/Cotitora: M. Victoria Otero Espinar/Érika Diz Pita</b>  |
| <b>Breve descripción do contido</b>   |
| Las ecuaciones diferenciales son una herramienta fundamental en la modelización de multitud de problemas, pero muchas veces son difíciles o imposibles de resolver, por lo que es importante disponer de otras herramientas que nos proporcione información sobre el comportamiento de los sistemas. En este trabajo se abordará el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias en el plano mediante el uso de técnicas cualitativas que permitan comprender el sistema. El objetivo principal será el estudio del comportamiento de las órbitas en entornos de las singularidades. Se estudiarán y se presentarán los resultados relativos a las singularidades elementales y se introducirán las técnicas adecuadas para las no elementales. Los resultados estudiados se aplicarán a distintos modelos matemáticos. |
| <b>Recomendacións</b>   |
| Haber cursado la asignatura de “Ecuaciones Diferenciales Ordinarias”  |



*“Un científico digno de ese nombre, sobre todo un matemático, experimenta en su trabajo la misma impresión que un artista; su placer es tan grande y de la misma naturaleza.”*

Henri Poincaré (s. XIX)



## Agradecimientos

Para comenzar, me gustaría agradecer a mi familia, en especial a mis padres, Roberto Vázquez Cacabelos y M<sup>a</sup> Oliva Pardo Puente, y a mi hermana Paula Vázquez Pardo. A ellos les doy las gracias por brindarme la oportunidad de estudiar esta carrera, por estar en todo momento a mi lado, apoyándome y sacándome una sonrisa en los momentos más difíciles de la carrera. Han sido cinco años de esfuerzo, pero como se suele decir todo esfuerzo tiene su recompensa y, ahora, me gustaría agradecerles a ellos todos sus ánimos y su orgullo por este trabajo de fin de grado.

Una vez dadas las gracias a los más cercanos, me gustaría agradecer a mi tutora, M. Victoria Otero Espinar, y a mi cotutora, Érika Diz Pita, por apoyarme en la realización de este trabajo. Sus consejos y su ayuda han sido muy importantes para mi. En todo momento se han preocupado por la evolución del trabajo y por mi estado de salud y el de mis allegados durante esta cuarentena. Me ha dado un poco de pena no poder pasar más tiempo juntas en el despacho y realizar en su lugar videoconferencias, pero a pesar de ello, me gustaría decirles que ambas sois un ejemplo a seguir. La realización de este trabajo no habría sido posible sin vuestra ayuda.

Finalmente, me gustaría agradecer a todos mis amigos de la facultad, en especial a Manuel Vázquez Mourazos y Ángel Martínez González. Ambos me habéis ayudado a lo largo de mis años en la carrera, bien sea con ejercicios de programación o con la Topología. Me habéis prestado un gran apoyo moral durante estos años en la facultad y este trabajo tampoco sería posible sin vuestro apoyo.



# Índice general

|  |             |
|--|-------------|
| <b>Resumen</b>   | <b>XI</b>   |
| <b>Introducción</b>  | <b>XIII</b> |
| <b>1. Resultados básicos de ecuaciones diferenciales</b>         | <b>1</b>    |
| 1.1. Campos vectoriales y flujo . . . . .                        | 1           |
| 1.2. Diagrama de fases entorno a un punto regular . . . . .      | 4           |
| 1.3. Clasificación de las singularidades de un sistema . . . . . | 6           |
| 1.4. Diagrama de fases entorno a una singularidad . . . . .      | 8           |
| 1.5. Elementos esenciales de un diagrama de fases . . . . .      | 10          |
| <b>2. Singularidades hiperbólicas y semihiperbólicas</b>         | <b>13</b>   |
| 2.1. Teorema de las singularidades no degeneradas . . . . .      | 14          |
| 2.2. Teorema de las singularidades semihiperbólicas . . . . .    | 19          |
| 2.3. Ejemplos . . . . .  | 21          |
| <b>3. Compactificación de Poincaré</b>                           | <b>29</b>   |
| 3.1. Construcción de la compactificación . . . . .               | 29          |
| 3.2. Diagrama de fases en el disco Poincaré . . . . .            | 32          |
| <b>4. Aplicaciones</b>   | <b>49</b>   |
| 4.1. Modelo para el latido del corazón . . . . .                 | 49          |
| 4.2. Modelo de FitzHugh-Nagumo para una neurona . . . . .        | 52          |
| 4.3. Modelo de Selkov . . . . .                                  | 56          |
| <b>Bibliografía</b>  | <b>65</b>   |
| <b>Índice alfabético</b>   | <b>67</b>   |



## Resumen

La Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales es, en la actualidad, una de las herramientas más importantes en el estudio de las ecuaciones diferenciales, especialmente cuando son difíciles o imposibles de resolver. En este trabajo de fin de grado damos una introducción a esta rama de las matemáticas, centrándonos en el estudio de los diagramas de fases de sistemas autónomos definidos en el plano.

En primer lugar, se introducen los conceptos y resultados básicos más importantes en la Teoría cualitativa. Después se presentan dos teoremas que determinan el comportamiento de las órbitas de un sistema en un entorno de las singularidades no degeneradas y semihiperbólicas. También se presenta la llamada compactificación de Poincaré, que nos permite dibujar el diagrama de fases global de un sistema de ecuaciones diferenciales plano en una región delimitada del plano, el disco de Poincaré. Para finalizar, se incluyen algunas aplicaciones de la Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales al campo de la biología. Se presenta un modelo que representa el latido del corazón, otro que define el potencial de acción de una neurona y finalmente el modelo de la glucólisis de Selkov, con un estudio cualitativo en el disco de Poincaré.

## Abstract

The Qualitative Theory of Differential Equations is currently one of the most important tools in the study of differential equations, especially when they are difficult or impossible to solve. In this final degree project we give an introduction to this field of mathematics, focusing on the study of phase portraits of autonomous systems defined in the plane.

First of all, the most important basic concepts and results of the qualitative theory are introduced. Then two theorems that determine the behavior of the orbits of a system in an environment of non-degenerate and semi-hyperbolic singularities are presented. The so-called Poincaré compactification is also presented, which allows us to draw the global

phase portrait of a system of plane differential equations in a limited region of the plane, the Poincaré disk. Finally, some applications of the Qualitative Theory of differential equations to the field of biology are included. We present a model that represents the heartbeat, another that defines the action potential of a neuron and finally the Selkov glycolysis model, with a qualitative study on the Poincaré disk.

# Introducción

La Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales constituye una de las herramientas más importantes en el estudio de un sistema diferencial. Es la rama del cálculo diferencial que estudia el comportamiento de las órbitas de un sistema, en especial, cuando es difícil o imposible de resolver. Una de las preguntas que se puede plantear el lector es la siguiente: ¿cómo surgen las ecuaciones diferenciales y la Teoría cualitativa? Trataremos de responder a esta pregunta basándonos en los trabajos de M. Kline[1] y J. Benítez [2].

Las ecuaciones diferenciales ordinarias surgieron a finales del siglo XVII como un intento de resolver determinados problemas físicos y a mediados del siglo XVIII el estudio de las ecuaciones diferenciales se convierte en una rama nueva de la matemática. Los primeros trabajos relacionados con las ecuaciones diferenciales aparecieron, al igual que ocurrió con el cálculo infinitesimal, en cartas enviadas de un matemático a otro y en diversas publicaciones, algunas de las cuales reúnen los textos de las cartas. Cabe destacar que, en esa época, se utilizaba terminología física, de forma que dada  $x(t)$  la posición una partícula en el tiempo  $t$ , se cumple que  $dx/dt$  es la llamada velocidad de dicha partícula en el tiempo  $t$ .

Jacques Bernoulli fue uno de los primeros matemáticos en aplicar el cálculo infinitesimal a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. En el año 1690 propuso encontrar la curva que forma una cuerda flexible, inextensible y sujeta a dos puntos fijos. Leibniz denominó catenaria a dicha curva mientras que Galileo afirmaba que la curva era una parábola. En el año 1691, Jean Bernoulli, Leibniz y Huygens publicaron en la revista *Actas* soluciones de forma independiente y cada uno de ellos utilizando diferentes métodos: Huygens empleó métodos geométricos, mientras que Leibniz y Bernoulli emplearon métodos relacionados con el cálculo infinitesimal. Justo en ese mismo año, Leibniz formuló la llamada técnica de separación de variables, y simplificó la ecuación  $dy/dx = f(y/x)$  obteniendo una ecuación separable de primer orden. Poco después, en el año 1693, Huygens escribe acerca del concepto de ecuación diferencial de forma explícita y Leibniz da una descripción de las ecuaciones diferenciales comentando que son funciones de elementos de un triángulo

característico, ambos en la misma revista, *Acta Eruditorum*. Posteriormente, en el año 1693 y de forma independiente, Leibniz y Jean Bernoulli examinaron el problema de buscar una familia de curvas que cortan a otra familia dada con un ángulo dado, obteniendo una solución en el año 1694.

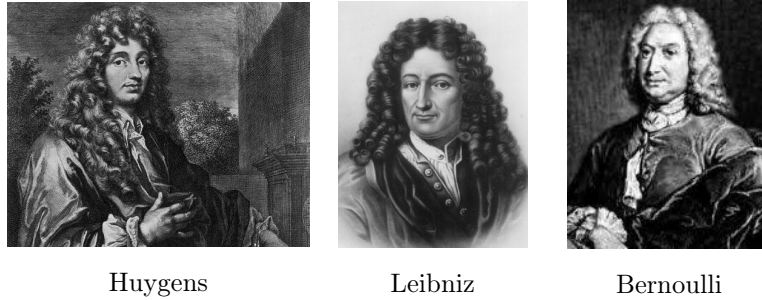


Figura 1: Principales exponentes de las ecuaciones diferenciales en el siglo XVII.

Los llamados sistemas de ecuaciones diferenciales surgen como necesidad de analizar algunos sistemas físicos, poniendo especial interés en los sistemas astronómicos. Por ejemplo, el problema del movimiento de  $n$  cuerpos moviéndose uno bajo la acción gravitatoria de los otros, con  $n \geq 2$ , es el de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, que se reduce, con frecuencia, a resolver una única ecuación. Dicho problema fue estudiado por Euler, Lagrange y Laplace, de forma independiente y con resultados parciales. En general, estos sistemas no tienen un método general con el que resolverlos, por lo que los matemáticos se centraron en los llamados sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, que aparecieron, por primera vez, con el estudio de los sistemas de muelles gracias a la llamada Ley de Hooke. Laplace elaboró un método de resolución de este tipo de sistemas, publicado en el ensayo *Théorie analytique des probabilités* [3] en el año 1812 y actualmente conocido como la transformada de Laplace.



Leonard Euler Joseph-Louis Lagrange Pierre Simon Laplace

Figura 2: Principales exponentes de las ecuaciones diferenciales en el siglo XVIII.

Debido a la dificultad de encontrar métodos para resolver ecuaciones diferenciales, surge la pregunta siguiente: ¿dada una ecuación diferencial cualquiera, existe solución para unas condiciones de frontera e iniciales determinadas? Esta pregunta se ignoró durante muchos años, pues se suponía que tenían solución de forma intuitiva, ya que las ecuaciones diferenciales procedían de problemas físicos y geométricos para los que se sabía que existía solución. Es entonces, a principios del siglo XIX, cuando Cauchy probó la existencia de solución de la ecuación diferencial  $\dot{y} = f(x, y)$ , resumido en sus *Exercises d'analyse* [4]. En el año 1890, Picard creó un método de aproximaciones sucesivas que establece la existencia y unicidad de solución de ecuaciones diferenciales de orden  $n > 0$ . Poco después, se introducen los conceptos y notación algebraica que se usan en la actualidad, tales como, la matriz del sistema, la forma canónica de Jordan o la diagonalización de matrices, todo lo anterior junto a la notación vectorial introducida por Cauchy. A mediados de este siglo, los matemáticos se centraron más en el estudio de las soluciones en entornos de los puntos singulares. Aquí el trabajo de Gauss sobre series hipergeométricas jugó un papel importante. Los principales impulsores fueron Lazarus Fuchs, Riemann, Briot y Bouquet.



Augustin Louis Cauchy



Charles-Émile Picard

Figura 3: Principales exponentes de la existencia y unicidad de solución de ecuaciones diferenciales.

A finales del siglo XIX el estudio de las ecuaciones diferenciales se centra más en aquellas que son no lineales y surge el nacimiento de la llamada Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, tema principal de este trabajo de fin de grado. Poincaré fue el gran impulsor de este tema, basándose en el trabajo de Hill e intentando buscar soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales que definan movimientos de los planetas además de estudiar la estabilidad de sus órbitas. Su idea era establecer métodos que permitiesen resolver los problemas de ecuaciones diferenciales sin resolverlas, solo analizando las mismas y buscaba responder la pregunta enunciada en términos astronómicos: «¿la órbita que describe un planeta o un satélite dado es estable o inestable?». Poincaré analizó las ecuaciones no lineales que toman la expresión  $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$  con  $P$  y  $Q$  funciones analíticas

en las variables  $x$  e  $y$  y cuya solución toma la expresión  $f(x, y) = 0$ , determinando así un sistema de trayectorias, por lo que se puede considerar las formas paramétricas  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ . Poincaré observó que los puntos en los que se anulan las funciones analíticas  $P$  y  $Q$ , a la vez, eran de especial importancia y, apoyándose en los trabajos anteriores de Briot y Bouquet sobre puntos singulares y restringiéndose al caso real, analizó 4 tipos de puntos singulares y especificó el comportamiento de soluciones entorno a dichos puntos: *foyer* (foco), *cols* (punto de silla), *noeuds* (nodo) y *centre* (centro). Para englobar el estudio de estas singularidades, proyectó el plano  $(x, y)$  sobre una esfera desde el centro de la misma que suponemos tangente al plano [5]. Este trabajo dio lugar a lo que actualmente conocemos como compactificación de Poincaré. También descubrió que existe un tipo de curvas cerradas que no tocan a ninguna de las trayectorias de una ecuación diferencial dada, llamadas ciclos sin contacto. Además de los ciclos sin contacto, también estudió los llamados ciclos límite, es decir, aquellas curvas cerradas que verifican una ecuación diferencial y para las cuales otras soluciones se aproximan de forma asintótica. Después de Poincaré, el trabajo de la Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales y de la búsqueda de soluciones de la ecuación  $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$  se debe a Ivar Bendixson, quien introdujo, en [6], un método para el cuál se determina que en algunas regiones no existen trayectorias cerradas. Este resultado se conoce actualmente como Teorema de Poincaré-Bendixson.



Henri Poincaré



Ivar Bendixson

Figura 4: Principales exponentes de la Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales.

A partir del siglo XX, el interés por las ecuaciones no lineales y la Teoría cualitativa aumentan, aplicándose a campos como la astronomía, la física, sistemas mecánicos y eléctricos, biología o incluso a la medicina. Una aplicación a la biología es el llamado modelo depredador-presa de Lotka-Volterra, que determina cómo evoluciona la interacción entre especies a lo largo del tiempo (consultar los artículos [16] y [17]). Otro ejemplo de aplicación a la biología es el llamado modelo de la glucólisis de selkov (véase el artículo [14]). Un modelo físico puede ser el de la llamada Ecuación de Van der Pol que representa el

movimiento de un oscilador con amortiguamiento no lineal con el paso del tiempo (véase el artículo [18]). Con respecto a las aplicaciones de la medicina, cabe destacar los llamados modelos epidemiológicos que utilizan un sistema de ecuaciones diferenciales que modele una determinada enfermedad para ver cómo evoluciona ésta con el paso del tiempo. Un ejemplo de modelo epidemiológico es el llamado modelo SIR, cuyas iniciales significan susceptibles, infectados y recuperados (véase el artículo [19]). En la actualidad estos modelos son de especial interés y se están utilizando para ver cómo evoluciona el coronavirus (véase el artículo [20]).

Tal y como se ha comentado al inicio de la introducción, la Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales es una rama de las matemáticas amplia y que sigue utilizándose en la actualidad. En este trabajo se dará una introducción a esta rama de las matemáticas, y se centrará en el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos definidos en el plano.

Para empezar, en el primer capítulo se introducirán los conceptos y resultados básicos de la Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, centrándonos en aquellos que nos permitan construir los diagramas de fases de los sistemas planos, lo que constituye el objetivo de este trabajo de fin de grado. En primer lugar se recogen conceptos básicos relativos a los campos vectoriales y flujos y se introduce el concepto de equivalencia topológica para el estudio topológico de los diagramas de fases de un sistema. Después, se estudia el comportamiento de los sistemas en entornos de puntos regulares. En las siguientes secciones nos dedicaremos al estudio de las singularidades, estudiando su clasificación y los diagramas de fases locales. Para finalizar el capítulo, se incluyen los elementos esenciales de un diagrama de fases.

En el segundo capítulo, se enuncian dos teoremas que permiten el estudio de las órbitas de un sistema de ecuaciones diferenciales en un entorno de las singularidades que analizaremos en el trabajo, las no degeneradas (hiperbólicas y centro lineal) y las semihiperbólicas. Para terminar el capítulo, se incluyen varios ejemplos para ver cómo se aplican los teoremas.

En el siguiente capítulo, se construye la compactificación de Poincaré, que indica cómo es el diagrama de fases global de un sistema, permitiéndonos representarlo en una región limitada del plano, que llamaremos disco de Poincaré y se incluyen varios ejemplos de sistemas de ecuaciones diferenciales para los que estudiamos sus diagramas de fases globales en el disco de Poincaré.

Finalmente, el trabajo concluye en el cuarto capítulo, donde se introducen algunas aplicaciones de la Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. Se presenta un modelo que representa el latido del corazón, otro que define el potencial de acción de una neurona y finalmente el modelo de la glucólisis de Selkov, con un estudio cualitativo en el disco de Poincaré.

Por mi parte, espero que la lectura de este trabajo resulte satisfactoria. Con él, deseo transmitir la importancia de esta rama actual de las matemáticas que se utiliza para ver cómo se comporta un sistema de ecuaciones sin necesidad de resolverlo. Como he comentado anteriormente, las aplicaciones de la Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales van desde la física hasta la medicina, por lo que en mi opinión, es importante destacar la importancia de las aplicaciones matemáticas como es el caso de este trabajo de fin de grado. Espero que su lectura transmita la enorme curiosidad que he sentido a la hora de buscar estas aplicaciones y el valor de resaltar las mismas.

# Capítulo 1

## Resultados básicos de ecuaciones diferenciales

En este capítulo se introducirán algunos conceptos y resultados básicos de la Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, centrándonos en aquellos que nos permitan construir los diagramas de fases de los sistemas planos, lo cual constituye el objetivo principal de este trabajo de fin de grado.

En la primera sección se recogen algunas nociones básicas relativas a los campos vectoriales y flujos, incluyendo la noción de equivalencia topológica que permite clasificar topológicamente los diagramas de fases de un sistema. El comportamiento de los sistemas en entornos de puntos regulares se estudia en la Sección 2. Las Secciones 3 y 4 se dedican al estudio de las singularidades, estudiando primero su clasificación y después los diagramas de fases locales. Para finalizar, en la Sección 5 se introducen los elementos esenciales de un diagrama de fases.

### 1.1. Campos vectoriales y flujo

**Definición 1.1.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^2$  un subconjunto abierto del plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$ . Un **campo de clase  $\mathcal{C}^r$**  en  $A$  es una aplicación  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$  que asocia a cada  $x \in A$  un vector  $F(x) \in \mathbb{R}^2$ . La ecuación diferencial asociada a dicho campo vectorial es

$$\dot{x} = F(x), x \in A. \tag{1.1}$$

Dicha ecuación no depende de la variable  $t$ , por lo que la ecuación diferencial es **autónoma** y sus soluciones son aplicaciones diferenciables  $\varphi: I \rightarrow A$  tales que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t) = F(\varphi(t)), \forall t \in I,$$

siendo  $I \subset \mathbb{R}$  el intervalo de definición de dicha solución.

*Observación 1.2.* En la definición (1.1),  $r$  puede ser un número natural,  $+\infty$  o  $\omega$ . La notación  $\mathcal{C}^\omega$  se utiliza para las funciones que son analíticas, es decir, para aquellas funciones que se pueden expresar como una serie de potencias convergente.

**Definición 1.3.** Un **punto singular**, o una **singularidad**, es un punto  $x \in A$  verificando que  $F(x) = 0$ . En caso contrario, se dice que el punto es **regular**.

**Definición 1.4.** La solución  $\varphi: I \rightarrow A$  de la ecuación (1.1), pasando por el punto  $(0, x_0) \in \Omega = \{(t, x): t \in I_x, x \in A\}$ , se dice **maximal** si para cada solución  $\psi: J \subset I \rightarrow A$  verificando que  $\psi(0) = x_0$  se tiene que  $\varphi = \psi$ . En otras palabras, una solución es maximal si su intervalo de definición no se puede extender.

*Observación 1.5.* Dada una solución maximal de la ecuación diferencial (1.1) pasando por el punto  $(0, x_0)$ , se denotará por  $I_{x_0}$  al intervalo de definición de dicha solución maximal.

**Definición 1.6.** Sea  $F: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial definido en el abierto  $A$ . Se dice que  $F$  es **Lipschitziana** si existe una constante  $L > 0$ , llamada constante de Lipschitz, de forma que se cumple la siguiente desigualdad para todo  $x, y \in A$ :

$$|F(x) - F(y)| \leq L|x - y|.$$

Se dice que  $F$  es **localmente Lipschitziana** en el abierto  $A \subset \mathbb{R}^2$  si para cada punto  $x_0 \in A$ , existe  $V \subset A$  un entorno abierto verificando que la aplicación  $F|_V: V \rightarrow \mathbb{R}^2$  es lipschitziana.

Se enunciará, a continuación, un resultado importante en el estudio de las ecuaciones diferenciales, que asegura la existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial, y cuya demostración se puede encontrar, por ejemplo, en [9].

**Teorema 1.7** (Picard-Lipschitz). *Sea  $F: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  continua y lipschitziana en el abierto  $A$ . Entonces existe solución única  $\varphi_{x_0}: I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^2$  pasando por el punto  $(t_0, x_0)$  definida en el intervalo maximal  $I_{x_0}$ .*

**Definición 1.8.** Se llama **flujo** del campo vectorial definido en (1.1) a la aplicación de clase  $\mathcal{C}^r$ :

$$\begin{aligned} \varphi: \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, x) &\mapsto \varphi(t, x) = \varphi_x(t), \end{aligned}$$

siendo  $\varphi_x(t)$  la solución maximal de la ecuación (1.1) pasando por el punto  $x \in A$ ,  $I_x$  el intervalo de definición de dicha solución maximal y  $\Omega = \{(t, x): t \in I_x, x \in A\}$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^3$ .

*Observación 1.9.* En caso de que  $I_x = \mathbb{R}$  para cada  $x \in A$ , el flujo generado por el campo vectorial  $F$  está definido en el conjunto abierto  $\Omega = \mathbb{R} \times A$ .

**Teorema 1.10** (Propiedades de flujo). *Si  $y = \varphi_x(t)$  y  $t \in I_x$ , entonces se cumple que  $I_y = I_x - t = \{r - t : r \in I_x\}$  y la solución de la ecuación (1.1) pasando por  $y$  es  $\varphi_y(s) = \varphi_x(t + s)$ .*

La demostración del teorema anterior puede encontrarse en [8].

**Definición 1.11.** Sea  $\varphi: I_{x_0} \rightarrow A$  solución maximal de la ecuación (1.1) pasando por el punto  $(0, x_0)$ . Se llama **órbita** de la solución, **trayectoria** o **curva integral (máxima)** a la imagen asociada a la función  $\varphi$ .

Existen tres tipos de órbitas de la solución de una ecuación diferencial: singularidades, órbitas homeomorfas a un intervalo y órbitas periódicas.

**Definición 1.12.** La órbita asociada a la solución maximal  $\varphi: I \rightarrow A$  de la ecuación  $\dot{x} = F(x)$  se dice **periódica** si existe un real  $c > 0$  verificando que  $\varphi_{x_0}(t+c) = \varphi_{x_0}(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , siendo  $\varphi_{x_0}$  la solución maximal pasando por el punto  $x_0 \in A$ .

*Observación 1.13.*  $\gamma^+(q) = \{\varphi(t, q) : t > 0, t \in I_x\}$  y  $\gamma^-(q) = \{\varphi(t, q) : t < 0, t \in I_x\}$  denotan a las semiórbitas positiva y negativa de  $\varphi$  en el punto  $q$ , respectivamente.

**Definición 1.14.** Se llama **diagrama de fases** de un campo vectorial  $F: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  al conjunto de todas las singularidades y órbitas regulares orientadas de acuerdo con las soluciones maximales que las describen.

Para representar el diagrama de fases de un sistema será suficiente con dibujar algunas órbitas del sistema. A continuación, se introducen algunos conceptos que permiten realizar una clasificación de los campos vectoriales desde el punto de vista topológico para comparar sus diagramas de fases.

**Definición 1.15.** Sean  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $G: B \rightarrow \mathbb{R}^2$  dos campos vectoriales definidos en los abiertos  $A, B \subset \mathbb{R}^2$ , respectivamente. Se dice que el campo vectorial  $F$  es **topológicamente equivalente** al campo vectorial  $G$  si existe un homeomorfismo  $h: A \rightarrow B$  que conserva órbitas y su orientación, esto es, la aplicación  $h$  lleva órbitas del campo vectorial  $F$  en órbitas del campo vectorial  $G$  conservando la orientación. Se llama **equivalencia topológica** a dicho homeomorfismo.

Sean  $\varphi: \Omega \rightarrow A$  y  $\psi: \tilde{\Omega} \rightarrow B$  los flujos asociados a los campos vectoriales  $F$  y  $G$ . Se dice que los campos  $F$  y  $G$  son **topológicamente conjugados** si existe un homeomorfismo  $h: A \rightarrow B$  verificando que  $h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x))$ , para todo  $(t, x) \in \Omega$ . En este caso, se

debe verificar que  $I_x = I_{h(x)}$ , es decir, que los intervalos de definición maximal de los flujos  $\varphi$  y  $\psi$  coincidan. El homeomorfismo  $h$  se llama homeomorfismo de conjugación o, también, **conjugación topológica**.

*Observación 1.16.* La conjugación y la equivalencia topológica establecen una relación de equivalencia entre los campos definidos en abiertos del plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$  y conservan los puntos críticos y las órbitas, es decir, llevan puntos críticos en puntos críticos y órbitas en órbitas.

**Definición 1.17.** Sea  $A \subset \mathbb{R}^2$  abierto y sea  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^r$ . Sea  $\varphi: I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p)) \rightarrow A$  la solución maximal de la ecuación diferencial definida por el campo  $F$  pasando por el punto  $p$ .

Cuando se cumple que  $\omega_+(p) = \infty$ , se define el  **$\omega$ -límite** del punto  $p$  como el siguiente conjunto:

$$\omega(p) = \{q \in A: \text{ existe } \{t_n\} \text{ verificando que } \{t_n\} \rightarrow \infty, \varphi(t_n) \rightarrow q \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}$$

De modo análogo, si  $\omega_-(p) = -\infty$ , se define el  **$\alpha$ -límite** del punto  $p$  como el siguiente conjunto:

$$\alpha(p) = \{q \in A: \text{ existe } \{t_n\} \text{ verificando que } \{t_n\} \rightarrow -\infty, \varphi(t_n) \rightarrow q \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}$$

**Definición 1.18.** Se define el **conjunto  $\omega$ -límite de una órbita**  $\gamma$  como el conjunto  $\omega(p)$  para cualquier punto  $p$  de la órbita  $\gamma$ . De modo análogo, se define el **conjunto  $\alpha$ -límite de una órbita**  $\gamma$  como el conjunto  $\alpha(p)$  para cualquier punto  $p$  de la órbita  $\gamma$ .

## 1.2. Diagrama de fases entorno a un punto regular

En esta sección, se enunciará el llamado Teorema del Flujo Tubular, que indica el comportamiento de las órbitas en un entorno de un punto no singular. Antes de enunciar el Teorema del Flujo Tubular, se define el concepto de sección y de sección transversal (local) de un campo vectorial y se enuncia el Teorema de la función inversa, útil para la demostración del Teorema del flujo tubular.

**Definición 1.19.** Sea  $F: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^r$  y sea  $\Delta$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}$ . Se dice que  $h: \Delta \rightarrow A$  es una **sección transversal local** del campo  $F$  si para cada  $a \in \Delta$  se cumple que  $h'(a)$  y  $F(h(a))$  son linealmente independientes, es decir, si la matriz  $(F(h(a))|h'(a))$  es invertible. Sea  $S = h(\Delta)$  con la topología inducida. Si  $h: \Delta \rightarrow S$  es un homeomorfismo, se dice que  $S$  es una **sección transversal** del campo  $F$ . Si  $x_0 \in \Delta$ , se dice que  $S$  es una **sección** en el punto  $x_0$ .

**Teorema 1.20** (función inversa). *Sea  $A \subset \mathbb{R}^2$  abierto,  $x_0 \in A$  y  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  tal que  $F(x_0) = y_0$  y tal que  $DF(x_0)$  es un isomorfismo, es decir,  $\det(DF(x_0)) \neq 0$ . Entonces, existen  $\alpha, \beta > 0$  y una aplicación continua  $G: B[y_0, \beta] \rightarrow B[x_0, \alpha]$  continuamente diferenciable en  $B(y_0, \beta)$  tal que:*

- $G(y_0) = x_0$ .
- $(F \circ G)(y) = y$ , para todo  $y \in B[y_0, \beta]$ .
- Si  $x' \in B[x_0, \alpha]$ ,  $y' \in B[y_0, \beta]$  son tales que  $F(x') = y'$ , entonces  $G(y') = x'$ .
- $DG(y) = [DH(G(y))]^{-1}$ .

Además, si  $F$  es de clase  $\mathcal{C}^r$  en  $A$ , entonces  $G$  es de clase  $\mathcal{C}^r$  en  $B(y_0, \beta)$ .

La demostración de este Teorema puede encontrarse en [10].

**Teorema 1.21** (del flujo tubular). *Sea  $p$  una singularidad del sistema de ecuaciones diferenciales definido por el campo de clase  $\mathcal{C}^r$ ,  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Sea  $h: \Delta \rightarrow S$  una sección transversal de clase  $\mathcal{C}^r$  del campo  $F$  verificando que  $h(0) = p$ . Entonces, existe  $V \subset A$  un entorno de  $p$  y un difeomorfismo de clase  $\mathcal{C}^r$ ,  $g: V \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B$ , siendo  $\epsilon > 0$  y  $B$  un intervalo abierto verificando las siguientes condiciones:*

- (1)  $g(S \cap V) = \{0\} \times B$ .
- (2)  $g: V \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B$  es una conjugación de clase  $\mathcal{C}^r$  entre  $F|_V$  y el campo vectorial constante  $G: (-\epsilon, \epsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por  $G = (1, 0)$ .

*Demostración.* Sea  $\varphi: \Omega \rightarrow A$  el flujo de  $F$ . Sea  $H: \{(t, u): (t, h(u)) \in \Omega\} \rightarrow A$  definido por  $H(t, u) = \varphi(t, h(u))$ . Observar que  $F$  envía líneas paralelas a curvas integrales del campo  $F$ . Se probará que  $H$  es un difeomorfismo local en un entorno del origen. Es suficiente con probar que  $DH(0, 0)$  es un isomorfismo. Para ello, veremos si  $H$  está en las condiciones del Teorema de la función inversa:

- $H(t, u) = \varphi(t, h(u))$  es de clase  $\mathcal{C}^r$  por composición (tanto el flujo  $\varphi$  como la sección transversal son de clase  $\mathcal{C}^\infty$ ).
- $H(0, 0) = \varphi(0, h(0)) = h(0) = p$ .
- Veamos, a continuación, si  $DH(0, 0)$  es un isomorfismo. Utilizando que  $\frac{d}{dt}\varphi(t, u) = H(\varphi(t, u))$ , se verifica que

$$D_1H(0, 0) = \frac{d}{dt}\varphi(t, h(0))|_{t=0} = H(\varphi(t, h(0)))|_{t=0} = H(\varphi(0, p)) = H(p)$$

Como  $\varphi(0, h(u)) = h(u)$  para todo  $u \in A$ , se cumple que  $D_2H(0, 0) = D_1h(0)$ . De este modo,  $DH_1(0, 0)$  y  $DH_2(0, 0)$  generan  $\mathbb{R}^2$  y, por lo tanto,  $DH(0, 0)$  es un isomorfismo.

Por el Teorema de la función inversa existe  $\epsilon > 0$  y un entorno  $B \subset \mathbb{R}$  del origen tal que  $H|_{(-\epsilon, \epsilon) \times B}$  es un difeomorfismo definido en un abierto  $V = H((-\epsilon, \epsilon) \times B)$ . Sea  $g = (H|_{(-\epsilon, \epsilon) \times B})^{-1}$ . Entonces, como  $H(0, u) = \varphi(0, h(u)) = h(u) \in S$  para todo  $u \in B$ , se verifica que  $g(S \cap V) = \{0\} \times B$ . Además,  $g^{-1}$  conjuga a los campos  $G$  y  $F$ :

$$Dg^{-1}(t, u)G(t, u) = DH(t, u)(1, 0) = D_1H(t, u) = F(\varphi(t, h(u))) = F(H(t, u)) = F(g^{-1}(t, u))$$

para todo  $(t, u) \in (-\epsilon, \epsilon) \times B$ , acabando con la demostración.  $\square$

### 1.3. Clasificación de las singularidades de un sistema

Sea  $F = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo de clase  $\mathcal{C}^r$  que define a un sistema de ecuaciones diferenciales y sea  $p$  una singularidad de dicho sistema. Se considera la matriz jacobiana asociada al campo vectorial  $F$  en la singularidad  $p$ :

$$DF(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(p) & \frac{\partial P}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(p) & \frac{\partial Q}{\partial y}(p) \end{pmatrix}.$$

**Definición 1.22.** Una singularidad  $p$  del sistema de ecuaciones diferenciales definido por el campo vectorial  $F$  es:

- **No degenerada**, si 0 no es un autovalor de la matriz jacobiana  $DF(p)$ .
- **Hiperbólica**, si los dos autovalores de la matriz jacobiana  $DF(p)$  poseen la parte real no nula.
- **Semihiperbólica**, si exactamente uno de los autovalores de  $DF(p)$  es nulo.
- **Nilpotente**, si ambos autovalores son nulos pero  $DF(p)$  no es idénticamente nula.
- **Linealmente cero**, si  $DF(p)$  es idénticamente nula.
- **Centro lineal**, si los autovalores de la matriz jacobiana  $DF(p)$  son imaginarios puros no nulos, es decir, si sus autovalores poseen únicamente la parte real nula.

En este trabajo nos centraremos en el estudio de las singularidades no degeneradas (hiperbólicas y centro lineal) y las semihiperbólicas. En el capítulo siguiente se enunciarán

dos resultados que permiten saber cómo es el diagrama de fases entorno a las singularidades de estos dos tipos, y que se aplican sobre sistemas cuya singularidad es el origen y cuya matriz jacobiana está en forma canónica de Jordan, por lo que a continuación veremos como poner cualquier sistema en esta forma.

A partir de ahora, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que la singularidad del sistema que vamos a estudiar es siempre el origen. En caso contrario, procederemos del siguiente modo:

Sea  $p = (x_0, y_0)$  una singularidad del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y). \end{cases}$$

Entonces  $(0, 0)$  es una singularidad del sistema

$$\begin{cases} \bar{x}' = P(\bar{x}, \bar{y}), \\ \bar{y}' = Q(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (1.2)$$

siendo  $x = \bar{x} + x_0$  e  $y = \bar{y} + y_0$ . Es decir, dado  $(x_0, y_0)$  singularidad de un sistema de ecuaciones diferenciales, podemos trasladar dicha singularidad al origen de coordenadas, en cuyo caso, el sistema (1.2) quedaría de la forma siguiente:

$$\begin{cases} x' = ax + by + A(x, y), \\ y' = cx + dy + B(x, y), \end{cases}$$

siendo  $A, B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funciones no lineales que dependen de las variables  $x$  e  $y$  y tales que sus derivadas parciales de primer orden se anulan en el origen de coordenadas. Mediante un cambio de coordenadas, podemos obtener la forma canónica de Jordan de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

distinguiendo las siguientes clasificaciones de matrices de Jordan:

- (1) Si el punto es hiperbólico, entonces pueden ocurrir las siguientes situaciones:
  - Si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  son los autovalores reales de la matriz  $B$ , entonces la forma canónica de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

- Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  es autovalor real doble de la matriz  $B$ , la forma canónica de Jordan puede ser:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

dependiendo de si la matriz es diagonalizable o no.

- Si  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  y  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  son los autovalores complejos conjugados de la matriz  $B$ , entonces la forma canónica de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

- (2) Si el punto es un centro lineal, entonces la forma canónica de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix},$$

siendo  $\lambda_1 = i\beta$  y  $\lambda_2 = -i\beta$  los autovalores imaginarios puros de la matriz  $B$ .

- (3) Si el punto es semihiperbólico, entonces la forma canónica de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

siendo  $\lambda = \lambda_1 \neq 0 \in \mathbb{R}$  y  $\lambda_2 = 0$  los autovalores de la matriz  $B$ .

#### 1.4. Diagrama de fases entorno a una singularidad

**Definición 1.23.** Sea  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$ ,  $A$  abierto y sea  $p$  una singularidad aislada, es decir, existe un entorno de  $p$  donde no hay más singularidades. Se dice que  $p$  es:

- Un **centro** si existe  $U$  entorno compacto de  $p$  verificando que  $\partial U$  es una órbita periódica y, además, todas las órbitas en el entorno  $U \setminus \{p\}$  son también periódicas.
- Un **nodo atractor o foco atractor** si existe  $U$  entorno compacto de  $p$  verificando que el campo vectorial  $F$  en todos los puntos de  $\partial U$  apunta hacia dentro. Además, se tiene que, dado  $q \in U \setminus \{p\}$ , el conjunto  $\omega$ -límite de  $q$  es  $p$  y  $\gamma^-(q) \cap \partial U \neq \emptyset$ .
- Un **nodo repulsor o foco repulsor** si existe  $U$  entorno compacto de  $p$  de forma que el campo vectorial  $F$  en todos los puntos de  $\partial U$  apunta hacia afuera. De modo análogo al nodo atractor, tenemos que, dado  $q \in U \setminus \{p\}$ , el conjunto  $\alpha$ -límite de  $q$  es  $p$  y  $\gamma^+(q) \cap \partial U \neq \emptyset$ .

**Definición 1.24.** Sea  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$ ,  $A$  abierto y sea  $p \in A$  una singularidad aislada. Se dice que  $p$  tiene una **descomposición sectorial finita no trivial** si  $p$  no está en ninguno de los casos de la Definición 1.23 y, si existe un entorno compacto  $V$  de  $p$  y número finito de órbitas,  $c_1, \dots, c_n$ , que cortan transversalmente a  $\partial V$  en el punto  $p_i$ , es decir, si  $\partial V$  es una sección transversal entorno al punto  $p_i$ . Además, entre las órbitas  $c_i$  y  $c_{i+1}$ , se cumple una de las siguientes condiciones, referidas al sector  $S_i$  determinado por la región delimitada por el punto  $p$  y las órbitas  $c_i$  y  $c_{i+1}$  y la región de  $\partial V$  delimitada por los puntos  $p_i$  y  $p_{i+1}$ :

- Si el campo vectorial  $F$  en todos los puntos del intervalo  $[p_i, p_{i+1}] \subset \partial V$  apunta hacia dentro y, para todo  $q \in S_i \setminus \{p\}$ , el conjunto  $\omega$ -límite de  $q$  es  $p$  y  $\gamma^-(q) \cap \partial V \neq \emptyset$ , entonces se tiene un **sector parabólico atractor**.
- De modo análogo, si el campo vectorial  $F$  en todos los puntos situados en el intervalo  $[p_i, p_{i+1}] \subset \partial V$  apunta hacia afuera y, para todo  $q \in S_i \setminus \{p\}$ , el conjunto  $\alpha$ -límite de  $q$  es  $p$  y  $\gamma^+(q) \cap \partial V \neq \emptyset$ , entonces se tiene un **sector parabólico repulsor**.
- Si existe un punto  $q_i \in (p_i, p_{i+1}) \subset \partial V$  cumpliendo que en todos los puntos del intervalo  $[p_i, q_i)$  el campo vectorial  $F$  apunta hacia dentro (respectivamente, hacia afuera) y en los puntos del intervalo  $(q_i, p_{i+1}]$ , el campo vectorial  $F$  apunta hacia afuera (respectivamente hacia dentro), y, además, el campo vectorial  $F$  es tangente a  $\partial V$  en el punto  $q_i$  y, para todo  $q \in S_i \setminus \overline{c_i \cup c_{i+1} \cup q_i}$ ,  $\gamma^+(q) \cap \partial V \neq \emptyset$  y  $\gamma^-(q) \cap \partial V \neq \emptyset$ , entonces, se dice que el sector es **hiperbólico**.
- En último lugar, si existe un punto  $q_i$  en el intervalo  $(p_i, p_{i+1}) \subset \partial V$  verificando que  $\gamma(q_i) \subset V$  con  $\omega(q_i) = \{p\} = \alpha(q_i)$  y, además, el campo vectorial  $F$  en todos los puntos  $q \in [p_i, q_i)$  apunta hacia dentro, con  $\gamma^+(q) \subset V$  y  $\omega(q) = p$ , entonces, se dice que el sector es **elíptico**.

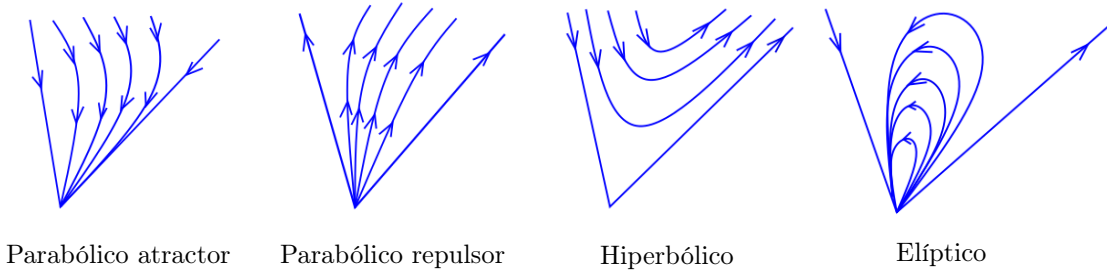


Figura 1.1: Tipos de sectores entorno a una singularidad.

En los resultados que enunciaremos en el Capítulo 2 y que nos permitirán conocer el diagrama de fases entorno a una singularidad, no se hablará explícitamente de sectores. Diremos que una singularidad es un **punto de silla** cuando tenga 4 sectores hiperbólicos y una **silla-nodo** cuando tenga dos sectores hiperbólicos y uno parabólico (atractor o repulsor). En los casos de nodos, es claro que están formados por un único sector parabólico (atractor o repulsor) y los centros y focos no presentan ninguno de estos sectores.

En general, en las singularidades nilpotentes y linealmente cero pueden aparecer otro tipo de singularidades, por lo que es necesario describir sus diagramas de fase locales en función de los sectores que presentan, como veremos por ejemplo en la Sección 4.3.

## 1.5. Elementos esenciales de un diagrama de fases

En esta sección, se introducen los elementos esenciales en un diagrama de fases de un campo vectorial y se da una caracterización de la equivalencia topológica para todo campo vectorial definido en el plano.

**Definición 1.25.** Sea  $\dot{x} = F(x)$  un sistema de ecuaciones diferenciales con  $F$  suficientemente regular. Supongamos que dicho campo es una función localmente Lipschitziana en todo el plano. Se dice que el flujo asociado a  $F$ ,  $(\mathbb{R}^2, \varphi)$ , es un **flujo paralelo** si es topológicamente equivalente a uno de los siguientes:

- Al flujo lineal en  $\mathbb{R}^2$  dado por el sistema 
$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{y} = 0. \end{cases}$$
- Al flujo anular en coordenadas polares  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  dado por el sistema 
$$\begin{cases} \dot{r} = 0, \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$
- Al flujo nodal o espiral en coordenadas polares  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  dado por 
$$\begin{cases} \dot{r} = r, \\ \dot{\theta} = 0. \end{cases}$$

Se considera, ahora, una región abierta maximal en el plano en la que el flujo  $(\mathbb{R}^2, \varphi)$  es paralelo. En su frontera pueden existir los siguientes tipos de órbitas:

- (1) Una singularidad del sistema al que define el campo vectorial  $F$ .
- (2) Una órbita periódica para la que no hay un entorno que esté formado totalmente por órbitas periódicas.
- (3) Una órbita  $\gamma(p)$ , homeomorfa a  $\mathbb{R}$ , para la que no existe un entorno  $V$  verificando las siguientes condiciones:

- $\alpha(q) = \alpha(p)$  y  $\omega(q) = \omega(p)$ ,  $\forall q \in V$ .
- $\partial V$  está formada por los conjuntos  $\alpha(p)$  y  $\omega(p)$  junto con dos órbitas  $\gamma(q_1)$  y  $\gamma(q_2)$  tales que  $\alpha(p) = \alpha(q_1) = \alpha(q_2)$  y  $\omega(p) = \omega(q_1) = \omega(q_2)$ .

**Definición 1.26.** Se llama **separatriz** a cualquier órbita verificando una de las condiciones anteriores. Denotaremos por  $S$  al conjunto de todas las separatrices. A cada componente conexa maximal de  $\mathbb{R}^2 \setminus S$  se le llama **región canónica**.

**Proposición 1.27.** *En toda región canónica el flujo es paralelo.*

*Demostración.* Sea  $U$  una región canónica del flujo  $(\mathbb{R}^2, \varphi)$ . Sea  $(U, \varphi')$ , donde  $\varphi' = \varphi|_U$ , el flujo en dicha región canónica. Se sabe que el conjunto de órbitas homeomorfas a  $\mathbb{S}^1$  es abierto, debido a que no existen separatrices en  $U$ . Análogamente, el conjunto de órbitas homeomorfas a  $\mathbb{R}$  es abierto. De este modo,  $U$  está formado o sólo por órbitas cerradas o sólo por órbitas homeomorfas a  $\mathbb{R}$ . Se probará, por reducción al absurdo, que se pueden separar dos órbitas de  $\varphi'$  mediante entornos paralelos que son disjuntos.

Supongamos que existen dos órbitas,  $\gamma(p)$ ,  $\gamma(q)$ , que no se pueden separar. Entonces, para cualquier entorno paralelo  $V_p$  se cumple que  $q \in \overline{V_p}$ , es decir, se verifica

$$q \in \bigcap_{V_p} \overline{V_p} = \alpha(p) \cup \gamma(p) \cup \omega(p)$$

De la igualdad anterior se deduce que  $q \in \alpha(p)$  o  $q \in \omega(p)$ , lo cual es imposible pues  $q \in V_p \subset U$  y  $\alpha(p) \cup \omega(p) \subset \overline{V_p} \setminus V_p \not\subset U$ .

Se deduce que el espacio cociente  $U/\varphi'$  obtenido colapsando las órbitas de  $(U, \varphi')$  a puntos es una variedad unidimensional conexa. Por lo tanto, la proyección natural  $\pi : U \rightarrow U/\varphi'$  es una fibra localmente trivial de la cual existen tres posibilidades, las tres clases de flujos paralelos descritas anteriormente, terminando con la demostración.  $\square$

**Definición 1.28.** Se llama **esqueleto completo de las separatrices** de un flujo  $(\mathbb{R}^2, \varphi)$  a la unión del conjunto de todas las separatrices  $S$  con una órbita de cada una de las regiones canónicas. Dadas dos esqueletos completos de las separatrices,  $C_1$  y  $C_2$ , decimos que son **topológicamente equivalentes** si existe un homeomorfismo en el plano que asocia las órbitas de  $C_1$  a órbitas de  $C_2$ , conservando su orientación.

**Teorema 1.29** (Markus-Neumann-Peixoto). *Dados  $(\mathbb{R}^2, \varphi_1)$  y  $(\mathbb{R}^2, \varphi_2)$  dos flujos continuos únicamente con singularidades aisladas, son topológicamente equivalentes si, y sólo si, sus esqueletos completos de las separatrices son equivalentes.*



## Capítulo 2

# Clasificación de las singularidades hiperbólicas y semihiperbólicas

En este capítulo estudiaremos las singularidades elementales, es decir, las hiperbólicas y semihiperbólicas. Las singularidades hiperbólicas son aquellas que poseen dos autovalores con la parte real distinta de cero. Las semihiperbólicas son las singularidades que tienen exactamente un autovalor nulo.

Empezaremos el capítulo introduciendo los conceptos de acción adjunta y corchete de Lie y enunciando el Teorema de la Forma Normal Formal, cuya demostración se puede encontrar en [7], y el Teorema de Borel, que serán necesarios para los resultados sobre singularidades no degeneradas y semihiperbólicas.

Sea  $F = A + f$  un campo vectorial en  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  con  $A$  lineal y  $f$  una función de clase  $\mathcal{C}^\infty$  verificando que  $f(0) = 0$  y  $Df(0) = 0$ . El objetivo fundamental de la teoría de la forma normal es obtener una expresión más simple de la ecuación diferencial asociada al campo  $F$  mediante un cambio de coordenadas que conserve las principales propiedades cualitativas de las curvas solución de la ecuación dada. Se trata de calcular, para cada matriz  $A$ , una serie de funciones no lineales  $F_n$ , lo más simple posibles, de forma que, para cada función  $f$ , se aplica un cambio de coordenadas adecuado para obtener un campo vectorial  $F' = A + \tilde{f}$ , siendo  $\tilde{f} \in F_n$ .

Para obtener el cambio de coordenadas adecuado mencionado anteriormente, se intro-

duce el concepto de **acción adjunta** de la matriz  $A$  para cada  $m \geq 1$ :

$$\begin{aligned} ad_m A: H^m(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow H^m(\mathbb{R}^2) \\ F &\longmapsto [A, F]. \end{aligned}$$

siendo  $H^m(\mathbb{R}^2)$  el conjunto de campos vectoriales homogéneos en el plano de grado  $m$  y donde  $[A, F] = A \circ F - F \circ A$  denota el llamado **corchete de Lie**. Se considera  $B^m$  la imagen de la acción adjunta definida anteriormente y sea  $G^m$  tal que  $B^m \oplus G^m = H^m(\mathbb{R}^2)$ . Se suele considerar  $G^m$  como el núcleo de la acción conjunta de  $A^T$ , siendo  $A^T$  la matriz traspuesta de  $A$ .

**Teorema** (de la forma normal formal). *Sea  $F$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 1$  definido en un entorno del origen tal que  $F(0) = 0$  y  $DF(0) = A$ . Se consideran  $B^i$  y  $G^i$ , definidas anteriormente. Entonces, existe un cambio de coordenadas  $\phi: (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  en un entorno del origen de forma que  $\phi$  es una función analítica y  $F'(y) = Ay + g_2(y) + \dots + g_r(y) + o(\|y\|^r)$ , con  $g_i \in G^i$ , para cada  $i = 2, \dots, r$ .*

**Teorema** (Borel). *Para cada  $p \in \mathbb{R}^n$  y para cada serie formal en  $n$ -variables dada por el operador  $\infty$ -jet, existe una función  $f$ , de clase  $\mathcal{C}^\infty$ , definida en un entorno del punto  $p$  de forma que la serie de Taylor de  $f$  evaluada en  $p$  coincide con la serie formal dada por  $\infty$ -jet.*

Utilizando ambos resultados se puede probar que si  $F$  es un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^\infty$  definido en un entorno de  $0 \in \mathbb{R}^n$  con  $F(0) = 0$ , entonces existe un cambio de coordenadas de clase  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $\varphi: (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  en un entorno del origen de forma que  $F'$  se puede escribir formalmente como  $F'(0) = A + \sum_{i=2}^{\infty} g_i$  con  $g_i \in G^i$  para todo  $i = 2, 3, 4, \dots$ . Nótese que este resultado es puramente formal y solo proporciona una forma simple formal que no tiene porque representar al campo vectorial en sí.

## 2.1. Teorema de las singularidades no degeneradas

**Teorema 2.1** (de las singularidades no degeneradas). *Sea  $(0, 0)$  una singularidad aislada del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + A(x, y), \\ \dot{y} = cx + dy + B(x, y), \end{cases} \quad (2.1)$$

con  $a, b, c, d$  constantes y  $A, B$  funciones analíticas en un entorno del origen verificando las siguientes condiciones:

- $A(0, 0) = 0 = B(0, 0)$ ,
- $DA(0, 0) = \left( \frac{\partial A}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial A}{\partial y}(0, 0) \right) = (0, 0)$ ,
- $DB(0, 0) = \left( \frac{\partial B}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial B}{\partial y}(0, 0) \right) = (0, 0)$ .

Sea  $F$  el campo asociado a dicho sistema y sean  $\lambda_1, \lambda_2$  los autovalores de la matriz  $DF(0, 0)$ . Entonces, se verifica:

- (1) Si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  cumplen que  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ , entonces el origen es un punto de silla. Sean  $E_1, E_2$  los autoespacios de los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , respectivamente. En este caso, existen dos curvas analíticas invariantes tangentes en el origen a los autoespacios  $E_1$  y  $E_2$ , respectivamente, verificando que, sobre una de las curvas el campo vectorial se acerca al origen y, sobre la otra, el campo vectorial se aleja del origen.
- (2) Si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  verifican que  $|\lambda_2| \geq |\lambda_1|$  y  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ , entonces el origen es un nodo. En el caso en que  $\lambda_1 > 0$ , se tiene un nodo repulsor o inestable y, si  $\lambda_1 < 0$ , el nodo es atractor o estable. En este caso, existe un cambio de coordenadas de clase  $C^\infty$  que transforma el sistema (2.1) en

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x, \\ \dot{y} = \lambda_2 y, \end{cases}$$

si  $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{N}$  y en

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x, \\ \dot{y} = \lambda_2 y + \delta x^m, \end{cases}$$

para algún  $\delta = 0$  o  $\delta = 1$  si  $\lambda_2 = m\lambda_1$  con  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$ . Además, el sistema (2.1) es una conjugación topológica de clase  $C^0$  de

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta x, \\ \dot{y} = \delta y, \end{cases}$$

con  $\delta = \pm 1$  y  $\lambda_1 \delta > 0$ .

- (3) Si  $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$  son autovalores complejos conjugados con  $\alpha, \beta \neq 0$ , entonces el origen es un foco "fuerte". En el caso en el que  $\alpha > 0$ , el origen es un foco repulsor o inestable y, si  $\alpha < 0$ , el origen es un foco atractor o estable. En este caso, existe un cambio de coordenadas de clase  $C^\infty$  que transforma el sistema (2.1) en

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y, \\ \dot{y} = -\beta x + \alpha y. \end{cases}$$

Además, el sistema (2.1) es una conjugación topológica de clase  $C^0$  de

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta x, \\ \dot{y} = \delta y, \end{cases}$$

con  $\delta = \pm 1$  y  $\alpha\delta > 0$ .

(4) Si  $\lambda_1 = i\beta, \lambda_2 = -i\beta \in \mathbb{C}$  son autovalores imaginarios puros con  $\beta \neq 0$ , entonces el origen es un centro lineal, es decir, un foco “débil” o un centro.

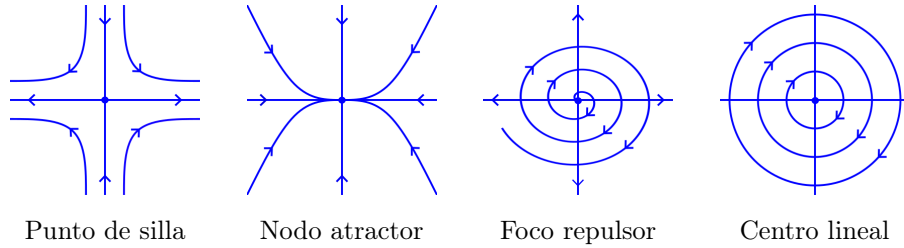


Figura 2.1: Singularidades no degeneradas.

*Demostración.* Daremos una idea de la demostración en el caso en el que la matriz jacobiana en el origen presente una de las siguientes formas:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

con  $\lambda_1\lambda_2 > 0, \alpha \neq 0$  y  $\beta > 0$ . Sea  $F$  su campo vectorial asociado. Se probará que existe una conjugación topológica local de clase  $C^0$  entre el campo vectorial  $F$  y su parte lineal  $DF(0,0)$  en un entorno del origen. Para ello, es suficiente con considerar el caso atractor, es decir,  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \alpha < 0$ ; para el caso repulsor se considera la variable  $-t$ .

Supongamos que la matriz jacobiana es de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Sea  $S_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$  una sección transversal para  $F$  y su parte lineal, si  $r > 0$  es lo suficientemente pequeño. Fijamos  $r = r_0 > 0$ . Entonces, para todos los puntos  $p \in \overline{B}_{r_0}(0,0) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r_0^2\}$ , las órbitas de  $F$  y de  $DF(0,0)$  tienden al origen cuando  $t \rightarrow +\infty$  y deja a  $B_{r_0} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < r_0^2\}$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Sean  $\varphi(p, t)$  y  $\psi(p, t)$  los flujos de  $F$  y  $DF(0,0)$ , respectivamente. Para cualquier punto  $p \in B_{r_0}(0,0) \setminus \{(0,0)\}$ ,

existe un único tiempo  $t_p > 0$  de forma que  $\varphi(p, t_p) \in S_{r_0}$ . La conjugación topológica de clase  $\mathcal{C}^0$   $h: B_{r_0}(0, 0) \rightarrow B_{r_0}(0, 0)$  definida por:

$$\begin{cases} h(0, 0) = 0, \\ h(p) = \psi(\varphi(p, -t_p), t_p), \end{cases}$$

es un homeomorfismo de conjugación entre los flujos  $\varphi$  y  $\psi$ .

Para el segundo caso de matriz jacobiana se observa que es posible encontrar un cambio de coordenadas lineal que lleve  $DF(0, 0)$  a la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \epsilon \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

con  $\epsilon > 0$ . Si se considera  $\epsilon$  lo suficientemente pequeño, el cambio de coordenadas prueba que  $F$  es, localmente, una conjugación topológica de  $DF(0, 0)$  de clase  $\mathcal{C}^0$ .

Finalmente, para el primer caso de matriz jacobiana, se considera  $S'_r = \{(x, y): |\lambda_2|x^2 + |\lambda_1|y^2 = r^2\}$  y  $B'_{r_0}(0, 0) = \{(x, y): |\lambda_2|x^2 + |\lambda_1|y^2 < r_0^2\}$  y se realiza un procedimiento análogo al tercer caso.

Cualquiera de los tres casos considerados anteriormente es una prueba de un caso muy especial del Teorema de Hartman-Grobman que establece que, en cualquier dimensión, un campo vectorial con una singularidad hiperbólica es, localmente, una conjugación topológica de clase  $\mathcal{C}^0$  de su parte lineal.

Para describir las clases de conjugación topológica de clase  $\mathcal{C}^\infty$  de atractores y repulsores de las singularidades hiperbólicas se aplica el Teorema de la Forma Normal Formal enunciado anteriormente. Nos limitaremos al caso repulsor. Se distinguen tres casos:

- Supongamos que  $DF(0, 0) = \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y}$  con  $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$ . Aplicando el corchete de Lie y dividiendo todo por  $\lambda_1$  obtenemos:

$$\left[ x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda y \frac{\partial}{\partial y}, x^m y^n \frac{\partial}{\partial x} \right] = ((m-1) + n\lambda) x^m y^n \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\left[ x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda y \frac{\partial}{\partial y}, x^m y^n \frac{\partial}{\partial y} \right] = (m + (n-1)\lambda) x^m y^n \frac{\partial}{\partial y},$$

con  $\lambda = \lambda_2/\lambda_1 \geq 1$ . A parte de los términos lineales, vemos que todos los términos en el desarrollo de Taylor pueden eliminarse, excepto  $x^m(\partial/\partial y)$  en el caso  $\lambda = m$ . Se puede ver, aplicando el Teorema de Borel sobre la realización de series de potencias

formales, que existe un cambio de coordenadas de clase  $\mathcal{C}^\infty$  en un entorno del origen de forma que si  $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{N}$ , el campo vectorial  $F$  puede reescribirse como:

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + f(x, y), \\ \dot{y} = \lambda_2 y + g(x, y), \end{cases}$$

y como

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + f(x, y), \\ \dot{y} = \lambda_2 y + ax^m + g(x, y), \end{cases}$$

si  $\lambda_2 = m\lambda_1$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$ , siendo  $f, g$  funciones de clase  $\mathcal{C}^\infty$  tales que su serie de Taylor evaluada en el origen es nula. Este caso prueba que el origen es un nodo repulsor del campo  $F$  (caso (2) del Teorema 2.1).

- Supongamos, a continuación, que  $DF(0, 0) = \lambda \left( x \frac{\partial}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial}{\partial y} \right)$  con  $\lambda > 0$ . Aplicando el corchete de Lie y dividiendo por  $\lambda$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \left[ \left( x \frac{\partial}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial}{\partial y} \right), x^m y^n \frac{\partial}{\partial x} \right] &= (m + n - 1) x^m y^n \frac{\partial}{\partial x} + n x^{m+1} y^{n-1} \frac{\partial}{\partial x} - x^m y^n \frac{\partial}{\partial y}, \\ \left[ \left( x \frac{\partial}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial}{\partial y} \right), x^m y^n \frac{\partial}{\partial y} \right] &= (m + n - 1) x^m y^n \frac{\partial}{\partial x} + n x^{m+1} y^{n-1} \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Aplicando combinaciones lineales adecuadas, se pueden eliminar todos los términos de orden al menos dos y, así, se introduce un cambio de coordenadas, reescribiendo el campo  $F$  como:

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + f(x, y), \\ \dot{y} = x + \lambda y + g(x, y), \end{cases}$$

con  $f, g$  funciones de clase  $\mathcal{C}^\infty$  de forma que sus series de Taylor evaluadas en el origen son nulas. Este caso prueba que el origen es un nodo repulsor del campo  $F$ , para el caso en el que se tenga un autovalor doble.

- Para finalizar, supongamos que  $DF(0, 0) = \alpha \left( (x + \gamma y) \frac{\partial}{\partial x} + (-\gamma x + y) \frac{\partial}{\partial y} \right)$  de forma que  $\alpha\gamma \neq 0$ . Aplicando el corchete de Lie y dividiendo por  $\alpha$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \left[ (x + \gamma y) \frac{\partial}{\partial x} + (-\gamma x + y) \frac{\partial}{\partial y}, x^m y^n \frac{\partial}{\partial x} \right] &= (m + n - 1) x^m y^n \frac{\partial}{\partial x} \\ &\quad + m\gamma x^{m-1} y^{n+1} \frac{\partial}{\partial x} - n\gamma x^{m+1} y^{n-1} \frac{\partial}{\partial x} + \gamma x^m y^n \frac{\partial}{\partial y}, \\ \left[ (x + \gamma y) \frac{\partial}{\partial x} + (-\gamma x + y) \frac{\partial}{\partial y}, x^m y^n \frac{\partial}{\partial y} \right] &= (m + n - 1) x^m y^n \frac{\partial}{\partial y} \\ &\quad + m\gamma x^{m-1} y^{n+1} \frac{\partial}{\partial y} - n\gamma x^{m+1} y^{n-1} \frac{\partial}{\partial y} - \gamma x^m y^n \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Como en el caso anterior, si aplicamos combinaciones lineales adecuadas, se pueden eliminar todos los términos de orden al menos dos y, así, se introduce un cambio de coordenadas, reescribiendo el campo  $F$  como:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y + f(x, y), \\ \dot{y} = -\beta x + \alpha y + g(x, y), \end{cases}$$

siendo  $\alpha\beta \neq 0$  y  $f, g$  funciones de clase  $\mathcal{C}^\infty$  tales que sus series de Taylor evaluadas en el origen se anulan. Este caso prueba que el origen es un foco repulsor del campo  $F$  (caso (3) del Teorema 2.1).

□

*Observación 2.2.* En el teorema anterior aparecen dos términos nuevos, foco “débil” y foco “fuerte”. La diferencia entre ambos se encuentra en la parte lineal del campo vectorial que define al sistema. En el caso (3) del teorema, se cumple que  $(0, 0)$  es un foco de la parte lineal  $DF$  y este comportamiento se conserva para el sistema definido por el campo vectorial  $F$ . De este modo, diremos que el origen del sistema definido por el campo  $F$  es un foco “fuerte”. En el caso (4) del teorema no ocurre lo anterior. Se cumple que  $(0, 0)$  es un centro de la parte lineal  $DF$ , pero este comportamiento no tiene porque mantenerse en el sistema definido por el campo vectorial  $F$ , cuyo origen puede ser un centro o un foco, en cuyo caso se llama foco débil.

*Observación 2.3.* Nótese que este teorema aplicado al caso lineal nos da los resultados estudiados en la asignatura ecuaciones diferenciales Ordinarias, del tercer curso del grado en Matemáticas.

## 2.2. Teorema de las singularidades semihiperbólicas

**Teorema 2.4** (Singularidades semihiperbólicas). *Sea  $(0, 0)$  una singularidad aislada del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x, y), \\ \dot{y} = \lambda y + B(x, y), \end{cases}$$

con  $\lambda > 0$  y donde  $A, B$  son funciones analíticas en un entorno del origen, verificando las siguientes condiciones:

- $A(0, 0) = 0 = B(0, 0)$ ,
- $DA(0, 0) = \left( \frac{\partial A}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial A}{\partial y}(0, 0) \right) = (0, 0)$ ,

▪  $DB(0,0) = \left( \frac{\partial B}{\partial x}(0,0), \frac{\partial B}{\partial y}(0,0) \right) = (0,0).$

Sea  $F$  el campo vectorial asociado al sistema de ecuaciones diferenciales. Sea  $y = f(x)$  solución de la ecuación  $\lambda y + B(x,y) = 0$  en un entorno del origen  $(0,0)$  y tomamos  $g(x) = A(x, f(x))$ . Si suponemos que  $g(x)$  tiene una expresión de la forma  $g(x) = a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + a_{m+2} x^{m+2} + \dots$  con  $m \geq 2$  y  $a_m \neq 0$ , entonces, siempre existe una curva analítica invariante, llamada variedad inestable fuerte, que es tangente al origen en el eje de las ordenadas y para la que el campo vectorial que define al sistema del enunciado,  $F$ , es conjugación topológica de la ecuación  $\dot{y} = \lambda y$ . Si, además, suponemos que  $\lambda > 0$ , entonces tenemos carácter repulsor y, se verifica una de las siguientes condiciones:

- (1) Si  $m$  es impar y  $a_m < 0$ , entonces, el origen es un punto de silla. En este caso, existe una única curva invariante tangente al origen en el eje de abscisas, llamada variedad central.
- (2) Si  $m$  es impar y  $a_m > 0$ , entonces, el origen es un nodo repulsor. Todo punto fuera de la variedad inestable fuerte, se sitúa en una curva de clase  $C^\infty$ , denominada variedad central, tangente al eje de abscisas en el origen.
- (3) Si  $m$  es par, entonces, el origen es una silla-nodo, es decir, es la unión de un sector parabólico y de dos sectores hiperbólicos. En este caso, se tiene una variedad inestable fuerte tangente en el 0 al eje de ordenadas; a su derecha, en el lado  $x > 0$ , se tienen órbitas que salen del origen tangentes al eje de abscisas y en el lado izquierdo,  $x < 0$ , variedades centrales.

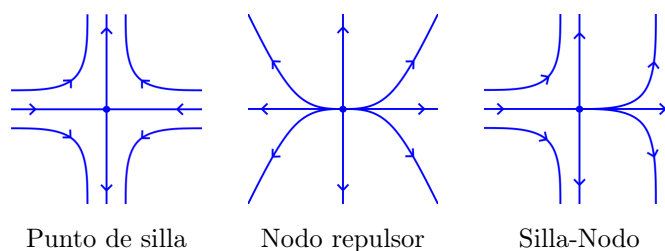


Figura 2.2: Singularidades semihiperbólicas.

*Observación 2.5.* En el teorema anterior, puede ocurrir que la función  $g(x) = A(x, f(x))$  no sea polinómica, por ejemplo, una función racional. En ese caso, se consideraría la serie de potencias de  $g(x)$ .

*Observación 2.6.* El caso  $\lambda < 0$  se reduce al caso  $\lambda > 0$  simplemente con considerar el campo vectorial  $-F$ .

## 2.3. Ejemplos

A continuación, se incluyen varios ejemplos de sistemas de ecuaciones diferenciales en los que se aplican los Teoremas 2.1 y 2.4.

**Ejemplo 2.7.** Se considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en función del parámetro  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - y + xy, \\ \dot{y} = x + x^2, \end{cases} \quad (2.2)$$

Sea  $F$  su campo vectorial asociado. Igualando cada una de las ecuaciones a cero:

$$\dot{x} = 0 \iff ax - y + xy = 0,$$

$$\dot{y} = 0 \iff x + x^2 = 0 \iff x(1 + x) = 0,$$

se tiene que las singularidades del sistema de ecuaciones diferenciales son  $(0, 0)$  y  $(-1, -a/2)$ . A continuación, se estudiará cada una de las singularidades por separado y su diagrama de fases local en función del parámetro real  $a$ .

Antes de empezar con la clasificación, calculamos la matriz jacobiana del sistema, para posteriormente evaluarla en las distintas singularidades:

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} a + y & -1 + x \\ 1 + 2x & 0 \end{pmatrix}.$$

Se clasificará, en primer lugar, el origen de coordenadas. Para ello, se calcularán los autovalores de la matriz  $DF(0, 0)$ , en función de  $a \in \mathbb{R}$ .

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de la matriz  $DF(0, 0)$  son:

$$\lambda_1 = \frac{a + \sqrt{(a-2)(a+2)}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a - \sqrt{(a-2)(a+2)}}{2}.$$

Veamos, a continuación, si se cumplen las condiciones del Teorema 2.1:

- $A(x, y) = xy$  y  $B(x, y) = x^2$  son funciones analíticas.
- La condición  $A(0, 0) = 0 = B(0, 0)$  se cumple trivialmente.
- $DA(0, 0) = (y, x)|_{(0,0)} = (0, 0)$
- $DB(0, 0) = (2x, 0)|_{(0,0)} = (0, 0)$ .

En función del parámetro  $a \in \mathbb{R}$  se tienen los siguientes casos:

- Si  $a \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ , como los autovalores son reales, por el Teorema 2.1, se cumple que  $(0, 0)$  es un nodo. En el caso  $a \in (2, \infty)$ , son autovalores positivos, por lo que el nodo es repulsor o inestable y, si  $a \in (-\infty, -2)$  los autovalores son negativos, por lo que el nodo es atractor o estable.
- Si  $a \in (-2, 0) \cup (0, 2)$ , como los autovalores son complejos conjugados, por el Teorema 2.1 se verifica que  $(0, 0)$  es un foco. En el caso  $a \in (-2, 0)$  el foco es atractor o estable, y si  $a \in (0, 2)$  el foco es repulsor o inestable.
- Si  $a = 0$ , como los autovalores son imaginarios puros, por el Teorema 2.1 se verifica que  $(0, 0)$  es un centro lineal. Además de ser un centro lineal, observando la figura (2.3), se puede ver que es un centro.

En la figura 2.3 se representan algunos casos concretos para valores fijados del parámetro  $a$  que ilustran los distintos tipos de diagramas de fases locales que puede presentar esa singularidad. Estos diagramas de fases se han realizado con el programa de cálculo simbólico Maple.

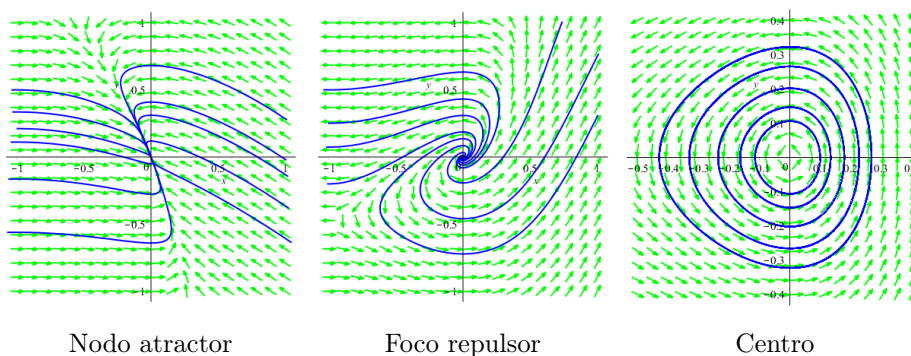


Figura 2.3: Diagramas de fases del sistema (2.2) obtenidos para los casos  $a = -3$ ,  $a = 1$  y  $a = 0$ .

Veamos, ahora, de qué tipo es la singularidad  $(-1, -a/2)$ , en función del parámetro real  $a$ . Para ello, calculamos los autovalores de la matriz jacobiana del sistema en la singularidad:

$$DF\left(-1, -\frac{a}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left|DF\left(-1, -\frac{a}{2}\right) - \lambda I\right| = \begin{vmatrix} \frac{a}{2} - \lambda & -2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\frac{a}{2} - \lambda\right) - 2 = \lambda^2 - \frac{a}{2}\lambda - 2.$$

Igualando la expresión anterior a cero y realizando operaciones, se deduce que los autovalores de la matriz  $DF(-1, -a/2)$  son:

$$\lambda_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 32}}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 32}}{4}.$$

Por ser el discriminante positivo para cualquier valor de  $a \in \mathbb{R}$ , los autovalores son reales para cualquier valor de  $a \in \mathbb{R}$  y, por lo tanto,  $(-1, -a/2)$  es singularidad hiperbólica.

Como para aplicar el Teorema 2.1 la singularidad debe ser el origen, trasladaremos el sistema del enunciado, mediante un cambio de coordenadas, obteniendo el sistema:

$$\begin{cases} \dot{u} = -\frac{au}{2} - 2v + uv, \\ \dot{v} = -u + u^2, \end{cases}$$

de la forma del sistema del enunciado del Teorema 2.1, tomando  $A(u, v) = uv$  y  $B(u, u) = u^2$ . Veamos, por lo tanto, si se verifican las condiciones de dicho teorema:

- $A(u, v) = uv$  y  $B(u, v) = u^2$  son funciones analíticas.
- La condición  $A(0, 0) = 0 = B(0, 0)$  se cumple trivialmente.
- $DA(0, 0) = (v, u)|_{(0,0)} = (0, 0)$ .
- $DB(0, 0) = (2u, 0)|_{(0,0)} = (0, 0)$ .

Aplicando del Teorema 2.1 al sistema de ecuaciones diferenciales trasladado (en términos de las variables  $u$  y  $v$ ), como los autovalores son reales y cumplen que  $\lambda_1 > 0$ , para cualquier valor de  $a \in \mathbb{R}$ , se tiene que el origen es una nodo repulsor o inestable. Por lo tanto, la singularidad  $(-1, -a/2)$  del sistema (2.2) es un nodo repulsor o inestable.

*Observación 2.8.* En el ejemplo anterior se calcula el sistema trasladado simplemente para ver si se verifican las condiciones del Teorema 2.1 y se emplean los autovalores de la matriz  $DF(-1, -a/2)$  para clasificar la singularidad, sin necesidad de calcular los autovalores de la matriz jacobiana del sistema trasladado en el origen.

**Ejemplo 2.9.** Se considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{x} = xy, \\ \dot{y} = y - x^2 - xy, \end{cases} \quad (2.3)$$

Sea  $F$  su campo vectorial asociado. Igualando cada una de las ecuaciones a cero

$$\dot{x} = 0 \iff xy = 0,$$

$$\dot{y} = 0 \iff y - x^2 - xy = 0,$$

se deduce que  $(0, 0)$  es la única singularidad del sistema. Una vez calculada la singularidad, se procede a determinar de qué tipo es. Para ello, se calcula la matriz jacobiana del sistema, se evalúa en la singularidad y se calculan sus autovalores. La matriz jacobiana del sistema es:

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ -2x - y & 1 - x \end{pmatrix}.$$

Evaluando en el origen, se tiene la siguiente matriz:

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por ser  $DF(0, 0)$  una matriz diagonal, se observa, fácilmente, que sus autovalores son  $\lambda_1 = 1 > 0$  y  $\lambda_2 = 0$ . Así, como exactamente uno de los autovalores es nulo, el origen es una singularidad semihiperbólica.

Se determinará, a continuación, si se cumplen las condiciones del Teorema 2.4:

- $A(x, y) = xy$  y  $B(x, y) = -x^2 - xy$  son funciones analíticas.
- La condición  $A(0, 0) = 0 = B(0, 0)$  se cumple trivialmente.
- $DA(0, 0) = (y, x)|_{(0,0)} = (0, 0)$ .
- $DB(0, 0) = (-2x - y, -x)|_{(0,0)} = (0, 0)$ .

Una vez comprobadas las condiciones del teorema, calculamos  $y = f(x)$  solución de la ecuación  $y - x^2 - xy = 0$ :

$$y - x^2 - xy = 0 \iff y(1 - x) - x^2 = 0 \iff y(1 - x) = x^2 \iff y = \frac{x^2}{1 - x}.$$

A continuación, se toma  $g(x) = A(x, f(x)) = x(x^2/(1 - x)) = x^3/(1 - x)$ . Como no tenemos una expresión polinómica de  $g(x)$ , se calcula su serie de potencias:

$$g(x) = \frac{x^3}{1 - x} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3}.$$

Al trabajar en un entorno del origen, la serie de potencias anterior está bien definida. Por lo tanto,  $g(x) = x^3 + \mathcal{O}(x^4)$ . En el Teorema 2.4 se considera el coeficiente de menor orden de la expresión  $g(x)$ . En este caso, el menor orden es la potencia cúbica, por lo que, como el coeficiente del término  $x^3$  es positivo, por el Teorema 2.4 se deduce que  $(0, 0)$  es un nodo repulsor o inestable.

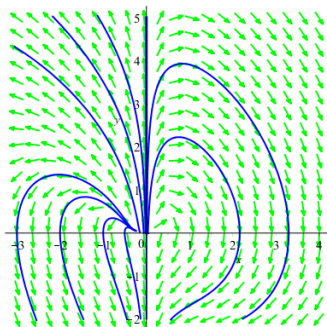


Figura 2.4: Nodo repulsor.

**Ejemplo 2.10.** Se considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en función del parámetro real  $b \geq 3$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^{b-2}y, \\ \dot{y} = y + x^2 + xy, \end{cases} \quad (2.4)$$

Sea  $F$  su campo vectorial asociado. Igualando cada una de las ecuaciones a cero:

$$\dot{x} = 0 \iff x^{b-2}y = 0,$$

$$\dot{y} = 0 \iff y + x^2 + xy = 0,$$

se deduce que  $(0, 0)$  es la única singularidad del sistema. Se determinará, a continuación, de qué tipo es la singularidad. Para ello, se calcula la matriz jacobiana del sistema, se evalúa en el origen y se calculan sus autovalores. La matriz jacobiana del sistema es:

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} (b-2)x^{b-3}y & x^{b-2} \\ y + 2x & 1 + x \end{pmatrix}.$$

Evalutando en la singularidad, se tiene la siguiente matriz diagonal

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sus autovalores son  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = 1$ . Como tenemos exactamente un autovalor nulo,  $(0, 0)$  es una singularidad semihiperbólica. Veamos, a continuación, si se cumplen las condiciones del Teorema 2.4:

- $A(x, y) = x^{b-2}y$  y  $B(x, y) = x^2 + xy$  son funciones analíticas.
- La condición  $A(0, 0) = 0 = B(0, 0)$  se cumple trivialmente..
- $DA(0, 0) = ((b-2)x^{b-3}, x^{b-2})|_{(0,0)} = (0, 0)$ .

▪  $DA(0, 0) = (y + 2x, x)|_{(0,0)} = (0, 0)$ .

Una vez comprobadas las condiciones del teorema, siguiendo el enunciado, calculamos  $y = f(x)$  solución de la ecuación  $y + x^2 + xy = 0$ :

$$y + x^2 + xy = 0 \iff y(1 + x) + x^2 = 0 \iff y(1 + x) = -x^2 \iff y = -\frac{x^2}{1 + x}.$$

A continuación, se calcula  $g(x) = A(x, f(x)) = x^{b-2}(-x^2/(1+x)) = -x^b/(1+x)$ . Como no tenemos una expresión polinómica de  $g(x)$ , se calcula su serie de potencias:

$$g(x) = -\frac{x^b}{1+x} = -x^b \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = -x^b \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n+b}.$$

Al trabajar en un entorno del origen, la serie de potencias anterior está bien definida. Por lo tanto,  $g(x) = -x^b + \mathcal{O}(x^{b+1})$ . En el Teorema 2.4 se considera el coeficiente de menor orden. En este ejemplo, el menor orden es la potencia  $b$  distinguiendo los siguientes casos:

- Si  $b \geq 3$  es impar, es decir, si  $b = 2t + 1$  para algún  $t \geq 1$ , entonces, por el Teorema 2.4, como el coeficiente del término  $x^b$  es negativo, se cumple que  $(0, 0)$  es un punto de silla.
- Si  $b \geq 3$  es par, es decir, si  $b = 2t$  para algún  $t \geq 2$ , entonces, por el Teorema 2.4, se deduce que  $(0, 0)$  es una silla-nodo.

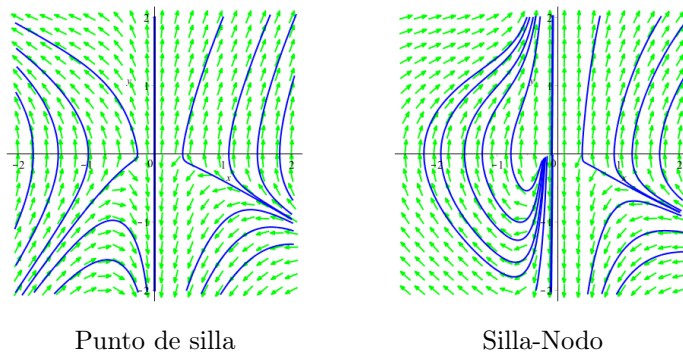


Figura 2.5: Diagramas de fases del sistema (2.4) para los casos  $b = 3$  y  $b = 4$ .

**Ejemplo 2.11.** Se considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en función del parámetro  $b \geq 1$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = y^b, \\ \dot{y} = -2y + x^3. \end{cases} \tag{2.5}$$

Nótese que en este sistema  $\lambda = -2 < 0$ , por lo que, para aplicar el Teorema 2.4 se considera el campo vectorial  $G(x, y) = -F(x, y)$ , tal y como se comentó en la Observación 2.6. Igualando las ecuaciones a cero

$$\dot{x} = 0 \iff y^b = 0,$$

$$\dot{y} = 0 \iff -2y + x^3 = 0,$$

se tiene que  $(0, 0)$  es la única singularidad del sistema. La matriz jacobiana del sistema es:

$$DG(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -by^{b-1} \\ -3x^2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Evaluando en la singularidad obtenemos la siguiente matriz diagonal:

$$DG(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sus autovalores son  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = 2$ . Al tener exactamente un autovalor nulo, se deduce que  $(0, 0)$  es una singularidad semihiperbólica. Veamos, ahora, si se verifican las condiciones del Teorema 2.4:

- $A(x, y) = -y^b$  y  $B(x, y) = -x^3$  son funciones analíticas.
- La condición  $A(0, 0) = 0 = B(0, 0)$  se cumple trivialmente.
- $DA(0, 0) = (0, -by^{b-1})|_{(0,0)} = (0, 0)$ .
- $DB(0, 0) = (-3x^2, 0)|_{(0,0)} = (0, 0)$ .

A continuación, se calcula  $y = f(x)$  solución de la ecuación  $2y - x^3 = 0$ :

$$2y - x^3 = 0 \iff 2y = x^3 \iff y = \frac{x^3}{2}.$$

Sea  $g(x) = A(x, f(x)) = (x^3/2)^b = x^{3b}/2^b$ . En este caso,  $g(x)$  es una expresión polinómica de un único término cuya potencia es  $3b$ , por lo que se distinguen los siguientes casos:

- Si  $b \geq 1$  es impar, es decir, si  $b = 2t + 1$  para algún  $t \geq 0$ , entonces, por el Teorema 2.4, se deduce que  $(0, 0)$  es un nodo. Además, como  $\lambda = -2 < 0$ , dicho nodo tendrá carácter atractor.
- Si  $b \geq 1$  es par, es decir, si  $b = 2t$  para algún  $t > 0$ , entonces, por el Teorema 2.4, se tiene que  $(0, 0)$  es una silla-nodo.



## Capítulo 3

# Compactificación de Poincaré

En este capítulo se introducirá la llamada compactificación de Poincaré que permite analizar el comportamiento de las órbitas de un sistema de ecuaciones diferenciales polinomial en un entorno del infinito. Su construcción se basa en la proyección estereográfica de la esfera en un plano, de forma que las singularidades en el infinito se extienden a lo largo del ecuador de la esfera. La compactificación permite dibujar el diagrama de fases en una región finita en lugar de en todo el plano  $\mathbb{R}^2$ . Hasta este momento se ha utilizado la notación  $(x, y)$  para las coordenadas en el plano, pero en este capítulo se utilizarán las coordenadas  $(x_1, x_2)$ .

### 3.1. Construcción de la compactificación

Se considera un sistema de ecuaciones diferenciales polinomial en las variables  $x_1$  y  $x_2$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2), \end{cases}$$

definido por el campo vectorial  $F$ . Sea  $d$  el grado del campo  $F$ , es decir, el máximo de los grados de los polinomios  $P$  y  $Q$ . Veamos cómo se construye la compactificación de Poincaré.

Se considera  $\mathbb{R}^2$  identificado con el plano en  $\mathbb{R}^3$  dado por  $(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, 1)$  y se toma la esfera  $\mathbb{S}^2 = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$ , que llamamos **esfera de Poincaré**, y la dividimos en tres partes:

- El **hemisferio norte**  $H_+ = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 > 0\}$ .
- El **hemisferio sur**  $H_- = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 < 0\}$ .
- El **ecuador**  $\mathbb{S}^1 = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 = 0\}$ .

Se considera la proyección del campo  $F$  en la esfera de Poincaré, dada por las proyecciones centrales,  $f^+, f^-: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ , obtenidas mediante la intersección de la recta pasando por el punto  $y$  y por el origen de la esfera con los hemisferios norte y sur, respectivamente:  $f^+(x) = (x_1/\Delta(x), x_2/\Delta(x), 1/\Delta(x))$  y  $f^-(x) = (-x_1/\Delta(x), -x_2/\Delta(x), -1/\Delta(x))$ , siendo  $\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$ . Estas proyecciones serán de utilidad para el cálculo de los campos vectoriales inducidos en cada uno de los hemisferios. En el hemisferio norte  $H_+$  el campo inducido es  $\bar{F}(y) = Df^+(x)F(x)$  siendo  $y = f^+(x)$ , y en el hemisferio sur  $H^-$ ,  $\bar{F}(y) = Df^-(x)F(x)$ , con  $y = f^-(x)$ . Nótese que estos campos vectoriales inducidos son simétricos con respecto al origen y que están definidos en  $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ . Además, los puntos en el infinito en  $\mathbb{R}^2$  se encuentran en correspondencia biyectiva con el ecuador de la esfera.

El campo vectorial  $\bar{F}$  definido en el anterior párrafo puede extenderse analíticamente a toda la esfera simplemente con multiplicar  $\bar{F}$  por el término  $\rho(y) = (y_3)^{d-1} = 1/\Delta(x)^{d-1}$ . Al campo vectorial definido en  $\mathbb{S}^2$  se le llama **compactificación de Poincaré** del campo vectorial  $F$  y se denota por  $\rho(F)$ .

A continuación, se consideran las seis cartas locales definidas en la esfera  $\mathbb{S}^2$ ,  $(U_i, \varphi_i)$ ,  $(V_i, \psi_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , dadas por los abiertos  $U_i = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_i > 0\}$ ,  $V_i = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_i < 0\}$  y  $\varphi_i, \psi_i$  las aplicaciones locales definidas por  $\varphi_i(y) = -\psi_i(y) = (y_m/y_i, y_n/y_i)$  con  $m < n$  y  $m, n \neq i$ . Se denotará por  $z = (u, v)$  al valor de  $\varphi_i$  o de  $\psi_i$  para cualquier  $i \in \{1, 2, 3\}$ , por lo que en cada carta se trabaja con distintas coordenadas. Nótese que, en cualquiera de las anteriores cartas,  $v = 0$  en los puntos del ecuador de  $\mathbb{S}^2$ .

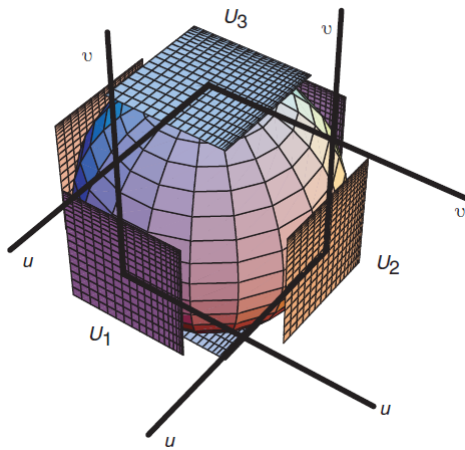


Figura 3.1: Representación gráfica de las cartas locales  $(U_i, \varphi_i)$ ,  $(V_i, \psi_i)$  en la esfera de Poincaré. Esta representación se puede encontrar en [7]

Del total de seis cartas, se determinará, paso a paso, la expresión de la compactificación de Poincaré  $\rho(F)$  en la carta local  $U_1$ . Las expresiones de  $\rho(F)$  en las otras cartas se obtienen de forma análoga. Sea  $\bar{F}(y) = Df^+(x)F(x)$  con  $y = f^+(x)$  y  $F = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$ . Entonces, el campo vectorial definido en la carta  $U_1$  es:

$$\begin{aligned}\bar{F}|_{U_1} &= D\varphi_1(y)\bar{F}(y) = D\varphi_1(y) \circ Df^+(x)F(x) \\ &= D\varphi_1(f^+(x)) \circ Df^+(x)F(x) \\ &= D(\varphi_1 \circ f^+)(x)F(x).\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las siguientes igualdades

$$(\varphi_1 \circ f^+)(x) = \varphi_1 \left( \frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) = \left( \frac{\frac{x_2}{\Delta(x)}}{\frac{x_1}{\Delta(x)}}, \frac{\frac{1}{\Delta(x)}}{\frac{x_1}{\Delta(x)}} \right) = \left( \frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right),$$

$$D(\varphi_1 \circ f^+)(x) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene que el campo vectorial en la carta  $U_1$  es:

$$\begin{aligned}\bar{F}|_{U_1} &= \frac{1}{x_1^2} \begin{pmatrix} -x_2 & x_1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_1^2} (-x_2P(x_1, x_2) + x_1Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2)).\end{aligned}$$

Buscamos, ahora la expresión del campo vectorial en términos de  $(u, v)$ . Utilizando que  $z = (u, v) = (x_2/x_1, 1/x_1)$ , se deduce que  $(x_1, x_2) = (1/v, u/v)$ . Luego, el campo vectorial en la carta  $U_1$  es:

$$\bar{F}|_{U_1} = v^2 \left( -\frac{u}{v}P \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + \frac{1}{v}Q \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right), -P \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right).$$

Sea, ahora,

$$\rho(y) = (y_3)^{d-1} = \frac{1}{\Delta(x)^{d-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{v^2} + \frac{u^2}{v^2} + 1}} = \frac{v^{d-1}}{(\sqrt{1 + u^2 + v^2})^{d-1}}.$$

De este modo, se tiene:

$$\begin{aligned}\rho(y)\bar{F}|_{U_1} &= v^{d-1}m(z)v^2 \left( -\frac{u}{v}P \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + \frac{1}{v}Q \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right), -P \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right) \\ &= v^{d+1}m(z) \left( -\frac{u}{v}P \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + \frac{1}{v}Q \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right), -P \left( \frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right),\end{aligned}$$

donde  $m(z) = (1 + u^2 + v^2)^{\frac{d-1}{2}}$ . La expresión anterior está bien definida en un entorno de  $v = 0$ , pues el término  $v^{d+1}$  elimina las potencias de  $v$  que aparecen en los denominadores, motivo por el cuál está definida en todo  $\mathbb{S}^2$ . Un razonamiento similar sirve para las restantes cartas locales consideradas en la esfera de Poincaré. Realizando un cambio en la variable tiempo, se elimina el término  $m(z)$  y, de este modo, la expresión de la compactificación de Poincaré en la carta  $(U_1, \varphi_1)$  es:

$$\begin{cases} \dot{u} = v^d \left( -uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right), \\ \dot{v} = -v^{d+1}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), \end{cases}$$

En la carta local  $(U_2, \varphi_2)$ , la expresión de la compactificación de Poincaré  $\rho(F)$  es:

$$\begin{cases} \dot{u} = v^d \left( P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - uQ\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right), \\ \dot{v} = -v^{d+1}Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right), \end{cases}$$

y la expresión en la carta local  $(U_3, \varphi_3)$  es:

$$\begin{cases} \dot{u} = P(u, v), \\ \dot{v} = Q(u, v). \end{cases}$$

Nótese que la expresión de la compactificación de Poincaré  $\rho(F)$  en las cartas locales  $(V_i, \psi_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , es igual a la expresión en las cartas  $(U_i, \varphi_i)$  pero multiplicada por el término  $(-1)^{d-1}$ , siendo  $d$  el grado del campo vectorial  $F$ .

En la práctica no se realiza el proceso completo de construcción de la compactificación, sino que se introduce un cambio de coordenadas adecuado. Por ejemplo, para obtener la expresión de la compactificación en la carta  $(U_1, \varphi_1)$  se consideran las coordenadas  $(u, v)$  definidas por  $(x_1, x_2) = (1/v, u/v)$ , obteniendo un campo  $\overline{F}^v$ . De modo análogo, para obtener la expresión en la carta  $(U_2, \varphi_2)$ , se considera el cambio de coordenadas dado por  $(x_1, x_2) = (u/v, 1/v)$ , obteniendo un campo  $\overline{F}^v$ . En ambos casos, multiplicando por el término  $v^{d-1}$  se llega a las expresiones de la compactificación en las dos cartas.

### 3.2. Diagrama de fases en el disco Poincaré

Una vez realizada la construcción de la compactificación de Poincaré, podemos emplearla para obtener los diagramas de fases globales de sistemas polinomiales, pues ahora podemos determinar el comportamiento de las órbitas en un entorno de las singularidades infinitas.

A las singularidades de la compactificación de Poincaré  $\rho(F)$  que se encuentran en  $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$  se le llaman **singularidades finitas** del campo vectorial  $F$ . En caso contrario, es decir, si las singularidades están en el ecuador de la esfera de Poincaré,  $\mathbb{S}^1$ , se dice que son **singularidades infinitas** del campo  $F$ . En la práctica, las singularidades infinitas se corresponden con los puntos  $v = 0$  de la compactificación. Nótese que si  $y \in \mathbb{S}^1$  es una singularidad infinita, entonces también lo es  $-y$ . Por este motivo, como  $\mathbb{S}^1$  es simétrico, dado  $y \in \mathbb{S}^1$ , se deduce que el comportamiento de una órbita en un entorno de  $-y$  coincide con el comportamiento de la órbita en un entorno de  $y$  multiplicada por la constante  $(-1)^{d-1}$ , siendo  $d$  el grado del campo vectorial  $F$ . Luego, se deduce que las órbitas cambian su orientación cuando  $d = 2n$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Además, estos puntos aparecen diametralmente opuestos, por lo que es suficiente con estudiar el comportamiento de uno de ellos.

Se llama **disco de Poincaré** a la proyección ortogonal del hemisferio norte de la esfera de Poincaré en el plano  $y_3 = 0$ , es decir,

$$\mathbb{D}^2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 \leq 1, y_3 = 0\}.$$

Para determinar el diagrama de fases en el disco de Poincaré  $\mathbb{D}^2$ , puesto que el flujo del campo  $\rho(F)$  en la esfera  $\mathbb{S}^2$  es simétrico, es suficiente con considerar el flujo en el hemisferio norte de la esfera y después proyectar sobre el disco de Poincaré.

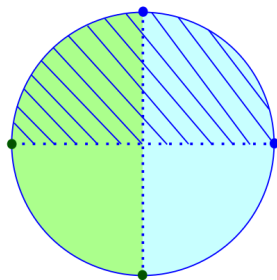


Figura 3.2: Representación del disco de Poincaré. La zona azul representa la proyección de la carta  $U_1$  y la zona rallada la proyección de  $U_2$ . La zona verde corresponde a la carta  $V_1$ . Los puntos azules son los orígenes de las cartas  $U_1$  y  $U_2$  y los verdes representan los orígenes de  $V_1$  y  $V_2$ .

En la práctica, dado un sistema de ecuaciones diferenciales, se estudian, en primer lugar, las singularidades finitas y se determina su diagrama de fases local. Después, se calculan las singularidades infinitas en la expresión de la compactificación en la carta  $(U_1, \varphi_1)$  y se estudia su comportamiento. Para finalizar, se determina si el origen de la carta local

$(U_2, \varphi_2)$  es una singularidad y, en ese caso, se determina su diagrama local. Esto último es debido a que todos los puntos de la frontera del disco de Poincaré, es decir, los puntos del infinito, quedan recubiertos por las cartas locales  $(U_1, \varphi_1)$  y  $(V_1, \psi_1)$  salvo los orígenes de  $(U_2, \varphi_2)$  y  $(V_2, \varphi_2)$ . Además, el comportamiento de las órbitas entorno a las singularidades en las cartas  $(V_i, \psi_i)$ ,  $i = 1, 2$  puede obtenerse a partir de los comportamientos en las singularidades antipodales correspondientes a las cartas  $(U_i, \psi_i)$   $i = 1, 2$ .

A continuación se presentan algunos ejemplos de compactificación de Poincaré y de diagrama de fases en el disco  $\mathbb{D}^2$ , para ver cómo funciona la compactificación de un sistema de ecuaciones diferenciales.

**Ejemplo 3.1.** Se considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales polinomial:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2, \end{cases} \quad (3.1)$$

en las condiciones del Teorema 2.1, con  $A(x_1, x_2) = 0 = B(x_1, x_2)$  (sistema lineal). Sea  $F$  su campo vectorial asociado y  $d = 1$  el grado de dicho sistema. Igualando las ecuaciones a cero, se observa fácilmente que la única singularidad del sistema es el origen. La matriz jacobiana del sistema es:

$$DF(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sus autovalores son  $\lambda_1 = -1 < 0$  y  $\lambda_2 = 1 > 0$ . Aplicando el Teorema 2.1, se deduce que el origen es un punto de silla.

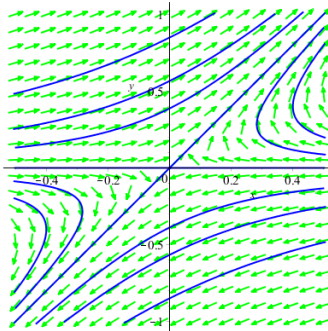


Figura 3.3: Diagrama de fases del sistema (3.1) en un entorno del origen.

Calcularemos, a continuación, las expresiones del campo vectorial compactificado en las cartas locales  $(U_i, \varphi_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

La expresión de la compactificación de Poincaré  $\rho(F)$  en la carta local  $(U_1, \varphi_1)$  es:

$$\begin{cases} \dot{u} = 2u - u^2, \\ \dot{v} = v - uv. \end{cases}$$

Como las singularidades en el infinito son aquellas que verifican  $v = 0$ , se deduce que  $(0, 0)$  y  $(2, 0)$  son las singularidades de este sistema. Veamos de qué tipo son. Para ello, evaluamos la matriz jacobiana en las singularidades y calculamos los autovalores. La matriz jacobiana del sistema en la carta  $(U_1, \varphi_1)$  es:

$$D\rho(F)|_{U_1}(u, v) = \begin{pmatrix} 2 - 2u & 0 \\ -v & 1 - u \end{pmatrix}.$$

Evaluando en las singularidades, se tienen las siguientes matrices diagonales:

$$D\rho(F)|_{U_1}(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D\rho(F)|_{U_1}(2, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -v & 1 - u \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de la matriz  $DF(0, 0)$  son  $\lambda_1 = 2$  y  $\lambda_2 = 1$ . Por lo tanto, el origen es una singularidad hiperbólica. Aplicando el Teorema 2.1, se deduce que el origen es un nodo repulsor. Además, como  $d = 1$  la singularidad antipodal, es decir, el origen de  $V_1$ , también tendrá carácter repulsor. Si se considera la otra singularidad, como sus autovalores son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = -2$ , por el Teorema 2.1, se deduce que  $(2, 0)$  es un nodo atractor. Además, como  $d = 1$ , la singularidad antipodal también tendrá carácter atractor en la carta  $(V_1, \psi_1)$ .

La expresión de la compactificación de Poincaré en la carta local  $(U_2, \varphi_2)$  es:

$$\begin{cases} \dot{u} = -2u + 1, \\ \dot{v} = -v. \end{cases}$$

Se puede comprobar fácilmente que el origen no es una singularidad de este sistema.

Por otra parte, podemos ver que el sistema no presenta ciclos límite. Si existiese algún ciclo límite, en la región que delimita debería existir alguna singularidad finita. En este caso, la única singularidad es el origen, que está sobre el eje horizontal que es invariante, por tanto, si existiese una órbita periódica rodeando al origen, tendría que cortarse con esa recta invariante, lo cual no es posible.

Hemos visto como es el diagrama de fases local de las singularidades finitas. En este caso, tenemos una única singularidad finita, el origen, que es un punto de silla, por lo que sabemos que a él llegan dos separatrices y de él salen otras dos separatrices. Por otra parte,

hemos visto que hay un total de 4 singularidades infinitas, dos de ellas son nodos atractores y las otras dos son nodos repulsivos. Para obtener el diagrama de fases global del sistema (3.1) a partir de esta información lo que hay que hacer es ver todas las posibles formas de que encajen las separatrices, que son las que determinan las regiones canónicas. En este caso, se tiene una única posibilidad, y es que las separatrices que salen del origen vayan a los nodos atractores del infinito y que las dos separatrices que llegan al origen salgan de los nodos repulsivos del infinito. Esto nos delimita 4 regiones canónicas en el disco de Poincaré. Si se representa una órbita en cada región canónica, se obtiene el diagrama de fases global del sistema (3.1) dado en la figura (3.4):

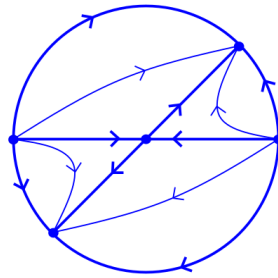


Figura 3.4: Diagrama de fases en el disco de Poincaré del sistema (3.1).

**Ejemplo 3.2.** Se considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en función del parámetro  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1^2 + x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = ax_2^2, \end{cases} \quad (3.2)$$

Sea  $F$  su campo vectorial asociado y  $d = 2$  el grado de dicho sistema. Igualando cada una de las ecuaciones a cero, se tiene que las singularidades del sistema son  $(0, 0)$  y  $(-1/a, 0)$ . La matriz jacobiana del sistema es:

$$DF(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2ax_1 + 1 & 1 \\ 0 & 2ax_2 \end{pmatrix}.$$

Evaluando en las singularidades se tienen las siguientes matrices:

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad DF(-1/a, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de la matriz evaluada en el origen son  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = 0$  y los autovalores de la matriz evaluada en la singularidad  $(-1/a, 0)$  son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = 0$ . Como, en ambos casos, exactamente uno de los autovalores es nulo, se deduce que tanto el origen como el punto  $(-1/a, 0)$  son singularidades semihiperbólicas. Para determinar de qué tipo son

tenemos que aplicar el Teorema 2.4. Para poder aplicarlo debe obtenerse la forma canónica de Jordan de las matrices  $DF(0,0)$  y  $DF(-1/a,0)$  y sus sistemas asociados.

Empezaremos clasificando el origen. Como  $DF(0,0)$  es diagonalizable y sus autovalores son  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = 0$ , la matriz de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Buscamos una matriz  $P \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  tal que  $DF(0,0)P = PJ$ . Tomamos

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuya matriz inversa es:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando la matriz  $P^{-1}$  por las variables  $(x_1, x_2)$  se realiza un cambio de variable  $(x_1, x_2) \rightarrow (x, y)$  y siendo  $x = x_1 + x_2$  e  $y = x_2$ . Teniendo en cuenta que  $\dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2$  y  $\dot{y} = \dot{x}_2$ , el sistema de ecuaciones diferenciales cuya matriz jacobiana está en forma canónica de Jordan es:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - 2ay) + ax^2 + ay^2, \\ \dot{y} = ay^2, \end{cases} \quad (3.3)$$

Para aplicar el Teorema 2.4 se busca  $x = f(y)$  solución de la ecuación  $x(1 - 2ay) + ax^2 + ay^2 = 0$ . En este caso  $B(x, y) = ay^2$ , función que no depende de la variable  $x$  y, por lo tanto, independientemente de la función  $f(y)$  obtenida anteriormente, la función  $g$  del Teorema 2.4 es  $ay^2$ , por lo que el origen es una silla nodo.

Estudiamos, a continuación, la otra singularidad finita. De nuevo hay que obtener la forma canónica de Jordan y aplicar el Teorema 2.4. En primer lugar trasladaremos el sistema (3.2). Nótese que estudiar el origen en el sistema trasladado equivale a estudiar el punto  $(-1/a, 0)$  del sistema (3.2). El sistema de ecuaciones diferenciales trasladado es:

$$\begin{cases} \dot{X} = aX^2 - X + Y, \\ \dot{Y} = aY^2, \end{cases}$$

Sea  $G$  su campo vectorial asociado. La matriz jacobiana del sistema trasladado es:

$$DG(X, Y) = \begin{pmatrix} 2aX - 1 & 1 \\ 0 & 2aY \end{pmatrix}.$$

Evaluando la matriz en el origen, obtenemos la siguiente matriz:

$$DG(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nótese que esta matriz coincide con la matriz  $DF(-1/a, 0)$ , cuyos autovalores hemos calculado anteriormente. Como  $DG(0,0)$  es diagonalizable y sus autovalores son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = 0$ , la forma canónica de Jordan es:

$$J' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Buscamos una matriz  $P' \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  tal que  $DG(0,0)P' = P'J'$ . Tomamos

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuya inversa es:

$$(P')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando la matriz  $(P')^{-1}$  por las variables  $(x_1, x_2)$  se realiza un cambio de variable  $(x_1, x_2) \rightarrow (x, y)$  siendo  $x = X - Y$  e  $y = Y$ . Teniendo en cuenta que  $\dot{x} = \dot{X} - \dot{Y}$  y  $\dot{y} = \dot{Y}$ , el sistema de ecuaciones diferenciales cuya matriz jacobiana está en forma canónica de Jordan es:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2ay - 1) + ax^2, \\ \dot{y} = ay^2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Realizando un razonamiento análogo a lo que ocurría en el caso del origen, se deduce que el punto  $(-1/a, 0)$  es una silla-nodo.

Una vez determinado el carácter de las singularidades finitas, calcularemos las expresiones de la compactificación de Poincaré en las cartas locales  $(U_i, \varphi_i)$ , con  $i = 1, 2$ .

La expresión de la compactificación en la carta  $(U_1, \varphi_1)$  es:

$$\begin{cases} \dot{u} = -u(a + v) + u^2(-v + a), \\ \dot{v} = -av - v^2(1 + u). \end{cases}$$

Como las singularidades infinitas son aquellas que verifican  $v = 0$ , se deduce que las singularidades infinitas en la carta  $(U_1, \varphi_1)$  son  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ . Veamos de qué tipo son. La matriz jacobiana del sistema en la carta  $(U_1, \varphi_1)$  es:

$$D\rho(F)|_{U_1}(u, v) = \begin{pmatrix} -(a + v) + 2u(-v + a) & -u - u^2 \\ -v^2 & -a - 2v(1 + u) \end{pmatrix}.$$

Evaluando en las singularidades se tienen las siguientes matrices:

$$D\rho(F)|_{U_1}(0,0) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \quad D\rho(F)|_{U_1}(1,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de la matriz jacobiana en el origen son  $\lambda_1 = -a = \lambda_2$ . Por el Teorema 2.1, para cualquier valor de  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $(0,0)$  es un nodo en la carta  $(U_1, \varphi_1)$ . Además, si  $a > 0$  dicho nodo será atractor o estable y si  $a < 0$  dicho nodo será repulsor o inestable. Los autovalores de la matriz jacobiana en el punto  $(1,0)$  son  $\lambda_1 = a$  y  $\lambda_2 = -a$ . Aplicando el Teorema 2.1 se deduce que, para cualquier valor de  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $(1,0)$  es un punto de silla. Nótese que, como el grado del sistema (3.2) es  $d = 2$ , los puntos antipodales tienen la estabilidad invertida, es decir, el origen en la carta  $(V_1, \varphi_1)$  es un nodo repulsor (respectivamente atractor) si  $a > 0$  (respectivamente si  $a < 0$ ).

Veamos, ahora, qué ocurre con el origen en la carta  $(U_2, \varphi_2)$ . La expresión de la compactificación en dicha carta es:

$$\begin{cases} \dot{u} = u(v - a) + v + au^2, \\ \dot{v} = -av. \end{cases}$$

Se puede comprobar, fácilmente, que el origen es una singularidad de dicho sistema. La matriz jacobiana es:

$$D\rho(F)|_{U_2}(u,v) = \begin{pmatrix} (v - a) + 2au & u + 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}.$$

Evaluando en el origen se tiene la siguiente matriz:

$$D\rho(F)|_{U_2}(0,0) = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}.$$

Como los autovalores de la matriz  $D\rho(F)|_{U_2}(0,0)$  son  $\lambda_1 = -a = \lambda_2$ , se deduce que el origen de  $(U_2, \varphi_2)$  es un nodo para cualquier valor de  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Además, si  $a > 0$  dicho nodo es atractor o estable y si  $a < 0$  es repulsor o inestable.

Por otra parte, podemos ver que el sistema (3.2) no presenta ciclos límite. Si existiese algún ciclo límite, en la región que delimita debería existir alguna singularidad finita. En este caso, las singularidades finitas son el origen y  $(-1/a, 0)$ , que están sobre el eje horizontal que es invariante, por tanto, si existiese una órbita periódica rodeando alguna de estas singularidades, tendría que cortarse con esa recta invariante, lo cual no es posible.

Se estudiará, en primer lugar, el diagrama de fases global en el disco de Poincaré del sistema (3.2) para el caso  $a > 0$ . Hemos visto que hay dos singularidades finitas, el origen y el punto  $(-1/a, 0)$ , ambos son sillas-nodo. Las singularidades infinitas son, en la carta local  $(U_1, \varphi_1)$  el origen, que es un nodo atractor, y el punto  $(1, 0)$ , que es un punto de silla. En la carta  $(U_2, \varphi_2)$  el origen es un nodo atractor o estable. Nótese que los puntos antipodales tienen la estabilidad invertida. Se estudiará, a continuación, la dirección del flujo. En primer lugar, destacar que el eje horizontal es invariante. En efecto, si se estudia la dirección del flujo en el eje horizontal, como la primera ecuación del sistema (3.2) es  $x_1(ax_1 + 1)$ , se sabe que el flujo avanza hacia la derecha si  $x_1 \in (-\infty, -1/a) \cup (0, \infty)$  y avanza hacia la izquierda si  $x_1 \in (-1/a, 0)$ . Con esta información, se sabe que sobre el eje horizontal hay dos de las separatrices de cada silla-nodo, que serán aquellas que separan los sectores parabólicos de los hiperbólicos. De este modo, sólo quedaría una separatriz que dibujar, la que separa los dos sectores hiperbólicos (una en cada silla-nodo). Para determinarla, nos fijaremos en el coeficiente  $a_m$  del Teorema 2.4, que es el que nos determina en qué dirección avanza el flujo. En este caso  $a_m = a > 0$ , lo que determina que el flujo tiene que avanzar de abajo a arriba, creciendo en el sentido positivo del eje de abscisas. Combinando esta información con la dirección del flujo en el eje horizontal se deduce que la separatriz que falta en el origen tiene que llegar por abajo y en el punto  $(-1/a, 0)$  tiene que salir por arriba. Teniendo en cuenta toda esta información, ya sabemos cuál es el comportamiento local para el caso  $a > 0$ , representado en la figura 3.5:

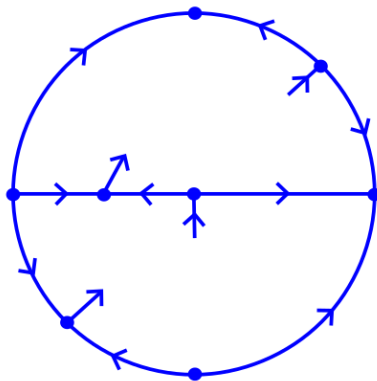


Figura 3.5: Diagrama de fases local en el disco de Poincaré del sistema (3.2) para el caso  $a > 0$ .

Para determinar cuál es el comportamiento global del sistema (3.2) para el caso  $a > 0$  buscamos la forma de que encajen las separatrices. En total, tenemos 3 posibilidades en la parte superior y 3 posibilidades en la inferior, independientes entre sí puesto que, al estar

el eje horizontal formado por separatrices, que en particular son órbitas y las órbitas no pueden cruzarse, las órbitas que estén en la parte de arriba no pueden pasar a la de abajo y viceversa. De este modo, hay un total de 9 diagramas de fases globales representados en la figura 3.6:

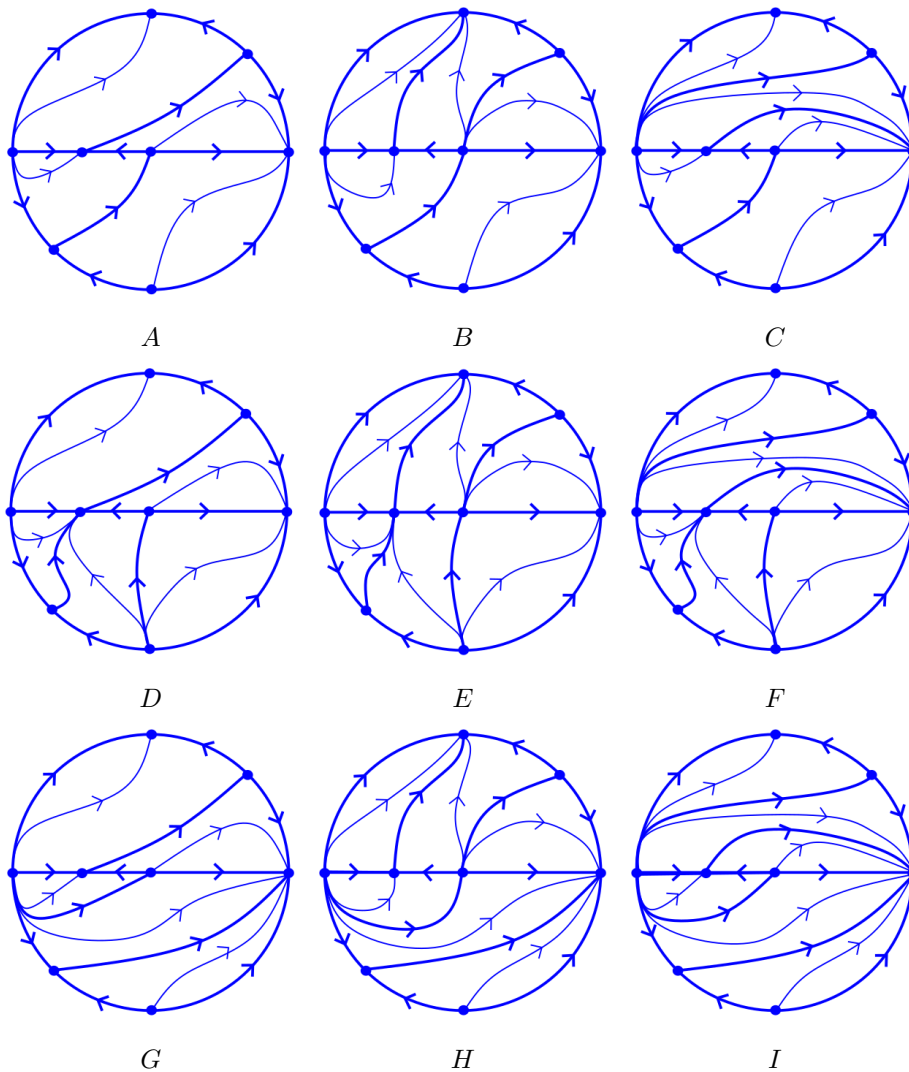


Figura 3.6: Diagramas de fases en el disco de Poincaré del sistema (3.2) para el caso  $a > 0$ .

Veamos qué ocurre en el caso  $a < 0$ . Las singularidades finitas siguen siendo sillanodos. Sin embargo, las singularidades infinitas invierten la estabilidad, es decir, el origen en las cartas locales  $(U_i, \varphi_i)$  es un nodo repulsor y sus puntos antipodales son atractores. La singularidad infinita  $(1, 0)$  de la carta  $(U_1, \varphi_1)$  sigue siendo un punto de silla. Veamos, a continuación, la dirección del flujo. El eje horizontal es invariante, tal y cómo ocurría

en el caso  $a > 0$ . En efecto, si estudiamos la dirección del flujo en dicho eje, teniendo en cuenta que la primera ecuación del sistema (3.2) es  $x_1(ax_1 + 1)$ , se sabe que el flujo avanza hacia la izquierda si  $x_1 \in (-\infty, 0) \cup (-1/a, \infty)$  y avanza hacia la derecha si  $x_1 \in (0, -1/a)$ . Con esta información, se sabe que sobre el eje horizontal hay dos de las separatrices de cada silla-nodo, que serán aquellas que separan los sectores parabólicos de los hiperbólicos, tal y como ocurría en el caso  $a > 0$ . De este modo, sólo quedaría una separatriz, la que separa los dos sectores hiperbólicos de cada silla-nodo. Para determinarla nos fijaremos en el coeficiente  $a_m$  del Teorema (2.4), que es el que determina en qué dirección avanza el flujo. En este caso,  $a_m = a < 0$ , lo que determina que el flujo tiene que avanzar de arriba a abajo, decreciendo en el sentido negativo del eje de abscisas. Combinando esta información con la dirección del flujo en el eje horizontal se deduce que la separatriz que falta tiene que llegar al origen por arriba y la otra tiene que salir del punto  $(-1/a, 0)$  por abajo. Teniendo en cuenta toda esta información, ya se conoce cuál es el comportamiento local para el caso  $a < 0$ , representado en la figura 3.7:

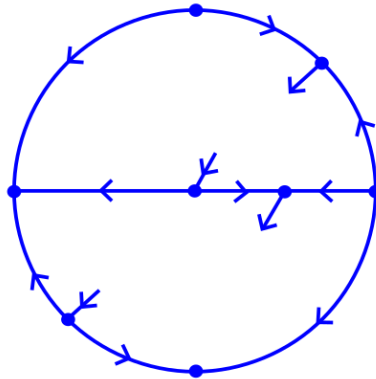


Figura 3.7: Diagrama de fases local en el disco de Poincaré del sistema (3.2) para el caso  $a < 0$ .

De modo análogo al caso  $a < 0$ , para determinar cuál es el diagrama de fases globales del sistema (3.2) buscamos la forma de encajar las separatrices. En total, hay 3 posibilidades en la parte superior y 3 posibilidades en la inferior, independientes entre sí, ya que al estar formado el eje por separatrices, en particular son órbitas, y las órbitas no pueden cortarse, las órbitas de la parte superior no pueden pasar a la inferior y viceversa, tal y como sucedía en el caso  $a > 0$ . Así, tenemos un total de 9 diagramas de fases globales representados en la figura 3.8:

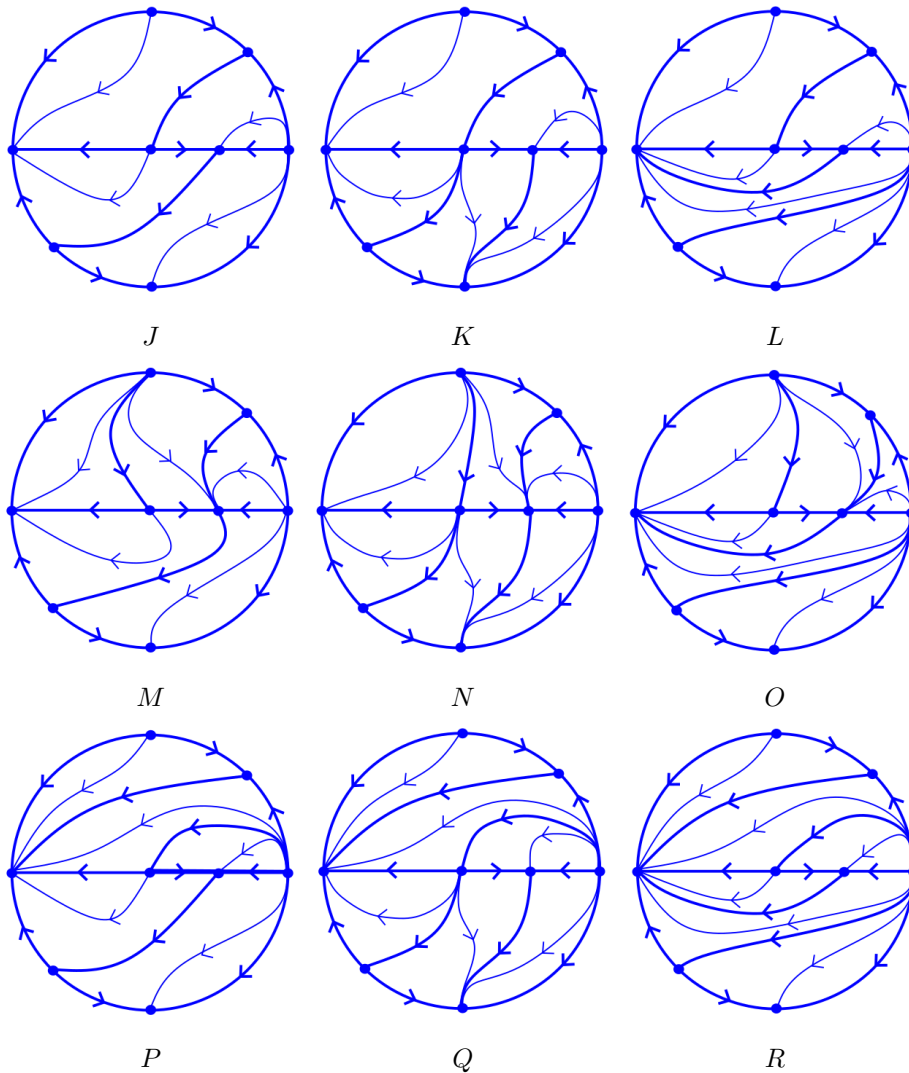


Figura 3.8: Diagramas de fases en el disco de Poincaré del sistema (3.2) para el caso  $a < 0$ .

**Conjetura 3.3.** De los diagramas de fases globales en el disco de Poincaré recogidos en las figuras 3.6 y 3.8 para el sistema (3.2) sólo son realizables el diagrama de fases  $D$  si  $a > 0$  y el diagrama de fases  $M$  si  $a < 0$ .

Comentar que hacemos esta conjetura pues al obtener los diagramas de fases en el programa  $P4$ , variando el valor del parámetro  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , se ha obtenido numéricamente que siempre es ese resultado, aunque no hemos podido probarlo analíticamente. Para más información acerca de la descripción y del funcionamiento del programa  $P4$ , el lector puede consultar el último capítulo de [7].

**Ejemplo 3.4.** Se considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en función del

parámetro  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_2 - (x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = ax_1, \end{cases} \quad (3.5)$$

en las condiciones del Teorema 2.1 para  $A(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$  y  $B(x_1, x_2) = 0$ . Sea  $F$  su campo vectorial asociado y  $d = 2$  el grado de dicho sistema. Igualando cada una de las ecuaciones a cero, se tiene que las singularidades del sistema son  $(0, 0)$  y  $(0, -a)$ . La matriz jacobiana del sistema es:

$$DF(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -2x_1 & -a - 2x_2 \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Evaluando en las singularidades se tienen las siguientes matrices:

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad DF(0, -a) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de la matriz evaluada en el  $(0, 0)$  son  $\lambda_1 = ai$  y  $\lambda_2 = -ai$ . Por el Teorema 2.1, el origen es un centro lineal. Al evaluar la jacobiana en la otra singularidad se tienen los autovalores reales  $\lambda_1 = a$  y  $\lambda_2 = -a$ , por lo que, por el Teorema 2.1,  $(0, -a)$  es un punto de silla.

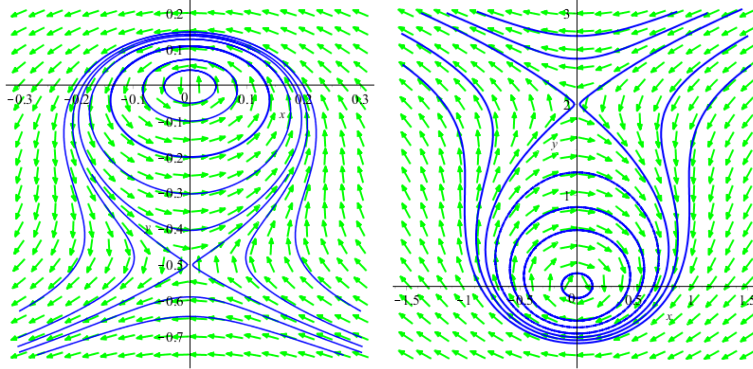


Figura 3.9: Diagramas de fases del sistema (3.5) para los casos  $a = \frac{1}{2}$  y  $a = -2$ . Nótese que el origen es un centro del sistema (3.5).

Una vez determinado el carácter de las singularidades finitas, calcularemos las expresiones de la compactificación de Poincaré en las cartas locales  $(U_i, \varphi_i)$ .

La expresión de la compactificación en la carta  $(U_1, \varphi_1)$  es:

$$\begin{cases} \dot{u} = au^2v + u + u^3 + av, \\ \dot{v} = avv^2 + v + u^2v. \end{cases}$$

Como las singularidades en el infinito son aquellas que verifican  $v = 0$ , se deduce que la única singularidad infinita en la carta  $(U_1, \varphi_1)$  es el origen. Veamos de qué tipo es la singularidad. La matriz jacobiana del sistema definido en la carta  $(U_1, \varphi_1)$  es:

$$D\rho(F)|_{U_1}(u, v) = \begin{pmatrix} 2auv + 3u^2 + 1 & au^2 + a \\ av^2 + 2uv & 2auv + u^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Evaluando en la singularidad se tiene la siguiente matriz:

$$D\rho(F)|_{U_1}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sus autovalores son  $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$ . Así, por el Teorema 2.1, se cumple que el origen es un nodo repulsor del sistema en la carta  $(U_1, \varphi_1)$ . Además, como  $d = 2$ , el punto antipodal será un nodo atractor.

Veamos, ahora, qué ocurre en la carta local  $(U_2, \varphi_2)$ . La expresión de la compactificación de Poincaré en dicha carta es:

$$\begin{cases} \dot{u} = -av - u^2 - 1 - au^2v, \\ \dot{v} = -auv^2. \end{cases}$$

En este caso, el origen de la carta  $(U_2, \varphi_2)$  no es una singularidad infinita.

Hemos visto que hay dos singularidades finitas, el origen y el punto  $(0, -a)$ . Se sabe que  $(0, -a)$  es siempre un punto de silla para cualquier valor de  $a$  pero, para determinar los diagramas de fases globales del sistema (3.5) se distinguen los casos en los que la singularidad está en la parte positiva del eje y cuando está en la parte negativa. En el caso del origen, se sabe que es un centro lineal, por lo que podría ser un centro, un foco atractor o un foco repulsor. Como no entra dentro de los objetivos de este trabajo el resolver el problema centro-foco, se determinarán todos los posibles diagramas de fases globales, considerando los tres tipos de diagramas en un entorno del origen, sin distinguir para que condiciones del parámetro  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  aparecería cada uno de ellos.

Teniendo en cuenta que  $(0, -a)$  es un punto de silla, se sabe que a dicha singularidad llegan dos separatrices y de ella salen otras dos. De este modo, se deduce que en cualquiera de los tres casos hay una separatriz que sale del nodo repulsor del infinito y llega a la singularidad  $(0, -a)$  y otra que sale de ese punto y llega al nodo atractor del infinito. Para las restantes separatrices:

- Si el origen es un centro, puede ocurrir que la separatriz restante sea una órbita homoclínica que salga del punto  $(0, -a)$  y regrese al mismo o una órbita que vaya en espiral hacia una órbita periódica.
- Si el origen es un foco atractor, de las dos separatrices restantes, una sale del  $(0, -a)$  y se enrolla en espiral hacia el origen. La otra sale del nodo repulsor infinito y llega al punto  $(0, -a)$ .
- Si el origen es un foco repulsor, de modo análogo al foco atractor, de las dos separatrices que faltan, una sale de la singularidad  $(0, -a)$  y llega al nodo atractor del infinito. La otra sale en espiral del origen y va al punto  $(0, -a)$ .

En el disco de Poincaré se considera que todas las órbitas en el infinito también son separatrices. De este modo, en los diagramas de fases  $A$  y  $E$  hay tres separatrices el interior del disco, dos singularidades finitas, dos singularidades infinitas, más dos órbitas del infinito que unen las dos singularidades infinitas, lo que hace un total de 9 separatrices; en el resto de gráficas tenemos un total de 10 separatrices. Dichas separatrices nos determinan 3 o 4 regiones canónicas. Dibujando una órbita en cada región canónica se obtiene que el sistema (3.5) podría presentar los diagramas globales en el disco de Poincaré recogidos en la figuras 3.10 y 3.11:

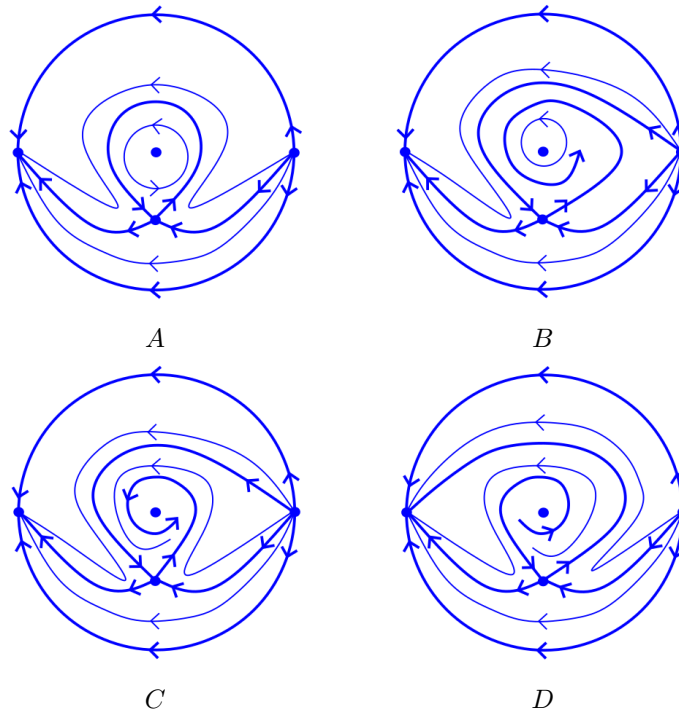


Figura 3.10: Diagramas de fases en el disco de Poincaré del sistema (3.5) para el caso  $a > 0$ .

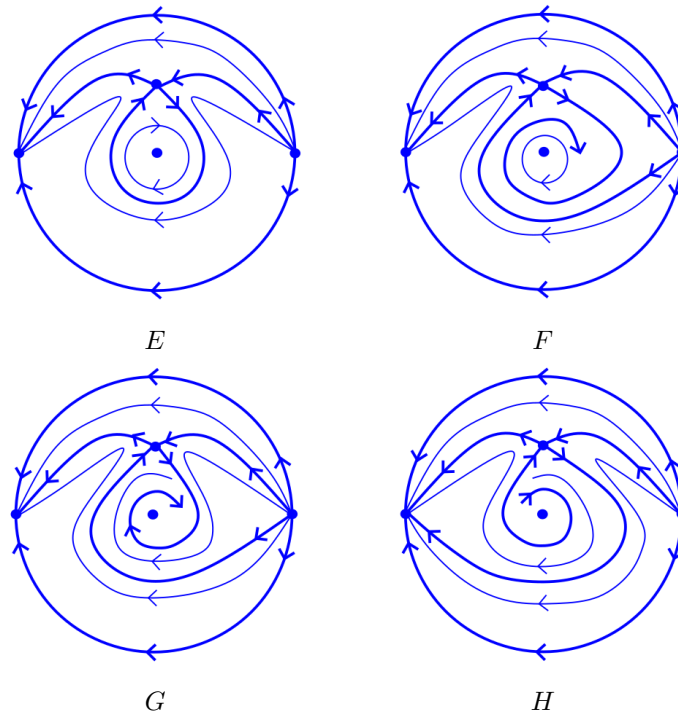


Figura 3.11: Diagramas de fases en el disco de Poincaré del sistema (3.5) para el caso  $a < 0$ .

Hemos estudiado cuáles son diagramas de fases globales que puede presentar el sistema (3.5) en el disco de Poincaré distinguiendo el caso de centro y foco (como hemos comentado anteriormente, para decidir entre centro-foco tendríamos que introducir otras técnicas). Pero no todos estos diagramas de fases son posibles en el disco de Poincaré. Para determinar cuáles son realizables habría que introducir otras técnicas cualitativas, que dejaremos para su estudio en el futuro.



## Capítulo 4

# Aplicaciones de la Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales

### 4.1. Modelo para el latido del corazón

El corazón humano es el órgano encargado de transportar la sangre a todo el cuerpo mediante bombeo. Está formado por dos tipos de elementos, las cavidades y las válvulas y consta de dos circuitos distintos para la sangre: uno de ellos expulsa la sangre hacia los pulmones para recoger oxígeno, mientras que, el otro expulsa la sangre hacia el resto del cuerpo para transportar el oxígeno a todas las células del cuerpo. El primero de ellos se encuentra en el lado derecho del corazón y es de presión baja (para así no dañar la membrana de los pulmones), y el segundo, está en el lado izquierdo, y es de presión alta (así se facilita la transmisión de oxígeno a todas las células del cuerpo).

En el latido del corazón tienen lugar los estados de equilibrio, un estado de contracción y otro de relajación del miocardio de las aurículas y de los ventrículos, llamados sístole y diástole auricular y ventricular, respectivamente. Lo que regula el latido del corazón es la presencia de un marcapasos localizado en la parte superior de la aurícula. El marcapasos desencadena una onda electroquímica en las aurículas causando la contracción de las fibras musculares, extendiendo la sangre al ventrículo causando la sístole ventricular, llevando, así, la sangre a las arterias. Luego, se relajan las fibras musculares, provocando la diástole auricular y ventricular, respectivamente. El proceso se repite posteriormente.

Con el objetivo de desarrollar un modelo matemático que defina el proceso del latido del corazón, se tendrán en cuenta las siguientes condiciones:

- (1) El modelo mostrará un estado de equilibrio, que se corresponde con la diástole.
- (2) Existirá un umbral para activar la onda electroquímica que surge del marcapasos, para causar la sístole.
- (3) Se debe reflejar la rapidez con la que se vuelve al estado de equilibrio.

Antes de introducir el modelo que define el proceso del latido de un corazón, se realizará un poco de experimentación matemática. Sea  $x$  la longitud de la fibra muscular del corazón, referida a un origen adecuado y se considera  $x = 0$  el estado de equilibrio. Sea  $y$  una variable que controla la onda electroquímica del marcapasos. Se pretende buscar una ecuación diferencial que tenga un estado de equilibrio en  $x = 0$  y cuyas soluciones decrezcan rápidamente para tiempos pequeños. La ecuación diferencial que cumple estas características es  $\dot{x} = -x/\epsilon$  siendo  $\epsilon > 0$  un parámetro lo suficientemente pequeño. Esta ecuación diferencial representa muy bien el comportamiento inicial de las fibras musculares que causan la sístole. En relación con la onda electroquímica, se necesita la variable de control  $y$  para representar la expansión lenta de la onda por las aurículas. El modelo simple  $\dot{y} = -y$  representa lo anterior.

El modelo matemático construido con las anteriores propiedades

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{x}{\epsilon}, \\ \dot{y} = -y, \end{cases}$$

no simboliza las propiedades (1) y (2) que debe reflejar el proceso del latido del corazón. De este modo, el modelo matemático que muestra todas las condiciones y que define al latido del corazón es el sistema no lineal:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{(x^3 + ax + y)}{\epsilon}, \\ \dot{y} = x - k, \end{cases}$$

donde  $x$  es la longitud de la fibra muscular del corazón,  $-a$  es un parámetro real positivo definido en el intervalo  $[80, 120]$ ,  $y$  es el control químico,  $k > 0$  es la longitud normal de la fibra muscular durante la diástole, y  $\epsilon > 0$  es un parámetro lo suficientemente pequeño. Este modelo se debe al matemático británico E. C. Zeeman. Se aplicarán los resultados vistos en el Capítulo 2 a este sistema.

Lo primero que se realizará es calcular las singularidades del sistema, para determinar, posteriormente, de qué tipo son. Para ello, se igualan las dos ecuaciones a cero:

$$\dot{x} = 0 \iff -\frac{(x^3 + ax + y)}{\epsilon} = 0,$$

$$\dot{y} = 0 \iff x - k = 0,$$

De este modo, el sistema de ecuaciones diferenciales que define al modelo del latido del corazón posee una única singularidad, en función del parámetro real  $k > 0$ :  $(k, -k^3 - ak)$ . Para determinar de qué tipo es la singularidad, evaluamos la parte lineal del sistema en la singularidad y calculamos sus autovalores:

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{(3x^2 + a)}{\epsilon} & -\frac{1}{\epsilon} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Evaluando en la singularidad:

$$DF(k, -k^3 - ak) = \begin{pmatrix} -\frac{(3k^2 + a)}{\epsilon} & -\frac{1}{\epsilon} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|DF(k, -k^3 - ak) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\frac{(3k^2 + a)}{\epsilon} - \lambda & -\frac{1}{\epsilon} \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{(3k^2 + a)}{\epsilon}\lambda + \frac{1}{\epsilon}.$$

Igualando la expresión anterior a cero y realizando las operaciones adecuadas, se tiene que, los autovalores son:

$$\lambda_1 = \frac{-(a + 3k^2) + \sqrt{(a + 3k^2)^2 - 4\epsilon}}{2\epsilon}, \quad \lambda_2 = \frac{-(a + 3k^2) - \sqrt{(a + 3k^2)^2 - 4\epsilon}}{2\epsilon}.$$

Ahora, teniendo en cuenta que la longitud normal de la fibras muscular del corazón durante la diástole  $k > 0$  es pequeña y que  $-a \in [80, 120]$ , se cumple que  $-a > k$  y como  $\epsilon > 0$  es un parámetro suficientemente pequeño, se deduce que los dos autovalores poseen la parte real no nula. Así, se tiene que  $(k, -k^3 - ak)$  es una singularidad hiperbólica.

El Teorema 2.1 se enuncia para el caso en el que la singularidad que queremos estudiar sea el origen. Por lo tanto, para aplicarlo se trasladará el sistema que define al modelo del latido del corazón. El sistema de ecuaciones trasladado es:

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{-au - v}{\epsilon} + \frac{-u^3 - 3ku^2 - 3k^2u}{\epsilon}, \\ \dot{v} = u, \end{cases}$$

Veamos, a continuación, si se verifican las condiciones del Teorema 2.1:

- $A(u, v) = \frac{-u^3 + 3ku^2 - 3k^2u}{\epsilon}$  y  $B(u, v) = 0$  son funciones analíticas.
- $A(0, 0) = 0 = B(0, 0)$ .

- $DA(0,0) = \left( \frac{-3u^2 - 6ku - 3k^2}{\epsilon}, 0 \right) \Big|_{(0,0)} = (0,0)$ .
- $DB(0,0) = (0,0)$  de forma trivial.

De este modo, por el Teorema 2.1,  $(0,0)$  es un nodo y, como para cualquier valor  $-a \in [80, 120]$ ,  $k > 0$  y  $\epsilon > 0$  se tiene que  $\lambda_1 > 0$ ,  $(0,0)$  es un nodo repulsor o inestable. Por lo tanto,  $(k, -k^3 - ak)$  es un nodo repulsor o inestable del modelo del latido del corazón.

Utilizando la Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales se deduce que el estado de equilibrio  $(k, -k^3 - ak)$ , correspondiente a la diástole (condición (1)), se comporta como un repulsor y que, tras alcanzar la sístole y la relajación de las fibras musculares, el proceso se reinicia, regresando de nuevo al estado de equilibrio. Para más información, el lector puede consultar el libro de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales al campo de la biología [11].

## 4.2. Modelo de FitzHugh-Nagumo para una neurona

Las neuronas son células nerviosas que transmiten información al cerebro mediante la aplicación de un estímulo entrante, es decir, mediante la entrada de una carga eléctrica. Están formadas por tres partes, el cuerpo celular o soma, que contiene al núcleo de la célula, las dendritas y el axón, encargados de recibir y transmitir información a otras células. Además, están recubiertas por una membrana formada por complejos de proteínas y lípidos orientados que constituyen estructuras llamadas canales iónicos, encargadas de regular los procesos de intercambio de iones de sodio y de potasio transmitiendo así la información. Los canales iónicos se activan por voltaje y existen para cada tipo de ión, sodio y potasio. Su función es permitir e impedir el paso de iones, en respuesta a las diferencias de potencial que pueden ocurrir. Estos canales están cerrados cuando la neurona está en reposo, es decir, cuando no transmite información.

¿Cómo funcionan los canales de sodio de la membrana de una neurona para transmitir información?. Cuando una neurona recibe un estímulo, la membrana de la célula se vuelve permeable, activando los canales de sodio y permitiendo la entrada masiva de iones de sodio. De este modo, se aumenta el potencial de la membrana hasta volverse positivo, es decir, el interior de la membrana se vuelve positivo y el exterior, negativo, produciendo la despolarización de la membrana. Después, se cierran los canales de sodio y se abren los de potasio, disminuyendo la acumulación de carga positiva en el interior de la membrana y recuperando el potencial inicial de la neurona (potencial de reposo). Así, la membrana

está repolarizada y produce la estimulación de zonas próximas a ella, repitiendo el proceso explicado. Si el potencial de la membrana alcanza un nivel lo suficientemente alto, la neurona se dispara, transmitiendo la información a otras neuronas. A la diferencia de potencial alcanzada durante el proceso se le llama potencial de acción de la neurona.

Hodking y Huxley construyeron, en el año 1952, un modelo de cuatro ecuaciones diferenciales no lineales para definir las características del potencial de acción de una neurona y su dinámica. Sus estudios demostraron que el voltaje del axón de una neurona de un calamar, generado por una corriente externa, se produce por la permeabilidad iónica de la membrana de la célula nerviosa. En este modelo, todas las variables tienen un gran significado biofísico, pero la dimensión y la no linealidad del sistema de ecuaciones diferenciales que define al modelo complican su análisis cualitativo. Por este motivo, en el año 1962, otros investigadores, como Richard FitzHugh y Jin-ichi Nagumo, con ayuda del trabajo realizado por Balthazar Van der Pol, propusieron, de forma independiente, un modelo que permitía un estudio cualitativo del fenómeno de excitabilidad de una neurona. Este modelo, basado en la ecuación de Van der Pol,  $\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + ax = 0$ , consta de dos ecuaciones diferenciales, una de ellas lineal y la otra de grado 3. Es un modelo de especial interés en la actualidad, pues permite estudiar a los ingenieros y científicos los sistemas de interacción y relajación de una neurona.

Con la finalidad de obtener un modelo simple que describa el potencial de acción de una neurona, se considera  $x$  el potencial de la neurona, de modo que  $x = 0$  es el potencial de reposo de la membrana de la neurona, es decir, el potencial inicial de la membrana de la neurona. Sea  $x = a$ , con  $a \in (0, 1)$ , el potencial por encima del cuál la neurona se dispara, es decir, el potencial para el que se transmite la información, y  $x = 1$  el potencial para el cuál se abren los canales de sodio. La ecuación diferencial

$$\dot{x} = -x(x - a)(x - 1) - y,$$

permite la amplificación de la señal transmitida por la neurona.

Sea, ahora,  $y$  la fuerza del mecanismo de bloqueo, de forma que  $y = 0$  cuando la neurona está en reposo. A medida que  $x$  se aproxima a 1, el mecanismo de bloqueo  $y$  se vuelve más fuerte pero permanece limitado, por lo que se considera la ecuación diferencial

$$\dot{y} = \epsilon(x - \xi y),$$

siendo  $\frac{1}{\xi}$  la fuerza máxima del mecanismo de bloqueo.

De este modo, el sistema de ecuaciones diferenciales que define al modelo de FitzHugh-Nagumo se presenta, normalmente, de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(x-a)(x-1) - y - I, \\ \dot{y} = \epsilon(x - \xi y), \end{cases}$$

siendo  $a$  un parámetro real cuyo valor se fija en el intervalo  $(0, 1)$ ,  $\xi \geq 0$  y  $\epsilon > 0$  un parámetro lo suficientemente pequeño e  $I(t)$  la corriente que se le aplica a la neurona en el tiempo  $t \in \mathbb{R}$ . Se trabajará con el sistema autónomo, es decir, del caso en el que a la neurona no se la aplica ninguna corriente externa:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(x-a)(x-1) - y, \\ \dot{y} = \epsilon(x - \xi y), \end{cases}$$

Una vez explicado la construcción del modelo FitzHugh-Nagumo que define al potencial de acción de una neurona (puede consultarse en [12, pág 218-220]), se procede a realizar un análisis cualitativo del mismo. Para ello, se calcularán, en primer lugar las singularidades del sistema autónomo que define a dicho modelo, igualando ambas ecuaciones a cero:

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 &\iff -x(x-a)(x-1) - y = 0 \iff y = -x(x-a)(x-1), \\ \dot{y} = 0 &\iff \epsilon(x - \xi y) = 0. \end{aligned}$$

Como  $\epsilon > 0$ , de la segunda ecuación se deduce que  $x - \xi y = 0$  y, siempre que  $\xi \neq 0$ , se tiene que  $y = \frac{x}{\xi}$ . De este modo, para que se cumplan las igualdades  $y = -x(x-a)(x-1)$  e  $y = \frac{x}{\xi}$ ,  $\xi \neq 0$ , necesariamente  $x = 0$  e  $y = 0$ , pues, en caso contrario, haciendo operaciones, tendríamos la ecuación, en función de  $x$ ,  $\xi x^2 - x(1+a) + (\xi a + 1) = 0$  y resolviendo, se tiene que  $x = (1+a \pm \sqrt{(1+a)^2 - 4\xi(\xi a + 1)})/2\xi$  con  $a \in (0, 1)$   $\xi > 0$  y  $\epsilon > 0$ , por lo que el discriminante es negativo, y así las soluciones de la ecuación son imaginarias (y esto no nos interesa). De este modo, si  $\xi \neq 0$ , que el sistema que define al modelo de FitzHugh-Nagumo posee una única singularidad, el origen. En caso contrario, el origen también es singularidad.

A continuación, se determinará de que tipo es la singularidad. Para ello se calcula la matriz jacobiana del sistema, se evalúa posteriormente en la singularidad y se calculan sus autovalores. La matriz jacobiana es:

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} -(x-a)(x-1) - x(x-1) - x(x-a) & -1 \\ \epsilon & \xi\epsilon \end{pmatrix}.$$

Evaluando la anterior matriz en el origen, se tiene:

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} -a & -1 \\ \epsilon & -\xi\epsilon \end{pmatrix}.$$

Calculamos sus autovalores:

$$|DF(0,0) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -a - \lambda & -1 \\ \epsilon & -\xi\epsilon - \lambda \end{vmatrix} = (a + \lambda)(\xi\epsilon + \lambda) + \epsilon = \lambda^2 + (a + \xi\epsilon)\lambda + \epsilon(a\xi + 1).$$

Igualando la expresión anterior a cero y realizando las operaciones adecuadas, se tiene que los autovalores de la matriz jacobiana del sistema evaluada en  $(0,0)$  son:

$$\lambda_1 = \frac{-(a + \xi\epsilon) + \sqrt{(a - \xi\epsilon)^2 - 4\epsilon}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-(a + \xi\epsilon) - \sqrt{(a - \xi\epsilon)^2 - 4\epsilon}}{2}.$$

Teniendo en cuenta que fijados  $a \in (0,1)$ ,  $\xi \geq 0$  y  $\epsilon > 0$ , se verifica que  $a \neq -\xi\epsilon$ , la parte real de los autovalores es no nula. Por lo tanto,  $(0,0)$  es una singularidad hiperbólica para cualesquiera valores de  $a \in (0,1)$ ,  $\xi \geq 0$  y  $\epsilon > 0$ .

Se determinará, a continuación, si se verifican las condiciones del Teorema 2.1. Para ello, realizamos operaciones necesarias en el sistema de ecuaciones diferenciales que define el potencial de acción de una neurona, obteniendo:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y - x^3 - x^2(1 + a), \\ \dot{y} = -\epsilon x - \xi\epsilon y, \end{cases}$$

- $A(x, y) = -x^3 - x^2(1 + a)$  y  $B(x, y) = 0$  son funciones analíticas.
- La condición  $A(0,0) = 0 = B(0,0)$  se cumple trivialmente.
- $DA(0,0) = (-3x^2 - x(1 + a), 0)|_{(0,0)} = (0,0)$ .
- $DB(0,0) = (0,0)$ , de forma trivial.

Se cumplen las condiciones del Teorema 2.1. Fijados  $a \in (0,1)$ ,  $\xi \geq 0$  y  $\epsilon > 0$ , como  $(a - \xi\epsilon) > 0$  y  $\epsilon > 0$  es lo suficientemente pequeño, se cumple que el discriminante es positivo. De este modo, los autovalores son reales. Así, por el Teorema 2.1, el origen es un nodo. Además, como  $\lambda_1 < 0$  para cualesquiera valores de  $a \in (0,1)$ ,  $\xi \geq 0$  y  $\epsilon > 0$ , se tiene que  $(0,0)$  es un nodo atractor o estable.

Utilizando la Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales en este modelo, se puede concluir que el potencial de acción de una neurona tiene un comportamiento atractor y

que, si se aumenta el potencial a uno adecuado para que la neurona transmita la información a otra, este potencial se recupera poco después volviendo al potencial de reposo, es decir, se recupera volviendo al estado de equilibrio del sistema que define a este modelo. Para ampliar la información y ver, por ejemplo, lo que ocurre en el caso en el que se aplica una corriente externa a la neurona (caso no autónomo), el lector puede consultar el artículo [13, pág. 18-21].

### 4.3. Modelo de Selkov

Todo organismo necesita de un proceso de obtención de energía para realizar los procesos mecánicos. Esta energía se obtiene a través de los alimentos mediante procesos metabólicos, es decir, mediante reacciones químicas que degradan energía libre (*ATP*). La glucólisis es un proceso mediante el que la glucosa se degrada en *ADP* para después transformarse en energía almacenada como *ATP*. Selkov propuso un modelo para describir las oscilaciones que tienen lugar durante el proceso de la glucólisis. Su modelo se define mediante un sistema de ecuaciones diferenciales de grado  $d = 3$  y en función de los parámetros cinéticos  $a$  y  $b$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ay + x^2y, \\ \dot{y} = b - ay - x^2y, \end{cases} \quad (4.1)$$

siendo  $x$  e  $y$  concentraciones de *ATP* y *ADP*, respectivamente. Nótese que la simetría  $(x, y, b) \rightarrow (-x, -y, -b)$  deja invariante el sistema anterior, por lo que es suficiente con estudiar el modelo para el caso  $b \geq 0$ .

Sea  $F$  el campo vectorial asociado a dicho sistema. Igualando cada una de las ecuaciones a cero

$$\dot{x} = 0 \iff -a + ay + x^2y = 0,$$

$$\dot{y} = 0 \iff b - ay - x^2y = 0,$$

se tiene que las singularidades del sistema son  $(b, b/(a + b^2))$  siempre que  $a \neq -b^2$ . En otro caso, el sistema no posee singularidades finitas. Supongamos, por lo tanto, que  $a \neq -b^2$ . Veamos de qué tipo es la singularidad. Para ello calculamos la matriz jacobiana del sistema, evaluamos en la singularidad y calculamos sus autovalores. La matriz jacobiana es:

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} -1 + 2xy & a + x^2 \\ -2xy & -a - x^2 \end{pmatrix}.$$

Evaluando en la singularidad, se tiene la siguiente matriz:

$$DF\left(b, \frac{b}{a+b^2}\right) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2b^2}{a+b^2} & a+b^2 \\ -\frac{a}{a+b^2} & -a-b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b^2-a}{a+b^2} & a+b^2 \\ -\frac{a}{a+b^2} & -a-b^2 \end{pmatrix}.$$

Sus autovalores son

$$\lambda_1 = \frac{-(a-b^2+(a+b^2)^2) + \sqrt{(a(1+a)+(2a-1)b^2+b^4)^2 - 4(a+b^2)^3}}{2(a+b^2)},$$

$$\lambda_2 = \frac{-(a-b^2+(a+b^2)^2) - \sqrt{(a(1+a)+(2a-1)b^2+b^4)^2 - 4(a+b^2)^3}}{2(a+b^2)}.$$

Para estudiar el comportamiento de las órbitas entorno a la singularidad, necesitamos estudiar el signo del discriminante de los autovalores. Para que sea más sencillo, se consideran las siguientes curvas (ver el artículo [14]):

$$\alpha_1: a = \frac{1}{2} \left( 1 - 2\sqrt{2b} - 2b^2 \mp \sqrt{1 - 4\sqrt{2b}} \right),$$

$$\alpha_2: a = \frac{1}{2} \left( 1 + 2\sqrt{2b} - 2b^2 + \sqrt{1 - 4\sqrt{2b}} \right),$$

$$\alpha_3: a = \frac{1}{2} \left( 1 + 2\sqrt{2b} - 2b^2 - \sqrt{1 - 4\sqrt{2b}} \right),$$

$$\beta: a = \frac{1}{2} \left( -1 - 2b^2 + \sqrt{1 + 8b^2} \right),$$

$$\gamma: a = -b^2.$$

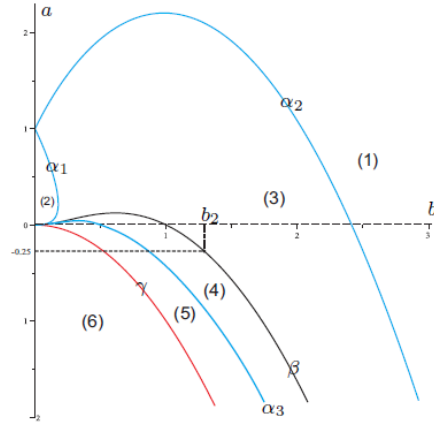


Figura 4.1: Representación gráfica de las curvas definidas anteriormente. La figura se puede encontrar en [14].

Dependiendo de la zona, se distinguen los siguientes casos:

- En las regiones (1) y (2) y sobre las curvas  $\alpha_1, \alpha_2$ , la singularidad  $(b, b/a + b^2)$  es un nodo atractor o estable.

- En la zona (3) la singularidad  $(b, b/a + b^2)$  es un foco atractor o estable. Lo mismo ocurre sobre la curva  $\beta$  con  $b \leq b_2$ .
- En la zona (4) la singularidad  $(b, b/a + b^2)$  es un foco repulsor o inestable. Lo mismo ocurre sobre la curva  $\beta$  con  $b > b_2$ .
- En la zona (5) y sobre la curva  $\alpha_3$ , la singularidad  $(b, b/a + b^2)$  es un nodo repulsor o inestable.
- En la zona (6) y sobre la curva  $\gamma$ , la singularidad  $(b, b/a + b^2)$  es un punto de silla.

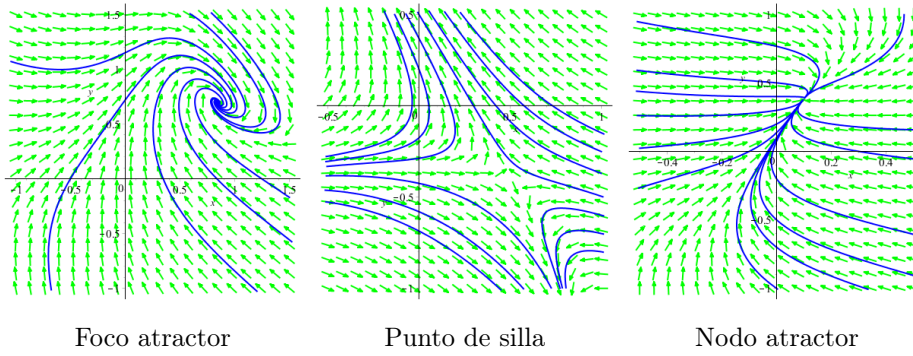


Figura 4.2: Diagramas de fases del modelo de Selkov para los casos  $a = 0.5, b = 0.85$ ;  $a = -1.5, b = 0.5$  y  $a = 0.25, b = 0.1$ . Las singularidades correspondientes a esos valores son  $(0.85, 0.69)$ ,  $(0.5, -0.4)$  y  $(0.1, 0.38)$ , respectivamente.

Veamos, ahora, cuáles son las singularidades infinitas. Para ello, calculamos las expresiones de la compactificación de Poincaré en las cartas locales  $(U_i, \varphi_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

La expresión de la compactificación de Poincaré  $\rho(F)$  en la carta local  $(U_1, \varphi_1)$  es:

$$\begin{cases} \dot{u} = -u - u^2 + (1 - a)uv^2 + bv^3 - au^2v^2, \\ \dot{v} = -v(u - v^2 + auv^2). \end{cases}$$

Como las singularidades en el infinito son aquellas que verifican  $v = 0$ , se deduce que las singularidades de este sistema son  $(0, 0)$  y  $(-1, 0)$ . Veamos de qué tipo son las singularidades. La matriz jacobiana de este sistema es:

$$D\rho(F)|_{U_1}(u, v) = \begin{pmatrix} -1 - 2u + (1 - a)v^2 - 2auv^2 & 2(1 - a)uv + 3bv^2 - 2au^2v \\ -v(1 + av^2) & -(u - v^2 + auv^2) - v(-2v + 2auv) \end{pmatrix}.$$

Evaluando en las singularidades, obtenemos las siguientes matrices diagonales:

$$D\rho(F)|_{U_1}(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D\rho(F)|_{U_1}(-1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de la matriz  $D\rho(F)|_{U_1}(0,0)$  son  $\lambda_1 = -1 = \lambda$  y  $\lambda_2 = 0$ . Por lo tanto, el origen es una singularidad semihiperbólica. Aplicando el Teorema 2.4 se deduce que el origen es un punto de silla. Nótese que, como  $d = 3$ , su punto antipodal también será un punto de silla. Si consideramos la otra singularidad, como los autovalores de  $D\rho(F)|_{U_1}(-1,0)$  son  $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$ , se deduce que  $(-1,0)$  es un nodo repulsor. Además, como  $d = 3$ , su punto antipodal también será un nodo repulsor.

Veamos, ahora, qué ocurre con el origen en la carta  $(U_2, \varphi_2)$ . La expresión de la compactificación en dicha carta es:

$$\begin{cases} \dot{u} = u^2 + av^2 + u^3 + (a-1)uv^2 - buv^3, \\ \dot{v} = v(u^2 + av^2 - bv^3). \end{cases}$$

La matriz jacobiana de este sistema es:

$$D\rho(F)|_{U_2}(u,v) = \begin{pmatrix} 2u + 3u^2 + (a-1)v^2 - bv^3 & 2av + 2(a-1)uv - 3buv^2 \\ 2uv & (u^2 + av^2 - bv^3) + v(2av - 3bv^2) \end{pmatrix}.$$

Evaluando en el origen, obtenemos la siguiente matriz:

$$D\rho(F)|_{U_2}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz  $D\rho(F)|_{U_2}(0,0)$  es idénticamente nula, por lo que el origen es una singularidad linealmente cero del sistema definido en la carta  $(U_2, \varphi_2)$ . Para determinar el diagrama de fases local de este tipo de singularidades, la técnica más habitual es la conocida como Blow-ups, que debe aplicarse en cada caso concreto para determinar el tipo de sectores que rodea cada singularidad y su posición relativa. Esta técnica excede los objetivos de este trabajo, por lo que no nos detendremos en analizar su aplicación, que puede verse en el artículo [14]. Para más información sobre la técnica de los Blow-ups puede consultarse el artículo [15] y las referencias allí incluidas.

Utilizando la técnica de los Blow-ups se determina que el origen de la carta local  $(U_2, \varphi_2)$  puede tener una de las siguientes posibilidades recogidas en la figura 4.3:

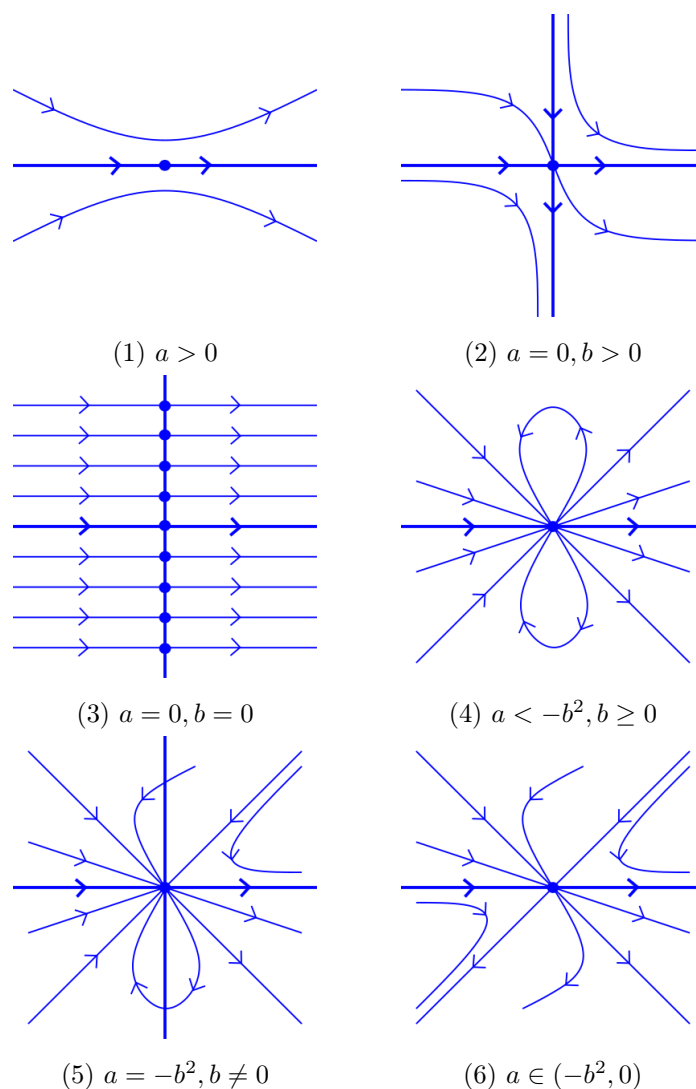


Figura 4.3: Diagrama de fases local del origen de la carta  $(U_2, \varphi_2)$ .

En la figura 4.3 aparecen distintos tipos de sectores, dos en la gráfica (1) y cuatro en las restantes (salvo en (3), que comentaremos más adelante). En (1) tenemos dos sectores hiperbólicos. En (2) aparecen dos hiperbólicos y dos parabólicos, uno atractor y otro repulsor. En (4) tenemos dos sectores elípticos y dos parabólicos, uno atractor y otro repulsor. En (5) aparecen un sector elíptico, uno hiperbólico, un parabólico atractor y otro repulsor. Finalmente, en (6) tenemos dos sectores hiperbólicos, uno parabólico atractor y otro repulsor.

Nótese que, en el caso  $a = 0 = b$  se obtiene una recta formada por singularidades, por lo que no se puede aplicar el Teorema de Markus Neuman Peixoto para determinar el diagrama de fases global. Entonces, si se realiza el cambio de variable  $ds = xdt$ , el sistema

(4.1), para  $a = 0 = b$  se transformaría en:

$$\begin{cases} \dot{x} = -1 + xy, \\ \dot{y} = -xy \end{cases} \quad (4.2)$$

cuyo diagrama de fases global se puede ver en la figura 4.4.

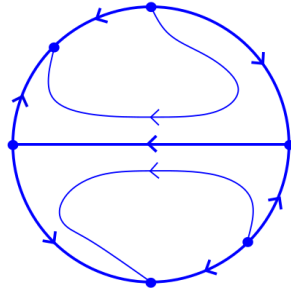


Figura 4.4: Diagrama de fases global del sistema (4.2).

Ahora, si se añade la recta de singularidades y se deshace el cambio de variable (cambiando el sentido de las órbitas en el lado  $x < 0$ ), se obtiene el diagrama de fases de la figura 4.5:

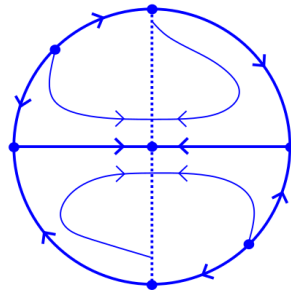


Figura 4.5: Diagrama de fases global del modelo de Selkov para el caso  $a = 0 = b$ .

En el artículo también se realiza numéricamente un estudio detallado de los ciclos límite del modelo de Selkov. Para más información, el lector puede consultar el artículo [14].

Aplicando la técnica de los Blow-ups y tras el estudio numérico sobre los ciclos límites, se obtiene toda la información local en el disco de Poincaré, recogida en la figura 4.6:

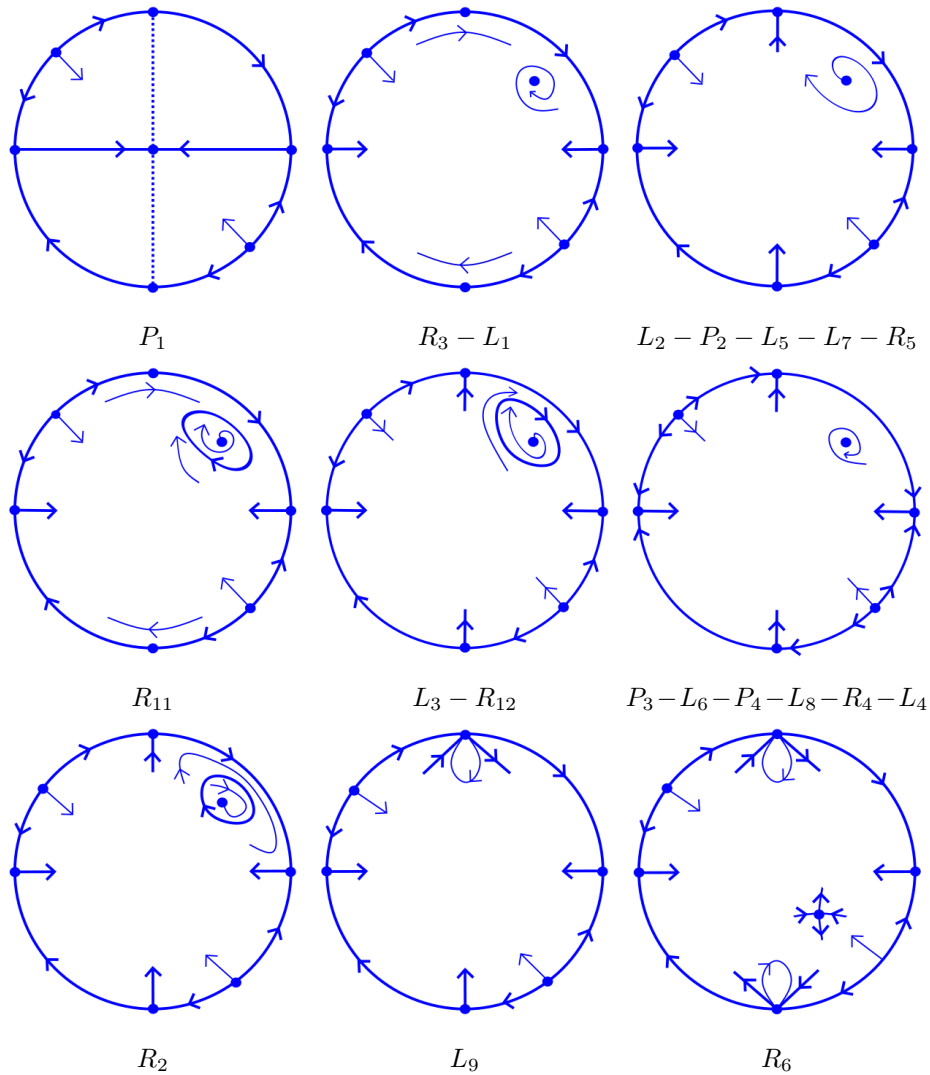


Figura 4.6: Diagramas de fases locales en el disco de Poincaré del modelo de Selkov. Los puntos de la frontera del disco son las singularidades infinitas y, en el interior, se representa el comportamiento en un entorno de las singularidades y los ciclos límite del sistema que define al modelo de Selkov.

A partir de las gráficas anteriores, en las que se muestra el comportamiento local del sistema (4.1) que define al modelo de Selkov entorno a las singularidades y los ciclos límites obtenidos, deben estudiarse todas las posibilidades que existen para la configuración de las separatrices. Una vez determinadas todas las posibles configuraciones, consideramos también una órbita en cada región canónica, obteniendo así los diagramas de fases globales en el disco de Poincaré dados en la figura 4.7:

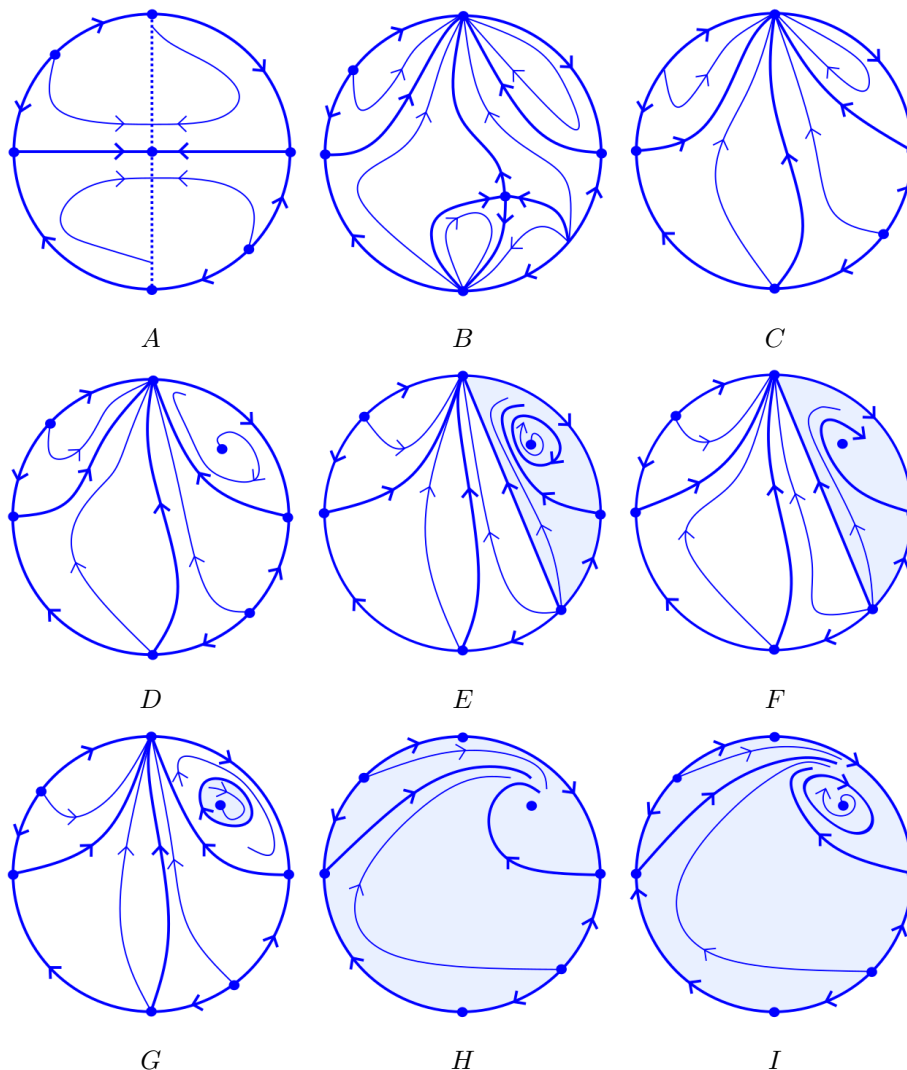


Figura 4.7: Diagramas de fases en el disco de Poincaré del modelo de Selkov.

Para terminar el modelo de Selkov podemos concluir que, en la figura 4.7, las zonas sombreadas se corresponden con las condiciones iniciales de las órbitas que poseen una evolución final finita. Estas son las condiciones iniciales con significado biológico. Lo que ocurre es que, en los diagramas de fases *E* e *I*, el comportamiento final de las órbitas es un ciclo límite estable mientras que, en los diagramas de fases *F*, *G* y *H* el comportamiento final es una singularidad.



# Bibliografía

- [1] M. Kline, *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Alianza Editorial, Madrid, 1972.
- [2] J. Benítez López, *Breve historia de las ecuaciones diferenciales*, Universidad Politécnica de Valencia, 2008.
- [3] S. M. Stigler, *P. S. Laplace, Théorie analytique des probabilités, first edition(1812); Essai philosophique sur les probabilités, first edition (1814)*, Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940, 329-340, 2005.
- [4] A. Cauchy, *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique*, Bachelier, Imprimeur-Libraire de l'École Polytechnique, Paris, 1841.
- [5] C. Gilain, *La théorie qualitative de Poincaré et le problème de l'intégration des équations différentielles*, *La France mathématique. La Société mathématique de France*, 1991, p. 215-242.
- [6] I. Bendixon, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, *Acta Mathematica*, **24**(1)(1901), 1-88.
- [7] F. Dumortier, J.Llibre, J.C. Artés, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, UniversiText, SpringerVerlag, New York, 2006.
- [8] V. Jiménez López, *Ecuaciones diferenciales, cómo aprenderlas, cómo enseñarlas*, Universidad de Murcia, 2000.
- [9] J. Sotomayor, *Equações Diferenciais*, Textos universitários de IME-USP, 2011.
- [10] G. Rodríguez, *Diferenciación de Funciones de Varias Variables Reales*, Manuais Universitarios, n° 4, Publicações da Universidade de Santiago, 2003.
- [11] D. S. Jones, B. D. Sleeman, *Differential equations and Mathematical Biology*, Chapman & Hall/CRC, 2003.

- [12] Fred Brauer, Carlos Castillo-Chavez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Springer, 2010.
- [13] C. B. Montoya, H. C. Calvet, A. C. Ledesma, *Análisis y Simulación con INTEGRA del modelo de FitzHugh-Nagumo para una neurona*, *Aportaciones Matemáticas*, 2003, n° 32, p. 31-49.
- [14] J. Llibre, A. Nabavi, *Phase portraits of the Selkov Model in the Poincaré Disc*.
- [15] M. J. Álvarez, A. Ferragut and X. Jarque, *A survey on the blow up technique*, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 21, n° 11 (2011) 3103–3118.
- [16] L. Liu, K. W. Ding, H. Chen, *Dynamical analysis of a Lotka-Volterra Learning-Process Model*, *Journal of applied analysis and computation*, vol. 9, n° 5, p. 1855-1871, 2019, Wilmington Scientific Publisher.
- [17] H. Deng, F. Chen, Z. Zhu, Z. Li, *Dynamic behaviors of Lotka–Volterra predator–prey model incorporating predator cannibalism*, *Advances in Difference Equations*, 2019.
- [18] V. Hernández Suárez, *Estudio de las singularidades en la ecuación de Van der Pol*, 1990.
- [19] H. Cao, H. Wu, X. Wang, *Bifurcation analysis of a discrete SIR epidemic model with constant recovery*, *Advances in Difference Equations*, 2020, vol. 2020, n° 1, p. 49, Springer.
- [20] E. B. Postnikov, *Estimation of COVID-19 dynamics “on a back-of-envelope”: Does the simplest SIR model provide quantitative parameters and predictions?*, *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 135, p. 109841, 2020, Elsevier.

# Índice alfabético

$\alpha$ -límite, 4

$\omega$ -límite, 4

## A,

acción adjunta, 13

## B,

Blow-ups, 59

## C,

campo vectorial, 1

carta local, 30, 31, 35, 58

centro, 8, 10, 22

    lineal, 6, 8, 16, 22

compactificación de Poincaré, 29–32, 34, 35,  
58

conjugación topológica, 3, 19

conjunto

$\alpha$ -límite, 4, 8

$\omega$ -límite, 4, 8

corchete de Lie, 14, 17, 18

## D,

descomposición sectorial, 8

diagrama de fases, 3

disco de Poincaré, 33

## E,

ecuación de Van der Pol, 53

ecuación diferencial autónoma, 1

equivalencia topológica, 3, 10

esfera de Poincaré, 29, 32

esqueleto completo de las separatrices, 11

estado de equilibrio, 52

## F,

flujo, 2

    anular, 10

    lineal, 10

    nodal, 10

    paralelo, 10, 11

foco, 10

    “débil”, 16

    “fuerte”, 16

    atractor, 8, 15, 21, 58

    repulsor, 8, 15, 21, 58

forma canónica de Jordan, 7

función analítica, 14, 19

## L,

lipschitziana, 2

localmente lipschitziana, 2, 10

## M,

matriz jacobiana, 6

modelo de FitzHugh-Nagumo, 52, 54

modelo de Selkov, 56

modelo para el latido del corazón, 49

## N,

nodo, 9

atractor, 8, 15, 21, 27, 35, 39, 55, 57  
 repulsor, 8, 15, 20, 21, 23, 24, 35, 39, 42,  
 52, 58, 59

**O,**

órbita, 3  
 degenerada, 3  
 periódica, 3, 10  
 regular, 3  
 periódica, 8

**P,**

proyección estereográfica, 29  
 punto  
 de silla, 10, 15, 20, 26, 34, 39, 42, 58, 59  
 hiperbólico, 7  
 regular, 2  
 semihiperbólico, 8  
 singular, 2

**R,**

región canónica, 10

**S,**

sección, 4  
 transversal, 4, 9  
 transversal local, 4  
 sector  
 hiperbólico, 8, 20  
 parabólico, 20  
 atractor, 8  
 repulsor, 8  
 semiórbita  
 negativa, 3  
 positiva, 3  
 separatriz, 10  
 serie de Taylor, 18  
 silla-nodo, 20, 26, 27, 38, 42

singularidad, 2, 6, 10  
 aislada, 8, 11, 14, 19  
 finita, 33  
 hiperbólica, 6, 22, 55  
 infinita, 33  
 linealmente cero, 6, 59  
 nilpotente, 6  
 no degenerada, 6  
 semihiperbólica, 6, 24, 25, 27, 35, 59  
 solución maximal, 2

**T,**

Teoría cualitativa, 52, 55  
 Teorema  
 de Borel, 14  
 de la Forma Normal Formal, 14, 17  
 de la función inversa, 4, 5  
 de las singularidades no degeneradas, 14  
 de las singularidades semihiperbólicas,  
 19  
 de Markus-Neumann-Peixoto, 11  
 de Picard-Lipschitz, 2  
 del flujo tubular, 5  
 topológicamente  
 conjugados, 3  
 equivalentes, 3, 11

**V,**

variedad  
 central, 20  
 inestable fuerte, 19