



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Máster

Soluciones periódicas para ecuaciones diferenciales singulares

María Pérez Armesto

2024–2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Máster

SOLUCIONES PERIÓDICAS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES SINGULARES

María Pérez Armesto

Julio, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Análisis Matemático
Título: Soluciones periódicas para ecuaciones diferenciales singulares
Breve descripción del contenido
<p>Las ecuaciones diferenciales singulares poseen muchas aplicaciones reales, algunas de las cuales involucran el estudio de fuerzas de tipo gravitacional y electromagnético o, incluso, la dinámica intermolecular. En muchas ocasiones, en el proceso de modelización de estos problemas, el término no lineal tiende a infinito a medida que la variable dependiente se aproxima a un cierto valor, dando lugar a una familia de ecuaciones diferenciales denominadas singulares, cuyo estudio analítico y cualitativo es de gran interés.</p> <p>Los objetivos del TFM consisten en el estudio dinámico de ciertos ejemplos de ecuaciones de segundo orden con singularidades, atendiendo, en particular, a la existencia de soluciones periódicas. Se analizarán algunos tipos de coeficientes y términos singulares para los cuales existen soluciones periódicas, así como algunos criterios de no existencia particulares. Otra cuestión de interés puede ser el manejo de condiciones que caractericen la existencia de soluciones periódicas positivas a algunas ecuaciones sencillas, en función del tipo de singularidad presente.</p>

Índice

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Técnicas para el estudio del problema de frontera periódico	1
1.1. Problema de punto fijo asociado	2
1.2. Grado topológico	6
1.2.1. El grado de Brouwer	6
1.2.2. El grado de Leray-Schauder	8
1.3. Teoremas de punto fijo	10
1.4. Método de las sub y sobresoluciones	13
2. Concepto de ecuación diferencial singular	17
2.1. Una introducción a través de ejemplos	17
2.2. Definición y clasificación de las singularidades	20
2.3. Problemas de valor inicial y de frontera	22
3. Algunas ecuaciones diferenciales singulares sin rozamiento	25
3.1. Las ecuaciones de Lazer-Solimini	25
3.2. Las ecuaciones de Emdem-Fowler con exponente negativo	36
3.3. Otras ecuaciones singulares sin rozamiento	50
4. Algunas ecuaciones diferenciales singulares con rozamiento	53
4.1. Aplicaciones del Teorema de Manásevich-Mawhin	54
4.2. Puntos fijos de la aplicación de Poincaré	65

4.3. Generalizaciones de la ecuación de Liénard	73
Conclusión	75
Bibliografía	77

Resumen

Las ecuaciones diferenciales singulares presentan algún término que, en algún punto de su dominio, tiende al infinito, lo cual ocurre habitualmente al tratar con problemas de electromagnetismo o mecánica. En este trabajo, tras exponer algunas técnicas útiles en el estudio de problemas de frontera periódicos, introduciremos el concepto de ecuación diferencial singular a través de ejemplos y comentaremos las dos clasificaciones de las singularidades más comunes en los textos. Posteriormente, aplicaremos las técnicas mencionadas para probar la existencia de solución periódica positiva para distintas familias de ecuaciones diferenciales singulares de segundo orden, distinguiendo entre aquellas sin rozamiento, esto es, en las que no interviene la derivada primera, de aquellas con rozamiento.

Abstract

Singular differential equations present some term tending to infinity at some point in their domain, which often occurs when dealing with problems in electromagnetism or mechanics. In this work, after presenting some useful techniques for the study of periodic boundary value problems, we will introduce the concept of singular differential equations through examples and we will comment the two most common classifications of singularities found in the literature. Afterwards, we will apply the mentioned techniques to prove the existence of positive periodic solutions for different families of second-order singular differential equations, distinguishing between those without damping, that is, those in which the first derivative does not appear, and those with damping.

Introducción

Las ecuaciones diferenciales constituyen una herramienta fundamental para la modelización de sucesos reales, de modo que estos pueden ser estudiados matemáticamente. Al tratar ciertos problemas de la física, por ejemplo en mecánica, electromagnetismo o dinámica celeste, o de la química, por ejemplo en dinámica intermolecular, a través de una ecuación diferencial, suele intervenir, en dicha ecuación, un término que tiende a infinito en algún punto del dominio. Aparecen, así, las llamadas *ecuaciones diferenciales singulares*, cuyos principales aspectos serán abordados en este trabajo.

Una enorme cantidad de problemas físicos se modelizan a través de ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma

$$x'' = F(t, x, x').$$

Las singularidades de F , esto es, los puntos donde F tiende al infinito, pueden referirse al comportamiento en la variable t , en x o en x' . El caso singular en t ha sido extensamente estudiado y, por ello, aquí se tratará fundamentalmente el caso singular en x . Podemos establecer, para estas ecuaciones, distintos problemas de frontera, como el de Dirichlet o el de Neumann, y nosotros estudiaremos el *problema de frontera periódico* por ser el que menos atención ha recibido en los textos que tratan ecuaciones singulares.

En el Capítulo 1, exploramos distintas técnicas para el estudio de los problemas de frontera periódicos para ecuaciones diferenciales en general. Por una parte, expondremos el problema de punto fijo asociado a un problema periódico y proporcionaremos distintos resultados de existencia de punto fijo, basados en los grados topológicos de Brouwer y de Leray-Schauder. Por otra parte, comentaremos el método de las sub y sobresoluciones para garantizar la existencia de solución a problemas periódicos.

En el Capítulo 2, introducimos el concepto de ecuación diferencial singular, primero, a través de ejemplos de la física y, después, de manera formal. Comentaremos las dos clasificaciones de los términos singulares más comunes en los textos: según la fuerza y según su influencia en la dinámica del sistema. Finalmente, comentamos los distintos problemas de frontera para ecuaciones diferenciales singulares y determinamos condiciones necesarias para que exista solución T -periódica para ciertas ecuaciones diferenciales singulares.

En el Capítulo 3, exponemos resultados de existencia de solución T -periódica para ecuaciones diferenciales singulares sin rozamiento, esto es, en las que no interviene la derivada primera.

Las ecuaciones que estudiamos son las de Lazer-Solimini, las primeras para las que se estudió el problema periódico, y las de Emden-Fowler con exponente negativo. Las primeras son un ejemplo de ecuaciones en las que los términos singulares tienen la dinámica claramente determinada, mientras que, en las segundas, el término singular es indefinido. También comentaremos resultados obtenidos para otras ecuaciones diferenciales singulares, sin demostración.

En el Capítulo 4, tratamos con ecuaciones diferenciales singulares con rozamiento, en las que interviene la derivada primera. De nuevo, tratamos con dos familias de ecuaciones: en la primera, los términos singulares son de la forma $1/x^p$ y, en la segunda, son términos singulares generales con singularidad débil. La forma de trabajar con estas dos ecuaciones es muy distinta: en la primera, procedemos aplicando un resultado basado en el grado topológico de Brouwer, mientras que, en el segundo caso, estudiamos si la aplicación de Poincaré del sistema asociado posee puntos fijos a través de funciones de Lyapunov. Finalmente, comentamos qué otras generalizaciones se podrían considerar para las ecuaciones diferenciales singulares con rozamiento y, brevemente, cómo se podría tratar el caso de singularidad en x' .

Capítulo 1

Técnicas para el estudio del problema de frontera periódico

En este trabajo, tratamos con ecuaciones diferenciales de orden dos de la forma

$$x''(t) = F(t, x(t), x'(t)), \quad (1.1)$$

con F una función real definida en $\mathbb{R} \times \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y T -periódica, con $T > 0$, respecto de la primera variable, es decir, tal que, para todo x e y , se cumple que

$$F(t + T, x, y) = F(t, x, y).$$

Una solución $x = x(t)$ de la ecuación (1.1) es T -periódica si $x(t) = x(t + T)$ para todo t en su dominio. Claramente, una solución T -periódica de (1.1) es solución del problema

$$\begin{cases} x''(t) = F(t, x(t), x'(t)), \\ x(0) = x(T), \\ x'(0) = x'(T) \end{cases} \quad (1.2)$$

y, recíprocamente, toda solución de este problema es una solución T -periódica de la ecuación diferencial (1.1). Esto ocurre no solo para funciones $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sino también para $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, como comprobamos en el siguiente resultado.

Proposición 1.1. *Sea $F: \mathbb{R} \times \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase uno y T -periódica respecto de la primera variable. Entonces x es una solución T -periódica de (1.1) si, y solo si, es solución de (1.1) y cumple que $x(0) = x(T)$ y $x'(0) = x'(T)$.*

Demostración. Sea x una solución T -periódica de la ecuación (1.1). Claramente, $x(0) = x(T)$ y, además,

$$x'(T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(T+h) - x(T)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(h) - x(0)}{h} = x'(0).$$

Recíprocamente, sea x una solución de la ecuación (1.1) que cumple que $x(0) = x(T) = x_0$ y $x'(0) = x'(T) = y_0$. Definimos la función y dada por $y(t) := x(t + T)$. Tenemos que

$$y''(t) = x''(t + T) = F(t + T, x(t + T), x'(t + T)) = F(t, y(t), y'(t)),$$

en cuya última igualdad hemos aplicado que F es T -periódica en la primera variable. Ocurre también que

$$y(0) = x(T) = x(0) = x_0 \quad \text{e} \quad y'(0) = x'(T) = x'(0) = y_0.$$

Por tanto, las funciones x e y son ambas solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x''(t) = F(t, x(t), x'(t)), \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = y_0, \end{cases}$$

que, por hipótesis, posee solución única. En consecuencia, $x(t) = y(t) = x(t + T)$ para todo t y x es T -periódica. \square

El problema periódico asociado a una ecuación diferencial ha sido ampliamente estudiado y se han desarrollado numerosas herramientas para determinar la existencia y unicidad de solución. En este capítulo exponemos, entre otros, el problema de punto fijo funcional asociado al problema periódico y algunos teoremas de existencia de punto fijo, la aplicación de Poincaré para el estudio del problema periódico de una ecuación diferencial y el método de las sub y sobresoluciones para determinar la existencia de solución para problemas de frontera. Estas técnicas nos resultarán de utilidad en este trabajo para el estudio del problema periódico asociado a una ecuación diferencial singular.

1.1. Problema de punto fijo asociado

Todo problema diferencial con condiciones de frontera tiene asociado un problema de punto fijo que se obtiene al traducir el problema a una expresión funcional. La existencia de solución para problemas de punto fijo ha sido extensamente estudiada, lo que nos ofrece diversas técnicas para trabajar con el problema periódico (1.2). En esta sección, vamos a describir tal problema funcional. Para ello, expondremos las herramientas de grado topológico necesarias, daremos teoremas de existencia de punto fijo y comentaremos la definición de la aplicación de Poincaré. Seguiremos las referencias [6, 15], entre otras.

Trabajaremos con aplicaciones $L: X \rightarrow Y$, con X e Y espacios de Banach, esto es, espacios vectoriales dotados de una norma $\|\cdot\|$ respecto a la cual son completos. En el contexto de los problemas de punto fijo, $X \subseteq Y$. Algunos ejemplos de espacios de Banach que serán de interés en este trabajo son los siguientes:

- El espacio de las funciones continuas en un intervalo compacto, $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$, con la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$, dada por $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$ (que es, por ser $[a, b]$ compacto, el máximo de f).

- El espacio de las funciones continuas y T -periódicas $\mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathbb{R})$ dotado de la norma $\|\cdot\|$ dada por $\|f\| = \max_{t \in [0, T]} |f(t)|$. Notemos que $\mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathbb{R})$ y $\mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$ son espacios vectoriales distintos con la misma norma, siendo toda función en el primero restringida a $[0, T]$ un elemento del segundo. Vamos a verificar que, en efecto, es espacio de Banach dotado de esta norma.

- Comprobemos que $(\mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ es un espacio normado. En primer lugar, dada $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|\lambda f\| = \max_{t \in [0, T]} |\lambda f(t)| = \max_{t \in [0, T]} |\lambda| |f(t)| = |\lambda| \max_{t \in [0, T]} |f(t)| = |\lambda| \|f\|.$$

En segundo lugar, dadas $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathbb{R})$, se satisface la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \max_{t \in [0, T]} |f(t) + g(t)| \leq \max_{t \in [0, T]} [|f(t)| + |g(t)|] \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} |f(t)| + \max_{t \in [0, T]} |g(t)| = \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

Finalmente, es claro que $\|f\| \geq 0$ para todo $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathbb{R})$ y que, si $\|f\| = 0$, entonces $f = 0$, no solo en $[0, T]$, sino en todo \mathbb{R} por T -periodicidad.

- Veamos ahora que, dotado de la norma $\|\cdot\|$, $\mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathbb{R})$ es completo. Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathbb{R})$. La sucesión $\{f_n|_{[0, T]}\}_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$, espacio de Banach con la norma del supremo, luego existe $f \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

En particular, dado $t \in [0, T]$,

$$0 < |f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Por tanto, siendo $f_n(0) = f_n(T)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, también se tiene la igualdad $f(0) = f(T)$. Así, la función f admite una extensión T -periódica continua definida en \mathbb{R} , que también denotamos por f . Que $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathbb{R})$ se deduce de que $\mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$ y $\mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathbb{R})$ tienen la misma norma.

- Los espacios $L^p(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ con $p \in [1, +\infty]$ con la norma $\|\cdot\|_p$ dada por $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$ para $p < \infty$ y $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$. También los subespacios $L^p([a, b]; \mathbb{R})$, $a < b$, $p \in [1, +\infty]$, con las mismas normas adaptadas al intervalo $[a, b]$.
- El espacio de las funciones integrables y T -periódicas $L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathbb{R})$ con la norma $\|\cdot\|_1$ dada por $\|f\|_1 = \int_0^T |f(t)| dt$. Se prueba de forma análoga a como probamos que $\mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathbb{R})$ es espacio de Banach sabiendo que lo es $\mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Otros espacios funcionales con los que trataremos son los espacios de Sobolev

$$W^{n,p}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f^{(k)} \in L^p(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \forall k = 1, \dots, n\}, \quad n, p \in \mathbb{N}.$$

A los elementos de $W^{1,1}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ también se les denomina funciones absolutamente continuas.

Usaremos tanto las notaciones anteriores como $\mathcal{C}([0, T])$, $\mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$, etc., sobreentendiendo que el codominio es \mathbb{R} . También denotaremos por $\|\cdot\|_\infty$ a la norma del supremo para funciones entre espacios X e Y cualesquiera, y no solo entre intervalos compactos de \mathbb{R} y \mathbb{R} .

La composición de la aplicación de Nemytskii y el operador integral con núcleo la función de Green

En el caso de los problemas diferenciales donde la variable dependiente aparece de forma lineal, la existencia de solución está caracterizada por las llamadas funciones de Green [5]. Sea $L: X \rightarrow X$ el operador lineal que permite escribir la ecuación diferencial como $Lx = f$, por ejemplo, $Lx(t) = x''(t)$, y añadamos a esta ecuación unas condiciones de frontera. En nuestro contexto, tratamos con condiciones periódicas, funciones $x: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y problemas de la forma

$$\begin{cases} Lx(t) = f(t), & t \in [0, T], \\ x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T). \end{cases}$$

Si la única solución del problema de frontera asociado a la ecuación $Lx = 0$ es la solución trivial, $x(t) = 0$, entonces L es invertible y su operador inverso, L^{-1} , está caracterizado por un núcleo integral $G: [0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $G = G(t, s)$, llamado función de Green. La solución del problema de frontera asociado a $Lx = f$ viene dada por

$$x(t) = L^{-1}f(t) = \int_0^T G(t, s)f(s)ds, \quad t \in [0, T].$$

La función G depende tanto de L como de las condiciones de frontera. Por ejemplo, en un problema periódico, se cumple que $G(t+T, s) = G(t, s)$ y $G(t, s+T) = G(t, s)$ para todo t y s (e igualmente para sus derivadas respecto a t y a s), pudiendo extenderse G con T -periodicidad a todo \mathbb{R}^2 , mientras que en un problema de Dirichlet, $G(0, s) = G(T, s) = 0$ para todo $s \in (0, T)$.

En el caso de los problemas no lineales, lo anterior no aplica inmediatamente y tenemos que hacer uso de la aplicación de Nemytskii. Consideremos ahora una ecuación diferencial escrita en la forma

$$Lx + Nx = f,$$

donde $L: X \rightarrow X$ es un operador lineal y $N: X \rightarrow X$ una aplicación no lineal y añadamos unas ciertas condiciones de frontera. Podemos considerar la ecuación equivalente

$$Lx = f - Nx.$$

Supongamos que la única solución del problema de frontera asociado a $Lx = 0$ es la trivial. Fijado $y \in X$, deducimos por lo anterior que la solución de $Lx = f - Ny$ viene dada por

$$x(t) = \int_0^T G(t, s)(f(s) - Ny(s)) ds, \quad t \in [0, T].$$

Por tanto, si existe solución de nuestro problema, debe satisfacer la ecuación anterior para $y = x$. No tenemos garantizada su existencia, como sí ocurría en el caso lineal e invertible.

En general, trataremos con $Lx = x''$ y una ecuación diferencial

$$x'' = F(t, x, x')$$

con F no lineal. Llamamos *aplicación de Nemytskii* [22] a $N: X \rightarrow Y$ dada por

$$(Nx)(t) = F(t, x(t), x'(t)), \quad t \in [0, T].$$

Definimos el operador $K: Y \rightarrow X$ dado por

$$(Kh)(t) = \int_0^T G(t, s)h(s)ds, \quad t \in [0, T],$$

siendo G la función de Green asociada al problema $Lx = f$ con las condiciones de frontera que correspondan. Si existe solución del problema diferencial, vendrá dada por

$$x(t) = \int_0^T G(t, s)F(s, x(s), x'(s))ds = \int_0^T G(t, s)(Nx)(s)ds = (K \circ Nx)(t), \quad t \in [0, T].$$

Para probar la existencia de solución, basta ver que la aplicación $K \circ N: X \rightarrow X$ tiene al menos un punto fijo. Así será como procederemos en la segunda sección del Capítulo 3.

Aplicación de Poincaré

Otra aplicación de interés en el estudio del problema periódico asociado a una ecuación diferencial es la *aplicación de Poincaré*. Esta aplicación se define para ecuaciones diferenciales en general, no solo para el estudio del problema periódico. Para introducir este concepto, hemos consultado [7].

Consideremos una ecuación diferencial $x' = f(t, x)$ con $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Notemos que la ecuación $x'' = F(t, x, x')$, con $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se puede escribir como el sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = F(t, x, y), \end{cases}$$

que se puede ver como la ecuación $z' = f(t, z)$, con $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(t, x, y) = (y, F(t, x, y))$.

En condiciones de existencia y unicidad, esto es, f continua y localmente lipschitziana respecto a x , denotaremos a la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

por $x(t; t_0, x_0)$. Una solución T -periódica $x = x(t)$ de la ecuación diferencial debe satisfacer que $x(t) = x(t+T)$ para todo t en su dominio. Si la función f es T -periódica, entonces x está definida en todo \mathbb{R} .

Definición 1.2. La *aplicación de Poincaré* asociada a la ecuación $x' = f(t, x)$, con f una función continua y localmente lipschitziana respecto a x , es la aplicación $P_T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $P_T(x_0) = x(T; 0, x_0)$.

Si la función f es T -periódica, la condición inicial de una solución T -periódica de la ecuación $x' = f(t, x)$ es un punto fijo de la aplicación de Poincaré. En efecto, si x es una solución de la ecuación que satisface $x(t) = x(t + T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$P_T(x(0)) = x(T; 0, x(0)) = x(T) = x(0).$$

Recíprocamente, si x_0 es un punto fijo de la aplicación de Poincaré, entonces la solución x dada por $x(t) = x(t; 0, x_0)$ es T -periódica. Notemos, además, que la aplicación de Poincaré es continua si f depende continuamente de las condiciones iniciales.

En el Capítulo 4, probaremos que la aplicación de Poincaré asociada a una ecuación diferencial de segundo orden posee un punto fijo. Nos podemos preguntar si este punto fijo corresponde a una solución T -periódica o si, por el contrario, la solución que obtenemos admite un periodo menor que T o, incluso, si es un punto crítico del sistema. En general, hay que comprobar este hecho pero, como trataremos con un sistema de la forma $x'' = F(t, x, x')$, con F de periodo mínimo T respecto a t , la solución x será de periodo mínimo T .

1.2. Grado topológico

La teoría de grado topológico es un pilar fundamental en el estudio de problemas de frontera asociados a ecuaciones diferenciales. Un *grado topológico* es una aplicación que asocia a un subconjunto acotado y abierto Ω de un espacio de Banach X y a una aplicación $L: \Omega \rightarrow X$ cumpliendo ciertas hipótesis un entero $\deg(I - L, \Omega)$ que satisface ciertos axiomas. Las propiedades que cumplen los grados de Brouwer y Leray-Schauder permiten obtener resultados de existencia de puntos $x \in \Omega$ tales que $(I - L)x = 0$, es decir, puntos fijos de L en Ω .

1.2.1. El grado de Brouwer

El grado de Brouwer se define para aplicaciones f definidas entre espacios de dimensión finita. Por simplicidad, exponemos estos resultados para $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dada una tal función, decimos que x es un punto crítico si la jacobiana de f en x , $Df(x)$, tiene rango menor que n , y que es regular en otro caso.

Definición 1.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función en $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$. Sea S el conjunto de puntos críticos de f y $b \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$. Definimos el *grado de Brouwer* de f en Ω respecto a b como

$$\deg_B(f, \Omega, b) = \begin{cases} 0, & \text{si } f^{-1}(b) = \emptyset, \\ \sum_{x \in f^{-1}(b)} \text{signo}(\det(Df(x))), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para funciones $F: \Omega \subset V \rightarrow V$ con $\dim V = n$, se puede definir el grado tomando una base \mathcal{B} de V y estableciendo un isomorfismo entre \mathcal{B} y la base canónica de \mathbb{R}^n . Se puede probar que el grado es independiente de la elección de \mathcal{B} , pues se aplica un cambio de coordenadas y el signo del determinante de Df no cambia.

Debemos distinguir entre aquellos puntos que son regulares de aquellos singulares pues, en estos últimos, $Df(x)$ tiene determinante nulo y, por tanto, no podemos garantizar que f sea invertible en aquellos $b \in f(S)$. Aún así, la definición de grado de Brouwer se puede extender también a los puntos críticos e, incluso, a funciones $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuas, pero no de clase uno. Para ello, se prueban los resultados auxiliares siguientes.

Proposición 1.4. Sean $f \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$, $b \notin f(\partial\Omega)$ y $d_0 = d(b, f(\partial\Omega)) > 0$. Consideremos dos puntos $b_1, b_2 \in B(b; d_0)$, con $b_1, b_2 \notin f(S)$. Entonces $\deg_B(f, \Omega, b_1) = \deg_B(f, \Omega, b_2)$.

Proposición 1.5. Sean $f, g \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ y $b \notin f(\partial\Omega)$. Entonces existe $\varepsilon = \varepsilon(f, g, \Omega) > 0$ tal que para $0 < |t| < \varepsilon$, $\deg_B(f + tg, \Omega, b) = \deg_B(f, \Omega, b)$.

Estos resultados permiten extender la Definición 1.3. En el caso de un punto crítico de f , la Proposición 1.4 permite comprobar que la siguiente es una buena definición.

Definición 1.6. Sea $f \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, $b \notin f(\partial\Omega)$ y $d_0 = d(b, f(\partial\Omega))$. Definimos el *grado de Brouwer* de f en Ω respecto a b como $\deg_B(f, \Omega, b) := \deg_B(f, \Omega, b')$ para cualquier $b' \in B(b; d_0)$ valor regular de f .

Por su parte, la Proposición 1.5 permite extender la noción de grado de Brouwer a funciones g continuas, pero no de clase uno.

Definición 1.7. Sean $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, $b \notin f(\partial\Omega)$ y $d_0 := d(b, f(\partial\Omega))$. Definimos el *grado de Brouwer* de f en Ω respecto a b como $\deg_B(f, \Omega, b) := \deg_B(g, \Omega, b)$ para cualquier $g \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - g\|_\infty < d_0/2$.

La siguiente propiedad del grado de Brouwer es la que lo convierte en una herramienta tan importante aplicada a los problemas de punto fijo.

Proposición 1.8. Si $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ y $b \notin f(\bar{\Omega})$, entonces $\deg_B(f, \Omega, b) = 0$. Recíprocamente, si $\deg_B(f, \Omega, b) = 0$, entonces existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = b$.

Pese a ser una herramienta muy útil en el estudio de los problemas de punto fijo, no vamos a profundizar en sus propiedades. En este trabajo, lo emplearemos para aplicar el Teorema de Manásevich-Mawhin (Teorema 1.20) en el Capítulo 4. En tal momento, lo aplicaremos a funciones de la forma $q: [r_0, r_1] \rightarrow \mathbb{R}$, para las que podemos calcular su grado de Brouwer a través del siguiente resultado.

Corolario 1.9. Sea $a < b$ y $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Se cumple que

$$\deg_B(f, (a, b), 0) = \begin{cases} 0, & \text{si } f(a)f(b) > 0, \\ 1, & \text{si } f(a) < 0 < f(b), \\ -1, & \text{si } f(a) > 0 > f(b). \end{cases}$$

1.2.2. El grado de Leray-Schauder

El grado de Leray-Schauder es una generalización del grado de Brouwer para ciertas aplicaciones entre espacios de dimensión infinita. Estas aplicaciones son las de la forma $I - L$, con I la aplicación identidad de X y L una aplicación continua y compacta.

Definición 1.10. Sean X e Y espacios de Banach, $\Omega \subset X$ un conjunto abierto y $L: \bar{\Omega} \rightarrow Y$ una aplicación continua. Decimos que L es *compacta* si lleva conjuntos acotados de X en conjuntos relativamente compactos de Y , esto es, conjuntos con clausura compacta en Y .

En [15], se construye el grado de Leray-Schauder a partir del grado de Brouwer. Se comienza definiendo este grado para aplicaciones de la forma $I - L$ con L de rango finito, esto es, $L: X \rightarrow Y$ entre espacios de Banach tales que $L(X)$ está contenido en un subespacio de dimensión finita de Y . Después, se prueba que toda aplicación continua y compacta se puede aproximar a partir de aplicaciones de rango finito y se define el grado de $I - L$, siendo ahora L continua y compacta, como el de $I - \hat{L}$ con \hat{L} de rango finito suficientemente cerca de L en norma. Finalmente, se comprueba que esta es una buena definición. Posteriormente, se estudian sus propiedades: normalización, aditividad, invarianza respecto a homotopías, entre otras.

En [6], por el contrario, definen el grado de Leray-Schauder de forma axiomática como una aplicación que asigna a conjuntos $\Omega \subset X$ abiertos y acotados y a ciertas aplicaciones L continuas y compactas un entero $\deg_{LS}(I - L, \Omega)$ cumpliendo las propiedades de normalización, aditividad e invarianza respecto a homotopías.

Ambas definiciones son equivalentes: en [18, capítulo 5], se prueba que esta aplicación, definida de forma axiomática, existe, es única y que coincide con el grado de Leray-Schauder construido a partir del de Brouwer. Nosotros daremos la definición axiomática por motivos de extensión.

Definición 1.11 ([6]). Sea X un espacio vectorial normado e I su aplicación identidad. El *grado de Leray-Schauder* es una aplicación, denotada por \deg_{LS} , que asigna a cualquier $\Omega \subset X$ subconjunto abierto y acotado y a cualquier aplicación $L: \Omega \rightarrow X$ continua y compacta con $x \neq Lx$ para todo $x \in \partial\Omega$ un entero $\deg_{LS}(I - L, \Omega, 0)$ cumpliendo las siguientes propiedades:

1. *Normalización*: si $0 \in \Omega$, entonces $\deg_{LS}(I, \Omega, 0) = 1$, mientras que si $0 \notin \bar{\Omega}$, entonces $\deg(I, \Omega, 0) = 0$.
2. *Aditividad*: sean Ω_1 y Ω_2 dos subconjuntos abiertos, acotados y disjuntos de X tales que $0 \notin (I - L)(\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2)$. Entonces

$$\deg_{LS}(I - L, \Omega_1 \cup \Omega_2, 0) = \deg_{LS}(I - L, \Omega_1, 0) + \deg_{LS}(I - L, \Omega_2, 0).$$

3. *Invarianza respecto a homotopías*: sea $H: [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow X$ continua, compacta y tal que $0 \notin (I - H)([0, 1] \times \partial\Omega)$. Entonces $\deg_{LS}(I - H(t, \cdot), \Omega, 0)$ es independiente de t .

A $\deg_{LS}(I - L, \Omega, 0)$ se le denomina grado de Leray-Schauder de $I - L$ en Ω (respecto al cero).

Observación 1.12. Podríamos haber definido el grado de Leray-Schauder respecto a un $b \notin L(\partial\Omega)$ no necesariamente nulo, como hacíamos con el grado de Brouwer. Se puede probar que

$$\deg_{LS}(I - L, \Omega, b) = \deg_{LS}(I - (L + b), \Omega, 0)$$

y $L + b$, una traslación de L , es continua y compacta si, y solo si, lo es L . Lo mismo ocurre con el grado de Brouwer.

Observación 1.13. El grado de Brouwer también satisface las propiedades de normalización, aditividad e invarianza respecto a homotopías en el caso de dimensión finita. También se prueba en [18] que, igual que el grado de Leray-Schauder, estas propiedades lo caracterizan en el caso de dimensión finita.

Observación 1.14. Por la propiedad de aditividad, $\deg_{LS}(I - L, \emptyset, 0) = 2 \deg_{LS}(I - L, \emptyset, 0)$, luego $\deg_{LS}(I - L, \emptyset, 0) = 0$.

Propiedades del grado de Leray-Schauder

Veamos ahora algunas propiedades del grado de Leray-Schauder que utilizaremos en este trabajo. La propiedad de escisión nos permite restringirnos a conjuntos más pequeños para calcular el grado de Leray-Schauder.

Proposición 1.15 (Propiedad de Escisión). *Sea X un espacio vectorial normado, $\Omega \subset X$ un conjunto abierto y acotado y $L: \Omega \rightarrow X$ una aplicación continua y compacta con $0 \notin (I - L)(\partial\Omega)$. Si $U \subset \Omega$ es tal que $0 \notin (I - L)(\bar{U})$, entonces $\deg_{LS}(I - L, \Omega, 0) = \deg_{LS}(I - L, \Omega \setminus \bar{U}, 0)$.*

Corolario 1.16. *Si $0 \notin (I - L)(\bar{\Omega})$, entonces $\deg_{LS}(I - L, \Omega, 0) = 0$. En consecuencia, si se cumple que $\deg_{LS}(I - L, \Omega, 0) \neq 0$, entonces existe $t \in \Omega$ tal que $t = L(t)$.*

La siguiente propiedad del grado de Leray-Schauder será necesaria en la segunda sección del Capítulo 3. Hemos consultado su demostración en [25].

Teorema 1.17. *Sea X un espacio de Banach, $\Lambda = [\lambda_0, \lambda_1] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y Ω un conjunto abierto y acotado en $\Lambda \times X$ dotado de la topología producto. Para $\lambda \in \Lambda$, definimos $\Omega_\lambda = \{x \in X: (\lambda, x) \in \Omega\}$. Sea $\Phi(\lambda, x) = x - L(\lambda, x)$ con $L: \bar{\Omega} \rightarrow X$ continua y compacta. Denotamos $\Phi_\lambda = \Phi(\lambda, \cdot)$. Supongamos que, para un cierto $\lambda \in \Lambda$,*

$$\deg_{LS}(\Phi_\lambda, \Omega_\lambda, b) = \alpha \neq 0.$$

Entonces existe un conjunto conexo Σ de soluciones de $\Phi(\lambda, u) = b$ en Ω que une los conjuntos solución para $\lambda = \lambda_0$ y $\lambda = \lambda_1$.

Demostración. Sea $S = \{(\lambda, x) \in \Omega: \Phi(\lambda, x) = b\}$. El conjunto S es un subconjunto compacto de Ω por ser L continua y compacta y ser $S \cap \partial\Omega_\lambda = \emptyset$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Denotamos

$$S_{\lambda_i} = \{x \in X: (\lambda_i, x) \in S\}, \quad i = 0, 1.$$

Para probar el resultado, procedemos por contradicción: supongamos que, por el contrario, no existe tal Σ conexo uniendo S_{λ_0} y S_{λ_1} .

Recordemos que, si A y B son subconjuntos cerrados y disjuntos de un espacio métrico compacto K tal que ninguna componente conexa de K interseca a la vez a A y a B , entonces existen dos conjuntos compactos K_A y K_B tales que $A \subset K_A$, $B \subset K_B$, $K_A \cap K_B = \emptyset$ y $K_A \cup K_B = K$. En particular, S es un espacio métrico compacto con la topología inducida por $\Lambda \times X$. Así, existen dos conjuntos K_{λ_0} y K_{λ_1} compactos y disjuntos con $S_{\lambda_i} \subset K_{\lambda_i}$, $i = 0, 1$, y $S = K_{\lambda_0} \cup K_{\lambda_1}$.

Dado $\varepsilon > 0$, definimos $E := \{(\lambda, x) \in \Omega : d((\lambda, x), K_{\lambda_0}) < \varepsilon\}$. Por ser K_{λ_0} y K_{λ_1} cerrados y disjuntos, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, se tiene que $E \cap K_{\lambda_1} = \emptyset$ y, por tanto, si $(\lambda, x) \in E$ entonces $\lambda < \lambda_1$. Denotamos $E_\lambda := \{x \in X : (\lambda, x) \in E\}$. Por la invarianza respecto a homotopías, $\deg_{LS}(\Phi_\lambda, E_\lambda, b)$ es constante respecto a λ . Como $E_{\lambda_0} \supset S_{\lambda_0}$, aplicando escisión y aditividad deducimos, por nuestra hipótesis, que

$$\deg_{LS}(\Phi_\lambda, E_\lambda, b) = \alpha \neq 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Pero $E_{\lambda_1} = \emptyset$, luego $\deg_{LS}(\Phi_{\lambda_1}, E_{\lambda_1}, b) = 0$ y llegamos a una contradicción por suponer que tal conjunto Σ no existe. \square

1.3. Teoremas de punto fijo

Uno de los teoremas clásicos sobre existencia de puntos fijos para aplicaciones compactas es el Teorema de punto fijo de Brouwer. Lo enunciamos a continuación, pudiendo consultar su demostración en [1].

Teorema 1.18 (de Brouwer). *Sea $B(0, 1)$ la bola unidad abierta en \mathbb{R}^n . Toda aplicación continua $L: \overline{B(0, 1)} \rightarrow \overline{B(0, 1)}$ posee al menos un punto fijo.*

Este teorema es también válido para aplicaciones $L: \Omega \rightarrow \Omega$ continuas y Ω homeomorfo a la bola unidad compacta. Algunos ejemplos son las bolas $\overline{B(0, r)}$ con radio $r > 0$ no necesariamente uno o la clausura de una región delimitada por una curva de Jordan, esto es, una curva cerrada sin autointersecciones.

Para probar que la aplicación de Poincaré asociada a la ecuación diferencial $x'' = F(t, x, x')$ posee un punto fijo, encontraremos una *región positivamente invariante* para el sistema, esto es, un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tal que si $x_0 \in \Omega$, entonces $x(t, 0, x_0) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$. La aplicación de Poincaré satisfará, por tanto, que $P_T(\Omega) \subset \Omega$. Veremos que tal Ω es la clausura de la región acotada por una curva de Jordan y, por tanto, podremos aplicar el Teorema 1.18 (de Brouwer).

Otro teorema de punto fijo clásico es el de Schauder, cuya prueba se puede consultar en [1].

Teorema 1.19 (de Schauder). *Sea Ω un subespacio cerrado y convexo de un espacio normado X . Si $L: \Omega \rightarrow \Omega$ es continua y compacta, entonces posee al menos un punto fijo.*

Por último, otro teorema de punto fijo que también nos resultará de utilidad es el Teorema de Manásevich-Mawhin, introducido en [21]. El teorema se aplica a la ecuación diferencial

$$(\phi(x'))' = F(t, x, x')$$

con condiciones de frontera periódicas, siendo $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua que cumple:

- $\langle \phi(x_1) - \phi(x_2), x_1 - x_2 \rangle > 0$ para todo par $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $x_1 \neq x_2$.
- Existe $\alpha: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, con $\alpha(s) \rightarrow +\infty$ cuando s tiende a infinito, tal que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle \phi(x), x \rangle \geq \alpha(|x|)|x|$.

La función ϕ se suele denominar un ϕ -laplaciano. Por su parte, imponen sobre la función $F: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que sea una función de Carathéodory, esto es, una función tal que:

- Para casi todo $t \in [0, T]$, la función $F(t, \cdot, \cdot)$ es continua.
- Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, la función $F(\cdot, x, y)$ es medible en $[0, T]$.
- Para todo $K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ subconjunto compacto existe $m_K \in L^1([0, T]; \mathbb{R})$ tal que, para casi todo $t \in [0, T]$ y todo $(x, y) \in K$, se satisface que $|F(t, x, y)| \leq m_K(t)$.

Este marco de estudio es mucho más general que lo que trataremos en este trabajo. Aún así, es aplicable a ecuaciones unidimensionales de la forma $x'' = F(t, x, x')$ tomando $\phi(x) = x$. En efecto:

- $\langle \phi(x_1) - \phi(x_2), x_1 - x_2 \rangle = |x_1 - x_2|^2 > 0$ para todo par $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$.
- La función $\alpha(x) = x$ definida en $[0, +\infty)$ satisface que $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty$ y que $\langle \phi(x), x \rangle = |x|^2 = \alpha(|x|)|x|$.

Enunciamos, a continuación, el teorema de Manásevich-Mawhin, basado en el grado topológico de Brouwer.

Teorema 1.20 (de Manásevich-Mawhin). *Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ y $W := \{(x(t), x'(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \in \Omega, t \in [0, T]\}$. Supongamos que*

1. *Para cada $\lambda \in (0, 1)$, el problema T -periódico asociado a la ecuación $(\phi(x'))' = \lambda F(t, x, x')$ no posee solución en $\partial\Omega$.*
2. *Las raíces de la aplicación q dada por $q(c) := \frac{1}{T} \int_0^T F(t, c, 0) dt$ no pertenecen a $\partial(\pi W)$, siendo $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la aplicación dada por $\pi(x, y) = x$.*
3. *$\deg_B(q, \pi W, 0)$ es no nulo.*

Entonces el problema T -periódico asociado a la ecuación $(\phi(x'))' = F(t, x, x')$ posee al menos una solución en $\bar{\Omega}$.

Nuestras funciones F serán, en general, singulares en $x = 0$, de forma que no estarán definidas en todo $[0, T] \times \mathbb{R}^2$. Sin embargo, nuestro interés se centrará en las soluciones positivas, esto es, funciones $x = x(t)$ con $x(t) > 0$ para todo t . El conjunto πW estará contenido, por tanto, en $(0, +\infty)$ y será tomado de forma que $d(0, \overline{\pi W}) > 0$. Podríamos extender F a otra función definida en todo $[0, T] \times \mathbb{R}^2$ que coincida con F en $[0, T] \times W$ y que, fuera de $[0, T] \times W$, sea tal que satisfaga las condiciones de Carathéodory. Así, cuando apliquemos este teorema, deberemos comprobar que la función F satisface las condiciones de Carathéodory únicamente en $[0, T] \times W$.

El Teorema de Arzelá-Ascoli

Comprobar que una aplicación es compacta no es, en general, fácil. Un teorema útil para estudiar la compacidad de aplicaciones $\mathcal{T}: Z \rightarrow \mathcal{C}(X; Y)$, con X, Y, Z espacios de Banach, es el Teorema de Arzelá-Ascoli [4, Teorema 4.25]. Para introducirlo, necesitamos definir los conceptos que se exponen a continuación.

Definición 1.21. Sean X e Y espacios métricos y F un subconjunto de $\mathcal{C}(X; Y)$. Decimos que F es *equicontinuo en un punto* $x_0 \in X$ si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, si $x \in X$ es tal que $\|x - x_0\|_X < \delta$, entonces $\|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon$ para cada $f \in F$. Decimos que F es *equicontinuo* si lo es en todos los puntos de X .

Definición 1.22. Sea X un conjunto, Y un espacio métrico y F un subconjunto de $\mathcal{B}(X; Y)$, el espacio de las funciones acotadas entre X e Y respecto de la norma $\|\cdot\|_\infty$. F se dice *uniformemente acotado* si el conjunto $\{f(x) \in Y: f \in F, x \in X\}$ está acotado.

Para probar que una tal aplicación \mathcal{T} es compacta, debemos comprobar que dado $A \subset Z$ acotado, su imagen $\mathcal{T}(A)$ posee clausura compacta en $\mathcal{C}(X, Y)$. El Teorema de Arzelá-Ascoli nos proporciona un criterio para determinar que $\mathcal{T}(A)$ tiene clausura compacta.

Teorema 1.23 (de Arzelá-Ascoli). *Supongamos X un espacio topológico localmente compacto Hausdorff, Y un espacio de Banach y $F \subset \mathcal{C}(X; Y)$. La clausura de F en $\mathcal{C}(X; Y)$ es compacta si, y solo si, F es equicontinuo y uniformemente acotado.*

Observación 1.24. Podemos interpretar $\mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ como subespacio cerrado de $\mathcal{C}([0, T])$ con la misma norma, con elementos $f \in \mathcal{C}([0, T])$ tales que $f(0) = f(T)$. Así, también es aplicable el teorema anterior para aplicaciones $\mathcal{T}: Z \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$.

Veamos un ejemplo de aplicación de este resultado.

Proposición 1.25. *Sea $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $G = G(t, s)$ una función continua y T -periódica en las dos variables. La aplicación $\mathcal{T}: L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathbb{R})$ dada por*

$$(\mathcal{T}x)(t) = \int_0^T G(t, s)x(s)ds, \quad t \in [0, T],$$

es compacta.

Demostración. En primer lugar, la aplicación está bien definida: dada $x \in L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathbb{R})$, la función $\mathcal{T}x$ es continua por serlo G , único término dependiente de t en la expresión, y ser x una función integrable, y también es T -periódica por serlo G respecto a t .

Sea A un subconjunto acotado de $L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathbb{R})$. Probaremos que $T(A)$ es uniformemente acotado y equicontinuo para concluir que posee clausura compacta. Por ser A acotado, existe un $M > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq M$ para todo $x \in A$. Por un lado, A es uniformemente acotado si existe $R > 0$ tal que $\|\mathcal{T}x\|_\infty \leq R$ para todo $x \in A$. Ocurre que

$$\|\mathcal{T}x\|_\infty = \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^T G(t, s)x(s)ds \right| \leq \max_{t, s \in \mathbb{R}} |G(t, s)| \|x\|_1, \quad \forall x \in A.$$

Por otro lado, $\mathcal{T}(A)$ es equicontinuo en $t_0 \in \mathbb{R}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si $t \in \mathbb{R}$ es tal que $|t - t_0| < \delta$, entonces $|(\mathcal{T}x)(t) - (\mathcal{T}x)(t_0)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$. Tenemos que

$$|(\mathcal{T}x)(t) - (\mathcal{T}x)(t_0)| = \left| \int_0^T G(t, s)x(s)ds - \int_0^T G(t_0, s)x(s)ds \right| \leq \int_0^T |G(t, s) - G(t_0, s)| |x(s)| ds.$$

La función G es T -periódica respecto a la primera variable y continua, luego es uniformemente continua respecto a t y, por tanto, dado $\tilde{\varepsilon} > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, si $|t - t_0| < \delta$, entonces $|G(t, s) - G(t_0, s)| < \tilde{\varepsilon}$. Por tanto, si $|t - t_0| < \delta$,

$$|(\mathcal{T}x)(t) - (\mathcal{T}x)(t_0)| \leq \tilde{\varepsilon} \|x\|_1.$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon / \|x\|_1$ y se posee el resultado. Como t_0 era arbitrario, queda probado que $\mathcal{T}(A)$ es equicontinuo. En virtud del Teorema 1.23 (de Arzelá-Ascoli), $\mathcal{T}(A)$ tiene clausura compacta y concluimos que la aplicación \mathcal{T} es compacta. \square

Aplicaremos este resultado en el Capítulo 3. También podemos probar, de forma análoga, que la aplicación $\mathcal{T}: \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$ dada por

$$(\mathcal{T}x)(t) = \int_0^T G(t, s)f(s, x(s))ds,$$

siendo $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua y T -periódica en ambas variables y f continua y T -periódica respecto de la primera variable, es compacta. Esto será necesario cuando tratemos el método de las sub y sobresoluciones.

1.4. Método de las sub y sobresoluciones

Consideremos el problema periódico

$$\begin{cases} x''(t) = F(t, x(t)), \\ x(0) = x(T), \\ x'(0) = x'(T), \end{cases} \quad (1.3)$$

con $T > 0$ y F una función continua. Notemos que, en este problema, no interviene la derivada de x . En esta sección, exponemos el método de las sub y sobresoluciones para problemas periódicos, que se basa en la existencia de dos funciones α y β que delimitan un conjunto no vacío de posibles soluciones de un problema diferencial entre ambas. Seguimos la referencia [6].

Definición 1.26. Una función $\alpha \in \mathcal{C}^2((0, T); \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{R})$ es una *subsolución* del problema periódico (1.3) si $\alpha(0) = \alpha(T)$, $\alpha'(0) \geq \alpha'(T)$ y

$$\alpha''(t) \geq F(t, \alpha(t)), \quad \forall t \in (0, T).$$

Una función $\beta \in \mathcal{C}^2((0, T); \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{R})$ es una *sobresolución* del problema periódico (1.3) si $\beta(0) = \beta(T)$, $\beta'(0) \leq \beta'(T)$ y

$$\beta''(t) \leq F(t, \beta(t)), \quad \forall t \in (0, T).$$

Que existan sub y sobresoluciones del problema (1.3) permite demostrar que tal problema posee una solución que, además, estará localizada entre la sub y la sobresolución, como se justifica a continuación.

Teorema 1.27. *Supongamos que existen α y β sub y sobresolución del problema (1.3), respectivamente. Sea el conjunto $E = \{(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} : \alpha(t) \leq x \leq \beta(t)\}$ y supongamos que F es continua en E . Entonces el problema periódico (1.3) posee al menos una solución $x \in \mathcal{C}^2([0, T])$ tal que*

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Demostración. Consideremos el problema modificado

$$\begin{cases} x'' - x = F(t, \gamma(t, x)) - \gamma(t, x), \\ x(0) = x(T), \\ x'(0) = x'(T), \end{cases} \quad \text{siendo } \gamma(t, x) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{si } x < \alpha(t), \\ x, & \text{si } \alpha(t) \leq x \leq \beta(t), \\ \beta(t), & \text{si } x > \beta(t). \end{cases}$$

Veamos, en primer lugar, que el problema modificado posee al menos una solución. Consideramos $G = G(t, s)$ la función de Green del problema periódico asociado a

$$x'' - x = F(t, x).$$

Entonces, la solución $x = x(t)$ del problema modificado vendría dada implícitamente como

$$x(t) = \int_0^T G(t, s) [F(s, \gamma(s, x(s))) - \gamma(s, x(s))] ds, \quad t \in [0, T].$$

Veamos que tal ecuación posee solución. Definimos la aplicación $\mathcal{T} : \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$ definida, para cada $x \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$, como

$$(\mathcal{T}x)(t) = \int_0^T G(t, s) [F(s, \gamma(s, x(s))) - \gamma(s, x(s))] ds \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T].$$

La aplicación \mathcal{T} es continua por ser integral de funciones continuas. También es compacta por los comentarios del final de la sección anterior. En virtud del Teorema 1.19 (de Schauder), siendo $\mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$ un conjunto cerrado y convexo, la aplicación \mathcal{T} posee un punto fijo $x \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$, que es solución del problema modificado.

Comprobemos ahora que $x = x(t)$ satisface que $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$ para todo t . Si no es así, entonces existe $t_0 \in [0, T]$ tal que

$$\min_{t \in [0, T]} (x(t) - \alpha(t)) = x(t_0) - \alpha(t_0) < 0.$$

Si $t_0 \in (0, T)$, entonces, por ser x solución del problema modificado, $x(t_0) < \alpha(t_0)$ y α subsolución de (1.3), tenemos que

$$\begin{aligned} x''(t_0) - \alpha''(t_0) &= F(t_0, \gamma(t_0, x(t_0))) + x(t_0) - \gamma(t_0, x(t_0)) - \alpha''(t_0) \\ &= F(t_0, \alpha(t_0)) + x(t_0) - \alpha(t_0) - \alpha''(t_0) \leq x(t_0) - \alpha(t_0) < 0. \end{aligned}$$

Ahora bien, $x''(t_0) - \alpha''(t_0) \geq 0$, por ser t_0 el mínimo de $x - \alpha$ y ser esta función de clase dos. Si $t_0 = 0$, por T -periodicidad, también ocurre para $t = T$ y

$$\min_{t \in [0, T]} (x(t) - \alpha(t)) = x(0) - \alpha(0) = x(T) - \alpha(T) < 0.$$

Razonando como antes, obtenemos que $x'(0) - \alpha'(0) \leq x'(T) - \alpha'(T)$ por ser α subsolución y x una función T -periódica y, además,

$$x'(0) - \alpha'(0) \geq 0 \geq x'(T) - \alpha'(T)$$

pues $t = 0$ y $t = T$ son mínimos de $x - \alpha$ y entendemos esta derivada como lateral (la derivada por la derecha de un mínimo es mayor o igual que 0, y por la izquierda, menor o igual que 0). De esta forma, deducimos que $x'(0) = \alpha'(0)$. Ahora bien, dado $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} x'(t) - \alpha'(t) &= x'(t) - x'(0) - \alpha'(t) + \alpha'(0) = \int_0^t [x''(t) - \alpha''(t)] dt \\ &= \int_0^t [F(s, \alpha(s)) + x(s) - \alpha(s) - \alpha''(s)] ds \leq \int_0^t (x(s) - \alpha(s)) ds, \end{aligned}$$

por ser α subsolución. Como $x(0) - \alpha(0) < 0$, existe $\varepsilon \in (0, T]$ tal que $x(s) - \alpha(s) < 0$ para todo $s \leq \varepsilon$. Para cada $t \leq \varepsilon$, obtenemos que $x'(t) - \alpha'(t) < 0$. Pero esto implica que $x - \alpha$ es decreciente en $(0, \varepsilon)$, lo que contradice que $t_0 = 0$ sea mínimo de $x - \alpha$.

Con lo anterior, queda probado que $\alpha \leq x$. Para ver que $\beta \geq x$ se procede de forma análoga: si $x - \beta$ tiene máximo positivo, no se puede alcanzar en $(0, T)$ por ser β sobresolución. Si se alcanza en los extremos del intervalo, entonces deducimos que $x'(0) = \beta'(0)$ y que existe $\varepsilon > 0$ para el cual $x'(t) - \beta'(t) > 0$ para todo $t \in (0, \varepsilon)$. Llegaríamos a que $x - \beta$ es creciente en este intervalo y a que $t = 0$ no puede ser máximo.

Como el problema modificado coincide con el problema periódico (1.3) en E , las soluciones del problema modificado son, precisamente, las soluciones T -periódicas de $x'' = F(t, x(t))$. \square

Este resultado nos permitirá concluir la existencia de solución T -periódica para una ecuación diferencial de segundo orden con términos singulares en la que no intervenga la derivada primera.

Observación 1.28. Se pueden probar resultados análogos para el problema de frontera con condiciones de tipo Dirichlet y Neumann. Para funciones $F = F(t, x, x')$, aparecen dificultades adicionales como, por ejemplo, obtener una estimación de la derivada de x . Estos resultados se pueden consultar en [6].

Capítulo 2

Concepto de ecuación diferencial singular

Tras repasar las técnicas usuales para el estudio del problema periódico asociado a una ecuación diferencial, en este capítulo presentamos las ecuaciones de interés en este trabajo: las ecuaciones diferenciales *singulares*. Antes de ofrecer una definición formal, vamos a motivar su estudio a través de ejemplos. Posteriormente, exponemos la clasificación de las singularidades según su fortaleza o debilidad y comentamos los problemas de valor inicial y de frontera tipo Dirichlet y Neumann hasta tratar, finalmente, con el problema periódico.

2.1. Una introducción a través de ejemplos

En una ecuación diferencial *singular* de segundo orden escrita en forma normal

$$x'' = F(t, x, x')$$

existe una variedad en la que la función F diverge hacia infinito (o hacia menos infinito). Por ejemplo, la ecuación

$$x'' = \frac{1}{x^p}, \quad p > 0,$$

posee una singularidad en $x = 0$ por ser $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^p} = +\infty$. Otros ejemplos de ecuaciones singulares son

$$x'' = \log(t), \quad x'' = \frac{1}{x'} + x^2, \quad x'' = \frac{t-2}{x^2 + (x')^2},$$

con singularidades en $t = 0$, $x' = 0$ y $x = x' = 0$, respectivamente.

El estudio de las ecuaciones diferenciales singulares en t es muy distinto del estudio de aquellas singulares en x o en x' . El caso singular en la variable independiente ha sido extensamente estudiado y se han desarrollado distintos métodos de resolución para estas ecuaciones. Algunos

ejemplos de familias de ecuaciones singulares en t son las ecuaciones de Bessel,

$$x'' + \frac{1}{t}x' + \frac{t^2 - c^2}{t^2}x = 0,$$

o la ecuación de Legendre,

$$x'' + \frac{-2t}{(1-t^2)}x' + \frac{(c+1)}{(1-t^2)}x = 0,$$

siendo c una constante en ambas ecuaciones. La primera es singular en $t_0 = 0$ y la segunda lo es en $t_1 = 1$ y $t_2 = -1$. Se puede consultar [2] para obtener resultados de existencia de solución para ecuaciones singulares en la variable t . En este trabajo, por el contrario, trataremos únicamente con los problemas singulares en x , en particular, estudiaremos ecuaciones de segundo orden, con $x \in \mathbb{R}$, aunque han sido motivo de estudio tanto ecuaciones singulares de orden superior como sistemas de ecuaciones singulares.

La existencia de singularidades limita el conjunto en el que puede existir solución. Desde el punto de vista clásico, dada una ecuación diferencial de segundo orden escrita en forma normal, como la anterior, buscamos soluciones $x = x(t)$ definidas en un subconjunto del dominio de F . Lo usual en los textos es buscar, en el caso singular en un punto x_0 , soluciones $x = x(t)$ definidas en $(-\infty, x_0)$ o $(x_0, +\infty)$, sin permitir que la solución llegue a “tocar” el punto singular en tiempo finito.

Podemos, además, suponer que, si $x'' = F(t, x, x')$ es singular en un único punto, este es $x_0 = 0$. En efecto, si F es singular en x_0 y $x = x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial, entonces la función y dada por $y(t) = x(t) - x_0$ es tal que

$$y''(t) = x''(t) = F(t, x, x') = F(t, y + x_0, y') = \tilde{F}(t, y, y')$$

y la función \tilde{F} dada por $\tilde{F}(t, y, y') = F(t, y + x_0, y')$ es singular en $y = 0$. Por tanto, tratamos con ecuaciones diferenciales *singulares en $x = 0$* y buscamos *soluciones positivas*.

Por otra parte, algunas de las ecuaciones que trataremos en los siguientes capítulos serán singulares *en dos puntos* y buscaremos soluciones en el intervalo de definición comprendido entre ambas singularidades. Podemos pensar que el punto singular más pequeño es el cero para que la solución sea positiva, aunque no es necesario.

Un ejemplo de ecuación diferencial singular en infinitos puntos es

$$x'' = \frac{1}{\sin(x)},$$

y sus soluciones (clásicas) están definidas en intervalos de la forma $(k\pi, (k+1)\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Resaltamos el sentido clásico de estas soluciones porque algunos autores han admitido en su estudio que las soluciones toquen a la singularidad y “reboten” con un choque elástico. Son las denominadas *soluciones con rebote*, funciones $x: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con J un intervalo, que cumplen las siguientes condiciones si $F: [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y singular en $x_0 = 0$:

- x es continua y no negativa en J .

- x es una solución clásica de la ecuación diferencial $x'' = F(t, x, x')$ en todo subintervalo $I \subseteq J$ en el que $x(t) > 0$ para cada $t \in I$ (luego, en particular, es de clase dos en estos intervalos).
- Para cada $\tau \in J$ con $x(\tau) = 0$, se tiene que $\lim_{t \rightarrow \tau^+} x'(t) = \lim_{t \rightarrow \tau^-} -x'(t)$ (condición de choque elástico).

Un par de ejemplos de funciones que satisfacen la condición de choque elástico son las funciones $x(t) = |t|$, con un único rebote en $t = 0$, e $y(t) = |\cos(t)|$, con infinitos rebotes en $t = \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$. Se han estudiado este tipo de soluciones en el contexto de la dinámica celeste [23], entre otros.

Pese a resultar muy interesante el estudio de las soluciones con rebote para las ecuaciones diferenciales singulares, este contenido escapa de los objetivos de este trabajo. Los autores que han estudiado problemas singulares, concretamente periódicos, y que admiten colisiones elásticas se basan en el Teorema de Poincaré-Birkhoff. Con esta herramienta, han obtenido resultados de existencia de al menos dos soluciones periódicas con rebote [24] y de coexistencia con soluciones periódicas en el sentido clásico [26].

Veamos ahora algunos ejemplos procedentes de la física y la biología, extraídos del libro de Pedro José Torres [28], que motivan el estudio teórico de estas ecuaciones.

La ley de Coulomb de interacción entre cargas eléctricas establece que la fuerza eléctrica que ejerce una carga q_1 sobre una carga q_2 , situada a distancia $r > 0$ de q_1 , viene dada por

$$F_e(r) = Q \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_r,$$

siendo $Q > 0$ la constante de Coulomb y \mathbf{e}_r el vector unitario en la dirección radial entre las cargas apuntando en el sentido en que se aleja de q_1 . En ausencia de otras fuerzas dependientes de r e introduciendo una fuerza $f = f(t)$, podemos establecer la ecuación diferencial

$$r'' = Q \frac{q_1 q_2}{r^2} + f(t),$$

donde $r = r(t)$ representa el desplazamiento de la carga q_2 en la dirección del segmento $\overline{q_1 q_2}$, siendo nulo en el punto del espacio en el que se sitúa q_1 (en el que la fuerza eléctrica es infinita) y positivo o negativo según el sistema de referencia tomado. Aplicando el cambio de variable $x(t) = |Q q_1 q_2|^{-1/3} r(t)$, obtenemos la ecuación diferencial

$$x'' = \frac{Q q_1 q_2}{|Q q_1 q_2|} \frac{1}{x^2} + \frac{f(t)}{|Q q_1 q_2|^{1/3}},$$

luego, según si las cargas q_1 y q_2 son del mismo signo o de signos opuestos, obtenemos las ecuaciones

$$x'' = \frac{1}{x^2} + h(t), \quad x'' = -\frac{1}{x^2} + h(t),$$

respectivamente, con h la función dada por $h(t) = f(t)|Q q_1 q_2|^{-1/3}$. Estas ecuaciones forman parte de la familia de *ecuaciones de Lazer-Solimini*, a las que dedicamos la primera sección del Capítulo 3.

También intervienen fuerzas singulares en otros ejemplos más complicados de la física. En [28, sección 1.2.4], se propone la ecuación

$$x'' + cx + \frac{1}{x} = h(t)$$

para modelar la fuerza que ejerce un gas ideal encerrado en un cilindro que se comprime por una de sus caras sobre todas las paredes del cilindro, siendo singular en $x = 0$, que representa el estado en el que el cilindro queda colapsado en una de sus caras. En [28, sección 1.3], se propone

$$x'' = k \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} \right) + h(t)$$

para modelar el comportamiento de un fluido en un sustrato, apareciendo la singularidad por las interacciones intermoleculares entre las partículas del fluido.

Podemos poner también ejemplos en la biología, aunque es más habitual en este contexto tratar con sistemas que con ecuaciones diferenciales. En [28, capítulo 13] se propone el sistema

$$\begin{cases} x' = \alpha - \beta \frac{x}{y}, \\ y' = -\gamma + \sigma \frac{x}{y} + \frac{\varepsilon}{y}, \end{cases}$$

para modelar la dinámica de la variación de volumen celular producida por la entrada o salida de agua y soluto a través de la membrana celular en el proceso de ósmosis. Las variables son la masa de soluto disuelta en el interior de la célula, x , y el volumen de agua en el interior de la célula, y , siendo el resto parámetros del sistema.

2.2. Definición de ecuación diferencial singular y clasificación de las singularidades

Una vez motivado el estudio de estas ecuaciones, en esta sección definiremos las ecuaciones diferenciales singulares con las que trataremos en el resto de este trabajo. Daremos, también, las clasificaciones usuales de las singularidades que se pueden encontrar en los textos y las ilustraremos con algunos ejemplos.

Definición 2.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que existe $\varepsilon > 0$ con $(0, \varepsilon) \subseteq \Omega$ y sea $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Decimos que g es *singular en* $x_0 = 0$ si

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \pm\infty.$$

Dada $g = g(t, x, v): \Omega \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que g es *singular en* $x_0 = 0$ si es continua respecto a x y

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(t, x, v) = \pm\infty.$$

Definición 2.2. Dada $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que la ecuación diferencial escrita en forma normal $x'' = F(t, x, x')$ es *singular en* $x_0 = 0$ si F es singular en $x_0 = 0$.

Recordemos que las soluciones de esta ecuación diferencial son funciones $x = x(t)$ de clase dos definidas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación diferencial en I . Si F es continua, una solución maximal está definida en un intervalo abierto y su imagen, $x(I)$, es un conjunto conexo contenido en $(0, +\infty)$ o $(0, -\infty)$. Si x es, además, T -periódica, entonces su intervalo de definición es todo \mathbb{R} .

Buscamos soluciones $x = x(t)$ positivas. Es, por ello, que estas definiciones se ha dado para g definida en $(0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Se pueden considerar, análogamente, funciones g definidas en $(-\varepsilon, 0)$ y tomar el límite lateral por la izquierda, tanto en el caso de una variable como en el caso general. En este contexto, buscaríamos $x = x(t)$ con $x(t) < 0$ para todo t .

En los textos, es habitual tratar con la siguiente clasificación de las singularidades, introducida por William B. Gordon [10] en su estudio de sistemas dinámicos conservativos.

Definición 2.3. Sea $g: \Omega \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ una función singular en $x_0 = 0$ con $(0, \varepsilon) \subset \Omega$, $0 < \varepsilon \leq 1$. Decimos que la singularidad es *débil*, *fuerte* o *muy fuerte* si

$$\left| \int_0^\varepsilon g(x) dx \right| < +\infty, \quad \left| \int_0^\varepsilon g(x) dx \right| = +\infty \quad \text{o} \quad \left| \int_0^\varepsilon xg(x) dx \right| = +\infty,$$

respectivamente.

En general, en los textos se suele tomar esta definición con $\varepsilon = 1$, pero el valor de ε que tomemos para calcular la integral no influye en si esta es convergente o no. En efecto,

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^\varepsilon g(x) dx + \int_\varepsilon^1 g(x) dx$$

y, siendo g continua respecto a x , la integral entre $x = \varepsilon$ y $x = 1$ está acotada. Esta definición de fortaleza es más general, pues incluye funciones singulares que estén definidas en $(0, \varepsilon)$ con $\varepsilon < 1$. De igual forma, se puede establecer la fortaleza de la singularidad para funciones g definidas en $(-\varepsilon, 0)$.

Esta clasificación de las singularidades se inspira en las funciones $g(x) = 1/x^p$, con $p > 0$. Para este tipo de funciones, la singularidad es débil si $0 < p < 1$, fuerte si $p \geq 1$ y muy fuerte si $p \geq 2$. Veremos en los siguientes capítulos que la fortaleza de la singularidad juega un papel importante para obtener resultados de existencia de solución.

Otra clasificación de las singularidades procede de la influencia de los términos en la dinámica del sistema. Consideremos la ecuación diferencial singular

$$x'' + g(x) = 0.$$

Decimos que la singularidad es *atractora* si $g(x) > 0$ para todo $x > 0$, *repulsora* si $g(x) < 0$ para todo $x > 0$ e *indefinida* si existe algún $x > 0$ para el cual $g(x) = 0$. Esto está relacionado con el comportamiento de las soluciones. Mostramos, en la Figura 2.1, tres retratos de fases de ecuaciones diferenciales singulares en el caso repulsor, atractor e indefinido, respectivamente.

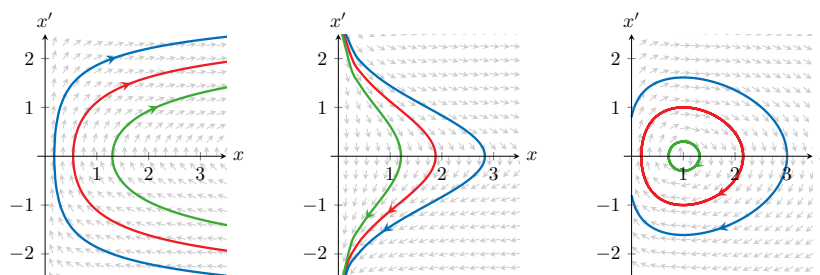


Figura 2.1: Retratos de fases de las ecuaciones, de izquierda a derecha, $x'' - 1/x = 0$, $x'' + 1/x = 0$ y $x'' + \log(x) = 0$.

En el primer retrato de fases de la Figura 2.1, las soluciones positivas se alejan del eje $x = 0$ y, en el segundo, se acercan, como sugiere la definición de singularidad atractora y repulsora. En el tercero, aparece un punto crítico en $(x, x') = (1, 0)$ por ser el término singular indefinido.

Desde el punto de vista físico, la función g representa la fuerza de restauración que ejerce el sistema para volver al punto de equilibrio. Por ejemplo, en el caso de un muelle, la ecuación que modela el movimiento es

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0,$$

con $m > 0$ la masa del objeto unido al extremo en movimiento del muelle y $k > 0$ una constante dependiente del material del muelle. Consideremos que el origen se corresponde con la posición del sistema en equilibrio, que las $x > 0$ son las posiciones correspondientes al muelle estirado y que las $x < 0$ son las correspondientes al muelle contraído. Entonces $g(x) = kx/m$ es positiva cuando el sistema hace fuerza por contraerse y negativa cuando hace fuerza por expandirse. Su signo determina la dinámica del sistema.

En los textos, se afirma que el estudio de estas ecuaciones se vuelve más complicado cuando la singularidad es indefinida. Esta clasificación también se emplea cuando el término singular es de la forma $g = g(t, x)$. Para estas funciones, puede ocurrir que el comportamiento indefinido sea debido a t y no a x , como ocurre en

$$g(t, x) = \frac{\cos(t)}{x^p}, \quad p > 0,$$

que es positiva si $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + 2\pi\mathbb{Z}$, negativa si $t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) + 2\pi\mathbb{Z}$ y nula si $t = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

2.3. Problemas de valor inicial y de frontera para ecuaciones diferenciales singulares

Dada una ecuación diferencial de segundo orden escrita en forma normal $x'' = F(t, x, x')$, el primer problema que se suele estudiar, independientemente de si la ecuación es singular en algún

punto, es el problema de Cauchy o de valor inicial

$$\begin{cases} x'' = F(t, x, x'), \\ x(t_0) = x_0, \\ x'(t_0) = v_0. \end{cases}$$

Para profundizar en los problemas de Cauchy con funciones singulares, se puede consultar [2]. Tras estudiar los problemas de valor inicial asociados a ecuaciones diferenciales singulares, muchos autores concentran su atención en los problemas de frontera de tipo Dirichlet y Neumann, esto es, los problemas

$$\begin{cases} x'' = F(t, x, x'), & t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) = x(t_1), \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = F(t, x, x'), & t \in [t_0, t_1], \\ x'(t_0) = x'(t_1), \end{cases}$$

respectivamente. Sobre estos problemas, se pueden consultar más detalles en [2, 6], trabajos en los que se exponen diversos resultados de existencia, unicidad y multiplicidad de soluciones para problemas de frontera singulares.

El problema de frontera asociado a ecuaciones diferenciales singulares que menos se ha tratado en los textos es el *problema de frontera periódico*, del que trata este trabajo:

$$\begin{cases} x'' = F(t, x, x'), & t \in [0, T], \\ x(0) = x(T), \\ x'(0) = x'(T). \end{cases}$$

Dada una función F , es posible obtener condiciones necesarias para que el problema periódico anterior tenga solución positiva. Por ejemplo, consideremos la ecuación diferencial

$$x'' = \frac{1}{x^p}, \quad p > 0,$$

y sea $T > 0$ una constante fija. Si existiese solución T -periódica positiva $x = x(t)$, entonces

$$T = \int_0^T 1 dt = \int_0^T x(t)^p x''(t) dt = x(t)^p x'(t) \Big|_{t=0}^{t=T} - p \int_0^T x(t)^{p-1} x'(t)^2 dt,$$

donde hemos aplicado integración por partes tomando $u = x(t)^p$ y $v' = x''(t)$. Ahora bien, el primer sumando se anula por las condiciones de T -periodicidad sobre x y el segundo sumando es negativo por ser x positiva. Por tanto, llegamos a una contradicción y, por tanto, el problema periódico asociado a esta ecuación no tiene solución positiva para ningún $T > 0$.

Veamos qué condiciones debe cumplir la ecuación diferencial

$$x'' + \frac{1}{x^p} = h(t),$$

con $p > 0$ y $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función T -periódica localmente integrable, para que tenga solución su problema T -periódico asociado. Integrando entre $t = 0$ y $t = T$, entonces, por T -periodicidad,

$$\int_0^T h(t) dt = \int_0^T \frac{1}{x(t)^p} dt,$$

luego la integral de h en $[0, T]$ debe ser, necesariamente, positiva. En el caso de las ecuaciones

$$x'' - \frac{1}{x^p} = h(t),$$

la integral de h en $[0, T]$ debe ser, necesariamente, negativa. Lo mismo ocurre si sustituimos las funciones $1/x^p$ por funciones $g = g(x)$ singulares en $x = 0$ y positivas. Ya comentamos, al tratar con las ecuaciones singulares que aparecen en las interacciones eléctricas entre cargas, que estas ecuaciones se denominan *ecuaciones de Lazer-Solimini*, estudiadas principalmente en [16]. A ellas dedicamos la primera sección del Capítulo 3.

Estudiemos ahora si, para la ecuación diferencial singular siguiente, existe alguna condición necesaria para que exista solución T -periódica:

$$x'' = \frac{h(t)}{x^p}, \quad (2.1)$$

con $p > 0$ y $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función T -periódica localmente integrable. Si existiese una solución $x = x(t)$ positiva y T -periódica, debe cumplirse, como razonamos en el caso $h(t) = 1$, que $\int_0^T h(t)dt < 0$. Por otra parte, integrando la ecuación entre $t = 0$ y $t = T$, obtenemos que

$$\int_0^T \frac{h(t)}{x(t)^p} dt = \int_0^T x''(t) dt = x'(T) - x'(0) = 0,$$

luego, siendo x positiva, debe ocurrir que h cambie de signo en $[0, T]$. Las ecuaciones (2.1) se denominan *ecuaciones de Emdem-Fowler con exponente negativo*, estudiadas en [29], entre otros. A ellas dedicamos la segunda sección del Capítulo 3.

La mayoría de los problemas diferenciales en la mecánica introducen en la ecuación un término de rozamiento. En general, estos problemas se pueden escribir como

$$x'' + f(x)x' + g(x) = h(t),$$

conocida como la ecuación de Liénard (generalizada) [14] por el interés de este físico francés en el estudio de la ecuación aplicada a sistemas eléctricos. La función f es la fuerza de rozamiento del sistema y actúa sobre x' , generalmente la velocidad del cuerpo en movimiento. Estudiaremos, en el Capítulo 4, familias de ecuaciones diferenciales singulares de esta forma, donde las singularidades pueden aparecer tanto en g como en f .

Capítulo 3

Algunas ecuaciones diferenciales singulares sin rozamiento

En este capítulo, revisamos las demostraciones del artículo de Alan Cecil Lazer y Sergio Solimini [16] y del artículo de Antonio Jesús Ureña [29], ambos tratando ecuaciones diferenciales singulares. Las familias de ecuaciones diferenciales que estudian estos autores son de segundo orden y sin término de rozamiento. En el primer caso, los términos singulares son atractores o repulsores, mientras que, en el segundo caso, son indefinidos.

3.1. Las ecuaciones de Lazer-Solimini

El artículo de Lazer y Solimini [16] es, hasta donde sabemos, el primer trabajo que trata el problema periódico asociado a una ecuación singular. Inspirados por las ecuaciones

$$x'' + \frac{1}{x^p} = h(t) \quad \text{y} \quad x'' - \frac{1}{x^p} = h(t),$$

con $p > 0$ y h una función continua y T -periódica, los autores prueban resultados de existencia de solución T -periódica para las ecuaciones

$$x'' + g(x) = h(t) \quad \text{y} \quad x'' - g(x) = h(t),$$

con g una función singular en el origen cumpliendo ciertas hipótesis. Sus resultados se basan en el método de las sub y sobresoluciones y argumentos de truncamiento.

El caso atractor

El modelo de ecuación para este caso es la ecuación $x'' + x^{-p} = h(t)$, con fuerza de restauración $g(x) = 1/x^p$ positiva en $(0, +\infty)$ y $p > 0$. Para probar la existencia de solución T -periódica para su generalización, necesitamos el siguiente resultado previo.

Lema 3.1. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y T -periódica tal que $\int_0^T f(t)dt = 0$. Entonces la ecuación diferencial $\omega''(t) = f(t)$ posee, al menos, una solución T -periódica.

Demostración. Comprobemos que la función dada por

$$\omega(t) = \int_0^t \int_0^s f(u)duds - \frac{t}{T} \int_0^T \int_0^s f(u)duds, \quad t \in [0, T],$$

es solución de $\omega''(t) = f(t)$. La derivada primera de ω es, por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral,

$$\omega'(t) = \int_0^t f(u)du - \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^s f(u)duds, \quad t \in [0, T],$$

y su derivada segunda es, por ser el último término de la expresión anterior constante,

$$\omega''(t) = f(t), \quad t \in [0, T],$$

como queríamos demostrar. La función ω es claramente continua por ser suma de funciones continuas y además, como $\int_0^T f(u)du = 0$,

$$\omega(T) = \int_0^T \int_0^s f(u)duds - \int_0^T \int_0^s f(u)duds = 0 = \omega(0),$$

$$\omega'(T) = \int_0^T f(u)du - \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^s f(u)duds = -\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^s f(u)duds = \omega'(0),$$

luego la solución ω es T -periódica. \square

Este lema nos será de utilidad para aplicar el método de las sub y sobresoluciones (en concreto, para construir la sobresolución). Enunciemos, a continuación, el resultado principal del caso atractor del artículo de Lazer y Solimini [16]:

Teorema 3.2. Sea g una función real y continua definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} g(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0^-} g(\xi) = -\infty, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0^+} g(\xi) = +\infty \quad \text{y} \quad \xi g(\xi) > 0 \text{ para } \xi \neq 0.$$

Sea $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y T -periódica. La ecuación diferencial

$$x''(t) + g(x(t)) = h(t) \tag{3.1}$$

posee, al menos, una solución T -periódica si, y solo si, $\int_0^T h(t)dt \neq 0$.

Representamos, en la Figura 3.1, algunas funciones g en las hipótesis de este teorema.

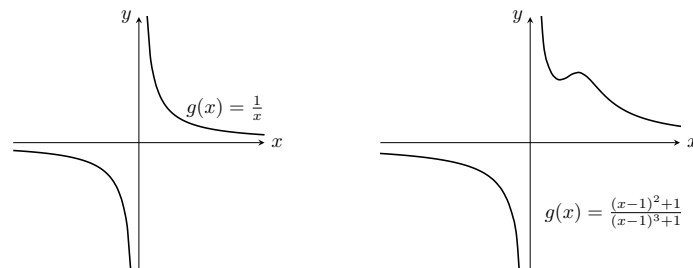


Figura 3.1: Gráficas de posibles funciones g en las condiciones del Teorema 3.2.

Observación 3.3. Las hipótesis que imponemos sobre g descartan a las funciones de la forma $g(x) = 1/x^p$ con p par y a las funciones de la forma $g(x) = 1/\sqrt[p]{x}$ con p par. Sin embargo, veremos en la demostración del teorema que, si la integral de h es positiva en $[0, T]$, entonces existe solución $x = x(t)$ *necesariamente positiva* y, si es negativa, *necesariamente negativa*. Las funciones singulares que no satisfacen las condiciones del Teorema 3.2 se pueden considerar, sin dificultad, en el primero de los casos. Después de la prueba del Teorema 3.2, enunciaremos dos corolarios que amplían la clase de funciones g posibles.

Demostración (del Teorema 3.2). Si x es una solución de (3.1), necesariamente $x(t) \neq 0$ para todo t y $g(x(t))$ es siempre positivo o siempre negativo. Si, además, x es T -periódica, integrando (3.1) entre $t = 0$ y $t = T$, obtenemos que

$$\int_0^T h(t)dt = \int_0^T g(x(t))dt \neq 0.$$

Recíprocamente, supongamos que la integral es no nula. Consideremos, en primer lugar, que $h_0 := \int_0^T h(t)dt > 0$. Vamos a probar que existe, al menos, una solución T -periódica x positiva. Emplearemos el método de las sub y sobresoluciones:

- Tomamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de tal forma que $g(\varepsilon) - h(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Tal ε existe por ser h una función T -periódica y continua en $[0, T]$, intervalo en el que alcanza (un) máximo absoluto, y ser $\lim_{\xi \rightarrow 0^+} g(\xi) = +\infty$. La función α dada por $\alpha(t) = \varepsilon$, para $t \in \mathbb{R}$, es subsolución del problema T -periódico asociado a (3.1). En efecto,

$$\alpha(0) = \varepsilon = \alpha(T), \quad \alpha'(0) = 0 = \alpha'(T) \quad \text{y} \quad \alpha''(t) + g(\alpha(t)) = g(\varepsilon) > h(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Para construir una sobresolución del problema T -periódico asociado a (3.1), observemos que $h(t) - h_0$ posee integral nula entre 0 y T y, en virtud del Lema 3.1, existe $\omega \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ solución T -periódica de

$$\omega''(t) = h(t) - h_0.$$

Como $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} g(\xi) = 0$, existe $M > 0$ suficientemente grande tal que la función β dada por $\beta(t) = M + \omega(t)$ satisface $\alpha(t) < \beta(t)$ y $g(\beta(t)) < h_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En ese caso, $\beta(0) = M + \omega(0) = M + \omega(T) = \beta(T)$, también $\beta'(0) = \omega'(0) = \omega'(T) = \beta'(T)$ y

$$\beta''(t) + g(\beta(t)) = \omega''(t) + g(\beta(t)) = h(t) - h_0 + g(\beta(t)) < h(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Queda probada, pues, la existencia de solución T -periódica para la ecuación (3.1), que es necesariamente positiva. Para el caso $h_0 < 0$, se argumenta de forma análoga, pero obtenemos la existencia de al menos una solución T -periódica x negativa:

- Tomamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de tal forma que $g(-\varepsilon) - h(t) < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y la función β dada por $\beta(t) = -\varepsilon$, para $t \in \mathbb{R}$, es sobresolución del problema T -periódico asociado a (3.1): $\beta(0) = \beta(T)$, $\beta'(0) = \beta'(T)$ y

$$\beta''(t) + g(\beta(t)) = g(-\varepsilon) < h(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- De nuevo, $h(t) - h_0$ posee integral nula y existe $\omega \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ solución de $\omega''(t) = h(t) - h_0$ T -periódica. Como $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} g(\xi) = 0$, existe $M > 0$ suficientemente grande tal que la función α dada por $\alpha(t) = -M + \omega(t)$ satisface $\alpha(t) < \beta(t)$ y $g(\alpha(t)) > h_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En tal caso, $\alpha(0) = \alpha(T)$, $\alpha'(0) = \alpha'(T)$ y

$$\alpha''(t) + g(\alpha(t)) = \omega''(t) + g(\alpha(t)) = h(t) - h_0 + g(\alpha(t)) > h(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Lo anterior prueba la existencia de solución T -periódica para la ecuación (3.1), necesariamente negativa. \square

Como comentábamos en la Observación 3.3, los resultados del Teorema 3.2 se pueden trasladar a funciones g no necesariamente definidas en todo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ o que solo cumplen las condiciones en el intervalo $(0, +\infty)$ o $(-\infty, 0)$. Dependiendo de si $\int_0^T h(t)dt$ es positiva o negativa, tratamos únicamente con g restringida al intervalo $(0, +\infty)$ o $(-\infty, 0)$. Es por ello que podemos enunciar los siguientes corolarios.

Corolario 3.4. *Sea g una función real y continua definida, al menos, en $(0, +\infty)$, donde es positiva y satisface*

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} g(\xi) = +\infty \quad y \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} g(\xi) = 0.$$

Entonces (3.1) posee al menos una solución T -periódica positiva si, y solo si, $\int_0^T h(t)dt > 0$.

Corolario 3.5. *Sea g una función real y continua definida, al menos, en $(-\infty, 0)$, donde es negativa y satisface*

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^-} g(\xi) = -\infty \quad y \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} g(\xi) = 0.$$

Entonces (3.1) posee al menos una solución T -periódica negativa si, y solo si, $\int_0^T h(t)dt < 0$.

Las funciones de la forma $g(x) = 1/x^p$, con p par, y $g(x) = 1/\sqrt[p]{x}$, con p impar, satisfacen las condiciones del Corolario 3.4 en $(0, +\infty)$, mientras que no satisfacen las condiciones del Teorema 3.2.

El caso repulsor

El modelo de ecuación, para este caso, es la ecuación $x'' - x^{-p} = h(t)$, con fuerza de restauración $g(x) = -1/x^p$ negativa en $(0, +\infty)$ y $p > 1$. En su artículo, Lazer y Solimini prueban la existencia de solución T -periódica para la ecuación

$$x''(t) - g(x(t)) = h(t), \tag{3.2}$$

con g en las condiciones del Teorema 3.2. Para probar este resultado, emplean argumentos de truncamiento que no se pueden aplicar a exponentes $0 < p < 1$.

La prueba de la existencia de solución T -periódica se basa en el siguiente resultado auxiliar, consultado en [8].

Teorema 3.6. *Sea $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada para la cual*

$$\psi(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) \in \mathbb{R}, \quad \psi(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) \in \mathbb{R}$$

y $\psi(-\infty) \leq \psi(x) \leq \psi(+\infty)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea también f una función continua y T -periódica. Entonces la ecuación

$$x''(t) + \psi(x(t)) = f(t)$$

posee al menos una solución T -periódica si, y solo si,

$$\psi(-\infty) < \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt < \psi(+\infty).$$

La función g con la que trabajamos no está definida en todo \mathbb{R} . El argumento de truncamiento consiste en definir una función \bar{g} a partir de g que sí esté definida en todo \mathbb{R} y para la que se pueda aplicar este resultado. Primero vamos a probar la siguiente proposición.

Proposición 3.7. *Sea x una función T -periódica de clase uno con derivada de segundo orden $x'' \in L^1(0, T)$. Entonces $\|x'\|_\infty \leq \min\{\|(x'')^+\|_1, \|(x'')^-\|_1\}$, donde $(x'')^+$ y $(x'')^-$ son las partes positiva y negativa de x'' , respectivamente.*

Demostración. La función x alcanza su mínimo en un punto $t_0 \in [0, T]$ por ser T -periódica y de clase uno. También se cumple que $x'(t_0) = x'(t_0 + T) = 0$. Vamos a probar la desigualdad con $(x'')^-$, siendo la otra muy similar (y ya escrita en [16]). Fijado $t \in [t_0, t_0 + T]$,

$$\begin{aligned} -x'(t) &= \int_{t_0}^t -x''(s) ds = \int_{t_0}^t [-x''(s)^+ + x''(s)^-] ds \leq \int_{t_0}^t x''(s)^- ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t_0+T} x''(s)^- ds = \|(x'')^-\|_1, \end{aligned}$$

en cuya última desigualdad hemos aplicado que, por ser $(x'')^-$ una función no negativa, aumentar el dominio de integración no disminuye el valor de la integral. Análogamente, para $t \in [t_0, t_0 + T]$,

$$\begin{aligned} -x'(t) &= \int_{t_0+T}^t -x''(s) ds = \int_t^{t_0+T} x''(s) ds = \int_t^{t_0+T} [x''(s)^+ - x''(s)^-] ds \\ &\geq - \int_t^{t_0+T} x''(s)^- ds \geq - \int_{t_0}^{t_0+T} x''(s)^- ds = -\|(x'')^-\|_1. \end{aligned}$$

Hemos probado que, para todo $t \in [0, T]$, se cumple que $-\|(x'')^-\|_1 \leq -x'(t) \leq \|(x'')^-\|_1$ y, por tanto, $\|x'\|_\infty = \max_{t \in [0, T]} |x'(t)| \leq \|(x'')^-\|_1$. Para la desigualdad con $(x'')^+$, se trabaja con x en vez de $-x$. \square

Una vez probado este resultado, el siguiente lema nos permitirá construir una función \bar{g} a partir de g con argumentos de truncamiento y que demuestra que (3.2) posee solución T -periódica positiva si, y solo si, $\int_0^T h(t) dt < 0$.

Lema 3.8. Sea $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función positiva tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \quad y \quad \int_0^1 g(x) dx = +\infty.$$

Para cualquier $M > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, si h es una función continua y T -periódica con norma $\|h\|_1 \leq M$, entonces cualquier solución T -periódica $x = x(t)$ de (3.2) cumple que $x(t) > \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Fijemos $M > 0$ y x una solución T -periódica de (3.2). Tomamos $\xi > 0$ suficientemente pequeño tal que $g(x) > M/T$ para todo $x \leq \xi$. Integrando (3.2) entre $t = 0$ y $t = T$, obtenemos que

$$\int_0^T g(x(t)) dt = \int_0^T -h(t) dt \leq M,$$

en cuya última desigualdad hemos aplicado la hipótesis $\|h\|_1 = \int_0^T |h(t)| dt \leq M$.

Supongamos que x cumple que $x(t) \leq \xi$ para todo $t \in [0, T]$. Entonces $g(x(t)) > M/T$ para todo $t \in [0, T]$ e

$$\int_0^T g(x(t)) dt > \int_0^T \frac{M}{T} dt = M,$$

lo cual no es cierto. En consecuencia, dada x solución T -periódica de (3.2), existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $x(t_1) > \xi$. Tomamos $\varepsilon > 0$ tal que

$$\int_\varepsilon^\xi g(x) dx > 2M^2.$$

Tal ε existe, pues g es positiva e $\int_0^\xi g(x) dx = +\infty$. Además, necesariamente $\varepsilon < \xi$ por ser g una función positiva y $2M^2 > 0$. Probaremos que toda solución T -periódica x satisface que $x(t) > \varepsilon$ para todo $t \in [t_1, t_1 + T]$ y concluiremos el resultado por T -periodicidad.

Multiplicamos (3.2) por x' e integramos entre t_1 y t arbitrario, obteniendo

$$\int_{t_1}^t x''(s)x'(s) ds - \int_{t_1}^t g(x(s))x'(s) ds = \int_{t_1}^t h(s)x'(s) ds.$$

Aplicamos, en la segunda integral, el cambio de variable $y = x(s)$, el cual es válido por ser x una función de clase uno. Obtenemos que

$$\frac{x'(t)^2}{2} - \frac{x'(t_1)^2}{2} - \int_{x(t_1)}^{x(t)} g(y) dy = \int_{t_1}^t h(s)x'(s) ds \leq \left| \int_{t_1}^t h(s)x'(s) ds \right| \leq \|h\|_1 \|x'\|_\infty.$$

Aplicando la Proposición (3.7), obtenemos que

$$\|x'\|_\infty \leq \|(x'')^-\|_1 = \|(g \circ x + h)^-\|_1 \leq \|h^-\|_1,$$

en cuya última desigualdad hemos aplicado que $g \circ x$ es positiva y que $(f_1 + f_2)^- \leq f_1^- + f_2^-$. Recordemos que, por hipótesis, $\|h\|_1 \leq M$, luego

$$\|x'\|_\infty \leq \|h^-\|_1 = \int_0^T \max\{0, -h(t)\} dt \leq \int_0^T |h(t)| dt = \|h\|_1 \leq M$$

y obtenemos que

$$\frac{x'(t)^2}{2} - \frac{x'(t_1)^2}{2} - \int_{x(t_1)}^{x(t)} g(y)dy \leq M^2.$$

Por tanto,

$$\int_{x(t)}^{x(t_1)} g(y)dy \leq M^2 + \frac{x'(t_1)^2}{2} - \frac{x'(t)^2}{2} \leq M^2 + \frac{x'(t_1)^2}{2} \leq M^2 + \frac{\|x'\|_\infty^2}{2} \leq \frac{3}{2}M^2 < 2M^2.$$

Supongamos que existe $t_2 \in (t_1, t_1 + T)$ para el cual $x(t_2) \leq \varepsilon$. Como $x(t_1) > \xi$ y g es una función positiva, obtenemos, de la desigualdad anterior, que

$$\int_\varepsilon^\xi g(y)dy \leq \int_{x(t_2)}^{x(t_1)} g(y)dy \leq 2M^2,$$

lo que contradice la elección de ξ y ε . En conclusión, debe ocurrir que $x(t) > \varepsilon$ para todo $t \in [t_1, t_1 + T]$. \square

Las hipótesis sobre g solo se han aplicado para tomar $\xi > 0$ de forma que $g(x) > M/T$ para todo $x \leq \xi$ y para elegir $\varepsilon > 0$ de forma que $\int_\varepsilon^\xi g(x)dx > 2M^2$. Por tanto, la acotación inferior de las soluciones T -periódicas de (3.2) sigue siendo válida para funciones g que permiten que existan tales ξ y ε . Cómo esté definida g para valores anteriores a ε no influye en la demostración (más allá de que $g(x) > M/T$ para $x \leq \xi$), luego esta función puede estar definida, incluso, en todo \mathbb{R} .

Teorema 3.9. *Sea $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y T -periódica y $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y positiva tal que*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^1 g(x)dx = +\infty.$$

Entonces (3.2) posee una solución T -periódica si, y solo si, $\int_0^T h(t)dt < 0$.

Demostración. Si x es una solución T -periódica positiva de (3.2), entonces, integrando la ecuación diferencial entre $t = 0$ y $t = T$, obtenemos que

$$\int_0^T g(x(t))dt = \int_0^T -h(t)dt > 0,$$

por ser g una función positiva. En consecuencia, es necesario que $\int_0^T h(t)dt < 0$ para que exista solución T -periódica de (3.2).

Veamos la suficiencia. La función h es continua (y acotada) en $[0, T]$ y existe $M > 0$ tal que

$$\|h\|_1 = \int_0^T |h(t)|dt < M.$$

Tomamos $\xi > 0$ y $\varepsilon > 0$ como en la demostración del Lema 3.8, de forma que

$$g(x) > \frac{M}{T} \quad \forall x \leq \xi \quad \text{e} \quad \int_\varepsilon^\xi g(x)dx > 2M^2.$$

Definimos la función $\bar{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\bar{g}(s) := \begin{cases} g(s) & s \geq \varepsilon, \\ g(\varepsilon) & s < \varepsilon. \end{cases}$$

Esta función \bar{g} satisface las mismas condiciones que g respecto a ξ y a ε , luego se puede aplicar el Lema 3.8. Obtenemos que las soluciones T -periódicas positivas de

$$x''(t) - \bar{g}(x(t)) = h(t)$$

son tales que $x(t) > \varepsilon$, luego también son, por coincidir g y \bar{g} en $(\varepsilon, +\infty)$, soluciones T -periódicas positivas de (3.2).

Queremos aplicar el Teorema 3.6 a la ecuación modificada con \bar{g} para concluir que existe solución T -periódica positiva. Sin embargo, no podemos garantizar que

$$-g(\varepsilon) = \lim_{y \rightarrow -\infty} -\bar{g}(y) \leq -\bar{g}(x) \leq \lim_{y \rightarrow +\infty} -\bar{g}(y) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

pues no sabemos, a priori, que $g(\varepsilon) \geq g(x)$ para todo $x \in (\varepsilon, +\infty)$. Ahora bien, \bar{g} alcanza máximo absoluto en $[\varepsilon, +\infty)$ porque tiende a cero cuando x tiende a $+\infty$, es decir,

$$\forall \bar{\varepsilon} > 0, \quad \exists K > 0 \quad \text{tal que, si } x > K, \text{ entonces } |\bar{g}(x)| = \bar{g}(x) < \bar{\varepsilon}$$

y, por tanto, \bar{g} alcanza su máximo absoluto en $[\varepsilon, K]$, para un cierto $K > 0$ suficientemente grande. Sea $m = \max \bar{g}$. Podemos transformar \bar{g} de forma continua, incluso diferenciable, en $(-\infty, \varepsilon)$ de manera que \bar{g} siga siendo continua, $\bar{g}(\varepsilon) = g(\varepsilon)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{g}(x) = m$. Ilustramos, en la Figura 3.2, esta situación.

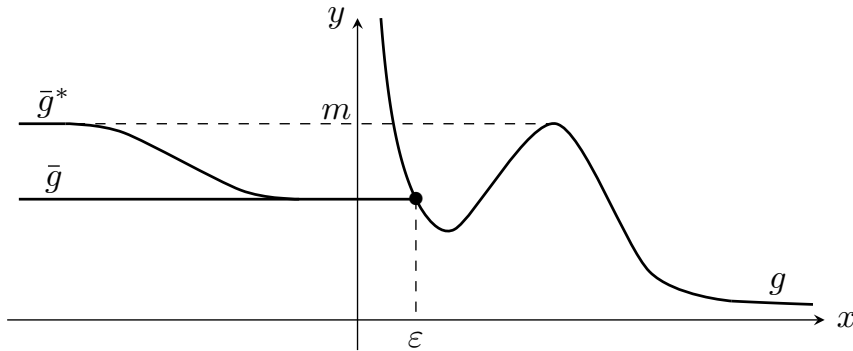


Figura 3.2: Ejemplo de funciones g , \bar{g} y su posible modificación, \bar{g}^* , para aplicar el Teorema 3.6.

Esta nueva \bar{g} sigue cumpliendo las mismas condiciones que antes, pues está definida de igual forma en $(\varepsilon, +\infty)$ y satisface que $\bar{g}(x) > M/T$ para todo $x \leq \varepsilon$. De nuevo, tenemos que las soluciones T -periódicas son mayores que ε y son, por tanto, soluciones de (3.2). A efectos prácticos, podemos suponer que $m = g(\varepsilon)$ y que no modificamos \bar{g} .

Ahora sí, ya podemos aplicar el Teorema 3.6 a la ecuación

$$x''(t) - \bar{g}(x(t)) = h(t)$$

y deducir que esta ecuación posee, al menos, una solución T -periódica (que será solución de (3.2)) si, y solo si,

$$-g(\varepsilon) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\bar{g}(x) < \frac{1}{T} \int_0^T h(t) dt < \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{g}(x) = 0.$$

La primera desigualdad es cierta por nuestra elección de $\xi > 0$ y por ser $\|h\|_1 < M$: como $\varepsilon < \xi$,

$$-g(\varepsilon) < -\frac{M}{T} < -\frac{\|h\|_1}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T -|h(t)| dt \leq \frac{1}{T} \int_0^T h(t) dt.$$

Esto también es cierto si $m > g(\varepsilon)$. La segunda desigualdad se cumple si, y solo si, $\int_0^T h(t) dt < 0$, con lo que queda probada la suficiencia de esta condición. \square

Para singularidades débiles, la condición integral no es suficiente

Sin embargo, para la ecuación (3.2) con $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ positiva, con singularidad en el origen y tendiendo a cero en el infinito, pero con integral

$$\int_0^1 g(s) ds < +\infty,$$

la condición integral anterior no es suficiente para garantizar la existencia de solución periódica. Este es el caso de las ecuaciones

$$x'' - \frac{1}{x^p} = h(t),$$

con $0 < p < 1$.

Teorema 3.10. *Para todo $T > 0$, existe $M_0 > 0$ tal que, si $M > M_0$, entonces existe h una función continua, T -periódica y negativa tal que (3.2) no posee solución periódica y $-\int_0^T h(t) dt = M$.*

Demostración. La función h con la que vamos a tratar es la dada por

$$h = -\frac{M}{\varepsilon} \chi_{[0, \varepsilon]},$$

con $\chi_{[0, \varepsilon]}$ la función característica del intervalo $[0, \varepsilon]$, que no es continua ni T -periódica. Se puede regularizar h , componiendo con una función meseta, por ejemplo, y luego extender con T -periodicidad a todo \mathbb{R} considerando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.

Supongamos que x es solución T -periódica de $x'' - g(x) = -\frac{M}{\varepsilon} \chi_{[0, \varepsilon]}(t)$ y sea $\xi > 0$ tal que $g(x) > M/T$ para todo $x \leq \xi$. Como

$$\int_0^T g(x(t)) dt = \int_0^T (-x''(t) + g(x(t))) dt = \int_0^T \frac{M}{\varepsilon} \chi_{[0, \varepsilon]}(t) dt = M,$$

razonando como en el Lema 3.8, existe $t_1 \in [0, T]$ tal que $x(t_1) > \xi$ y, en consecuencia, $\max_{t \in [0, T]} x(t) > \xi$. Como $h = 0$ en (ε, T) , ocurre que

$$x'' = g(x) + h = g(x) > 0, \quad \forall t \in (\varepsilon, T),$$

y, necesariamente, $\max_{t \in [0, T]} x(t)$ se alcanza en un punto $t_{\max} \in [0, \varepsilon]$, en el cual $x''(t_{\max}) < 0$.

Vamos a imponer condiciones sobre $\varepsilon > 0$, de forma que sea suficientemente pequeño para poder acotar determinadas cantidades. En virtud de la Proposición 3.7,

$$\|x'\|_{\infty} \leq \|(x'')^{-}\|_1 = \|(g \circ x + h)^{-}\|_1 \leq \|h\|_1 < M,$$

luego x es lipschitziana con constante M , esto es,

$$|x(t) - x(s)| \leq M|t - s|, \quad \forall t, s \in [0, T].$$

En consecuencia,

$$x(t_{\max}) - x(t) = |x(t_{\max}) - x(t)| \leq M|t_{\max} - t|, \quad \forall t \in [0, T]$$

y, por tanto, para $\varepsilon < \xi/2M$, tenemos que

$$\inf_{s \in [0, \varepsilon]} x(s) \geq x(t) \geq x(t_{\max}) - M|t - t_{\max}| > \xi - \varepsilon M > \frac{\xi}{2}, \quad \forall t \in [0, \varepsilon].$$

También tomamos ε tan pequeño que $\varepsilon \max_{s \geq \xi/2} g(s) < M/2$, lo cual podemos hacer porque g tiende a 0 en el infinito y, por tanto, está acotada superiormente en $[\xi/2, +\infty)$. De esta forma,

$$x'(\varepsilon) - x'(0) = \int_0^{\varepsilon} x''(t) dt = \int_0^{\varepsilon} g(x(t)) dt + \int_0^{\varepsilon} -\frac{M}{\varepsilon} dt \leq \varepsilon \max_{s \geq \xi/2} g(s) - M < -\frac{M}{2}.$$

De esta desigualdad, deducimos que o bien $|x'(0)| > M/4$ o bien $|x'(\varepsilon)| > M/4$. En efecto:

- Como $x'(\varepsilon) < x'(0) - M/2$, si $x'(0) \in (-M/4, M/4)$, entonces

$$x'(\varepsilon) < x'(0) - \frac{M}{2} < \frac{M}{4} - \frac{M}{2} = -\frac{M}{4},$$

y, por tanto, $|x'(\varepsilon)| > M/4$.

- Análogamente, como $x'(0) > x'(\varepsilon) + M/2$, si $x'(\varepsilon) \in (-M/4, M/4)$, entonces

$$x'(0) > x'(\varepsilon) + \frac{M}{2} > -\frac{M}{4} + \frac{M}{2} = \frac{M}{4}.$$

Asumimos que $|x'(\varepsilon)| > M/4$. Tomamos ahora $\xi' > 0$ tal que $\sup_{s > \xi'} g(s) < M/T$. Este elemento existe por tender g a cero en el infinito. Razonando como en el Lema 3.8, supongamos que x es una solución T -periódica de la ecuación tal que $x(t) > \xi'$ para todo $t \in [0, T]$. Entonces $g(x(t)) < M/T$ para todo t e

$$\int_0^T g(x(t)) dt < \int_0^T \frac{M}{T} dt = M,$$

lo cual no es cierto, como vimos al inicio de esta demostración. Por tanto, debe existir un punto $t_2 \in [0, T]$ en el cual $x(t_2) < \xi'$. Ahora bien, como x es lipschitziana con constante M ,

$$\max_{t \in [0, T]} x(t) - x(t_2) = x(t_{\max}) - x(t_2) = |x(t_{\max}) - x(t_2)| \leq M|t_{\max} - t_2| \leq TM$$

y, por tanto, $\max_{t \in [0, T]} x(t) < \xi' + TM$. Esta desigualdad sigue siendo cierta si tomamos $M' > M$.

Sea $t_{\min} \in [0, T]$ el valor tal que $x(t_{\min}) = \min_{t \in [0, T]} x(t)$. Como en el intervalo $[0, \varepsilon]$ ocurre que

$$x'' = g(x) + h < \max_{s \geq \xi/2} g(s) - \frac{M}{\varepsilon} < \frac{M}{2\varepsilon} - \frac{M}{\varepsilon} < 0,$$

necesariamente $t_{\min} \in (\varepsilon, T)$, intervalo en el que $h = 0$. Para llegar a contradicción basta integrar la ecuación (3.2) multiplicada por x' entre $t = t_{\min}$ y $t = \varepsilon$:

$$\int_{t_{\min}}^{\varepsilon} (x'(t)x''(t) - g(x(t))x'(t)) dt = \int_{t_{\min}}^{\varepsilon} h(t) dt = 0,$$

de donde obtenemos, a través de un cambio de variable, que

$$\frac{x'(\varepsilon)^2}{2} - \frac{x'(t_{\min})^2}{2} = \int_{t_{\min}}^{\varepsilon} g(x(t))x'(t) dt = \int_{x(t_{\min})}^{x(\varepsilon)} g(s) ds.$$

La función g es positiva, $x(t_{\min}) > 0$ y $x(\varepsilon) \leq \sup_{t \in [0, T]} x(t) < \xi' + TM$. Por tanto,

$$\int_{x(t_{\min})}^{x(\varepsilon)} g(s) ds < \int_0^{\xi' + TM} g(s) ds.$$

Esto, junto con que $|x'(\varepsilon)| > M/4$, nos permite deducir que

$$\int_0^{\xi' + TM} g(s) ds > \frac{x'(\varepsilon)^2}{2} - \frac{x'(t_0)^2}{2} \geq \frac{x'(\varepsilon)^2}{2} > \frac{M^2}{32},$$

lo cual no es cierto para M suficientemente grande, por ser la singularidad de g en $x_0 = 0$ débil.

Notemos que, si fuese $|x'(0)| > M/4$, llegaríamos a contradicción integrando entre $t = t_{\min}$ y $t = T$. En concreto, llegaríamos a que

$$\frac{x'(T)^2}{2} - \frac{x'(t_{\min})^2}{2} < \int_{x(t_{\min})}^{x(T)} g(s) ds < \int_0^{\xi' + TM} g(s) ds$$

y concluiríamos igual que en el caso anterior por ser $x(0) = x(T)$. \square

Posteriormente al trabajo realizado por Lazer y Solimini, muchos otros autores se dedicaron al estudio del problema periódico asociado a una ecuación diferencial singular. Una línea de investigación se centró en relajar las hipótesis de regularidad sobre la función h para estas ecuaciones, estudiando el problema periódico para $h \in L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$. Es, por ello, que en trabajos posteriores que tratan con otras ecuaciones diferenciales singulares diferentes, consideran los términos T -periódicos en L^1 y no necesariamente continuos.

3.2. Las ecuaciones de Emdem-Fowler con exponente negativo

Las ecuaciones de Lazer y Solimini presentan un término singular atractor o repulsor, pues el signo de la función g es constante. Sin embargo, existen funciones singulares indefinidas, que cambian de signo en su dominio. Ya comentamos en el Capítulo 2 que, para las ecuaciones de Emdem-Fowler con exponente negativo

$$x'' = \frac{h(t)}{x^p},$$

que se generalizan a

$$x'' = h(t)g(x) \quad (3.3)$$

para funciones g cumpliendo ciertas hipótesis, era *necesario* que la función h cambiara de signo para que el problema periódico asociado tuviese solución positiva. En consecuencia, el término singular es *necesariamente* indefinido. En los textos consultados, todos los autores coinciden en que esta propiedad dificulta más el obtener resultados de existencia de solución para el problema periódico.

En esta sección, comentamos los resultados obtenidos por Ureña en [29], que permiten garantizar la existencia de solución T -periódica para (3.3). Impone, sobre la función singular $g: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, que sea un homeomorfismo decreciente. Para este tipo de funciones, tenemos las siguientes condiciones *necesarias* para que exista solución T -periódica:

- Es necesario que $\int_0^T h(t)dt < 0$. En efecto, como la función $g: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ es decreciente y positiva, dada una solución positiva x , $g(x(t)) \neq 0$ y podemos dividir por este término en la ecuación (3.3). Integrando, se sigue que

$$\int_0^T h(t)dt = \int_0^T \frac{x''(t)}{g(x(t))} dt.$$

Vamos a aplicar el método de integración por partes tomando

$$\begin{cases} u = \frac{1}{g(x(t))}, & u' = -\frac{g'(x(t))}{(g(x(t)))^2} x'(t), \\ v' = x''(t), & v = x'(t). \end{cases}$$

Entonces

$$\int_0^T h(t)dt = \frac{x'(t)}{g(x(t))} \Big|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T -\frac{g'(x(t))}{g(x(t))^2} x'(t)^2 dt < 0,$$

pues el primer término se anula aplicando las condiciones de T -periodicidad y la integral es positiva (luego, restando, negativa) por ser g una función continua y decreciente (luego con derivada negativa).

- Es necesario que $h(t)$ sea una función que cambia de signo. Esto se deduce de que

$$\int_0^T h(t)g(x(t))dt = \int_0^T x''(t)dt = x'(T) - x'(0) = 0$$

y g es una función positiva.

En su artículo [29], Ureña es capaz de encontrar condiciones adicionales sobre h y g para que las anteriores sean *suficientes* para que exista solución T -periódica. Enunciamos el resultado principal de su artículo.

Teorema 3.11. *Sea $g: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ un homeomorfismo decreciente, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función T -periódica, localmente integrable, que cambia de signo en $[0, T]$ y con integral negativa en este intervalo. Supongamos que estamos en uno de los siguientes casos:*

- *La singularidad de g es fuerte y h es constante a trozos.*
- *La singularidad de g es muy fuerte y h es de clase uno con un número finito de ceros, que son no degenerados.*

Entonces (3.3) posee, al menos, una solución T -periódica.

Consideramos como funciones constantes a trozos aquellas para las que existe una partición $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_r = T$ de $[0, T]$ tal que la función es constante en cada abierto (p_j, p_{j+1}) , $j = 0, \dots, r-1$. De esta forma, hay discontinuidades en un número finito de puntos. Las funciones con ceros no degenerados son funciones de clase uno con derivada no nula en un entorno de cada una de sus raíces.

Su prueba es muy diferente a la de Lazer y Solimini, pues no tratan de encontrar sub y sobresoluciones para el problema periódico. Sin embargo, aprovechan que la existencia de solución para el problema de Dirichlet asociado a la ecuación (3.3),

$$\begin{cases} x'' = h(t)g(x), & t \in [0, T], \\ x(0) = x(T), \end{cases} \quad (3.4)$$

ya fue estudiado con anterioridad [1, 6]. Demuestran que, en el espacio de soluciones del problema de Dirichlet, hay un subconjunto Σ conexo de soluciones positivas con elementos que satisfacen $x'(0) \geq x'(T)$ y elementos que satisfacen $x'(0) \leq x'(T)$. Por conexión, deducen que existe al menos una solución del problema de Dirichlet cuya derivada en los extremos coincide, de forma que es solución para el problema periódico.

La existencia del conjunto conexo $\Sigma \subseteq \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{R})$

Consideramos el problema (3.4). Vamos a tratar con el problema de punto fijo asociado. Denotamos $X = \mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathbb{R})$ y $\tilde{X} = \{x \in X : x(0) = 0\}$. Podemos establecer un isomorfismo $X \cong \mathbb{R} \oplus \tilde{X}$ escribiendo una función x continua y T -periódica con $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ como

$$x(t) = x_0 + \tilde{x}(t),$$

donde $\tilde{x}(t) = x(t) - x_0$, que es continua, T -periódica y con $\tilde{x}(0) = 0$.

Una solución $x = x(t)$ del problema (3.4) con $x(0) = x(T) = x_0$ es de la forma $x(t) = x_0 + \tilde{x}(t)$ con \tilde{x} solución del problema de punto fijo

$$\tilde{x} = F(x_0, \tilde{x}) := (K \circ N)(x_0, \tilde{x}),$$

donde N es la aplicación de Nemytskii de la ecuación (3.3), dada por

$$N(x_0, \tilde{x})(t) = h(t)g(x_0 + \tilde{x}(t))$$

y K es el operador integral dado por

$$(Kx)(t) := \int_0^T G(t, s)x(s)ds,$$

con núcleo la función de Green del problema de Dirichlet asociado a la ecuación $u'' = \varphi(t)$ con condiciones iniciales homogéneas por ser $\tilde{x}(0) = \tilde{x}(T) = 0$. Este problema de punto fijo tiene sentido en el abierto de $\mathbb{R} \times \tilde{X}$

$$\Omega = \{(x_0, \tilde{x}) \in (0, +\infty) \times \tilde{X} : x_0 + \tilde{x}(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

La aplicación de Nemytskii $N: \Omega \rightarrow L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ es continua por ser g continua, mientras que $K: L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{X}$ es lineal y compacta en virtud de la Proposición 1.25. Vamos a comprobar que N lleva conjuntos de $\mathbb{R} \times \tilde{X}$ con clausura contenida en Ω en conjuntos acotados de $L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$.

Sea A un conjunto con $\bar{A} \subset \Omega$. Comprobaremos que $N(A)$ está acotada en $L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$. Dado $(x_0, \tilde{x}) \in A$, su mínimo es mayor que cero y, por tanto, siendo g un homeomorfismo decreciente,

$$\|N(x_0, \tilde{x})\|_1 = \int_0^T |h(t)| |g(x_0 + \tilde{x}(t))| dt \leq g\left(\min_{t \in [0, T]} (x_0 + \tilde{x}(t))\right) \|h\|_1 < +\infty.$$

Veamos que existe $R > 0$ tal que $\|N(x_0, \tilde{x})\|_1 \leq R$ para todo $(x_0, \tilde{x}) \in A$. Tenemos que comprobar, por lo anterior, que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\min_{t \in [0, T]} (x_0 + \tilde{x}(t)) \geq \varepsilon, \quad \forall (x_0, \tilde{x}) \in A.$$

Esto se deduce de que $\bar{A} \subset \Omega$, luego, si $\{(x_{0n}, \tilde{x}_n)\}_n$ es una sucesión de elementos de A con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{t \in [0, T]} (x_{0n} + \tilde{x}_n(t)) = 0,$$

existe una subsucesión con límite $(x_0^*, \tilde{x}^*) \in \bar{A}$ con mínimo cero, en contradicción con que $\bar{A} \subset \Omega$.

Así, $F = K \circ N: \Omega \rightarrow \tilde{X}$ es continua y compacta restringida a cualquier subconjunto Ω_* de Ω con $\bar{\Omega}_* \subset \Omega$ y tal que $F(\bar{\Omega}_*) \subset \bar{\Omega}_*$. Vamos a construir un tal conjunto Ω_* en las hipótesis del Teorema 1.19 (de Schauder), que nos garantiza la existencia de un punto fijo (x_0, \tilde{x}) de F en $\bar{\Omega}_*$. Tras comprobar que el punto fijo no pertenece a $\partial\Omega_*$, obtendremos que el grado de Leray-Schauder de $I_{\tilde{X}} - F(x_0, \cdot)$ es no nulo en $\Omega_* \cap (\{x_0\} \times \tilde{X})$.

Lema 3.12. *Existe $M > 1$ tal que, si $x = x(t)$ es solución de (3.3) que alcanza un punto crítico en t_c con $x(t_c) = x_c \geq M$, entonces x está definida en todo $[0, T]$ y cumple*

$$|x(t) - x_c| < 1, \quad \forall t \in [0, T].$$

Demostración. Consideremos

$$M := g^{-1}\left(\frac{1}{T\|h\|_1}\right) + 1$$

y sea X cumpliendo la propiedad del enunciado. Procedemos por reducción al absurdo: supongamos que existe $t_1 \in (t_c, T]$ tal que

$$|x(t) - x(t_c)| < 1, \quad \forall t \in [t_c, t_1) \quad \text{y} \quad |x(t_1) - x(t_c)| = 1.$$

Si $t_1 \in [0, t_c)$, se razonaría análogamente. Dado $t \in [t_c, t_1)$,

$$x(t) > x(t_c) - 1 \geq g^{-1}\left(\frac{1}{T\|h\|_1}\right)$$

o, equivalentemente,

$$0 < g(x(t)) < \frac{1}{T\|h\|_1}, \quad \forall t \in [t_c, t_1).$$

Por tanto, para todo $t \in [t_c, t_1]$, se cumple que

$$|x'(t)| = |x'(t) - x'(t_c)| = \left| \int_{t_c}^t x''(s) ds \right| = \left| \int_{t_c}^t h(s)g(x(s)) ds \right| < \frac{1}{T},$$

lo cual es una contradicción, ya que, en ese caso,

$$|x(t_1) - x(t_c)| \leq \int_{t_c}^{t_1} |x'(s)| ds < \frac{t_1 - t_c}{T} \leq 1. \quad \square$$

Definimos $\alpha_0 := M + 1$, siendo $M > 1$ la constante del Lema 3.12, y tomamos $\beta_0 \geq M + 3$ arbitrario. Las soluciones α y β de los problemas de valor inicial

$$\begin{cases} x'' = h(t)g(x), & t \in [0, T], \\ x(0) = \alpha_0, \\ x'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x'' = h(t)g(x), & t \in [0, T], \\ x(0) = \beta_0, \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

satisfacen, en virtud del lema anterior, que

$$\alpha(t) < M + 2 \leq \beta_0 - 1 < \beta(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

En efecto, estos problemas de valor inicial imponen como condiciones de contorno que α tenga el valor crítico α_0 y, por tanto, $\alpha(t) < 1 + \alpha_0 = M + 2$ (y, respectivamente, para β). Por tanto, para cualquier $x_0 \in [M + 2, \beta_0 - 1]$, las funciones α y β forman un par bien ordenado de sub y sobresoluciones del problema de Dirichlet con condición de contorno

$$x(0) = x(T) = x_0,$$

luego, para estos problemas, existe solución x que satisface $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$ para todo $t \in [0, T]$. Como β_0 se tomó arbitrariamente, este hecho se cumple para todo $x_0 \geq M + 2$.

Tomamos ahora $\beta_0 \geq \alpha_0 + 5$ y consideramos el conjunto

$$\Omega_* := \{(x_0, \tilde{x}) \in \mathbb{R} \times \tilde{X} : M + 3 \leq x_0 \leq \beta_0 - 2, \quad \alpha(t) < x_0 + \tilde{x}(t) < \beta(t), \quad \forall t \in [0, T]\}.$$

En este conjunto, tenemos que

$$\alpha(t) < M + 2 \leq x_0 - 1 < x(t) < x_0 + 1 \leq \beta_0 - 1 < \beta(t), \quad \forall t \in [0, T],$$

siendo $M + 2 \leq x_0 - 1$ y $x_0 + 1 \leq \beta_0 - 1$ por la construcción de Ω_* . El resto de desigualdades se deducen del Lema 3.12. En consecuencia, Ω_* es un conjunto acotado, abierto relativo de $[\alpha_0 + 2, \beta_0 - 2] \times \tilde{X}$, con clausura $\overline{\Omega_*}$ contenida en Ω y tal que $F(\overline{\Omega_*}) \subset \overline{\Omega_*}$.

Podemos aplicar el Teorema 1.19 (de Schauder), del que obtenemos que existe un punto fijo de F en $\overline{\Omega_*}$. Además, por la desigualdad anterior, se tiene que $\alpha(t) < x(t) < \beta(t)$ para todo $t \in [0, T]$ o, equivalentemente, no hay soluciones del problema de punto fijo en $\partial\Omega_*$. Si denotamos a este punto fijo por (x_0, \tilde{x}) , tenemos que

$$\deg_{LS}(I_{\tilde{X}} - F(x_0, \cdot), \Omega_* \cap (x_0 \times \tilde{X}), 0) = \alpha \neq 0.$$

Por la invarianza respecto a homotopías, para cada $x_0 \in [M + 3, \beta_0 - 2]$,

$$\deg_{LS}(I_{\tilde{X}} - F(x_0, \cdot), \Omega_* \cap (\{x_0\} \times \tilde{X}), 0) = 1.$$

Aplicando el Teorema 1.15 (Propiedad de Escisión) y el Lema 3.12, obtenemos que

$$\deg_{LS}(I_{\tilde{X}} - F(x_0, \cdot), B_{\tilde{X}}(0, 1), 0) = \alpha \neq 0, \quad \forall x \in [M + 3, \beta_0 - 2]. \quad (3.5)$$

Como tomamos $\beta_0 \geq M + 5$ arbitrario, lo anterior es cierto para todo $x_0 \geq M + 3$. Ya estamos en condiciones de probar el siguiente resultado:

Proposición 3.13. *Sean g y h en las condiciones del Teorema 3.11. Existe $\Sigma \subset \mathcal{C}^1(0, T)$ un conjunto conexo de soluciones del problema de Dirichlet (3.4), cumpliendo que*

$$\left\{ \min_{t \in [0, T]} x(t) : x \in \Sigma \right\} = (0, +\infty).$$

Demostración. Por lo anterior, basta encontrar un conjunto conexo $\Sigma \subset \mathbb{R} \times \tilde{X}$ formado por soluciones del problema de punto fijo $\tilde{x} = F(x_0, \tilde{x})$ cumpliendo la propiedad del enunciado.

Vamos a aplicar el Teorema 1.17 tomando \tilde{X} como espacio de Banach (subespacio cerrado del espacio de Banach X con la norma del supremo en las funciones T -periódicas), $\Lambda = [M + 3, \beta_0 - 2]$ para $\beta_0 \geq M + 5$ arbitrario, el conjunto abierto y acotado $[M + 3, \beta_0 - 2] \times B_{\tilde{X}}(0, 1)$ de $\Lambda \times \tilde{X}$ y la homotopía F . Se satisfacen las hipótesis de este teorema por cumplirse (3.5).

En virtud de este resultado, existe Σ una componente conexa del conjunto de soluciones Ω del problema de punto fijo tal que

$$\Sigma \cap (\{x_0\} \times B_{\tilde{X}}(0, 1)) \neq \emptyset, \quad \forall x_0 \geq M + 3.$$

Como la solución $x(t) = x_0 + \tilde{x}(t)$ satisface que $x(0) = x_0$, deducimos que $\min_{t \in [0, T]} x(t) \leq x_0$ y, así,

$$[M + 3, +\infty) \subset \left\{ \min_{t \in [0, T]} (x_0 + \tilde{x}(t)) : (x_0, \tilde{x}) \in \Sigma \right\}.$$

Solo queda comprobar que el ínfimo de este conjunto es cero.

Por la dependencia continua respecto de las condiciones iniciales, Σ debe poder prolongarse más allá de $[M + 3, +\infty) \times \tilde{X}$ en Ω de forma que Σ cumpla alguna de las condiciones siguientes:

1. La proyección de Σ a \tilde{X} es no acotada en \tilde{X} .
2. La proyección de Σ a \tilde{X} está acotada en \tilde{X} y $\bar{\Sigma} \cap \Omega \neq \emptyset$.
3. La proyección de Σ a \tilde{X} está acotada en \tilde{X} y, para todo $x_0 \geq M + 1$, se satisface que $\Sigma \cap (\{x_0\} \times \tilde{X}) \not\subset \{x_0\} \times B_{\tilde{X}}(0, 1)$.

Representamos, en la Figura 3.3, los tres posibles escenarios.

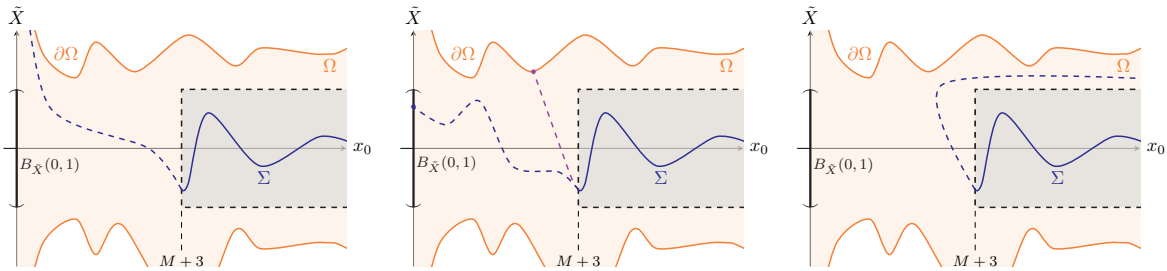


Figura 3.3: Posibles escenarios para Σ en Ω . De izquierda a derecha, los casos 1, 2 y 3.

El tercer caso no puede suceder en nuestro problema. En efecto, suponiendo que la proyección de Σ a \tilde{X} está acotada, existe $M_1 > 0$ tal que

$$\min_{t \in [0, T]} (x_0 + \tilde{x}(t)) > M_1, \quad \forall (x_0, \tilde{x}) \in \Sigma, \text{ siendo } x_0 > M_1.$$

Pero, entonces, el Lema 3.12 implica que $\Sigma \cap (\{x_0\} \times \tilde{X})$ está contenido en $\{x_0\} \times B_{\tilde{X}}(0, 1)$ para todo $x_0 > M_1$. Finalmente, veamos que el primer y el segundo caso implican que el ínfimo es cero. Como

$$\partial\Omega = \left\{ (x_0, \tilde{x}) \in [0, +\infty) \times \tilde{X} : \min_{t \in [0, T]} (x_0 + \tilde{x}(t)) = 0 \right\},$$

si estamos en el segundo caso, se tiene el resultado. Con respecto al primer caso, supongamos que la proyección de Σ a \tilde{X} , $\pi_{\tilde{X}}\Sigma$, es no acotada y que, por el contrario, existe $\rho > 0$ tal que $x_0 + \tilde{x}(t) \geq \rho$ para todo $t \in [0, T]$. El operador de Nemytskii $N: \Omega \rightarrow L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ es acotado en

$$R = \{(x_0, \tilde{x}) \in \mathbb{R} \times \tilde{X} : x_0 + \tilde{x}(t) \geq \rho, \forall t \in [0, T]\} \supset \pi_{\tilde{X}}\Sigma,$$

pues, siendo g decreciente, $\|N_K\| \leq \|h\|_\infty g(\rho) < +\infty$. Por tanto, como $\pi_{\tilde{X}}\Sigma$ está formado por funciones $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ solución de $\tilde{x} = F(x_0, \tilde{x}) = (K \circ N)(x_0, \tilde{x})$, será un conjunto acotado, llegando a una contradicción. \square

En Σ hay soluciones x con $x'(0) \geq x'(T)$

Proposición 3.14. *Sea Σ el conjunto dado por la Proposición 3.13. En Σ , hay curvas $x = x(t)$ con $x'(0) \geq x'(T)$.*

Demostración. Probemos, en primer lugar, que existe una constante $C > 0$ que depende solamente de la función h y del periodo T tal que

$$\max_{t \in [0, T]} x(t) - \min_{t \in [0, T]} x(t) \leq Cg \left(\min_{t \in [0, T]} x(t) \right),$$

para toda solución x del problema de Dirichlet (3.4). En efecto, por ser g decreciente, el operador de Nemytskii satisface que

$$\|N(x_0, \tilde{x})\|_1 = \int_0^T |h(t)g(x_0 + \tilde{x}(t))| dt \leq g \left(\min_{t \in [0, T]} x \right) \|h\|_1.$$

Por otra parte, $K: L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{X}$ es continuo, luego, si $\tilde{x} = F[x_0, \tilde{x}] = (K \circ N)(x_0, \tilde{x})$, entonces \tilde{x} satisface

$$\max \left\{ \max_{t \in [0, T]} \tilde{x}(t), - \min_{t \in [0, T]} \tilde{x}(t) \right\} = \|\tilde{x}\|_\infty \leq \|K\| \|h\|_1 g \left(\min_{t \in [0, T]} x(t) \right).$$

Por tanto, tomando $C := 2\|K\| \|h\|_1$ se satisface la desigualdad que buscábamos.

En segundo lugar, veamos que existe $0 < \varepsilon < 1$ tal que si $x = x(t)$ es solución del problema de Dirichlet (3.4) con $x'(0) < x'(T)$, entonces $g(\max_{t \in [0, T]} x(t)) < \varepsilon g(\min_{t \in [0, T]} x(t))$. Integramos en ambos lados de la ecuación diferencial (3.3) y obtenemos, por ser g decreciente, que

$$\begin{aligned} 0 < x'(T) - x'(0) &= \int_0^T x''(t) dt = \int_0^T h(t)g(x(t)) dt = \int_0^T h_+(t)g(x(t)) dt - \int_0^T h_-(t)g(x(t)) dt \\ &\leq g \left(\min_{t \in [0, T]} x(t) \right) \int_0^T h_+(t) dt - g \left(\max_{t \in [0, T]} x(t) \right) \int_0^T h_-(t) dt. \end{aligned}$$

Por tanto, $g(\max_{t \in [0, T]} x(t)) < \varepsilon g(\min_{t \in [0, T]} x(t))$ con

$$\varepsilon = \frac{\int_0^T h_+(t) dt}{\int_0^T h_-(t) dt},$$

que es un valor entre 0 y 1 por ser $\int_0^T h(t) dt = \int_0^T h_+(t) dt - \int_0^T h_-(t) dt < 0$.

Como g es decreciente y

$$\max_{t \in [0, T]} x(t) \leq \min_{t \in [0, T]} x(t) + Cg \left(\min_{t \in [0, T]} x(t) \right),$$

lo anterior implica que, para toda solución x del problema de Dirichlet (3.4) con $x'(0) < x'(T)$, se satisface que

$$g \left(\min_{t \in [0, T]} x(t) + Cg \left(\min_{t \in [0, T]} x(t) \right) \right) \leq g(\max x) < \varepsilon g \left(\min_{t \in [0, T]} x(t) \right).$$

Supongamos que todos los elementos de Σ son tales que $x'(0) < x'(T)$. Entonces, denotando $u := \min_{t \in [0, T]} x(t)$, tenemos la relación

$$g(u + Cg(u)) < \varepsilon g(u)$$

y esto se cumple para todo $u > 0$ por ser $\{\min_{t \in [0, T]} x(t) : x \in \Sigma\} = (0, +\infty)$. Definimos la sucesión creciente $\{u_n\}_{n \geq 0}$ como

$$u_0 := 1, \quad u_n = u_{n-1} + Cg(u_{n-1}), \quad \forall n \geq 1.$$

Esta sucesión es convergente. En efecto, como $0 < g(u_n) < \varepsilon g(u_{n-1})$, tenemos que

$$0 < g(u_n) < \varepsilon^n g(u_0), \quad \forall n \geq 1,$$

y, por tanto,

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(u_0 + \sum_{k=1}^{n-1} Cg(u_k) \right) < u_0 + Cg(u_0) \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k = u_0 + \frac{Cg(u_0)\varepsilon}{1 - \varepsilon} < +\infty.$$

Ahora bien, como g es continua y positiva,

$$0 < g \left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(u_n) < \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon^n g(u_0) = 0,$$

lo cual es una contradicción. Concluimos que no todos los elementos de Σ pueden ser tales que $x'(0) < x'(T)$. \square

Esta proposición se puede reformular de forma equivalente como sigue: el conjunto Σ dado en la Proposición 3.13 contiene curvas solución del problema

$$\begin{cases} x'' = h(t)g(x), & t \in [0, T], \\ x(0) = x(T), \\ x'(0) \geq x'(T), \end{cases} \quad (3.6)$$

que son subsoluciones del problema periódico asociado a la ecuación (3.3).

No todos los elementos de Σ satisfacen $x'(0) > x'(T)$

A partir de este punto, Ureña prueba una serie de lemas técnicos que permiten probar el Teorema 3.11. Solo daremos el enunciado, pudiéndose consultar su demostración en [29].

Lema 3.15. *Existe una constante $N > 0$, dependiente de h y g , tal que toda solución del problema (3.6) satisface $\max_{t \in [0, T]} x(t) - \min_{t \in [0, T]} x(t) < N$.*

Definimos la función \mathcal{G} dada por

$$\mathcal{G}(x) := - \int_1^x g(y) dy, \quad x > 0. \quad (3.7)$$

Tenemos que, por ser g un homeomorfismo decreciente y positivo,

$$\mathcal{G}'(x) = -g(x) < 0, \quad \forall x > 0, \quad \text{y} \quad \mathcal{G}''(x) = -g'(x) \geq 0, \quad \text{para c.t.p. } x > 0,$$

luego \mathcal{G} es estrictamente decreciente y convexa. Además, en esta sección, asumimos que la singularidad de g en $x_0 = 0$ es fuerte, luego

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{G}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} - \int_1^x g(y) dy = \int_0^1 g(y) dy = +\infty.$$

Tomamos ahora $\{\bar{h}_n\}_n$ y $\{\rho_n\}_n$ dos sucesiones de números positivos que satisfacen $\rho_n \rightarrow 0$ y $\bar{h}_n \mathcal{G}(\rho_n) \rightarrow +\infty$. En un intervalo compacto fijado $[t_0, t_1] \subseteq [0, T]$, elegimos para cada $n \in \mathbb{N}$ una $W^{2,1}$ -solución $x_n: [t_0, t_1] \rightarrow (0, +\infty)$ del problema

$$\begin{cases} x_n''(t) \geq \bar{h}_n g(x_n(t)), & t \in [t_0, t_1], \\ x_n(t_0) = \rho_n, \\ x_n'(t_0) \geq 0. \end{cases}$$

Notemos que este problema posee solución por tener soluciones de clase dos en $[t_0, t_1]$ el problema considerando igualdades, mucho más restrictivo, por ser g continua.

Lema 3.16. *En las condiciones anteriores, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = +\infty$ para cada $t \in (t_0, t_1]$.*

Corolario 3.17. *Supongamos que una sucesión $\{x_n\}_n \subset W^{2,1}([t_0, t_1])$ satisface*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{t \in [t_0, t_1]} x_n(t) = 0 \quad \text{y} \quad x_n''(t) \geq \bar{h} g(x_n(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

para una cierta constante $\bar{h} > 0$. Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [t_0, t_1]} x_n(t) = +\infty$.

Notemos que $\Sigma \subset W^{2,1}([0, T]) \cap \mathcal{C}^1([0, T])$. En efecto, dado $x \in \Sigma$, por definición es una función de clase uno, luego x y x' son continuas en $[0, T]$ y, por tanto, en $L^1([0, T])$ y, como $x'' = h(t)g(x)$, deducimos que

$$\|x''\|_1 = \int_0^T |h(t)|g(x(t)) dt < g\left(\min_{t \in [0, T]} x(t)\right) \|h\|_1 < +\infty$$

para cada x con $\min_{t \in [0, T]} x(t) > 0$. Así, los elementos de Σ satisfacen que $x, x', x'' \in L^1([0, T])$ y, por tanto, $x \in W^{2,1}([0, T])$.

Podemos suponer, si fuese necesario, aplicando una traslación, que existe $\varepsilon > 0$ tal que la función T -periódica h del Teorema 3.11 satisface

$$h(t) \geq \bar{h} > 0, \quad \forall t \in [0, \varepsilon] \cup [T - \varepsilon, T], \quad (3.8)$$

para una cierta constante $\bar{h} > 0$. Por todos estos resultados, demostrar el Teorema 3.11 es equivalente a probar la siguiente proposición.

Proposición 3.18. Sean g y h en las condiciones del Teorema 3.11 y $\{x_n\} \subset W^{2,1}([0, T])$ una sucesión de soluciones de $x'' = h(t)g(x)$ con $\min_{t \in [0, T]} x_n(t) \rightarrow 0$. Entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ de $\{x_n\}_n$ tal que $\max_{t \in [0, T]} x_{n_k}(t) \rightarrow +\infty$.

En efecto, si la Proposición 3.18 fuese cierta, como $\Sigma \subset W^{2,1}([0, T]) \cap \mathcal{C}^1([0, T])$ y el conjunto $\{\min_{t \in [0, T]} x(t) : x \in \Sigma\} = (0, +\infty)$, tomamos una sucesión $\{x_n\}_n \subset \Sigma$ con $\min_{t \in [0, T]} x_n(t) \rightarrow 0$. Tendríamos que $\max_{t \in [0, T]} x_{n_k}(t) \rightarrow +\infty$ y que existiría $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\max_{t \in [0, T]} x_{n_k}(t) - \min_{t \in [0, T]} x_{n_k}(t) > N, \quad \forall k \geq m.$$

En consecuencia, todas las soluciones $x_{n_k} \in \Sigma$ con $k \geq m$ serían elementos de Σ que no satisfacen la desigualdad del Lema 3.15 y cumplirían, por tanto, que $x'(0) < x'(T)$, como queríamos demostrar. La existencia de una solución del problema periódico asociado a la ecuación (3.3) se deduciría de la conexión de Σ , en el cual hay elementos x con $x'(0) \geq x'(T)$ y con $x'(0) < x'(T)$.

Vamos a tratar los dos casos distintos del Teorema 3.11 por separado.

Demostración de la Proposición 3.18 (Primer caso). Vamos a encontrar una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ en las condiciones del Corolario 3.17. La función h es T -periódica, constante a trozos y cambia de signo en $[0, T]$. Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, aunque x_n'' no es continua en $[0, T]$, sí lo son x_n' y x_n , pues

$$x_n'(t) = \int_0^t x_n''(s) ds - x_n'(0), \quad \forall t \in [0, T],$$

y x_n'' es continua y medible en $[0, T]$ salvo en un conjunto de medida nula en $[0, T]$, los puntos donde h presenta una discontinuidad de salto. La función x_n es de clase uno. Por tanto, si $t_{0n} \in [0, T]$ es un punto donde x_n alcanza un mínimo (local),

$$x_n'(t_{0n}) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow t_{0n}^-} x_n''(t), \quad \lim_{t \rightarrow t_{0n}^+} x_n''(t) \geq 0.$$

Además, estamos suponiendo (3.8). Denotamos por

$$I_1 = (0, b_1), \quad I_2 = (a_2, b_2), \quad \dots, \quad I_l = (a_l, T)$$

los intervalos, abiertos, donde h es constantemente positiva.

Como los límites laterales de x_n'' en t_{0n} deben ser no negativos, tenemos cuatro posibilidades: o bien $t_{0n} \in I_k$ para algún k , o bien $t_{0n} = a_k = b_{k-1}$, es decir, es un extremo de dos I_k consecutivos, o bien t_{0n} es extremo de un I_k en el que h pasa de ser positiva a ser nula (o al revés), o bien pertenece a un intervalo abierto en el que h es constantemente cero.

En este último caso, x_n'' es nula en todo el intervalo y todos los puntos son mínimos locales. Si ambos extremos del intervalo son de la tercera forma (h pasa a ser positiva), son candidatos a mínimo absoluto, mientras que, si en alguno de ellos la función h pasa a ser negativa, estos puntos no son candidatos a mínimo absoluto.

En resumen, los puntos t_{0n} candidatos a mínimo absoluto de x_n en $[0, T]$ son o bien puntos de algún I_k o bien extremos de algún I_k . Además, podemos encontrar una constante mayor que cero que acote inferiormente a h en todos los intervalos I_j , $j = 1, \dots, l$. Sin pérdida de generalidad, asumimos que esta constante es \bar{h} dada en (3.8).

Por haber un número finito de intervalos I_k , debe existir al menos un intervalo I_m tal que, para una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$, alcance su mínimo en \bar{I}_m :

$$\min_{t \in [0, T]} x_{n_k}(t) = \min_{t \in \bar{I}_m} x_{n_k}(t), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Extendemos h con continuidad al intervalo I_m para que en ambos extremos sea continua (y positiva). Cada función x_{n_k} satisface las condiciones del Corolario 3.17 en $\bar{I}_m = [a_m, b_m]$ y concluimos el resultado. \square

Para probar el resultado en el caso de h con ceros no degenerados y la singularidad de g en $x = 0$ muy fuerte, hace falta probar unos resultados auxiliares. Suponemos, por el contrario, que existe una sucesión en las condiciones de la Proposición 3.18 para la cual $\{\max_{t \in [0, T]} x_n(t)\}_n$ está acotada. Denotamos por

$$Z = \{b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < \dots < b_{r-1} < a_r\}$$

al conjunto de ceros de h en el intervalo $(0, T)$. Como estamos suponiendo (3.8) y que los ceros son no degenerados, debe suceder que en $I_1 = (0, b_1)$ la función h sea positiva, que en $I_2 = (b_1, a_2)$ sea negativa y que, por tanto, $h'(b_1) < 0$. Razonando de esta forma para todos los intervalos, deducimos que

$$h'(b_i) < 0, \quad \forall i = 1, \dots, r-1, \quad \text{y} \quad h'(a_i) > 0, \quad \forall i = 2, \dots, r.$$

Deducimos también que h es positiva y negativa en los conjuntos

$$I_+ = [0, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup (a_3, b_3) \cup (a_p, T], \quad I_- = (b_1, a_2) \cup (b_2, a_3) \cup \dots \cup (b_{p-1}, a_p),$$

respectivamente. Enunciamos a continuación los resultados auxiliares necesarios para probar la Proposición 3.18 en este caso, pudiéndose consultar su demostración en [29].

Lema 3.19. *Sea $\{x_n\}_n \subset W^{2,1}([0, T])$ una sucesión de soluciones de $x'' = h(t)g(x)$. Entonces $\min_{t \in Z} x_n(t) \rightarrow 0$.*

Como Z es finito, podemos asumir, si hace falta pasando a una subsucesión, que existe $z \in Z$, bien un a_i o bien un b_i , tal que $x_n(z) \rightarrow 0$. Podemos suponer que $z = a_k$ para un cierto k , pues si fuera un b_k , podríamos estudiar la ecuación diferencial $y''(t) = h(-t)g(y(t))$, que se obtiene a través del cambio de variable $y(t) = x(-t)$. Los ceros de $h(-t)$ son los mismos que los de $h(t)$, pero la derivada cambia de signo. Obtendríamos para esta segunda ecuación la existencia de solución T -periódica y, en consecuencia, también para la primera. Es decir, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que estamos en el caso $h'(z) > 0$.

Lema 3.20. *En las condiciones anteriores, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x'_n(a_k) < 0$.*

En la demostración de este lema se prueban dos afirmaciones: en primer lugar, que se satisface, bien para la sucesión $\{x_n\}_n$, bien para una subsucesión de ella, que $x'_n(a_k) < 0$ para n suficientemente grande y, en segundo lugar, que su límite no puede ser cero. Se tienen dos posibles escenarios:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n(a_k) = -\infty \quad \text{o} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n(a_k) = -c < 0.$$

Además, como h es positiva en (a_k, b_k) , cada x_n es estrictamente convexa en $[a_k, b_k]$. Esto permite obtener el siguiente lema.

Lema 3.21. *Para n suficientemente grande, existe un único $t_n \in (a_k, b_k)$ tal que $x'_n(t_n) = 0$. Además, $t_n \rightarrow a_k$.*

Ya estamos en condiciones de probar la Proposición 3.18 en el caso de h una función de clase uno con ceros no degenerados y g con una singularidad muy fuerte en $x_0 = 0$.

Demostración de la Proposición 3.18 (Segundo caso). Supongamos, en primer lugar, que $x'_n(a_k)$ diverge a $-\infty$ cuando n tiene hacia $+\infty$. Fijamos $t_* \in (a_k, b_k)$ arbitrario. Como h es de clase uno alrededor de su cero a_k , existe $0 < \varepsilon < t_* - a_k$ tal que, para cada $s \in (a_k, a_k + \varepsilon]$,

$$0 < h(t) < h(s), \quad \text{si } t \in (a_k, s), \quad h(s) < h(t), \quad \text{si } t \in (s, t_*). \quad (3.9)$$

Ilustramos, en la Figura 3.4, un ejemplo de función h en estas condiciones, en la que distinguimos un punto t_* arbitrario y un correspondiente $a_k + \varepsilon$.

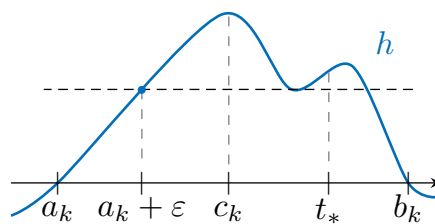


Figura 3.4: Ejemplo de función h de clase uno con ceros no degenerados tal que $h(a_k) = h(b_k) = 0$ y $h'(a_k) > 0$, $h'(b_k) < 0$, junto con un punto t_* arbitrario y un correspondiente $a_k + \varepsilon$ para el que se satisfacen las desigualdades anteriores.

En efecto, como h es de clase uno con derivada no nula alrededor de su cero a_k , existe $\delta > 0$ tal que $h'(t) \neq 0$ para todo $t \in (a_k, \delta)$. En virtud del Teorema de Rolle, existe al menos un punto en el intervalo (a_k, b_k) en el que h' se anula. Denotamos al menor punto de (a_k, b_k) en el que se cumple esta propiedad por c_k . La derivada h' es positiva en $[a_k, c_k)$ y c_k es máximo local:

- Si $c_k \geq t_*$, entonces h es estrictamente creciente en $[a_k, t_*]$ y podemos tomar cualquier $\varepsilon \in (0, t_* - a_k)$.
- Si $c_k < t_*$, tomamos ε de forma que $h(a_k + \varepsilon) < \min_{t \in [c_k, t_*]} h(t)$. Como h es creciente en $[a_k, a_k + \varepsilon]$, se cumple la primera desigualdad de (3.9), mientras que la segunda se satisface por ser h creciente en $[a_k + \varepsilon, c_k]$ y ser $h(t) > h(a_k + \varepsilon)$ para todo $t \in [c_k, t_*]$.

Para n suficientemente grande, $x_n(a_k) < 1$ por ser $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(a_k) = 0$ y, además, los puntos $t_n \in (a_k, b_k)$ dados en el Lema 3.21 cumplen que $0 < t_n - a_k < \varepsilon < t_* - t_n$ por ser $t_n \rightarrow a_k$. Equivalentemente, $t_n \in (a_k, a_k + \varepsilon)$.

Consideramos $E_n: [a_k, t_n] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$E_n(t) = \frac{x_n'(t)^2}{2} + h(t_n)\mathcal{G}(x_n(t)).$$

Estudiamos su monotonía. Si derivamos, obtenemos que, para cada $t \in [a_k, t_n]$,

$$E_n'(t) = x_n'(t) (x_n''(t) - h(t_n)g(x_n(t))).$$

Como comentábamos, en la demostración del Lema 3.20, se comprueba que $x_n'(a_k) < 0$ y en el Lema 3.21 se obtiene que, para n suficientemente grande, t_n es el único punto de (a_k, b_k) en el que x_n' se anula. Por tanto, $x_n'(t) \leq 0$ para cada $t \in [a_k, t_n]$. Por otra parte, como $t_n \in (a_k, a_k + \varepsilon)$, en virtud de (3.9), $0 < h(t) < h(t_n)$ para todo $t \in (a_k, t_n)$. Pero entonces, dado $t \in (a_k, t_n)$,

$$x_n''(t) - h(t_n)g(x_n(t)) = h(t)g(x_n(t)) - h(t_n)g(x_n(t)) = (h(t) - h(t_n))g(x_n(t)) < 0.$$

Por tanto, para n suficientemente grande, E_n' es positiva en (a_k, t_n) y E_n es una función creciente. En consecuencia,

$$E_n(t_n) = h(t_n)\mathcal{G}(x_n(t_n)) \geq E_n(a_k) = \frac{x_n'(a_k)^2}{2} + h(t_n)\mathcal{G}(x_n(a_k)).$$

Ahora bien, por la expresión de \mathcal{G} (3.7) sabemos que $\mathcal{G}(x_n(a_k)) < 0$ para n suficientemente grande, pues $x_n(a_k) < 1$. Notemos que $h(t_n) > 0$ por ser h positiva en (a_k, b_k) . Así,

$$E_n(t_n) = h(t_n)\mathcal{G}(x_n(t_n)) > \frac{x_n'(a_k)^2}{2} \tag{3.10}$$

y, por hipótesis, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n'(a_k) = +\infty$, luego lo mismo ocurre para $E_n(t_n)$.

Por último, vamos a aplicar el Lema 3.16 a las funciones $t \mapsto x_n(t_n + t)$ en el intervalo $[t_0, t_1] = [0, \varepsilon]$: como $\bar{h}_n = h(t_n) \leq h(t_n + t)$ para todo $t \in [0, \varepsilon]$,

$$x_n''(t + t_n) = h(t + t_n)g(x_n(t + t_n)) \geq \bar{h}_n g(x_n(t + t_n)), \quad t \in [t_n, t_n + \varepsilon].$$

Ocurre que $\rho_n = x_n(t_n) \rightarrow 0$, pues $t_n \rightarrow a_k$ y $x_n(a_k) \rightarrow 0$. También comprobamos que $\bar{h}_n \mathcal{G}(\rho_n) \rightarrow +\infty$ en (3.10). Finalmente, ocurre que $x_n'(t_n) \geq 0$ por ser, precisamente, igual a cero por la construcción de $\{t_n\}_n$. Así, se cumplen todas las hipótesis necesarias para poder

aplicar el Lema 3.16. Obtenemos que $x_n(t_n + \varepsilon) \rightarrow \infty$, lo que contradice que $\{\max_{t \in [0, T]} x_n(t)\}_n$ esté acotada.

Supongamos ahora que $x'_n(a_k)$ tiende a un valor real $-c < 0$ cuando n tiende a $+\infty$. Tomamos $t_* \in (b_{k-1}, a_k)$. En el intervalo $[t_*, a_k]$, la función h es negativa y, por tanto, x_n es cóncava. Así,

$$x_n(t) \leq x_n(a_k) + (t - a_k)x'_n(a_k), \quad \forall t \in [t_*, a_k].$$

En particular, lo anterior se satisface para $t = t_*$ y deducimos que la sucesión $\{x_n(t_*)\}_n$ está acotada. Por otra parte, siendo g decreciente, ocurre que

$$x'_n(t_*) = x'_n(a_k) - \int_{t_*}^{a_k} h(t)g(x_n(t))dt \geq x'_n(a_k) - \int_{t_*}^{a_k} h(t)g(x_n(a_k) - (a_k - t)x'_n(a_k))dt.$$

Aplicando el Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} x'_n(t_*) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(x'_n(a_k) - \int_{t_*}^{a_k} h(t)g(x_n(a_k) - (a_k - t)x'_n(a_k))dt \right) \\ &\geq -c - \int_{t_*}^{a_k} h(t)g((a_k - t)v) dt = +\infty, \end{aligned}$$

pues h es negativa en $[t_*, a_k]$, h posee un cero no degenerado en a_k y g presenta una singularidad muy fuerte en $x_0 = 0$.

En consecuencia, $x'_n(t_*) \rightarrow \infty$. Notemos que, como x''_n es negativa en $(b_{k-1}, t_*]$, x'_n es decreciente en este intervalo y, en consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n(s) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n(t_*) = +\infty, \quad \forall s \in (b_{k-1}, t_*].$$

Recordemos que, además, $\{x_n(t_*)\}_n$ está acotada, luego existe $A > 0$ tal que $x_n(t_*) \leq A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así,

$$x_n(b_{k-1}) = x_n(t_*) - \int_{b_{k-1}}^{t_*} x'_n(s)ds \leq A - \int_{b_{k-1}}^{t_*} x'_n(s)ds.$$

Siendo $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n(s) = +\infty$ para $s \in (b_{k-1}, t_*]$, existe un índice a partir del cual $\int_{b_{k-1}}^{t_*} x'_n(s)ds \geq A$ y, por tanto, a partir de ese índice, $x_n(b_{k-1}) \leq 0$, lo cual no es posible. \square

Las condiciones necesarias para la ecuación de Emdem-Fowler generalizada no son suficientes para garantizar la existencia de solución T -periódica

El Teorema 3.11 permite garantizar la existencia de solución T -periódica para la ecuación (3.3) cuando g es un homeomorfismo positivo y decreciente, h cambia de signo y posee integral nula en $[0, T]$ y suponiendo, adicionalmente, las condiciones de fortaleza sobre la singularidad en $x_0 = 0$ y la forma de la función h . Nos podemos preguntar si estas hipótesis adicionales que, en principio, no son necesarias, se pueden suprimir y seguir teniendo garantizada la existencia de solución T -periódica. Esta es la cuestión que trata el segundo trabajo de Ureña en esta línea de investigación, [30], con respuesta negativa. De hecho, prueba el siguiente resultado:

Teorema 3.22. *Existe una función $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -periódica, de clase infinito, que cambia de signo y con $\int_0^T h(t)dt < 0$ para la cual la ecuación diferencial*

$$x'' = \frac{h(t)}{x^{5/3}}$$

no posee solución T -periódica.

La función $g: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ dada por $g(x) = 1/x^{5/3}$ es un homeomorfismo decreciente con inversa $g^{-1}(x) = 1/x^{3/5}$ y, por tanto, la ecuación anterior cumple las condiciones necesarias para la existencia de solución T -periódica. No se puede enmarcar en el primer caso, pues h no es constante a trozos, y tampoco en el segundo, ya que

$$\int_0^1 x \frac{1}{x^{5/3}} dx = \int_0^T x^{-2/3} dx = \frac{x^{1/3}}{1/3} \Big|_{x=0}^{x=1} = 3 < +\infty,$$

luego la singularidad no es muy fuerte. Esto permite concluir que las condiciones adicionales del Teorema 3.11, aunque no necesarias a priori, no se pueden suprimir fácilmente.

3.3. Otras ecuaciones singulares sin rozamiento

Una característica importante de las ecuaciones de Lazer-Solimini es que el término singular es atractor o repulsor por ser la función g de signo constante. Todos los autores que trabajan con ecuaciones singulares coinciden en que su estudio se vuelve más complejo en el caso en que el término singular es indefinido. Con el objetivo de generalizar las ecuaciones de Lazer-Solimini teniendo controlado el carácter singular de la ecuación, los matemáticos Robert Hakl y Pedro José Torres estudian en [12] la familia de ecuaciones

$$x'' = \frac{h_1(t)}{x^p} - \frac{h_2(t)}{x^q} + f(t),$$

con $p, q > 0$, $h_1, h_2, f \in L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ y h_1, h_2 funciones positivas. Estas ecuaciones presentan dos términos singulares: uno atractor y otro repulsor. En el caso $p = q$, el término singular es, en principio, indefinido. Los autores determinan condiciones que garantizan la existencia de sub y sobresoluciones para estas ecuaciones según el signo de su función de Green asociada.

Otros autores, como Zaitao Liang, Xiuqiang Zhang, Shengjun Li y Ziqing Zhou [17], tratan con ecuaciones diferenciales singulares con términos generales, no necesariamente de la forma $1/x^p$, $p > 0$. Estos matemáticos estudian la familia de ecuaciones

$$x'' + a(t)x = f(t, x) + h(t)g(x),$$

con $a: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f: \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas y T -periódicas, h cambiando de signo y $g: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ singular en $x_0 = 0$. A través de teoría de punto fijo en conos asumiendo que la función de Green asociada a la ecuación es positiva, obtienen

resultados de existencia de solución T -periódica. Pedro José Torres [27] estudió la ecuación anterior asumiendo que g no tenía una singularidad fuerte en $x = 0$.

Por su parte, José Godoy, Nolbert Morales y Manuel Zamora [9] estudian la familia de ecuaciones

$$x'' = \beta h(t)g(x),$$

con $h \in L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ una función T -periódica, $\beta > 0$ y $g: (a, b) \rightarrow (0, +\infty)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, una función singular en al menos uno de los extremos. Estos matemáticos se inspiraron en la ecuación

$$x'' = \beta \frac{h(t)}{\cos^2(x)},$$

singular en los extremos del intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Se interesan principalmente en estudiar el caso con $\int_0^T h(t)dt = 0$. Proceden empleando herramientas de grado topológico. Ha sido uno de los pocos textos que, en vez de considerar una función singular en el origen (lo cual se puede trasladar a cualquier punto), admiten que el término singular presente más de una singularidad, de forma que sus resultados se pueden aplicar a una familia más amplia de ecuaciones diferenciales.

Capítulo 4

Algunas ecuaciones diferenciales singulares con rozamiento

En este capítulo, presentamos algunas ecuaciones diferenciales singulares en las que interviene explícitamente la derivada primera de la variable de estado, x' . En particular, revisamos los resultados obtenidos por dos grupos de matemáticos. Por una parte, Shiping Lu, Yuanzhi Guo y Lijuan Chen estudian en [19] la familia de ecuaciones

$$x'' + f(x)x' + \varphi(t)x^m - \frac{h(t)}{x^p} = 0,$$

con $m \geq 0$, $p > 0$, $\varphi, h \in L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ funciones que pueden cambiar de signo y $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que, tal vez, es singular en el origen. Posteriormente, Shiping Lu y Xingchen Yu generalizan en [20] estos resultados a la familia

$$x'' + f(x)x' + \varphi(t)x^m - \frac{h_1(t)}{x^p} + \frac{h_2(t)}{x^q} = 0,$$

con $m \geq 0$, $p \geq q > 0$, $\varphi, h_1, h_2 \in L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ funciones que pueden cambiar de signo y f en las mismas condiciones. Sus demostraciones de existencia de solución T -periódica para estas ecuaciones se basan en la búsqueda de condiciones suficientes sobre los coeficientes para poder aplicar el Teorema 1.20 (de Manásevich-Mawhin).

Por otra parte, Alexander Gutiérrez y Pedro José Torres estudian en [11] la familia de ecuaciones

$$x'' + f(x)x' + g(x) = h(t),$$

con $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y T -periódica y $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, funciones localmente lipschitzianas y, tal vez, singulares en al menos uno de los extremos del intervalo de definición. Su demostración se basa en el empleo de funciones de Lyapunov, el establecimiento de regiones invariantes y la búsqueda de puntos fijos de la aplicación de Poincaré asociada a la ecuación anterior. Los autores pretenden generalizar al caso débil resultados previos para singularidad fuerte.

4.1. Aplicaciones del Teorema de Manásevich-Mawhin

En esta sección, exponemos los resultados de existencia de solución T -periódica positiva demostrados en [19] para la familia de ecuaciones diferenciales singulares

$$x'' + f(x)x' + \varphi(t)x^m - \frac{h(t)}{x^p} = 0, \quad (4.1)$$

con $m \geq 0$, $p > 0$, $\varphi, h \in L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ funciones que pueden cambiar de signo y $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que, tal vez, es singular en el origen. Como en la gran mayoría de resultados basados en la teoría del grado topológico, se introduce un parámetro λ en la ecuación. En nuestro caso, trabajaremos con la familia uniparamétrica

$$x'' + \lambda f(x)x' + \lambda \varphi(t)x^m - \frac{\lambda h(t)}{x^p} = 0, \quad \lambda \in (0, 1], \quad (4.2)$$

y el conjunto

$$\Sigma = \left\{ x \in C^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}) : x > 0, x'' + \lambda f(x)x' + \lambda \varphi(t)x^m - \frac{\lambda h(t)}{x^p} = 0, \lambda \in (0, 1] \right\}.$$

Usaremos, además, las funciones auxiliares $F, F^*: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$F(x) = \int_0^x f(y)dy, \quad F^*(x) = \int_0^x y^p f(y)dy, \quad x > 0. \quad (4.3)$$

También usaremos la notación

$$\bar{h} := \frac{1}{T} \int_0^T h(t)dt, \quad \bar{\varphi} := \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t)dt, \quad (4.4)$$

por ser constantes que usaremos con frecuencia en esta sección.

Este artículo viene motivado por una investigación previa realizada por Robert Hakl, Pedro José Torres y Manuel Zamora [13], en el que tratan con la familia de ecuaciones

$$x'' + f(x)x' + \varphi(t)x^m + \frac{c_1}{x^p} - \frac{c_2}{x^q} = 0,$$

siendo $c_1 \geq 0$, $c_2 > 0$ constantes, $\varphi \in L(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ con $\bar{\varphi} \geq 0$ y $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal vez singular en $x = 0$. De esta forma, Lu, Guo y Chen generalizan sus resultados para funciones no constantes.

Sin embargo, los autores no utilizan las mismas técnicas que Hakl, Torres y Zamora. Por el contrario, particularizan el Teorema 1.20 (de Manásevich-Mawhin) a la ecuación (4.1), como se expone a continuación.

Proposición 4.1. *Supongamos que existen $r_0, r_1, R_2 > 0$ constantes tales que $r_0 < r_1$ y se satisface que:*

1. *Para cada $\lambda \in (0, 1]$, toda solución T -periódica positiva posible x de (4.2) satisface que $r_0 < x(t) < r_1$ y $|x'(t)| < R_2$ para cada $t \in [0, T]$.*

2. Cada raíz de la función q dada por $q(c) = \frac{\bar{h}}{c^p} - c^m \bar{\varphi}$ cumple que $r_0 < c < r_1$.

3. Se satisface que $q(r_0)q(r_1) < 0$.

Entonces la ecuación (4.1) posee al menos una solución T -periódica x tal que $r_0 < x(t) < r_1$, para cada $t \in [0, T]$.

Este resultado se obtiene del Teorema 1.20 (de Manásevich-Mawhin) tomando $\phi(x) = x$,

$$F(t, x, y) = -f(x)y - \varphi(t)x^m + \frac{h(t)}{x^p}, \quad q(c) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, c, 0)dt = \frac{\bar{h}}{c^p} - c^m \bar{\varphi}$$

y, para ciertas constantes $r_0, r_1, R_2 > 0$ con $r_0 < r_1$,

$$\Omega = \Omega_{r_0, r_1, R_2} = \{x \in C^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}) : r_0 < x(t) < r_1, |x'(t)| < R_2, \forall t \in [0, T]\},$$

$$W = W_{r_0, r_1, R_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r_0 < x < r_1, |y| \leq R_2\}.$$

Recordemos que $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es la proyección $\pi(x, y) = x$. Como, en este caso, $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la condición $q(r_0)q(r_1) < 0$ equivale a que $\deg_B(q, \pi W, 0)$ es no nulo.

Recordemos que, para aplicar este resultado, la función F debe satisfacer las condiciones de Carathéodory en $[0, T] \times \bar{W}$. Vamos a comprobarlo:

- $F(t, \cdot, \cdot)$ es continua para casi todo $t \in [0, T]$ por ser suma y producto de funciones continuas respecto a x y a y . Los únicos términos no necesariamente continuos son φ y h , que dependen únicamente de t .
- $F(\cdot, x, y)$ es medible en $[0, T]$ para todo $(x, y) \in \bar{W}$ por ser suma de funciones en $L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ y funciones constantes, medibles en $[0, T]$.
- Para todo $K \subset \bar{W}$ subconjunto compacto, existe $m_K \in L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ tal que, para casi todo $t \in [0, T]$ y todo $(x, y) \in K$, se satisface que $|F(t, x, y)| \leq m_K(t)$. En efecto, dado $(x, y) \in \bar{W}$,

$$\begin{aligned} |F(t, x, y)| &= \left| -f(x)y - \varphi(t)x^m + \frac{h(t)}{x^p} \right| \leq |f(x)||y| + |\varphi(t)||x|^m + \frac{|h(t)|}{|x|^p} \\ &\leq \max_{x \in [r_0, r_1]} |f(x)| R_2 + r_1^m |\varphi(t)| + \frac{|h(t)|}{r_0^p} =: m_{\bar{W}}(t), \text{ en c.t.p. } t \in [0, T]. \end{aligned}$$

La función $m_{\bar{W}}$ es medible en $[0, T]$ por ser suma de funciones medibles en $[0, T]$ y la acotación anterior es válida para todo $K \subset \bar{W}$ compacto.

El primero de los resultados auxiliares que necesitamos para obtener condiciones de existencia de solución periódica es el siguiente, que permite acotar el cuadrado de la variación total de las funciones absolutamente continuas en el intervalo compacto $[0, T]$. Las soluciones que buscamos son, al menos, de clase uno. Estas funciones son absolutamente continuas en cada compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y, por tanto, también las soluciones T -periódicas.

Lema 4.2. Sea $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ una función absolutamente continua tal que $x(0) = x(T)$. Entonces

$$\left(\max_{t \in [0, T]} x(t) - \min_{t \in [0, T]} x(t) \right)^2 \leq \frac{T}{2} \|x'\|_2^2.$$

Demostración. Haremos uso de la función auxiliar $\tilde{x}: [0, 2T] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), & \text{si } t \in [0, T], \\ x(t - T), & \text{si } t \in (T, 2T]. \end{cases}$$

Esta función es absolutamente continua por serlo x y cumplirse que $x(0) = x(T)$. Además,

$$\tilde{x}(t + T) = x(t + T - T) = x(t) = \tilde{x}(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Como $\min_{t \in [0, 2T]} \tilde{x}(t) = \min_{t \in [0, T]} x(t)$ y $\max_{t \in [0, 2T]} \tilde{x}(t) = \max_{t \in [0, T]} x(t)$, existen $t_0 \in [0, T]$ y $t_1 \in [t_0, t_0 + T]$ tales que

$$\tilde{x}(t_0) = \min_{t \in [0, T]} x(t) = \tilde{x}(t_0 + T) \quad \text{y} \quad \tilde{x}(t_1) = \max_{t \in [0, T]} x(t).$$

En consecuencia,

$$\max_{t \in [0, T]} x(t) - \min_{t \in [0, T]} x(t) = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{x}'(s) ds \quad \text{y} \quad \max_{t \in [0, T]} x(t) - \min_{t \in [0, T]} x(t) = \int_{t_1}^{t_0+T} \tilde{x}'(s) ds.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tomando $f(s) = \tilde{x}'(s)$ y $g(s) = 1$, ambas en $L^2([0, 2T])$, notemos que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\left(\int_{t_0}^{t_1} \tilde{x}'(s) ds \right)^2 \leq \left(\int_{t_0}^{t_1} 1^2 ds \right) \left(\int_{t_0}^{t_1} \tilde{x}'(s)^2 ds \right) = (t_1 - t_0) \left(\int_{t_0}^{t_1} \tilde{x}'(s)^2 ds \right)$$

y, de forma análoga,

$$\left(\int_{t_1}^{t_0+T} \tilde{x}'(s) ds \right)^2 \leq (t_0 + T - t_1) \left(\int_{t_1}^{t_0+T} \tilde{x}'(s)^2 ds \right).$$

Por tanto, siendo $t_0 \leq t_1 \leq t_0 + T$, obtenemos las dos cotas siguientes:

$$\max_{t \in [0, T]} x(t) - \min_{t \in [0, T]} x(t) \leq \sqrt{t_1 - t_0} \left(\int_{t_0}^{t_1} \tilde{x}'(s)^2 ds \right)^{1/2} \leq \sqrt{T} \left(\int_{t_0}^{t_1} \tilde{x}'(s)^2 ds \right)^{1/2},$$

$$\max_{t \in [0, T]} x(t) - \min_{t \in [0, T]} x(T) \leq \sqrt{t_0 + T - t_1} \left(\int_{t_1}^{t_0+T} \tilde{x}'(s)^2 ds \right)^{1/2} \leq \sqrt{T} \left(\int_{t_1}^{t_0+T} \tilde{x}'(s)^2 ds \right)^{1/2}.$$

Basta ahora multiplicar ambas expresiones y observar que, dados A y B reales positivos, se satisface que $AB \leq \frac{1}{4}(A + B)^2$, para obtener que

$$\begin{aligned} \left(\max_{t \in [0, T]} x(t) - \min_{t \in [0, T]} x(t) \right)^2 &\leq T \left(\int_{t_0}^{t_1} \tilde{x}'(s)^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{t_1}^{t_0+T} \tilde{x}'(s)^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq T \left[\frac{1}{4} \left(\int_{t_0}^{t_1} \tilde{x}'(s)^2 ds + \int_{t_1}^{t_0+T} \tilde{x}'(s)^2 ds \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{T}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \tilde{x}'(s)^2 ds. \end{aligned}$$

Como $\tilde{x}(t+T) = \tilde{x}(t) = x(t)$ para cada $t \in [0, T]$, concluimos que

$$\left(\max_{t \in [0, T]} x(t) - \min_{t \in [0, T]} x(t) \right)^2 \leq \frac{T}{2} \int_0^T |x'(t)|^2 dt = \frac{T}{2} \|x'\|_2^2. \quad \square$$

El siguiente resultado nos permite obtener una cota superior para $\min_{t \in [0, T]} x(t)$ y una cota inferior para $\max_{t \in [0, T]} x(t)$. Esto será útil, posteriormente, para encontrar condiciones suficientes que garanticen que se satisfaga la primera condición de la Proposición 4.1.

Lema 4.3. *Supongamos que $\bar{h}, \bar{\varphi} > 0$. Entonces, para cada $x \in \Sigma$, existen $\tau_1, \tau_2 \in [0, T]$ tales que*

$$x(\tau_1) \leq K_1 := \left(\frac{\bar{h}^+}{\bar{\varphi}} \right)^{\frac{1}{m+p}} \quad y \quad x(\tau_2) \geq K_2 := \left(\frac{\bar{h}}{\bar{\varphi}^+} \right)^{\frac{1}{m+p}}.$$

Demostración. Tomemos $x \in \Sigma$. Como x es un elemento de Σ , $x(t) > 0$ para cada t y existe un $\lambda \in (0, 1]$ para el cual x satisface (4.2). Dividiendo por x^m , (4.2) se transforma en

$$\frac{x''(t)}{x(t)^m} + \frac{\lambda f(x(t))x'(t)}{x(t)^m} + \lambda \varphi(t) - \frac{\lambda h(t)}{x(t)^{p+m}} = 0.$$

Integrando esta ecuación entre $t = 0$ y $t = T$, obtenemos que

$$\int_0^T \frac{x''(t)}{x^m(t)} dt + \int_0^T \frac{\lambda f(x(t))x'(t)}{x(t)^m} dt + \int_0^T \lambda \varphi(t) dt = \int_0^T \frac{\lambda h(t)}{x(t)^{p+m}} dt. \quad (4.5)$$

En la segunda integral, aplicamos el cambio de variable $y = x(t)$, el cual se puede hacer por ser $x \in \mathcal{C}^1([0, T])$, y deducimos, por T -periodicidad de x , que

$$\int_0^T \frac{\lambda f(x(t))x'(t)}{x(t)^m} dt = \lambda \int_{x(0)}^{x(T)} \frac{f(y)}{y^m} dy = 0.$$

Por otra parte, en la primera integral de (4.5) aplicamos integración por partes. Tomamos las funciones $u = x(t)^{-m}$ y $v' = x''(t)$ y obtenemos, por T -periodicidad de x , que

$$\int_0^T \frac{x''(t)}{x^m(t)} dt = x(t)^{-m} x'(t) \Big|_{t=0}^{t=T} + m \int_0^T x(t)^{-m-1} x'(t)^2 dt = m \int_0^T x(t)^{-m-1} x'(t)^2 dt > 0,$$

por ser $x(t) > 0$ para cada $t \in [0, T]$. Sustituimos esta información en (4.5), dividimos por $\lambda > 0$ y obtenemos que

$$T\bar{\varphi} = \int_0^T \frac{h(t)}{x(t)^{m+p}} dt - \frac{1}{\lambda} \int_0^T \frac{x''(t)}{x(t)^m} dt \leq \int_0^T \frac{h(t)}{x(t)^{m+p}} dt \leq \int_0^T \frac{h^+(t)}{x(t)^{m+p}} dt,$$

donde empleamos la notación $\bar{\varphi}$ de (4.4) y h^+ es la parte positiva de h . Aplicando el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral, deducimos que existe $\tau_1 \in [0, T]$ tal que

$$T\bar{\varphi} \leq \frac{T\bar{h}^+}{x(\tau_1)^{m+p}},$$

que, siendo $x(\tau_1)$, $\bar{\varphi}$, $T > 0$, se transforma en

$$x(\tau_1) \leq \left(\frac{\bar{h}^+}{\bar{\varphi}} \right)^{\frac{1}{m+p}} := K_1,$$

como queríamos demostrar.

La segunda desigualdad se prueba de forma análoga. Integramos, entre $t = 0$ y $t = T$, la ecuación (4.2) multiplicada por x^p , como sigue,

$$x''(t)x(t)^p + \lambda f(x(t))x(t)^p x'(t) + \lambda x(t)^{m+p} \varphi(t) - \lambda h(t) = 0,$$

y obtenemos, razonando como antes, que

$$\int_0^T x''(t)x(t)^p dt + \lambda \int_0^T x(t)^{m+p} \varphi(t) dt = \lambda T \bar{h}.$$

En este caso, la primera integral es negativa: si aplicamos integración por partes con $u = x(t)^p$ y $v' = x''(t)$, comprobamos que

$$\int_0^T x''(t)x(t)^p dt = -p \int_0^T x(t)^{p-1} x'(t)^2 dt < 0,$$

de forma que

$$T \bar{h} \leq \int_0^T x(t)^{m+p} \varphi(t) dt \leq \int_0^T x(t)^{m+p} \varphi^+(t) dt.$$

Así, basta aplicar el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para obtener que existe $\tau_2 \in [0, T]$ tal que

$$T \bar{h} \leq T \bar{\varphi}^+ x(\tau_2)^{m+p}$$

o, equivalentemente, $x(\tau_2) \geq K_2$, como queríamos demostrar. \square

Finalmente, el siguiente resultado auxiliar nos permite obtener una cota inferior, ahora uniforme en Σ , para $\min_{t \in [0, T]} x(t)$. De nuevo, esto será útil para verificar que se satisfacen las condiciones de la Proposición 4.1.

Lema 4.4. *Supongamos que $\bar{h} > 0$ y $\varphi(t) \geq 0$ para casi todo $t \in [0, T]$ con $\bar{\varphi} > 0$. Supongamos, además, que*

$$C_0 := \sup_{x \in [K_2, +\infty)} F(x) < +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(F(x) - \frac{T \bar{h}^+}{x^p} \right) > C_0,$$

donde K_1 viene dada como en el Lema 4.3. Entonces existe $x_0 > 0$ constante tal que

$$\min_{t \in [0, T]} x(t) \geq x_0, \quad \forall x \in \Sigma.$$

Demostración. Como $x \in \Sigma$, existe $\lambda \in (0, 1]$ para el que x satisface (4.2). Comprobemos que existen $t_{\min}, t_{\max} \in \mathbb{R}$ tales que $0 < t_{\min} - t_{\max} < T$ y

$$x(t_{\min}) = \min_{t \in [0, T]} x(t), \quad x(t_{\max}) = \max_{t \in [0, T]} x(t).$$

En efecto, como x es continua en el intervalo $[0, T]$, alcanza su máximo en un punto $a \in [0, T]$ y su mínimo en un punto $b \in [0, T]$. Estos puntos son distintos, pues x es no constante al ser una solución de la ecuación diferencial (4.2), con términos dependientes de t no nulos para $\lambda \neq 0$. Si $a < b$, tomamos $t_{\min} = b$, $t_{\max} = a$ y se cumple claramente que $0 < t_{\min} - t_{\max} < T$. Si $a > b$, entonces tomamos $t_{\min} = b + T$. Por T -periodicidad, x también alcanza su mínimo en este punto y , como $0 < |b - a| = a - b < T$, deducimos que $-T < b - a < 0$ o, equivalentemente,

$$0 < (b + T) - a = t_{\min} - t_{\max} < T.$$

Que $\bar{h} > 0$ y $\varphi(t) \geq 0$ para casi todo $t \in [0, T]$ con $\bar{\varphi} > 0$ implican que estamos en las condiciones del Lema 4.3 y que existe $K_2 > 0$ tal que

$$K_2 \leq x(t_{\max}) < +\infty.$$

Integrando (4.2) entre $t = t_{\max}$ y $t = t_{\min}$, vemos que

$$F(x(t_{\min})) - F(x(t_{\max})) = \int_{t_{\max}}^{t_{\min}} f(x(t))x'(t)dt = \int_{t_{\max}}^{t_{\min}} \frac{h(t)}{x(t)^p} dt - \int_{t_{\max}}^{t_{\min}} \varphi(t)x(t)^m dt.$$

Ahora bien, por hipótesis,

$$F(x(t_{\max})) \leq \sup_{y \in [K_2, +\infty)} F(y) = C_0 < +\infty.$$

Además, como $x(t) > 0$ para todo t y $\varphi(t) > 0$ para casi todo t , también se cumple que

$$\int_{t_{\max}}^{t_{\min}} \varphi(t)x(t)^m dt > 0.$$

Así,

$$F(x(t_{\min})) \leq C_0 + \int_{t_{\max}}^{t_{\min}} \frac{h(t)}{x(t)^p} dt \leq C_0 + \int_{t_{\max}}^{t_{\min}} \frac{h^+(t)}{x(t)^p} dt \leq C_0 + \int_0^T \frac{h^+(t)}{x(t)^p} dt \leq C_0 + \frac{T\bar{h}^+}{x(t_{\min})^p}.$$

Equivalentemente,

$$F(x(t_{\min})) - \frac{T\bar{h}^+}{x(t_{\min})^p} < C_0.$$

Finalmente, en virtud de la última hipótesis, deducimos que existe un valor $x_0 > 0$ para el cual

$$F(y) - \frac{T\bar{h}^+}{y^p} > C_0, \quad \forall y \in (0, x_0),$$

de forma que $x(t_{\min}) \geq x_0$. Y como este x_0 no depende del $x \in \Sigma$ que escogimos al principio de esta demostración, esta cota se satisface para todo $x \in \Sigma$, como queríamos demostrar. \square

Observación 4.5. Notemos que si $\bar{\varphi}$ y \bar{h} son constantes positivas, como $m \geq 0$ y $p > 0$, existen ciertos valores $0 < k < K$ para los cuales

$$\frac{\bar{h}}{x^p} - \bar{\varphi}x^m > 0, \quad \forall x \in (0, k) \quad \text{y} \quad \frac{\bar{h}}{x^p} - \bar{\varphi}x^m < 0, \quad \forall x \in (K, +\infty).$$

Bajo las hipótesis del Lema 4.4, los autores consiguen demostrar que se cumplen las condiciones de la Proposición 4.1, garantizando, por tanto, la existencia de solución T -periódica. Esto se resume en el siguiente teorema.

Teorema 4.6. *Supongamos $\bar{h} > 0$, $\varphi(t) \geq 0$ para casi todo $t \in \mathbb{R}$ con $\bar{\varphi} > 0$ y que se satisfacen las hipótesis del Lema 4.4. Entonces, para cada $m \geq 0$, la ecuación (4.1) posee al menos una solución T -periódica.*

Demostración. Probaremos que se satisfacen las tres condiciones de la Proposición 4.1. Comencemos por la primera. Ya sabemos, por el Lema 4.4 que existe $x_0 > 0$ tal que $\min_{t \in [0, T]} x(t) \geq x_0$ para cada $x \in \Sigma$. Probaremos que existen M_1 y M_2 constantes positivas tales que, para cada $x \in \Sigma$,

$$\max_{t \in [0, T]} x(t) \leq M_1 \quad \text{y} \quad \max_{t \in [0, T]} |x'(t)| \leq M_2.$$

Tomemos $x \in \Sigma$ fijo. Entonces existe $\lambda \in (0, T]$ para el que se satisface (4.2). Por una parte, si integramos esta ecuación entre $t = 0$ y $t = T$, tenemos que

$$\int_0^T x''(t) dt + \lambda \int_0^T f(x(t))x'(t) dt + \lambda \int_0^T \varphi(t)x(t)^m dt - \lambda \int_0^T \frac{h(t)}{x(t)^p} dt = 0,$$

que, por T -periodicidad, se transforma en

$$\int_0^T \varphi(t)x(t)^m dt = \int_0^T \frac{h(t)}{x(t)^p} dt. \quad (4.6)$$

Por otra parte, si multiplicamos (4.2) por $x(t)$ e integramos entre $t = 0$ y $t = T$, obtenemos la ecuación

$$\int_0^T x''(t)x(t) dt + \lambda \int_0^T f(x(t))x(t)x'(t) dt + \lambda \int_0^T \varphi(t)x(t)^{m+1} dt - \lambda \int_0^T \frac{h(t)}{x(t)^{p-1}} dt = 0.$$

La segunda integral es nula por T -periodicidad. Con respecto a la primera integral, aplicamos el método de integración por partes, tomando $u = x(t)$ y $v' = x''(t)$, y deducimos que

$$\int_0^T x''(t)x(t) dt = x(t)x'(t) \Big|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T (x'(t))^2 dt = - \int_0^T |x'(t)|^2 dt = -\|x'\|_2^2.$$

Sustituyendo las diferentes expresiones en la ecuación anterior, tenemos que

$$\|x'\|_2^2 = \lambda \int_0^T \varphi(t)x(t)^{m+1} dt - \lambda \int_0^T \frac{h(t)}{x(t)^{p-1}} dt.$$

Ahora bien, como $\lambda \leq 1$ y $-h(t) = -h^+(t) + h^-(t) \leq h^-(t)$, obtenemos que

$$\|x'\|_2^2 \leq \int_0^T \varphi(t)x(t)^{m+1} dt + \int_0^T \frac{h^-(t)}{x(t)^{p-1}} dt.$$

Notemos que $\varphi(t) \geq 0$ para casi todo t y que h^- y x son funciones positivas, luego

$$\varphi(t)x(t)^{m+1} \leq \left(\max_{t \in [0, T]} |x(t)| \right) \varphi(t)x(t)^m \quad \text{y} \quad \frac{h^-(t)}{x(t)^{p-1}} \leq \left(\max_{t \in [0, T]} |x(t)| \right) \frac{h^-(t)}{x(t)^p}.$$

Esto, junto con (4.6), nos permite deducir que

$$\begin{aligned} \|x'\|_2^2 &\leq \max_{t \in [0, T]} x(t) \left(\int_0^T \varphi(t) x(t)^m dt + \int_0^T \frac{h^-(t)}{x(t)^p} dt \right) \\ &= \max_{t \in [0, T]} x(t) \left(\int_0^T \frac{h(t)}{x(t)^p} dt + \int_0^T \frac{h^-(t)}{x(t)^p} dt \right) = \max_{t \in [0, T]} x(t) \int_0^T \frac{h^+(t)}{x(t)^p} dt. \end{aligned}$$

Ahora bien, $\min_{t \in [0, T]} x(t) \geq x_0$, obteniendo, así, que

$$\|x'\|_2^2 \leq \frac{T\bar{h}^+}{x_0^p} \max_{t \in [0, T]} x(t).$$

Por otra parte, en virtud del Lema 4.2 y el Lema 4.3, deducimos que

$$\max_{t \in [0, T]} u(t) \leq \min_{t \in [0, T]} x(t) + \sqrt{\frac{T}{2}} \|x'\|_2^2 \leq K_1 + \sqrt{\frac{T}{2}} \|x'\|_2^2. \quad (4.7)$$

Aplicando esta desigualdad en lo anterior, obtenemos que

$$\|x'\|_2^2 \leq \frac{T\bar{h}^+}{x_0^p} \left(K_1 + \sqrt{\frac{T}{2}} \|x'\|_2 \right).$$

De esto podemos deducir que existe $\rho \in (0, +\infty)$ tal que $\|x'\|_2 \leq \rho$. En efecto, la anterior desigualdad se puede transformar en

$$\|x'\|_2 \left(\|x'\|_2 - \frac{\bar{h}^+ T \sqrt{T}}{x_0^p \sqrt{2}} \right) \leq \frac{T\bar{h}^+}{x_0^p} K_1 < +\infty,$$

luego $\|x'\|_2$ no puede ser infinita. Esta constante ρ no depende del punto $x \in \Sigma$ que tomemos. Basta ahora con sustituir esto en la desigualdad (4.7) para obtener que

$$\max_{t \in [0, T]} x(t) \leq K_1 + \sqrt{\frac{T}{2}} \rho =: M_1$$

y esta cota no depende del punto $x \in \Sigma$ escogido.

Veamos, ahora, la existencia de $M_2 > 0$. Si x alcanza su máximo en $t_{\max} \in [0, T]$, entonces $x'(t_{\max}) = 0$ y deducimos de (4.2) que

$$x'(t) = \lambda \int_{t_{\max}}^t \left(-f(x(s))x'(s) - \varphi(s)x(s)^m + \frac{h(s)}{x(s)^p} \right) ds, \quad \forall t \in [t_{\max}, t_{\max} + T].$$

Siendo $F' = f$, de lo anterior deducimos que

$$\begin{aligned} |x'(t)| &\leq \lambda |F(x(t)) - F(x(t_{\max}))| + \lambda \int_{t_{\max}}^{t_{\max}+T} \varphi(s)x(s)^m ds + \lambda \int_{t_{\max}}^{t_{\max}+T} \left| \frac{h(s)}{x(s)^p} \right| ds \\ &\leq 2 \max_{x_0 \leq y \leq M_1} |F(y)| + \int_0^T \varphi(s)x(s)^m ds + \int_0^T \left| \frac{h(s)}{x(s)^p} \right| ds \\ &\leq 2 \max_{x_0 \leq y \leq M_1} |F(y)| + \frac{T\bar{h}}{x_0^p} + T\bar{\varphi}M_1 =: M_2, \end{aligned}$$

en cuya última desigualdad aplicamos que $x_0 \leq x(t) \leq M_1$, para cada $t \in [0, T]$. Como esto ocurre para todo $x \in \Sigma$, se satisface la desigualdad para todo elemento de Σ .

Con las constantes M_1 y M_2 , podemos comprobar que se satisface la primera condición de la Proposición 4.1. Siendo $0 < k < K$ las constantes dadas en la Observación 4.5, tomamos $r_0 := \min\{k, x_0\}$, $r_1 = \max\{M_1, K\}$ y $R_2 = M_2$. Así, toda solución T -periódica x de (4.2) con $\lambda \in (0, T]$ satisface que $r_0 < x(t) < r_1$ y $|x'(t)| < R_2$ para cada $t \in [0, T]$, como queríamos probar.

Que se cumplen ahora el resto de condiciones de la Proposición (4.1) es inmediato: en el caso de la segunda, teniendo en cuenta la Observación 4.5 y que $r_0 \leq k$, $r_1 \geq K$, es claro que

$$\frac{\bar{h}}{x^p} - \bar{\varphi}x^m > 0, \quad \forall x \in (0, r_0], \quad \text{y} \quad \frac{\bar{h}}{x^p} - \bar{\varphi}x^m < 0, \quad \forall x \in [r_1, +\infty),$$

luego los x donde la expresión anterior se anula están, necesariamente, en (r_0, r_1) . En el caso de la tercera condición, precisamente por lo anterior, ocurre que

$$\left(\frac{\bar{h}}{r_0^p} - \bar{\varphi}r_0^m \right) \left(\frac{\bar{h}}{r_1^p} - \bar{\varphi}r_1^m \right) < 0.$$

Hemos comprobado que estamos en las condiciones de la Proposición 4.1 y, en consecuencia, la ecuación (4.1) posee al menos una solución T -periódica. \square

Además de estos resultados, demuestran otros dos teoremas de existencia de solución T -periódica bajo otras hipótesis alternativas. Para ello, prueban otros dos lemas a partir de los cuales, de forma similar al caso anterior, deducen estos nuevos resultados. Como el método de proceder es análogo, enunciamos estos lemas y sus teoremas asociados, pudiéndose consultar su demostración en [19].

Lema 4.7. *Supongamos que $\bar{h} > 0$ y $\varphi(t) \geq 0$ para casi todo $t \in [0, T]$ con $\bar{\varphi} > 0$. Supongamos además, que*

$$C_1 := \inf_{x \in [K_1, +\infty)} F(x) > -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(F(y) - \frac{T\bar{h}^+}{y^p} \right) < C_1,$$

donde K_1 viene dada como en el Lema 4.3. Entonces, existe $x_1 > 0$ tal que

$$\min_{t \in [0, T]} x(t) \geq x_1, \quad \forall x \in \Sigma.$$

Lema 4.8. *Supongamos que $h(t) \geq 0$ para casi todo $t \in [0, T]$, con $\bar{h} > 0$ y $\bar{\varphi} > 0$. Supongamos, además, que*

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(F^*(y) - 2T\bar{\varphi}^+ y^{m+p} \right) = +\infty, \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} F^*(y) < T\bar{h} + \inf_{y \in [K_1, +\infty)} \left(F(y) - 2T\bar{\varphi}^+ y^{m+p} \right),$$

donde K_1 viene dada como en el Lema 4.3 y F^* es la función definida en (4.3). Entonces, existen $x_0, x_1 > 0$ constantes, $x_0 < x_1$, tales que

$$\min_{t \in [0, T]} x(t) \geq x_0 \quad \text{y} \quad \max_{t \in [0, T]} x(t) \leq x_1, \quad \forall x \in \Sigma.$$

De forma similar a como probamos el Teorema 4.6, los Lemas 4.7–4.8 permiten demostrar los dos teoremas siguientes, respectivamente.

Teorema 4.9. *Supongamos que $\bar{h} > 0$ y $\varphi(t) \geq 0$ para casi todo $t \in \mathbb{R}$, con $\bar{\varphi} > 0$ y que estamos en las condiciones del Lema 4.7. Entonces, para cada $m \geq 0$, la ecuación (4.1) posee al menos una solución T -periódica.*

Teorema 4.10. *Supongamos que $h(t) \geq 0$ para casi todo $t \in [0, T]$, con $\bar{h} > 0$ y $\bar{\varphi} > 0$ y que estamos en las condiciones del Lema 4.8. Entonces, para cada $m \geq 0$, la ecuación (4.1) posee al menos una solución T -periódica.*

La introducción de otro término singular en la ecuación

En el artículo posterior de Shiping Lu y Xingchen Yu [20], de manera completamente análoga, se obtienen resultados para la familia de ecuaciones

$$x'' + f(x)x' + \varphi(t)x^m - \frac{h_1(t)}{x^p} + \frac{h_2(t)}{x^q} = 0, \quad (4.8)$$

con $m \geq 0$, $p \geq q > 0$, $\varphi, h_1, h_2 \in L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ funciones que pueden cambiar de signo y $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que tal vez sea singular en el origen. Igual que para la familia anterior, particularizan el Teorema 1.20 (de Manásevich-Mawhin) a esta ecuación y buscan condiciones sobre los coeficientes para garantizar que se satisfacen sus hipótesis. Trabajamos con la familia uniparamétrica

$$x'' + \lambda f(x)x' + \lambda \varphi(t)x^m - \frac{\lambda h_1(t)}{x^p} + \frac{\lambda h_2(t)}{x^q} = 0, \quad \lambda \in (0, 1], \quad (4.9)$$

y el conjunto

$$\Sigma = \left\{ x \in C^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}) : x > 0, x'' + \lambda f(x)x' + \lambda \varphi(t)x^m - \frac{\lambda h_1(t)}{x^p} + \frac{\lambda h_2(t)}{x^q} = 0, \lambda \in (0, 1] \right\}.$$

En este caso, el resultado del que parten es el siguiente.

Proposición 4.11. *Supongamos que existen $r_0, r_1, R_2 > 0$ constantes tales que $r_0 < r_1$ y se satisface que:*

1. *Para cada $\lambda \in [0, 1]$, toda solución T -periódica positiva posible x de (4.9) satisface que $r_0 < x(t) < r_1$ y $|x'(t)| < R_2$ para cada $t \in [0, T]$.*
2. *Cada raíz de la función q dada por $q(c) = \frac{\bar{h}_1}{c^p} - \frac{\bar{h}_2}{c^q} - c^m \bar{\varphi}$ cumple que $r_0 < c < r_1$.*
3. *Se tiene la desigualdad $q(r_0)q(r_1) < 0$.*

Entonces la ecuación (4.8) posee al menos una solución T -periódica x tal que $r_0 < x(t) < r_1$, para cada $t \in [0, T]$.

La proposición se obtiene del Teorema 1.20 (de Manásevich-Mawhin) con $\phi(x) = x$,

$$F(t, x, x') = -f(x)x' - \varphi(t)x^m + \frac{h_1(t)}{x^p} - \frac{h_2(t)}{x^q}, \quad q(c) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, c, 0)dt = \frac{\bar{h}_1}{c^p} - \frac{\bar{h}_2}{c^q} - c^m \bar{\varphi}$$

y, para ciertas constantes $r_0, r_1, R_2 > 0$ con $r_0 < r_1$,

$$\Omega = \Omega_{r_0, r_1, R_2} = \{x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}) : r_0 < x(t) < r_1, |x'(t)| < R_2, \forall t \in [0, T]\},$$

$$W = W_{r_0, r_1, R_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r_0 < x < r_1, |y| < R_2\}.$$

De nuevo, siendo $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $q(r_0)q(r_1) < 0$ implica que $\deg_B(q, \pi W, 0)$ es no nulo.

Igual que en el caso anterior, comprobemos que la función F satisface las condiciones de Carathéodory en $[0, T] \times \bar{W}$:

- $F(t, \cdot, \cdot)$ es continua para casi todo $t \in [0, T]$ por ser suma y producto de funciones continuas respecto a x y a y . Los únicos términos no necesariamente continuos son φ , h_1 y h_2 , que dependen únicamente de t .
- $F(\cdot, x, y)$ es medible en $[0, T]$ para todo $(x, y) \in \bar{W}$ por ser suma de funciones en $L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ y funciones constantes, medibles en $[0, T]$.
- Para todo $K \subset \bar{W}$ subconjunto compacto, existe $m_K \in L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ tal que, para casi todo $t \in [0, T]$ y todo $(x, y) \in K$, se satisface que $|F(t, x, y)| \leq m_K(t)$. En efecto, se cumple para casi todo $t \in [0, T]$ y todo $(x, y) \in \bar{W}$ que

$$\begin{aligned} |F(t, x, y)| &= \left| -f(x)y - \varphi(t)x^m + \frac{h_1(t)}{x^p} - \frac{h_2(t)}{x^q} \right| \\ &\leq |f(x)||y| + |\varphi(t)||x|^m + \frac{|h_1(t)|}{|x|^p} + \frac{|h_2(t)|}{|x|^q} \\ &\leq \max_{x \in [r_0, r_1]} |f(x)| R_2 + r_1^m |\varphi(t)| + \frac{|h_1(t)|}{r_0^p} + \frac{|h_2(t)|}{r_0^q} =: m_{\bar{W}}(t). \end{aligned}$$

La función $m_{\bar{W}}$ es medible en $[0, T]$ por ser suma de funciones medibles en $[0, T]$ y la anterior acotación es válida para todo $K \subset \bar{W}$ compacto.

Como el método de proceder es completamente análogo al del caso anterior, enunciaremos los resultados que obtienen, pudiendo consultar su demostración en [20]. Introducen las funciones auxiliares

$$F_1(s) = \int_1^x f(y)dy \quad \text{y} \quad F_1^*(x) = \int_1^x y^p f(y)dy,$$

que no coinciden, necesariamente, con las funciones F y F^* del apartado anterior, por integrar entre 1 y x y no entre 0 y x . También hacen uso del siguiente resultado auxiliar, entre otros.

Lema 4.12. *Supongamos que $\bar{\varphi}, \bar{h}_1 > 0$. Para cada $x \in \Sigma$, existen $\tau_1, \tau_2 \in [0, T]$ tales que $x(\tau_1) \leq K_0$ y $x(\tau_2) \geq K_1$, siendo*

$$K_0 := \max \left\{ 1, \left(\frac{\bar{h}_1^+ + \bar{h}_2^-}{\bar{\varphi}} \right)^{\frac{1}{m+q}} \right\}, \quad K_1 := \begin{cases} \min \left\{ \left(\frac{\bar{h}_1^-}{2\bar{\varphi}^+} \right)^{\frac{1}{m+p}}, \left(\frac{\bar{h}_1^-}{2\bar{h}_2^+} \right)^{\frac{1}{p-q}} \right\}, & \text{si } \bar{h}_2^+ > 0, \\ \left(\frac{\bar{h}_1^-}{\bar{\varphi}^+} \right)^{\frac{1}{m+p}}, & \text{si } \bar{h}_2^+ = 0. \end{cases}$$

Resumimos los cuatro resultados de existencia que demuestran en el siguiente teorema:

Teorema 4.13. *Supongamos que $\bar{\varphi}, \bar{h}_1 > 0$. La ecuación (4.8) posee al menos una solución T -periódica positiva si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(F_1(x) - \frac{Th_1^+}{x^p} - \frac{Th_2^-}{x^q} \right) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F_1(x) + T\bar{\varphi}^+ x^m) = -\infty$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(F_1(x) + \frac{Th_1^+}{x^p} + \frac{Th_2^-}{x^q} \right) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F_1(x) - T\bar{\varphi}^+ x^m) = +\infty$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F_1^*(x) + Th_2^+ x^{p-q} - T\bar{\varphi}^+ x^{m+p}) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_1^*(x) < C_0 - Th_1^-$, donde

$$C_0 := \inf_{x \geq K_1} [F_1^*(x) + Th_2^+ x^{p-q} - T\bar{\varphi}^+ x^{m+p}].$$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F_1^*(x) + Th_2^+ x^{p-q} + T\bar{\varphi}^+ x^{m+p}) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_1^*(x) > C_1 + Th_1^-$, donde

$$C_1 := \sup_{x \geq K_1} [F_1^*(x) + Th_2^+ x^{p-q} + T\bar{\varphi}^+ x^{m+p}].$$

4.2. Puntos fijos de la aplicación de Poincaré

En esta sección, exponemos los resultados de existencia de solución T -periódica positiva demostrados en [11] para la familia de ecuaciones diferenciales singulares

$$x'' + f(x)x' + g(x) = h(t), \quad (4.10)$$

con $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y T -periódica, $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, funciones localmente lipschitzianas y g una función estrictamente creciente que se anula en algún punto. Ambas f y g pueden ser singulares en alguno de los extremos del intervalo de definición, incluso admitiendo que estos sean los puntos del infinito. Aceptamos, así, términos singulares muy generales, pero, a cambio, las variables t y x deben estar separadas.

Los autores se inspiraron en textos anteriores en los que se exigía que la singularidad de g fuese fuerte. Veremos que el resultado que prueban necesita que las singularidades sean débiles y que esto permite aplicar sus resultados a casos no singulares.

Introducimos la siguiente notación: denotamos por x_0 el único valor de $x \in (a, b)$ tal que $g(x_0) = 0$ y definimos las funciones auxiliares $F, G: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(y)dy, \quad G(x) = \int_{x_0}^x g(y)dy,$$

que son, respectivamente, primitivas de f y g . También definimos las funciones $W, Z: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$W(x) = \frac{F(x)^2}{4} + 2G(x), \quad Z(x) = \frac{F(x)^2}{2} + 2G(x).$$

Teorema 4.14. *Supongamos que*

- $\omega^* := \inf\{W(a), W(b)\} < +\infty$,
- Existe una constante $f_0 > 0$ tal que $f(x) \geq f_0$ para cada $x \in (a, b)$.
- g es estrictamente creciente y cambia de signo.

Sea $0 < \omega < \omega^*$ y $r_1 < r_2$ soluciones de $Z(x) = \omega$. Definimos la aplicación auxiliar $R: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dada mediante

$$R(x) = -\frac{|F(x)|}{2} + \sqrt{\omega^* - W(x)} \quad (4.11)$$

y las constantes

$$K_1 = \min_{i=1,2} \left\{ \frac{|g(r_i)|}{f_0}, \sqrt{\frac{2g(r_i)F(r_i)}{f_0}} \right\}, \quad K_2 = \min_{i=1,2} \left\{ \frac{R(r_i)}{2}, \frac{R(r_i)^2}{|F(c_i)|} \right\}. \quad (4.12)$$

Si $\|h\|_\infty < \frac{f_0}{2} \min\{K_1, K_2\}$, entonces existe al menos una solución T -periódica $x = x(t)$ de (4.10), que satisface $r_1 < x(t) < r_2$ para todo $t \in [0, T]$.

Observación 4.15. Las condiciones del Teorema 4.14 implican que, si g es singular en alguno de los extremos, **la singularidad es débil**. En efecto, la tercera condición del Teorema 4.14 implica que g es negativa en (a, x_0) y positiva en (x_0, b) , luego $G(x) \geq 0$ para cada $x \in (a, b)$. Aplicando, ahora, la primera condición, vemos que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} G(x) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x)^2}{4} + 2G(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} W(x) = W(a) < +\infty,$$

luego, si g es singular en $x = a$, la singularidad es débil (y análogamente para $x = b$). Además, estas hipótesis también permiten que f sea singular en alguno de los extremos (o en ambos), mientras esté acotada inferiormente por una constante $f_0 > 0$ y, razonando igual que con g , sus posibles singularidades sean de tipo débil.

Observación 4.16. Comprobemos que las hipótesis del Teorema 4.14 garantizan que existen dos soluciones $a \leq r_1 < r_2 \leq b$ de $Z(x) = \omega$, para todo $\omega \in (0, \omega^*)$, y que $K_2 > 0$. En efecto,

$$Z'(x) = F(x)f(x) + 2g(x),$$

que es negativa en (a, x_0) , cero en $x = x_0$ y positiva en (x_0, b) . Por tanto, Z tiene mínimo absoluto en $x = x_0$, con valor $Z(x_0) = 0$. Por ser decreciente en (a, x_0) y creciente en (x_0, b) , los conjuntos de nivel $\{x \in (a, b): Z(x) = \omega\}$, con $\omega \leq \inf\{Z(a), Z(b)\}$, están formados por dos puntos, r_1 y r_2 , que satisfacen $r_1 < x_0 < r_2$. Como

$$W(x) = Z(x) - \frac{F(x)^2}{4} \leq Z(x), \quad \forall x \in (a, b),$$

ocurre que $\omega^* = \inf\{W(a), W(b)\} \leq \inf\{Z(a), Z(b)\}$ y, así, el Teorema 4.14 está bien enunciado. Ilustramos en la Figura 4.1 una posible función Z y uno de sus conjuntos de nivel.

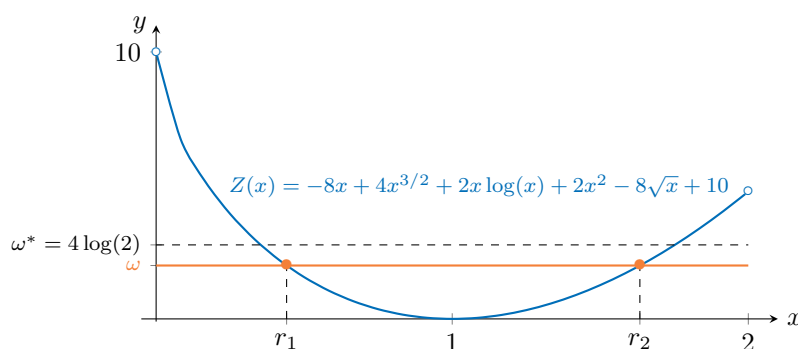


Figura 4.1: Ejemplo de función Z en las condiciones del Teorema 4.14. Elegimos como coeficientes de la ecuación (4.10) las funciones $f(x) = 2 + 1/\sqrt{x}$ y $g(x) = \log(x)$ en el intervalo $(0, 2)$.

Con respecto a la buena definición de la constante K_2 , basta comprobar que $R(x) > 0$ para todo $x \in \{r_1, r_2\}$ para concluir que la constante es positiva. Esto se prueba en el siguiente lema:

Lema 4.17. *La función R es positiva en el conjunto $[r_1, r_2]$.*

Demostración. Observemos que

$$Z(x) = W(x) + \frac{F(x)^2}{4} \leq \omega, \quad \forall x \in [r_1, r_2],$$

y esto, junto con que $\omega < \omega^*$, implica que

$$\omega^* - W(x) \geq \omega^* - \omega + \frac{F(x)^2}{4} > \frac{F(x)^2}{4}, \quad \forall x \in [r_1, r_2].$$

En consecuencia, como queríamos probar,

$$R(x) = -\frac{|F(x)|}{2} + \sqrt{\omega^* - W(x)} > 0, \quad \forall x \in [r_1, r_2]. \quad \square$$

La prueba del Teorema 4.14 consiste en encontrar una región positivamente invariante del sistema siguiente, equivalente a la ecuación (4.10):

$$\begin{cases} x' = y - F(x), \\ y' = -g(x) + h(t). \end{cases} \quad (4.13)$$

Este sistema es topológicamente conjugado al sistema que se obtiene introduciendo la variable $y = x'$ a la ecuación (4.10),

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -f(x)y - g(x) + h(t). \end{cases}$$

a través del homeomorfismo Φ dado por $\Phi(x, y) = (x, y + F(x))$, continua y con inversa continua $\Phi^{-1}(x, y) = (x, y - F(x))$. Es estándar trabajar con estos sistemas equivalentes, que aparecen, no solo en el trabajo de Gutiérrez y Torres, sino en general al tratar con la ecuación de Liénard: en el sistema (4.13), las variables x e y aparecen separadas y es más fácil realizar argumentos sobre el plano de fases para encontrar soluciones periódicas.

Definimos el potencial $P: (a, b) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$P(x, y) := \left(y - \frac{F(x)}{2}\right)^2 + W(x).$$

Ocurre que $P(x, y) \leq \omega^*$ si, y solo si,

$$\frac{F(x)}{2} - \sqrt{\omega^* - W(x)} \leq y \leq \frac{F(x)}{2} + \sqrt{\omega^* - W(x)}. \quad (4.14)$$

En consecuencia, $P(x, y) = \omega^*$ es una curva cerrada simple. Para demostrar el Teorema 4.14, probaremos que el conjunto simplemente conexo

$$\Omega := \{(x, y) : r_1 \leq x \leq r_2, P(x, y) \leq \omega^*\} \quad (4.15)$$

es positivamente invariante para el sistema (4.13). Representamos en la Figura 4.2 un posible conjunto Ω , para las mismas funciones del ejemplo anterior.

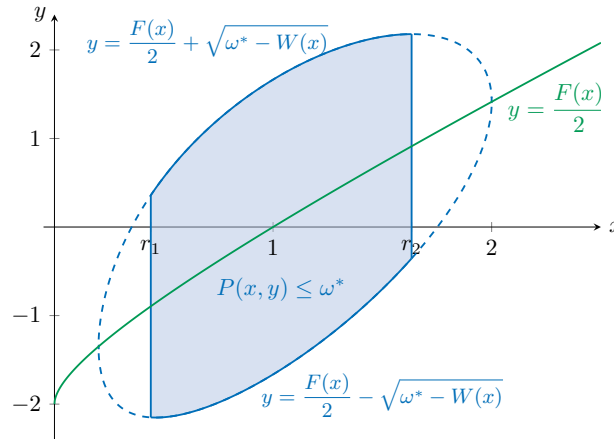


Figura 4.2: Ejemplo de conjunto Ω , sombreado en azul, en las condiciones del Teorema 4.14. Elegimos como coeficientes de la ecuación (4.10), de nuevo, $f(x) = 2 + 1/\sqrt{x}$ y $g(x) = \log(x)$ en el intervalo $(0, 2)$.

Siendo Ω la clausura de una región acotada por una curva de Jordan, Ω es homeomorfa a la bola unidad compacta. Si, además, es positivamente invariante, podremos aplicar el Teorema 1.18 (de Brouwer) a la aplicación de Poincaré $P_T: \Omega \rightarrow \Omega$ asociada a la ecuación diferencial.

Con este objetivo en mente, necesitamos el siguiente resultado auxiliar para probar que Ω es positivamente invariante:

Lema 4.18. *Bajo las condiciones del Teorema 4.14, si $x \in (r_1, r_2)$ y $P(x, y) \geq \omega^*$, entonces se satisfacen las siguientes cotas:*

$$|y - F(x)| \geq \frac{4\|h\|_\infty}{f_0}, \quad (y - F(x))^2 > \frac{2\|h\|_\infty}{f_0}|F(x)|.$$

Demostración. Comencemos con la primera desigualdad. Siendo un valor absoluto, deberíamos llegar a que

$$y \geq F(x) + \frac{4\|h\|_\infty}{f_0} \quad \text{o} \quad y \leq F(x) - \frac{4\|h\|_\infty}{f_0}.$$

Ya observamos que $P(x, y) \leq \omega^*$ si, y solo si, se tiene (4.14). Por tanto, como, por hipótesis, se tiene la desigualdad contraria, debe ocurrir que

$$y \geq \frac{F(x)}{2} + \sqrt{\omega^* - W(x)} \quad \text{o} \quad y \leq \frac{F(x)}{2} - \sqrt{\omega^* - W(x)}.$$

Para obtener la primera desigualdad, probaremos que para cada $x \in (r_1, r_2)$ se cumple que

$$\frac{F(x)}{2} + \sqrt{\omega^* - W(x)} > F(x) + \frac{4\|h\|_\infty}{f_0} \quad \text{y} \quad \frac{F(x)}{2} - \sqrt{\omega^* - W(x)} < F(x) - \frac{4\|h\|_\infty}{f_0}.$$

Operando, las anteriores desigualdades se transforman en

$$\|h\|_\infty < \frac{f_0}{4} \left(-\frac{F(x)}{2} + \sqrt{\omega^* - W(x)} \right) \quad \text{y} \quad \|h\|_\infty < \frac{f_0}{4} \left(\frac{F(x)}{2} + \sqrt{\omega^* - W(x)} \right).$$

Probaremos que se satisface la cota más fina, esto es, que para cada $x \in (r_1, r_2)$ se tiene que

$$\|h\|_\infty < \frac{f_0}{4} \left(-\frac{|F(x)|}{2} + \sqrt{\omega^* - W(x)} \right) = \frac{f_0}{4} R(x).$$

Sabemos que r_1 y r_2 son los ceros de $Z(x) = \omega < \omega^*$ y que en el intervalo (r_1, r_2) la función Z es menor que ω , de forma que, para cada $x \in (r_1, r_2)$, se cumple que

$$Z(x) = W(x) + \frac{F(x)^2}{4} < \omega^*$$

o, equivalentemente,

$$\sqrt{\omega^* - W(x)} > \frac{|F(x)|}{2}, \quad \forall x \in (r_1, r_2).$$

Por otra parte, como F es negativa en (r_1, x_0) y positiva en (x_0, r_2) ,

$$R'(x) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{|F(x)|}{2} + \sqrt{\omega^* - W(x)} \right) = \begin{cases} \frac{f(x)}{2} + \frac{-W'(x)}{2\sqrt{\omega^* - W(x)}} > 0, & \text{si } x \in (r_1, x_0), \\ -\frac{f(x)}{2} + \frac{-W'(x)}{2\sqrt{\omega^* - W(x)}} < 0, & \text{si } x \in (x_0, r_2). \end{cases}$$

En efecto, f es una función positiva y

$$W'(x) = \frac{F(x)f(x)}{2} + 2g(x)$$

es negativa para $x \in (r_1, x_0)$, cero para $x = x_0$ y positiva para $x \in (x_0, r_2)$. Así,

$$\min_{x \in [r_1, r_2]} R(x) = \min_{i=1,2} R(r_i).$$

Finalmente, utilizando la hipótesis $\|h\|_\infty < \frac{f_0}{2} \min\{K_1, K_2\}$ del Teorema 4.14 y la definición de K_2 (4.12), obtenemos que

$$\|h\|_\infty < \frac{f_0}{2} K_2 \leq \frac{f_0}{4} \min_{i=1,2} R(r_i) \leq \frac{f_0}{4} R(x), \quad \forall x \in (r_1, r_2),$$

y concluimos que se satisface la primera desigualdad de este resultado.

La segunda desigualdad se puede escribir, aplicando raíces cuadradas, como

$$|y - F(x)| > \sqrt{\frac{2\|h\|_\infty}{f_0} |F(x)|},$$

de forma que deberíamos llegar a que

$$y > F(x) + \sqrt{\frac{2\|h\|_\infty}{f_0} |F(x)|} \quad \text{o} \quad y < F(x) - \sqrt{\frac{2\|h\|_\infty}{f_0} |F(x)|}.$$

Igual que como razonábamos en la desigualdad anterior, procederemos probando que, bajo la hipótesis $P(x, y) \geq \omega^*$, para cada $x \in (r_1, r_2)$ se cumple que

$$\frac{F(x)}{2} + \sqrt{\omega^* - W(x)} > F(x) + \sqrt{\frac{2\|h\|_\infty}{f_0} |F(x)|}$$

y

$$\frac{F(x)}{2} - \sqrt{\omega^* - W(x)} < F(x) - \sqrt{\frac{2\|h\|_\infty}{f_0} |F(x)|}.$$

Operando, las anteriores son equivalentes a que

$$\|h\|_\infty < \frac{f_0}{2|F(x)|} \left(-\frac{F(x)}{2} + \sqrt{\omega^* - W(x)} \right)^2 \quad \text{y} \quad \|h\|_\infty < \frac{f_0}{2|F(x)|} \left(\frac{F(x)}{2} + \sqrt{\omega^* - W(x)} \right)^2.$$

Probaremos que se satisface la cota más fina, esto es, que para cada $x \in (r_1, r_2)$ se tiene que

$$\|h\|_\infty < \frac{f_0}{2|F(x)|} \left(-\frac{|F(x)|}{2} + \sqrt{\omega^* - W(x)} \right)^2 = \frac{f_0 R(x)^2}{2|F(x)|}.$$

Ocurre que, siendo F negativa en (r_1, x_0) y positiva en (x_0, r_2) ,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{R(x)^2}{|F(x)|} \right) = \begin{cases} \frac{-2R(x)R'(x)F(x) + R(x)^2 f(x)}{F(x)^2} > 0 & \text{si } x \in (r_1, x_0), \\ \frac{2R(x)R'(x)F(x) - R(x)^2 f(x)}{F(x)^2} < 0 & \text{si } x \in (x_0, r_2). \end{cases}$$

En consecuencia,

$$\min_{x \in [r_1, r_2]} \frac{R(x)^2}{|F(x)|} = \min_{i=1,2} \frac{R(r_i)^2}{|F(r_i)|}.$$

De nuevo, por la hipótesis $\|h\|_\infty < \frac{f_0}{2} \min\{K_1, K_2\}$ y la definición de K_2 en (4.12), vemos que

$$\|h\|_\infty < \frac{f_0}{2} K_2 \leq \frac{f_0}{2} \min_{i=1,2} \frac{R(r_i)^2}{|F(r_i)|} \leq \frac{f_0 R(x)^2}{2|F(x)|}, \quad \forall x \in (r_1, r_2),$$

con lo que queda probada la segunda desigualdad de este resultado. \square

Ahora sí, ya estamos en condiciones de probar el Teorema 4.14:

Demostración (del Teorema 4.14). Para probar que el conjunto Ω definido en (4.15) es positivamente invariante, comprobaremos que la derivada orbital de P respecto al sistema (4.13) es negativa en $((a, b) \times \mathbb{R}) \setminus \text{Int}(\Omega)$:

$$\dot{P}(x, y) := \langle \nabla P(x, y), (x', y') \rangle < 0, \quad \forall (x, y) \notin \text{Int}(\Omega).$$

De esta forma, las soluciones fuera del interior de Ω se acercan a Ω y, en consecuencia, las soluciones con condición inicial en Ω no pueden salir de Ω . En este caso,

$$\dot{P}(x, y) = \left[-f(x) \left(y - \frac{F(x)}{2} \right) + W'(x) \right] (y - F(x)) + 2 \left(y - \frac{F(x)}{2} \right) (-g(x) + h(t)).$$

Sustituyendo $W'(x) = \frac{F(x)f(x)}{2} + 2g(x)$ y operando, llegamos a que

$$\begin{aligned} \dot{P}(x, y) &= [f(x)(-y + F(x)) + 2g(x)] (y - F(x)) + 2 \left(y - \frac{F(x)}{2} \right) (-g(x) + h(t)) \\ &= -f(x)(y - F(x))^2 + 2g(x) \left(y - F(x) - y + \frac{F(x)}{2} \right) + 2h(t) \left(y - \frac{F(x)}{2} \right) \\ &= -f(x)(y - F(x))^2 + 2h(t)(y - F(x)) - F(x)g(x) + F(x)h(t). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Para estudiar el signo de \dot{P} fuera del interior Ω , distinguimos dos casos: o bien el punto (x, y) tiene abscisa $x \in (a, r_1] \cup [r_2, b)$ o bien $x \in (r_1, r_2)$ pero $P(x, y) \geq \omega^*$. Representamos, en la Figura 4.3, las dos regiones que estudiamos por separado:

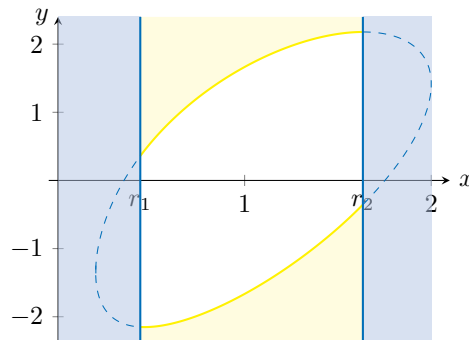


Figura 4.3: Regiones sobre las que estudiamos el signo de \dot{P} para los coeficientes $f(x) = 2 + 1/\sqrt{x}$ y $g(x) = \log(x)$ en el intervalo $(0, 2)$. En azul, los puntos (x, y) con $x \in (0, r_1] \cup [r_2, 2)$ y, en amarillo, los puntos con $P(x, y) \geq \omega^*$ y $x \in (r_1, r_2)$.

Caso 1: (x, y) con $x \in (a, r_1] \cup [r_2, b)$. Observemos que $F(x)g(x)$ y $|g(x)|$ son funciones no negativas, decrecientes en (a, x_0) y crecientes en (x_0, b) con mínimo absoluto en x_0 . Por tanto,

$$\min_{x \in (a, r_1] \cup [r_2, b)} |g(x)| = \min_{i=1,2} |g(r_i)| \quad \text{y} \quad \min_{x \in (a, r_1] \cup [r_2, b)} F(x)g(x) = \min_{i=1,2} F(r_i)g(r_i).$$

Aplicando la hipótesis $\|h\|_\infty < \frac{f_0}{2} \min\{K_1, K_2\}$ y la definición de K_1 (4.12), deducimos, por una parte, que

$$\|h\|_\infty < \frac{f_0}{2} \min_{i=1,2} \frac{|g(r_i)|}{f_0},$$

luego

$$|g(x)| \geq \min_{i=1,2} |g(r_i)| > 2\|h\|_\infty, \quad \forall x \in (a, r_1] \cup [r_2, b) \quad (4.17)$$

y, por otra parte, que

$$\|h\|_\infty < \frac{f_0}{2} \min_{i=1,2} \sqrt{\frac{2g(r_i)F(r_i)}{f_0}},$$

luego

$$F(x)g(x) \geq \min_{i=1,2} g(r_i)F(r_i) > \frac{2\|h\|_\infty^2}{f_0}, \quad \forall x \in (a, r_1] \cup [r_2, b). \quad (4.18)$$

Con esto, vamos a poder comprobar que la expresión (4.16) de \dot{P} es negativa. Podemos acotar los términos de (4.16) para cada (x, y) con $x \in (a, r_1] \cup [r_2, b)$ como sigue: por una parte, aplicando la segunda hipótesis del Teorema 4.14, $-f(x)(y - F(x))^2 \leq -f_0(y - F(x))^2$; por otra parte, $2h(t)(y - F(x)) \leq 2\|h\|_\infty|y - F(x)|$ y, finalmente,

$$\begin{aligned} F(x)h(t) - F(x)g(x) &\leq |F(x)|\|h\|_\infty - F(x)g(x) \stackrel{(4.17)}{<} |F(x)|\frac{|g(x)|}{2} - F(x)g(x) \\ &= \frac{F(x)g(x)}{2} - F(x)g(x) = -\frac{F(x)g(x)}{2} \stackrel{(4.18)}{<} -\frac{\|h\|_\infty^2}{f_0}. \end{aligned}$$

Así, para cada $(x, y) \in (a, b) \times \mathbb{R}$ con $x \in (a, r_1] \cup [r_2, b)$,

$$\begin{aligned} \dot{P}(x, y) &= -f(x)(y - F(x))^2 + 2h(t)(y - F(x)) - F(x)g(x) + F(x)h(t) \\ &< -f_0(y - F(x))^2 + 2\|h\|_\infty|y - F(x)| - \frac{\|h\|_\infty^2}{f_0} = -\left(\sqrt{f_0}|y - F(x)| - \frac{\|h\|_\infty}{\sqrt{f_0}}\right)^2 \leq 0, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Caso 2: (x, y) con $x \in (r_1, r_2)$ y $P(x, y) \geq \omega^*$. En virtud del Lema 4.18, tenemos que

$$|y - F(x)| \geq \frac{4\|h\|_\infty}{f_0} \quad \text{y} \quad (y - F(x))^2 > \frac{2\|h\|_\infty|F(x)|}{f_0},$$

luego, por esta segunda desigualdad,

$$F(x)h(t) - F(x)g(x) \leq F(x)h(t) \leq |F(x)|\|h\|_\infty < \frac{f_0}{2}(y - F(x))^2.$$

Así, igual que en el caso anterior, para cada $(x, y) \in (a, b) \times \mathbb{R}$ con $r_1 \leq x \leq r_2$ y $P(x, y) \geq \omega^*$ se cumple que

$$\begin{aligned} \dot{P}(x, y) &= -f(x)(y - F(x))^2 + 2h(t)(y - F(x)) - F(x)g(x) + F(x)h(t) \\ &< -f_0(y - F(x))^2 + 2|h(t)||y - F(x)| + \frac{f_0}{2}(y - F(x))^2 \\ &= |y - F(x)| \left(-\frac{f_0}{2}|y - F(x)| + 2|h(t)| \right) < |y - F(x)| (-2\|h\|_\infty + 2|h(t)|) \leq 0, \end{aligned}$$

en cuya penúltima desigualdad aplicamos la primera de las desigualdades dadas por el Lema 4.18. Queda probado que la derivada orbital de P fuera del interior de Ω es negativa.

Finalmente, para concluir la existencia de solución T -periódica, probaremos que la aplicación de Poincaré posee un punto fijo. Denotamos por $\varphi_{t_0, x_0, y_0}(t) = (x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0))$ la única solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = y - F(x), \\ y' = -g(x) + h(t), \\ (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0). \end{cases}$$

Como Ω es positivamente invariante, dado $(x_0, y_0) \in \Omega$, la imagen de φ_{t_0, x_0, y_0} está totalmente contenida en Ω . En particular,

$$\varphi_{0, x_0, y_0}(T) = (x(T; 0, x_0, y_0), y(T; 0, x_0, y_0)) \in \Omega, \quad \forall (x_0, y_0) \in \Omega.$$

El conjunto Ω es la clausura de la región acotada por una curva de Jordan, $P(x, y) = \omega^*$. Así, la aplicación de Poincaré $P_T: \Omega \rightarrow \Omega$, continua por la dependencia continua de los parámetros del sistema, posee un punto fijo en virtud del Teorema 1.18 (de Brouwer). Este punto será $(x_0, y_0) \in \Omega$ para el cual la solución φ_{0, x_0, y_0} del problema de Cauchy es T -periódica. Su primera componente,

$$x = x(t; 0, x_0, y_0),$$

es solución de la ecuación (4.10), pues la conjugación topológica entre los sistemas es $\Phi(x, y) = (x, y - F(x))$, que deja fija la primera componente. Esta función es T -periódica y, como la imagen de φ_{0, x_0, y_0} está contenida en Ω , necesariamente $r_1 \leq x(t) \leq r_2$ para todo t . Notemos que, implícitamente, asumimos que h es una función T -periódica con T su periodo mínimo y, así, x también tiene periodo mínimo T . \square

4.3. Generalizaciones de la ecuación de Liénard

La ecuación de Liénard se puede generalizar de modo que x' intervenga de forma no lineal. Podríamos considerar ecuaciones de la forma

$$x'' + f(x') + g(x) = 0 \quad \text{o} \quad x'' + f(x, x') + g(x) = 0.$$

También nos podemos preguntar qué ocurre si la singularidad de la ecuación no aparece en x , sino en su derivada, x' . Notemos que, si estamos buscando soluciones T -periódicas $x = x(t)$, en virtud del Teorema de Rolle, existe un punto $t_* \in (0, T)$ tal que $x'(t_*) = 0$. Por tanto, es necesario que la ecuación diferencial esté bien definida en $x' = 0$. En otras palabras, no existe solución periódica de ninguna ecuación diferencial singular en $x' = 0$.

Sí podemos considerar, como singularidades, puntos $x' = v_0 \neq 0$. En el caso singular en x , podíamos aplicar una traslación a una solución de una ecuación singular en un punto $\tilde{x} \neq 0$ para obtener una solución de otra ecuación singular en $x = 0$. Sin embargo, en el caso de x' , esto no es posible, porque no trasladamos espacialmente la solución, sino que modificamos su pendiente.

Para funciones singulares respecto a x' en dos puntos $a < 0 < b$, deducimos de lo anterior que la solución que buscamos debe satisfacer $x'(t) \in (a, b)$ para todo t . Por ejemplo, si consideramos la ecuación

$$x'' + \frac{g(t, x)}{\cos(x')} + h(t, x) = 0,$$

la solución que buscamos debe satisfacer que $x' \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Las generalizaciones mencionadas, en particular,

$$x'' + f(x, x') + g(x) = h(t)$$

podrán ser objeto de estudio en el futuro, pues un problema interesante sería, por ejemplo, comprobar si el procedimiento seguido por Gutiérrez y Torres [11] puede ser adaptado a este tipo de ecuaciones con términos no lineales en x y x' , tema que se está abordando como posible continuación de este Trabajo Fin de Máster.

Conclusión

En este trabajo, hemos estudiado el problema periódico asociado a ecuaciones diferenciales singulares de diferentes tipos. Los ejemplos que hemos tratado no son arbitrarios: no solo hemos estudiado ecuaciones sin rozamiento, en el Capítulo 3, y con rozamiento, en el Capítulo 4, sino que, dentro del conjunto de las familias de ecuaciones que tratamos en este trabajo, aparecen términos singulares de todos los tipos y se ha estudiado cada una de ellas con técnicas distintas.

En las ecuaciones de Lazer-Solimini, que tratamos en la primera sección del Capítulo 3, los términos singulares son o bien de tipo atractor (3.1) o bien de tipo repulsor (3.2). A través del método de las sub y sobresoluciones, hemos probado que el problema periódico asociado a aquellas con singularidad atractora, débil o fuerte, posee solución positiva si la fuerza externa, h , tiene integral positiva. En el caso de singularidad repulsora, hemos comprobado que la fuerza de la singularidad juega un papel importante para garantizar la existencia de solución T -periódica positiva. Hemos demostrado que, en el caso de singularidad fuerte, existe solución si, y solo si, la integral de h es negativa, pero, en el caso débil, hemos comprobado que esto no es suficiente para garantizar su existencia.

En las ecuaciones de Emdem-Fowler con exponente negativo, que tratamos en la segunda sección del Capítulo 3, los términos singulares son necesariamente indefinidos (3.3). Hemos obtenido un resultado de existencia de solución T -periódica para ecuaciones con singularidad fuerte y h constante a trozos y para ecuaciones con singularidad muy fuerte y h de clase uno con ceros no degenerados. A través de las propiedades del grado topológico de Leray-Schauder y el Teorema de punto fijo de Schauder, hemos probado que, en ambos casos, existe un conjunto conexo de soluciones para el problema de Dirichlet asociado a la ecuación con elementos $x = x(t)$ que satisfacen $x'(0) \geq x'(T)$ y elementos que satisfacen $x'(0) \leq x'(T)$. Por conexión, existe en este conjunto al menos una solución que satisface $x'(0) = x'(T)$ y es, en conclusión, T -periódica. Hemos comprobado que las condiciones sobre la fuerza de la singularidad y la forma de h , a priori, no necesarias para que exista solución T -periódica, no se pueden suprimir y seguir teniendo garantizada su existencia en general.

En los dos casos anteriores, los términos singulares que inspiran su estudio son de la forma $1/x^p$, $p > 0$, pero los resultados obtenidos son aplicables a términos singulares $g = g(x)$ generales. En el Capítulo 4, estudiamos familias de ecuaciones diferenciales singulares con rozamiento que siguen el esquema de una ecuación de Liénard con fuerza externa. Por un lado, tratamos

familias de ecuaciones con términos singulares de la forma anterior y, por otro lado, con términos singulares generales.

En el primer caso, la ecuación que tratamos es (4.1) y el término singular es indefinido, pudiendo ser fuerte o débil. A través del Teorema de Manásevich-Mawhin, basado en el grado topológico de Brouwer, hemos probado tres resultados de existencia de solución T -periódica positiva. Posteriormente, este mismo procedimiento se ha aplicado a la ecuación (4.8), que generaliza la anterior y presenta dos términos singulares indefinidos, y hemos proporcionado un resultado de existencia de solución T -periódica positiva para esta ecuación. En ambas ecuaciones, se admite que la fuerza de rozamiento pueda ser singular por no influir en el estudio de existencia.

Finalmente, en la segunda sección del Capítulo 4, tratamos ecuaciones de Liénard con términos singulares generales y de tipo débil (4.10). A través de una función de Lyapunov, hemos localizado una región del plano de fases positivamente invariante y homeomorfa a la bola unidad compacta, en la que la aplicación de Poincaré posee al menos un punto fijo, que se corresponde con una solución T -periódica de la ecuación diferencial singular.

Estos resultados se podrían extender a familias de ecuaciones diferenciales singulares más generales. Como comentamos en la última sección, podemos generalizar las ecuaciones de Liénard para que la derivada primera aparezca de forma no lineal en la ecuación. Sería interesante, igual que en el caso de las ecuaciones (4.1) y (4.8), particularizar el Teorema de Manásevich-Mawhin a ecuaciones de la forma

$$x'' + f(x') + g(x) = 0 \quad \text{o} \quad x'' + f(x, x') + g(x) = 0$$

y buscar condiciones suficientes para que se satisfagan sus hipótesis en algún compacto Ω contenido en $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$, siendo g o f singulares en $x_0 = 0$. Por otra parte, también podríamos estudiar la existencia de una región positivamente invariante y homeomorfa a la bola unidad compacta para el plano de fases asociado a las dos ecuaciones diferenciales anteriores, quizás basándonos en los resultados obtenidos en la segunda sección del Capítulo 4. Resultaría interesante estudiar si, con este procedimiento, podemos obtener resultados con términos singulares presentando una singularidad fuerte.

Otras cuestiones sobre ecuaciones diferenciales singulares que no se han tratado en este trabajo son la existencia de solución T -periódica para sistemas de ecuaciones diferenciales singulares y para ecuaciones de orden mayor que dos. Estos problemas poseen interés en la biología y en dinámica celeste, como en el problema de los tres cuerpos. También sería interesante el estudio de todos los problemas anteriores admitiendo soluciones con rebote, que comentamos brevemente en el Capítulo 2. Finalmente, podríamos estudiar los problemas de frontera asociados a ecuaciones diferenciales singulares en el término de x' , para las cuales los únicos resultados que hemos encontrado son de existencia de solución a problemas de valor inicial [2]. También a ecuaciones singulares, simultáneamente, en dos variables, incluso términos de la forma

$$x'' + \frac{1}{x^2 + (x')^2},$$

que no es singular en $x = 0$, ni tampoco en $x' = 0$, sino singular en $x = x' = 0$.

Bibliografía

- [1] Agarwal, R. P., Meehan, M., O'Regan, D. *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge Tracts in Mathematics, 141, Cambridge University Press (2002).
- [2] Agarwal, R. P., O'Regan, D. *Singular Differential and Integral Equations with Applications*, Springer, Dordrecht (2003).
- [3] Bravo, J. L., Torres, P. J. *Periodic solutions of a singular equation with indefinite weight*, *Advanced Nonlinear Studies*, 10(4), 927–938 (2010).
- [4] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York (2011).
- [5] Cabada, A. *Green's Functions in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Briefs in Mathematics, Springer, New York (2014).
- [6] de Coster, C., Habets, P. *Two-Point Boundary Value Problems: Lower and Upper Solutions*, *Mathematics in Science and Engineering*, 205, Elsevier (2006).
- [7] Dinca, G., Mawhin, J. *Brouwer Degree: The Core of Nonlinear Analysis*, *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, 95, Birkhäuser, Cham (2021).
- [8] Fucik, S. *Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems*, *Mathematics and its Applications*, Springer, Dordrecht (1980).
- [9] Godoy, J., Morales, N., Zamora, M. *Existence and multiplicity of periodic solutions to an indefinite singular equation with two singularities. The degenerate case*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 39(7), 4137–4156 (2019).
- [10] Gordon, W. B. *Conservative dynamical systems involving strong forces*, *Transactions of the American Mathematical Society*, 204, 113–135 (1975).
- [11] Gutiérrez, A., Torres, P. J. *Periodic solutions of Liénard equation with one or two weak singularities*, *Differential Equations and Applications*, 3(3), 375–384 (2011).
- [12] Hakl, R., Torres, P. J. *On periodic solutions of second-order differential equations with attractive-repulsive singularities*, *Journal of Differential Equations*, 248, 111–126 (2009).

-
- [13] Hakl, R., Torres, P. J., Zamora, M. *Periodic solutions to singular second order differential equations: the repulsive case*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 39, 199–220 (2012).
- [14] Hirsch, M., Smale, S., Devaney, R. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Academic Press, California (2013).
- [15] Kesavan, S. *Nonlinear Functional Analysis: A First Course*, Springer, Singapore (2022).
- [16] Lazer, A. C., Solimini, S. *On periodic solutions of nonlinear differential equations with singularities*, Proceedings of the American Mathematical Society, 99(1), 109–114 (1987).
- [17] Liang, Z., Zhang, X., Li, S., Zhou, Z. *Periodic solutions of a class of indefinite singular differential equations*, Electronic Research Archive, 31(4), 2139–2148 (2023).
- [18] Lloyd, N. G. *Degree Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1978).
- [19] Lu, S., Guo, Y., Chen, Li. *Periodic solutions for Liénard equation with an indefinite singularity*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 45, 542–556 (2019).
- [20] Lu, S., Yu, X. *Periodic solutions for second order differential equations with indefinite singularities*, Advanced Nonlinear Studies, 9, 994–1007 (2020).
- [21] Manásevich, R., Mawhin, J. *Periodic solutions for nonlinear systems with p -Laplacian-like operators*, Journal of Differential Equations, 145, 367–393 (1998).
- [22] Matkowski, J. *Functional equations and Nemytskii operators*, Funkcialaj Ekvacioj, 25(2), 127–132 (1982).
- [23] Ortega, R. *Linear motions in a periodically forced Kepler problem*, Portugaliae Mathematica, 68(2), 149–176 (2011).
- [24] Quian, D., Torres, P. J. *Bouncing solutions of an equation with attractive singularity*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 134, 201–213 (2004).
- [25] Rabinowitz, P. H. *Nonlinear Sturm-Liouville problems for second order ordinary differential equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 23, 939–961 (1970).
- [26] Tomeček, J., Rachůnková, I., Burkotová, J., Stryja, J. *Coexistence of bouncing and classical periodic solutions of generalized Lazer–Solimini equation*, Nonlinear Analysis, 196, 1–24 (2020).
- [27] Torres, P. J. *Weak singularities may help periodic solutions to exist*, Journal of Differential Equations, 232, 277–284 (2007).
- [28] Torres, P. J. *Mathematical Models with Singularities: A Zoo of Singular Creatures*, Atlantis Briefs in Differential Equations, 1, Atlantis Press, Paris (2015).
- [29] Ureña, A. J. *Periodic solutions of singular equations*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 47(1), 55–72 (2016).

-
- [30] Ureña, A. J. *A counterexample for singular equations with indefinite weight*, Advanced Non-linear Studies, 17(3), 497–516 (2017).