



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

El teorema de la aplicación de Riemann

Trabajo Fin de Grado

Autor: Luis Carlos Varela Sánchez

Tutora: Rosa María Trinchet Soria

Curso 2019 - 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Grado en Matemáticas
Trabajo Fin de Grado

El teorema de la aplicación de Riemann

Autor: Luis Carlos Varela Sánchez

Tutora: Rosa María Trinchet Soria

Septiembre 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Análisis Matemático

Título: El Teorema de la aplicación de Riemann

Breve descripción del contenido

Desde el punto de vista geométrico, una función compleja de variable compleja es una transformación del plano en si mismo, que se puede considerar definida por dos aplicaciones reales de dos variables reales. En este contexto, interesa saber, en particular, de que forma se transforman ciertas líneas y las regiones delimitadas por ellas.

Tanto desde el punto de vista teórico, como en las numerosas aplicaciones a distintos campos (Ingeniería, Hidrodinámica, Teoría del potencial, ...) son de especial interés los isomorfismos analíticos de un abierto en su abierto imagen, también conocidos como equivalencias conformes.

El principal problema de la representación conforme consiste en decidir si dos abiertos dados son conformemente equivalentes y, de darse el caso, conocer las equivalencias conformes entre ellos. El hecho más notable en la historia de las aplicaciones conformes fue el anuncio de Riemann (1851) de un importante resultado que, en la actualidad, conocemos como el Teorema de la aplicación de Riemann y formulamos de la siguiente forma (entre otras):

“Todo dominio simplemente conexo, distinto de \mathbb{C} , es conformemente equivalente al disco unidad”.

Este trabajo se dedica a dar una prueba de este importante resultado.

Índice general

Resumen	vii
Introducción	ix
1. Introducción al análisis complejo	1
1.1. Nociones básicas	1
1.2. Funciones holomorfas y analíticas	2
1.3. Ecuaciones de Cauchy-Riemann	6
1.4. Fórmula integral de Cauchy	8
1.5. Teorema de los residuos	10
1.6. Teorema de la aplicación abierta	13
2. Representación conforme	17
2.1. Transformaciones conformes	17
2.2. Transformaciones de Möbius	24
2.3. Principios del máximo	27
2.4. Lema de Schwarz	30
2.5. Teorema de Ascoli	32
2.6. Teorema de Montel	36
2.7. Teorema de Hurwitz	39
3. El Teorema de la aplicación de Riemann	41
3.1. Teorema de la aplicación de Riemann	41
3.2. Caracterización de dominios simplemente conexos	46

Resumen

En este trabajo fin de grado realizamos un estudio del llamado Teorema de la aplicación de Riemann, el cual es uno de sus descubrimientos más importantes, que presenta ante Gauss en su tesis doctoral de 1851. El contexto del teorema es el análisis complejo. Es por ello que una parte substancial de la memoria se dedica a introducir las herramientas básicas de la Variable Compleja. En primer lugar, veremos todos los conceptos que serán necesarios para la demostración de dicho teorema, para luego introducirnos de lleno en la representación conforme, donde veremos una serie de resultados que nos allanarán el camino para, posteriormente, llegar al objetivo final, dar una demostración del teorema. Por último, veremos una de sus primeras aplicaciones.

Abstract

In this final degree project we carry out a study of the so-called Riemann application theorem, which is one of his most important discoveries, which he presents to Gauss in his doctoral thesis of 1851. The context of the theorem is complex analysis. That is why a substantial part of the memory is dedicated to introducing the basic tools of the Complex Variable. In the first place, we will see all the concepts that will be necessary for the proof of this theorem, and then we will fully enter the conformal mapping, where we will see a series of results that will pave the way for, later, to reach the final objective, to give a proof of the theorem. Finally, we will see one of the first applications to this theorem.

Introducción

Esta memoria constituye una pequeña introducción al estudio de la teoría geométrica de funciones. Desde el punto de vista geométrico, una función compleja de variable compleja es una transformación del plano en si mismo, que se puede considerar definida por dos aplicaciones reales de dos variables reales. Especialmente, nos interesa saber, en particular, de qué forma se transforman ciertas líneas (rectas, circunferencias,...) y las regiones delimitadas por ellas. El objetivo principal del trabajo es la demostración del Teorema de la aplicación de Riemann. Dicho resultado puede formularse de la siguiente manera:

Teorema 0.1 (de la aplicación de Riemann) *Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo. Entonces para cada $a \in \Omega$ existe un único isomorfismo conforme $F: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ que cumple $F(a)=0$ y $F'(a) > 0$.*

El gran matemático y físico Georg Friedrich Bernhard Riemann, nació el 17 de Septiembre de 1826, en el reino de Hanóver, un estado independiente que actualmente pertenece a Alemania, y falleció el 20 de Julio de 1866 en Verbania (Italia) a la temprana edad de 39 años.

La infancia de Riemann, junto con la de sus cinco hermanos, estuvo marcada por infinidad de carencias (como una alimentación adecuada, los cuidados sanitarios necesarios,...), ya que vivía en el seno de una familia humilde. Todas estas carencias debilitaron a Riemann e influyeron de manera notable en su lucha contra la tuberculosis, que acabó provocando su muerte. A pesar de todo ello, Riemann siempre reconocería que la familia siempre permaneció unida.

En el año 1846 ingresó en la Universidad de Gotinga, con la intención de estudiar Filosofía y Teología, pero después de acudir a numerosas conferencias de Gauss se interesó en las Matemáticas. Fue entonces cuando en 1847 se trasladó a la Universidad de Berlín a estudiar su gran vocación, las Matemáticas, donde allí coincidiría con Dirichlet.

Debido a su prematura muerte, la carrera de Riemann duró poco más de diez años. Empieza en 1849, cuando regresó a Gotinga y comenzó a preparar su tesis doctoral bajo la supervisión de Gauss, y finalizó mediada la década de 1860 cuando

escribió sus últimos artículos. Durante los años que duró su carrera aportó en diferentes ramas de las Matemáticas, como en la geometría diferencial, la aritmética y el cálculo de variable real y compleja. Además, también realizó múltiples aportaciones en el ámbito de la física.

En una de sus obras maestras, su tesis doctoral de 1851, Riemann analiza funciones, o lo que para él era lo mismo, “deformaciones”, que se aplican a todo el plano complejo. En ella realiza una prueba del resultado que ahora conocemos como, el Teorema de la aplicación de Riemann, que defiende ante Gauss. Esta prueba está hecha en dominios acotados por una frontera diferenciable a trozos, donde une la existencia del isomorfismo conforme al problema de Dirichlet, haciendo uso del principio de Dirichlet.

La prueba de Riemann tuvo muchas críticas, entre ellas la de Weierstrass, que intentó demostrar mediante un contraejemplo, que la existencia de la función minimizante del principio de Dirichlet, en general no era cierta. Aunque, tiempo más tarde, Hilbert demostró que sí que era ciertas para las condiciones que Riemann había puesto.

En 1912, Constantin Carathéodory demuestra por primera vez con toda generalidad el Teorema de Riemann, y poco tiempo después, Koebe aún mejoraría la prueba, eliminando las superficies de Riemann que usaba Carathéodory.

En 1922, L.Fejér y F.Riesz hicieron una prueba del teorema, ya que vieron que el isomorfismo conforme del Teorema de Riemann, se podía obtener como solución de un problema que maximiza la derivada. Dicha prueba, fue publicada por primera vez en la revista húngara, Acta Szeged.

En su tesis, Riemann, además de afirmar la existencia de un isomorfismo conforme entre dos abiertos simplemente conexos, también enunció que este se puede extender a un homeomorfismo entre las adherencias de los abiertos. Es lo que se conoce como el Teorema de Carathéodory.

En esta memoria, utilizamos una gran cantidad de conocimientos previos que se cursan en el cuarto curso del Grado en Matemáticas, en la asignatura Variable Compleja. Por ello, dividiremos el trabajo en tres capítulos.

En el capítulo 1, hacemos una introducción al análisis complejo, haciendo un resumen de los conceptos más elementales, y demostrando algún resultado que será de gran importancia, como el Teorema de la aplicación abierta y la Fórmula integral de Cauchy en su versión homológica.

En el capítulo 2, empezamos definiendo conceptos fundamentales, como aplicación conforme e isomorfismo conforme y también veremos las transformaciones de Möbius, que son un tipo de transformaciones conformes. Lo ilustraremos todo con ejemplos. Luego, en las siguientes secciones veremos resultados que serán muy importantes a la hora de probar el Teorema de Riemann, como son el Lema de Schwarz y el Teorema de Montel, entre otros.

Por último, el objetivo del capítulo 3 es enunciar y dar una prueba detallada del teorema que da nombre a este trabajo, y además ver una de sus primeras

aplicaciones como son la caracterización de los dominios simplemente conexos.

Capítulo 1

Introducción al análisis complejo

En este primer capítulo, haremos un repaso al análisis complejo, en el cual veremos los conceptos más importantes, que serán necesarios a lo largo del trabajo. Las principales referencias para este capítulo son [1], [2], [4], [6], [7] y [8].

1.1. Nociones básicas

No existe un número real x que resuelva la ecuación $x^2 + 1$. Para resolver este tipo de ecuaciones, es necesario recurrir a los números complejos. Podemos considerar un número complejo como una expresión de la forma $a + bi$ donde a y b son números reales, e i es la denominada unidad imaginaria, con la propiedad de que $i^2 = -1$.

Sea $z = a + bi$, donde a se le llama la parte real de z y b la parte imaginaria de z (se denotan por $Re\{z\}$ e $Im\{z\}$ respectivamente). Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si y sólo si tienen iguales las partes real e imaginaria, es decir, si $a = c$ y $b = d$. Si $a = 0$, el número complejo $0 + bi$ ó bi se llama un número complejo imaginario puro. También podemos denotar por i al número complejo $(0,1)$. Notemos entonces que $i^2 = (0,1)(0,1) = -1$. Por lo tanto, podemos escribir el número complejo (a,b) como $a + bi$.

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, se define el módulo de z , $|z|$, como la raíz cuadrada positiva de $a^2 + b^2$. De esta manera, $|z|$ es la distancia euclídea en \mathbb{R}^2 de $(0,0)$ al punto (a,b) . Por otro lado, se define el conjugado de z , \bar{z} , como $\bar{z} = a - bi$. Aten-

diendo a las definiciones, tenemos que $\bar{z}^2 = z\bar{z}$. Por lo tanto, la definición de módulo de un número real coincide con el valor absoluto. Se llamara argumento principal de z , y se denotará por $Arg(z)$ al único argumento de z tal que $-\pi < Arg(z) \leq \pi$ y $arg(z)$ al conjunto de todos sus argumentos. Cada número complejo $z = x + iy$ puede escribirse como $z = r \cos \theta + ir \sin \theta$, a la cual llamaremos forma polar, con $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ y $\theta = \arctan \frac{y}{x}$, las coordenadas polares, donde el ángulo θ está determinado salvo suma de un múltiplo entero de 2π . También podemos escribir el número complejo z de forma más compacta, utilizando la forma exponencial:

$$z = re^{i\theta}$$

siendo $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ la fórmula de Euler.

En cuanto a la topología del plano complejo, denotaremos los discos como

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\},$$

$$D^*(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\}.$$

Además, dado un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, denotaremos a su clausura por \bar{A} , a su frontera por ∂A y al conjunto de sus puntos de acumulación por A' .

Un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ se dice que es conexo cuando no se puede descomponer como unión de dos abiertos no vacíos disjuntos, $\Omega = A \cup B$, $A, B \in \mathbb{C}$. En ese caso se dice que Ω es un dominio o región. Un conjunto $Y \subset \mathbb{C}$ es conexo por caminos cuando para cada par $a, b \in Y$ existe una función continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$. Todo conjunto $Y \in \mathbb{C}$ conexo por caminos es conexo, en cambio el recíproco sólo es cierto si Y es abierto.

Y por último, también es importante recordar, que un conjunto $K \subset \mathbb{C}$ es compacto, cuando de todo recubrimiento de K , formado por conjuntos abiertos, se puede extraer un subrecubrimiento finito.

1.2. Funciones holomorfas y analíticas

El objetivo principal de esta sección es introducir los conceptos de función holomorfa y analítica.

Definición 1.1 Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que f es holomorfa en z_0 (o diferenciable en sentido complejo en z_0) si existe el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

En caso de que exista, se llama al valor de este límite la derivada (compleja) de f en z_0 , y se denota

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Diremos que la función f es holomorfa en Ω si es holomorfa en todo punto $z_0 \in \Omega$. En el caso de una función holomorfa $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, es decir, holomorfa en todo el plano, diremos también que g es entera. Denotamos por $\mathcal{H}(\Omega)$ al conjunto de funciones holomorfas en Ω .

Ejemplo 1.1 La función $f(z) = z$ es holomorfa en \mathbb{C} , con $f'(z) = 1$.

Ejemplo 1.2 Toda función constante $z \rightarrow c_0$ es holomorfa en \mathbb{C} , con derivada nula.

Ejemplo 1.3 La función $f(z) = \frac{1}{z}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, con $f'(z) = \frac{-1}{z^2}$, ya que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{z+h} - \frac{1}{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z - (z+h)}{z(z+h)h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{z(z+h)} = \frac{-1}{z^2}.$$

Observación 1.1 La suma, el producto y la composición de funciones holomorfas son holomorfas. Valen las mismas reglas de derivación para la suma, el producto y la composición, que para funciones de variable real (en particular, la regla de la cadena para derivar la composición de funciones).

Ahora veremos el concepto de función analítica.

Definición 1.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que f es analítica en Ω , cuando para cada $a \in \Omega$ se puede encontrar $r_a \in \mathbb{R}^+$, con $D(a, r_a) \subset \Omega$, y una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n,$$

centrada en a y con radio de convergencia mayor o igual que r_a , tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$$

para todo $z \in D(a, r_a)$.

Observación 1.2 Se pueden establecer las siguientes condiciones:

- Toda función holomorfa en Ω es analítica en Ω .
- Si f es una función analítica en Ω , entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y f' también es analítica en Ω .

El siguiente resultado que veremos es el Teorema de la convergencia de Weierstrass. Será de gran utilidad a la hora de demostrar el Teorema de la aplicación de Riemann.

Teorema 1.1 (de la convergencia de Weierstrass) Sea (f_n) una sucesión de funciones holomorfas en un abierto Ω que converge uniformemente sobre los compactos de Ω a una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces se verifica que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y (f'_n) converge uniformemente sobre los compactos de Ω hacia la derivada f' .

Las funciones holomorfas admiten desarrollos en serie de potencias alrededor de cada punto. Una de las consecuencias que extraemos de este hecho son las desigualdades de Cauchy.

Teorema 1.2 (Desigualdades de Cauchy) Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ una serie convergente en $D(z_0, R)$ y sea $M(r) = \sup\{|f(z)| : z \in \partial D(z_0, r)\}$ para $0 < r < R$.

Entonces $|a_n| \leq M(r)/r^n$.

Demostración. De la unicidad del desarrollo en serie nos da que $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ y por las fórmulas de Cauchy tenemos que

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{M(r)}{r^{n+1}} = \frac{M(r)}{r^n}.$$

□

Una aplicación inmediata es el siguiente teorema.

Teorema 1.3 (de Liouville) *Toda función entera y acotada es constante.*

Demostración. Sea f una función entera y supongamos que $|f(z)| < M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Sea $r > 0$ y sea $M(r)$ según el teorema anterior. Es claro que $M(r) \leq M$ para todo $r > 0$. Desarrollamos f en serie de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y el teorema anterior nos da que $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \leq \frac{M}{r^n}$, pero si $n \geq 1$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{r^n} = 0$, luego $a_n = 0$ para $n \geq 1$, luego $f(z) = a_0$ es constante.

□

Los ceros de las funciones holomorfas pueden caracterizarse de forma parecida a los ceros de las funciones polinómicas.

Teorema 1.4 *Sea Ω un dominio en \mathbb{C} , f una función holomorfa en Ω y sea*

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

el conjunto de los ceros de f en Ω . Son equivalentes:

- i. El conjunto $Z(f)$ tiene un punto de acumulación en Ω , es decir, $Z(f)' \cap \Omega \neq \emptyset$.*
- ii. Existe un punto $a \in \Omega$ tal que $f^{(k)}(a) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*
- iii. f es la función constante cero en Ω .*

Uno de los resultados más utilizado en funciones holomorfas es el principio de identidad.

Teorema 1.5 (Principio de identidad para funciones holomorfas) *Si dos funciones holomorfas en un dominio Ω coinciden en un subconjunto de Ω que tiene algún punto de acumulación en Ω entonces dichas funciones coinciden en Ω .*

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y tomamos $h = f - g$. Por hipótesis tenemos que $Z(h)' \cap \Omega \neq \emptyset$, y por el resultado anterior, h es una función constante cero, esto es, $f(z) = g(z)$ para $z \in \Omega$.

□

1.3. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Si $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, también $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Recordemos que f es diferenciable en sentido real en $(x_0, y_0) \in \Omega$ si existe una transformación lineal $Df_{(x_0, y_0)}$ de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 que satisface

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) + Df_{(x_0, y_0)}(h, k)}{|(h, k)|} = 0.$$

Resulta que ser analítica es una propiedad más restrictiva que la de ser diferenciable en el sentido real, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.6 *Sean Ω abierto en \mathbb{C} y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, entonces*

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned} \right\} \text{Ecuaciones de Cauchy-Riemann}$$

donde $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

Demostración. Por hipótesis

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

en particular, aproximándose a z_0 por la recta $y = y_0$, se tiene que

$$\frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} = \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y_0) - v(x_0, y_0))}{x - x_0},$$

y tomando el límite cuando $x \rightarrow x_0$, se tiene

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Análogamente, aproximándose por la recta $x = x_0$,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

se escribe como

$$\frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0, y) - v(x_0, y_0))}{(x_0 - x_0) + i(y - y_0)} = \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Nuevamente, tomando el límite cuando $z \rightarrow z_0$, se obtiene

$$f'(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Igualando estas dos expresiones para $f'(z_0)$, se obtienen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

□

El teorema establece condiciones necesarias para que una función sea analítica, el siguiente resultado generaliza este hecho estableciendo condiciones necesarias y suficientes.

Teorema 1.7 *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, y z_0 un punto en un conjunto abierto Ω , entonces f es holomorfa en z_0 si y sólo si f es diferenciable en el sentido real en z_0 , y satisface las condiciones de Cauchy-Riemann en dicho punto.*

Una consecuencia importante de este teorema es el hecho de que cualquier función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, (Ω abierto en \mathbb{C}) con derivadas parciales continuas en $z_0 \in \Omega$ y que además satisface las condiciones de Cauchy-Riemann en dicho punto, es necesariamente analítica.

1.4. Fórmula integral de Cauchy

En primer lugar vamos a probar uno de los teoremas más importantes del análisis complejo, la fórmula integral de Cauchy. Antes de ello, enunciaremos algunas definiciones que serán importantes.

Definición 1.3 Una cadena Γ en el plano complejo es una sucesión finita de caminos que se denota por

$$\Gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_m.$$

Si todos los caminos que componen la cadena son cerrados, se dice que la cadena es un ciclo.

Definición 1.4 Si Γ es un ciclo regular a trozos que no pasa por el punto $z \in \mathbb{C}$, se define el índice de Γ respecto al punto z como la suma de los índices de los caminos cerrados que componen el ciclo:

$$\text{Ind}(\Gamma, z) = \sum_{j=1}^m \text{Ind}(\gamma_j, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w - z}.$$

Definición 1.5 Dos ciclos Γ, Δ en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que son Ω -homólogos si

$$\text{Ind}(\Gamma, z) = \text{Ind}(\Delta, z) \text{ para cada } z \notin \Omega.$$

Un ciclo Γ en Ω se dice que es Ω -homólogo a 0 si $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$ para cada $z \notin \Omega$.

Ahora, ya estamos en condiciones de enunciar y demostrar la fórmula integral de Cauchy.

Teorema 1.8 (Fórmula integral de Cauchy) Si Γ es un ciclo regular a trozos en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω -homólogo a 0 (es decir, $Ind(\Gamma, a) = 0$ para cada $a \notin \Omega$) entonces para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y cada $z \in \Omega \setminus Imagen(\Gamma)$ se verifica:

$$Ind(\Gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Demostración. Observemos en primer lugar que

$$V := \{z \notin Imagen(\Gamma) : Ind(\Gamma, z) = 0\}$$

es la unión de una familia de componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus Imagen(\Gamma)$, entre las que figura la no acotada. Por lo tanto, V es abierto y existe $R > 0$ tal que $\{z : |z| > R\} \subset V$. Además la integral

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

define en V una función holomorfa $G \in \mathcal{H}(V)$ que verifica $\lim_{z \rightarrow \infty} G(z) = 0$.

Por otra parte, si $g : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es la función continua definida por

$$g(z, w) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & \text{si } z \neq w \\ f'(z) & \text{si } z = w \end{cases}$$

y se define $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mediante la integral

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z, w) dw$$

se tiene que F es holomorfa en Ω .

Si $z \in V \cap \Omega$ entonces $Ind(\Gamma, z) = 0$, luego

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{w - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - Ind(\Gamma, z)f(z) = G(z).$$

La condición de que Γ es Ω -homólogo a 0 significa que $\mathbb{C} = V \cup \Omega$.

Como F y G coinciden en $\Omega \cap V$, se puede definir una función entera $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $h(z) = F(z)$ si $z \in \Omega$ y $h(z) = G(z)$ si $z \in V$.

Teniendo en cuenta que $h(z) = G(z)$ si $|z| > R$ se sigue que $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} G(z) = 0$ y por lo tanto h es acotada.

Aplicando el Teorema de Liouville se concluye que h es constante. El valor constante h es 0, pues $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = 0$.

Puesto que F es idénticamente nula en Ω , para todo $z \in \text{Imagen}(\Gamma)$ se verifica

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - \text{Ind}(\Gamma, z)f(z).$$

□

Teorema 1.9 (Teorema de Cauchy) *Si Γ, Δ son ciclos regulares a trozos Ω -homólogos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se verifica*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Delta} f(z) dz.$$

En particular, si Γ es Ω -homólogo a 0 se cumple $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.

Demostración. Como Γ, Δ es un ciclo Ω -homólogo a 0 basta demostrar la segunda afirmación.

Sea pues Γ un ciclo Ω -homólogo a 0 en el abierto Ω . Fijado $a \in \Omega \setminus \text{Imagen}(\Gamma)$, aplicando el teorema anterior (Fórmula integral de Cauchy) a la función $g(z) = (z - a)f(z)$ se obtiene

$$0 = g(a)\text{Ind}(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz.$$

□

1.5. Teorema de los residuos

El teorema que da nombre a esta sección, podemos decir que es el culmen de la integración compleja. La fórmula integral de Cauchy y el Teorema integral de Cauchy que vimos anteriormente, son casos particulares de dicho teorema.

Antes de nada, vamos a ver unos resultados y definiciones que nos serán de gran

utilidad, para luego terminar viendo algunas consecuencias del teorema. En primer lugar, recordaremos el significado de singularidad aislada.

Definición 1.6 Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $a \notin \Omega$ y sin embargo $D^*(a, r) \subset \Omega$ para algún $r > 0$, se dice que a es una singularidad aislada de f .

Si existe $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = b \in \mathbb{C}$ se dice que a es una singularidad evitable de f .

Si $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ se dice que a es un polo de f .

Por último, si $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ no existe en \mathbb{C}^∞ se dice que a es una singularidad esencial de f .

Observación 1.3 Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $a \notin \Omega$ es una singularidad aislada de f , son equivalentes:

- i. a es una singularidad evitable de f .
- ii. f está acotada en algún disco $D^*(a, r) \subset \Omega$.
- iii. f admite una extensión holomorfa al abierto $\Omega_a = \Omega \cup \{a\}$.

Ahora, definiremos función meromorfa, un término que nos será de gran utilidad.

Definición 1.7 Se dice que una función f es meromorfa en un abierto Ω de \mathbb{C}^∞ , si es continua en Ω , los puntos del conjunto $P(f) = \{z \in \Omega : f(z) = \infty\}$ son aislados, y $f|_{\Omega \setminus P(f)}$ es holomorfa.

El conjunto de todas las funciones meromorfas en un abierto Ω se denotará por $\mathcal{M}(\Omega)$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar el Teorema de los Residuos, pero antes definiremos el concepto de residuo.

Definición 1.8 Sea z_0 una singularidad aislada de f , y consideremos su serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < \sigma.$$

Se define el residuo de f en z_0 , y se denota $\text{Res}(f, z_0)$, como el coeficiente a_{-1} de la serie de Laurent. Dicho de otro modo,

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f,$$

siendo r cualquier número con $0 < r < \sigma$.

Nota 1.1 Se comprueba de forma inmediata que

- $\text{Res}(\frac{1}{z}, 0) = 1$
- $\text{Res}(\frac{1}{(z-z_0)^2}, z_0) = 0$
- $\text{Res}(\frac{1}{z+z^2}, i) = \frac{1}{2i}$

Teorema 1.10 (de los Residuos) Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una función holomorfa salvo singularidades en un abierto Ω del plano complejo \mathbb{C} . Sea $A = \{z \in \Omega : z \text{ aislada de } f\}$. Entonces, para cada Γ ciclo nulhomótopo en $\Omega \setminus A$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{a \in A} \text{Ind}(\Gamma, a) \text{Res}(f, a),$$

donde $\{a \in A : \text{Ind}_{\Gamma}(a) \neq 0\}$ es un conjunto finito.

Por último, vemos ahora dos resultados importantes que se deducen del Teorema de los residuos, y que utilizaremos a lo largo del trabajo.

Teorema 1.11 (Principio del Argumento) Sea Ω un abierto de \mathbb{C} y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con polos p_1, \dots, p_m y ceros z_1, \dots, z_n , contados con sus órdenes de multiplicidad. Si Γ es homólogo a 0 en Ω (Γ curva cerrada o ciclo en Ω) tal que $p_j \notin (\Gamma)$ y $z_k \notin (\Gamma)$, $\forall j \in \{1, \dots, m\}$, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n \text{Ind}(\Gamma, z_k) - \sum_{j=1}^m \text{Ind}(\Gamma, p_j).$$

Teorema 1.12 (de Rouché) *Sea Ω un abierto acotado del plano complejo \mathbb{C} . Sean φ y ψ dos funciones holomorfas en Ω y continuas en $\bar{\Omega}$. Supongamos que se verifica*

$$|\varphi(z) - \psi(z)| < |\varphi(z)| + |\psi(z)|, \forall z \in \delta\Omega.$$

Entonces φ y ψ tienen el mismo número de ceros (contados los órdenes de multiplicidad) en Ω .

Corolario 1.1 *Sea Ω un abierto acotado del plano complejo \mathbb{C} . Sea (f_n) una sucesión de funciones holomorfas en Ω y continuas en $\bar{\Omega}$. Supongamos que (f_n) converge uniformemente a cierta función f que no se anula en ningún punto de $\partial\Omega$. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n$, podemos asegurar que las funciones f_m y f tienen el mismo número (finito) de ceros en Ω .*

1.6. Teorema de la aplicación abierta

El Teorema de la aplicación abierta es uno de los resultados más importantes de funciones holomorfas. Se dice que una aplicación es abierta si transforma conjuntos abiertos en conjuntos abiertos. Las funciones holomorfas tienen la importante propiedad de ser abiertas siempre que no sean constantes.

Antes de demostrarlo, vamos a probar el Teorema de la función inversa para funciones holomorfas.

Teorema 1.13 (de la función inversa) *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $z_0 \in \Omega$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en Ω con $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existen U entorno abierto de z_0 en Ω y V entorno abierto de $f(z_0)$ en \mathbb{C} tal que $f|_U = f : U \rightarrow f(U) = V$ es biyectiva y la inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ es también holomorfa. Además*

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$$

para todo $w \in V$.

Demostración. La función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ la tomaremos como una aplicación de varias

variables reales. Entonces, con las hipótesis del teorema, $Df(z_0) = f'(z_0)$ es invertible y por tanto podemos aplicar el Teorema de la función inversa para funciones de varias variables.

Por tanto, por el Teorema de la función inversa, existen U entorno abierto de z_0 en Ω y V entorno abierto de $f(z_0)$ en \mathbb{C} tal que $f = f : U \rightarrow f(U) = V$ es biyectiva y la inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ es de clase \mathcal{C}^1 .

Ahora veamos que f^{-1} es holomorfa. Sea $w_1 \in V$, pongamos que $f(z_1) = w_1$, con $z_1 \in U$. Puesto que $f : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo (homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable) \mathcal{C}^1 , sabemos que la aplicación lineal $Df(z_1)$ es invertible, y por tanto $\det(Df(z_1)) \neq 0$. Entonces, tenemos que $f'(z_1) \neq 0$.

Consideremos ahora $w = f(z)$, $z \in U$, con lo cual

$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_1)}{w - w_1} = \frac{z - z_1}{f(z) - f(z_1)} = \frac{1}{\frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1}} \rightarrow \frac{1}{f'(z_1)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_1))}$$

cuando $w \rightarrow w_1$, ya que $f'(z_1) \neq 0$, y si $w = f(z) \rightarrow f(z_1) = w_1$ entonces $z \rightarrow z_1$, por ser f^{-1} continua. Entonces, ya hemos probado que f^{-1} es holomorfa en cada $w_1 \in V$, y también la fórmula del enunciado.

□

Para finalizar la sección vamos a demostrar el Teorema de la aplicación abierta.

Teorema 1.14 (de la aplicación abierta) *Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es abierto conexo y f es holomorfa y no constante en Ω , entonces $f(\Omega)$ es abierto en \mathbb{C} .*

Demostración. Sea $w_0 \in f(\Omega)$, digamos que $f(z_0) = w_0$ con $z_0 \in \Omega$. Lo que buscamos es un $\varepsilon > 0$ tal que $D(w_0, \varepsilon) \subset f(\Omega)$. Sabemos que, como f no es constante, existe $\delta > 0$ tal que $D(z_0, \delta) \subset \Omega$ y $f(z) \neq w_0$ para todo $z \in \overline{D}(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$. Entonces, como $\partial D(z_0, \delta)$ es compacto y $f - w_0$ es continua y no se anula en este conjunto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(z) - w_0| \geq \varepsilon \text{ para todo } z \in \partial D(z_0, \delta).$$

Ahora, vamos a ver que para este ε se tiene $D(w_0, \varepsilon) \subset f(\Omega)$. Dado $w \in D(w_0, \varepsilon)$,

definamos las funciones

$$\begin{aligned}g(z) &= f(z) - w, \\F(z) &= f(z) - w_0, \\G(z) &= w_0 - w,\end{aligned}$$

de manera que

$$g(z) = F(z) + G(z).$$

Tenemos que $|F(z)| > |G(z)|$ para cada $z \in \partial D(z_0, \delta)$. Entonces, por el Teorema de Rouché, $g = F + G$ debe tener un cero en $D(z_0, \delta)$, ya que F lo tiene (en z_0). Esto significa que existe $z \in D(z_0, \delta)$ tal que $f(z) = w$, y por tanto que $w \in f(D(z_0, \delta)) \subset f(\Omega)$.

□

Capítulo 2

Representación conforme

En el siguiente capítulo, pasamos a introducir conceptos que serán importantes, como el de transformación conforme. Además veremos el teorema del máximo para funciones subarmónicas, para después enunciar el Lema de Schwarz. Terminaremos el capítulo estudiando tres teoremas que serán importantes en la demostración del Teorema de la aplicación de Riemann: Ascoli, Montel y Hurwitz. Las principales referencias del capítulo son [1], [3], [4], [6] y [8]. El lector que quiera obtener una visión más profunda de las transformaciones conformes puede consultar [6], y libros como [1] para ver algunos ejemplos más.

2.1. Transformaciones conformes

Las transformaciones conformes serán las aplicaciones que más usaremos en el Teorema de la aplicación de Riemann, que veremos en el próximo capítulo. En esta sección las definiremos y daremos el primer ejemplo de ellas.

En primer lugar, vamos a recordar la relación entre la \mathbb{R} -diferenciabilidad y la \mathbb{C} -diferenciabilidad, y veremos de que forma intervienen en ella las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Definición 2.1 Sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ siendo Ω un abierto de \mathbb{C} . Se dice que f es \mathbb{R} -diferenciable en $z_0 \equiv x_0 + iy_0 \equiv (x_0, y_0) \in \Omega$ si existe una aplicación \mathbb{R} -lineal,

$d_{\mathbb{R}}f(z_0) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \equiv \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tal que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - d_{\mathbb{R}}f(z_0)(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0.$$

En este caso, la aplicación $d_{\mathbb{R}}f(z_0)$ tiene como matriz asociada

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}$$

siendo $f = u + iv$.

Definición 2.2 Sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ siendo Ω un abierto de \mathbb{C} . Se dice que f es \mathbb{C} -diferenciable en $z_0 \in \Omega \Leftrightarrow f$ es derivable en $z_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \Leftrightarrow \Leftrightarrow$ existe una aplicación $d_{\mathbb{C}}f(z_0) \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ tal que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - d_{\mathbb{C}}f(z_0)(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0.$$

Evidentemente, $d_{\mathbb{C}}f(z_0)$ es la aplicación lineal asociada al número complejo $f'(z_0)$.

Teorema 2.1 Sean $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, y $z_0 \in \Omega$. Son equivalentes:

- i. f es \mathbb{C} -diferenciable en z_0 .
- ii. f es \mathbb{R} -diferenciable en z_0 y cumple:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \end{aligned} \right\} \text{Ecuaciones de Cauchy-Riemann}$$

Intuitivamente, se dice que una función f es conforme en z_0 si conserva la magnitud y el sentido de los ángulos en z_0 .

Para cada número complejo $z \neq 0$, denotemos por $A(z)$ la fase del complejo z , es decir,

$$A(z) := \frac{z}{|z|}.$$

De esta forma, todo número complejo $z \neq 0$ determina una dirección, definida por el origen y el punto $A(z)$ de la circunferencia unidad.

Definición 2.3 Sean $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, Ω abierto y $z_0 \in \Omega$. Suponemos que existe una corona $D^*(z_0, r)$ de forma que $f(z) \neq f(z_0)$ si $z \in D^*(z_0, r)$. Diremos que f conserva ángulos en z_0 si el límite

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} e^{-i\theta} \cdot A(f(re^{i\theta} + z_0) - f(z_0))$$

existe y no depende de θ .

Esto quiere decir que, para cualquier rayos L y L' , con origen en el punto z_0 , el ángulo que forman sus imágenes, $f(L)$ y $f(L')$ con $f(z_0)$ es el mismo que el ángulo que forman L y L' , en tamaño y orientación.

A causa de esta propiedad de conservar ángulos, una transformación $w = f(z)$ se llama conforme en un punto z_0 si f es analítica en él y $f'(z_0) \neq 0$. Tal transformación es conforme, de hecho, en un entorno de z_0 , porque f es necesariamente analítica en un entorno de z_0 , y al ser f' continua en z_0 se deduce que existe un entorno de ese punto en el que $f'(z) \neq 0$.

Teorema 2.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Se cumple:

- i. Si f es derivable en $z_0 \in \Omega$ y $f'(z_0) \neq 0$, por tanto, f conserva ángulos en z_0 .
- ii. De la misma manera, si f es \mathbb{R} -diferenciable en z_0 , con \mathbb{R} -diferencial no nula en z_0 , y f conserva ángulos en z_0 , entonces, existe $f'(z_0)$ y además es $f'(z_0) \neq 0$.

Demostración. Por comodidad, sin ser restrictivo, vamos suponer que $z_0 = 0 = f(z_0)$.

- i. Si existe $f'(0) \neq 0$, entonces:

$$e^{-i\theta} \cdot A(f(re^{i\theta})) = \frac{\frac{f(re^{i\theta})}{|f(re^{i\theta})|}}{e^{i\theta}} = \frac{\frac{f(re^{i\theta})}{|f(re^{i\theta})|}}{\frac{re^{i\theta}}{|re^{i\theta}|}} = \frac{\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}}{\frac{|f(re^{i\theta})|}{|re^{i\theta}|}} \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} \frac{f'(0)}{|f'(0)|}.$$

Por lo tanto, f conserva ángulos en $z_0 = 0$.

ii. Suponemos ahora que f es \mathbb{R} -diferenciable en 0, con \mathbb{R} -diferencial no nula en 0. Por tanto, existirán números complejos α y β , no simultáneamente nulos, que cumplen:

$$f(z) = \alpha z + \beta \bar{z} + \eta(z)|z|, \text{ con } \eta(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0.$$

Además, como f conserva ángulos en z_0 , existe

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} e^{-i\theta} \cdot A(f(re^{i\theta})),$$

y no depende de θ .

En nuestro caso, esto significa que:

$$\begin{aligned} & \exists \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{i\theta} \frac{\alpha r e^{i\theta} + \beta r e^{i\theta} + \eta(r e^{i\theta}) |r e^{i\theta}|}{|\alpha r e^{i\theta} + \beta r e^{-i\theta} + \eta(r e^{i\theta}) |r e^{i\theta}|} = \\ & = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\alpha r + \beta r e^{-2i\theta} + \eta(r e^{i\theta}) r e^{i\theta}}{|e^{i\theta}| |\alpha r + \beta r e^{-2i\theta} + \eta(r e^{i\theta}) r e^{-i\theta}|} = \frac{\alpha + \beta e^{-2i\theta}}{|\alpha + \beta e^{-2i\theta}|} \end{aligned}$$

(en esta última expresión, excluimos los valores de θ para los que el denominador es nulo).

Como este límite debe ser independiente de θ , la única posibilidad de que esto ocurra es que $\beta = 0$.

Vemos por tanto, que si f conserva ángulos en $z_0 = 0$, entonces, $\beta = 0$, o lo que equivale a decir que f cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto $z_0 = 0$ y, por tanto, f es derivable en el origen, cumpliéndose, además, que existe $f'(z_0) \equiv \alpha$, con $\alpha \neq 0$, en virtud de la hipótesis sobre la \mathbb{R} -diferencial de f en el origen.

□

Observación 2.1 Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, holomorfa en el abierto Ω , no puede conservar ángulos en el punto $z_0 \in \Omega$ en el que $f'(z_0) = 0$.

No obstante, una función diferenciable (en sentido real o complejo) en z_0 , con diferencial nula en z_0 , podrá conservar o no los ángulos en este punto. Por ejemplo, podemos considerar, la función f , definida por $f(z) = z|z|$. Vemos que f es derivable

en $z_0 = 0$ y conserva los ángulos en este punto, pero $f'(0) = 0$.
(Notemos que f no es holomorfa en ningún entorno del origen).

Definición 2.4 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierta y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Diremos que:

- f es una aplicación conforme en z_0 , si f conserva ángulos en z_0 .
- f es una aplicación conforme en Ω , si f es conforme en cada punto de Ω .

En particular, si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, se cumple:

$$f \text{ es una aplicación conforme en } \Omega \Leftrightarrow f'(z) \neq 0, \forall z \in \Omega.$$

Ahora introduciremos el concepto de isomorfismo conforme, que será muy importante cuando enunciemos el Teorema de Riemann.

Definición 2.5 Sean Ω_1 y Ω_2 dominios en \mathbb{C} . Se dice que $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es un isomorfismo conforme de Ω_1 sobre Ω_2 si f es holomorfa y biyectiva.

Diremos que dos dominios Ω_1 y Ω_2 son *isomorfos* o *conformemente equivalentes* si existe un isomorfismo conforme entre ellos. Representaremos por $Iso(\Omega_1, \Omega_2)$ el conjunto de todos los isomorfismos conformes de Ω_1 sobre Ω_2 .

Un isomorfismo conforme de un dominio Ω sobre si mismo se llama un *automorfismo conforme* de Ω . Representaremos por $Aut(\Omega)$ el conjunto de los automorfismos conformes de Ω .

Observación 2.2 Claramente, dos abiertos isomorfos son, en particular, homeomorfos.

Ejemplo 2.1 Si $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una transformación lineal, siendo $f(z) = az + b$, para todo $z \in \mathbb{C}$ con $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$. Entonces f es un automorfismo del plano, es decir, una equivalencia conforme del plano en si mismo.

Nota 2.1 *Estas aplicaciones son los únicos automorfismos conformes de \mathbb{C} .*

El problema general de la representación conforme consiste en decidir si dos abiertos del plano complejo son isomorfos, y en caso de que lo sean, tratar de determinar todos los isomorfismos conformes de uno a otro.

Proposición 2.1 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ inyectiva. Entonces para cada $a \in \Omega$, $f'(a) \neq 0$, $G = f(\Omega)$ es abierto y la inversa $f^{-1} : G \rightarrow \Omega$ es holomorfa. Consecuentemente, $(f^{-1})'(b) \neq 0$ para cada $b \in G$ y así, f es un isomorfismo conforme de Ω sobre $f(\Omega)$.*

Demostración. Empezaremos suponiendo que Ω es conexo, ya que en caso de que no lo fuese, llegaría con restringirnos a cada componente conexa. Luego, por el teorema de la aplicación abierta G es abierto y $f : \Omega \rightarrow G$ es biyectiva y holomorfa con lo que $f'(a) \neq 0$ para cada $a \in \Omega$.

Sabemos que f^{-1} es continua ya que f es abierta. Si tomamos $b = f(a)$, tenemos que

$$\frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{b+h} = \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(b+h)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{f'(f^{-1}(b))},$$

con lo cual, f^{-1} es holomorfa.

□

Corolario 2.1 *Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ abierta y $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una biyección holomorfa. Entonces f es un isomorfismo conforme.*

Un ejemplo de aplicación conforme es la función exponencial.

Ejemplo 2.2 *La aplicación $w = e^z$ es conforme en todo el plano z porque la derivada de la función exponencial no se anula nunca. Consideramos dos rectas arbitrarias $x = c_1$, $x = c_2$, en el plano z , la primera dirigida hacia arriba y la segunda hacia la derecha. Sus imágenes bajo $w = e^z$ son un círculo orientado positivamente centrado en el origen y un rayo que arranca del origen, respectivamente.*

Como ilustra la siguiente figura el ángulo entre las rectas en su punto de intersección

es un ángulo recto en la dirección negativa, y lo mismo es cierto para el ángulo que forman el círculo y el rayo en el punto correspondiente del plano w .

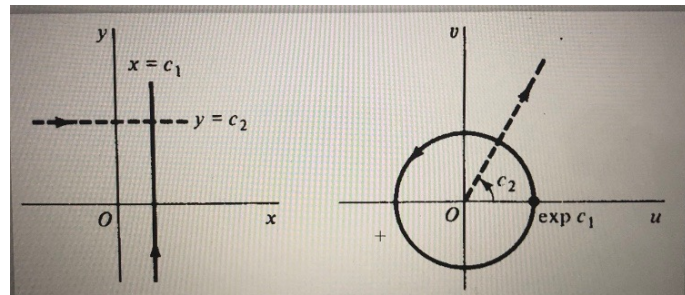


Figura 2.1: La imagen es tomada de la referencia [1], pág. 250

El carácter conforme de la aplicación $w = e^z$ queda ilustrado en las siguientes imágenes.

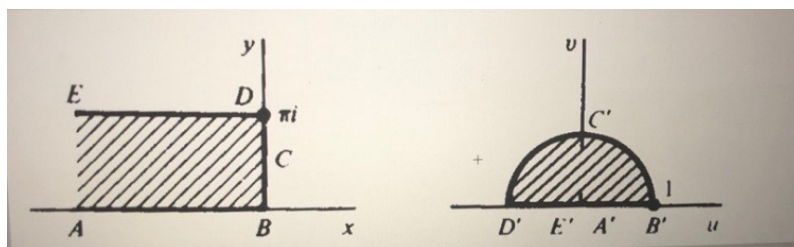


Figura 2.2: La imagen es tomada de la referencia [1], pág. 390

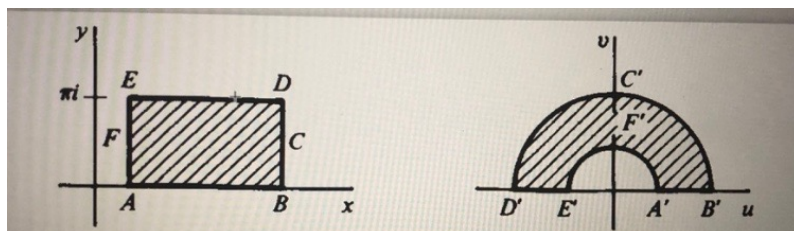


Figura 2.3: La imagen es tomada de la referencia [1], pág. 391

Ahora, visto el ejemplo anterior, si nos restringimos a abiertos adecuados podemos determinar un ejemplo de isomorfismo conforme.

Ejemplo 2.3 *La función $f(z) = e^z$ establece un isomorfismo conforme entre la siguiente pareja de abiertos:*

- $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$
- $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$

Por tanto, estos dos abiertos son conformemente equivalentes.

2.2. Transformaciones de Möbius

A veces resulta útil añadir a \mathbb{C} un punto especial al que llamaremos punto del infinito y denotaremos por ∞ . El conjunto resultante, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, lo denotaremos por \mathbb{C}^∞ , y nos referiremos a él como el plano complejo ampliado.

En el plano complejo ampliado es posible definir las transformaciones de Möbius, las cuales son un ejemplo de las transformaciones conformes que vimos en la sección anterior.

Definición 2.6 *Llamaremos transformación de Möbius a una aplicación $S: \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ definida de la forma*

$$w = S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ son constantes tales que $ad - bc \neq 0$.

Notaremos por \mathcal{M} al conjunto de todas ellas.

De esta forma, una transformación de Möbius, S , es una aplicación inyectiva definida en el abierto $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ (excepto si $c = 0$, ya que en este caso S es lineal y, por lo tanto, está definida en \mathbb{C}) que tiene inversa, determinada por:

$$S^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a},$$

definida en $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ (excepto si $c = 0$). Tenemos, por lo tanto, una equivalencia conforme:

$$S : \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

que se extiende a una biyección

$$S : \mathbb{C}^\infty \longrightarrow \mathbb{C}^\infty,$$

y si hacemos

$$S \left(-\frac{d}{c} \right) = \infty \quad \text{y} \quad S(\infty) = \frac{a}{c}$$

tenemos que

$$S^{-1} \left(\frac{a}{c} \right) = \infty \quad \text{y} \quad S^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}.$$

Los diferentes tipos de transformaciones que nos podemos encontrar son los siguientes:

1. $S(z) = az + b$, con $a \neq 0$, es una transformación afín.
2. $S(z) = z + b$ es una traslación.
3. $S(z) = az$ es una homotecia compleja.
4. $S(z) = \frac{1}{z}$ es una inversión.

Observación 2.3 *Toda transformación de Möbius se puede expresar como composición de los diferentes tipos de transformaciones que acabamos de ver.*

Proposición 2.2 *i. Toda transformación de Möbius es biyectiva, y su inversa es también una transformación de Möbius.*

ii. La composición de transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius.

Demostración. Para comprobar *i.* basta resolver $w = \frac{az+b}{cz+d}$ para z en función de w , y se obtiene

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a} = S^{-1}(w).$$

La demostración de *ii.* es un cálculo directo:

Si $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $T(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ se obtiene que

$$S(T(z)) = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}.$$

□

Observación 2.4 *Hay una correspondencia entre la composición de transformaciones de Möbius $S \circ T$ y el producto de las matrices asociadas a f y g :*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}.$$

Se verifican las siguientes propiedades de las transformaciones de Möbius:

Proposición 2.3 *Dados tres puntos distintos $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^\infty$, y otros tres puntos distintos $w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{C}^\infty$, existe una transformación de Möbius $S : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ tal que $S(z_1) = w_1$, $S(z_2) = w_2$ y $S(z_3) = w_3$.*

Proposición 2.4 *Toda transformación de Möbius lleva circunferencias de \mathbb{C}^∞ en circunferencias de \mathbb{C}^∞ .*

Veamos ahora, para terminar la sección, nuevos ejemplos de transformaciones conformes que serán utilizados a lo largo del trabajo.

Ejemplo 2.4 *La aplicación*

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{z - \bar{a}z}$$

con $\theta \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{D}$ es un isomorfismo del disco unidad en si mismo. En efecto, si $|z| = 1$ entonces

$$|T(z)| = |e^{i\alpha}| \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = \frac{|z - a|}{|\bar{z}| |1 - \bar{a}z|} = \frac{|z - a|}{|\bar{z} - \bar{a}z\bar{z}|} = \frac{|z - a|}{|\bar{z} - \bar{a}|} = 1.$$

Además las transformaciones de Möbius transforman circunferencias en circunferencias o rectas, luego T transforma necesariamente la frontera del disco unidad en si misma. Como T es continua y biyectiva por ser una transformación de Möbius, la imagen de \mathbb{D} debe ser conexa y por tanto, o bien $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ o bien $T(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Pero la segunda opción es absurda porque $T(a) = 0$. Así, T es una biyección holomorfa del disco unidad en si mismo.

Ejemplo 2.5 Si cogemos el ejemplo anterior para el caso particular $z_0 = i$ y $\theta \in \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, obtenemos la transformación de Möbius

$$C(z) = \frac{z+i}{z-i}$$

que transforma el semiplano superior al disco unidad, y recibe el nombre especial de transformación de Cayley.

2.3. Principios del máximo

En esta sección veremos los principios del máximo para funciones subarmónicas y holomorfas, pero antes veremos algún resultado y alguna definición que serán importantes.

Proposición 2.5 (Principio de la media) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. Entonces

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

Demostración. Por la fórmula de Cauchy con $z = a$:

$$f(a) = \frac{1}{i2\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(\omega)}{\omega - a} d\omega = \frac{1}{i2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

□

Observación 2.5 *El valor de una función holomorfa en un punto, es siempre el promedio de los valores que dicha función toma sobre los puntos de cualquier circunferencia que tenga a dicho punto como centro.*

Una consecuencia importante del resultado anterior es la llamada desigualdad de la media.

Proposición 2.6 (Desigualdad de la media) *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$. Entonces*

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta.$$

Definición 2.7 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Una función $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua en Ω se dice que es subarmónica en Ω si verifica la desigualdad*

$$\varphi(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(a + re^{it}) dt$$

siempre que $\overline{D(a, R)} \subset \Omega$.

Observación 2.6 *El módulo de una función holomorfa es una función subarmónica.*

El siguiente resultado lo utilizaremos para la demostración del principio del máximo para funciones subarmónicas.

Lema 2.1 *Sea $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y no negativa. Si $\int_a^b \varphi \leq 0$, entonces $\varphi(t) = 0, \forall t \in [a, b]$.*

Teorema 2.3 (Principio del máximo para funciones subarmónicas) *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función subarmónica en Ω . Supongamos que existe $a \in \Omega$ tal que $\varphi(z) \leq \varphi(a)$, para todo $z \in \Omega$. Entonces φ es constante.*

Demostración. Sea $A = \{z \in \Omega : \varphi(z) = \varphi(a)\}$. Claramente vemos que $A \neq \emptyset$. Lo que queremos probar es que $A = \Omega$, y para ello, sea $b \in A$ y $D(b, R) \subset \Omega$. Consideremos $0 < r < R$; por ser φ subarmónica

$$\varphi(b) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(b + re^{i\theta}) d\theta,$$

lo cual equivale a que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi(b) - \varphi(b + re^{i\theta})] d\theta \leq 0.$$

Pero por hipótesis,

$$\varphi(b) - \varphi(b + re^{i\theta}) \geq 0, \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Luego, aplicando el lema anterior

$$\varphi(b) - \varphi(b + re^{i\theta}) = 0, \forall \theta \in [0, 2\pi],$$

y, por tanto,

$$D(b, r) \subset A, \forall r \in (0, R),$$

de donde

$$D(b, R) \subset A.$$

En conclusión: $A = \Omega$.

□

Ahora, vamos ver que el máximo sobre el cerrado se alcanza siempre en la frontera.

Corolario 2.2 *Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{C} y $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $\overline{\Omega}$ y subarmónica en Ω . Entonces*

$$\max\{\varphi(z) : z \in \overline{\Omega}\} = \max\{\varphi(z) : z \in \partial\Omega\}.$$

Teorema 2.4 (Principio del Módulo Máximo) *Sea Ω un dominio del plano com-*

plejo \mathbb{C} y f una función holomorfa en Ω . Si $|f|$ alcanza un máximo relativo en Ω , entonces f es constante en Ω .

Demostración. Sea $a \in \Omega$ un punto donde la función $|f|$ alcance un máximo relativo. En tales condiciones : existe $r > 0$ tal que

$$D(a, r) \subset \Omega \text{ y } |f(z)| \leq |f(a)|, \forall z \in D(a, r).$$

Podemos aplicar el principio del módulo máximo para funciones subarmónicas a $|f|$ en $D(a, r)$ tal que f es constante en el disco. Pero como $f \in \mathcal{H}(D(a, r))$ y $|f|$ constante en $D(a, r)$, entonces f es constante en todo el disco $D(a, r)$.

Por el principio de identidad, como obviamente $D(a, r)$ tiene puntos de acumulación en Ω , concluimos que f es constante en Ω , como queríamos demostrar.

□

Corolario 2.3 Sean Ω un abierto acotado de \mathbb{C} y $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $\bar{\Omega}$ y holomorfa en Ω . Entonces

$$\max\{|f|(z) : z \in \bar{\Omega}\} = \max\{|f|(z) : z \in \partial\Omega\}.$$

2.4. Lema de Schwarz

En esta sección vamos a demostrar el Lema de Schwarz, que es una sencilla e interesante consecuencia del Teorema del módulo máximo.

Lema 2.2 (de Schwarz) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1, \forall z \in \mathbb{D}$. Entonces:

i. $|f(z)| \leq |z|, \forall z \in \mathbb{D}$

ii. $|f(0)| \leq 1$

iii. Si existe $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$, o bien $|f'(0)| = 1$, entonces es un giro; es decir:

$$\exists \theta \in \mathbb{R} : f(z) = e^{i\theta} z, \forall z \in \mathbb{D}.$$

Demostración. Definimos en primer lugar la función $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \in \mathbb{D} \setminus \{0\} \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Definida de esta manera, g es continua ya que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - 0}{z - 0} = f'(0)$$

y además es holomorfa en todo el disco unidad.

Sea $z \in \mathbb{D}$, fijo pero arbitrario, y tomamos $r : |z| < r < 1$. Por el principio del módulo máximo:

$$|g(z)| \leq \max\{|g(w)| : |w| = r\} = \max\left\{\left|\frac{|f(w)|}{w}\right| : |w| = r\right\} = \frac{1}{r} \max\{|f(w)| : |w| = r\} \leq 1.$$

Por tanto, tenemos que $g(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$, lo que quiere decir que se verifican (i) e (ii).

Sea ahora $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $|g(z_0)| = 1$ (es decir, para algún $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tenemos que $|f(z_0)| = |z_0|$, o bien $|f'(0)| = 1$), y $|g|$ alcanza el máximo absoluto en \mathbb{D} , luego, por el principio del módulo máximo, g es constante en \mathbb{D} :

$$\exists \theta \in \mathbb{R} : g(z) = e^{i\theta}, \forall z \in \mathbb{D}.$$

Con lo cual, el resultado queda demostrado. □

El siguiente resultado es una consecuencia del Lema de Schwarz.

Corolario 2.4 Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces para cada $a \in \mathbb{D}$ se

cumple

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}$$

y si en algún $a \in \mathbb{D}$ se cumple la igualdad, entonces f es una biyección holomorfa de \mathbb{D} en si mismo. En particular, si f no es inyectiva se cumple $|f'(0)| < 1$.

2.5. Teorema de Ascoli

La finalidad de esta sección es demostrar el Teorema de Ascoli, pero previamente enunciaremos unos resultados necesarios.

A lo largo de toda la sección tomaremos $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y (E, d) un espacio métrico. Llamaremos E^Ω al conjunto de las funciones $f : \Omega \rightarrow E$ y por $C(\Omega, E)$ el subconjunto formado por las funciones continuas. Podemos introducir en E^Ω una topología para que las sucesiones convergentes sean las que convergen uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$.

Definición 2.8 Se define la topología de convergencia uniforme sobre compactos en E^Ω , y denotada por τ_K , a la generada por una base de entornos de cada $f \in E^\Omega$,

$$\mathcal{B}_f = \{V(f, K, \varepsilon) : K \subset \Omega \text{ compacto}, \varepsilon > 0\}$$

con

$$V(f, K, \varepsilon) = \{g \in E^\Omega : d_K(f, g) < \varepsilon\} \text{ y } d_K(f, g) = \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\}.$$

Es decir, un conjunto de funciones $A \subset E^\Omega$ es abierto para la topología τ_K cuando para cada $f \in A$ existe $V \in \mathcal{B}_f$ tal que $V \subset A$.

Observación 2.7 Una sucesión de funciones $(f_n) \in E^\Omega$ es convergente en τ_K si y sólo si converge uniformemente sobre compactos.

Definición 2.9 Se define la topología de la convergencia puntual en E^Ω , denotada

por τ_p , a la generada por la base de entornos

$$\mathcal{B}_f = \{V(f, H, \varepsilon) : f \in E^\Omega, H \text{ finito}, \varepsilon > 0\}.$$

Observación 2.8 Una sucesión de funciones $(f_n) \subset E^\Omega$ es convergente en τ_p si y sólo si converge puntualmente.

Ahora introducimos la noción de equicontinuidad que será de gran interés en el Teorema de Ascoli.

Definición 2.10 Una familia $\mathcal{F} \subset C(\Omega, E)$ se dice que es equicontinua en $a \in \Omega$ cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe $D(a, r) \subset \Omega$ tal que $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ para todo $z \in D(a, r)$ y toda $f \in \mathcal{F}$.

Se dice que \mathcal{F} es equicontinua en Ω cuando lo es en cada punto $a \in \Omega$.

Observación 2.9 La topología de la convergencia uniforme sobre compactos τ_K es más fina que la topología de la convergencia puntual τ_p , es decir $\tau_p \subset \tau_K$.

A partir de ahora, dada una familia $\mathcal{F} \subset E^\Omega$, denotaremos por $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$ (respectivamente $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$) su clausura en E^Ω para la topología τ_p (respectivamente τ_K). Es evidente que $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K} \subset \overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$.

Por último, antes de enunciar y demostrar el Teorema de Ascoli veremos unos resultados que nos serán de gran ayuda.

Proposición 2.7 Sea la familia $\mathcal{F} \subset C(\Omega, E)$ equicontinua, entonces se verifican:

i. La clausura $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_p}$ también es equicontinua.

ii. $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_p} = \overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$.

Corolario 2.5 En una familia equicontinua $\mathcal{F} \subset C(\Omega, \overline{E})$, la topología de la convergencia puntual coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Es decir τ_p y τ_K inducen en \mathcal{F} la misma topología.

El siguiente resultado será de gran ayuda para la demostración del Teorema de Ascoli.

Lema 2.3 *Sea (E, d) un espacio métrico completo y $S \subset \Omega$ un subconjunto denso. Toda sucesión equicontinua $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C(\Omega, E)$ que sea puntualmente convergente sobre S converge uniformemente sobre compactos.*

Demostración. Teniendo en cuenta el apartado (ii) de la proposición (2.7) y el corolario (2.5), basta ver que si una sucesión equicontinua (f_n) converge puntualmente a un conjunto $S \subset \Omega$ entonces converge puntualmente en Ω .

Dado $a \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$, como la sucesión es equicontinua, existe $D(a, r) \subset \Omega$ tal que $d(f_n(z), f_n(a)) < \varepsilon$ para todo $z \in D(a, r)$ y $n \in \mathbb{N}$. Además, como S es denso en Ω , existe $s \in S \cap D(a, r)$ y por hipótesis la sucesión $(f_n(s))$ converge, luego existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq n_\varepsilon$ entonces $d(f_n(s), f_m(s)) < \varepsilon$. Así, para $n, m \geq n(\varepsilon)$ también se verifica

$$d(f_n(a), f_m(a)) \geq d(f_n(a), f_m(s)) + d(f_n(s), f_m(s)) + d(f_m(s), f_m(a)) \geq \varepsilon.$$

Por lo tanto, para cada $a \in \Omega$ la sucesión $(f_n(a))$ es de Cauchy y por lo tanto convergente.

□

Observación 2.10 *En el resultado anterior, obtendríamos la misma conclusión si en vez de suponer que el espacio métrico (E, d) es completo, supusiéramos que para cada $a \in \Omega$ existe un compacto K_a que contiene a la sucesión $\{f_n(a) : n \in \mathbb{N}\}$, ya que tendríamos para cada $a \in \Omega$ una sucesión de Cauchy $(f_n(a))$ contenida en un compacto, y por lo tanto es convergente.*

Estamos ya en condiciones de dar el resultado que da nombre a esta sección, pero antes vamos a recordar la noción de relativamente compacto.

Definición 2.11 *Un subconjunto A de un espacio métrico (E, d) se dice que es relativamente compacto, cuando está contenido en algún compacto. Esto es equivalente*

a que su adherencia \bar{A} sea compacta. Tambien equivale a que toda sucesión contenida en A posee alguna subsucesión covergente (hacia algún punto de E).

Teorema 2.5 (de Ascoli) Una familia $\mathcal{F} \subset C(\Omega, E)$ es relativamente compacta para la topología τ_K de la convergencia uniforme sobre compactos si y sólo si cumple las dos condiciones siguientes:

- i. \mathcal{F} es una familia equicontinua.
- ii. Para cada $z \in \Omega$ el conjunto $\mathcal{F}(z) = \{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ es relativamente compacto en el espacio métrico (E, d) .

Demostración. En primer lugar demostraremos que cuando se cumplen ambas condiciones entonces la familia \mathcal{F} es relativamente compacta para τ_K , es decir, toda sucesión $(f_n) \in \mathcal{F}$ posee una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos. Para ello, por la observación (2.10) que vimos anteriormente, sabemos que basta demostrar que de la sucesión (f_n) se puede extraer una subsucesión que converge puntualmente sobre el conjunto

$$S = \{x + iy \in \Omega : x, y \in \mathbb{Q}\}$$

que es numerable y denso en Ω .

Sea $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ una enumeración de S . La sucesión $(f_n(a_1))_{n \in \mathbb{N}}$ está contenida en el conjunto relativamente compacto $\mathcal{F}(a_1)$, luego posee una subsucesión convergente que escribimos de la forma $(f_n(a_1))_{n \in M_1}$, con $M_1 \subset \mathbb{N}$ infinito. La sucesión $(f_n(a_2))_{n \in M_1}$ está contenida en el conjunto relativamente compacto $\mathcal{F}(a_2)$, luego posee una subsucesión convergente que escribimos de la forma $(f_n(a_2))_{n \in M_2}$, con $M_2 \subset M_1$ infinito.

Veamos que la sucesión $(f_n(a_1))_{n \in M_2}$ tambien converge por ser subsucesión de $(f_n(a_1))_{n \in M_1}$, que es convergente. Si procedemos de manera recurrente obtenemos una sucesión decreciente de conjuntos infinitos

$$M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_k \supset M_{k+1} \supset \dots$$

tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión $(f_n)_{n \in M_k}$ converge en los puntos $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Existe un conjunto infinito $M = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ tal que $n_k \in M_k$ para

cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces $(f_n)_{n \in M}$ es una subsucesión de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge en cada $a \in S$ (en efecto, desde el término k -ésimo en adelante, $(f_n)_{n \in M}$ es subsucesión de $(f_n)_{n \in M_k}$, y por lo tanto converge en a_k).

Por otro lado, recíprocamente, supongamos ahora que $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$ es τ_K -compacto. Para demostrar (i) fijamos $a \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$. Dado un disco compacto $K = \overline{D(a, r)} \subset \Omega$, la familia de τ_K -abiertos $\{V(f, k, \varepsilon) : f \in \overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}\}$ recubre el τ_K -compacto $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$ y podemos extraer un recubrimiento finito

$$\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K} \subset \bigcup_{1 \leq j \leq m} V(f_j, k, \varepsilon) \quad \text{donde } f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathcal{F}.$$

Como la familia finita $\{f_1, f_2, \dots, f_m\} \subset C(\Omega, E)$ es equicontinua, existe $0 < \delta < r$ tal que $z \in D(a, \delta)$, $1 \leq j \leq m$ entonces $d(f_j(z), f_j(a)) < \varepsilon$. Para cada $f \in \mathcal{F}$ existe $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ tal que $f \in V(f_j, k, \varepsilon)$ y para cada $z \in D(a, \delta)$ es $\{z, a\} \subset K$, luego

$$d(f(z), f(a)) \leq d(f(z), f_j(z)) + d(f_j(z), f_j(a)) + d(f_j(a), f(a)) \leq 3\varepsilon.$$

Con esto hemos demostrado que la familia \mathcal{F} es equicontinua.

Por último, para obtener (ii) basta tener en cuenta que para cada $z \in \Omega$ la ecuación $\delta_z : C(\Omega, E) \rightarrow E$, $\delta_z(f) = f(z)$ es τ_K -continua, luego transforma el τ_K -compacto $\overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}$ en el compacto $\{f(z) : f \in \overline{\mathcal{F}}^{\tau_K}\}$, que contiene a $\mathcal{F}(z)$.

□

2.6. Teorema de Montel

En esta sección nos centraremos en enunciar y demostrar el Teorema de Montel, que como dijimos, nos será útil a la hora de demostrar el Teorema de Riemann. Antes de nada definiremos unos conceptos de los que echaremos mano.

Definición 2.12 Sea $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$.

- Se dice que \mathcal{F} es relativamente compacto si cualquier sucesión de puntos de

\mathcal{F} tiene una sucesión parcial convergente en $C(\Omega)$; equivalentemente, \mathcal{F} es compacto.

- Se dice que \mathcal{F} está puntualmente acotado si para cada $z \in \Omega$ el conjunto $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ está acotado.
- Se dice \mathcal{F} está acotado en compactos si para cada compacto $K \in \Omega$ hay un número $M_K > 0$ tal que para todo $z \in K$ y toda $f \in \mathcal{F}$ se verifica que $|f(z)| \leq M_K$.

El siguiente resultado es una parte de la prueba del Teorema de Montel.

Proposición 2.8 *Supongamos que \mathcal{F} es relativamente compacto en $C(\Omega)$. Entonces \mathcal{F} está acotado en compactos y es puntualmente equicontinuo.*

Demostración. Dado un compacto $K \subset \Omega$, la familia de abiertos $\{U(f, K, 1) : f \in \overline{\mathcal{F}}\}$ es un recubrimiento por abiertos del compacto $\overline{\mathcal{F}}$, luego tiene que haber un número finito de funciones $f_j \in \overline{\mathcal{F}}$, $1 \leq j \leq p$ de manera que $\overline{\mathcal{F}} \subset \bigcup_{j=1}^p U(f_j, K, 1)$.

Sea $M_j = \max \{|f_j(z)| : z \in K\}$ y $M = \max\{M_j : 1 \leq j \leq p\}$. Entonces, dada $f \in \mathcal{F}$ hay algún j tal que $f \in U(f_j, K, 1)$ y, por tanto, para todo $z \in K$ tenemos que

$$|f(z)| \leq |f(z) - f_j(z)| + |f_j(z)| \leq 1 + M_j \leq 1 + M.$$

Por lo tanto, ya hemos probado que \mathcal{F} está uniformemente acotado en compactos.

Fijemos ahora $a \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$. Si tomamos $K = \overline{D}(a, r)$. Dado $\varepsilon > 0$, la familia $\{U(f, K, \varepsilon) : f \in \overline{\mathcal{F}}\}$ es un recubrimiento por abiertos de $\overline{\mathcal{F}}$. Por la compacidad de $\overline{\mathcal{F}}$, existe un número finito de elementos g_1, \dots, g_n de $\overline{\mathcal{F}}$ tal que $\overline{\mathcal{F}} \subset \bigcup_{j=1}^n U(g_j, K, \varepsilon)$. Por la continuidad de cada una de las funciones g_j podemos encontrar un número $0 < \delta < r$ tal que

$$|z - a| < \delta \Rightarrow |g_j(z) - g_j(a)| < \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Dada $f \in \mathcal{F}$, entonces para algún j se tiene que $f \in U(g_j, K, \varepsilon)$. Por tanto si $|z - a| < \delta$ obtenemos

$$|f(z) - f(a)| \leq |f(z) - g_j(z)| + |g_j(z) - g_j(a)| + |g_j(a) - f(a)| < 3\varepsilon.$$

De esta forma, hemos probado que \mathcal{F} es puntualmente equicontinuo.

□

Por último, enunciamos y demostramos el Teorema de Montel.

Teorema 2.6 (de Montel) *Un conjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es relativamente compacto si, y sólo si, \mathcal{F} está acotado en compactos.*

Demostración. Sabemos, por la proposición anterior, que la condición es necesaria. Probaremos ahora que es suficiente.

Supongamos que \mathcal{F} está acotado en compactos. Para probar que \mathcal{F} es relativamente compacto, será suficiente probar, por el Teorema de Ascoli visto anteriormente, que \mathcal{F} es puntualmente equicontinuo. Dado un punto $a \in \Omega$, elegimos $r > 0$ tal que $\overline{D}(a, 2r) \subset \Omega$. Por hipótesis, existe una constante M tal que

$$|f(z)| \leq M, \text{ para todo } z \in \overline{D}(a, 2r) \text{ y toda } f \in \mathcal{F}.$$

Supongamos que $|z - a| < r$. Usando la fórmula de Cauchy se tiene

$$|f(z) - f(a)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C(a, 2r)} \left(\frac{f(w)}{w - z} - \frac{f(w)}{w - a} \right) dw \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C(a, 2r)} \frac{f(w)(z - a)}{(w - z)(w - a)} dw \right|.$$

Como $z \in D(a, r)$, para $w \in C(a, 2r)$ se tiene

$$|(w - z)(w - a)| \geq (|w - a| - |a - z|) 2r \geq (2r - r) 2r = 2r^2.$$

Por tanto,

$$|f(z) - f(a)| \leq \frac{M|z - a|}{2r}.$$

La condición anterior, válida para todo $f \in \mathcal{F}$ y para todo $z \in D(a, r)$, claramente implica la equicontinuidad de \mathcal{F} .

□

2.7. Teorema de Hurwitz

Ahora veremos un teorema importante, el llamado Teorema de Hurwitz, que nos dice que bajo ciertas condiciones, si una sucesión de funciones holomorfas convergen uniformemente a una función holomorfa sobre conjuntos compactos, entonces, después de un tiempo esas funciones y la función límite tiene el mismo número de ceros en cualquier disco abierto.

Teorema 2.7 (de Hurwitz) *Sea Ω un dominio del plano complejo \mathbb{C} . Sea (f_n) una sucesión de funciones holomorfas en Ω tales que ninguna se anula en ningún punto. Supongamos que (f_n) converge uniformemente sobre los compactos de Ω a cierta función f . Entonces, o bien f es idénticamente nula, o bien f no se anula en ningún punto de Ω .*

Demostración. Como f es una función holomorfa en el abierto Ω tenemos el teorema de convergencia de Weierstrass. Lo razonaremos por reducción al absurdo y llegaremos a una contradicción.

Supongamos que f no es idénticamente nula en Ω , pero existe $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$. Los ceros de f deben ser aislados:

$$\exists \overline{D(a, r)} \subset \Omega : 0 < |z - a| \leq r \Rightarrow f(z) \neq 0.$$

Entonces, podemos aplicar el corolario (1.1): para n suficientemente grande, f_n y f tienen el mismo número de ceros en $D(a, r)$. Por tanto, f_n tiene al menos, un cero en $D(a, r)$, lo cual hemos llegado a una CONTRADICCIÓN.

□

Existen sucesiones de funciones enteras que convergen a la constante 0 (en la topología $\mathcal{H}(\mathbb{C})$) y que no se anulan en ningún punto del plano complejo. Un ejemplo es $f_n(z) := \frac{1}{n}, \forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Por último, demostraremos un corolario que usaremos en el Teorema de Riemann.

Corolario 2.6 *Sea Ω un dominio del plano complejo \mathbb{C} . Sea (f_n) una sucesión de*

funciones holomorfas e inyectivas en Ω . Supongamos que (f_n) converge uniformemente sobre los compactos de Ω a cierta función f . Entonces o bien f es inyectiva, o bien f es constante en Ω .

Demostración. Supongamos que f no es constante. Tomamos $a \in \Omega$ fijo, pero arbitrario. En el dominio $\Omega \setminus \{a\}$ definimos las funciones:

$$\begin{aligned} g, g_n &: \Omega \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ g(z) &:= f(z) - f(a) \\ g_n(z) &:= f_n(z) - f_n(a), \forall z \in \Omega \setminus \{a\}. \end{aligned}$$

Es evidente que la sucesión (g_n) converge a g en la topología de $\mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Por tanto, como la sucesión (g_n) no se anula en ningún punto de $\Omega \setminus \{a\}$, en aplicación del Teorema de Hurwitz, o bien g es idénticamente nula, pero es imposible al no ser f constante, o bien g no se anula en ningún punto de $\Omega \setminus \{a\}$, de donde obtenemos la inyectividad de f (debido a la arbitrariedad de a).

□

Capítulo 3

El Teorema de la aplicación de Riemann

El presente capítulo, es el mas importante, ya que en su primera sección, enunciaremos y demostraremos el teorema que da nombre al trabajo. Por último, terminaremos viendo una aplicación del Teorema de Riemann, como es la caracterización de los dominios simplemente conexos. Las principales referencias para este capítulo son [1], [3], [4], [6] y [8].

3.1. Teorema de la aplicación de Riemann

En esta primera sección, como dijimos, demostraremos el llamado Teorema de la aplicación de Riemann. La formulación que aquí haremos del teorema difiere de la que hemos hecho anteriormente en esta memoria. No obstante, veremos después que la propiedad atribuída al dominio mencionado en este enunciado, es una de las diversas propiedades que caracterizan a un dominio simplemente conexo.

Teorema 3.1 (de la aplicación de Riemann) *Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ un dominio en el que toda función holomorfa sin ceros admite una raíz cuadrada holomorfa. Entonces para cada $a \in \Omega$ existe un único isomorfismo conforme $F : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ que cumple $F(a) = 0$ y $F'(a) > 0$.*

Demostración. En primer lugar demostraremos la unicidad.

Sea $a \in \Omega$, supongamos que F y G son isomorfismos conformes de Ω en el disco unidad \mathbb{D} tal que $F(a) = G(a) = 0$ con $F'(a) > 0$ y $G'(a) > 0$. La aplicación $H = G \circ F^{-1}$ es un automorfismo del disco unidad que deja fijo el origen, y por tanto, el Lema de Schwarz nos garantiza que es un giro, esto es, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$H(z) = [G \circ F^{-1}](z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

y $\alpha = 0$, con lo cual $H(z) = e^{i\theta}z$. Entonces,

$$e^{i\theta} = [G \circ F^{-1}]'(0) = G'(F^{-1}(0))(F^{-1})'(0) = \frac{G'(a)}{F'(a)} \in \mathbb{R}^+,$$

luego $e^{i\theta} = 1$, (ya que como ambos son isomorfismos conformes, los dos maximizan la derivada en a y por tanto, $|F'(a)| = |G'(a)|$ y además como los dos son reales positivos, $F'(a) = G'(a)$), y por tanto, $H(z) = [G \circ F^{-1}](z) = z$, para todo $z \in \mathbb{D}$, o lo que es lo mismo, $F = G$, de donde obtenemos la unicidad.

Ahora, probaremos la existencia de un isomorfismo conforme en las condiciones del enunciado. Es un trabajo un poco mas laborioso, por ello lo dividiremos en tres pasos:

- En este primer paso el objetivo es probar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e inyectiva, tal que $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$, $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$.

Como $\Omega \neq \mathbb{C}$, existen puntos en $\mathbb{C} \setminus \Omega$. No es restrictivo suponer que $0 \notin \Omega$ (de ser necesario, una translación nos lleva inmediatamente a este caso).

Siendo Ω simplemente conexo, toda función holomorfa en Ω , sin ceros en Ω , admite una raíz cuadrada holomorfa.

Entonces, existe una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g^2(z) = z - b$ para todo $z \in \Omega$.

Esta aplicación g es inyectiva ya que si $g(z_1) = g(z_2)$ implica que $z_1 = z_2$.

Por el teorema de la aplicación abierta $g(\Omega)$ es abierto, luego

$$\exists w_0 \in \mathbb{C}, \exists r > 0 : D(w_0, r) \subset g(\Omega).$$

Sabemos que $0 \notin D(z_0, r)$, porque $0 \notin g(\Omega)$, por tanto $r \leq |w_0|$.

Además $D(-w_0, r) \cap g(\Omega) = \emptyset$. Lo razonaremos por reducción al absurdo:

$\exists w \in D(-w_0, r) \cap g(\Omega) \Rightarrow w = g(z_1) : z_1 \in \Omega \Rightarrow -w \in D(w_0, r) \subset g(\Omega) \Rightarrow$
 $\Rightarrow -w = g(z_2) : z_2 \in \Omega \Rightarrow z_1 - b = g^2(z_1) = w^2 = (-w)^2 = g^2(z_2) = z_2 - b \Rightarrow$
 $\Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow w^2 = 0 \Rightarrow w = 0,$

lo cual es una CONTRADICCIÓN con el hecho de que g no se anula nunca.

Luego, $D(-w_0, r) \cap g(\Omega) = \emptyset$. En consecuencia, $|g(z) + w_0| \geq r, \forall z \in \Omega$.

Así, podemos definir la siguiente función $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$h(z) = \frac{r}{g(z) + w_0}$$

para todo $z \in \Omega$.

Ocurre que la función $h \in \mathcal{H}(\Omega)$, su imagen $h(\Omega)$ está contenida en el disco unidad, y h es inyectiva en Ω , que es dominio, luego $h'(a) \neq 0$.

Ahora, usaremos un automorfismo del disco unidad para modificar el valor de dicha función y de su derivada en el punto a .

Sea la transformacion de Möbius

$$\varphi(z) = u \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \quad (\alpha \in \mathbb{D}, |u| = 1). \quad (3.1)$$

Derivando tenemos que

$$\varphi'(z) = u \frac{1}{1 - |\alpha|^2}. \quad (3.2)$$

Haciendo en (3.1) $\alpha = h(a)$, $u = \frac{|h'(a)|}{h'(a)}$ y notando φ al correspondiente automorfismo, tenemos que la aplicación $f = \varphi \circ h$, es decir, la aplicación dada por

$$f(z) = \frac{|h'(a)|}{h'(a)} \frac{h(z) - h(a)}{1 - \overline{h(a)}h(z)}$$

para todo $z \in \Omega$, es una función holomorfa de Ω en el disco unidad, inyectiva, que se anula en a y, teniendo en cuenta (3.2), su derivada en a viene dada por

$$f'(a) = \varphi'(h(a))h'(a) = \frac{|h'(a)|}{h'(a)} \frac{1}{1 - |h(a)|^2} h'(a) = \frac{|h'(a)|}{1 - |h(a)|^2}$$

y por tanto $f'(a) > 0$.

- Con el paso anterior probamos que la familia

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f \text{ es inyectiva, } f(\Omega) \subset \mathbb{D}, f(a) = 0, f'(a) > 0\}$$

es no vacía.

El objetivo ahora, es probar que existe una función $F \in \mathcal{F}$ tal que

$$F'(a) \geq f'(a), \text{ para todo } f \in \mathcal{F}.$$

Puesto que toda función $f \in \mathcal{F}$ verifica que $|f(z)| < 1$ para todo $z \in \Omega$, se sigue por el Teorema de Montel, que $\overline{\mathcal{F}}$ es un conjunto compacto en $\mathcal{H}(\Omega)$.

Ahora, el teorema de convergencia de Weierstrass nos asegura que la aplicación $T : \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $T(f) := f'(a)$ es continua. Y como $T(\mathcal{F}) \subset \mathbb{R}^+$, entonces $T(\overline{\mathcal{F}}) \subset \overline{T(\mathcal{F})} \subset \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$.

Aplicando la compacidad de $\overline{\mathcal{F}}$, la continuidad de T , y el hecho de que $T(\overline{\mathcal{F}}) \subset [0, +\infty)$, sabemos que la aplicación tiene que alcanzar un máximo absoluto, es decir, $\exists F \in \overline{\mathcal{F}} : F'(a) \geq f'(a)$ para todo $f \in \overline{\mathcal{F}}$.

Falta por probar que $F \in \mathcal{F}$.

$F'(a) > 0$, pues al ser \mathcal{F} no vacía, existe alguna f en ella para la que

$$F'(a) \geq f'(a) > 0.$$

Por argumentos topológicos, existe una sucesión (f_n) de funciones de \mathcal{F} que converge puntualmente a F y la convergencia es uniforme en compactos de Ω .

Como las funciones f_n toman valores en \mathbb{D} se sigue que para todo $z \in \Omega$ es $F(z) = \lim f_n(z) \in \overline{D}(0, 1)$, es decir, $|F(z)| \leq 1$.

Como F no es constante (pues $F'(a) > 0$), el principio del módulo máximo implica que $|F(z)| < 1$ para todo $z \in \Omega$.

Por último, layectividad de F está garantizada por el Teorema de Hurwitz.

Por supuesto $F(a) = 0$.

En resumen, $F \in \mathcal{F}$.

- Finalmente, sólo nos falta por probar que la aplicación F es sobreyectiva.

Para ello, probaremos que si una función de la familia \mathcal{F} no es sobreyectiva, entonces hay otra función en \mathcal{F} cuya derivada en a es mayor que la derivada en a de dicha función.

Si probamos esto, tendremos que necesariamente $F(\Omega) = \mathbb{D}$ y, por tanto, la demostración habrá concluído.

Lo razonaremos por reducción al absurdo:

Sea $F \in \mathcal{F}$ tal que $F(\Omega) \neq \mathbb{D}$, y sea $w \in \mathbb{D}$ un punto que no está en $f(\Omega)$.

Definimos la aplicación λ , que se obtiene componiendo con F el automorfismo

del disco unidad (haciendo en (3.1) $u = 1$ y $\alpha = w$), de la siguiente forma

$$\lambda(z) = \frac{F(z) - w}{1 - \bar{w}F(z)}$$

para todo $z \in \Omega$.

Sabemos que λ es holomorfa e inyectiva en Ω y con imagen contenida en el disco unidad. Además, λ no se anula en Ω .

Por tanto, $\exists \psi \in \mathcal{H}(\Omega) : \psi^2(z) = \lambda(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Esta función es inyectiva por ser λ (y, por tanto su derivada no se anula), toma valores en el disco unidad y no se anula en ningún punto.

Definimos ahora la función G , que se obtiene componiendo con ψ el automorfismo del disco unidad (haciendo en (3.1) $\alpha = \psi(a)$ y $u = \frac{|\psi'(a)|}{\psi'(a)}$), de la siguiente forma

$$G(z) = \frac{|\psi'(a)|}{\psi'(a)} \frac{\psi(z) - \psi(a)}{1 - \overline{\psi(a)}\psi(z)}$$

para todo $z \in \Omega$.

Esta función G es holomorfa e inyectiva en Ω , con imagen contenida en el disco unidad, $G(a) = 0$ y

$$G'(a) = \frac{|\psi'(a)|}{1 - |\psi(a)|^2} > 0.$$

Luego G es un elemento de \mathcal{F} .

Ahora calculamos $G'(a)$. Como $\psi^2(z) = \lambda(z)$, tenemos que

$$2\psi(z)\psi'(z) = \lambda'(z) = \frac{F'(z)(1 - \bar{w}F(z)) + \bar{w}F'(z)(F(z) - w)}{(1 - \bar{w}F(z))^2}.$$

Ya que $F(a) = 0$, obtenemos que $2\psi(a)\psi'(a) = F'(a)(1 - |\bar{w}|^2)$ y como $\psi^2(a) = \lambda(a) = -w \Rightarrow |\psi^2(a)| = |w|$ resulta que

$$|\psi'(a)| = \frac{F'(a)(1 - |w|^2)}{2\sqrt{|w|}}.$$

Por lo tanto,

$$G'(a) = \frac{\frac{F'(a)(1-|w|^2)}{2\sqrt{|w|}}}{1-|w|} = \frac{F'(a)(1-|w|^2)}{2\sqrt{|w|}(1-|w|)} = \frac{F'(a)(1+|w|)}{2\sqrt{|w|}} > F'(a),$$

lo cual es absurdo, con lo que finalizamos el 3^{er} paso.

Entonces, hemos obtenido una función F holomorfa e inyectiva en Ω , y tal que $F(\Omega) = \mathbb{D}$, $F(a) = 0$ y $F'(a) > 0$. Ahora, si usamos el Teorema de la función inversa, nos da la holomorfía de su inversa F^{-1} y, por tanto, se trata, en efecto, de un isomorfismo conforme de Ω en \mathbb{D} .

□

3.2. Caracterización de dominios simplemente conexos

Por último, para terminar el capítulo, veremos una de las primeras aplicaciones del Teorema de Riemann, la caracterización de los dominios simplemente conexos, que se pueden describir de muchas formas: analítica, topológica, geométrica, algebraica, . . . Pero antes, recordaremos el concepto de caminos homotópicos.

Definición 3.1 Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ dos caminos cerrados (es decir, con $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ y $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$), entonces si existe una aplicación continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \gamma_0(0) = \gamma_1(0) \text{ y } H(s, 1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1) \text{ para todo } s \in [0, 1], \text{ y} \\ H(0, t) &= \gamma_0(t) \text{ y } H(1, t) = \gamma_1(t) \text{ para todo } t \in [0, 1] \end{aligned}$$

diremos que γ_0 y γ_1 son homótopos en Ω . Además, también diremos que H es una homotopía en γ_0 y γ_1 .

Es importante recordar también el concepto de simplemente conexo.

Definición 3.2 Un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que es simplemente conexo si cada camino cerrado $\gamma \subset \Omega$ es Ω -homotópico a un camino constante, es decir, si existe una aplicación continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ y un punto $a \in \Omega$ tal que $H(0, t) = \gamma(t)$ y $H(1, t) = a$ para todo $t \in [0, 1]$ y $H(s, 0) = H(s, 1)$ para todo $s \in [0, 1]$.

Nota 3.1 Los homeomorfismos conservan los conjuntos simplemente conexos, en particular, cualquier abierto de \mathbb{C} que sea homeomorfo a un disco es simplemente conexo.

Finalmente, probaremos la caracterización de dominios simplemente conexos.

Teorema 3.2 (Caracterización de dominios simplemente conexos) Sea Ω un dominio de \mathbb{C} . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) Ω es simplemente conexo.
- b) $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es conexo.
- c) Cada ciclo regular a trozos en Ω es Ω -homólogo a 0.
- d) Para cada ciclo regular a trozos Γ en Ω , cada $z \in \Omega \setminus \text{Imagen}(\Gamma)$ y cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se cumple:

$$f(z) \text{Ind}(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

- e) Para cada ciclo regular a trozos Γ en Ω , y cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se cumple

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

- f) A toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ le corresponde una $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$.
- g) Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$, existe una $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f = e^g$.
- h) Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y no tiene ceros en Ω , entonces existe $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f = \varphi^2$, es

decir, toda función holomorfa en Ω sin ceros en Ω admite una raíz cuadrada holomorfa en Ω .

i) Ω es homeomorfo al disco unidad \mathbb{D} .

Demostración.

(a) \Rightarrow (b)

Supongamos que Ω es simplemente conexo y vamos a probar que $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es conexo. Siendo Ω abierto, $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es cerrado. Lo haremos por reducción al absurdo:

Si $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ no fuese conexo existirían cerrados A y B de \mathbb{C}^∞ no vacíos tales que $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$.

Puesto que $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\infty \notin \Omega$ y, por tanto, $\infty \in \mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$. Supongamos que $\infty \in B$. A es cerrado en \mathbb{C}^∞ y \mathbb{C}^∞ es compacto; luego A es compacto en \mathbb{C}^∞ , e $\infty \notin A$. Por tanto, A es compacto en \mathbb{C} pues \mathbb{C}^∞ induce en \mathbb{C} su propia topología.

Sea $\Omega_1 = \Omega \cup A = \mathbb{C}^\infty \setminus B$, pues es un abierto de \mathbb{C} ya que $\mathbb{C}^\infty \setminus B$ es abierto de \mathbb{C}^∞ e $\infty \notin \mathbb{C}^\infty \setminus B$.

Ω_1 es abierto y A compacto, $A \subset \Omega_1$. Por otra parte, sabemos que existen segmentos $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ en $\Omega_1 \setminus A$ formando un número finito de poligonales cerradas $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ tales que

$$\forall f \in \mathcal{H}(\Omega_1), f(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad \forall z \in A,$$

o bien,

$$\forall f \in \mathcal{H}(\Omega_1), f(z) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_j} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad \forall z \in A.$$

Tomando $f(w) = 1$, $\forall w \in \Omega_1$ se deduce que

$$1 = \sum_{j=1}^m \text{Ind}(\sigma_j, z), \quad \forall z \in A.$$

Entonces, si $z \in A$ ($A \neq \emptyset$), $\exists j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\text{Ind}(\sigma_j, z) \neq 0$. Pero

$\sigma_j \subset \Omega_1 \setminus A = \Omega$ y, puesto que $z \in A$, se tiene que $z \notin \Omega$.

Como $\text{Ind}(\sigma_j, z) \neq 0$ se verifica que σ_j no es homóloga a 0 en Ω y, por tanto, no es homótopa a 0 en Ω , con lo cual Ω no sería simplemente conexo, por lo que hemos

llegado a una CONTRADICCIÓN. Luego, $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ debe ser conexo.

(b) \Rightarrow (c)

Supongamos que $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es conexo y sea Γ un ciclo en Ω . Como $\{\Gamma\} \subset \Omega$ resulta que $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega \subset \mathbb{C}^\infty \setminus \{\Gamma\}$. Ya que $\infty \notin \Omega$, será $\infty \in \mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$, y como $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es conexo, se tendrá que $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ está contenido en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}^\infty \setminus \{\Gamma\}$. En particular, $Ind(\Gamma, z) = 0$ para cualquier $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, lo que se traduce en que Γ es homólogo a cero respecto de Ω .

(c) \Rightarrow (d)

Es el teorema 1.11 (Fórmula integral de Cauchy).

(d) \Rightarrow (e)

Es la prueba del teorema 1.12 (Teorema de Cauchy).

(e) \Rightarrow (f)

Supongamos que se verifica (e), fijemos $z_0 \in \Omega$, y pongamos

$$F(z) = \int_{\Gamma(z)} f(\zeta) d\zeta, \quad (z \in \Omega), \quad (3.3)$$

donde $\Gamma(z)$ es un camino cualquiera en Ω de z_0 a z . Esto define una función F en Ω . Porque si $\Gamma_1(z)$ es otro camino de z_0 a z (en Ω), entonces Γ seguido del opuesto de Γ_1 es un camino cerrado en Ω , la integral de f sobre este camino cerrado es 0, y, por tanto, (3.3) no es afectado si $\Gamma(z)$ se cambia por $\Gamma_1(z)$.

Comprobemos ahora que $F' = f$. Fijemos $a \in \Omega$. Existe un $r > 0$ tal que $D(a, r) \subset \Omega$. Para $z \in D(a, r)$ podemos calcular $F(z)$ integrando f a lo largo de un camino $\Gamma(a)$, seguido por el intervalo $[a, z]$. En consecuencia, para $z \in D^*(a, r)$,

$$\frac{F(z) - F(a)}{z - a} = \frac{1}{z - a} \int_{[a, z]} f(\zeta) d\zeta,$$

y la continuidad de f en a implica que $f'(a) = f(a)$.

(f) \Rightarrow (g)

Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y f no tiene ningún cero en Ω , entonces $\frac{f'}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$, y (f) implica que existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ de modo que $g' = \frac{f'}{f}$.

Podemos añadir una constante a g , de modo que $e^{\{g(z_0)\}} = f(z_0)$ para algún $z_0 \in \Omega$.

Nuestra elección de g muestra que la derivada de fe^{-g} es constante (porque Ω es convexa), y se tiene que $f = e^g$.

(g) \Rightarrow (h)

Por hipótesis, existe $\Psi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^\Psi = f$. Definiendo entonces $g(z) = e^{\frac{1}{2}\Psi(z)}$ se tiene que $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $(g(z))^2 = e^\Psi = f$, con lo cual es la función buscada.

(h) \Rightarrow (i)

Suponemos que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $f \neq 0, \forall z \in \Omega$, entonces existe $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f = \varphi^2$, y se trata de probar que Ω es homeomorfo al disco unidad \mathbb{D} . Distinguiremos dos casos:

1) $\Omega = \mathbb{C}$

La aplicación $z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{z}{1+|z|} \in \mathbb{D}$ es un homeomorfismo de \mathbb{C} en \mathbb{D} , como se comprueba fácilmente. La aplicación inversa es $w \in \mathbb{D} \mapsto \frac{w}{1-|w|} \in \mathbb{C}$.

2) $\Omega \neq \mathbb{C}$

La demostración de este caso se recoge en el Teorema de la aplicación de Riemann, que enunciamos y probamos anteriormente.

(i) \Rightarrow (a)

Por hipótesis, existe un homeomorfismo $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$. Sea Γ una curva cerrada en Ω y probemos que es homótopa a cero en Ω , con lo cual Ω será simplemente conexo. Supongamos que Γ está parametrizada en $I = [0, 1]$. Para cada $(t, u) \in I \times I$ definimos

$$H(t, u) = \Psi^{-1}(u \Psi(\Gamma(t))) \in \mathbb{D}.$$

H es trivialmente continua. Además

- $H(0, u) = H(1, u), \forall u \in I$, pues
 $H(0, u) = \Psi^{-1}(u \Psi(\Gamma(0))) = \Psi^{-1}(u \Psi(\Gamma(1))) = H(1, u), \forall u \in I$.
- $H(t, 0) = \Psi^{-1}(0), \forall t \in I$ y $H(t, 1) = \Gamma(t), \forall t \in I$.

Luego H es una homotopía entre la curva Γ y el punto $\Psi^{-1}(0)$.

□

Bibliografía

- [1] Churchill, R.V. y Brown, J.W.: Variable compleja y aplicaciones, quinta edición, McGraw-Hill, 1992.
- [2] Derrick, W.R.: Variable compleja con aplicaciones, segunda edición, Grupo editorial Iberoamericana, 1984.
- [3] Munkres, J.R.: Topology, segunda edición, Prentice Hall, 2000.
- [4] Pérez González, F.J.: Curso de análisis complejo, Universidad de Granada, Junio 2004, [Internet]. Disponible en:
https://www.ugr.es/~fjpperez/textos/funciones_variable_compleja.pdf
- [5] Piñeiro, G.E.: Riemann, Colección Genios de las matemáticas, RBA, 2014.
- [6] Rudin, W.: Análisis real y complejo, segunda edición, Madrid: Alhambra 1985.
- [7] Spiegel, M.R.: Teoría y problemas de Variable Compleja, McGraw-Hill , 1971.
- [8] Vera, G.: Lecciones de análisis complejo, Septiembre 2011. Disponible en:
[https://webs.um.es/gvb/AC/LeccAC\(2013\).pdf](https://webs.um.es/gvb/AC/LeccAC(2013).pdf)
- [9] Walsh, J.L.: History of the Riemann mapping theorem, the American Mathematical Monthly, Vol 80, Marzo 1973.