



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Aproximación numérica de integrales de convolución mediante el método de cuadratura de convolución

Miguel Picos Maiztegui

(2019-2020)

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Aproximación numérica de integrales de convolución mediante el método de cuadratura de convolución

Miguel Picos Maiztegui

(2019-2020)

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Matemática Aplicada
Título: Aproximación numérica de integrales de convolución mediante el método de cuadratura de convolución
Tutor: Jerónimo Rodríguez
Cotutor: Alfredo Ríos
Breve descripción del contenido:
<p>En múltiples aplicaciones se necesita calcular integrales de convolución de dos funciones</p> $f * g(x) := \int_0^x f(t-x)g(t)dt.$ <p>El objetivo de este trabajo es la comprensión y programación del método de cuadratura de convolución de cara a aproximar numéricamente este tipo de integrales. La aproximación de la convolución entre dos funciones f y g sobre una malla se obtiene mediante la convolución discreta con los valores de g sobre la misma malla. Los pesos de cuadratura se determinan mediante la transformada de Laplace de la función f (función llamada con frecuencia el núcleo de convolución), un integrador de Runge-Kutta y la fórmula integral de Cauchy. Una vez se haya comprendido y programado el método para ejemplos sencillos, se tratará de aplicar a la resolución de EDO. Asimismo se estudiará la convergencia de tal aproximación.</p>
Breve Planificación
<p>1- Recordatorio de conceptos básicos que se usarán. 2- Comprensión del método de cuadratura de convolución. 3- Programación del mismo en Matlab. 4- Aplicación del método al cálculo de integrales de convolución y resolución de EDO sencillas. 5- Redacción de la memoria.</p>

Índice general

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Integradores de tipo Runge-Kutta	1
1.1. Problema de Cauchy	1
1.2. Integradores de tipo Runge-Kutta	2
1.3. Propiedades	3
1.3.1. Caracter Bien Planteado	3
1.3.2. Convergencia	3
1.3.3. A-estabilidad	4
1.3.4. Rígidamente Preciso	5
2. Desarrollo del Método	7
2.1. Reescritura de la Integral de Convolución	7
2.2. Introducción del método Runge-Kutta	9
2.3. Transformada Z de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$	10
2.4. Descomposición Lineal	14
2.5. Teorema de Cauchy	17
2.6. Cálculo de la serie de potencias de $\hat{f}\left(\frac{\Delta(z)}{h}\right)$	21
2.7. No rígidamente preciso	23
3. Resultados Numéricos	27
3.1. Consideraciones Previas	27
3.2. Test Académico	30
3.2.1. Función Escalón	30
3.2.2. Polinomios	32
3.3. EDOs Lineales	37

3.3.1. EDOs de Primer Orden	37
3.3.2. EDOs de orden n	40
3.4. Ecuaciones Integrales	47
3.4.1. Ejemplo	49
Códigos	51
Bibliografía	57

Resumen

El objetivo de este trabajo es la comprensión y programación del método de cuadratura de convolución de cara a aproximar numéricamente este tipo de integrales. La aproximación de la convolución entre dos funciones f y g sobre una malla se obtiene mediante la convolución discreta con los valores de g sobre la misma malla. Los pesos de cuadratura se determinan mediante la transformada de Laplace de la función f (función llamada con frecuencia el núcleo de convolución), un integrador de Runge-Kutta y la fórmula integral de Cauchy.

Una vez se haya comprendido y programado el método para ejemplos sencillos, se tratará de aplicar a la resolución de EDO. Asimismo se estudiará la convergencia del tal aproximación.

Abstract

The objective of this thesis is the understanding and programming of the convolution quadrature method in order to approximate numerically this type of integrals.

The approach to the convolution between two functions f and g on a mesh is obtained by discrete convolution with the values of g on the same mesh. Quadrature Weights are determined by the Laplace transform of the function f (function called with frequency the convolution nucleus), a Runge-Kutta integrator and Cauchy's integral formula.

After understanding the method for simple examples, it will be applied to the resolution of EDO. The convergence of such approach will also be studied.

Introducción

El objetivo de este trabajo de fin de grado es la aproximación numérica, mediante un método de cuadratura, de una integral de convolución. Es decir, dadas dos funciones f y g con la suficiente regularidad, calcular la función:

$$y(t) = f * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

Generalmente conoceremos la función g pero no la función f . En su lugar, conoceremos la Transformada de Laplace, \hat{f} , de esta. Podremos obtener f en función de su transformada utilizando la Transformada Inversa de Laplace.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \hat{f}(s) ds$$

Introduciendo esta expresión en la integral de convolución de nuestro problema llegamos a:

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{s(t-\tau)} \hat{f}(s) ds d\tau$$

Puesto que las funciones consideradas tendrán la regularidad suficiente podremos intercambiar las integrales:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) e^{st} \int_0^t e^{-s\tau} g(\tau) d\tau ds$$

Podremos reescribir la expresión para obtener:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) x(t) ds$$

donde $x(t) = e^{st} \int_0^t e^{-s\tau} g(\tau) d\tau$ es solución del problema de Cauchy:

$$x'(t) = sx(t) + g(t)$$

$$x(0) = 0$$

Para la resolución numérica del problema será necesaria su discretización y la aproximación de la solución de la EDO anterior. Históricamente, se aproximó esta solución con métodos lineales multipaso. Se puede ver el desarrollo de este método en [1],[2] y [3]. Aunque no siempre es necesario, existen problemas en los que necesitaremos que el integrador usado para aproximar la EDO sea A-estable, como por ejemplo en propagación de ondas. En estos casos utilizar métodos lineales multipaso tiene el inconveniente de que no podremos encontrar métodos de orden mayor que 2 y A-estables debido a la segunda barrera de Dahlquist. Por este motivo se introduce el uso de los integradores de tipo Runge-Kutta. Una característica importante de estos es que podemos mantener la propiedad de A-estabilidad exigiendo órdenes altos.

Durante este trabajo únicamente trabajaremos el caso en el que utilizamos integradores de tipo Runge-Kutta. Seguiremos un esquema similar al del artículo [4] que será la principal referencia para el desarrollo del método de cuadratura de convolución.

Discretizando la ecuación anterior llegamos a la expresión:

$$y_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s)x_n ds \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

En este momento realizaremos una transformada Z de esta expresión y utilizando el Teorema de Cauchy y las propiedades que exigiremos a los integradores que utilizaremos podremos llegar a la expresión:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1}z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b^T A^{-1} \hat{f}\left(\frac{\Delta(z)}{h}\right) g_n z^n$$

siendo $\hat{f} : A \in \mathbb{M}_{m \times m}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{M}_{m \times m}(\mathbb{C})$ una función entre matrices definida a partir de nuestra función dato $\hat{f}(s)$.

Podremos descomponer la función \hat{f} en serie de potencias y los coeficientes de esta serie podrán ser aproximados mediante el método de integración de los trapecios con lo que podemos obtener una formula general para el método de cuadratura de convolución. Después utilizaremos la formula de Cauchy para sumas infinitas e, igualando coeficientes de las series de potencias resultantes, llegaremos a la expresión final del método:

$$y_{n+1} = b^T A^{-1} \sum_{k=0}^n W_{n-k}^h(\hat{f}) g_k$$

Debido a las buenas propiedades de convergencia que obtendremos con el método de los trapecios, el método de cuadratura de convolución deberá tener un orden igual al orden del integrador de tipo Runge-Kutta aplicado. En este trabajo no entraremos en cálculos teóricos de convergencia del método, únicamente realizaremos algunos experimentos numéricos donde podremos intuir su comportamiento.

El trabajo está dividido en tres capítulos. Durante el primero se introducirán los integradores de tipo Runge-Kutta y sus propiedades, centrándonos principalmente en aquellas características que serán importantes para el desarrollo posterior del método de cuadratura de convolución. La principal referencia que seguiremos durante este capítulo es [5]. En el segundo capítulo desarrollaremos el método de cuadratura de convolución presentado en esta introducción. Introduciendo las condiciones necesarias sobre el integrador Runge-Kutta y las funciones $\hat{f}(s)$ y $g(t)$ para su buena definición. Finalmente, en el tercer capítulo, se resolverán numéricamente varios problemas utilizando el método descrito en el trabajo y se realizará un breve análisis de los resultados.

Capítulo 1

Integradores de tipo Runge-Kutta

Durante este capítulo introduciremos los métodos Runge-Kutta que, como vimos en la introducción, serán una parte principal del desarrollo del método de cuadratura de convolución. Nos centraremos en las propiedades que pueden tener estos integradores, especialmente en aquellas que serán más importantes para el método. Para el estudio teórico se utilizarán como principales referencias los libros [5] y [6], que exponen de forma extensa todos los componentes de este capítulo.

1.1. Problema de Cauchy

Los métodos Runge-Kutta son una familia de integradores que aproximan numéricamente la solución de un problema de Cauchy. Llamamos problema de Cauchy al problema cuya incógnita es la solución de una ecuación diferencial que cumpla una cierta condición inicial. En este trabajo solo afrontaremos ecuaciones diferenciales de primer orden en una dimensión espacial.

Definición 1.1 (Problema de Cauchy). *Sean $f(t, x)$ una función real de dos variables reales, $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

donde $x(t)$ es una función derivable definida en un intervalo de \mathbb{R} .

Debemos poder garantizar la existencia y unicidad de este problema, para ello la función $f(t, x)$ deberá cumplir unas ciertas propiedades. El siguiente resultado nos permitirá afirmar que los problemas que consideremos tengan solución única.

Teorema 1.1. Sea $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de dos variables reales tal que $f \in \mathcal{C}^1([a, b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Entonces, el problema de Cauchy definido en 1.1 tiene solución única definida en el intervalo $[a, b]$

Observación 1.1. El desarrollo anterior puede ser generalizado para dimensiones mayores, tal que $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, pero para este trabajo no será necesario.

1.2. Integradores de tipo Runge-Kutta

Los métodos numéricos para la resolución de problemas de Cauchy son útiles para calcular aproximaciones de soluciones que no pueden ser obtenidas analíticamente.

En el caso de los métodos Runge-Kutta, se discretiza el dominio del problema mediante una malla uniforme con un paso de discretización h . Esta malla estará formada por $N + 1$ nodos de discretización de modo que estos puntos dividan el intervalo $[a, b]$ en N intervalos de longitud h . Estos métodos se caracterizan por la obtención de un mayor orden de aproximación gracias a la evaluación de la función f en varios puntos intermedios entre los nodos.

Dados un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y $\{t_n\}_{0 \leq n \leq N}$ los nodos equidistantes de la malla sobre el dominio de la función f del problema de Cauchy (1.1). Se define un método Runge-Kutta de m etapas como:

$$\begin{aligned} x_{n,i} &= x_n + h \sum_{j=1}^m a_{ij} f(t_{n,j}, x_{n,j}), \quad i = 1, \dots, m \\ x_{n+1} &= x_n + h \sum_{i=1}^m b_i f(t_{n,i}, x_{n,i}) \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $t_{n,j} = t_n + hc_j$ $j = 1, \dots, m$ y los coeficientes a_{ij} , b_i y c_j están dados. Los coeficientes son los que definen un método particular. Estos suelen expresarse en una tabla de Butcher:

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

donde $c, b \in \mathbb{R}^m$ y $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$.

Si definimos $X_n := (x_{n,1}, \dots, x_{n,m})^T$, $f_n := (f(t_{n,1}, x_{n,1}), \dots, f(t_{n,m}, x_{n,m}))$ y $\vec{1} := (1, \dots, 1)^T$, podemos reformular (1.1) del siguiente modo:

$$\begin{aligned} X_n &= x_n \vec{1} + h A f_n \\ x_{n+1} &= x_n + h b^T f_n \end{aligned} \tag{1.2}$$

Observación 1.2. Esta última expresión nos será útil durante el trabajo ya que la función de la ecuación diferencial que vamos a considerar es $f(t, x) = sx + g(t)$ de modo que $f_n = sX_n + g_n$, siendo $g(t_n + c_i h)$.

1.3. Propiedades

Estudiaremos ahora las propiedades que pueden tener los integradores descritos en la sección anterior. Comenzaremos por propiedades básicas como que el carácter bien planteado del esquema numérico o sea convergente y tratando también otras propiedades más particulares que serán especialmente importantes para el método de cuadratura de convolución como puede ser la A-estabilidad.

1.3.1. Caracter Bien Planteado

Para comprobar que el método está bien definido debemos comprobar que el sistema de ecuaciones que tenemos que resolver en (1.1) para obtener el vector X_n tiene solución. Para un h suficientemente pequeño podremos asegurar que el sistema tenga solución.

Proposición 1.1. *Si $h < \frac{1}{LM}$, con $M = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$ y L constante de Lipchitz de f con respecto de x , entonces el sistema de (1.1) que define X_n tiene solución única.*

1.3.2. Convergencia

Para que un método sea útil, tiene que ser convergente, es decir, las aproximaciones de la solución del Problema de Cauchy con el que estemos trabajando deben acercarse más a la solución exacta a medida que disminuye el parámetro de discretización del problema.

Los métodos Runge-Kutta son métodos de un paso, por lo que adoptan la forma:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\Phi(x_{n+1}, x_n, t_n; h) \\ x_0 \text{ dado} \end{cases} \quad (1.3)$$

Podremos asegurar la convergencia siempre que los métodos sean estables y consistentes.

Estabilidad

El polinomio de estabilidad de los métodos Runge-Kutta es $\rho(r) = r - 1$ por ser un método de un paso de la forma mostrada en (1.3). En consecuencia, como su única raíz es 1 es un polinomio de Dahlquist (todas sus raíces son de módulo menor o igual que 1 y las de módulo 1 son simples). Por esta razón, todos los métodos Runge-Kutta son estables. Para entrar en profundidad en este resultado se puede consultar [5].

Consistencia

Como podemos observar en la expresión (1.1), para el cálculo de la aproximación en el instante t_{n+1} realizamos una combinación lineal de los valores $f(t_{n,i}, x_{n,i})$ de modo que

querremos que esta combinación sea una media ponderada. Así, a medida que el parámetro de discretización tienda a 0, la combinación lineal tenderá al valor de $f(t, x)$. Podemos ver, intuitivamente, la condición para que un método Runge-Kutta sea consistente.

Proposición 1.2. *Un método Runge-Kutta es consistente si y solo si:*

$$\sum_{i=1}^m b_i = 1$$

Uno de los motivos principales por los que utilizamos integradores Runge-Kutta es porque podremos alcanzar órdenes de convergencia mayores que 2 en casos donde necesitamos métodos A-estables. Por esta razón necesitaremos unos criterios que nos permitan dictaminar cuando un método tiene un cierto orden de convergencia. Este estudio es bastante complejo, se puede ver con detalle en [5].

Generalmente se pide la condición de fila para los métodos Runge-Kutta, ya que esta propiedad relaja las condiciones orden.

Definición 1.2 (Condición de fila). *Definimos la condición de fila como:*

$$\sum_j a_{ij} = c_i \text{ para todo } i \in \{1, \dots, m\}$$

Esto se puede entender como que las etapas intermedias del método sean una aproximación de orden 1 de la solución de la EDO a aproximar.

1.3.3. A-estabilidad

Podemos entender la A-estabilidad de un método como la capacidad de este de aproximar una EDO de la forma:

$$x'(t) = \lambda x(t)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\lambda) \leq 0$. La solución exacta de la EDO anterior es $x(t) = e^{\lambda t}$. Para valores de λ con parte real negativa la solución decae a 0 rápidamente. Consideraremos que un cierto valor λ pertenece a la región de estabilidad de un método si la aproximación de la solución de la EDO se mantiene acotada a medida que aumentamos las interacciones.

Definición 1.3 (A-estabilidad). *Diremos que un método Runge-Kutta es A-estable si la región de estabilidad del método contiene al conjunto $\{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } Re(z) < 0\}$.*

Esta característica va a ser muy importante para el método de cuadratura de convolución, pues la ecuación diferencial que aproximaremos es una EDO de esta forma. Por esta razón se introducen los métodos Runge-Kutta, ya que, con métodos lineales multipaso

solo podemos obtener orden de aproximación 2 manteniendo la A-estabilidad, mientras que con los métodos Runge-Kutta podemos mantener la A-estabilidad con métodos de orden arbitrariamente grande.

Para conocer la región de estabilidad de un método se calcula su función de estabilidad, que en el caso de los integradores de tipo Runge-Kutta tiene la forma:

$$R(z) = 1 + zb^t(I - zA)^{-1}\vec{1}$$

donde $\vec{1} := (1, \dots, 1)^T$.

Esta función corresponde al crecimiento de la aproximación de una etapa a la siguiente, ya que:

$$y_{n+1} = R(z)y_n$$

Con el uso de esta función podemos obtener el siguiente resultado, que nos permitirá clasificar los métodos según sean A-estable o no.

Proposición 1.3. *Un método Runge-Kutta es A-estable si:*

1. $|R(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $Re(z) \leq 0$.
2. $I - zA$ es no singular para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $Re(z) \leq 0$.

1.3.4. Rígidamente Preciso

Introducimos ahora esta propiedad, ya que, aunque no sea estrictamente necesaria, será una de las condiciones que busquemos para los métodos Runge-Kutta que utilizaremos en el método de cuadratura de convolución.

Si exigimos la condición de fila, podemos considerar el vector X_n como las aproximaciones de la solución de la EDO en los tiempos $t_n + c_i h$. Con esta consideración podemos entender la propiedad de un método de ser rígidamente preciso como que la última componente del vector X_n sea la aproximación de la solución en el siguiente nodo de discretización. Es decir, que la última coordenada de X_n es igual que x_{n+1} . Esto conlleva que la última fila de la matriz A tiene que ser igual al vector b .

Definición 1.4 (Rígidamente Preciso). *Un método Runge-Kutta es rígidamente preciso si el vector b coincide con la última fila de la matriz A o, lo que es lo mismo, que se cumpla la condición:*

$$b^T A^{-1} = (0, \dots, 0, 1)$$

Capítulo 2

Desarrollo del Método de Cuadratura de Convolución

En este capítulo explicaremos la justificación teórica del método de cuadratura de convolución. Afrontamos la aproximación de una integral de convolución, es decir, queremos aproximar la función $y(t)$:

$$y(t) = [f * g](t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau \quad (2.1)$$

donde la función $g(t)$ y $\hat{f}(s)$, Transformada de Laplace de $f(t)$, son conocidas.

Para resolver este problema, utilizaremos las relaciones entre la Transformada de Laplace y su inversa. Después, identificaremos una expresión dentro de la integral con la solución de una ecuación diferencial conocida. Posteriormente, realizaremos la discretización del problema aproximando la solución de la ecuación diferencial anterior con un método Runge-Kutta. Finalmente, utilizaremos la transformada Z para, una vez calculadas las integrales utilizando el Teorema de Cauchy, podamos igualar términos de las series de potencias resultantes resolviendo así el problema.

El desarrollo de este capítulo sigue el esquema del artículo de referencia [4].

2.1. Reescritura de la Integral de Convolución

En esta sección, buscaremos reescribir la expresión de la integral de convolución (2.1), para llegar a un problema en función de datos conocidos.

Para ello comenzaremos sustituyendo la función $f(t)$, que puede ser conocida o no, por su expresión en función de su Transformada de Laplace. Podemos obtener el valor de la función $f(t)$ mediante las relaciones entre la transformada de Laplace y su transformada

inversa, en este trabajo no se profundizará en el uso de la Transformada de Laplace, puede obtenerse mas información en la referencia [7].

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \hat{f}(s) ds \quad (2.2)$$

siendo $c \in \mathbb{R}$ tal que todos los polos de la función $\hat{f}(s)$ tienen parte real menor que c .

Por tanto podemos sustituir en la integral inicial, la función $f(t - \tau)$ por su correspondiente expresión en función de $\hat{f}(s)$ dada por la fórmula de la Transformada Inversa de Laplace (2.2).

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{s(t-\tau)} \hat{f}(s) ds d\tau$$

Necesitaremos realizar suposiciones sobre las funciones $\hat{f}(s)$ y $g(t)$ para utilizar el método de cuadratura de convolución. Para este trabajo, asumiremos las siguientes propiedades:

1. La función $g(t)$ es continua.
2. La función $\hat{f}(s)$ es analítica.
3. La función $\hat{f}(s)$ es la Transformada de Laplace de una función $f(t)$.

Con estas suposiciones tenemos que las funciones $\hat{f}(s)$ y $g(t)$ son continuas por lo que la función $g(\tau)e^{s(t-\tau)}\hat{f}(s)$ es continua y por tanto integrable en compactos. Por otra parte, por ser $\hat{f}(s)$ una Transformada de Laplace tendremos que la función $g(\tau)e^{s(t-\tau)}\hat{f}(s)$ será integrable en cada sección fijando un valor de τ . En conclusión, podremos aplicar el teorema de Fubini, intercambiando el orden de las integrales:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) e^{st} \int_0^t e^{-s\tau} g(\tau) d\tau ds \quad (2.3)$$

Consideremos ahora el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = sx(t) + g(t) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Podemos comprobar que $x(t) = e^{st} \int_0^t e^{-s\tau} g(\tau) d\tau$ es la solución de este problema. En efecto,

$$\begin{cases} x'(t) = se^{st} \int_0^t e^{-s\tau} g(\tau) d\tau + e^{st} e^{-st} g(t) = sx(t) + g(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

En conclusión $x(t)$ es la única solución del problema de Cauchy (2.4). Por lo tanto podemos introducir la solución en la expresión (2.3), reescribiendo la expresión de la integral:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) x(t) ds \quad (2.5)$$

Para el cálculo de esta integral, realizaremos la aproximación de la solución $x(t)$ mediante un método numérico Runge-Kutta. Para, de este modo, poder evaluar la función $y(t)$.

2.2. Introducción del método Runge-Kutta

Como la obtención analítica de soluciones no es siempre posible, para continuar con el método realizaremos una discretización del problema (2.5). En este caso utilizaremos un mallado uniforme del dominio.

La función $y(t)$, que queremos aproximar, esta definida en $[0, \infty)$. Sea $h \in \mathbb{R}^+$ el parámetro de discretización elegido para el método. Realizamos un mallado uniforme del dominio de la función $y(t)$, de modo que $\{t \in [0, \infty) \text{ tal que } t = t_i = ih \text{ con } i \in \mathbb{N}\}$ es el conjunto de nodos de discretización de la malla. De este modo tenemos que, evaluando en los nodos la expresión (2.5), obtenemos:

$$y(t_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s)x(t_n)ds \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \quad (2.6)$$

Sean $y_n \approx y(t_n)$ y $x_n \approx x(t_n)$ con $n \in \mathbb{N}$ las aproximaciones de las funciones $y(t)$ y $x(t)$ en los nodos de discretización. Los valores y_n son los que buscamos aproximar, mientras que los valores x_n son aproximaciones obtenidas utilizando un método Runge-Kutta para resolver el problema de Cauchy (2.4). Con estas aproximaciones llegamos a:

$$y_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s)x_n ds \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \quad (2.7)$$

Utilizaremos un método Runge-Kutta de m etapas, definido por su tabla de Butcher:

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

donde $c, b \in \mathbb{R}^m$ y $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^m \in \mathbb{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$. Necesitaremos que este método cumpla unas ciertas propiedades para que el método de cuadratura de convolución sea convergente:

1. El método Runge-Kutta es A-estable.
2. La matriz de coeficientes de método, A , es no singular.
3. El método cumple que $b^T A^{-1} \vec{1} = 1$.

Observación 2.1. Una condición suficiente para obtener la propiedad de $b^T A^{-1} \vec{1} = 1$, es que el método Runge-Kutta sea rígidamente preciso. De este modo tendremos que $b^T A^{-1} =$

$(0, \dots, 0, 1)$ y por tanto se cumplirá que $b^T A^{-1} \vec{1} = 1$. Debido a esto, consideraremos métodos Runge-Kutta rígidamente precisos en la práctica ya que esta es una condición que ya ha sido estudiada en muchos métodos Runge-Kutta.

Observación 2.2. La propiedad de que $b^T A^{-1} \vec{1} = 1$ no es estrictamente necesaria, aunque conseguiremos mejores propiedades de convergencia si la pedimos. En la sección 2.7 trataremos el caso en el que los métodos considerados no cumplan esta propiedad.

Tomamos ahora las sucesiones $\{y_n\}_{n \geq 1}$ y $\{x_n\}_{n \geq 1}$ y realizaremos sus respectivas transformadas Z, $\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} z^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} z^n$. No utilizamos los valores $\{y_n\}_{n \leq 0}$ ni $\{x_n\}_{n \leq 0}$ pues consideramos que estos valores son iguales a 0 y por tanto los términos de la serie formal asociados serán nulos. De este modo, podemos realizar la transformada Z de la expresión (2.7), que por la continuidad e integrabilidad de los términos de la integral podemos introducir el sumatorio dentro de ella.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) x_{n+1} ds \right) z^n \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} z^n \right) ds \end{aligned} \quad (2.8)$$

Buscaremos ahora encontrar una expresión para $\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} z^n$ en función de términos conocidos para poder introducirlo en la integral (2.8).

2.3. Transformada Z de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Aprovecharemos el hecho de que conocemos la EDO a aproximar para obtener una expresión en términos conocidos de $\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} z^n$. El problema de Cauchy que vamos a aproximar es:

$$\begin{cases} x'(t) = sx(t) + g(t) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Para ello, partiremos de la expresión (1.2). Tomando como caso particular la ecuación (2.9). Por tanto, calcularemos el término f_n para la función $f(t, x) = sx + g(t)$, lo que resulta en $f_n = sX_n + g_n$ como vimos en la observación (1.2). Con lo que obtenemos:

$$X_n = x_n \vec{1} + hA(sX_n + g_n) \quad (2.10)$$

$$x_{n+1} = x_n + hb^T(sX_n + g_n) \quad (2.11)$$

A partir de la expresión (2.10), haciendo la diferencia de dos pasos consecutivos de X_n e introduciendo (2.11) a continuación, llegamos a:

$$\begin{aligned}
X_{n+1} - X_n &= (x_{n+1} - x_n) \vec{1} + hA(sX_{n+1} + g_{n+1}) - hA(sX_n + g_n) \\
&= hb^T(sX_n + g_n) \vec{1} + hA(sX_{n+1} + g_{n+1}) - hA(sX_n + g_n) \\
\frac{1}{h}(X_{n+1} - X_n) &= A(sX_{n+1} + g_{n+1}) - (A - \vec{1}b^T)(sX_n + g_n) \quad (2.12)
\end{aligned}$$

En este momento realizaremos una transformada Z. Consideraremos que $x_n = 0, X_n = 0$ y $g_n = 0$ para todo $n \leq 0$. Esto se debe a que, en la expresión de la transformada Z que estamos simplificando, hemos supuesto que $x_n = 0$ para todo $n \leq 0$. Utilizando las propiedades de las transformadas Z, podemos simplificar la expresión obtenida:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h}(X_{n+1} - X_n)z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(A(sX_{n+1} + g_{n+1}) - (A - \vec{1}b^T)(sX_n + g_n) \right) z^n \\
\frac{(z^{-1} - 1)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n &= (Az^{-1} - A + \vec{1}b^T) \left(s \sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n \right) \\
\frac{(A + \frac{z}{1-z} \vec{1}b^T)^{-1}}{h} \sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n &= \left(s \sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n \right) \quad (2.13) \\
\frac{\Delta(z)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n &= \left(s \sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n \right)
\end{aligned}$$

donde $\Delta(z) = (A + \frac{z}{1-z} \vec{1}b^T)^{-1}$.

Observación 2.3. Debemos tener en cuenta que $\{X_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de vectores de dimensión m . Por tanto la transformada Z la realizaremos coordenada por coordenada.

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n := \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_{n,1} z^n, \dots, \sum_{n=0}^{\infty} x_{n,m} z^n \right)^T$$

Puesto que se invierte una matriz, se debe comprobar que esta es, en efecto, no singular. Para ello utilizaremos el siguiente teorema:

Teorema 2.1 (Morrison). Sea $A \in \mathbb{M}_{m \times m}$ una matriz invertible, y sean $u, v \in \mathbb{R}^m$ dos vectores columna que cumplan que $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$, entonces:

1. $A + uv^T$ es una matriz no singular.
2. $(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}$

La matriz A es no singular por hipótesis. Tomando $v = b$ y $u = \frac{z}{1-z} \vec{1}$ tenemos que: Si $z = 0$, $1 + \frac{z}{1-z} b^T A^{-1} \vec{1} \neq 0$ se cumple trivialmente. Si $z \neq 0$ la condición del teorema es equivalente a $1 - \frac{1}{z} b^T A^{-1} \vec{1} \neq 0$. Puesto que tomaremos $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$ no tendremos

problemas con que se anule el denominador de u ya que z no tomará el valor 1. Hemos exigido que el método Runge-Kutta considerado cumpla que $b^T A^{-1} \vec{1} = 1$, por lo tanto $b^T A^{-1} \vec{1} = 1 \neq 1 - \frac{1}{z}$, pues $\frac{1}{z} \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Por tanto, en virtud del teorema (2.1), $A + \frac{z}{1-z} \vec{1} b^T$ es no singular y:

$$\Delta(z) = \left(A + \frac{z}{1-z} \vec{1} b^T \right)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} \frac{z}{1-z} \vec{1} b^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1} \frac{z}{1-z} \vec{1}} = A^{-1} - z A^{-1} \vec{1} b^T A^{-1} \quad (2.14)$$

Por lo que la expresión (2.13) esta bien definida si $|z| < 1$. Despejando obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n = \left(\frac{\Delta(z)}{h} - sI \right)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n \quad (2.15)$$

De nuevo, debemos comprobar que esta expresión esta bien definida, es decir, que la matriz $\frac{\Delta(z)}{h} - sI$ es invertible. Esto es equivalente a que s no sea autovalor de la matriz $\frac{\Delta(z)}{h}$. Para $z \in \mathbb{C}$ fijado, esta matriz tiene un número finito de autovalores y por tanto sólo para un número finito de $s \in \mathbb{C}$ la matriz será singular. Como esta expresión la utilizaremos dentro de una integral, aunque haya un número finito de puntos donde no este definida esta expresión podremos calcular igualmente la integral.

Por otro lado, multiplicando por $b^T A^{-1}$ la expresión (2.10) y después introduciendo (2.11) y puesto que $b^T A^{-1} \vec{1} = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} b^T A^{-1} X_n &= b^T A^{-1} \left(x_n \vec{1} + hA(sX_n + g_n) \right) \\ &= x_n + hb^T (sX_n + g_n) \\ &= x_{n+1} \end{aligned}$$

Finalmente tenemos una expresión general para $\{x_n\}_{n \geq 1}$:

$$x_{n+1} = b^T A^{-1} X_n \quad (2.16)$$

Observación 2.4. *En el caso de estar trabajando con un método rígidamente preciso, como vimos en el capítulo anterior cuando definimos esta propiedad, la expresión (2.16) quiere decir que la última componente del vector X_n es, efectivamente, la aproximación de la solución en el siguiente nodo de discretización, x_{n+1} .*

Observación 2.5. *Si, para el desarrollo anterior, no exigiesemos la propiedad de que $b^T A^{-1} \vec{1} = 1$. Podremos obtener una expresión similar para $\Delta(z)$.*

Sea $K = b^T A^{-1} \vec{1} \neq 1$, entonces la expresión (2.13) estará bien definida siempre que $1 - \frac{1}{z} \neq K$, es decir, $z \neq \frac{1}{1-K}$. Como $\frac{1}{1-K} \neq 0$, entonces existe un entorno de 0 para el cual se cumple la condición anterior. Sea $R \in \mathbb{R}$ tal que si $|z| < R$ entonces $z \neq \frac{1}{1-K}$. Podemos

tomar $R = \min\{1 - \epsilon, |\frac{1}{1-K}| - \epsilon\}$ para un $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Por tanto tomando este entorno como dominio de definición de las series de potencias que consideramos en la expresión (2.13), en virtud del Teorema (2.1), la expresión esta bien definida y además:

$$\Delta(z) = A^{-1} - \frac{z}{1 + (K-1)z} A^{-1} \vec{1} b^T A^{-1}$$

Observación 2.6. En el caso que $K = b^T A^{-1} \vec{1} \neq 1$, también podremos obtener una expresión del tipo de la de (2.16).

$$\begin{aligned} b^T A^{-1} X_n &= b^T A^{-1} (x_n \vec{1} + hA(sX_n + g_n)) \\ &= Kx_n + hb^T(sX_n + g_n) \\ &= Kx_{n+1} + (1-K)hb^T(sX_n + g_n) \end{aligned}$$

Con lo que llegamos a:

$$x_{n+1} = \frac{1}{K} b^T A^{-1} X_n + \frac{K-1}{K} hb^T(sX_n + g_n)$$

Finalmente, utilizando (2.16) y (2.15) obtenemos una expresión de la transformada Z de la aproximación de la solución de la ecuación diferencial (2.9) en función de términos conocidos, como son el vector b , la matriz A o la función $g(t)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} z^n = b^T A^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n \right) = b^T A^{-1} \left(\frac{\Delta(z)}{h} - sI \right)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n \quad (2.17)$$

En este momento podemos sustituir la expresión $\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} z^n$ por su equivalente en función de términos conocidos (A , b y g_n) que obtuvimos en (2.17):

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) b^T A^{-1} \left(\frac{\Delta(z)}{h} - sI \right)^{-1} g_n ds \right) z^n \quad (2.18)$$

Para poder calcular esta integral buscaremos descomponerla en combinación lineal de integrales más fáciles de calcular. Este desarrollo se verá en el caso general mas adelante, pero vamos a introducir un ejemplo concreto para ilustrar el proceso.

Consideremos el método de Euler implícito, que podemos pensar como un integrador del tipo Runge-Kutta de 1 etapa cuya tabla de Butcher es:

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

La función $\Delta(z)$ en este caso particular tiene la forma:

$$\Delta(z) = 1 - z$$

En este caso la expresión (2.18) se simplifica pues pasamos de tener que trabajar con matrices a trabajar con escalares. La matriz I será 1 y los vectores g_n serán escalares. Con esta simplificaciones llegamos a:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) \left(\frac{1-z}{h} - s \right)^{-1} g_n ds \right) z^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\hat{f}(s)}{\frac{1-z}{h} - s} ds \right) g_n z^n\end{aligned}$$

Con lo que aplicando el Teorema de Cauchy como veremos más adelante en el trabajo podemos simplificar la expresión llegando a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f} \left(\frac{1-z}{h} \right) g_n z^n$$

Como $\hat{f}(s)$ es analítica por hipótesis, la composición, $\hat{f} \left(\frac{1-z}{h} \right)$, será analítica y por tanto admitirá descomposición en serie de potencias:

$$\hat{f} \left(\frac{1-z}{h} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n^h z^n$$

Finalmente, introduciendo esta descomposición, utilizando la fórmula de Cauchy para sumar infinitas e igualando coeficientes de las series de potencias resultantes, llegamos a la expresión final del problema:

$$y_{n+1} = \sum_{k=0}^n w_{n-k}^h g_k$$

Continuaremos ahora con este mismo desarrollo para el caso general, en el que tendremos que trabajar con matrices.

2.4. Descomposición Lineal

Buscamos entonces simplificar la expresión

$$b^T A^{-1} \left(\frac{\Delta(z)}{h} - sI \right)^{-1} g_n \quad (2.19)$$

Sea $L_z J_{z,h} L_z^{-1} = \frac{\Delta(z)}{h}$ la descomposición canónica de la matriz $\frac{\Delta(z)}{h}$ en su forma de Jordan compleja. Donde las matrices J_z y L_z dependen de z pero no dependen de s y son la matriz canónica compleja y la matriz de cambio de base asociada. Por lo tanto:

$$\left(\frac{\Delta(z)}{h} - sI \right)^{-1} = L_z (J_{z,h} - sI)^{-1} L_z^{-1}$$

Observación 2.7. La matriz de cambio de base L_z depende únicamente de z mientras que la forma canónica $J_{z,h}$ depende de z y h . Esto es debido a que multiplicar por $1/h$ una matriz no varía los autovectores de esta.

Sea $C = \{e_1, \dots, e_m\}$ la base canónica de \mathbb{C}^m . Tomando las descomposiciones de $L_z^{-1}g_n$ y $(b^T A^{-1} L_z)^T$ en la base canónica C .

$$\begin{aligned} L_z^{-1}g_n &= \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j \\ (b^T A^{-1} L_z)^T &= \sum_{k=1}^m \beta_k e_k \end{aligned} \tag{2.20}$$

Introduciendo en la expresión (2.19) la descomposición en la forma canónica de Jordan y después las descomposiciones de los vectores de (2.20), llegamos a la expresión:

$$\begin{aligned} b^T A^{-1} \left(\frac{\Delta(z)}{h} - sI \right)^{-1} g_n &= b^T A^{-1} L_z (J_{z,h} - sI)^{-1} L_z^{-1} g_n \\ &= \left(\sum_{k=0}^m \beta_k e_k \right)^T (J_{z,h} - sI)^{-1} \left(\sum_{j=0}^m \alpha_j e_j \right) \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^m \beta_k \alpha_j e_k^T (J_{z,h} - sI)^{-1} e_j \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^m \beta_k \alpha_j \left[(J_{z,h} - sI)^{-1} \right]_{kj} \end{aligned} \tag{2.21}$$

tenemos de este modo una descomposición de la expresión (2.19) en combinación lineal de los elementos de $(J_{z,h} - sI)^{-1}$. Esta combinación lineal no depende de s , solo los elementos de la matriz dependen de s .

Podemos ahora calcular la expresión de $(J_{z,h} - sI)^{-1}$. La matriz $J_{z,h}$, por ser una forma canónica de Jordan, es una matriz diagonal por bloques. Al restarle a la diagonal principal s seguirá siendo una matriz canónica de Jordan cambiando los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ de la matriz $J_{z,h}$ por los autovalores $\lambda_1 - s, \dots, \lambda_l - s$. La matriz inversa de una matriz diagonal por bloques es también diagonal por bloques, por tanto podremos calcular la inversa de cada uno de los bloques por separado para obtener la matriz inversa de $J_{z,h} - sI$.

Comenzaremos este cálculo con una matriz genérica J que sea una forma canónica de Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc} J_{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_l} \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} J_{\lambda_1}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_l}^{-1} \end{array} \right)$$

donde J_{λ_i} es el i -ésimo bloque de una forma canónica de Jordan J .

Para el cálculo de la inversa de un bloque de Jordan, de tamaño k , utilizaremos el método de Gauss.

$$J_{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \lambda & 1 & & & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \ddots & & \\ & & \lambda & 1 & & & 1 & \\ & & & \lambda & & & & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{\lambda} * J_{\lambda}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{\lambda} & & & \frac{1}{\lambda} & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \ddots & & \\ & & 1 & \frac{1}{\lambda} & & & \frac{1}{\lambda} & \\ & & & 1 & & & & \frac{1}{\lambda} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} F_{k-1} - \frac{1}{\lambda} F_k \\ \vdots \\ F_1 - \frac{1}{\lambda} F_2 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & \frac{1}{\lambda} & \frac{-1}{\lambda^2} & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & & & & \frac{1}{\lambda} & \frac{-1}{\lambda^2} \\ & & & 1 & & & & \frac{1}{\lambda} \\ & & & & 1 & & & \frac{1}{\lambda} \end{array} \right)$$

De modo que la inversa de un bloque de Jordan es:

$$J_{\lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & \frac{-1}{\lambda^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda} & \frac{-1}{\lambda^2} \\ & & & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

En conclusión, calculando el caso particular con el que estamos tratando, obtenemos:

$$(J_{z,h} - sI)^{-1} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1-s}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_l-s}^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

donde $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$ son los autovalores de la matriz $\frac{\Delta(z)}{h}$, asociados a los diferentes bloques que forman $J_{z,h}$. Como vimos para el caso general, tenemos que para $r \in \{1, 2, \dots, l\}$:

$$J_{\lambda_r-s}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_r-s} & \frac{-1}{(\lambda_r-s)^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_r-s} & \frac{-1}{(\lambda_r-s)^2} \\ & & & \frac{1}{\lambda_r-s} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Finalmente podemos afirmar, por (2.22) y (2.23) que :

$$[(J_{z,h} - sI)^{-1}]_{kj} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_r - s} & \text{si } j = k \\ \frac{-1}{(\lambda_r - s)^2} & \text{si } j = k + 1 \text{ y } [J]_{kk+1} = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.24)$$

Siendo en ambos casos $\lambda_r \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$ el autovalor asociado con la caja en la que se encuentra la posición kj en la matriz $J_{z,h}$.

Por lo tanto, utilizando la expresión de (2.21) en la igualdad (2.18), obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) b^T A^{-1} \left(\frac{\Delta(z)}{h} - sI \right)^{-1} g_n ds \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) \left(\sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^m \beta_k \alpha_j [(J - sI)^{-1}]_{kj} \right) ds \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^m \beta_k \alpha_j \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) [(J - sI)^{-1}]_{kj} ds \right) z^n \end{aligned} \quad (2.25)$$

Observación 2.8. En término general, la matriz $\frac{\Delta(z)}{h}$ no tendrá autovalores múltiples y por tanto será diagonalizable, de modo que la matriz $J_{z,h}$ será una matriz diagonal. Por lo tanto obtendremos que:

$$[(J - sI)^{-1}]_{kj} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_k - s} & \text{Si } k = j \\ 0 & \text{Si } k \neq j \end{cases}$$

Para el cálculo de la integrales de la expresión (2.25) buscaremos utilizar el Teorema de Cauchy. De este modo llegaremos a una expresión donde no tendremos que calcular ninguna integral.

2.5. Teorema de Cauchy

Buscamos calcular el valor de integrales del tipo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\hat{f}(s)}{s - \lambda} ds \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\hat{f}(s)}{(s - \lambda)^2} ds \end{aligned}$$

que son el tipo de integrales que tenemos en la expresión (2.25).

Para ello utilizaremos las siguientes curvas, para cada $n \in \mathbb{N}$ sean:

$$\phi_{n,1} : t \in [-n, n] \rightarrow \mathbb{C}, \text{ tal que } \phi_{n,1}(t) = c + it$$

$$\phi_{n,2} : t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{C}, \text{ tal que } \phi_{n,2}(t) = c + ne^{it}$$

ϕ_n la curva cerrada formada por las curvas $-\phi_{n,1}$ y $\phi_{n,2}$.

Observación 2.9. Para que las curvas ϕ_n tengan orientación positiva debemos invertir la orientación de la curva $\phi_{n,1}$.

En la figura 2.5 podemos ver como cualquier número complejo con parte real mayor que c acabará encontrándose dentro de la sucesión de curvas considerada. En la figura se muestran las 5 primeras curvas de la sucesión en el caso de $c = 10$.

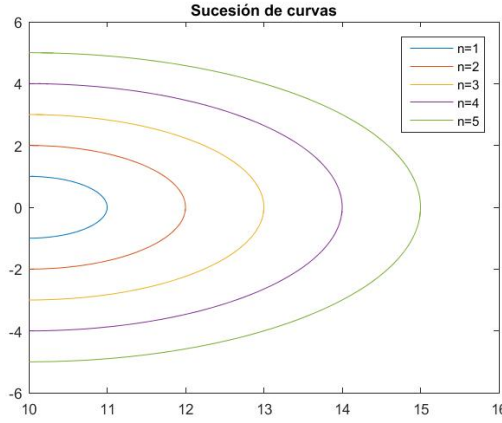


Figura 2.1: En esta figura podemos ver las curvas ϕ_n para n entre 1 y 5 y $c = 10$.

Utilizando el teorema de Cauchy sobre las curvas cerradas ϕ_n obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi_n} \frac{\hat{f}(s)}{s - \lambda} ds \\ \hat{f}'(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi_n} \frac{\hat{f}(s)}{(s - \lambda)^2} ds \end{aligned} \tag{2.26}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ que este en el interior de la curva cerrada ϕ_n .

Observación 2.10. En efecto las funciones integradas cumplen las condiciones del Teorema de Cauchy pues $\hat{f}(s)$ es diferenciable y, en el interior de ϕ_n , $\hat{f}(s)$ no tiene polos por definición de la transformada inversa de Laplace. Además estamos integrando sobre una región convexa $\{x \in \mathbb{C} \text{ tal que } \operatorname{Re}(x) \geq c\} \subset \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \operatorname{Re}(z) > 0\}$ abierto convexo. Para más detalle sobre este tema se puede ver la referencia [8].

Podemos dividir las integrales sobre ϕ_n en dos integrales, sobre $\phi_{n,1}$ y $\phi_{n,2}$. De este modo tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi_{n,1}} \frac{\hat{f}(s)}{s - \lambda} ds &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-in}^{c+in} \frac{\hat{f}(s)}{s - \lambda} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\hat{f}(s)}{s - \lambda} ds \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi_{n,2}} \frac{\hat{f}(s)}{(s - \lambda)^2} ds &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{(c-in)^2}^{(c+in)^2} \frac{\hat{f}(s)}{s - \lambda} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\hat{f}(s)}{(s - \lambda)^2} ds \end{aligned} \quad (2.27)$$

Calcularemos ahora el valor del límite de las integrales sobre $\phi_{n,2}(t)$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\phi_{n,2}} \frac{\hat{f}(s)}{s - \lambda} ds &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\hat{f}(c + ne^{it})}{c + ne^{it} - \lambda} dt \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\phi_{n,2}} \frac{\hat{f}(s)}{(s - \lambda)^2} ds &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\hat{f}(c + ne^{it})}{(c + ne^{it} - \lambda)^2} dt \end{aligned}$$

Por ser $\hat{f}(s)$ transformada de Laplace se tiene que $\lim_{Re(s) \rightarrow \infty} \hat{f}(s) = 0$ y por tanto existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|\hat{f}(s)| \leq M$ para todo s tal que $Re(s) > c$. Con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\hat{f}(c + ne^{it})}{c + ne^{it} - \lambda} dt \right| &\leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\hat{f}(c + ne^{it})|}{|c + ne^{it} - \lambda|} dt \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{n} dt = \frac{\pi M}{n} \\ \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\hat{f}(c + ne^{it})}{(c + ne^{it} - \lambda)^2} dt \right| &\leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\hat{f}(c + ne^{it})|}{|c + ne^{it} - \lambda|^2} dt \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{n^2} dt = \frac{\pi M}{n^2} \end{aligned}$$

Observación 2.11. Para el cálculo anterior hemos supuesto que $|\hat{f}(s)| \leq M$ para todo s tal que $Re(s) > c$. Esto es posible porque en la definición de la Transformada Inversa de Laplace, tomamos $\hat{c} \in \mathbb{R}$ tal que todos los polos de la función $\hat{f}(s)$ tengan parte real menor que \hat{c} . Dado que la transformada de Laplace tiene límite 0 cuando la parte real de s tiende a infinito, existirá un real $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ tal que $|\hat{f}(s)| \leq M$ para todo s tal que $Re(s) > \tilde{c}$. De modo que podemos tomar $c = \max\{\hat{c}, \tilde{c}\}$, de modo que se cumplen las suposiciones que tomamos en los cálculos anteriores.

Con lo cual

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\phi_{n,2}} \frac{\hat{f}(s)}{s - \lambda} ds \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi M}{n} = 0 \\ 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\phi_{n,2}} \frac{\hat{f}(s)}{(s - \lambda)^2} ds \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi M}{n^2} = 0 \end{aligned}$$

Y por tanto:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\phi_{n,2}} \frac{\hat{f}(s)}{s - \lambda} ds &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\phi_{n,2}} \frac{\hat{f}(s)}{(s - \lambda)^2} ds &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

En conclusión, de lo obtenido en (2.26),(2.27) y (2.28), podemos calcular el valor de las siguientes integrales:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\hat{f}(s)}{\lambda-s} ds &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\phi_{n,2}} \frac{\hat{f}(s)}{s-\lambda} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi_{n,1}} \frac{\hat{f}(s)}{s-\lambda} ds \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi_n} \frac{\hat{f}(s)}{s-\lambda} ds = \hat{f}(\lambda) \\
\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\hat{f}(s)}{(\lambda-s)^2} ds &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi_{n,2}} \frac{\hat{f}(s)}{(s-\lambda)^2} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi_{n,1}} \frac{\hat{f}(s)}{(s-\lambda)^2} ds \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi_n} \frac{\hat{f}(s)}{(s-\lambda)^2} ds = -\hat{f}'(\lambda)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Observación 2.12. Para el desarrollo del cálculo de las integrales de (2.29) debemos suponer que $\operatorname{Re}(\lambda) > c$. Pues de ser esto así, existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que λ se encuentre en el interior de ϕ_N para todo $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > n$.

En conclusión, podemos calcular las integrales de la expresión (2.25) utilizando lo obtenido en (2.24) y (2.29).

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) \left[(J - sI)^{-1} \right]_{kj} ds &= \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\hat{f}(s)}{\lambda_r - s} ds = \hat{f}(\lambda_r) & \text{Si } \left[(J - sI)^{-1} \right]_{kj} = \frac{1}{\lambda_r - s} \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\hat{f}(s)}{(\lambda_r - s)^2} ds = \hat{f}'(\lambda_r) & \text{Si } \left[(J - sI)^{-1} \right]_{kj} = \frac{-1}{(\lambda_r - s)^2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{2.30}
\end{aligned}$$

Observación 2.13. Los cálculos que acabamos de realizar son posibles ya que todos los autovalores de la matriz $\frac{\Delta(z)}{h}$ tienen parte real mayor que c y por tanto podemos aplicar el Teorema de Cauchy en (2.26). Esto se debe a que los autovalores de $\Delta(z)$ tienen parte real positiva y por tanto podemos escoger h suficientemente pequeño como para que se cumpla la condición anterior. Los autovalores de A^{-1} son de parte real positiva porque son los inversos de los autovalores de A que tienen parte real positiva por ser el método Runge-Kutta A -estable. Los autovalores de $I - z \vec{1} b^T A^{-1}$ son 1 con multiplicidad $1 - m$ y $1 - z$ que tendrá parte real positiva para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que la parte real de z sea menor que 1 (esto se cumple pues trabajamos con $|z| < 1$). Como $\Delta(z) = A^{-1}(I - z \vec{1} b^T A^{-1})$, entonces todos sus autovalores son positivos. Puesto que todos los autovalores de $\Delta(z)$ son todos de parte real positiva, entonces existirá $h \in \mathbb{R}$ tal que los autovalores de $\frac{\Delta(z)}{h}$ tengan parte real mayor que c , cumpliendo así las condiciones del Teorema de Cauchy.

Puesto que estamos trabajando con matrices, nos será de utilidad poder aplicar la función $\hat{f}(s)$ a matrices. Para ello definimos la extensión de la función $\hat{f} : s \in \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ al conjunto de matrices complejas $\mathbb{M}_{m \times m}(\mathbb{C})$ de la siguiente forma:

Sea $A \in \mathbb{M}_{m \times m}(\mathbb{C})$ con su descomposición canónica de Jordan $A = L_A J_A L_A^{-1}$ siendo J_A la forma canónica de Jordan de A y L_A la matriz de cambio de base asociada. Definimos \hat{J}_A como:

$$[\hat{J}_A]_{kj} := \begin{cases} \hat{f}([J_A]_{kj}) & \text{si } j = k \\ \hat{f}'(\lambda_r) & \text{si } j = k + 1 \text{ y } [J_A]_{kk+1} = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definimos $\hat{f} : A \in \mathbb{M}_{m \times m}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{M}_{m \times m}(\mathbb{C})$ tal que $\hat{f}(A) := L_A \hat{J}_A L_A^{-1}$.

Partiendo de (2.25) y utilizando (2.30), (2.20) y la nueva definición de $\hat{f}(A)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^m \beta_k \alpha_j \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) [(J - sI)^{-1}]_{kj} ds \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^m \beta_k \alpha_j [\hat{J}_{\frac{\Delta(z)}{h}}]_{kj} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m \beta_k e_k \right)^T \hat{J}_{\frac{\Delta(z)}{h}} \left(\sum_{j=0}^m \alpha_j e_j \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b^T A^{-1} L_{\frac{\Delta(z)}{h}} \hat{J}_{\frac{\Delta(z)}{h}} L_{\frac{\Delta(z)}{h}}^{-1} g_n z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b^T A^{-1} \hat{f}\left(\frac{\Delta(z)}{h}\right) g_n z^n \end{aligned} \tag{2.31}$$

De este modo hemos conseguido obtener los valores de las integrales de la expresión (2.18) en función de términos que podemos calcular.

Para continuar, descompondremos la función $\hat{f}\left(\frac{\Delta(z)}{h}\right)$ en su serie de potencias, de modo que podremos transformar la expresión (2.31) en una serie de potencias.

2.6. Cálculo de la serie de potencias de $\hat{f}\left(\frac{\Delta(z)}{h}\right)$

Buscamos expresar la función $\hat{f}\left(\frac{\Delta(z)}{h}\right)$ en serie de potencias, de modo que podamos operar. $\frac{\Delta(z)}{h}$ es una matriz que depende únicamente de z , ya que h está fijado. Por lo que para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$,

$$\left[\hat{f}\left(\frac{\Delta(z)}{h}\right) \right]_{kj} : z \in \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

es una función compleja de variable compleja que, debido a la definición de $\hat{f}\left(\frac{\Delta(z)}{h}\right)$, es analítica pues $\hat{f}(s)$ es analítica por hipótesis. En conclusión, admite una representación en serie de potencias.

$$\left[\hat{f}\left(\frac{\Delta(z)}{h}\right)\right]_{kj} = \sum_{n=0}^{\infty} [W_n^h(\hat{f})]_{kj} z^n$$

Por tanto podemos expresar $\hat{f}\left(\frac{\Delta(z)}{h}\right)$ como serie de potencias con las matrices $W_n^h(\hat{f})$ como coeficientes:

$$\hat{f}\left(\frac{\Delta(z)}{h}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n^h(\hat{f}) z^n \quad (2.32)$$

Observación 2.14. La matriz $\Delta(z)$ tiene la forma $A^{-1} - zA^{-1}\vec{1}b^T A^{-1}$, como vimos en (2.14). Por lo tanto es una función analítica pues cada componente de la matriz es una combinación lineal de funciones analíticas. De este modo la función $\hat{f}\left(\frac{\Delta(z)}{h}\right)$ es analítica (pues $\hat{f}(s)$ es analítica).

Para resolver el problema necesitaremos conocer los coeficientes, $W_n^h(\hat{f})$, de la serie de potencias de $\hat{f}\left(\frac{\Delta(z)}{h}\right)$. Como $\left[\hat{f}\left(\frac{\Delta(z)}{h}\right)\right]_{kj}$ es una función analítica y estamos trabajando en una región convexa (un entorno de 0), utilizando el Teorema de Cauchy, tenemos que para todo $k, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ podemos calcular los coeficientes de modo que:

$$[W_n^h(\hat{f})]_{kj} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{\left[\hat{f}\left(\frac{\Delta(z)}{h}\right)\right]_{kj}}{z^{n+1}} dz \quad (2.33)$$

Aproximaremos la integral de (2.33) mediante un método número de integración. Tomando la curva

$$\phi_R : t \in [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

tal que $\phi_R(t) = Re^{it}$ y utilizando el método de los trapecios, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{\left[\hat{f}\left(\frac{\Delta(z)}{h}\right)\right]_{kj}}{z^{n+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\left[\hat{f}\left(\frac{\Delta(Re^{it})}{h}\right)\right]_{kj}}{(Re^{it})^n} dt = \frac{R^{-n}}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left[\hat{f}\left(\frac{\Delta(Re^{it})}{h}\right)\right]_{kj} e^{-int} dt \\ &\approx \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\hat{f}\left(\frac{\Delta(Re^{it})}{h}\right)\right]_{kj} C^{ml} dt \text{ siendo } C = e^{\frac{i2\pi}{L}} \end{aligned}$$

Por tanto tomando la misma discretización, que depende de R y L , para cada elemento de la matriz $W_n^h(\hat{f})$ podemos aproximar los coeficientes de la serie de potencias por:

$$W_n^h(\hat{f}) \approx \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{f}\left(\frac{\Delta(Re^{it})}{h}\right) C^{ml} \text{ siendo } C = e^{\frac{i2\pi}{L}} \quad (2.34)$$

Observación 2.15. *Utilizamos la regla de los trapecios para esta aproximación por sus buenas propiedades de convergencia. Estamos integrando sobre una curva cerrada regular una función analítica. Por esta razón, el problema se reduce a integrar una función regular y periódica sobre su dominio. En este ámbito, la aproximación tiene una convergencia exponencial, por lo que el orden de convergencia del método será el que aporte el método Runge-Kutta y no el que aporta esta aproximación. Para más información sobre el tema mirar [9].*

Finalmente, introduciendo la expresión de $\hat{f}\left(\frac{\Delta(z)}{h}\right)$ como serie de potencias, (2.32), en la expresión (2.31) y utilizando la formula de Cauchy para el producto de series infinitas, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} b^T A^{-1} \hat{f}\left(\frac{\Delta(z)}{h}\right) g_n z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b^T A^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} W_n^h(\hat{f}) z^n \right) g_n z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(b^T A^{-1} \sum_{k=0}^n W_{n-k}^h(\hat{f}) g_k \right) z^n \end{aligned}$$

En virtud de la unicidad de expresión en serie de potencias, podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= b^T A^{-1} \sum_{k=0}^n W_{n-k}^h(\hat{f}) g_k \\ W_n^h(\hat{f}) &\approx \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{f}\left(\frac{\Delta(Re^{it})}{h}\right) C^{nl} dt \text{ siendo } C = e^{\frac{i2\pi}{L}} \end{aligned} \tag{2.35}$$

Quedando así completamente definido el método para el cálculo de la integral (2.1).

2.7. No rígidamente preciso

En esta sección afrontaremos el mismo problema (2.1) eliminando la condición de que el método Runge-Kutta sea rígidamente preciso. Nos encontraremos con dos casos. El primero es que se cumpla la condición $b^T A^{-1} \vec{1} = 1$, en cuyo caso el método funcionará igualmente ya que, como menciona la observación (2.2), pedir que el método sea rígidamente preciso es más fuerte que pedir $b^T A^{-1} \vec{1} = 1$ que es realmente la condición necesaria para que el método expuesto anteriormente funcione.

El segundo caso es que $K = b^T A^{-1} \vec{1} \neq 1$. En este caso la expresión (2.17) no sería válida. Para obtener una expresión similar utilizaremos los resultados de las observaciones

(2.5) y (2.6) y de la expresión (2.15).

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1}z^n &= \frac{1}{K}b^T A^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n + \frac{K-1}{K}hb^T \left(s \sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n \right) \\ &= \frac{1}{K}b^T A^{-1} \left(\frac{\Delta(z)}{h} - sI \right)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n \\ &\quad + \frac{K-1}{K}hb^T \left(s \left(\frac{\Delta(z)}{h} - sI \right)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n \right) \end{aligned}$$

donde $\Delta(z) = A^{-1} - \frac{z}{1+(K-1)z} A^{-1} \vec{1} b^T A^{-1}$.

Análogamente al caso rígidamente preciso podemos introducir esta expresión en (2.8) obteniendo:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1}z^n &= \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) b^T A^{-1} \left(\frac{\Delta(z)}{h} - sI \right)^{-1} g_n \right) z^n \\ &\quad + h \frac{K-1}{K} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s \hat{f}(s) b^T \left(\frac{\Delta(z)}{h} - sI \right)^{-1} g_n ds \right) z^n \quad (2.36) \\ &\quad + h \frac{K-1}{K} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) ds \right) b^T g_n z^n \end{aligned}$$

El primer término de la expresión (2.36) es un múltiplo de la expresión a la que se llega si el método es rígidamente preciso. Por este motivo podremos aproximarlos con las fórmulas calculadas anteriormente.

Para el segundo sumando, necesitaremos hacer un desarrollo similar al realizado a lo largo de este capítulo, pero con la función $s\hat{f}(s)$. De modo que necesitamos que las acotaciones que realizamos en (2.28) también funcionasen para esta nueva función. Para que estas acotaciones sean válidas debemos pedir que el comportamiento asintótico de la función $s\hat{f}(s)$ sea que este acotada. De este modo podremos realizar un desarrollo similar al caso anterior.

Finalmente, el tercer sumando de esta expresión contiene la integral:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) ds \quad (2.37)$$

Por lo tanto necesitamos que esta integral sea convergente. Esta expresión es $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ pues es la fórmula de inversión de la transformada de Laplace para $t = 0$. Para que sea convergente necesitamos que exista el límite de la función $f(t)$ en 0.

Si se cumpliesen todas las condiciones anteriores, podríamos continuar con el método.

El primer término sería:

$$\frac{1}{K} \sum_{n=0}^{\infty} \left(b^T A^{-1} \sum_{k=0}^n W_{n-k}^h(\hat{f}) g_k \right)$$

$$W_n^h(\hat{f}) \approx \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{f} \left(\frac{\Delta(Re^{it})}{h} \right) C^{nl} dt \text{ siendo } C = e^{\frac{i2\pi}{L}}$$

El tercer término podemos calcularlo directamente:

$$hf(0) \frac{K-1}{K} b^T \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$$

Para el segundo término, supongamos que se cumple que, utilizando las curvas definidas para (2.29):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{s\hat{f}(s)}{\lambda-s} ds = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\phi_{n,2}} \frac{s\hat{f}(s)}{s-\lambda} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi_{n,1}} \frac{s\hat{f}(s)}{s-\lambda} ds$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi_n} \frac{s\hat{f}(s)}{s-\lambda} ds = \lambda \hat{f}(\lambda)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que su parte real sea mayor que c .

Consideraremos que $\frac{\Delta(z)}{h}$ es siempre diagonalizable. Se podría hacer los mismos cálculos, como en el apartado de rigidamente preciso, si la matriz no fuese diagonalizable pero los términos serían más extensos.

Sea $A \in \mathbb{M}_{m \times m}(\mathbb{C})$ con su diagonalización $A = L_A D_A L_A^{-1}$ siendo D_A la matriz diagonal asociada a A y L_A la matriz de cambio de base. Definimos \tilde{D}_A como:

$$[\tilde{D}_A]_{kj} := \begin{cases} [D_A]_{kj} \hat{f}([D_A]_{kj}) & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$$

Definimos $\tilde{f} : A \in \mathbb{M}_{m \times m}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{M}_{m \times m}(\mathbb{C})$ tal que $\tilde{f}(A) := L_A \tilde{D}_A L_A^{-1}$.

Entonces podemos expresar el segundo sumando como:

$$h \frac{K-1}{K} \sum_{n=0}^{\infty} \left(b^T \sum_{k=0}^n \tilde{W}_{n-k}^h(\tilde{f}) g_k \right)$$

$$\tilde{W}_n^h(\tilde{f}) \approx \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{f} \left(\frac{\Delta(Re^{it})}{h} \right) C^{nl} dt \text{ siendo } C = e^{\frac{i2\pi}{L}}$$

donde \tilde{W}_{n-k}^h son los coeficientes de la descomposición en serie de potencias de $\tilde{f}(\frac{\Delta(z)}{h})$.

Sumando estos tres términos podemos obtener el resultado del método:

$$y_{n+1} = \frac{1}{K} b^T A^{-1} \sum_{k=0}^n W_{n-k}^h(\hat{f}) g_k + h \frac{K-1}{K} b^T \sum_{k=0}^n \tilde{W}_{n-k}^h(\tilde{f}) g_k + h f(0) \frac{K-1}{K} b^T g_n$$

$$W_n^h(\hat{f}) \approx \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{f} \left(\frac{\Delta(Re^{it})}{h} \right) C^{nl} dt \text{ siendo } C = e^{\frac{i2\pi}{L}}$$

$$\tilde{W}_n^h(\hat{f}) \approx \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{f} \left(\frac{\Delta(Re^{it})}{h} \right) C^{nl} dt \text{ siendo } C = e^{\frac{i2\pi}{L}}$$

Observación 2.16. Para los métodos no rígidamente precisos los entornos en los que podíamos definir la serie de potencias anterior variaban dependiendo del método utilizado como vimos en la observación 2.5. Por lo que tendremos que tomar el parámetro R en consecuencia para realizar la aproximación.

Observación 2.17. Para que el método funcione de esta forma necesitas unas condiciones más estrictas sobre la función $\hat{f}(s)$, además de necesitar realizar mas cálculos que si el método fuese rígidamente preciso. Por esta razón no es recomendable utilizar un método Runge-Kutta que no sea rígidamente preciso.

Capítulo 3

Resultados Numéricos

En este capítulo afrontaremos la aplicación del método a casos prácticos. Resolveremos problemas numéricamente y realizaremos un estudio de la velocidad de convergencia de los diferentes métodos Runge-Kutta. También afrontaremos diferentes problemas que podrán ser resueltos con la ayuda del cálculo de integrales de convolución.

Comenzaremos con un test académico, con el que compararemos tanto la velocidad de convergencia de los diferentes métodos, tanto los rígidamente como los que no lo son. En el resto del capítulo utilizaremos únicamente métodos rígidamente precisos.

3.1. Consideraciones Previas

Durante este capítulo utilizaremos varios integradores de tipo Runge-Kutta para resolver los problemas que se presentarán. Comenzaremos resolviendo las convoluciones utilizando el método de Euler Implícito, que puede ser entendido como un Runge-Kutta de una etapa rígidamente preciso y A-estable. La tabla de Butcher asociada es:

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Dividiremos los problemas según utilicemos métodos rígidamente precisos o no. En el primer caso utilizaremos los cuatro métodos que se presentan en la tabla 3.1. Elegimos estos cuatro métodos porque son rígidamente precisos y tienen buenas propiedades de orden.

También utilizaremos métodos que no serán rígidamente precisos. En particular, los métodos que aparecen en la tabla 3.2.

Serán necesarias imponer algunas condiciones sobre los métodos del cuadro 3.2. Los métodos (a) y (b) son A-estable siempre que $x \geq 1/4$. Para ambos métodos, si tomamos

Tabla 3.1: Métodos Runge-Kutta rígidamente precisos

$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{-1}{12}$
1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Radau IIA de 2 etapas

0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Lobato IIIC de 2 etapas

$\frac{4-\sqrt{6}}{360}$	$\frac{88-7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{296-169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{-2+3\sqrt{6}}{225}$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{4+\sqrt{6}}{360}$	$\frac{296+169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{88+7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{-2-3\sqrt{6}}{225}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$
1	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Radau IIIA de 3 etapas

Lobato IIIC de 3 etapas

$x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, tendremos mejores condiciones de estabilidad. Por esta razón utilizaremos ambos métodos con dos valores de x diferentes para poder observar las diferencias. Para el método (d) tenemos que tomar como valor de x una de las raíces del polinomio $x^3 - 3/2x^2 + x/2 - 1/24$. Estas raíces son, aproximadamente, $x_1 = 1,05868$, $x_2 = 0,30254$ y $x_3 = 0,12889$. Puesto que la primera de estas raíces aporta mejores propiedades de estabilidad, será la raíz que usemos.

Utilizaremos estos métodos en concreto puesto que tienen órdenes altos. Como vimos en la sección 1.3.2, no vamos a profundizar en la obtención de los órdenes de cada método Runge-Kutta por lo que solo los mencionaremos. Estos métodos y sus propiedades se obtuvieron de la referencia [10]. En la tabla 3.3 se pueden ver un listado con los órdenes de cada método.

A lo largo de este capítulo realizaremos aproximaciones de funciones cuya expresión exacta será conocida. Por este motivo seremos capaces de calcular el error exacto de las aproximaciones realizadas. Se darán los datos del error infinito de la aproximación, es decir, tomaremos el valor del error de aproximación de un método como el máximo de los errores de aproximación en cada nodo de discretización del problema.

Cuando utilizamos el método de cuadratura de convolución, descrito en este trabajo, tenemos tres parámetros involucrados en la discretización del problema (h,L,R) como vimos en la fórmula (2.35). Los parámetros L y R únicamente intervienen en el cálculo de los

Tabla 3.2: Métodos Runge-Kutta no rígidamente precisos

$$\begin{array}{c|cc} x & x & 0 \\ \hline 1-x & 1-2x & x \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & x & 0 \\ \hline 1 & 1-x & x \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

(a) Pareschi y Russo de 2 etapas

(b) Diagonalmente Implícito de 2 etapas

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & x & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - x & x & 0 \\ 1-x & 2x & 1-4x & x \\ \hline & \frac{1}{6(1-2x)^2} & \frac{3(1-2x)^2-1}{3(1-2x)^2} & \frac{1}{6(1-2x)^2} \end{array}$$

(c) Crouzeix de 2 etapas

(d) Nørsett de 3 etapas

coeficientes $W_n^h(\hat{f})$. Como esta aproximación tiene un orden exponencial, asintóticamente no influirá en el orden del método de cuadratura de convolución. Por este motivo tomaremos para las aproximaciones de este capítulo valores de R y L suficientemente grandes (generalmente $L = 2000$ y $R = 0,99$) como para que no interfieran en las estimaciones del orden del método en comparación con el parámetro h .

Observación 3.1. *En el caso de los métodos no rígidamente precisos, el parámetro R deberá variar dependiendo del método utilizado, como vimos en la observación 2.16. Por este motivo tomaremos para estos casos $\epsilon = 0,01$ como parámetro, de modo que $R = \min\{1 - \epsilon, |\frac{1}{1-K}| - \epsilon\}$.*

Tabla 3.3: Órdenes de los métodos Runge-Kutta

Método Runge-Kutta	Orden
Euler Implícito	1
Radau IIA de 2 etapas	3
Radau IIA de 3 etapas	5
Lobato IIIC de 2 etapas	2
Lobato IIIC de 3 etapas	4
Pareschi y Russo de 2 etapas	2
Diagonalmente Implícito de 2 etapas	2
Crouzeix de 2 etapas	3
Nørsett de 3 etapas	4

3.2. Test Académico

3.2.1. Función Escalón

Comenzaremos aplicando el método a un problema que tiene bastante interés en el ámbito de resolución de ecuaciones de ondas en tres dimensiones en régimen transitorio y con métodos integrales. Este ámbito precisa que se utilicen métodos A-estables, por lo que es uno de los campos en los que buscaremos utilizar integradores de tipo Runge-Kutta sobre integradores lineales multipaso para una mejor aproximación. Este estudio puede ver con más detalle en [4].

Resolveremos el problema:

$$\delta(t-1) * g(t) = \int_0^t \delta(t-\tau-1)g(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $g(t)$ es la función constante igual a 1 y $\delta(t-1)$ es la Delta de Dirac. Conocemos la función que se obtiene al resolver esta integral de convolución por lo que podremos comprobar si el método funciona con los diferentes métodos Runge-Kutta que utilizaremos.

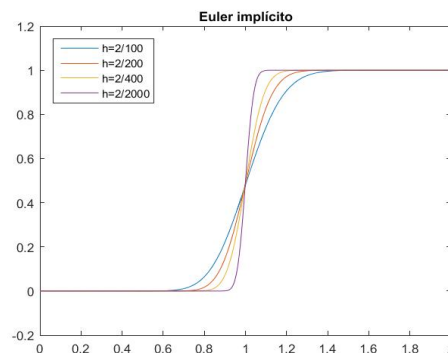
La transformada de Laplace de $\delta(t-1)$ es la función $\hat{f}(s) = e^{-s}$. Por lo tanto podemos aproximar la solución del problema (3.1) con el método de cuadratura de convolución utilizando esta función como dato.

Resolveremos este problema utilizando diferentes métodos Runge-Kutta. Comenzaremos utilizando métodos rígidamente precisos. En primer lugar mostraremos los resultados con el método de Euler Implícito. También utilizaremos otros métodos rígidamente precisos como los del cuadro 3.1.

Podemos utilizar métodos que no sean rígidamente precisos. Para el uso de estos, necesitaremos utilizar la modificación del método que vimos en la sección 2.7. Esto implica que la velocidad de cálculo del método se verá disminuida, así como que los resultados serán menos precisos pues estaremos introduciendo más aproximaciones.

Aplicando los métodos al problema (3.1) podremos calcular las aproximaciones que realizan los diferentes métodos. Comenzando por Euler implícito, podemos ver los resultados utilizando diferentes parámetros de discretización en la figura 3.1.

Figura 3.1: Resultado aplicando el método de Euler Implícito



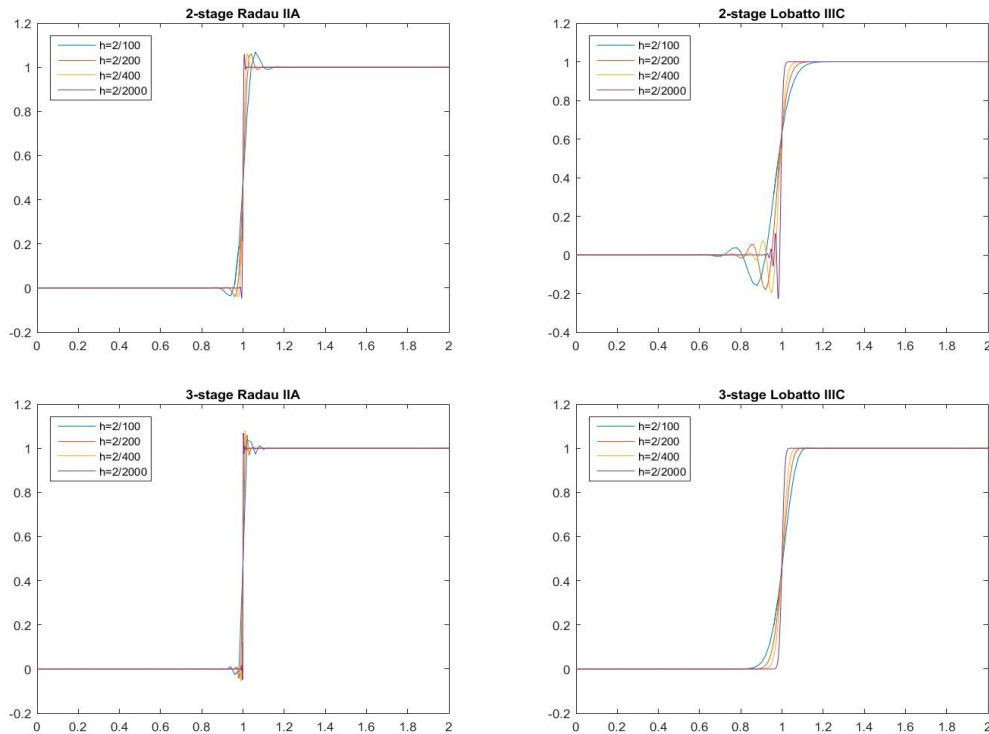
En la figura 3.2 se encuentran los resultados asociados a los métodos del cuadro 3.1. Podemos observar las diferencias entre los cuatro métodos considerados. Para todos ellos la aproximación es bastante precisa, aunque existen diferencias entre cada método. Para otros problemas que consideraremos podremos ver como estas diferencias se hacen mas notables.

Con los métodos no rígidamente precisos del cuadro 3.2 obtenemos los resultados de la figura 3.3.

Atendiendo a los resultados de las figuras 3.1 y 3.2, podemos observar como los métodos rígidamente precisos aportan unas soluciones más exactas, en general, que los metodos que no son rígidamente precisos. Además el método para los no rígidamente precisos es computacionalmente mas costoso.

Fijándonos en casos particulares, en la figura 3.2, en las dos graficas del método de dos etapas de Pareschi y Russo, podemos observar como nos encontramos con oscilaciones bastante grandes cuando tomamos $x = 0,3$. Esto podría ser debido a que este método es A-estable si $x \geq 0,25$ y nos encontramos cerca de ese punto. El método de cuadratura de convolución funciona, pero es menos preciso que en otros casos, como podemos ver en el

Figura 3.2: Resultado utilizando métodos rígidamente precisos



caso en el que $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ con el mismo método Runge-Kutta.

3.2.2. Polinomios

Realizaremos ahora otro test académico en el que la solución del problema sea una función polinómica. Afrontaremos el problema:

$$t^2 * 12t = \int_0^t 12\tau(t - \tau)^2 d\tau = t^4 \quad (3.2)$$

En efecto, t^4 es la solución de esta integral de convolución pues por el teorema de convolución tenemos que la Transformada de Laplace de una convolución es el producto de las Transformadas de sus factores y como la transformada de t^n es $Lt^n(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, podemos ver:

$$L[t^2 * 12t] = L[t^2]L[12t] = \frac{2}{s^3} \frac{12}{s^2} = \frac{4!}{s^5} = L[t^4]$$

Por lo tanto, tomando como $g(t) = 12t$ y como $\hat{f}(s) = \frac{2}{s^3}$, podemos resolver la integral de convolución (3.2) con el método. Como conocemos el resultado exacto podremos realizar un estudio del error de aproximación del método. En las tablas 3.4-3.8 podemos ver los

errores de aproximación de los métodos rígidamente precisos para el problema. Puesto que es necesario tomar límites en el dominio de deficiencia del problema, lo consideramos definido en $[0, 3]$.

Tabla 3.4: Error, Euler Implícito, ec. polinómica

$h = 3/100$	$h = 3/200$	$h = 3/400$	$h = 3/1000$	$h = 3/2000$	Orden Aprox.
$4,9500e + 00$	$2,4524e + 00$	$1,2206e + 00$	$4,8689e - 01$	$2,4320e - 01$	1,0055

Tabla 3.5: Error, Radau IIA de 2 etapas, ec. polinómica

$h = 3/100$	$h = 3/200$	$h = 3/400$	$h = 3/1000$	$h = 3/2000$	Orden Aprox.
$3,4754e - 04$	$9,3393e - 05$	$2,5393e - 05$	$4,9489e - 06$	$4,3653e - 05$	1,8474

Tabla 3.6: Error, Radau IIA de 3 etapas, ec. polinómica

$h = 3/100$	$h = 3/200$	$h = 3/400$	$h = 3/1000$	$h = 3/2000$	Orden Aprox.
$3,7454e - 04$	$9,6768e - 05$	$2,5815e - 05$	$4,9759e - 06$	$4,3688e - 05$	1,8767

Podemos ver que, dependiendo del método Runge-Kutta que utilicemos, el error del método de cuadratura de convolución varía. Para los métodos Radau IIA podemos ver que las aproximaciones con un paso de $h = 3/1000$ son más exactas que con un paso de $h = 3/2000$. Una de las posibles razones de esto es que el error de aproximación del método es menor que el error de aproximación de la máquina al realizar las operaciones, pues en alguno de los cálculos internos del método los valores se podrían estar acercando al error de la máquina.

En cuanto al orden de convergencia de los métodos podemos ver como el método de Euler Implícito da un orden de aproximadamente 1, como sería de esperar por el orden del método Runge-Kutta. En general, para el resto de métodos el orden es mayor que 1 ya que estamos utilizando métodos Runge-Kutta con órdenes más altos.

En las tablas 3.9-3.14 podemos ver los resultados de la resolución del mismo problema,

Tabla 3.7: Error, Lobatto IIIC de 2 etapas, ec. polinómica

$h = 3/100$	$h = 3/200$	$h = 3/400$	$h = 3/1000$	$h = 3/2000$	Orden Aprox.
$3,2268e - 02$	$8,0336e - 03$	$2,0030e - 03$	$3,1927e - 04$	$1,1095e - 04$	1,9172

Tabla 3.8: Error, Lobatto IIIC de 3 etapas, ec. polinómica

$h = 3/100$	$h = 3/200$	$h = 3/400$	$h = 3/1000$	$h = 3/2000$	Orden Aprox.
$4,0233e - 01$	$1,9958e - 01$	$9,9397e - 02$	$3,9664e - 02$	$1,9791e - 02$	1,0051

utilizando métodos no rígidamente precisos. Podemos observar una disparidad entre los errores de aproximación de los diferentes métodos. Así como para algunos métodos, como el método de Crouzeix, tienen errores similares a los de los métodos rígidamente precisos. Por otro lado, algunos métodos, como el método diagonal implícito con $x = 1 + \sqrt{2}/2$, resultan en unas aproximaciones con errores muy altos.

Cada método será más o menos preciso en función del problema que vayamos a aproximar. En general, los métodos rígidamente precisos tendrán errores menores que los métodos no rígidamente precisos. Aunque puede que para casos particulares, algún método no rígidamente preciso pueda dar resultados más exactos que un método rígidamente preciso específico.

Para el resto de las aplicaciones que afrontaremos en este capítulo, nos centraremos en los métodos Runge-Kutta rígidamente precisos únicamente. De este modo, tendremos, en general, errores de aproximación menores. Además, no tendremos que preocuparnos sobre las condiciones necesarias que necesitamos para el uso del método de cuadratura de convolución en el caso no rígidamente preciso.

Tabla 3.9: Error, Pareschi y Russo de 2 etapas con $x = 1 + \sqrt{2}/2$, ec. polinómica

$h = 3/100$	$h = 3/200$	$h = 3/400$	$h = 3/1000$	$h = 3/2000$	Orden Aprox.
$2,7494e - 01$	$6,7700e - 02$	$1,6795e - 02$	$2,6739e - 03$	$6,9336e - 04$	1,9993

Tabla 3.10: Error, Pareschi y Russo de 2 etapas con $x = 0,3$, ec. polinómica

$h = 3/100$	$h = 3/200$	$h = 3/400$	$h = 3/1000$	$h = 3/2000$	Orden Aprox.
$8,7907e - 03$	$2,2018e - 03$	$5,5219e - 04$	$8,9208e - 05$	$3,6842e - 05$	1,8626

Figura 3.3: Resultados aplicando métodos no rígidamente precisos.

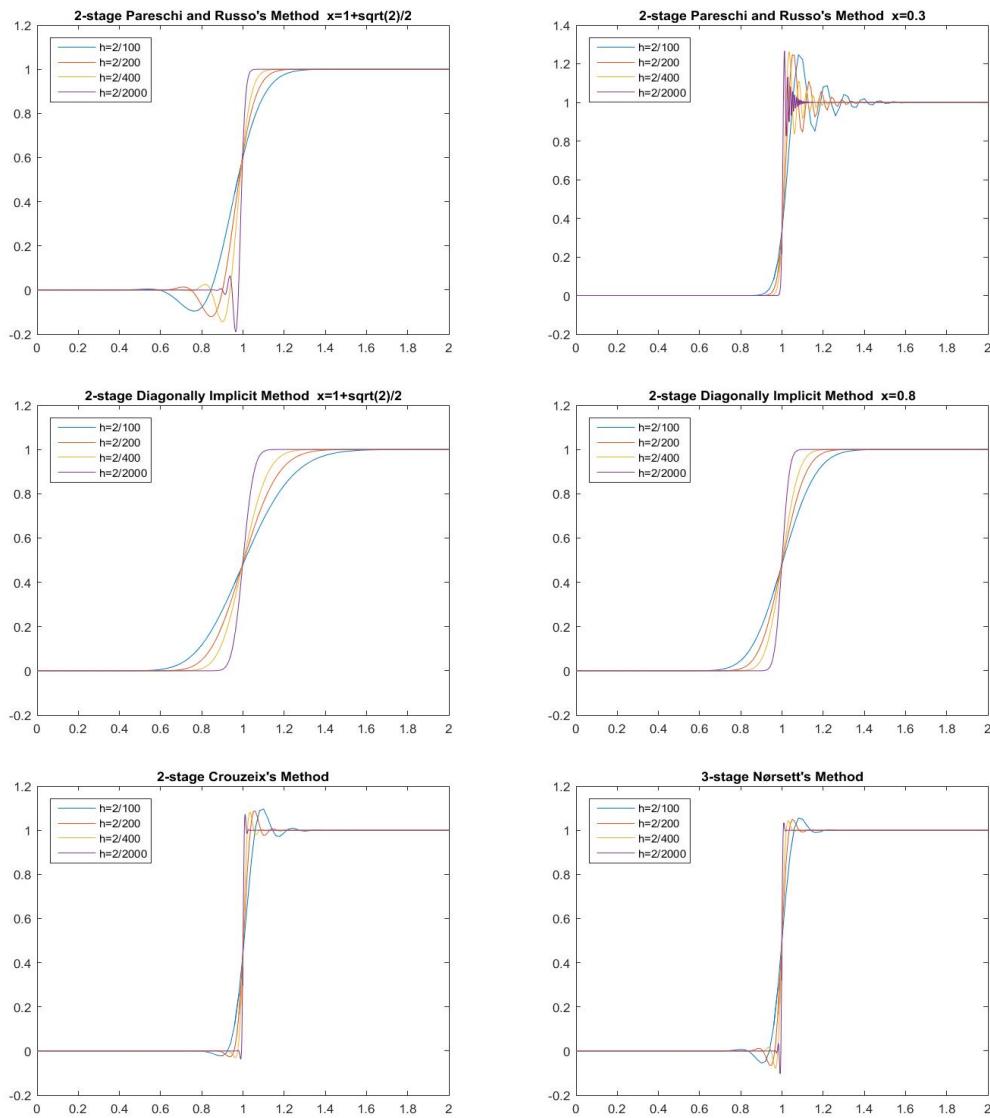


Tabla 3.11: Error, Diagonalmente Implícito de 2 etapas con $x = 1 + \sqrt{2}/2$, ec. polinómica

$h = 3/100$	$h = 3/200$	$h = 3/400$	$h = 3/1000$	$h = 3/2000$	Orden Aprox.
$8,5019e + 00$	$4,1996e + 00$	$2,0869e - 00$	$8,3170e - 01$	$4,1531e - 01$	1,0073

Tabla 3.12: Error, Diagonalmente Implícito de 2 etapas con $x = 0,8$, ec. polinómica

$h = 3/100$	$h = 3/200$	$h = 3/400$	$h = 3/1000$	$h = 3/2000$	Orden Aprox.
$3,9496e + 00$	$1,9594e + 00$	$9,7584e - 01$	$3,8941e - 01$	$1,9453e - 01$	1,0047

Tabla 3.13: Error, Crouzeix de 2 etapas, ec. polinómica

$h = 3/100$	$h = 3/200$	$h = 3/400$	$h = 3/1000$	$h = 3/2000$	Orden Aprox.
$2,0001e - 04$	$7,4952e - 05$	$2,3088e - 05$	$4,8014e - 06$	$4,3684e - 05$	1,6306

Tabla 3.14: Error, Nørsett de 3 etapas, ec. polinómica

$h = 3/100$	$h = 3/200$	$h = 3/400$	$h = 3/1000$	$h = 3/2000$	Orden Aprox.
$3,7430e - 04$	$9,6708e - 05$	$2,5800e - 05$	$4,9735e - 06$	$4,3664e - 05$	1,8766

3.3. EDOs Lineales

En esta sección afrontaremos la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas. Es decir, ecuaciones del tipo:

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1x'(t) + a_0x(t) = g(t) \quad (3.3)$$

La solución de este tipo de ecuaciones, en el caso en el que $g(t) = 0$, se puede obtener analíticamente. Pero en el momento en el que se introduce una función $g(t)$ no nula, la solución de la EDO se puede volver complicada y puede no ser posible obtener analíticamente.

Buscaremos transformar la resolución de un problema de Cauchy en un problema que podamos resolver utilizando integrales de convolución. Comenzaremos desarrollando el método para EDOs de orden 1, resolviendo algún ejemplo particular, y finalmente desarrollaremos el método para EDOs de orden n .

Esta aplicación del método de integrales de convolución viene inspirada por la misma aplicación que se realiza en el trabajo [3].

3.3.1. EDOs de Primer Orden

Afrontaremos la resolución numérica de EDOs lineales de primer orden no homogéneas. Particularizando en la expresión (3.3) para $n = 1$ e introduciendo una condición inicial, obtenemos la expresión general de los problemas de Cauchy con los que vamos a trabajar:

$$\begin{cases} x'(t) + ax(t) = g(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Introducimos la condición inicial $x(0) = 0$ para obtener el problema de Cauchy (3.5). Con esta condición inicial estamos restringiendo este estudio a únicamente un problema de Cauchy particular. Esto no es ningún inconveniente, ya que, las diferentes soluciones de una EDO lineal no homogénea son de la forma: $x_p(t) + x_h(t)$ donde $x_p(t)$ es una solución particular de la EDO no homogénea y $x_h(t)$ es una solución de la EDO homogénea, que son fáciles de calcular. De este modo tomando la solución de la EDO homogénea $x_h(t)$ tal que $x_h(0) = x_0$ y sumándosela a la solución obtenida para (3.5) obtendremos la solución de nuestro problema (3.4).

$$\begin{cases} x'(t) + ax(t) = g(t) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Para resolver este problema particular, introducimos el siguiente problema dependiente de un parámetro k que consideraremos real positivo ($k \in [0, \infty)$):

$$\begin{cases} \frac{df}{dt}(t; k) + af(t; k) = \delta(t - k) \\ f(0; k) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

De este modo podemos ver que si definimos $\tilde{x}(t)$ como:

$$\tilde{x}(t) := \int_0^\infty f(t; k)g(k)dk \quad (3.7)$$

podemos comprobar como $\tilde{x}(t)$ es, en efecto, la solución del problema (3.5).

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(t) + a\tilde{x}(t) &= \int_0^\infty \left(\frac{df}{dt}(t; k) + af(t; k) \right) g(k)dk = \int_0^\infty \delta(t - k)g(t)dk = g(t) \\ \tilde{x}(0) &= \int_0^\infty f(0; k)g(k)dk = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, por unicidad de solución, $\tilde{x}(t)$ es la única solución del problema de Cauchy (3.5). Una vez tenemos esto, solo es necesario calcular la solución del problema (3.6). Para esto debemos darnos cuenta que $\delta(t - k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{R}^+, k \neq t$. Con lo que, para cada $k \in \mathbb{R}^+$, en los intervalos $(0, k)$ y (k, ∞) , $f(t; k)$ es solución de la EDO homogénea. Conocemos las soluciones de la EDO homogénea, son de la forma ce^{-at} con $c \in \mathbb{R}$. Por tanto conocemos la expresión de la función $f(t; k)$:

$$f(t; k) = \begin{cases} c_1 e^{-at} & \text{si } t \in (0, k) \\ c_2 e^{-at} & \text{si } t \in (k, \infty) \end{cases}$$

Puesto que tenemos como condición inicial del problema (3.6), $f(0; k) = 0$, entonces podemos asegurar que $c_1 = 0$. Por otro lado, para que se verifique el problema (3.6), tiene que cumplirse que:

$$\lim_{t \rightarrow k^+} f(t; k) - \lim_{t \rightarrow k^-} f(t; k) = 1$$

Observación 3.2. *En efecto, como la función $\delta(t-k)$ podemos entenderla como la derivada de la función heavyside $H(t-k)$ definida como 1 si $t \geq k$ y 0 si $t < k$, entonces la función $f(t; k)$, fijando k , tiene que tener un salto de longitud 1 en $t = k$, es decir, $\lim_{t \rightarrow k^+} f(t; k) - \lim_{t \rightarrow k^-} f(t; k) = 1$. De este modo en todo punto tal que $t \neq k$ la función $f(t; k)$ será la solución de la EDO homogénea y en el punto $t = k$ tendremos que $\frac{df}{dt}(k; k) = \delta(k - k)$, verificando la ecuación de (3.6) para todos los puntos.*

con lo que podemos calcular el valor de c_2 :

$$\begin{aligned} c_2 e^{-ak} &= 1 \\ c_2 &= e^{ak} \end{aligned}$$

De este modo podemos expresar la función $f(t; k)$ como:

$$f(t; k) = F(t - k) := H(t - k)e^{-a(t-k)}$$

donde $H(t-k)$ es la función que toma el valor de 0 si $t < k$ y toma el valor de 1 si $t \geq k$. De este modo introduciendo esta expresión en la integral de (3.7) podemos obtener una fórmula con la que poder calcular la solución del problema de Cauchy (3.5).

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= \int_0^\infty f(t;k)g(k)dk = \int_0^\infty F(t-k)g(k)dk \\ &= \int_0^t F(t-k)g(k)dk = [F * g](t)\end{aligned}$$

Por lo que podemos calcular la solución buscada, calculando la convolución de las funciones F y g . La función $F(t) = H(t)e^{-at}$ podemos considerarla como si fuese $F = e^{-at}$ ya que todas las funciones con las que estamos trabajando durante el trabajo estamos suponiendo que están definidas únicamente sobre \mathbb{R}^+ . Por lo tanto, conocemos su Transformada de Laplace $\hat{F}(s) = \frac{1}{s+a}$ puesto que es la transformada de la función exponencial.

De este modo hemos reducido el cálculo de la solución del problema de Cauchy (3.5) al cálculo de una integral de convolución.

Veamos ahora los resultados de aplicar este método a la resolución de un ejemplo concreto. Consideremos la siguiente EDO lineal de primer orden no homogénea:

$$\begin{cases} x'(t) + 3x(t) = \cos(t) - \sin(t) \\ x(0) = 3 \end{cases} \quad (3.8)$$

Calculando analíticamente la solución del problema podemos ver que e^{-3t} es solución de la EDO homogénea y que $(-2\sin(t) + 4\cos(t))/10$ es una solución particular de la EDO no homogénea. Por lo tanto, las soluciones de la EDO no homogénea son del tipo $(-2\sin(t) + 4\cos(t))/10 + Ce^{-3t}$ con $C \in \mathbb{R}$. Entonces particularizando para la condición inicial $x(0) = 3$ tenemos que $x(t) = (-2\sin(t) + 4\cos(t) + 26e^{-3t})/10$ es la solución exacta del problema de valor inicial (3.8).

Para aproximar la solución de este problema, primero buscamos la solución de la EDO homogénea que cumple la condición inicial $x(0) = 3$, esta es $x(t) = 3e^{-3t}$. Después calculamos la solución aproximada de la EDO no homogénea con condición inicial $x(0) = 0$ realizando la convolución explicada anteriormente y finalmente sumamos las dos funciones para obtener la solución de nuestro problema de Cauchy (3.8).

Tabla 3.15: Error, Euler implícito, EDO lineal orden 1

$h = 4/100$	$h = 4/200$	$h = 4/400$	$h = 4/1000$	$h = 4/2000$	Orden Aprox.
$9,8804e - 03$	$5,0498e - 03$	$2,5534e - 03$	$1,0285e - 03$	$2,4194e - 03$	0,9831

Tabla 3.16: Error, Radau IIA de 2 etapas, EDO lineal orden 1

$h = 4/100$	$h = 4/200$	$h = 4/400$	$h = 4/1000$	$h = 4/2000$	Orden Aprox.
$3,6503e - 06$	$4,6305e - 07$	$5,8337e - 08$	$5,9370e - 09$	$2,4351e - 03$	2,7976

Tabla 3.17: Error, Radau IIA de 3 etapas, EDO lineal orden 1

$h = 4/100$	$h = 4/200$	$h = 4/400$	$h = 4/1000$	$h = 4/2000$	Orden Aprox.
$4,8580e - 10$	$1,5331e - 11$	$2,1276e - 12$	$5,50943 - 09$	$2,4346e - 03$	3,9175

En las tablas 3.15-3.19 podemos ver los errores de aproximación de la solución del problema (3.8), en el intervalo $[0, 4]$, utilizando el método desarrollado en esta sección. Se muestran los resultados utilizando los cuatro métodos Runge-Kutta rígidamente precisos de la tabla 3.1 y Euler implícito.

Podemos observar como el error disminuye a medida que tomamos un parámetro de discretización menor hasta que llegamos a un punto donde los errores de aproximación aumentan de nuevo. Esto podría ser debido a que los errores de las operaciones realizadas por el ordenador podrían ser mayores que el error de aproximación del método, por lo que el error total aumenta en lugar de disminuir.

En este caso, en mayor grado que en la sección anterior, podemos ver como el orden del método aumenta bastante a medida que lo hace el orden del integrador Runge-Kutta que utilicemos. Esto último se ve, sobre todo, en los métodos Radau IIA.

3.3.2. EDOs de orden n

Afrontaremos ahora el problema de Cauchy asociado con la EDO lineal de orden n no homogénea (3.3). Introduciendo condiciones iniciales podemos obtener el problema de Cauchy que trataremos de resolver:

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t) = g(t) \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = x_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} \end{cases} \quad (3.9)$$

Como en el caso de orden 1, resolveremos el problema de Cauchy para la EDO no homogénea con las condiciones iniciales iguales a 0. Del mismo modo que en el caso anterior, podremos obtener fácilmente una solución de la EDO homogénea que cumpla las condiciones iniciales de (3.9) y sumársela a la solución del problema con condiciones iniciales nulas para obtener la solución del problema con condiciones iniciales no nulas.

Tabla 3.18: Error, Lobatto IIIC de 2 etapas, EDO lineal orden 1

$h = 4/100$	$h = 4/200$	$h = 4/400$	$h = 4/1000$	$h = 4/2000$	Orden Aprox.
$4,0061e - 04$	$1,0440e - 04$	$2,6656e - 05$	$4,3196e - 06$	$2,4349e - 03$	1,9682

Tabla 3.19: Error, Lobatto IIIC de 3 etapas, EDO lineal orden 1

$h = 4/100$	$h = 4/200$	$h = 4/400$	$h = 4/1000$	$h = 4/2000$	Orden Aprox.
$9,1414e - 04$	$4,5556e - 04$	$2,2742e - 04$	$9,0873e - 05$	$1,0264e - 04$	1,0025

Resolveremos entonces el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1x'(t) + a_0x(t) = g(t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

para ello introduciremos el problema dependiente del parámetro $k \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{cases} \frac{d^n f}{dt^n}(t; k) + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(t; k) + \cdots + a_1 \frac{df}{dt}(t; k) + a_0 f(t; k) = \delta(t - k) \\ f(0; k) = 0 \\ \frac{df}{dt}(0; k) = 0 \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(0; k) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Análogamente al caso de orden 1, podemos definir la función $\tilde{x}(t)$

$$\tilde{x}(t) := \int_0^\infty f(t; k)g(k)dk \quad (3.12)$$

de modo que será la única solución del problema de Cauchy (3.10). En efecto podemos ver como

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{(n)}(t) + a_{n-1}\tilde{x}^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\tilde{x}'(t) + a_0\tilde{x}(t) &= \\ \int_0^\infty \left(\frac{d^n f}{dt^n}(t; k) + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(t; k) + \cdots + a_1 \frac{df}{dt}(t; k) + a_0 f(t; k) \right) g(k)dk &= \\ \int_0^\infty \delta(t - k)g(k)dk = g(t) \end{aligned}$$

y por tanto $\tilde{x}(t)$ es la solución de (3.10). Por tanto, debemos únicamente calcular la solución del problema (3.11). Para ello consideramos los intervalos, para cada $k \in \mathbb{R}^+$, $(0, k)$ y (k, ∞) , donde $f(t; k)$ es una de las soluciones de la EDO homogénea. Puesto que el conjunto

de soluciones de una EDO lineal homogénea es un espacio vectorial de dimensión el orden de la EDO, existirá una base de funciones de ese espacio vectorial $\{g_1, \dots, g_n\}$. Por tanto la función $f(t; k)$ será una combinación lineal de estas funciones en cada uno de los intervalos que estamos considerando, es decir:

$$f(t; k) = \begin{cases} c_{1,1}g_1(t) + \dots + c_{1,n}g_n(t) & \text{si } t \in (0, k) \\ c_{2,1}g_1(t) + \dots + c_{2,n}g_n(t) & \text{si } t \in (k, \infty) \end{cases}$$

Observación 3.3. *En general, la base de soluciones $\{g_1, \dots, g_n\}$, llamado sistema fundamental de soluciones, es fácil de calcular. Tomamos el polinomio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, llamado el polinomio característico de la EDO. Si este polinomio tiene n raíces distintas $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ entonces el conjunto de funciones $\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$ será un sistema fundamental de soluciones de la EDO.*

Puesto que estamos resolviendo un problema de Cauchy con condiciones iniciales nulas, la única combinación lineal de las funciones que forman la base del espacio de soluciones que satisface estas condiciones iniciales es la que tiene todos los coeficientes nulos $c_{1,1} = \dots = c_{1,n} = 0$. Por tanto solo necesitamos calcular los coeficientes $c_{2,1}, \dots, c_{2,n}$ para tener completamente definida la función $f(t; k)$. Para que se cumpla la igualdad del problema (3.11) deben satisfacerse las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow k^+} f(t; k) - \lim_{t \rightarrow k^-} f(t; k) &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow k^+} \frac{df}{dt}(t; k) - \lim_{t \rightarrow k^-} \frac{df}{dt}(t; k) &= 0 \\ &\vdots \\ \lim_{t \rightarrow k^+} \frac{d^{n-2}f}{dt^{n-2}}(t; k) - \lim_{t \rightarrow k^-} \frac{d^{n-2}f}{dt^{n-2}}(t; k) &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow k^+} \frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}(t; k) - \lim_{t \rightarrow k^-} \frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}(t; k) &= 1 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Observación 3.4. *Análogamente al caso de primer orden, como vimos en la observación 3.2, es necesario que la $(n-1)$ -ésima derivada con respecto a t de la función $f(t; k)$ tenga un salto de longitud 1 para que se cumpla la ecuación del problema (3.11). Esto se debe a que la función $\delta(t - k)$ es la derivada de la función salto en el punto k . Además de esto, las derivadas anteriores de $f(t; k)$ deben ser continuas para que $f(t; k)$ sea solución del problema.*

De las expresiones de (3.13), particularizando para la expresión de la función $f(t; k)$ que conocemos, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones que nos permitirá obtener los

coeficientes que nos faltan:

$$\begin{cases} c_{2,1}g_1(k) + \cdots + c_{2,n}g_n(k) = 0 \\ c_{2,1}g'_1(k) + \cdots + c_{2,n}g'_n(k) = 0 \\ \vdots \\ c_{2,1}g_1^{(n-2)}(k) + \cdots + c_{2,n}g_n^{(n-2)}(k) = 0 \\ c_{2,1}g_1^{(n-1)}(k) + \cdots + c_{2,n}g_n^{(n-1)}(k) = 1 \end{cases} \quad (3.14)$$

Observación 3.5. Para resolver el sistema de ecuaciones (3.14) introduciremos el wronskiano. Definimos el wronskiano de las funciones f_1, \dots, f_n como

$$W(f_1, \dots, f_n)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & \cdots & f_n(t) \\ f'_1(t) & \cdots & f'_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

de este modo podemos expresar, utilizando el método de Cramer, los coeficientes $c_{2,1}, \dots, c_{2,n}$ en función de wronskianos. Durante el método de Cramer introducimos el vector de términos independientes del sistema sustituyendo la columna correspondiente de la matriz de coeficientes del sistema. Puesto que el vector de términos independientes tiene todas sus componentes nulas menos la última, podemos reducir el determinante que obtenemos. De este modo, llegamos a la expresión:

$$c_{2,i} = \frac{\pm W(f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_n)(k)}{W(f_1, \dots, f_n)(k)}$$

donde tomamos el signo $+$ o $-$ en función de la posición que ocupa el 1 del vector de términos independientes en el determinante resultante de la sustitución de la columna i de la matriz de coeficientes por el vector de lados derechos del sistema.

Este sistema de ecuaciones tiene solución única, ya que las funciones g_1, \dots, g_n son linealmente independientes. Por tanto tenemos perfectamente definida la función $f(t; k)$. Debido que, fijado $k \in \mathbb{R}^+$, en el intervalo $(0, k)$ la función $f(t; k)$ es nula, podemos simplificar la expresión de $\tilde{x}(t)$:

$$\tilde{x}(t) = \int_0^\infty f(t; k)g(k)dk = \int_0^t f(t; k)g(k)dk$$

Veamos ahora que existe una función $F(t)$ tal que $f(t; k) = F(t - k)$. En efecto podemos comprobar, a partir de la ecuación del problema (3.11), que para todo $t \in \mathbb{R}^+$ y $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ tal que $k_2 > k_1$:

$$\begin{aligned} \frac{d^n f}{dt^n}(t + (k_2 - k_1); k_2) + \cdots + a_0 f(t + (k_2 - k_1); k_2) &= \delta(t + (k_2 - k_1) - k_2) = \\ &= \delta(t - k_1) = \frac{d^n f}{dt^n}(t; k_1) + \cdots + a_0 f(t; k_1) \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que existe una función $F(t)$ tal que $f(t; k) = F(t - k)$. Con lo cual podemos introducir esta nueva función en la expresión (??):

$$\tilde{x}(t) = \int_0^t f(t; k)g(k)dk = \int_0^t F(t - k)g(k)dk = [F * g](t)$$

Finalmente hemos conseguido expresar la solución del problema de Cauchy (3.10) mediante una integral del convolución. Para obtener la Transformada de Laplace de la función $F(t)$ utilizaremos la ecuación del problema (3.11) y la relación de $F(t) = f(t; 0)$. De este modo, por las propiedades de la transformada de Laplace llegamos a la expresión:

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0)\hat{F}(s) = 1$$

donde $\hat{F}(s)$ es la transformada de Laplace de la función $F(t)$. De esta relación obtenemos $\hat{F}(s) = 1/(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0)$, con lo que podremos utilizar el método de cuadratura de convolución para resolver la EDO no homogénea con condiciones iniciales nulas (3.10) pudiendo de esa forma obtener la solución del problema de Cauchy con condiciones iniciales no homogéneas (3.9) a partir de esta solución como se explicó anteriormente.

Resolveremos ahora un problema de Cauchy de orden mayor que 1 con este método. Consideremos el siguiente problema de Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^4(t) + 5x'''(t) + 5x''(t) - 5x'(t) - 6 = 10(\sin(t) - \cos(t) - 2\sin(2t) - 10\cos(2t)) \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 4 \\ x''(0) = -1 \\ x'''(0) = -16 \end{array} \right. \quad (3.15)$$

La solución exacta de este problema es $x(t) = \cos(t) + 2\sin(2t)$. Para aproximar la solución con el método de cuadratura de convolución, primero buscaremos una solución de la EDO homogénea que cumpla las condiciones iniciales del problema (3.15).

$$\left\{ \begin{array}{l} x^4(t) + 5x'''(t) + 5x''(t) - 5x'(t) - 6 = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 4 \\ x''(0) = -1 \\ x'''(0) = -16 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Para ello calcularemos una base de soluciones de la EDO homogénea. El polinomio característico del problema es $\lambda^4 + 5\lambda^3 + 5\lambda^2 - 5\lambda - 6$ que tiene como raíces 1, -1, -2, -3. Por tanto $\{e^t, e^{-t}, e^{-2t}, e^{-3t}\}$ es una base del espacio de soluciones de la EDO homogénea.

Por lo que la solución del problema (3.16) será de la forma $c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{-2t} + c_4e^{-3t}$. Podemos obtener los coeficientes resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1 \\ c_1 - c_2 - 2c_3 - 3c_4 = 4 \\ c_1 + c_2 + 4c_3 + 9c_4 = -1 \\ c_1 - c_2 - 8c_3 - 27c_4 = -16 \end{cases}$$

La solución de este sistema es $c_1 = 3,5/3$, $c_2 = 16,5/3$, $c_3 = -26/3$, $c_4 = 3$. De modo que $x_h(t) = \frac{1}{3}(3,5e^t + 16,5e^{-t} - 26e^{-2t} + 9e^{-3t})$ es la solución del problema (3.16). De este modo calculando la conovolución de la función $f(t)$, cuya Transformada de Laplace es $\hat{f}(s) = 1/(s^4 + 5s^3 + 5s^2 - 5s - 6)$, y la función $g(t) = 10(\sin(t) - \cos(t) - 2\sin(2t) - 10\cos(2t))$ que es el lado derecho del problema (3.15), y sumándole la solución $x_h(t)$ obtendremos la aproximación de la solución del problema (3.15).

Tabla 3.20: Error, Euler Implícito, EDO lineal orden n

$h = 3/200$	$h = 3/400$	$h = 3/800$	$h = 3/1200$	$h = 3/2000$	Orden Aprox.
$2,2027e + 01$	$2,4592e - 01$	$5,1112e - 02$	$3,3975e - 02$	$2,0292e - 02$	1,5433

Tabla 3.21: Error, Radau IIA de 2 etapas, EDO lineal orden n

$h = 3/200$	$h = 3/400$	$h = 3/800$	$h = 3/1200$	$h = 3/2000$	Orden Aprox.
$2,1953e + 01$	$8,1560e - 04$	$8,6426e - 08$	$7,0682e - 08$	$3,8161e - 05$	4,7724

Tabla 3.22: Error, Radau IIA de 3 etapas, EDO lineal orden n

$h = 3/200$	$h = 3/400$	$h = 3/800$	$h = 3/1200$	$h = 3/2000$	Orden Aprox.
$2,1953e + 01$	$1,3456e - 01$	$7,3973e - 05$	$6,0176 - 06$	$1,2398e - 04$	4,7728

En las tablas 3.20-3.24 podemos ver los errores de aproximación del problema (3.15) en el intervalo $[0, 3]$. Podemos observar como, aun tomando parámetros de discretización menores que en el caso de orden 1, para los primeros parámetros de discretización el método no tiene buenas aproximaciones y después el error se reduce a medida que reducimos el parámetro de discretización, hasta un punto donde los errores de aproximación aumentan. Como comentamos en el caso anterior, esto podría deberse a que estamos realizando ope-

Tabla 3.23: Error, Lobatto IIC de 2 etapas, EDO lineal orden n

$h = 3/200$	$h = 3/400$	$h = 3/800$	$h = 3/1200$	$h = 3/2000$	Orden Aprox.
$2,1953e + 01$	$1,3371e - 01$	$1,3326e - 04$	$8,6041e - 05$	$1,4348e - 04$	4,2789

Tabla 3.24: Error, Lobatto IIC de 3 etapas, EDO lineal orden n

$h = 3/200$	$h = 3/400$	$h = 3/800$	$h = 3/1200$	$h = 3/2000$	Orden Aprox.
$2,1958e + 01$	$4,6024e - 02$	$2,2570e - 02$	$1,5040e - 02$	$9,0575e - 03$	1,8567

raciones con números muy pequeños y por lo tanto el error de las operaciones realizadas por el ordenador se vuelven mayores en comparación con el error del método.

3.4. Ecuaciones Integrales

En esta sección afrontaremos la resolución de ecuaciones que involucran integrales de convolución. Veremos un método para resolver ecuaciones del tipo:

$$[f * g](t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau = y(t) \quad (3.17)$$

En esta ecuación, en diferencia al problema que tratamos en el segundo capítulo, conocemos la Transformada de Laplace $\hat{f}(s)$ de la función $f(t)$ y la función $y(t)$ resultado de la convolución de las funciones f y g . La incógnita del problema es la función $g(t)$.

Buscaremos resolver este problema utilizando una fórmula similar a la formula (2.35).

$$y_{n+1} = b^T A^{-1} \sum_{k=0}^n W_{n-k}^h(\hat{f})g_k$$

pues podemos calcular los coeficientes $W_{n-k}^h(\hat{f})$ a partir de la función $\hat{f}(s)$ y conocemos la función $y(t)$ por tanto, resolviendo sistemas de ecuaciones, podríamos obtener los vectores g_n . El problema es que, puesto que los vectores g_n tienen más de una componente, el sistema que obtenemos es indeterminado, pues tenemos más incógnitas que ecuaciones. Esto se debe a que tomamos como incógnitas los valores de $g(t)$ en los nodos de discretización y en los puntos intermedios que utilizamos en las etapas del método Runge-Kutta y que solo tomamos como datos los valores de la función $y(t)$ en los nodos de discretización.

Para solucionar este problema utilizaremos más puntos en los que evaluar la función $y(t)$ de modo que obtengamos tantas ecuaciones como incógnitas del sistema de ecuaciones anterior. De este modo conseguiremos una formula similar a la anterior pero será un sistema de ecuaciones con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

Comenzaremos tomando $Y_n \in \mathbb{R}^m$ para cada $n \in \mathbb{N}$, con un parámetro de discretización h fijado, como el vector que contiene las evaluaciones de la función $y(t)$, $y_{n,i}, \dots, y_{n,m}$, en los tiempos $t_n + c_i h$ con $i \in \{1, \dots, m\}$.

Buscaremos que las componentes del vector X_n definido en la sección 1.2 sean aproximaciones de la solución exacta de la EDO que estamos resolviendo en los tiempos $t_n + c_i h$. Para esto deberemos exigir al método Runge-Kutta que cumpla la condición de fila, definida en la sección 1.3.2. Sean A_i con $i \in \{1, \dots, m\}$ las filas de la matriz A . Entonces, partiendo de las expresiones particularizadas para la EDO que consideramos durante el desarrollo del método de cuadratura de convolución (2.10), podemos obtener las siguientes expresiones:

$$A_i A^{-1} X_n = x_n + h A_i (s X_n + g_n) = x_{n,i} \text{ para todo } i \in \{1, \dots, m\}$$

de este modo obtenemos una expresión análoga a la expresión (2.16) para cada etapa del método Runge-Kutta.

Observación 3.6. *En efecto, como A_i es la i -ésima fila de la matriz A , $A_i A^{-1}$ es el vector fila con un 1 en la i -ésima posición y ceros en las demás. La fila A_i hace el papel que hace el vector b^T en el desarrollo del método en el segundo capítulo. En efecto, si el método es rígidamente preciso se cumple que $b^T = A_m$ y por tanto $x_{n,m} = x_n$.*

Utilizando la expresión (2.15) podemos llegar a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{n,i} z^n = A_i A^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n \right) = A_i A^{-1} \left(\frac{\Delta(z)}{h} - sI \right)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$$

Por tanto aproximando la expresión (2.5) en los tiempos $t_n + c_i h$ con $i \in \{1, \dots, m\}$. Llegamos a la expresión:

$$y_{n,i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) x_{n,i} ds$$

de donde, realizando una transformada Z e introduciendo la expresión anterior llegamos a una expresión similar a la expresión (2.18):

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n,i} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) A_i A^{-1} \left(\frac{\Delta(z)}{h} - sI \right)^{-1} g_n ds \right) z^n$$

Podemos realizar los mismos procedimientos que en las secciones 2.4 y 2.5 con el vector fila A_i haciendo el papel del vector b^T . De modo que llegamos a la expresión final:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n,i} z^n = A_i A^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f} \left(\frac{\Delta(z)}{h} \right) g_n z^n$$

De donde podemos obtener, agrupando cada componente del vector Y_n e introduciendo la serie de potencias de la función $\hat{f} \left(\frac{\Delta(z)}{h} \right)$ una expresión similar a la expresión (2.35):

$$Y_n = \sum_{k=0}^n W_{n-k}^h(\hat{f}) g_k \tag{3.18}$$

$$W_n^h(\hat{f}) \approx \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{f} \left(\frac{\Delta(Re^{it})}{h} \right) C^{nl} dt \text{ siendo } C = e^{\frac{i2\pi}{L}}$$

De este modo hemos obtenido un sistema de ecuaciones determinado con el que podremos resolver la ecuación integral planteada en el problema.

Se puede ver un desarrollo más riguroso en el artículo [11].

Observación 3.7. *Para la resolución numérica del sistema determinado por la expresión (3.18), no será necesario resolver un gran sistema de ecuaciones, sino que se puede resolver un sistema mas pequeño en cada paso de tiempo, puesto que para calcular el los términos del vector g_n no son necesarios los vectores posteriores, $g_{n+1}, g_{n+2} \dots$.*

3.4.1. Ejemplo

Nos centraremos ahora en un caso particular. Resolveremos la siguiente ecuación integral:

$$\exp(t) * x(t) = \int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = \text{sen}(t) \quad (3.19)$$

Cuya incógnita $x(t)$ es uno de los factores de la convolución. Podemos resolver este problema analíticamente, puesto que estas funciones particulares nos lo permiten. Las Transformadas de Laplace de las funciones seno y exponencial son conocidas, por lo tanto utilizando el Teorema de Convolución llegamos a:

$$\begin{aligned} L[\exp(t) * x(t)] &= L[\exp(t)]L[x(t)] = \frac{1}{s-1}L[x(t)] = L[\text{sen}(t)] = \frac{1}{s^2+1} \\ L[x(t)] &= \frac{s-1}{s^2+1} = L[\cos(t)] - L[\text{sen}(t)] \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución exacta de la ecuación (3.19) es $x(t) = \cos(t) - \text{sen}(t)$. Podemos utilizar el método desarrollado en esta sección para aproximar esta solución. Utilizaremos los métodos rígidamente precisos Radau IIA de 2 y 3 etapas, Lobatto IIC de 2 etapas y el método de Euler Implícito.

Tabla 3.25: Error, Euler Implícito, ec. integral

$h = 1/200$	$h = 1/400$	$h = 1/800$	$h = 1/1200$	$h = 1/1600$	Orden Aprox.
$5,0465e - 03$	$2,5013e - 03$	$1,2503e - 03$	$8,3345e - 04$	$6,2507e - 04$	1,0038

Tabla 3.26: Error, Radau IIA de 2 etapas, ec. integral

$h = 1/200$	$h = 1/400$	$h = 1/800$	$h = 1/1200$	$h = 1/1600$	Orden Aprox.
$4,9280e - 03$	$2,5018e - 03$	$1,2505e - 03$	$8,3358e - 04$	$6,2514e - 04$	0,9939

Tabla 3.27: Error, Radau IIA de 3 etapas, ec. integral

$h = 1/200$	$h = 1/400$	$h = 1/800$	$h = 1/1200$	$h = 1/1600$	Orden Aprox.
$5,1350e - 03$	$2,5039e - 03$	$1,2508e - 03$	$8,3371e - 04$	$6,2521e - 04$	1,0111

En las tablas 3.25-3.28 podemos ver los errores de aproximación de cada uno de los métodos utilizados para resolver la ecuación (3.19). Podemos observar como, independientemente del método, el orden de la aproximación se encuentra en torno a 1. Puesto que

Tabla 3.28: Error, Lobatto IIIC de 2 etapas, ec. integral

$h = 1/200$	$h = 1/400$	$h = 1/800$	$h = 1/1200$	$h = 1/1600$	Orden Aprox.
$5,0041e - 03$	$2,5010e - 03$	$1,2503e - 03$	$8,3345e - 04$	$6,2507e - 04$	1,0003

no hemos realizado el estudio de convergencia del método no podemos afirmar nada, pero en vista de los resultados podríamos conjeturar que el método tiene orden 1 pues el orden de las aproximaciones en las etapas intermedias de los métodos que estamos utilizando es de orden 1. Por esta razón para obtener mayor orden quizá necesitásemos métodos que tuvieran ordenes superiores para las etapas intermedias.

Observación 3.8. *En efecto, si alguna de las componentes de los vectores g_n tuviese orden de aproximación de 1, como utilizamos los vectores anteriores para calcular los siguientes, el orden de las aproximaciones siguientes se vería reducido a orden 1.*

Códigos

En este apéndice veremos los códigos de Matlab que fueron utilizados para la resolución de los problemas que se presentaron a lo largo del trabajo.

Estas dos primeras funciones permiten calcular la aproximación de una integral de convolución con el método desarrollado en este trabajo. El programa funciona para métodos Runge-Kutta rígidamente precisos. Toma como argumentos de entrada los datos del integrador Runge-Kutta A, b, c , la función $\hat{f}(s)$ Transformada de Laplace de la función $f(t)$, la función $g(t)$, la longitud del intervalo en el que calculamos la integral de convolución y los parámetros de discretización $npas, L$ y R . El parámetro $npas$ es el número de pasos del método, que es equivalente a dar el parámetro h . La salida del programa será un vector y que contendrá las aproximaciones de la función $y(t)$ en los nodos de discretización.

```
function [y]=convolucion_nucleo(A,b,c,f,g,npas,T,L,R)
    h=T/npas;
    t=[0,(1:npas)*h];
    y=zeros(1,npas+1);
    dim=length(b);
    A_1=inv(A);
    gn=zeros(dim,npas);
    for i=1:npas
        gn(:,i)=g(t(i)+h*c);
    end
    [W]=calc_nucleo(A_1,f,npas-1,h,L,R);
    for n=0:npas-1
        for k=0:n
            y(n+2)=y(n+2)+W(n-k+1,:)*gn(:,k+1);
        end
    end
end
```

```

function [W]=calc_nucleo(A_1,f,N,h,L,R)
    dim=length(A_1);
    W=zeros(N+1,dim);
    C=exp(2*pi*i/L);
    e=zeros(1,dim);
    e(dim)=1;
    for l=0:L-1
        delta=A_1*(eye(dim)-R*C^(-1)*sparse(1:dim,...
            dim*ones(1,dim),ones(1,dim),dim,dim));
        delta=delta./h;
        [V,D]=eig(delta);
        for j=1:dim
            D(j,j)=f(D(j,j));
        end
        V_1=inv(V);
        for n=0:N
            W(n+1,:)=W(n+1,:)+e*V*D*V_1*C^(n*L);
        end
    end
    for n=0:N
        W(n+1,:)=(R^(-n)/L).*W(n+1,:);
    end
end

```

Para el caso no rígidamente preciso, podemos utilizar las siguientes 3 funciones. En contrapartida con el caso anterior, para este es necesario introducir el valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} = f_0$ y en lugar de introducir R, utilizaremos epsilon para calcular R internamente en el programa, ya que en el caso no rígidamente preciso debemos variar el parámetro R.

```

function [y]=convolucion_NRP(A,b,c,f,g,f_0,npas,T,L,epsilon)
    h=T/npas;
    t=[0,(1:npas)*h];
    A_1=inv(A);
    unos=ones(length(b),1);
    K=b'*A_1*unos;
    [y_1]=convolucion_primertermino(A,b,c,f,g,npas,T,L,epsilon);
    [y_2]=convolucion_segundotermi(A,b,c,f,g,npas,T,L,epsilon);
    gn=zeros(length(b),npas);

```

```

    for i=1:npas
        gn(:,i)=g(t(i)+h*c);
    end
    y_3=[0,b'*gn];
    y=K^(-1)*y_1+h*(1-K^(-1))*(y_2+f_0*y_3);
end

function [W]=calc_nucleo_primertermino(b,A_1,f,N,h,L,epsilon)
    dim=length(A_1);
    W=zeros(N+1,dim);
    C=exp(2*pi*i/L);
    unos=ones(length(b),1);
    K=b'*A_1*unos;
    e=b'*A_1;
    R=min([1,abs(1/(1-K))]) - epsilon;
    for l=0:L-1
        delta=A_1-R*C^(-1)/(1+R*C^(-1)*(K-1))*A_1*unos*e;
        delta=delta./h;
        [V,D]=eig(delta);
        for j=1:dim
            D(j,j)=f(D(j,j));
        end
        for n=0:N
            W(n+1,:)=W(n+1,:)+e*V*D*inv(V)*C^(n*1);
        end
    end
    for n=0:N
        W(n+1,:)=((R^(-n))/L).*W(n+1,:);
    end
end

function [W]=calc_nucleo_segundotermino(b,A_1,f,N,h,L,epsilon)
    dim=length(A_1);
    W=zeros(N+1,dim);
    C=exp(2*pi*i/L);
    unos=ones(length(b),1);
    K=b'*A_1*unos;

```

```

R=min([1,abs(1/(1-K))]) - epsilon ;
for l=0:L-1
    delta=A_1-R*C^(-1)/(1+R*C^(-1)*(K-1))*A_1*unos*b'*A_1;
    delta=delta./h;
    [V,D]=eig(delta);      %delta *V=V*D
    for j=1:dim
        D(j,j)=D(j,j)*f(D(j,j));
    end
    for n=0:N
        W(n+1,:)=W(n+1,:)+b'*V*D*inv(V)*C^(n*1);
    end
end
for n=0:N
    W(n+1,:)=(R^(-n))/L.*W(n+1,:);
end
end

```

En el caso de la resolución de ecuaciones integrales es necesario utilizar otros programas diferentes. En estos programas la función $y(t)$ es un dato mientras que la función $g(t)$ será la salida del programa.

```

function [g]=ec_int(A,c,f,y,npas,T,L,R)
h=T/npas;
t=(0:npas)*h;
dim=length(c);
A_1=inv(A);
[W]=calc_nucleo_ecint(A_1,f,npas-1,h,L,R);
W=real(W);
g=zeros(1,npas+1);
G=zeros(dim,npas);
W_0=W(:, :, 1);
for n=0:npas-1
    Y=y(t(n+1)+c*h);
    Wg=zeros(dim,1);
    for k=0:n-1
        Wg=Wg+W(:, :, n-k+1)*G(:, k+1);
    end
    g_n1=W_0\ (Y-Wg);

```

```

        G(:,n+1)=g_n1;
    end
    g(2:end)=G(dim,:);
    g(1)=g(2);
end

function [W]=calc_nucleo_ecint(A_1,f,N,h,L,R)
    dim=length(A_1);
    W=zeros(dim,dim,N+1);
    C=exp(2*pi*i/L);
    for l=0:L-1
        delta=A_1*(eye(dim)-R*C^(-l))*sparse(1:dim,dim*ones(1,dim),ones(1,dim));
        delta=delta./h;
        [V,D]=eig(delta); %delta * V = V * D
        for j=1:dim
            D(j,j)=f(D(j,j));
        end
        V_1=inv(V);
        for n=0:N
            W(:,:,n+1)=W(:,:,n+1)+V*D*V_1*C^(n*l);
        end
    end
    for n=0:N
        W(:,:,n+1)=(R^(-n)/L).*W(:,:,n+1);
    end
end
end

```


Bibliografía

- [1] C.Lubich, *Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus I.*, Numer. Math. 52,129-145 (1988)
- [2] C.Lubich, *Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus II.*, Numer. Math. 52, 413-425 (1988)
- [3] A. Ríos, *Aproximación numérica de integrales de convolución mediante el método de cuadratura de convolución* Santiago de Compostela (Trabajo fin de grado), Universidad de Santiago de Compostela
- [4] Lehel Banjai, Matthias Messner, Martin Schanz, *Runge-Kutta convolution quadrature for the Boundary Element Method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 245-246 (2012) 90-101
- [5] J.C Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., The University of Auckland, New Zealand
- [6] Hairer, Nørsett, Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I Nonstiff Problems*, (1993), Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [7] Dyke, P.P.G., *An Introduction to Laplace transforms and Fourier series*, London [etc.] : Springer, cop. 2000
- [8] I. Márquez, J.J. Nieto, *Variable Compleja*, Santiago de Compostela (2017), Universidad de Santiago de Compostela
- [9] Lloyd N. Trefethen and J. A. C. Weideman, *The Exponentially Convergent Trapezoidal Rule*, SIAM Rev., 56(3), 385–458. (74 pages)
- [10] Wikipedia,(5/06/2020),*List of Runge-Kutta methods*, recuperado de https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Runge-Kutta_methods

- [11] M.P.Calvo, E.Cuesta and C.Palencia, *Runge-Kutta convolution quadrature methods for well-posed equations with memory*, Numer. Math. (2007) 107:589–614