ESTUDIAN
DE
ARITMETI

ARITMETICA,

Ó CIENCIA

DEL NUMERO, PESO,

Y MEDIDA;

DISPUESTA POR UNO de sus Estudiantes.

CON LICENCIA:
En Santiago por D. Ignacio Aguayo.
Año de 1797.

DEDICATORIA
A la Justicia entre los Hombres:

A tí Deidad que con numero, peso, y medida justificas è iluminas à los hombres para su bien, te dedica un Estudiante este corto efecto, y todos los que en el produgeren los rayos que le comuniques; pues quando sean justos segun le ordenas, no podrás menos de acetarlos.

AL LECTOR.

Mi amado Lector, no busques en estos principios de Matematica, historia de su origen y progresos, y menos critica de Autores que haya tenido; pues soy de sentir, que asì como yo deseo acertar con lo mejor para utilidad de mis semejantes, asì lo desearon todos, y sì ni ellos ni yo hemos llegado à la perfeccion, quédo, y quedámos los presentes, y futuros con la obligacion de hacer todas las diligencias de que seámos capaces para llegar à ella, trabajando sin perder tiempo bá-

jo aquella suprema sentencia: con el sudor de tu rostro ganarás el sustento, *para aliviar en este estudio al aplicado, hé procurado acomodar y reunir en este libro portatil quanta ciencia de Aritmetica hé alcanzado, demostrandola con la fuerza que hè podido, hablando siempre sobre exemplos de que abunda, y numerando todo parrafo que podría ser citado. Quando llega este caso pongo el numero dentro de un parentesis ( ) y quiere decir, que en aquel parrafo está la regla ò razon que convence la razon que allì se trata, todo con el fin de que esta Obra enseñe à*

dis-

discurrir, y que el que la estudie, quede bien dispuesto para seguir las Matematicas utiles à todos generalmente, pues sin èllas ò parte de ellas, ni hay General, ni Legista, ni Juez, ni Labrador, ni Artesano que pueda obrar con toda justificacion en numero, peso, y medida.

TRATA ESTE LIBRO POR orden natural de parrafos.

De

Re-

De

que-

„ Aritmetica ò ciencia que tra-
„ ta de los numeros ò quantidad
„ discreta

„ La quantidad mensurable en
„ quanto mensurable, es el objeto
„ propio de la Geometria, y el
„ peso, ò pesantéz de la quantidad
„ es el objeto de la Dinamica.

NOTA.

QUando el compositor de este Libro se presentó con él manuscrito ante el Señor Don Vicente Peñuelas de Zamora, Regente de la Audiencia de la Coruña, solicitando su revision, y permiso para imprimirlo, vió en este Señor su grande afabilidad natural, y amor à las ciencias, y esto mismo confirma la definicion que an-

tece-

tecede, y que en papel separado le há enviado despues con el permiso que solicitó, encargando de palabra, que se ponga à la cabeza. Mira el compositor del Libro à esta definicion, como el adorno, y honor de su Tratado, y la satisfaccion que le causa; le hace prorrumpir, diciendo. Que si todos los sugetos que en el dia administran la Justicia, fueran de las calidades que le pareció, se hallan en este Señor, à quien jamás viò hasta entonces, podriamos decir: Dichoso tiempo en que para obtener cada uno lo que sea justo, no necesita usar del empeño, ni otros medios abominables, que à lo menos siempre lleban semblante de querer torcer la vara de la Justicia.

FEE DE ERRATAS.

Pag. 12. linea 14. si tal vez se respondiese; lee *si tal se respondiese.*

Pag. 80. lin. 21. es $\frac{23}{42}$; lee *es* $-\frac{23}{42}$

Pag. 288. lin. 2. $= 20 -$ tercero; lee $= 20.$ *tercero*

Pag. 309. lin. 13. $\overline{1+19X}^{\frac{2}{7}}$; lee $\overline{1+19X}^{\frac{1}{2}}$.

Pag. 348. lin. 19. mismo; lee *misto.*

Pag. 353. lin. 8. $x+7=8x+7z.$; lee $x+7 \ldots 8x+7z.$

Pag. 362. lin. 8. $3a^2ab$; lee $3a^2b.$

ARITMETICA.

1. ESTA Ciencia trata de los numeros, y con éllos de la cantidad discreta, ò numerable, esto es de todo aquello que es, fue ò serà capáz de aumento, ò diminucion, y se puede representar con numeros ó cifras, y es el primer ramo de las Mathematicas, las quales tienen por objeto tratar en quanto incluye el numero, peso, y medida.

2 No conocemos el valor ò estimacion de una cosa sino quando la comparamos con otra con quien tenga conexion, ò relacion, y sea de valor conocido, ò aceptado por los hombres; por egemplo, no conocemos el valor de una vara de paño que se nos presenta à la vista, hasta que comparamos su calidad con la de otro, cuyo precio de vara yà sabemos de antes, ò en que estamos convenidos. Para conocer el valor sin esta relacion, que se llama en *absoluto*, necesitabamos

saber el fin para que Dios crió la cosa que valúamos, el que se ha reservado á lo menos durante nuestra vida mortal.

3. Asi pues en la Aritmetica desde sus primeras cifras, ò numeros, se hace uso de este principio, yá sea que se trate *abstractamente*, que es hablando solo con los numeros, ó *concretamente* haciendo que estos representen á otras cosas, como à hombres, monedas, dias, &c. Tratarémos indiferentemente de uno, ú otro modo, segun parezca oportuno para la mejor comprehension; porque la experiencia hace ver, que los principiantes las mas veces no forman idea de lo que se trata hasta que se les contrahe la Teoria à egemplos familiares.

CONOCIMIENTO DE LAS *Cifras Aritmeticas para leer qualquier guarismo ò cantidad.*

4. Todos tenemos idèa de la unidad, ò uno, porque nuestra aten-

cion

cion solo se puede fijar à un mismo tiempo en un solo objeto; y este por medio de los sentidos comunica à nuestra alma el informe de la *Unidad*, que se indica con esta cifra 1, como 1 dia, 1 año, 1 hombre, &c. Por lo qual se puede definir *la unidad es la primera; ò primero de todos sus semejantes:* y de aqui viene como à la mano por sucesion la idéa del dos (indicado con esta 2 que vale doble que 1); pues solo consiste en pasar la imaginacion como le es tan facil de una unidad à otra segunda, y lo mismo à la tercera, quarta, &c. que se representan aritmeticamente asì.

Cero, ò nada.	Uno.	Dos.	Tres.	Quatro.	Cinco.	Seis.	Siete.	Ocho.	Nueve.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.

5. Nombranse estas cifras *simples* por contener cada una solo unidades de la primera; y pues ge-

generalmente entre los muchos modos y cifras, que para contar se han usado, està admitido el que resulta de las varias convinaciones de dichas cifras simples, se tendrá entendido que aunque cada una de éllas estando sola, no tiene mas valor que el señalado en las unidades simples que indica, si se arrima à qualquiera el cero, ù otra de las cifras à la derecha, ó à la izquierda, se conviene en que la de la derecha son unidades simples iguales cada una á la primera, y en que cada unidad de la cifra izquierda valga por diez de las de la derecha: juntèmos pues el cero à las simples, y resultan.

Diez.	Veinte.	Treinta.	Quarenta.	Cinquenta.	Sesenta	Setenta.	Ochenta.	Noventa.
10	20	30	40	50	60	70	80	.90

6. Estas cifras se nombran *compuestas* por constar de mas de una,

y

y por lo explicado (5) se llaman *Decenas* à toda cifra que ocupa el segundo lugar à la izquierda.

7. El mismo efecto que el cero origina otra cifra qualquiera de las simples que se coloque à la derecha, de que se sigue.

Que si se juntasen hasta 3 cifras de esta suerte 2 3 5. se debe entender: que la primera 5. conserva su valor de unidades simples (4), cada unidad del 3. son decenas (6), y cada unidad del 2 tercera cifra à la izquierda vale por diez de una de las decenas, y tanto como ciento de las unidades simples; de donde viene, que à toda cifra del tercer lugar ácia la izquierda se le dé nombre de *Centenas*, y à las tres cifras juntas se llama *guarismo*.

8. Tambien si se continúa en juntar otra cifra, y que queden quatro de esta suerte 2357. el 7. conserva su valor de unidades (4.), el 5. decenas (6), el 3. centenas (7.), y el 2. unidades de millar, esto es

que

que cada unidad suya vale por diez de una de las centenas, por ciento de una de las decenas, y por mil de una de las unidades; por lo qual à toda cifra que ocupa el quarto lugar à la izquierda se la dá nombre de *millar*, ó *unidades de millar*, y de este modo se forma idea del ascenso que llevan estas cifras, y que manifiestan los siguientes rotulos colocados à las mismas.

&c.			
9.	Unos.....	de viq.tos ó millones de millones.	2
4.	Cientos.	Miles de millones.	
1.	Dieces...		
3	Unos....		
7.	Cientos..	Quentos, ó millones.	
6.	Dieces...		
5.	Unos.....		
8.	Cientos..	Miles.	1
0.	Dieces...		
1.	Unos.....		
0.	Cientos..	Unidades simples.	
3.	Dieces...		
6.	Unos.....		

9. Luego para leer un guaris-
mo qualquiera, ó cantidad, se di-
vidirà de tres en 3. cifras con un
punto ó, coma de la derecha hacia
la izquierda, y de seis en seis (à
que llaman dignidad) con las cifras
1, 2, 3, &c., y teniendo presente
en cada division que la primera ci-
fra son unidades (4.), segunda de-
cenas (6), y tercera centenas (7.),
no habrà mas que hacer que repe-
tir los nombres colocados à cada
cifra; asi toda la cantidad propues-
ta se lèe, nueve viquentos, quatro-
cientos trece mil, setecientos sesen-
ta y nueve quentos, ochocientos un
mil y treinta y seis unidades sim-
ples, y contentaremonos con leer-
los bien de carretilla como se sue-
le decir, pues cantidades de estas,
ò mas cifras aun contrahidas à es-
pecie, no estàn bájo los alcances de
nuestra imaginacion; estó es, creo
no podemos formar ideas tan di-
latadas.

SIGNOS O SEÑALES, QUE *se usan en las Operaciones Aritmeticas para el mejor règimen, é ilacion de sus Operaciones.*

10. Para indicar que se han de sumar dos ó mas cantidades, sirve este signo † llamado de *mas*, *positivo*, ó *adiccionario* asi 12 † 13 † 8. quiere decir que estas cantidades se han de sumar, ò juntar en una: quando son de una misma especie, ó dejar la suma indicada quando son de distinta, como se verà en su lugar, quando tratemos de sumar.

11. Para la resta entre dos cantidades se usa de este signo — llamado de *menos*, ò *negativo*, y quiere decir, que el valor de la cantidad que está à la derecha se ha de sacar ò restar del valor de la cantidad que està à la izquierda asì 12 — 8.

12. Para quando una cantidad se ha de multiplicar por otra se hace uso de este signo x asì 12 x 8.

13. Quando se ha de partir la una por la otra se les interponen dos puntos de esta forma 12 : 8.

14. Si el valor de una cantidad, ò de muchas es igual al de otra, ú otras, se usa de este signo = así 12 = 8 † 4.

15. Y para indicar que el valor de una, ò mas cantidades es mayor que el de otra, ù otras, se hace uso de este $>$ de modo que la punta caiga à la parte de la cantidad, ò cantidades que valen menos así $6 > 5$.

16. Axioma. *El todo es igual à todas sus partes juntas.* Este y semejantes axiomas no necesitan de demostracion, porque se hace manifiesta su verdad á la luz natural, pero no estarà demas su aclaracion en un egemplo para formar juicio. Represente la cantidad 20. à veinte libras de plata, cada unidad separadamente tambien representará à una libra de plata, y se concive que juntas las 20. unidades, ò libras com-

pon-

pondràn al todo, ù 20. libras de plata supuestas.

DEL SUMAR.

17. Definicion: *Sumar, es juntar qualesquiera cantidades de una misma especie en una que sea igual, ó valga tanto como todas.*

REGLA.

18. Para conseguir la suma se sentarán las cantidades en coluna, ùnas bàjo de otras, de modo, que correspondan unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas, &c. como aparece en el egemplo.

Propuesta.

Se piden sumar 2368†316†1610†109.

$$\text{Formacion.}\left\{\begin{array}{r} 2368 \\ 316 \\ 1610 \\ 109 \end{array}\right.$$

Suma........ 4403

Prin-

Principio diciendo por las unidades, 8. y 6. son 14., mas cero, ó nada son los mismos 14., y 9. son 23, pongo las 3. unidades bájo del 9. y llevo las dos decenas que hay en 23. à su lugar à juntarlas con las de su especie. Continúo diciendo 2., que llevo (será bueno acostumbrarse à contar estas que se llevan las primeras para evitar luego duda, ó el que se olviden) y 6. son 8, mas 1. = 9., mas 1. son 10. y mas cero son los mismos 10., por lo que pongo cero bájo las decenas, y llevo 1. á las centenas, en donde diré, 1. y 3. son 4, † 3 = 7, † 6. = 13, † 1. = 14. siento el 4. en las centenas, y llevo 1. à las unidades de millar en donde sigo.

Una y 2. son 3. † 1. = 4. que siento en quarto lugar à la izquierda, con lo que está conseguida la suma, y respondiendo à la propuesta, digo.

Que habiendo sumado las cantidades 2368. con 316. † 1610. † 109.

es

es la suma, ò el todo de ellas = 4403. unidades.

De este modo se deben repetir los egemplos que parecieren necesarios hasta quedar impuesto el que aprehende del método.

19. Las cantidades que se han de sumar, ó hacer un todo, ó cuerpo, deben sèr de una misma especie, porque 6. pesos sumados con 4. reales, cuya suma ó todo serìa 10, ni bien se puede decir que son 10. pesos, ni 10. reales, es evidente el absurdo, si tal vez se respondiese.

20. Por tanto unicamente quanto se puede hacer en estos casos, es indicar la suma de estas, y otras qualesquiera cantidades desemejantes que se han de sumar, interponiendoles el signo + asì 6. pesos + 4. rs., conque queda indicada la suma mientras no llegan al caso de sér semejantes, ó de una misma especie.

Idea del Restar.

21. De qualquiera cantidad tomada

mada como todo se podrá considerar que se saca, ó toma una ó mas partes, y que se intenta saber quanto queda hasta el todo, en cuyo asunto trata la regla siguiente de

RESTAR.

22. Definicion: *Restar, es hallar la diferencia que hai entre dos cantidades de una misma especie*, como entre 20. y 12. libras de plata, ó como entre 1268. y 392. reales.

23. La cantidad mayor que es el todo respecto la otra, se nombra *restando*, la menor que es parte respecto la mayor se llama *restador*, y la que resulte de la operacion, *residuo*, *exceso*, ó *diferencia*.

Primer Egemplo.

24. Se piden restar de las 20. libras de plata, las 12. de su misma especie; cuyo caso es lo mismo que si à un hombre se le deben las 20. libras, y pagandole 12. se desea saber quântas se le quedan debiendo.

RE-

REGLA.

25. Sientense las cantidades, unidades bájo de unidades, decenas bájo de decenas, &c. como aparece

20.. Restando.
12.. Restador.

Egecuto la regla diciendo, de 2 unidades del restador à diez del restando (digo en el cero de las unidades del restando 10. porque aunque el cero es nada (5) tiene fiador en las decenas de donde se puede imaginar que se toma una unidad que vale diez unidades simples) van 8. que pongo bâjo las unidades.

Prosigo à las decenas, y ùso qualquiera de estos dos modos: 1º una que llevo de diez, junta con la una decena del restador son 2., el exceso de estas 2. á las dos decenas del restando es nada ó cero, que pongo bájo de las decenas: 2.° podia decir, el exceso de una decena del restador à otra que debia haber quedado despues de haber sacado la decena

cena del restandó para restar las unidades, tambien es cero, luego salen 8. unidades de exceso, ó residuo, con lo qual queda el egemplo de esta forma.

20. Restando.
12. Restador.

08. Residuo.

Y puedo responder, que habiendo restado 12. de 20., dá de residuo 8.: ó contestando al egemplo en especie; diré, que siendo el todo de la deuda 20. libras de plata, y 12. libras la parte que se paga, son 8. libras la parte que se queda debiendo.

26. Por el mismo estilo se efectuará la resta del egemplo $1268 - 392 = 876$.; pues solo consiste en ir restando ò sacando el exceso que hay de todas las unidades que componen el restando, à todas las unidades que componen el restador; esto es, sacar las unidades, decenas, centenas, &c. del restador, de

de sus correspondientes en el restando, è ir notando debajo el exceso.

27. Si el egemplo fuese (como sucede à menudo) restar de una cantidad menor otra mayor, por egemplo restar 20. de 12., respecto que la mayor 20. no se puede sacar de la menor 12., yá que, segun suponemos, son unidades de una misma especie, harémos la resta, sacando los 12. de los 20. segun (25.), y á la diferencia 8. se le debe anteponer el signo – así – 8., y dá à entender, que si à uno le deben 12. reales, y le pagan 20. debe bolver 8. al que paga, ò que debia pagar 20. – 8.

28. Deben ser ambas cantidades, restando, y restador de una misma especie, pues de no serlo, no se podrá efectuar la resta; por que si à Juan se le deben 20. libras de plata, y se le pagan 8. pesos, no podriamos decir, egecutando la regla 20 – 8 = 12., que el residuo 12. eran libras que se le debian;

pues

pues una libra de plata no se compensa con un peso, ni al contrario, y solo hay compensacion para 20. libras de plata con otras 20. de su misma especie, ni parte alguna suya se compensará con otra que tenga distinto valor; por tanto:

29. Es lo mismo esta operacion del restar, que destruìr ò quitar en el restando tanto valor como tiene el restador; de consiguiente, si las cantidades son semejantes, se podrán destruír, ò hacer la resta; pero sinó, solo se podrá dejar indicada así; 20. pesos restados de 50. doblones será $\overset{d}{50} - \overset{p}{20}$.

Prueba del Restar.

30. La prueba del restar se hace por el sumar. Por luz natural se conoce, que siendo la deuda 20. pesos, y lo que pagan 8., se tiene 20 − 8 = 12 parte de pesos que se quedan debiendo, éstos, y los 8. de la parte que se paga, deben

componer los 20., que es el todo de la deuda supuesta ; pues de lo contrario, no se conformarìa el acrehedor, ò el sugeto à quien se le deben los 20. pesos. *Luego sumando el restador con el residuo deben componer el restando.*

Prueba del Sumar.

31. La prueba del sumar se hace por el restar, y para ello repitamos sumando las cantidades 260. † 301. † 2013.

Formacion..........	260
	301
	2013
1ª Suma..........	2574
2.ª Suma..........	2314
Exceso, ó diferẽcia.	260

Sumo las 3. cantidades segun se hizo (18), y dan la 1.ª suma 2574.

32.

32 Para la prueba, separo con una linea alguna, ò algunas cantidades, por egemplo la primera 260, y sumando las restantes pongo la 2ª suma bàjo de la primera, y restando la 2ª de la 1ª debe dar por residuo la cantidad 260. omitida en la 2a suma.

La razon, es porque la 1ª suma 2574. es el todo de las tres cantidades 260. † 301. † 2013. que son sus partes; la 2ª suma 2314. es el todo de solas las dos 301. † 2013.; luego la primera suma debe ser mayor que la 2ª en la parte que à esta se le omitió: veamos si el exceso de la 1ª à la 2. (25) es la parte omitida, ó cantidad separada, y en tal caso quedarémos Christo con todos.

Segunda Prueba de Sumar.

La suma ó todo, se compone de la suma de unidades, de la de decenas, de la de centenas, &c. Luego si al rebes quitamos la suma ma de centenas, quedaràn decenas y unidades, si sacamos las decenas, quedarán las unidades, y si por ultimo quitamos las unidades, debe quedar nada, ò cero.

En el egemplo siguiente sumado se manifiesta esta doctrina.

	237
	468
	259
	607
	895
	2466
Suma de centenas............	22
Quedan decenas y unidades..	266
Suma de decenas...............	23
Son las unidades................	36
Suma de unidades................	36
Queda o, ó nada................	o

TABLA DE LOS PRODUCTOS de cada una de las 9. cifras con todas ellas, que se debe aprender de memoria mui correlativamente para multiplicar bien.

productos del 1	productos del 3	productos del 5
1 x por 1...1	3 x por 1..3	5 x por 1..5
1 x 2.......2	3 x 2.......6	5 x 2.....10
1 x 3.......3	3 x 3.......9	5 x 3.....15
1 x 4.......4	3 x 4.....12	5 x 4.....20
1 x 5.......5	3 x 5.....15	5 x 5.....25
1 x 6.......6	3 x 6.....18	5 x 6.....30
1 x 7.......7	3 x 7.....21	5 x 7.....35
1 x 8.......8	3 x 8.....24	5 x 8.....40
1 x 9.......9	3 x 9.....27	5 x 9.....45
productos del 2	productos del 4	productos del 6
2 x por 1..2	4 x por 1..4	6 x por 1..6
2 x 2.......4	4 x 2.......8	6 x 2.....12
2 x 3.......6	4 x 3.....12	6 x 3.....18
2 x 4.......8	4 x 4.....16	6 x 4.....24
2 x 5.....10	4 x 5.....20	6 x 5.....30
2 x 6.....12	4 x 6.....24	6 x 6.....36
2 x 7.....14	4 x 7.....28	6 x 7.....42
2 x 8.....16	4 x 8.....32	6 x 8.....48
2 x 9.....18	4 x 9.....36	6 x 9.....54

productos del 7	productos del 8	productos del 9
7 x por 1..7	8 x por 1..8	9 x por 1..9
7 x 2.....14	8 x 2.....16	9 x 2.....18
7 x 3.....21	8 x 3.....24	9 x 3.....27
7 x 4.....28	8 x 4.....32	9 x 4.....36
7 x 5.....35	8 x 5.....40	9 x 5.....45
7 x 6.....42	8 x 6.....48	9 x 6.....54
7 x 7.....49	8 x 7.....56	9 x 7.....63
7 x 8.....56	8 x 8.....64	9 x 8.....72
7 x 9.....63	8 x 9.....72	9 x 9.....81

MULTIPLICAR.

33. Definicion: *Multiplicar*, *es tomar tantas veces á una cantidad, quantas unidades hai en otra; ó es un sumar abreviado.*

34. La cantidad que se multiplica se llama *multiplicando*, la que multiplica *multiplicador*, y la que resulta de la operacion *producto*, y al multiplicando y multiplicador tambien llaman *factores del producto*,

35. Para inteligencia de la definicion sirva el egemplo siguiente

en

en que se pide multiplicar 3 por 4.

Formacion. { 4 Multiplicando.
3 Multiplicador.

12 Producto.

Digo 3 x 4. hacen 12, siento
el 2 bàjo las unidades, y la unidad
que llevo por la una decena que se
ha completado, pongola à la izquier-
da en su lugar de decenas; con que
se puede responder, que habiendo
multiplicado 4 por 3 es el produc-
to 12., y pues tomando al 4 tres
veces asì 4 † 4 † 4 = 12. da de su-
ma los 12., y lo mismo tomando
al 3 quatro veces 3 † 3 † 3 † 3 = 12;
se hace evidente, que el *multiplicar
una cantidad por otra es tomar las
unidades de la una qualquiera tantas
veces como unidades tiene la otra*, y
pues esto no puede sér sin que *mul-
tiplique cada cifra del multiplicador á
todas las del multiplicando*, como ve-
rémos en los egemplos, sirbanos es-
te aviso de regla general.

36. Respecto que el valor de la cifra o, por si sola es nada (5), se sigue que o x por qualquiera cifra, es lo mismo que la nada tomada qualquiera numero de veces, que siempre es nada; pues en ella no hai sugeto, pero ya que el o. hace que las cifras de la izquierda sean decenas, resulta que quando qualquiera cantidad se haya de multiplicar por 10. se tendrá conseguido con solo colocar el o. à la derecha de la cantidad asì 3 x 10. = 30.; dos ceros si la cantidad se ha de multiplicar por 100. asì 3 x 100 = 300; y tres ceros si por 1000., &c.

1.º De que resulta, que unidades multiplicadas por decenas da al producto decenas.

2.º Unidades por centenas da centenas.

3.º Unidades x por millares da millares.

4.º Decenas x por decenas da centenas así, 10x10 = 100.

5.º Decenas por centenas da millares asì, 10x100 = 1000.

6.º Decenas por millares dará decenas de millar, asì 10 x 1000 = 10000.

7.º Centenas por centenas asì 100 x 100 = 10000. da decenas de millar, y así se saben los demás productos el grado que ocupan.

37. Para mas convencernos de estas operaciones, supongamos que se ofrece multiplicar decenas por decenas: por egemplo, 20. por 30., digo que se tendrá conseguido con hacer la multiplicacion 2 x 3 = 6, y al producto 6. colocarle los dos ceros de seguida à la derecha, así 600.

La razon es, porque si la propuesta fuera multiplicar solamente 2 unidades por 3 unidades, el producto serìa 6 unidades (35); pero siendo el 2 decenas, el producto será 6 decenas, ò 60. unidades; asímismo siendo el 3. tambien decenas debe ser el producto 10 veces mayor, ò 600. Luego *para los casos en que se ofrezca multiplicar cantidades acompañadas de ceros á la derecha.*, podemos

mos usar esta regla *multipliquense las cantidades sin los ceros , y luego coloquense estos de seguida à la derecha del producto.*

38. Egecutémos este egemplo 30600 x 120., y sea con intento de aclarar el methodo de multiplicar con mas cifras.

Para efectuar esta regla con orden se sientan las cantidades por lo regular la menor bajo la mayor en columna , unidades bajo de unidades , decenas bajo de decenas , de esta forma,

306.	multiplicando
12	multiplicador

39. Y llevando presente que cada cifra del multiplicador ha de multiplicar à todas las del multiplicando (35), principio por las unidades del multiplicador á las del multiplicando, de esta suerte 2 x 6 = 12., pongo el 2 unidades bajo el 2 del multiplicador, y llevo la decena à su lugar, ó columna.

Sigo

Sigo á las decenas 2 x o = o(36), esto es 2 unidades del multiplicador por cero decenas del multiplicando es el producto cero, y por tanto solo pongo en este lugar la una decena, que se completó antes con unidades.

Continúo multiplicando las 2. nidades del multiplicador por 3 centenas del multiplicando, y digo 2 x 3 = 6., que siendo el 3 centenas lo son tambien el producto 6. (36), y por lo mismo sientolas en su lugar de centenas, que es el tercero à la izquierda, y queda el egemplo de esta suerte.

$$\begin{array}{r} 306 \\ 12 \\ \hline 612 \end{array}$$ Producto parcial.

Reflexion: Este producto nos hace ver que hemos tomado la cantidad 306. dos veces con arréglo á la aclaracion (35). Pasémos à multiplicar con las decenas del multiplicador, que

que en este caso es 1., y se dirá $1 \times 6 = 6.$, esto es el 6. tomado una vez, ó lo que es lo mismo el 1 tomado 6. veces da 6 (35), pero 1. es decena ó 10., luego 6. serán decenas ó 60. (36), pongo el 6. en coluna de decenas, y basta.

Páso á multiplicar $1 \times 0 = 0.$, esto es, una decena del multiplicador por cero decenas del multiplicando, es cero centenas, y por tanto es suficiente poner cero en las centenas debajo del 6.

Paso á multiplicar las centenas, y digo $1 \times 3 = 3$ que pongo en quarto lugar à la izquierda, ò en los miles; porque siendo el 1 decena, y el 3 centenas ò 300, su producto debe ser 3000 (36), y todo el 2.° producto parcial por ahora es 3060, que es haber tomado al multiplicando 306. diez veces, y por tanto puesto en su lugar, queda el egemplo de esta suerte.

306	Multiplicando.
12	Multiplicador.
612...	1.º Producto parcial.
306.....	2.º Idem.
3672000.	Producto total.

40. Usando de la regla del sumar, se suman los productos parciales 612 y 3060, quedan de suma 3672., y colocando à la derecha de seguida los tres ceros (37), tenemos -- 3672000., por el producto total que se busca, el qual vale tanto, como 120 veces el multiplicando 30600., ó tanto como 30600. veces el multiplicador 120.

41. Debe advertirse, que el que de nuevo se esté imponiendo en este methodo de multiplicar, despues de inteligenciado en èl puede omitir el andar repitiendo si son decenas, centenas &c., y basta colocar sus productos con el orden que ván resultando; pero en la pràctica de los egemplos no debe con-

ten-

tentarse para quedar bien impuesto, asi en esta regla, como en las demás, con solo los egemplos que se ponen, es necesario repetir la operacion en otros, quantos mas mejor, pues mucho pan hace buen año.

EFECTOS DE LOS SIGNOS + y — en la multiplicacion.

42. Para quando se ofrezca multiplicar cantidades como 6., ó + 6. *positivas*, y como — 2 llamadas *negativas*, se pondràn aquì los efectos de los signos + y — en la multiplicacion, para lo qual sentarémos 1º el siguiente.

AXIOMA.

Cantidades iguales multiplicadas por cantidades iguales dan productos iguales, como $2 \times 3 = 2 \times 3 = 6$. en ambas partes.

43. Digo 1º que $+ \times +$ da +, esto es mas multiplicado por mas dà al producto mas, ò que cantidad

posi-

positiva multiplicada por cantidad positiva dá producto positivo.

Porque, lo mismo se entiende por 2. sin signo alguno, que por † 2. con signo positivo, y lo mismo por 3 que por † 3., luego por el Axioma (42), es 2 x 3 = † 2 x † 3 = 6 = † 6.

44. Digo lo 2°, que † x — da —: esto es, cantidad positiva multiplicada por cantidad negativa dà producto negativo, sea † 1 x — 6. digo que dà — 6.

Porque † 1 x — 6. es lo mismo que 1 x — 6., y es tomar al — 6, una vez, y como es cantidad negativa, debe permanecer lo mismo; si fuese † 2 x — 6. dá — 12. luego &c.

45. Lo tercero — x † dà —; esto es, cantidad negativa multiplicada por positiva dá producto negativo; sea — 1 x † 4. digo que si fuese 1 x 4 el producto serìa 4 = † 4 (43), pero como esto es lo mismo que haber tomado al 1 quatro veces (35), siendo negativo, ò — 1, el produc-

to

to debe ser − 4., esto es negativo; lo mismo dá en otras cantidades, como − 3x † 8 = − 24, &c.

46. Lo quarto − x − dá †, esto es negativa multiplicada por negativa dà positiva.

Para demonstrarlo supongamos.

$$\begin{array}{c} \dagger 2 - 2 = 0 \\ \dagger 1 - 1 = 0 \\ \hline \end{array}$$

Tenémos que o. x o. dá o., luego (42), $\overline{\dagger 2 - 2}\ \mathrm{X}\ \overline{\dagger 1 - 1}$ debe ser cero para concluirlo, $\overline{\dagger 2 - 2}\ \mathrm{X}\ \dagger 1$ dá $\dagger 2 - 2 = 0.$, solo falta que $\overline{\dagger 2 - 2}\ \mathrm{X} - 1$ dè cero, y para èllo es preciso, que − x − dé †, sin lo qual no se hace todo el producto $\dagger \overline{2 - 2}\ \mathrm{X} - 1 = 0.$, luego − x − dà †, que era lo propuesto.

PARTIR.

47. Definicion: *Partir es averiguar el numero de veces, que una cantidad contiene á otra; ó bien, ver*

quan

quantas veces el numero de unidades de la que divide, ó parte se iguala con igual numero de unidades de la que se parte; ó hacer á la cantidad que se devide tantas partes iguales como unidades tiene la que divide: ò es un restar abreviado.

48. La cantidad que se parte, se llama *dividendo*; la por quien se parte *divisor*, y la que resulta de la operacion, que es el numero de veces, ò una de dichas partes, *cociente.*

Si el cociente sale un justo numero, ò si el divisor se incluye en el dividendo un justo numero de veces, en este caso se llama al divisor *divisor exacto.*

49. Aclaracion de la definicion con egemplo, sea 12 la cantidad que se quiere partir por 4.

FORMACION.

Dividendo....12 | 4 Divisor.
00 3 Cociente.

Digo 12 partidos à 4 ; ò las veces que el 4 se contiene en 12 son 3, que pongo por cociente.

Multiplico 3. por 4., y el producto lo resto del dividendo, conque queda cero, y digo que habiendo partido 12. entre 4. es el cociente 3. justamente.

50. Confronto, ò pruebo de este modo: una vez que el cociente dice las veces que el divisor se contiene en el dividendo, yá que salen 3. sin sobrar nada, tomando al divisor 4. tres veces (35.) multiplicando, ó (18.) sumando, deberá resultar el 12. dividendo

$$\text{así}\,(35)..\,3 \times 4 = 12,\ \text{ó}\,(18)..\left\{\begin{array}{r} 4 \\ 4 \\ 4 \\ \hline 12 \end{array}\right.$$

51. Esta prueba nos fortifica en la inteligencia de los quatro sentidos que van sentados en la definicion, de los quales sacarémos utiles advertencias.

52. Por inteligencia del 1.º se vé, que el 12. contiene al 4. tres veces, segun el sentido comun que se dá al termino *contiene* en este lugar, y de aquì podemos tener para en adelante advertido: *que para averiguar quantas veces una cantidad contiene à otra, lo conseguirèmos partiendo aquella por esta.*

53. En cumplimiento del 2.º veo, que las 4. unidades del divisor, se igualan con las del dividendo, tomandolas tres veces, y de aquì podemos llevar presente; *que para saber quantas veces tomarémos una cantidad menor para que se iguale en unidades con otra mayor, lo efectuarémos partiendo la mayor por la menor; y el cociente dirà las veces que se ha de tomar la menor cantidad.*

54. Tambien se vé en esta prueba para inteligencia del tercer sentido de la definicion, que tomando al cociente tantas veces como unidades hai en el divisor, componen al dividendo; luego este en virtud

de

de la operacion de partir se hizo tantas partes iguales como unidades hai en el divisor, y de consiguiente *siempre que se pretenda hacer á una cantidad qualquiera numero de partes iguales, lo conseguirémos partiendo dicha cantidad por el numero que señala las partes iguales que se quiere hacer la tal cantidad*, y asi, si el 12. lo hubieramos pretendido hacer 4. partes, el cociente 3. sería la una.

55. Es ultimamente el partir un restar abreviado, porque si de 12. sacamos segun aquella regla (25) al 4, tres veces queda cero el mismo efecto que de la particion, y diriamos que tres veces se puede restar, ó sacar el 4. de 12.

56. Si el 12. que hemos dividido por 4. lo dividimos por 6. dà de cociente 2., en que se observa, que habiendo aumentado el divisor ha disminuido el cociente; tambien si el mismo 12. lo partimos por 3. el cociente resulta 4., y si lo dividimos por 2. el cociente es 6., en cu-

yas

yas operaciones se vé que: *una misma cantidad partida por distintos divisores, quando estos crecen disminuyen los cocientes al mismo pàso; y al contrario, quando los divisores disminuyen crecen los cocientes.*

57. Esta doctrina se estiende à todos los egemplos que puedan ocurrir, como verá el aplicado si lo esperimenta para satisfacerse, è imponerse quanto mas mejor; y ahora para dar à entender un metodo general de partir una cantidad numerica por otra menor, sirvan los egemplos siguientes.

1º En que se pretende partir una cantidad qualquiera como 1368. por una cifra, y sea 6.

Formo de este modo

Dividendo 1368 | 6 Divisor.

Vamos â ver que numero de veces se contiene el 6. en 1368.

58. 1ª Regla. Tómo tantas cifras del dividendo de izquierda à derecha, como hai en el divisor y digo,

1.

1. à 6. no le contiene, y por tanto tomaré tambien la cifra que sigue, y diré 13. à 6. le contiene 2. veces, que pondré bàjo del divisor, (ó en qualquiera otra parte) multiplico este cociente 2. por el divisor 6, y su producto 12. lo resto de las cifras 13. tomadas para dividir, cuyo residuo 1. déjo bàjo del 3., y à la derecha bajaré la cifra 6. que sigue, y quedarà el egemplo de esta forma.

$$\begin{array}{l|l} 1368 & 6. \\ \hline 16 & 2 \end{array}$$

2.ª Regla. Diré ahora 16. dividendo entre 6. divisor toca à 2. cuya cifra encontraré tanteando por multiplicacion con el mismo 6. y las simples (5) hasta llegar à la que dé el producto igual, ó mas cerca al 16. que está en division, la que pondré en el cociente, y multiplicando como antes (58) su producto lo restaré del 16. cuyo residuo 4. dejarè bájo del 6. y à la derecha le bajaré

jaré el 8 del dividendo, y quedarán 48. para continuar partiendo.

1368	16
16	22
48	

Repito la 2ª regla y digo, 48. à 6. cave à 8. que hallo tanteando por multiplicacion con el 6. y las cifras (5), pongo el 8. en el cociente à la derecha, multiplico la misma cifra 8. por el 6., y su producto 48. lo resto de las cifras que han quedado en division, que tambien fueron 48., conque queda el egemplo concluido de partir, y con este aspecto:

Dividendo 1368	16 Divisor.	
016	228. Cociente.	
48		
00		

Y digo, que habiendo partido 1368. por 6, es el cociente 228. justamente.

59 Partir por 10, 100, 1000, &c. *Qualquiera cantidad.*

Habiendo visto (5) que juntando un cero á la derecha de una cifra, v. g. al 2, asì 20., hace que cada unidad de este 2. sean decenas, ó valgan 10. tantos mas, y 100. si se colocan dos ceros (36), mil si tres, &c. Se tendrá por camino imberso, ó al reves, que *quitando un cero á la derecha de una cantidad que los tenga, lo que quede será diez veces menor, ciento si se quitan dos ceros, y mil si tres, &c.* Viene pues à ser lo mismo que partir la cantidad por 10, 100, 1000, &c.

60. Si las cifras de la derecha de una cantidad que se parte no son ceros, como si se ha de partir 36589. por 10., quitaré desde luego el 9., conque tengo el mismo efecto que con el cero, y diré que el cociente en enteros es 3658., y me quedan 9. que en esta disposicion no son partibles por 10. Tambien si el divisor fuese 100. quitaré asimismo el 8., y será el cociente 365. enteros mas las dos cifras 89. que no son

par-

partibles por 100., y cuyo desempeño toca despues tratando de quebrados. Y yá se conoce las que habria de separar si hubiese de partir por 1000., &c.

61. Propongamonos por ultimo partir una qualquiera cantidad por un divisor de 2., tres, ó mas cifras, y sea 783506 : — 398. El partir con desembarazo y acierto, depende de encontrar pronto aquella cifra verdadera que se ha de sentar en el cociente, para lo qual veamos si se puede aclarar un *tantèo* que se practica imaginariamente antes de sentar la cifra, con lo que se lleva luego la satisfaccion de ser la cierta.

62. No consiste este tantéo en otra cosa que en restar imaginariamente el producto de la cifra que se toma por todo el divisor de las cifras que se han separado para dividir, y ver si es, ò nó posible la resta; y es semejante este tantèo à la prueba 2ª del sumar (32), como

mo se comprehenderá despues de entendida su practica.

Posicion del egemplo. 783506 | 398.

TANTEO.

63. 1.º Tómo las tres primeras cifras 783. de la izquierda del dividendo por haber tambien tres en el divisor, y digo 783: à 398., ó bien 7. à 3. cabe ò le contiene à 2, que tendré en la imaginacion, y con ella digo 2 x 3 centenas del divisor hacen 6, que restadas de 7. centenas del dividendo separado, queda 1, à quien juntaré el 8. que sigue, y hacen 18. que miraré como decenas, de las quales se ha de restar el siguiente producto.

2.º Multiplico el mismo 2. imaginario por el 9. decenas del divisor, y su producto 18. lo resto de las 18. que me quedaron, de que resulta cero, al qual uniré à la derecha la cifra 3. del dividendo, que mìro como unidades, y quedan 0 3., de quien se ha de restar el siguiente producto.

3.º

3.º Multiplico el mismo 2. imaginario por el 8. unidades del divisor, y su producto 16. lo he de restar de o 3. que habian quedado, lo qual yà es imposible, y de esto infiero que la cifra que hé de poner al cociente debe ser menor que el 2. tomado.

64. Si despues de haber restado el ultimo producto (que serán estos tantos como cifras tenga el divisor) aun quedase un residuo mayor que el divisor, manifestarà que la cifra tomada ò considerada para cociente, debe ser mayor, y por tanto de estos dos puntos se deduce, *que mientras la resta sea posible, y el residuo ultimo menor que el divisor, la particion puede ir bien.*

65. En abóno de este tantéo debo decir, que aunque parece enredoso y dilatado, despues de comprehendido se egecuta imaginariamente con mucha brevedad y satisfaccion, y parece mui propio para egercitar la imaginativa.

66 Continuando pues la particion del egemplo propuesto, tomadas sus tres primeras cifras 783. partidas à 398. veo que solo le alcanza á 1. de cociente, multiplico esta cifra por todo el divisor (35), y su producto 398. lo resto de 783, de que resulta por residuo 385, bájole à la derecha la siguiente cifra 5. del dividendo, con que quedan 3855. para continuar partiendo; y el egemplo con este aspecto.

$$\begin{array}{l|l} 783506. & 398. \\ \hline 3855 & 1 \end{array}$$

Digo ahora 3855. partidos à 398, ò bien 38. à 3., egecûto el tantéo (63) y veo que sale 9., multiplico con esta cifra el divisor 398., y su producto 3582. lo resto de los 3855, de que resulta el residuo 273., à quien agrego á la derecha el cero que sigue en el dividendo, y queda el egemplo de esta forma.

$$\begin{array}{l|l} 783506 & 398 \\ \hline 3855 & 19 \\ 2730 & \end{array}$$

Continúo partiendo 2730. por 398, y habiendo hecho el tantéo, hallo la cifra 6, que multiplico por el divisor 398, y su producto 2388. lo resto como antes, y dá por residuo 342, y à la derecha bájo el 6., con que quedan 3426, partibles à 398.

Tantéo para encontrar la 4ª cifra de cociente que sale 8, con el qual multiplico y resto su producto, de que resulta por residuo 242., y pues no hay mas cifras en el dividendo, está concluìda la particion.

67. Conque digo, que habiendo partido 783506. por 398. dâ de cociente 1968., y aún queda de residuo 242 unidades *de la misma especie que el dividendo*; que en esta disposicion no son partibles por el divisor 398.

68. Quando continuando una particion, aun despues de haber bajado à la derecha del residuo la cifra que sigue en el dividendo, no es bastante para contener al divisor,

visor, en este caso se pone cero al cociente, y se continúa bajando otra cifra del dividendo

69. Si se preguntára el como se habia encontrado este modo de girar en la particion, parece que para su respuesta no hay mas que atender à lo practicado en los egemplos de la particion, y se verá que todo es un camino inverso ò contrario al que se llevò en la multiplicacion; porque las ultimas cifras que se producen en aquella regla, son las primeras que se descomponen en ésta de partir: por lo que parece se podria tambien decir, que *el partir es la descomposicion del multiplicar; y por tanto esta regla es fiscal de la otra, y al contrario*; esto es,

70. *La Prueba del partir es multiplicar el cociente por el divisor, y debe dar el dividendo* (54) *quando no queda residuo*; pero quando queda algo de residuo se añade èste al producto de cociente por divi-

divisor, y la suma debe ser el dividendo.

71. Para quando ocurra partir cantidades positivas por negativas, ò al contrario; y negativa por negativa, se tendrá presente 1º que + partido à + como + 12: + 4, que es lo mismo que 12: 4. dà de cociente + 3. ò bien 3.; porque + 4 x + 3 = + 12 = 12. (43)

72 Quando + se parte à — esto es cantidad positiva como + 12. por negativa como − 3 será 12: − 3 = − 4.; porque − 3 x − 4 = + 12 (46) lo mismo − 12: 3. = − 4.; porque 3 x − 4 = − 12 (44).

73. Cantidad negativa como − 12 partida por negativa como − 4. dá cociente positivo, esto es, − 12: − 4 = + 3. porque − 4 x 3 = − 12. (44)

74. La prueba del multiplicar es partir el producto por qualquiera de los dos factores, y el cociente será el otro, pues una vez que el producto contiene á uno de sus facto-

factores tantas veces como unidades hay en el otro (35), se verificarà èsto por la regla de particion segun (52).

75. *Hallar los divisores de una cantidad.* Pues que (48) divisor exacto de una cantidad es aquel por el qual partiendo dicha cantidad sale justa la particion, y se ve (56) que las cantidades pueden tener distintos divisores, hallarémos los de qualquiera cantidad observando el methodo siguiente; el qual aunque es como tanteando, no deja de tener su fundamento, que se omite aquì, mediante no considerarse preciso, y ser algebricamente como se hace patente el porqué se sigue este camino.

EGEMPLO.

76. Hallar los divisores exactos de la cantidad 12....Vease si el 12. es divisible por las cifras 1. 2. 3., &c. simples que se irán poniendo en coluna unas bàjo de otras, y lo mismo

mo los cocientes de la suerte que aparece.

Cantidad. 12....2
6....2
3....2
1

Divisores simples.

77. Son pues los divisores simples de la cantidad 12, 1. 2. y 3., y para hallar los compuestos se multiplican cada uno de los simples por los demàs: 1º de dos en dos asì 2 x 2 = 4. (porque el 1. no altera) que pondré en otra coluna, luego 2 x 3 = 6 en la misma debajo, y asi continuarìa sacando todos los que resulten, multiplicando los simples de 2. en 2.; luego multiplico de 3. en 3. asì 2 x 2 x 3 = 12., y con cada uno seguirìa así si mas divisores simples hubiese....Queda por fin el egemplo de esta forma.

Cantidad.... 12...2
6...2...4
3...3...6....12.
1

78. Y veo que siendo los divisores simples de 12., el 1. 2 y 3, son los compuestos 4. 6. y 12., que además de que satisfarán si con qualquiera de ellos se egecuta la particion, pues saldrá cociente exacto; veamoslo por razon en el siguiente parrafo.

79. Pruebase ser los compuestos divisores exactos de esta suerte, habiendo partido el divisor simple 2. al 12. sacó en el cociente 6., la mitad exactamente (54), tambien dividido el 6. por el 2. divisor simple saca su mitad en el cociente 3., y este es quarta parte de 12. exactamente; pero 2 x 2 = 4. es divisor compuesto, y 12. partidos à 4. es sacar su quarta parte, luego tambien 4. es divisor exacto del 12.; pues este tiene quarta parte exacta: lo mismo se puede reflexionar de los demás divisores compuestos.

80. Pongamos otro egemplo con la mira de aclarar mas el metodo, y sea hallar los divisores de la cantidad

dad 210. Para esto llevêmos presente, 1.º *que toda cantidad, cuya ultima cifra sea par, ó cero, es divisible por* 2.

2.º *Toda cantidad, cuyas cifras sumadas dé un numero divisible por* 3. *tambien será aquella divisible por* 3.,
3.º *Toda cantidad, cuya ultima cifra es* 5. *u cero, es divisible por* 5.: esto entendido.

Busco á la cantidad 210. los divisores simples, y digo 210. es divisible por 2 que dá de cociente 105.; pongo este numero bàjo la cantidad, y el divisor à un lado. Ahora 105. no es divisible por 2., pero si lo es por 3., pues 1 † 5 = 6. que es divisible por 3. y dà 105 : 3 = 35. de cociente, que pongo debajo, y el divisor tambien bàjo del otro antes hallado. Continùo tanteando, y veo que 35. es divisible por 5. que dá de cociente 7., y ultimamente 7, es divisible por sì mismo; con que los divisores simples son 1. 2. 3. 5. 7., y queda el egemplo segun la formacion 1.ª

For-

Formacion 1ª	Formacion 2ª
210....2	210..2
105....3	105..3....6
35....5	35..5..10..30
7....7	7..7..14..70..210
1....	15..105
	21
	35

81. Para hallar los compuestos en formacion 2ª multiplico cada uno de los simples con todos los demás de dos en dos, y el 1.º será $2 \times 3 = 6$; 2.º $2 \times 5 = 10$; 3.º $2 \times 7 = 14$; 4.º $3 \times 5 = 15$; 5.º $3 \times 7 = 21$; 6.º $5 \times 7 = 35$; y está concluido de 2. en 2.: sigo multiplicando de 3. en 3. así $2 \times 3 \times 5 = 30$; $2 \times 5 \times 7 = 70$; y $3 \times 5 \times 7 = 105$; y ultimamente de 4. en 4., que por no haber mas dà el ultimo que es la cantidad propuesta, así $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$; con lo qual todos los divisores de esta cantidad son 1. 2. 3. 5. 7. 6. 10. 14. 15. 21.

30.

30. 35. 105., y 210. como se vé planteado en la 2ª formacion.

82. Ahora, si para algun fin nos conviniese saber los numeros que hai en una cantidad, y que no le son divisores exactos, se vè que hallados los exactos, todos los numeros restantes que se quentan en dicha cantidad serán los pretendidos; por egemplo, yà que los divisores exactos de 12. son 1. 2. 3. 4.6. y 12., los 5. 7. 8. 9. 10. y 11. restantes, que en 12. se quentan, no le son divisores exactos, esto es no dan todo el cociente exacto en enteros.

De quebrados, ó fracciones.

83. Hasta aqui se ha tratado de cantidades compuestas de unidades enteras, ò las que resultaron de la unidad arriba; ahora se intenta lo mismo en las cantidades compuestas de partes de la unidad; à que llaman quebrados, ó fracciones.

Idea del quebrado.

84. Si una vara, un peso, un quin-

quintal, &c. se considera dividido en qualquiera numero de partes, por egemplo en 12., y de ellas se toman algunas, que sean 5.; estas son las que constituyen al quebrado, y su situacion es en esta forma $\frac{5}{12}$ por lo qual definen al quebrado, diciendo:

Definicion del quebrado.

85 *Quebrados son unas espresiones numericas que se forman con el todo y su parte; situando al todo bàjo de una linea, y la parte sobre la misma.*

86. Al que està bajo de la linea, como el 12, llaman *denominador*; porque denomina ó señala las partes en que está dividido el todo ò la unidad, y al de sobre la linea, como el 5., llaman *numerador*; por numerar las que se toman de las del nominador, ò que entran en question.

87. De que resulta, que si el todo ó la unidad está dividido en

2 partes, y el numerador toma 1.
así $\frac{1}{2}$, es lo mismo que tomar la
mitad, y por eso se llama un me-
dio. Si estubiese dividido en tres,
y se tomase alguna de éllas, así $\frac{1}{3}$,
se dice un tercio; si en 4., así, $\frac{1}{4}$
se dice un quarto: de modo, que
si se pone atencion se ve que nada
mas se hace que leer el numera-
dor como entero, y luego el deno-
minador señala la calidad; asì quan-
do sean los denominadores 1. 2. 3.
4. 5. 6. 7. 8. 9. 10., las que ten-
gan los numeradores serán enteros,
medios, tercios, quartos, quintos,
sextos, septimos, octavos, novenos,
y decimos. Quando los quebrados
tienen por denominador à la uni-
dad ó todo dividido en un numero
de partes de 10. arriba, se nom-
bran leyendo el numerador, y de
seguida tambien el denominador
como enteros, añadiendo à éste la
particula *Avos*, que dicen es para
terminar el acénto; así $\frac{112}{348}$ se nom-
bra ciento y doce trescientos diez

y

y ocho avos; la que parece se debia omitir substituyendo, ò usando de esta *de*, en esta forma, ciento y doce de 318.; modo que no destravìa la idéa de lo que se và explicando à los principiantes, y evita el que muchos con las cosquillas que la espresion *Avos* les causa, anden preguntando ¿quantos abos tiene un real?

IDEAS DEL AUMENTO, Y *diminucion del quebrado.*

88. Siendo el numerador el que constituye al quebrado, o el mismo valor del quebrado (84), se sigue *que quanto mayor sea su numerador respecto su denominador, tanto mayor será el quebrado*, así $\frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5}$ &c. porque de las mismas 5. partes que tiene el denominador vá tomando el numerador mayor numero ó porcion; y al contrario, *quanto menor sea el numerador respecto el denominador, tanto menor será el quebrado* esto es $\frac{5}{6} > \frac{4}{6} > \frac{3}{6}$ &c.; pues de las 6. partes que es

es el todo, el numerador vá tomando menor numero ó porcion de ellas.

89. *En llegando el numerador á ser igual al denominador, el quebrado es igual al todo, ó la unidad,* así $\frac{8}{8}$ es igual 1; porque el todo ó la unidad está dividido en 8 partes, y el numerador toma las mismas 8, luego toma al todo, ò la unidad.

90. *En siendo el numerador mayor que el denominador, el quebrado es mayor que la unidad*, asì $\frac{12}{7}$ el 7 representa al todo dividido en 7 partes (86), y el numerador toma 12. como ellas, luego es mas que el todo ó la unidad; y à esta especie de quebrados, en quienes el numerador es igual ó mayor que su denominador, se llaman *quebrados impropios*, porque incluyen enteros.

REDUCION DE LOS QUEBRAdos impropios á enteros.

91. Una vez que los quebrados impropios tienen el numerador igual,

ó

ó mayor que el denominador (90) se contendrà este en el numerador algun numero de veces, y tantas veces como se contenga tantos enteros habrá en él; luego lo averiguarèmos (47) usando esta regla: *Para reducir los quebrados impropios á enteros, ó sacar de ellos los enteros, divídase el numerador por el denominador, y el cociente serán los enteros, y si queda algun residuo se le pondrà el mismo denominador así* $\frac{112}{63}$ será $112 : 63 = 1 + \frac{49}{63}$, y asi de otros.

REDUCIR LOS ENTEROS A quebrado, cuyo denominador sea dado.

92. Si el denominador dado fuese 6. quiere decir, que los enteros sean quantos fueren, se piden reducir à sextos; es patente que por cada entero se han de tomar 6. por tener el entero $\frac{6}{6}$; luego lo consiguiremos (35) multiplicando, ó practicando esta regla. *Para*

Para reducir enteros á quebrado, cuyo denominador sea dado, multipliquense los enteros por el denominador dado, y al producto pongasele el mismo denominador: así 63. enteros reducidos à sextos es......$63 \times \frac{6}{6} = \frac{378}{6}$

Quebrados iguales.

93 Si el todo ó denominador está dividido en 2. partes, y el numerador toma la una así $\frac{1}{2}$, este quebrado valdrá la mitad del todo ò la unidad à quien representa el denominador. Asi mismo, si el todo ó la unidad está dividido en 4. partes, y de ellas toma el numerador 2. asì $\frac{2}{4}$ tambien será la mitad del todo, y por tanto su valor igual al valor del $\frac{1}{2}$,

94. Tambien se vé, que si la unidad ò todo està dividido en tres partes, y toma el numerador 1. asì $\frac{1}{3}$, es la tercera parte, lo mismo que si estubiese dividido en 6. partes, y tomase 2, asì $\frac{2}{6}$: Luego tendrémos ge-

generalmente *que todos los quebrados, cuyos numeradores sean semejante parte de sus denominadores, tendràn un mismo valor, ó seràn iguales.*

Idea del valor del quebrado.

95. Si qualquiera unidad, por egemplo un peso, se considera dividido en 20. partes, pues que el peso vale 20. rs., tendrá cada parte el valor de un real, esto es $\frac{1}{20}$ de peso será igual un real. Si el mismo peso se considera hecho diez partes, pues todo vale 20. rs., una parte de las 10. valdrá 2. rs., asì $\frac{1}{10}$ de peso será igual 2. rs. Se hace ver en esto... *Que quanto mayor sea el numero de partes en que estè dividido el todo ò la unidad, menor es el valor de cada una de aquellas que toma el numerador*; y al contrario, *quanto menor es el numero de partes del denominador, mayor es el valor de las del numerador.*

MO-

MODOS DE AUMENTAR el valor de un Quebrado.

96. Pues que el numerador es el que constituye al quebrado (84), si le tomamos dos ó mas veces; esto es, si mltiplicamos dicho numerador por 2, 3, 4, &c. dejando al denominador en su estado, será lo mismo que aumentar el valor del quebrado tantas veces como unidades tiene el numero por quien se multiplica, asì, si el $\frac{2}{15}$ lo queremos aumentar hasta 2. veces, será $\frac{2}{15} \times 2 = \frac{4}{15}$, quebrado que valdrá doble que el $\frac{2}{15}$, lo que es evidente, porque de una misma unidad hecha igual numero de partes, que en este caso es 15., el uno toma 4., y el otro 2. *Luego para tener el valor de un quebrado aumentado qualquiera numero de veces, se multipli-*

ca-

cará el numerador por aquella cantidad ò cifra que tenga tantas unidades como veces se quiere tomar el valor del quebrado. 97.

97 Tambien, yà que quánto menor es el numero de partes en que se tenga dividido el todo ó la unidad, mayor es el valor de las que toma el numerador (95); se tiene, *que podemos aumentar el valor de un quebrado disminuyendo su denominador, esto es, partiendolo por el numero que tenga tantas unidades como veces se quiere aumentar;* así, si $\frac{1}{4}$ se pretende doblar se consiguirá así $\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{2}$ que es doble de $\frac{1}{4}$.

MODOS DE DISMINUIR EL valor de un quebrado.

98. Ya que en el numerador está el valor del quebrado, si este se disminuye, tambien se disminuirá su valor; esto es, si partiendolo sacamos la mitad, tercera, ò quarta parte, &c. del numerador (54), esta

ta con el mismo denominador haràn el quebrado, cuyo valor será la mitad, tercera, ò quarta parte del primero; asì, si $\frac{6}{7}$ se quiere reducir à un valor que sea su tercera parte, partirèmos el numerador 6. por 3. de este modo $\frac{6:3}{7} = \frac{2}{7}$ y este $\frac{2}{7}$ que resulta es patente sale la tercera parte de el $\frac{6}{7}$; porque estando en ambos la unidad dividida en 7. partes, el uno toma 6. de ellas y el otro 2., que es tercera parte de 6.: *Luego para disminuir el valor de un quebrado ó fraccion, se conseguirà partiendo su numerador por aquella cifra que indique las veces que se quiere disminuir.*

99. Para el mismo fin de disminuir el valor de un quebrado tenemos, que quanto mayor sea el numero de partes en que se considere dividido el todo ò la unidad, menor es el valor de las que de ellas toma el numerador (95), *luego, para dis-*

mi-

minuir el valor de un quebrado no serà necesario mas que aumentar su denominador; esto es multiplicarlo por el numero que indique las veces que se ha de disminuir.

100. *Un quebrado ó fraccion no muda de valor quando sus dos terminos se multiplican ó parten por una misma cantidad.*

Digo que $\frac{1}{2}$ por egemplo, si sus dos terminos se multiplican por qualquiera cifrá, que sea ahora 5, asì $\frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10}$, el quebrado $\frac{5}{10}$ que resulta, es del mismo valor que el $\frac{1}{2}$. Porque multiplicando su numerador 1. por 5. se aumenta el valor del quebrado 5. veces (96), y multiplicando su denominador 2. por el mismo 5. se disminuye dicho valor las mismas 5. veces; (99) luego, pues quanto en una operacion se aumenta, por la otra se disminuye, queda el quebrado del mismo valor que estaba antes. Esto mismo hace patente el egemplo; porque el $\frac{1}{2}$ dice ce que la unidad está dividida en 2. partes, y el numerador toma 1. que es la mitad del todo. El $\frac{5}{10}$ tambien manifiesta, que el todo està dividido en 10. partes, y el numerador toma 5., que tambien es la mitad del todo; luego (94) lo mismo vale uno que otro.

101. *No varìa de valor un quebrado aunque se dividan sus dos terminos por una misma cantidad*; porque la cantidad que parte al numerador, disminuye su valor tantas veces como unidades tiene (98), y partiendo la misma cantidad al denominador aumenta el valor del quebrado igual numero de veces (97); luego, pues que quanto por una parte se aumenta, por otra se disminuye, queda del mismo valor; luego el quebrado no muda. Lo mismo se demuestra con $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c.: luego está demonstrado generalmente.

REDUCIR LOS QUEBRADOS
á su mas simple expresion.

102. *Definicion*: Reducir los quebrados à su mas simple expresion, es reducirlos à otros quebrados, que conservando el mismo valor, estén expresados con aquellos menores numeros que sea posible. Como $\frac{8}{16}$ que reducido es $\frac{1}{2}$ (94).

103. Asi se pide reducir el quebrado $\frac{108}{136}$ à la menor expresion; para esto se vé (100), que si supieramos qual era el mayor divisor del numerador, y denominador, y los partieramos por él, los cocientes formarian el quebrado reducido à los minimos ò menores terminos sin haber mudado de valor.

104. Por tanto, introduciremos aquì el methodo de hallar el mayor divisor de dos ò mas cantidades, que tambien llaman *medida comun*, y es el siguiente aplicandolo al egemplo propuesto.

Par-

Partiráse el mayor numero 136. por el menor 108, sigase partiendo este 108. por el residuo 28. que quedó, y este por el otro 2º residuo, 24., este por el 4º quatro, y de esta particion queda por residuo cero; por tanto *el ultimo divisor, quando queda al residuo cero, es el que se busca*, y á que llaman medida comun.

105. Para que sepamos la guia razonable de esta operacion, veamos pues, una vez que se busca el mayor divisor de las cantidades 136. y 108., el que lo sea de la menor 108. lo será tambien de todas las veces que el 108. se contenga en el mayor 136., y lo debe ser tambien del residuo 28., del mismo modo el propio divisor de 28. lo debe ser tambien del 108., y de todas las veces que el 28. se contiene en 108., y asimismo del residuo 24.; y siguiendo este mayor divisor de 24. lo será de las veces que el 24. se contenga en 28. y del residuo 4.; y ultimamente el divisor mayor de 4.

lo

lo debe ser de las veces que el se contenga en 24. ; pero en este caso sale exacto el cociente, pues queda por residuo cero, y el mayor divisor de 4. es el mismo 4., luego lo es tambien de las cantidades propuestas 108. y 136.

Bolvamos ahora á su aplicacion.

Partiendo los dos terminos del quebrado propuesto $\frac{108}{136}$ por el 4. hallado es 108. : 4 = 27. y 136 : 4 = 34., y el quebrado reducido à los menores terminos posibles es $\frac{27}{34}$

106. Si el mayor divisor resultáre ser la unidad, el quebrado propuesto no tendrá reducion, pues no se alteran sus terminos por multiplicarlos ò partirlos por 1., y en este caso los numeros se llaman *primos*, *ò primeros.*

Del mismo modo se hallarâ el mayor divisor de 3. ó mas cantidades; pues hallando el de las dos se busca luego el mayor divisor entre el hallado y la otra cantidad.

107. Tambien se reduce un quebrado à menores terminos, tanteando si su numerador y denominador son divisibles por las cifras, 2, 3, 5, &c.; esto es, sacando su mitad, tercio, quinto, segun sea posible (80); asì $\frac{108}{135} : 2 = \frac{54}{63} = \frac{21}{34}$; pero aunque las mas veces es este methodo mas facil, en otras el 1.º, es mas seguro para conseguir la menor expresion del quebrado.

Quebrados compuestos.

108. Quebrados compuestos son aquellos que piden parte de otros quebrados; esto es, aquellos cuyos denominadores no representan al todo, sino à alguna ò algunas partes suyas, como $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, que manifiesta, que del todo, sea el que fuere, se piden los $\frac{3}{4}$, y de estos $\frac{3}{4}$ se piden los $\frac{2}{3}$.

109. Esta especie de quebrados se reducen à simples: esto es, à que sean partes de entero, observando la regla siguiente.

Para

Para reducir los quebrados compuestos à simples, multipliquense los denominadores, y el producto será el denominador del quebrado simple; multipliquense los numeradores, y el producto lo será del quebrado simple.

EGEMPLO.

110. El quebrado $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, reducido à simple, es $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$; porque el denominador 15. del quebrado simple dice que el todo está dividido en 15. partes; y pues el quebrado $\frac{4}{5}$ ha de tomar las quatro quintas partes, saquemos el quinto de 15., que (54) es 3., y tomandolo (35) quatro veces, da 12., valor de los $\frac{4}{5}$: ahora, pues que el $\frac{2}{3}$ pide las dos terceras partes de $\frac{4}{5}$, será su valor las dos terceras partes de 12; que las tendrémos, sacando su tercio $12 : 3 = 4$, y tomandolo 2. veces; así, $4 \times 2 = 8$., justamente quanto es lo que salió al quebrado simple por numerador; pues toma las mismas 8. partes de las 15. que contiene el todo.

111. Lo mismo se efectua si el quebrado fuese compuesto de 3., ó mas quebrados; asì $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ &c.; pues reducido à simple es el numerador $2 \times 3 \times 4 = 24$; y el denominador $3 \times 4 \times 5 = 60$.; y el quebrado simple es $\frac{24}{60} =$ (102) $\frac{2}{5}$

REDUCIR LOS QUEBRADOS A un comun dènominador.

112. Definicion: *Reducir los quebrados à un comun denominador, ò à una misma especie, es reducirlos à otros quebrados, que teniendo todos á la unidad dividida en igual numero de partes por denominador, conserven el mismo valor que los propuestos.*

Inteligencia.

113. Se echa de ver, que si los quebrados no han de mudar de valor, es necesario multiplicar, ò partir sus dos terminos por una misma cantidad (100); lo qual se nos cumple con la siguiente.

RE-

REGLA.

114 Si los quebrados son dos, *multipliquense los denominadores entre sì, y el producto será el denominador comun; ò para ambos quebrados, multipliquese despues el numerador de cada quebrado por el denominador del otro; y el producto será el nuevo numerador.*

Por egemplo, si los quebrados son $\frac{2}{3}$, y $\frac{3}{4}$ digo $3 \times 4 = 12$. denominador comun, $2 \times 4 = 8$. numerador nuevo del $\frac{2}{3}$. y $3 \times 3 = 9$. numerador del $\frac{3}{4}$, y podrá quedar el egemplo figura 1ª ó 2ª; que son puramente arbitrarias.

1ª Formacion.	2ª Formacion.
$\overset{8}{\frac{2}{3}} \underset{12}{\times} \overset{9}{\frac{3}{4}}$	$\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{12}$ $\frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{12}$

Y concluida qualquiera de ellas; diré, que habiendo reducido los quebrados $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ à un comun denominador, el $\frac{2}{3}$ es igual $\frac{8}{12}$ y el $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ cuyos dos nuevos quebrados $\frac{8}{12}$ y $\frac{9}{12}$ tienen ya por denominador à la unidad ó todo dividido en igual numero de partes, que es 12.; y por tanto, las que sus numeradores toman son yá de una misma especie, y dichos quebrados nuevos conservan el mismo valor que los propuestos(100); pues que los dos terminos de cada uno de los propuestos se multiplicaron por el denominador del otro para producir los nuevos.

115. Se ve con esta regla qual quebrado es mayor, igual, ò menor; pues reducidos al comun denominador, su numerador será mayor, igual, ò menor segun fuere el quebrado.

116. Si los quebrados para reducir à una denominacion fueren tres ò mas, como $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, multiplicarémos para el mismo fin los deno-

nominadores entre sì $3 \times 5 \times 6 = 90.$ y este producto 90. será el denominador comun ó de todos, y multiplicando cada numerador por los denominadores de los otros, los productos serán los nuevos numeradores, asì $2 \times 5 \times 6 = 60.$ será el numerador nuevo del $\frac{2}{3}$, $3 \times 3 \times 6 = 54.$ lo serà del $\frac{3}{5}$, y $5 \times 5 \times 3 = 75.$ es de el $\frac{5}{6}$; conque colocados cada uno sobre su quebrado quedará el egemplo con este aspecto.

Formacion 1.ª	Idem 2ª
$\overset{60}{\frac{2}{3}} \times \overset{54}{\frac{3}{5}} \times \overset{75}{\frac{5}{6}}$ 90	$\frac{2}{3} \times 5 \times 6 = \frac{60}{90}$ $\frac{3}{5} \times 3 \times 6 = \frac{54}{90}$ $\frac{5}{6} \times 3 \times 5 = \frac{75}{90}$

Y podrá responder, que habiendo reducido los quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, y $\frac{5}{6}$ à un comun denominador que

es

es 90., el $\frac{2}{3}$ resulta igual $\frac{60}{90}$, el $\frac{3}{5}=\frac{54}{90}$, y el $\frac{5}{6}=\frac{75}{90}$, pues que los dos terminos de cada quebrado propuesto se multiplicaron por una misma cantidad (100).

117. Si no perdemos de vista que un quebrado no muda de valor, &c. (100), se echa de ver, que de dos ó mas quebrados, como $\frac{3}{4}$ y $\frac{11}{12}$, en quienes el menor denominador 4. sea divisor exacto del mayor 12., se podrà reducir el quebrado $\frac{3}{4}$ à la denominacion 12.; pues partiendo el 12 por el 4., y multiplicando con el cociente 3. el numerador y denominador de $\frac{3}{4}$, resultará este igual $\frac{9}{12}$, y con la misma denominacion que el $\frac{11}{12}$.

118. Tambien quedarian reducidos à un comun denominador dos ò mas quebrados, como $\frac{1}{4}$ y $\frac{9}{12}$, quando los dos terminos del $\frac{9}{12}$ sean divisibles por el cociente que resulta del 12 partido por 4. igual 3; pues divididos por este 3. el numerador y denominador del $\frac{9}{12}$ quedará reducido à $\frac{3}{4}$ de la misma denominacion que el

el $\frac{1}{4}$, y del mismo valor (101).

119. Se vé pues, que estos dos ultimos modos de reducir quebrados al comun denominador no son generales, sino quando concurra la circunstancia de ser divisibles, como se ha visto en cada egemplo anterior; pero son mui auxiliares, por lograrse con ellos muchas veces unos resultados, tanto mas estimables, quanto mas sencillos; punto à que se aspira en el camino y fin de una investigacion matematica.

Sumar quebrados.

120. *Sumar quebrados ó fracciones, es juntar ò hacer qualesquiera quebrados un cuerpo, cuyo valor sea igual al de todos.*

INTELIGENCIA.

121. Pues que qualesquiera cantidades, que se han de sumar, ò hacer un cuerpo, deben ser de una misma especie (19), precisa que los quebrados que se han de sumar

lo

lo sean tambien; y quando nó, esto es, quando tengan distinto denominador, será necesario prepararlos antes con aquella operacion (114), despues de lo qual todos los casos de sumar quebrados simples vendrán à ser semejantes à éste.

Egemplo primero.

122. *Sumar quebrados de una misma denominacion....* Se piden sumar $\frac{7}{8}$ y $\frac{5}{8}$. *Resolucion....* Sumo desde luego sus numeradores 7 y 5. por ser yà de una misma especie (112), y à la suma 12. le pongo su denominador 8., y respondo; que la suma $\frac{7}{8}$ † $\frac{5}{8}$ es igual $\frac{12}{8}$., que reducido à enteros (91), por ser quebrado impropio, es 1 entero y $\frac{1}{2}$.

Segundo Egemplo.

123. *Sumar Quebrados de distinta denominacion*: se han de sumar $\frac{3}{5}$ † $\frac{2}{3}$ † $\frac{6}{7}$ &c., preparolos reduciendolos al denominador comun (114), y salen el $\frac{3}{5} = \frac{63}{105}$ el $\frac{2}{3} = \frac{70}{105}$, y el $\frac{6}{7} = \frac{90}{105}$

$\frac{90}{105}$, sumo sus numeradores 63 † 70 † 90, por estar yá en el caso 1.º (122), y á la suma 223. le pongo su denominador 105.; con lo que digo, que la suma de $\frac{3}{5} \dagger \frac{2}{3} \dagger \frac{6}{7}$ es igual $\frac{223}{105}$ que reducido à enteros (91) es $2 \dagger \frac{13}{105}$

Tercer Egemplo.

124. *Sumar enteros y quebrados* Supongase que se ofrece sumar 6 enteros y $\frac{3}{7}$ con 12 y $\frac{4}{5}$... *Resolucion*, sumense los Quebrados reduciendolos antes (114), y será $\frac{4}{5} \dagger \frac{3}{7} = \frac{28}{35} \dagger \frac{15}{35} =$ (122) $\frac{43}{35} = 1 \dagger \frac{8}{35}$, y la suma total será $6 \dagger 12 \dagger 1 \frac{8}{35} = 19 \dagger \frac{8}{35}$.

Quarto Egemplo.

125. *Sumar quebrados compuestos*: Si los quebrados que se propongan para sumar fueren compuestos, se reducirán à simples, luego à una misma denominacion, y por ultimo se sumarán (122).

Sea la peticion sumar $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{3}$ con $\frac{6}{7}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$, *Resolucion*, reduzco à simples (109) uno y otro, y salen

el

el $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{3} = \frac{6}{15} =$ (102) $\frac{2}{5}$; el $\frac{1}{7}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2} = \frac{2}{42} = \frac{1}{21}$; y por tanto $\frac{2}{5} + \frac{1}{21}$ (114) $= \frac{42}{105} + \frac{5}{105} = \frac{47}{105}$ suma de los quebrados propuestos.

Restar quebrados.

126. Definicion: *Restar quebrados, es hallar la diferencia que hai entre quebrados de una mima especie.*

127. El quebrado ò quebrados de quien se resta, se llaman *restando* (23); los que se restan *restador*; y lo que resulta de la operacion *exceso, diferencia, ó residuo.*

128. Pues que las cantidades que se han de restar deben ser de una misma especie (28), ó una misma denominacion, tambien aquí se deberán traer à este estado preparandolos con las reduciones que precise, con que vendrémos à parar en un caso semejante á este.

Egemplo primero.

129. *Restar quebrados de igual denominacion.*

De

De $\frac{9}{11}$ se piden restar $\frac{7}{11}$; esto es, $\frac{9}{11} - \frac{7}{11}$. *Resolucion.* Digo $9 - 7 = 2$, y respondo, que habiendo restado $\frac{7}{11}$ de $\frac{9}{11}$ es la diferencia $\frac{2}{11}$.

Segundo egemplo.

130. *Restar quebrado de quebrado de distinta denominacion.*

De $\frac{5}{6}$ se han de restar $\frac{3}{5}$; esto es, $\frac{5}{6} - \frac{3}{5}$. *Resolucion*: Reduzco al comun denominador (114), y el $\frac{5}{6}$ sale igual $\frac{25}{30}$, el $\frac{3}{5} = \frac{18}{30}$; conque $25 - 18 = 7$, y digo que el exceso de $\frac{5}{6}$ à $\frac{3}{5}$ es $\frac{7}{30}$.

Tercer egemplo.

131. *Restar quebrado mayor de otro menor.*

Pidese restar de $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{6}$ esto es, $\frac{2}{7} - \frac{5}{6}$. *Resolucion*: Reduzco (114) à un comun denominador, y el $\frac{2}{7}$ sale igual $\frac{12}{42}$, el $\frac{5}{6} = \frac{35}{42}$; y siguiendo (27) será $12 - 35 = -23$, y de consiguiente la resta que se busca es $\frac{23}{42}$.

Quarto egemplo.

132. De entero y quebrado restar

tar quebrado solo. De $5\frac{1}{5}$ se han de restar $\frac{2}{3}$; esto es, $5\frac{1}{5} - \frac{2}{3}$.

Reparo, ù observo que el quebrado $\frac{2}{3}$ restador, es mayor que el $\frac{1}{5}$ del restando; por lo qual podré girar de dos modos, 1.º mudo el egemplo $5\frac{1}{5} - \frac{2}{3}$ (92) en este $\frac{26}{5} - \frac{2}{3}$, y reduciendo (114) en $\frac{78}{15} - \frac{10}{15} = \frac{68}{15} =$ (91) $4\frac{8}{15}$, diferencia que se busca. 2.º por ser $\frac{2}{3} > \frac{1}{5}$ (115) el egemplo $5\frac{1}{5} - \frac{2}{3}$ lo mudo en este $4\frac{6}{5} - \frac{2}{3}$, sacando de los enteros del restando una unidad, que reducida al quebrado la junto con él, con lo que se facilita esta operacion $4 + (\frac{6}{5} - \frac{2}{3})$ que practicando la resta de los quebrados queda por residuo $4\frac{8}{15}$ como antes.

Quinto egemplo.

133. De entero y quebrado restar entero; sea el caso de $8\frac{2}{3}$ restar 6. enteros; esto es, $8\frac{2}{3} - 6$. *Resolucion*: Mudo el egemplo en esta forma $\frac{2}{3} + (8 - 6)$, y viene á ser lo mismo que $2 + \frac{2}{3}$ la diferencia que se busca.

Sexto egemplo.

134. *Restar de entero y quebrado, entero y quebrado.* Sea el caso de $8\frac{4}{5}$ restar $5\frac{2}{3}$ esto es $8\frac{4}{5} - 5\frac{2}{3}$ *Resolucion*, podrase efectuar de dos modos. 1.° , que puede servir en todos casos, es mudarle reduciendo (92) en este $\frac{44}{5} - \frac{17}{3} = (114)\ \frac{132}{15} - \frac{85}{15} = \frac{47}{15} = (91)\ 3\frac{2}{15}$ diferencia que se busca.

2.° como el entero del restador es menor que el del restando, y lo mismo el quebrado, se podrà hacer esta resta $8 - 5$ y $\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = 3 + (\frac{12}{15} - \frac{10}{15}) = 3\frac{2}{15}$ identico resultado al anterior.

135. Si en caso semejante al anterior fuese el quebrado del restador mayor que el de el restando, se puede seguir el 1.° de dichos dos methodos, ò el que sigue. Sea el egemplo restar de $10\frac{1}{5}$, $5\frac{3}{4}$, esto es $10\frac{1}{5} - 5\frac{3}{4}$, mudo desde luego el restando $10\frac{1}{5}$ en su igual $9\frac{6}{5}$, reduciendo un entero à la especie de su quebrado, para que se pueda efectuar la resta $9 - 5$ y $\frac{6}{5} - \frac{3}{4}$; esto es, enteros de enteros y quebrado

del

del qrebrado, con que siguiendo sale $4 \dagger (\frac{24}{20} - \frac{15}{20}) = 4 \frac{9}{20}$.

136. Se puede ofrecer tener que egecutar una resta que llaman *complexa*, por componerse el restando y restador de muchas cantidades, yá sean quebrados, ò de enteros juntos con quebrados.

De qualquiera manera todas las cantidades que componen el restando se tirarà à hacerlas un cuerpo, y solicitando lo mismo con las que componen el restador, ò que vengan con el signo $-$ se procederá luego à la resta.

Sirva de alguna luz este egemplo $(6 \frac{2}{5}) - 7 \dagger \frac{1}{3} - \frac{2}{5} \dagger \frac{3}{4} - (2 \frac{2}{3})$ &c. entresaco los negativos, y será $(6 \frac{2}{5} \dagger \frac{1}{3} \dagger \frac{3}{4}) - (\dagger 7 \dagger \frac{2}{5} \dagger 2 \frac{2}{3})$, hago las reducciones y sumas, y sale $(7 \frac{29}{60}) - (10 \frac{1}{15}) = 7 \frac{29}{60} - 9 \frac{16}{15} = -2 \frac{7}{12}$; resultado de estas operaciones, que para que sea el verdadero que se busca, basta haber cumplido las condiciones que manifiestan los signos $\dagger$ y $-$ de la propuesta.

Mul-

Multiplicar quebrados.

137. Respecto que multiplicar una cantidad por otra, es tomar la una tantas veces como unidades hai en la otra (33): *multiplicar un quebrado por otro serà tomar tantas veces al primero, quantas unidades hai en el segundo*; pero como un quebrado propio no incluye unidades enteras, sino que es parte de la unidad, se podrá decir mas propiamente, que el *multiplicar dos quebrados, es tomar tal parte del uno qual el otro es de la unidad.*

138. Del mismo modo que en los enteros (34) se les dà à las cantidades los nombres *multiplicando*, *multiplicador*, *y producto.*

139. Para inteligencia de esta regla, supongamos que valiendo la vara de paño $\frac{1}{3}$ de peso, se pretende saber el valor de media varà: digo que será la mitad del $\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ de peso; porque si la vara vale $\frac{1}{3}$ de peso, la media vara valdrà la mitad del valor de la vara; esto es, la

mi-

mitad del tercio de peso; saquemoslo pues (99) y será $\frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}$

140. Si suponemos que como fue $\frac{1}{2}$ vara hubieran sido $\frac{3}{2}$ de vara, es evidente que dicho valor $\frac{1}{6}$ de peso, producto de la media vara, lo deberíamos tomar (35) tres veces, asì $\frac{1 \times 3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ de peso; y este es el valor de los $\frac{3}{2}$ de vara à $\frac{1}{2}$ peso la vara: por tanto toda la operacion es identica à la que se observó (109); luego podemos decir, que en el multiplicar quebrados se tiene el producto con sacar tal parte del uno, qual el otro es de la unidad; esto es, sacando tal parte del que hagamos multiplicando, qual el pultiplicador lo sea de la unidad, ò al contrario; y esto se consigue, *multiplicando los numeradores entre sì* para tener el valor (84); *y despues los denominadores* que son los que disminuyen (99) respecto la unidad, *cuyos dos resultados forman el quebrado producto.* Egem-

Egemplo primero.

141. *Multiplicar quebrado por quebrado, y sea $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3}$.*

Será segun hemos visto (140) $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{21}$ el producto que se busca. *Aplicacion*: esto puede ser lo mismo que si se hubiera procurado saber $\frac{5}{7}$ de vara de qualquier tela à $\frac{2}{3}$ de peso la vara, quanto valen dichos $\frac{5}{7}$ de vara, diria que $\frac{10}{21}$ de peso; cuyo valor en reales y maravedises se podrá hallar luego (159); regla que se deja para aquel lugar por ocurrir en ella casos, en que se necesita la inteligencia de las que le preceden.

Segundo egemplo.

142. *Multiplicar entero y quebrado por quebrado, y sea $6\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$.*

De dos modos efectuarémos esta resolucion, 1.° mudo el multiplicando $6\frac{2}{3}$ en su igual (92) $\frac{20}{3}$, y despues será $\frac{20}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{100}{21} = (91)\ 4 \dagger \frac{16}{21}$ producto que se busca.

2.° Siendo el $6\frac{2}{3}$ multiplicando, y $\frac{5}{7}$ multiplicador, podré hacer

(39) las dos multiplicaciones $6 \times \frac{5}{7}$ y $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$, cuya suma de productos parciales $\frac{30}{7} + \frac{10}{21} = \frac{90}{21} + \frac{10}{21} = \frac{100}{21} = 4\frac{16}{21}$ es el producto total que se busca, identico al anterior; el qual tambien podìa haber sido la peticion, hallar el producto de $6\frac{2}{3}$ arrobas de qualquier genero à $\frac{5}{7}$ de peso la arroba, y sería 4 pesos mas $\frac{16}{21}$ de peso.

Egemplo tercero.

143. *Multiplicar entero y quebrado por entero, como* $8\frac{2}{7} \times 7$.

1.° Puedo mudar el multiplicando $8\frac{2}{7}$ (92) en su igual $\frac{58}{7}$ y serà $\frac{58}{7} \times \frac{7}{1} =$ (100) 58. el producto que se busca.

2.° Podrìa tambien el mismo egemplo desempeñarse haciendo las multiplicaciones (39) 8×7 y $\frac{2}{7} \times 7$, cuya suma $56 + \frac{14}{7} = 56 + 2 = 58$. es identico resultado al anterior; y como antes (142) pudo haberse pedido en este caso, saber el importe de $8\frac{2}{7}$ vara de qualquier tela à 7 pesos, sería pues 58 pesos.

Quar-

Quarto egemplo.

144. *Multiplicar entero y quebrado por entero y quebrado*, como $9\frac{2}{5} \times 6\frac{3}{7}$

Resolucion: Primero haré $9\frac{2}{5} =$ (92) $\frac{47}{5}$, à el $6\frac{3}{7} = \frac{45}{7}$ y será $9\frac{2}{5} \times 6\frac{3}{7} = \frac{47}{5} \times \frac{45}{7} = \frac{2115}{35} =$ (91) $60 \dagger \frac{15}{35} = 60\frac{3}{7}$ producto que se busca.

Por el modo segundo diría que $9\frac{2}{5} \times 6\frac{3}{7}$, segun (35) hai que formar los quatro productos 9×6, $6 \times \frac{2}{5}$, $9 \times \frac{3}{7}$ y $\frac{2}{5} \times \frac{3}{7}$ que para el mejor orden podrìa usar esta formacion.

Multiplicando.......9...$\frac{2}{5}$.	
Multiplicador........6...$\frac{3}{7}$.	
1.° producto $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} =$	$\frac{6}{35}$.
2.° $\frac{3}{7} \times 9 = \frac{27}{7} = 3\frac{6}{7} = 3\frac{30}{35}$ (117)	$3\frac{30}{35}$.
3° $6 \times \frac{2}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5} = 2\frac{14}{35}$......	$2\frac{14}{35}$.
4° $6 \times 9 =$	54....
Suma total.,..........,..	$60\frac{3}{7}$.

Se

Se vé el identico resultado en esta formacion con el anterior; y se debe advertir, que ademas de ser arbitrarias estas configuraciones; esto es, que cada uno las puede usar segun le acomode, siempre dan una idea firme; y por tanto son utiles.

145 Tambien puede ofrecerse multiplicar algun numero de quebrados, que compongan cantidades complexas, por otros tales; en cuyo caso los mismos signos que se les anteponen, manifiestan la condicion, y las operaciones preparatorias que deban antes egecutarse; por egemplo, se ha de multiplicar

$$\tfrac{2}{3}\ \overline{\text{de } \tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{7} \dagger \tfrac{1}{2}} \times \overline{\tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3}} \dagger \tfrac{1}{2}.$$

Reparando en el mismo egemplo, veo primero que $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ es un quebrado compuesto $= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ de quien debo restar $\frac{3}{7}$, y añadir un medio, que egecutado sale $\frac{4}{7}$, à que se reduce todo el multiplicando $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4} - \frac{3}{7} \dagger \frac{1}{2}$. Sigo al multiplicador, donde hecha la resta dá $- \frac{1}{6}$, y la multiplitiplicacion es $\frac{4}{7} \times -\frac{1}{6} = -\frac{4}{42} = -\frac{2}{21}$ à quien debe añadirse $\frac{1}{2}$, y queda por fin $\frac{17}{42}$ ultima respuesta de la question: y á este modo podia venir complicada con mas quebrados, y distintas condiciones, que para darles cumplimiento no habria mas que atender à sus signos, y egecutar las operaciones que indicasen.

146. En lugar de la antecedente indicacion con el signo de multiplicar suelen cerrar las cantidades con un parentesis; esto es, el egemplo $\overline{\frac{3}{5} \dagger \frac{1}{6} - \frac{\,}{8}} \times \overline{\frac{2}{3} - \frac{1}{7}} \dagger \frac{2}{5}$ se indica de esta suerte $(\frac{3}{5} \dagger \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) \times (\frac{2}{3} - \frac{1}{7}) \dagger \frac{2}{5}$. y otros en lugar del signo x de multiplicacion, solo dejan entre multiplicador y multiplicando un punto así $(\frac{3}{5} \dagger \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) \cdot (\frac{2}{3} - \frac{1}{7}) \dagger \frac{2}{5}$. usarémos del signo x que llevamos, alargando sus ramos de arriba hasta donde deva llegar, por parecer este menos expuesto à error.

Par-

Partir quebrados.

147. *El partir quebrados* se puede decir del mismo modo, que (47) *es averiguar quantas veces un quebrado contiene à otro.*

148. Al quebrado, ó quebrados que se parten, llaman *dividendo* (48), al que parte *divisor*, y al que resulta de la operacion *cociente.*

149. Tambien convienen à la particion de los quebrados las propiedades explicadas en el partir enteros (52 hasta 56), con cuyo supuesto pasemos à las reglas

150. Como hemos de ver quantas veces un quebrado contiene á otro (147); es necesario que las unidades del dividendo sean de la misma especie ò denominacion que las del divisor; por tanto en la operacion de partir quebrados se vendrá à parar siempre en un caso semejante à este.

Primer egemplo.

151. *Partir quebrado por quebrado*

do de igual denominacion; y sea partir $\frac{6}{7}$ por $\frac{5}{7}$ esto es $\frac{6}{7} : \frac{5}{7}$.

Resolucion: Partiráse llanamente el numerador del dividendo por el numerador del divisor; pues teniendo igual denominacion, son de una misma especie; así $\frac{6}{5} = (91)\ 1\frac{1}{5}$ es el cociente, y el que manifiesta las veces que el divisor $\frac{5}{7}$ se contiene en el dividendo $\frac{6}{7}$, que son $1\frac{1}{5}$ vez (52), manifiesta las veces que se ha de tomar el divisor para que su contenido de partes se iguale con el contenido de partes del dividendo 53) que son $1\frac{1}{5}$ vez.

152. Asimismo se vé, que habiendo hecho al dividendo tantas partes como unidades hai en el divisor (54), es el cociente una de ellas; pero, como el divisor disminuye hasta los $\frac{5}{7}$, respecto la unidad, el cociente $\frac{6}{5}$, como era preciso segun queda dicho (56), aumenta de modo que el dividendo es sus $\frac{5}{7}$: hacese patente, pues los $\frac{5}{7}$ de $\frac{6}{5} = (109)$ $\frac{5}{7} \times \frac{6}{5} = \frac{6}{7}$, que es el dividendo.

Se-

Segundo egemplo.

153. *Partir quebrado por quebrado de distinta denominacion, y sea* $\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$.

Respecto que dividendo y divisor no tienen igual denominacion, se hace indispensable por qualquiera modo darsela antes, y será (114) $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, y $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, y por tanto $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{9}{12} : \frac{8}{12} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$.

Lo mismo dà si se invierte el quebrado divisor, y se multiplica así $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$.

Tercer egemplo.

154. *Partir entero y quebrado por quebrado*, sea $6\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$.

Resolucion: Mudo el dividendo $6\frac{2}{3}$ (92) en su igual $\frac{20}{3}$, y (117) reduciendolos à una denominacion, queda el egemplo propuesto mudado en este $\frac{40}{6} : \frac{5}{6} = \frac{40}{5} = 8$, cociente que se busca.

Lo mismo tendriamos invirtiendo el divisor, y multiplicando despues de mudado el dividendo $6\frac{2}{3}$.

en

en su igual $\frac{20}{3}$, pues será $\frac{20}{3} : \frac{5}{6} = \frac{20}{3}$ $\times \frac{6}{5} = 8$, cociente identico resultado al de antes.

Aplicacion: este egemplo es lo mismo que si se hubiera dicho $\frac{5}{6}$ de vara de qualquier tela importaron $6\frac{2}{3}$ pesos; pidese saber qual fué el precio de la vara, que sería 8. pesos, pues $\frac{5}{6}$ de vara à 8. pesos es $\frac{5}{6} \times \frac{8}{1} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3} =$ al dividendo.

Quarto egemplo.

155. *Partir entero y quebrado por entero solo*, sea $8\frac{2}{5}$ por 6. esto es $8\frac{2}{5} : 6$.

Resolucion; Mudo el dividendo $8\frac{2}{5}$ (92) en su igual $\frac{42}{5}$, y será $\frac{42}{5} : 6$ $= \frac{42}{5} : \frac{30}{5}$ (117) $= \frac{42}{30} = 1\frac{2}{5}$, cociente que se busca.

Lo mismo resultará siguiendo el methodo de invertir el divisor, y multiplicar; pues $\frac{42}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{42}{30} = 1\frac{2}{5}$. como antes.

Aplicacion: Pudo haber sido el dividendo $8\frac{2}{5}$. importe en pesos de 6. varas de qualquier tela; y pretenderse saber quanto valía la vara,

que

que como se hà visto (144), en el caso presente serìa $1\frac{2}{5}$ peso

Quinto egemplo.

156. *Partir entero y quebrado por entero y quebrado.* Sea el caso $8\frac{3}{5} : 6\frac{2}{9}$.

Resolucion : Primero traduzco divisor y dividendo en sus iguales $\frac{43}{5}$ y $\frac{56}{9}$, y despues de reducidos à una misma denominacion, hallo que el cociente que se busca es $\frac{387}{280} = 1\frac{107}{280}$.

Lo mismo dà si invierto el divisor, y multiplico así $\frac{43}{5} \times \frac{9}{56} = \frac{387}{280} = 1\frac{107}{280}$.

Aplicacion : Este egemplo pudo tambien ser el dividendo $8\frac{3}{5}$ pesos importe de $6\frac{2}{9}$ váras de paño, y que se pretendìa saber el precio de la vara, se diría pues, que habia sido $1\frac{107}{280}$ de peso.

Sexto egemplo.

157. Puede ofrecerse tambien partir algunos quebrados complicados por otros, como ($\frac{2}{3} - \frac{5}{6}$ de $\frac{1}{5}$ † $\frac{1}{3}$):

$\frac{1}{3}$) : ($\frac{2}{3}$ − $\frac{3}{4}$); en cuyo caso y sus semejantes se discurre conforme la naturaleza del egemplo.

Observo las condiciones que manifiestan los signos, y veo que el dividendo es un quebrado compuesto de una resta y suma de quebrados, asimismo el divisor es otra resta; egecuto pues estas operaciones, con que queda el egemplo propuesto mudado en este ($\frac{25}{30}$) : (− $\frac{1}{12}$) = $\frac{300}{30}$ = (72) − 10., cociente que en este caso se buscaba.

Para prueba del multiplicar quebrados se observará lo dicho (74); esto es, *se partirá el producto por uno de los factores, y el cociente será el otro factor.*

Para prueba de estar bien hecha una particion de quebrados, *multiplíquese el cociente por el divisor* (70), *y el producto será el dividendo.*

Hallar el valor de un quebrado.

158. Si se pone atencion en la egecucion de la regla siguiente, se

verá

verá que es la misma que se practicó (109) para reducir un quebrado compuesto à simple, è identica à la de (140) multiplicar quebrados; pero las varias aplicaciones que puede tener, la hacen acrehedora à ponerla en este lugar con separacion.

EGEMPLO PRIMERO,
aclaracion de la regla.

159. Se pide el valor de $\frac{3}{4}$ de 300. reales.

Este egemplo dá à entender, que si el todo 4. del quebrado vale 300. reales, se pide saber quanto valdrán las 3 partes del numerador. Sabemos yá (54), que si los 300. reales se dividen por 4., el cociente 75. reales es su quarta parte; y pues el numerador 3. dice que se ha de tomar 3 veces (35), será $75 \times 3 = 225$ reales el valor de los $\frac{3}{4}$; pero lo mismo resulta siguiendo esta operacion $\frac{3}{4} \times 300 = \frac{900}{4} = 225.$, luego podemos usar esta regla: *Para valuar un quebrado, multipliquese su nu-*

merador por el valor del entero, y partase el produĉto por el denominador del quebrado.

Egemplo segundo.

160. Se pide el valor de $\frac{6}{7}$ de 317 pesos, en pesos, reales, y maravedis.

Resolucion; Sigo la regla, y será $\frac{6}{7} \times 317 = \frac{1902}{7} = (91)$ 271 pesos, y $\frac{5}{7}$ de peso: ahora, pues que el peso tiene 20 reales serâ $\frac{5}{7} \times 20 = \frac{100}{7} =$ 14 reales y $\frac{2}{7}$ el valor de los $\frac{5}{7}$ de peso en reales: hallo ultimamente el valor de $\frac{2}{7}$ de real en maravedises, y pues que el real tiene 34 maravedises, será $\frac{2}{7} \times 34 = \frac{68}{7} = 9\frac{5}{7}$ maravedi; conque puedo responder por ultimo, que los $\frac{6}{7}$ de 317 pesos, es 271 pesos 14 reales y $9\frac{5}{7}$ mrs.

Tercer egemplo.

161. *Traducir un quebrado en otro su igual, cuyo denominador sea dado.*

Supongamos que $\frac{3}{4}$ se quiere traducir en otro quebrado su igual, cuyo

cuyo denominador sea 100 Es claro que para el intento solo nos falta saber las partes que el numerador ha de tomar de las 100. , para que esté lo mismo con él, que el 3, numerador del quebrado, està con su denominador 4.

Sigo la misma regla $\frac{3}{4}$ x 100 = $\frac{300}{4}$ = 75 numerador que se busca, y digo que $\frac{75}{100}$ es igual $\frac{3}{4}$, y que en lugar de $\frac{3}{4}$ puedo tomar al $\frac{75}{100}$ para el fin que convenga.

162. Pero es de advertir, que esta traduccion de quebrado solo será exacta quando el denominador del quebrado sea divisor exacto, ò le contenga algunas veces cabalmente al denominador dado, como lo es el 4. de 100.; pues de lo contrario, egecutada la operacion, queda el quebrado algo enredado si se le coloca al numerador otra nueva fraccion que resulta, y es parte de una unidad del numerador, y queda algo imperfecto si se omite: digalo este egemplo.

163.

163. Se ha de traducir el mismo $\frac{3}{4}$ en otro su igual, cuyo denominador sea 69. digo $\frac{3}{4}\times 69 = \frac{207}{4} = 51\frac{3}{4}$, con que sale que el numerador debe ser $51\frac{3}{4}$, y el quebrado traducido es $\frac{51\frac{3}{4}}{69}$ algo enredado; y si se toma solamente $\frac{51}{69}$ es imperfecto respecto de pedirse igual $\frac{3}{4}$.

164. Si se ofreciera traducir el quebrado $\frac{3}{4}$ en otro su igual, dando el numerador, nos podrìa servir la misma regla despues de considerar invertidos los quebrados; esto es, puestos los numeradores en lugar de los denominadores; asì, si el $\frac{3}{4}$ se pidiese traducir à otro quebrado su igual, cuyo numerador sea 75., se vé que solo falta hallar el denominador, que estè con 75. del mismo modo que 4. denominador del quebrado está con 3. su numerador. Egecutémos la regla de este modo $\frac{4}{3}\times 75 = \frac{300}{3} = 100.$, que

ya

ya sabemos (161) es el mismo que le corresponde.

165. Siguese aquí tambien aquella consequencia (153), si el numerador que hace vez de denominador, no es divisor exacto, ó le contiene exactamente al numerador dado, no podrá lograrse el intento de la igualdad de quebrado.

Quebrados decimales.

166. Definicion: *Quebrados decimales se dice à unas fracciones, cuyos denominadores son* 10, 100, 1000, &c.

167. A las partes que de estos denominadores toman los numeradores, se llaman partes decimales, asì $\frac{3}{10}$ tres decimos, $\frac{5}{100}$ se dice cinco centesimos; $\frac{4}{1000}$ quatro milesimos, &c.

168. Estas partes decimales se sientan sin denominador, y para que éste sea conocido, se les añade à la izquierda los ceros que fueren necesarios hasta completar tantas cifras decimales en el numerador como ce-

ros

ros hay, ò debian haber en el denominador, terminando con un punto ó coma, asì el $\frac{3}{10}$ es lo mismo que ,3; el $\frac{5}{100}$ es =, 05; el $\frac{4}{1000}$ =, 004. &c.

169. Se vé pues, que la coma es el lugar à donde viene à caer la unidad del denominador, y para encontrarle quando supongamos se nos ofrezca sentar $\frac{3}{1000000}$ nos podrémos valer de el orden que se manifiesta, sentando primero el numerador, y decirse al tiempo de ir colocando los ceros hasta completar al denominador.

,0	0	0	0	0	3
Decimos.	Centesimos.	Milesimos.	Diez milesimos.	Cien milesimos.	Millonesimos.

170. Quando hubiese enteros para sentar con los decimales, se colocarán en orden como para sumar, y de seguida à la coma los deci-

ma.

males, así 12 $\frac{5}{1000}$ será 12,005, 105 $\frac{123}{10000}$; es lo mismo que 105,0123; y asi de otros.

171. Mediante este artificio se ha logrado practicar con estos quebrados las mismas operaciones que con los enteros, cuya circunstancia hace ventajoso su uso al de los quebrados comunes por lo tocante á la practica; pero no en muchos casos en la exactitud, por el tropiezo. (162)

Sumar decimales.

172 Los decimales que se hayan de sumar deben ser de una misma denominacion; pues de lo contrario no se podrìa verificar la suma (19).

Egemplo primero.

173. Se han de sumar 12, 5 † 8, 00 103 † 0, 15 † 7, 30.

Preparo estas cantidades reduciendolas à la denominacion mayor, que es à 100000. ò cien milesimos, egecutando aquella regla (161); asì los, 5. de la primera partida 12, 5.

será

será $\frac{5}{10} \times 100000 = \frac{500000}{10} = 50000$; semejante reducion hai que hacer con los ,15 de la partida 0, 15. que saldrá $=$, 15000. ; y lo mismo se harà con los , 30. de la 7, 30. que dará , 30000 ; con lo qual serà la formacion del egemplo propuesto, esta.

$$\begin{array}{r} 12,50000. \\ 8,00103. \\ 0,15000. \\ 7,30000. \\ \hline 27,95103. \\ \hline \end{array}$$

Y la suma, como está patente, es 27 enteros y, 95103.

174. Pero esta reduccion, y la que se deduce (100) añadiendo ceros, así v.g. los, $5 = \frac{5}{10} = \frac{50000}{100000} =$, 50000. hacen molestas las reglas de sumar, y restar, y contentandonos con llevar inteligencia de ellas, se pueden omitir, sentando las cantidades con el methodo que sigue.

175.

175. Sientense los enteros en coluna, y de seguida à la derecha la coma, continuando las cifras decimales, décimos con décimos, centesimos con centesimos, &c. en coluna; sumense despues, y se logrará la reduccion en el mismo hecho, asi las cantidades dichas harán esta formacion.

	12 , 5
	8 , 00103.
	0 , 15
	7 , 30
Suma	27 , 95103.

176. Hacese patente la ventaja de esta operacion, é identidad de su resultado con el egemplo anterior, y se deja ver que si la reduccion que se ha hecho à la mayor denominacion 100000. se hubiera pretendido à otra, como â decimos, ò 10., nos hallarìamos con el inconveniente (162) de no conseguirse

exac-

exactamente ; porque si el decimal ,00103. se pretende (161) reducir à otro quebrado, cuyo denominador sea 10, serà $\frac{103}{100000} \times 10 = \frac{1030}{100000} = \frac{103}{10000}$, que no llega ni con mucho à una parte de 10. para numerador, y por esta imperfeccion se tirará à reducir todos los decimales á la mayor denominacion, que se logra sin perdida, y de consiguiente la suma verdadera; esto se entiende quando se trate de hacer reducciones.

Restar decimales.

177. Los decimales que se han de restar deben tener una misma denominacion, para que se pueda verificar la resta (28); y si quando se proponen yá no lo estàn, se reducirán à ella (161), ó bien se sentaràn (175) de forma que queden reducidos.

Egem-

Egemplo primero.

178. Se pide restar de 12, 50; — 8, 0 3., en que se vé hay igual denominacion 100., por tanto resto llanamente, y hallo la diferencia 4 enteros y 47 centesimos.

$$\begin{array}{r} 12,50. \\ 8,03. \\ \hline 4,47. \end{array}$$

Egemplo segundo.

179. Se han de restar de 23 ,3; — 16, 00 3, reduzco el ,3 del restando à milesimos denominacion del restador, segun (161) serà $\frac{3}{10} \times 1000 = \frac{3000}{10} =$, 300, y por tanto 23, 300 — 16, 003 = 7, 297.

180. Lo mismo dá la formacion, segun (175), sentandolos de modo que queden reducidos así.

$$\begin{array}{r} 23,.3 \\ 16,003 \\ \hline \end{array}$$

Completando si se quiere con ceros el lugar de los centesimos y milesimos en el restando, queda la formacion siguiente.

$$\begin{array}{r} 23,300 \\ 16,003 \\ \hline \end{array}$$

y

y restando llanamente dá de diferencia 7 enteros y 297 milesimos, quedando concluido el egemplo, y con este aspecto.

$$\begin{array}{r} 23,300 \\ 16,003 \\ \hline 7,297 \\ \hline \end{array}$$

Queda tan sencillo el methodo de restar decimales, que parece superfluo repetir egemplo.

Multiplicar decimales.

181. Sentados *los decimales* que se propongan sin denominador, *se multiplican del modo que los enteros, y del producto se separan de derecha á izquierda tantas cifras para decimales, como son las que tienen decimales, multiplicando, y multiplicador.*

Egemplo primero.

182. Sea multiplicar 2, 1 por 3,2. Será 21 x 32 = 672., separo dos cifras, por haber una decimal en el mul-

multiplicando, y otra en el multiplicador; y queda 6, 72. por el producto que se busca.

183. Para convencernos de ser legitima esta separacion, y verdadero el producto 6 enteros y 72 centesimos, no hay mas de practicar la operacion por quebrados comunes; pues siendo 2, 1 $= 2\frac{1}{10}$ y 3, 2 $= 3\frac{2}{10}$ se tiene 2, 1 x 3, 2 $= 2\frac{1}{10} \times 3\frac{2}{10} = \frac{21}{10} \times \frac{32}{10} = \frac{672}{100} = 6\frac{72}{100} =$ 6, 72. sentado en decimales: Este egemplo patentiza su razon, que es esta; quando multiplicamos los decimales como enteros, el producto son enteros; esto es 21 x 32 = 672. son enteros; pero el verdadero valor del multiplicando es 10. veces menor, y el del multiplicador tambien en este caso es 10 veces menor, luego el producto como enteros es 10 x 10 = 100. veces mayor que lo que debe ser; y para traerlo à su justo valor, se ha de disminuir 100. veces, ò lo que es lo mismo, separarle 2 cifras para decimales asì 6, 72.

Se-

Segundo egemplo.

184. Sea multiplicar ,002 por ó ,0102.

Resolucion: Observando puntualmente la separacion de cifras dicha (181), no habrà embarazo en multiplicar ,002 por ,00102. ; pues multiplicando los 102. por 2. y à su producto 204. juntandole ceros à la izquierda hasta dar cumplimiento à la regla, quedarà ,0000204. producto que se busca con conocida denominacion, que son diez millonesìmos.

Tercer egemplo.

185. Se ha de multiplicar 122 ,1 por 12 ,003., egecuto la multiplicacion como enteros, y del producto 14655663 separo las quatro cifras de la derecha, con que se tiene 1465,5663 resultado que se busca.

186. Si se intentase hacer por decimales una multiplicacion de quebrados, no habria mas obstaculo que la traduccion (161) del quebra-

brado en el decimal que se pretendiese, para luego egecutar la multiplicacion por decimales, como se ha visto en lo que acaba de practicarse (185): en todo quanto llevamos tratado por decimales vemos que 3, 4 por egemplo, es igual 3, 40 = 3, 400. &c. : esto es que *un decimal no muda de valor añadiendo ceros à la derecha*; la razon es, porque estandose la coma en su lugar tambien se conciben añadidos al mismo tiempo al denominador, y es lo mismo que multiplicar los dos terminos de la fraccion por 10, 100, 1000 &c.; que por tanto (100) no muda de valor.

Partir decimales.

187. Para partir decimales es igualmente sencilla la operacion; pues *partidos que sean como los enteros, se separan del cociente de derecha à izquierda tantas cifras para decimales, como cifras decimales tiene mas el dividendo que el divisor.*

Egem-

Egemplo primero.

188. Se han de partir 10, 764. por 2, 3, egecutese la operacion (58), y del cociente 468. separo dos cifras para decimales que tiene mas el dividendo que el divisor.

189. De esta operacion quedarémos satisfechos si la practicamos por quebrados; esto es, partiendo $10 \dagger \frac{764}{1000}$ por $2 \frac{3}{10}$; pues dará de cociente $4 \dagger \frac{68}{100} = 4,68$.

190. Ademas nos convencerà la razon de este modo. Si los 10 760. fueran enteros, partidos á 23 enteros darìa al cociente 468. enteros (54), y siendo las unidades del dividendo, como efectivamente lo son, mil veces menor, por tener esta denominaciòn, las unidades del cociente 468. deben estar disminuidas de la misma suerte; esto es, deben ser, $\frac{468}{1000}$, ahora el divisor 23. no fueron enteros sino $\frac{23}{10}$, ò diez veces menor que los enteros, y por tanto el cociente debe ser

10. veces mayor (56); esto es $\frac{468 \times 10}{1000} = \frac{4680}{1000} = \frac{468}{100} = 4,68$, como se esperaba

Segundo egemplo.

191 Hayase de partir 360, 9377 por 53, 06: Sigase la particion de enteros, y dará de cociente $680 + \frac{1297}{5306}$; y pues que el dividendo tiene dos cifras decimales mas que el divisor, separolas del cociente, y digo que este es 6 enteros, 80. centesimos, y $\frac{1297}{5306}$ de un centesimo, pues siendo las unidades del cociente centesimos, y el quebrado $\frac{1297}{5306}$ parte de una unidad, lo es de un centesimo.

192. Se deja ver ahora, que si el numero de decimales del dividendo fuere igual al numero cifras decimales del divisor, el cociente será enteros, y el residuo partes de entero.

 TER-

TERCER EGEMPLO.

Un cociente aproximado.

193. Quando el numero de cifras decimales del dividendo son menos que las del divisor, como si se hubiese de partir 23,3. por 5,36., se le sentaràn à la derecha del dividendo los ceros que se quieran, que en nada alteran su valor (186), y se podrá ir continuando, ó aproximando el cociente hasta donde acomode, aun quando el dividendo sea menor que el divisor; y asi partido un dividendo 23,30000. por el divisor 5,36., dá de cociente 4,347 † $\frac{8}{5,36}$, que aun se podria continuar ó aproximar mas, juntando ceros al residuo 8.

194. El empéño de estas aproximaciones suele parar quando el residuo es el mismo que hà habido antes; pues buelven à salir en el cociente las mismas cifras, ò quando al cociente dá en salir una misma cifra; porque en estos casos, yà se puede continuar aproximando el

co-

cociente sin practicar la operacion de partir.

Calculo de los denominados.

195. Numeros denominados son aquellos que numeran cantidades de varias especies, como pesos, reales, maravedis, ò quintales, arrobas, libras, &c.

196. Para el calculo de estas cantidades es necesario saber la division de cada una de estas especies; que es en la siguiente forma.

Monedas de Castilla	Gravedades, ò pesos
1. Doblō tiene 16 pes.	1. quintal tiene 4 arrs.
1. Peso 20. reales.	1. Arroba 25. libras.
1. Real 34. mrs.	1. Libra 16. onzas.
Medidas de Castilla	**Tiempos.**
1. Toesa tiene 2 varas.	1. Siglo tiene 100. años
1. Vara tres pies.	1. Año 12. meses.
1. Pie 12. pulgadas.	1. Mes 30. dias, y 31.
1. Pulgada 12. lineas.	1. Dia 24. horas.
1. Linea 12. puntos.	1. Hora 60. minut.
	1. Minut. 60. segunds.

197. Se vé en estas divisiones que cada especie es parte de la que le antecede, asi el peso es parte del doblon, el real es parte de peso, el maravedi parte de real. Lo mismo en los quintales, la arroba es parte de quintal, la libra lo es de arroba, &c. y por tanto puede ser esta parte un divisor exacto, que llaman tambien *parte aliquota*; ó nó, en cuyo caso llaman *parte aliquanta*; pero llamese como quisieren, importanos saber si la tal parte es mitad, tercio, ò quarto, &c. de la otra; y esto mas particularmente para quando egecutemos la multiplicacion.

Sumar denominados.

198. Para que se verifique la suma de estos denominados, se sentarán de modo que se correspondan cada especie con su semejante (19); esto es doblones con doblones, pesos con pesos, &c. como manifiesta la formacion siguiente.

Egem-

Egemplo primero.

Se han de sumar las cantidades

	Doblones.	*Pesos.*	*Rs.*	*Mrs.*
Formacion.	20.....	16.....	15.....	25.
	36.....	19.....	17.....	33.
	42.....	17.....	19.....	22.
Suma.	101,.......	6.....	13.....	12.

199. Principio à sumar por la especie menor, que son maravedis; y los 80. maravedis quedán de suma, reduzcolos à la especie inmediata reales; esto es, veo quantas veces el real hecho maravedis se contiene en 80. (58) partiendo 80. por 34., y el cociente 2. reales pasolos à su coluna, y dejo los 12. maravedis que quedaron de residuo en la suya.

Sumo los reales, y la suma 53. que dà, reduzco à pesos, partiendo por 20. reales que tiene un peso: el residuo 13. dejo en la misma coluna, y llevo à los pesos el cociente 2.

Con-

Continúo sumando los pesos, y reduciendo los 54, que dàn de suma, à doblones, partiendo por 16. pesos que tiene el doblon, dejo el residuo 6. en su lugar, y llevo el cociente 3. à la coluna de doblones, donde sumo, y dà esta coluna 101. doblones.

Respondo pues, que la suma de las partidas propuestas es 101. doblones, 6. pesos, 13. reales, y 12. maravedis.

200. Del modo que se acaba de explicar, y con la noticia del contenido, ó division de partes, será facil conseguir la suma en los egemplos siguientes, que se ponen para egercicio, y por el mismo estilo en otros sus semejantes.

	Quintales	Arrobas..	Libras.....	Onzas......	Toesas.....	Varas......	Pies.......	Pulgadas.	Lineas.....	Puntos....
Formacion.	25	3	15	13	5	5	2	9	8	11
	0	2	1	15	20	1	2	7	3	0
	19	1	4	10	7	4	1	10	6	10
Sumas	45	2	22	6	38	0	1	3	6	9

	Años.	Mes.	Dias.	Hor.	Min.
Formacion.	5	11	18	3	7.
	30	10	29	21	53.
	8	0	1	18	41.
Suma	44	10	19	19	41.

Restar denominados.

201. Para que se pueda efectuar la resta en los denominados, exige, además de lo dicho (28), que cada cantidad se reste de su semejante, sentandolas para este fin de modo que se correspondan en coluna.

Egemplo primero.

	Pesos.	Rs.	Mrs.
De	25	12	27.
Se han de restar.	15	8	16.
Diferencia	10	4	11.

Restada cada especie de su semejante, principiando por los maravedis, se puede responder que es la diferencia de las cantidades propuestas 10 pesos, 4 reales, y 11. maravedis.

202.

202. Suele ocurrir muy continuo, que las unidades de alguna especie del restando son menos que sus semejantes del restador, en cuyo caso se saca una unidad de la especie proxima mayor en dicho restando, y reducida se junta con aquellas unidades menores, con lo que puede tener efecto la resta; vease repetido este caso en el egemplo siguiente.

2.º	*Doblons.*	*Pesos.*	*Rs.*	*Mrs.*
Restando...	50.......	10.........	8.......	11.
Restador...	10.......	15.......	10.......	30.
Diferencia.	39.......	10.......	17.......	15.

203. Principio à restar por la menor especie que son maravedis, y se vé que 30. maravedis del restador no se pueden sacar, ó restar de 11. que hay en el restando; por tanto, tomo una unidad de los 8. reales que hecha maravedis hace 34., y juntos con los 11. hacen 45., de quien resto los 30., y quedan 15. que pongo por residuo de maravedis.

Sigo

Sigo à los reales, y veo que para restar 10. reales del restador, de 7. que quedaron en el restando despues que se sacò el real, me hallo con igual tropiezo, y para vencerle saco de los 10. un peso, que reducido à reales, lo junto con los 7., y son 27., de quien restados los 10. reales del restador quedan 17. reales por residuo.

Continúo à restar los 15. pesos del restador de los 9. que habian quedado en el restando, y venzo su imposibilidad sacando un doblon, cuyos 16. pesos que vale junto à los 9., y de la suma 25., sacados los 15., quedan 10. por residuo de los pesos.

Resto ultimamente los 10. doblones de los 49. que han quedado en el restando, y el residuo 39. pongo en esta coluna de doblones.

Y puedo responder, que habiendo restado de 50. doblones &c. es la diferencia 39 doblones, 10. pesos, 17. reales, y 15. mrs.

204.

204. Mas facilmente se efectua esta resta preparando antes el restando, sacando la unidad, y colocandola reducida donde fuere necesario; v. g. el restando del egemplo anterior 50. doblones, 10. pesos, 8. reales y 11. maravedis mudarlo antes en su igual 49. doblones, 25. pesos, 27. reales, y 45. maravedis, y se sacará de él sin tropiezo el restador que se propuso.

Para egercicio sirvan estos egemplos.

	Quintales	Arrobas..	Libras.....	Onzas.........	Toesas....	Varas.....	Pies.......	Pulgadas.	Lineas.....	Puntos.....
Restãdo	36.	1.	5..	6.	30..	1..	0..	0...	8...	7
Restadr	12.	2.	6..	7.	15..	2..	2..	7.	10.	11
Diferenc.	23..	2..	23..	15	14....	0...	0....	4.....	9...	8.

	Años.	Mes.	Dias.	Hor.	Min.
Restando...	1788....	3....	5....	15.....	37.
Restador...	1778....	7....	8......	9.....	15.
Diferencia.......	9...	7..	27.....	6.....	22.

205. El multiplicar denominados puede efectuarse de dos modos principalmente; el primero que ahora sigue, se efectua reduciendo tanto multiplicando como multiplicador à su ultima especie, y colocando à cada resultado una unidad de su especie mayor, reducida à partes de la menor, y despues se egecuta la multiplicacion como se hizo (141), multiplicando quebrado por quebrado. El quebrado producto que resulta, que las mas veces es impropio, se reduce à enteros (91), y el primer cociente son de la mayor especie que se busca, despues à los residuos se van hallando los valores (159) segun el valor del todo de quien son parte.

206. Este primer methodo es mas facil de comprehender, por estar yá usadas todas las operaciones con que se consigue; pero el segundo, aunque mas dificil, es mas libe-

ral,

ral, y cientifico, y por este concepto que nos merece, llevára mas nuestra atencion.

207. Veamos la teoría del primer methodo empleada en un egemplo; y sea hallar el importe de 12 quintales, 3. arrobas y 11. libras à 8. pesos 6. rs. y 15. mrs.

Reduccion del multiplicando.

12..Quintales
x por 4 ar..4

48 = 12 qs.
† ...3 arrob.

51 arr. = 12 qs. 3 ar.
x 25 lib..25 = 1 arroba.

255
102

1275.lib. = 12 qs. 3 ar.
† ....11 libras.

$\left.\dfrac{1286}{100 \text{ libs.}}\right\}$ multiplicando

Idem del multiplicador.

8 Pesos
x 20 reales = 1 peso

160 rs. = 8 pesos
† ......6 reales

166 rs. = 8 pes. y 6 rs.
x ....34 = 1 real

664
498

$\left.\begin{array}{r} 5644 \\ \dagger \quad 15 \end{array}\right\}$ maravedis

$\left.\begin{array}{r} 5659 \\ \hline 680 \end{array}\right\}$ multiplicador

Egecuto ahora la multiplicacion $\frac{1286}{100} \times \frac{5659}{680}$ que dá de producto el quebrado impropio $\frac{7277474}{68000}$, y reducido á enteros (91) es 107. pesos, por ser de esta especie el producto que busco, y el residuo 1474. que se han de considerar partes de peso, hállo

su

su valor (159) en reales; esto es
$\frac{1474}{68000} \times 20 = \frac{29480}{68000} = 0$, reales y $\frac{2948}{6800}$ de real, cuyo valor en maravedis es 14. y $\frac{37}{50}$ de maravedi.

Conque puedo responder que el importe de 12. quintales &c. es 107. pesos, cero reales, 14. maravedises y $\frac{37}{50}$ de maravedi.

Se advierte, que si desde luego hubieramos pretendido el producto en maravedis, hubieramos puesto al multiplicador $\frac{5659}{680}$ la unidad en lugar de 680. así $\frac{5659}{1}$ y en tal caso los quintales multiplicados por maravedis daría al producto maravedis. Asimismo, si el producto se quisiese en reales sería el multiplicador $\frac{5659}{34}$, y si en pesetas serìa $\frac{5659}{136}$ &c.

208. Veamos ahora como aquì tambien se verifica lo dicho (35), que podremos tomar à los pesos tantas veces como quintales hay, y al contrario podrá ser tambien tomar tantas veces à los quintales como pesos hay; y por tanto, si alguno nos pregun-

guntase, que de que especie es el producto si del multiplicando, ò multiplicador, no podriamos responder determinadamente hasta reflexionar la naturaleza de la propuesta, y su resolucion; pues supongamos que nada mas se pidiese que multiplicar 6. varas de paño por 8. pesos; el efecto de la multiplicacion es 48, y muy natural responder que son 48. pesos, pero como en la propuesta nada mas se dijo que multiplicar 6. varas por 8. pesos, nada determina para que sepamos de qual de las dos especies es el producto, pues el 48. igualmente responde à estas dos questiones. Primera, costando la vara 8 pesos, 6 varas costarán $6 \times 8 = 48$ pesos. Segunda con 1 peso compro 6 varas, con 8 pesos compraré $8 \times 6 = 48$ varas. *Luego la naturaleza de la question es quien debe guiar en la egecucion para sacar los valores correspondientes á la especie de que debe ser el producto*, y asì parece que à la pregunta hecha no puede responder

der otro que el que està enterado de la resolucion, ò que resuelve la question de multiplicar denominados.

209. Egecutemos otro egemplo sencillo para quedar mas enterados de las dos soluciones que tienen los egemplos de esta naturaleza, y sea por el *segundo methodo de divisores ó partes aliquotas.*

Sea multiplicar 12 Quintales 2 Arrob. por 6 Pesos y 10 Rs.

Producto en Pesos.		*Producto en Quintales.*	
Multiplicando 12 qs. 2 arrob. Multiplicador.. .6 ps. 10 reales		12 qs. 2 arrob. 6 ps. 10 rs.	
Debiendose verificar (35) es 1.º 12 qs. x 6 ps. =	72 pesos.	1.º cada pes. à 12 qs. =	72 qs.
2.º 10 rs. es = $\frac{1}{2}$ p.º, y 12 qs. à $\frac{1}{2}$ p.º es lo mismo que sacar $\frac{1}{2}$ de 12 =	..6 pesos	2.º siendo las 2 ar. = $\frac{1}{2}$ ql. será 6 ps. à $\frac{1}{2}$ ql. = 3 qs. lo mismo que sacar la mitad de 6.......	..3 qs.
3.º y 4.º las 2 ar. es $\frac{1}{2}$ ql., y valiendo este 6 pes. y 10 rs., las 2 ar. = $\frac{1}{2}$ ql. valdrá..................	3 ps. 5 rs.	3.º y 4.º 10 rs. es = $\frac{1}{2}$ p.º; pero el peso toma 12 qs. y 2 arrob., luego el $\frac{1}{2}$ peso vale..................	6 qs. 1 ar.
Suma de productos....	81 ps. 5 rs.	Suma....................	81 qs. 1 ar.

210. Si ponemos atencion en estas dos soluciones, se verá *que el valor de cada parte del multiplicando se facilita con sacar otra tal del multiplicador, y al contrario*; por ser en los pesos 2 arrobas igual $\frac{1}{2}$ quintal, sacase por su valor la mitad del multiplicador que es 3 pesos y cinco reales, cuya observacion nos ayudará mucho en los egemplos siguientes, que irémos practicando para dar à conocer el methodo; pues juzgamos que la practica es el mejor modo de esplicarse uno para darse à entender en estas materias; por lo qual supongamos que se ofrece.

Egemplo primero.

211. Hallar el importe de 26 quintales, 3 arrobas, 11 libras y 6 onzas à 6 pesos el quintal.

Ex-

Explicacion de los productos

Partes.	26 Qs. 3 ar. 11 ls. 6 onzs. 6 Pesos.
12 quintales.	156.....''.....''
3 arrob. $=\begin{cases}2.\\1.\end{cases}$	....3 ....1...10
11 libs. $=\begin{cases}5.\\5.\\1.\end{cases}$	...........6 ....6 .... 1....$6\frac{4}{5}=(117)\frac{8}{10}$
6 onzs. $=\begin{cases}4.\\2.\end{cases}$	...............$10\frac{4}{20}$...........$\frac{2}{10}$ ....$5\frac{2}{20}$...........$\frac{2}{10}$
Suma............161.P...3 rs...22 $\frac{1}{10}$ mrs.	

Primero. Los 26 quintales à 6 pesos, importan 156 pesos.

Para hallar el valor de las 3 arrobas las mudo en sus divisores ò partes aliquotas 2 y 1, y reparo que siendo 2 arrobas $=\frac{1}{2}$ quintal, y pues el quintal vale 6 pesos, al $\frac{1}{2}$ quintal, ù 2 arrobas le correspon- de 3 pesos, que le saco al frente: sigo, yá que á las dos arrobas le han correspondido 3 pesos, à la

1, que es su mitad, le alcanza un peso y 10 reales, que le saco al frente.

Divido ahora las 11 libras en divisores ó partes aliquotas 5, 5 y 1; y pues 5 libras es el $\frac{1}{5}$ de 1 arroba, sacarèmos por su valor el quinto de un peso y 10 reales, valor de la arroba que es 6 reales, otro tanto pondrémos al frente de las 5 libras que le siguen.

Por ser una libra el $\frac{1}{5}$ de 5 libras, sacarémos por su valor el $\frac{1}{5}$ de 6 reales, valor de las 5 libras, que es 1 real $6\frac{4}{5}$ mrs.

Mas; divididas las 6 onzas en los divisores ò partes aliquotas 4 y 2 de libra, pues que las 4 onzas es la quarta parte de la libra, será su valor la quarta parte de un real, $6\frac{4}{5}$ mrs. que vale la libra, el qual es $10\frac{4}{20}$ mrs., que sáco à su frente.

Ultimamente, pues que 2 onzas es mitad de las 4 antecedentes, será su valor la mitad de $10\frac{4}{20} = 5\frac{2}{20}$, que

que sáco tambien à su frente; y sumando (199) todos los productos parciales, dan el total 161 pesos, 3 rs y $22\frac{1}{10}$ mrs.

212 Si en esta propuesta se intenta saber el resultado en quintales; esto es, si se hubiera intentado saber quantos quintales, arrobas &c. se comprarìan con 6 pesos, à 26 quintales, 3 arrobas, 11 libras y 6 onzas el peso; se hallaría 161 quintales, 18 libras y 4 onzas de producto, como puede ver el aplicado.

Egemplo segundo.

213 Repitamos ahora el egemplo practicando (207), por reduccion à la menor especie, con animo de confrontar el resultado de este methodo de partes aliquotas ó divisores con aquel.

Se pide el importe de 12 quintales, tres arrobas y 11 libras x por 8 pesos, 6 reales y 15 mrs.

FORMACION.

Multiplicãdo. 12 qs...3 arrob..11 libs.
Multiplicador..8 ps...6 rs.......15 mrs.

		.96
6 reales =	5	...3
	1.	...".12
mrs........	15.	..."...5...10
3 arrob. =	2.	..."...3.....$7\frac{1}{2}$(117)=50
	1.	..."...1...$20\frac{3}{4}$............75
11 libs. =	5.	..."...8...$10\frac{19}{20}$...........95
	5.	..."...8...$10\frac{19}{20}$...........95
	1.	..."...1...$22\frac{52}{100}$.........59
Producto......107...0...$14\frac{31}{50}$		3,74

Explicacion.

Primeramente el valor de los 12 quintales à 8 pesos es 96 pesos. Para tener el valor de los 12 quintales à 6 reales, dividirèmos estos en 5 y 1, y pues 5 reales es $\frac{1}{4}$ de peso, se sacará por su valor $\frac{1}{4}$ de 12 = 3 pesos. Y al real, que es $\frac{1}{5}$ de 5 reales, le corresponde $\frac{1}{5}$ de 3 pesos = 12 reales; siendo 15 mrs.,

$\frac{15}{34}$ de real, será su valor $\frac{15}{34}$ de 12 reales = 5 reales y 10 mrs.

Para tener el valor de las 3 arrobas, las divido en 2 y 1; y pues 2 arrobas es $\frac{1}{2}$ quintal, será su valor la mitad del valor del quintal, que resulta 4 ps. 3 rs. $7\frac{1}{2}$ mrs., y à la 1 arroba le corresponderá la mitad 2 p. 1 real $20\frac{3}{4}$ mrs.

Ultimamente, para tener el de las 11 libras, las dividirémos en 5, 5 y 1, y pues 5 libras es $\frac{1}{5}$ de arroba, será su valor $\frac{1}{5}$ del valor de la arroba, que sale igual 8 reales $10\frac{19}{20}$ mrs. Lo mismo debe sacarsele al frente de las otras 5 libras; y por fin, yà que una libra es $\frac{1}{5}$ de las 5 libras, será su valor el $\frac{1}{5}$ de 8 reales $10\frac{19}{20}$ mrs, valor de las 5 libras, que resulta 1 real $22\frac{59}{100}$ mrs.

214. Para sumar estos productos parciales, reduzco los quebrados de mrs á la denominacion 100 (117), y sumando segun se ha hecho (199) resulta de producto total 107 pesos $14\frac{37}{50}$ mrs., como se vió (207).

215.

215. Está bastante patente, que el valor de cada especie se saca del valor de una unidad de la especie proxima mayor; esto es, el valor de las libras se sacó del valor de una arroba, y lo mismo se vé en las demás especies; luego, *para tener el valor de cada especie se necesita sacar antes el de una unidad de la especie proxima mayor*; y por tanto, quando en las partes aliquotas ó divisores, no salga la unidad, se secará su valor sentandolo à parte, ò entre lineas, para que no sea comprehendido en la suma, el qual solo servirà para facilitar el de sus partes; veamoslo en el egemplo siguiente.

Egemplo tercero.

216. Se pide el importe de 6 toesas, 1 vara, 2 pies, 9 pulgadas, y 3 lineas à 8 pesos la toesa.

FOR-

FORMACION.

Division de partes.	6 toes..1 var..2 pies..9 pulg..3 lins. 8 pesos.			
Toesas.....6=	..48.	3)	4)	
Vara.......1..	...4			
2 Pies.= { 1...	1	6	........22 $\frac{2}{3}$	....(117)= 24.
{ 1...	1	6	........22 $\frac{2}{3}$	.... 24.
9Pulg.= { 3...		6	........22 $\frac{8}{12}$	.... 24.
{ 3...		6	........22 $\frac{8}{12}$	.... 24.
{ 3...		6	........22 $\frac{8}{12}$	.... 24.
Fals1 .....1...		2	........7 $\frac{20}{36}$	
3...			....................18 $\frac{32}{36}$	.... 32.
Producto.........	55	13	........30 $\frac{2}{2}$	........152:36=4

Explicacion de productos.

Siguiendo el mismo orden anterior se tiene 1.º 6 toesas x por 8 pe-

pesos = 48 pesos; 2.° à la vara por ser $\frac{1}{2}$ toesa le corresponde la mitad de 8 pesos = 4 pesos; 3.° como los 2 pies es $\frac{2}{3}$ de vara divididos en 1 y 1 toca à cada pie $\frac{1}{3}$ del valor de la vara = 1 peso 6 reales 22 $\frac{2}{3}$ mrs.: 4.° Las 9 pulgadas divididas en 3, 3 y 3 es cada 3 el $\frac{1}{4}$ de pie, y le corresponde por tanto 6 reales 22 $\frac{8}{12}$ mrs.

5.° Para tener el valor de las 3 lineas como son parte de pulgada, necesitamos el valor de ésta, saquemoslo con este fin, tomando el tercio del valor de 3 pulgadas, y sale 2 reales 7 $\frac{20}{36}$ mri., que pues no se debe incluir en la suma (215), lo dejarémos cerrado entre lineas como representa el egemplo, y llamaremos á esta unidad que suponemos, *falsa*.... Saquemos pues el valor de las 3 lineas del valor de la pulgada falsa, y nos dá 18 $\frac{32}{35}$ mri, con que queda concluida la multiplicacion; y sumando, resulta de producto 55 pesos, 13 reales, 30 $\frac{2}{3}$ mri.

217.

217. Si se pretendiese el producto en toesas resultará de 55 toesas, 1 vara, 1 pie, y dos pulgadas.

Quarto egemplo.

218. Practiquémos éste que suelen llamarle *varas* x *por varas*, en que pues multiplicando y multiplicador son de especies semejantes, los dos productos deben ser iguales; porque lo mismo es 6 varas x por 5 varas, que 5 varas x por 6 varas = 30 varas (quadradas de que entiende la Geometría): no obstante con su permiso, para la inteligencia de estos egemplos darémos una idéa en este instante.

219 Por vara quadrada podemos entender por ahora, que es un pedazo de paño en quadro, de esta figura □, que cada lado tenga una vara de largo.

220. Quien haya practicado, y entendido los egemplos anteriores,

no

no perdiendo de vista la advertencia (35), le será mas facil desempeñar este egemplo que aquellos; por tanto, queda ceñida su explicacion à la que se manifiesta en su planta ó formacion.

221. Ahora pues, hay una tela que tiene de ancho 6 toesas, 1 vara, 1 pie, 11 pulgadas y 9 lineas; y de largo 9 toesas, 2 pies, y 9 pulgadas: se desea saber ¿Quantas toesas, varas &c. quadradas contendra todo el paño ó tela?

For-

Multiplicando.			6 ts. 1 v. 1 p. 11 ps. 9 lins.
Multiplicador..			9 t.. ".... 2.... 9.
Productos de las 6 toesas del multiplicádo por todo el multiplicador.	Toes. 6.		54
	Vara 1.		.3
	2 pies	1	..1
		1	..1
	9 pgs.	6	1
		3	.... 1.......6
Productos de las demas partes del multiplicando por todo el multiplicador..	Vara 1.		..4.....1.....1.....4....6
	Pie... 1.		..1.....1... " ... 5....6
	11 pgs	6	..".....1.....1......8....9
		3	."....".....2......4.....4..6
		1	..."...".....".......9....5..6
		1	..."..."....."......9....5..6
	9 lins.	6	."...."....."......4.....8..9
		3	.".."...."......2....4..4 ½
Producto total....			64...1..."....7..1..7 ½

Con que respondiendo al egemplo diremos, que el producto 64 toesas, 1 vara, 7 pulgadas, 1 linea y 7½ puntos, todas y todos quadrados, es lo que contiene la tal tela ò paño.

222. Pues que lo mismo es 4x6 que

que 2 x 12. que 8 x 3.: podremos probar estos egemplos aumentando uno de los factores, y disminuyendo el otro de la misma suerte; asi el egemplo antecedente en prueba dará la formacion siguiente.

Duplo el multiplicando es 13 T. 1 V. o P. 11 P. 6 L.		
Mitad del multiplicador		....4.....1.....1.....4.....6
Productos de las 13. toesas por todo el multiplicador.	Toesas.......13	52
	Vara.........1	...6.......1
	P............1	...2.......”......1
	Pulgs........4	...”.....1.....1.....4
	Falsa........1	..”.....”.....1.....1
	Lineas.......6	..”.....”.....”.....6.....6
Productos de las demas partes del multiplicando por todo el multiplicador.	Vara.........1	...2.....”.....2.....2.....3
	Pe. falso.....1	..”.....1.....1.....8.....9
	Pulgs...... 6	..”.....”.....2.....4.....4.....6
	3	..”.....”.....1.....2.....2.....3
	1	...”.....”.....”.....4.....8.....9
	1	..”.....”.....”.....4.....8.....9
	Lineas.......6	..”.....”.....”.....2.....4.....4$\frac{1}{2}$
Producto total		........64.....1.....”.....7.....1.....7$\frac{1}{2}$

Con-

Confronta con el mismo egemplo anterior, y de este modo nos podemos satisfacer de otro qualquier egemplo de los practicables con esta regla de denominados; ò bien reduciendo á la ultima especie, segun se hizo (207).

Partir denominados.

223. La operacion de partir denominados es sumamente simple; porque despues de reducidos dividendo, y divisor à su ultima especie, y colocando à cada resultado por denominador una unidad de su especie mayor, que todo esto es preparacion, se reduce à partir el quebrado dividendo por el quebrado divisor; el primer cociente en este caso será de la especie mayor del dividendo; y si queda residuo, como es muy contingente, se le averiguará su valor, como se hizo (160), hallando el valor de un quebrado.

Para verlo mas claramente apli-

apliquemos esta doctrina al egemplo (213), à fin de que al mismo tiempo de hacernos cargo del methodo, nos deje mas satisfechos, dando al cociente el resultado, que allì sabemos debe ser el uno de los dos factores.

Fué pues 107 pesos y $14\frac{37}{50}$ mrs. el importe de 12 quintales, 3 arrobas, y 11 libras; se pide saber el precio que tubo el quintal.

Resolucion: Como cada quintal tiene su valor incluso en el total importe, habrà en este tantos valores de un quintal como quintales hai, luego partiendo el importe total por los quintales, el cociente será el precio de un quintal.

Reduzcamos el dividendo 107 pesos $14\frac{37}{50}$ mrs. à su ultima especie: asi, 107 x 20 rs. que tiene un peso son 2140 rs., que mudados en mrs. con los 14, y ultimamente á la especie de su quebrado para juntarle el numerador 37., tenemos el resultado 3638737, y colocandole por denomina-minador un peso reducido tambien á la especie del quebrado, queda el dividendo mudado en este quebrado impropio $\frac{3638737}{34000}$.

Practicada la reduccion en los quintales, arrobas y libras, resulta $\frac{1286}{100}$, y será $\frac{3638737}{34000} : \frac{1286}{100} = \frac{3638737}{437240} = 8 \dagger \frac{140817}{437240}$ pesos, valuèmos el quebrado de peso en reales asi: $\frac{140817}{137240} \times 20 = \frac{2816340}{437240} = 6 \dagger \frac{19290}{13724}$ rs. cuyo valor en mrs. de este quebrado es 15 mrs., y dirémos que el precio del quintal fué 8 pesos, 6 rs. y 15 mrs. como era preciso segun consta (207), y de este modo se desenredan los casos semejantes.

Para hacer dicha particion podíamos haber tomado este rumbo, y parece mas sencillo, si hubieramos partido los $\frac{3638731}{50}$ de maravedí, que vale el dividendo, por las 1286 libras del divisor, el cociente $56 \dagger \frac{37937}{64300}$ mrs. es el valor de una libra, y tomado 100 veces, por tener el quintal 100 libras, dará el mismo valor del quintal que dió antes.

224. Podrá en algun caso nece-

sitarse determinar la especie del cociente en partir denominados, y ocurrir duda al mismo tiempo; pero esta se desata despues que nos digan la especie del dividendo y divisor. Porque supongamos 1.° que 48 pesos es el importe de 6 quintales, yá se deja entender que 48 partidos à 6, es hacer al 48 seis partes (54), y el cociente que es la una serán 8 pesos, que, por ser 6 los quintales, corresponden à cada quintal.

2.° Supongamos que el dividendo son 48 pesos, y divisor tambien 8 pesos; serà $48:8=6$ que no podemos determinar de que especie es, solo podemos decir abstractamente que 6 fué el otro factor con 8 pesos para producir al 48 pesos. 3.° Pero si en este caso nos hubieran dicho que el dividendo eran quintales, el cociente 6 tambien debian ser quintales. 4.° Si se dice que dividendo y divisor eran quintales, ofrece lo mismo que quando pesos;

luego

luego resulta, *que quando dividendo y divisor sean de distinta especie, el cociente es de la especie del dividendo; y quando sean de una misma, el cociente es un numero abstracto*, que (53) solo dice el numero de veces que las unidades del divisor se igualan con las del dividendo; esto es, quantas veces el divisor se contiene en el dividendo.

DE LAS POTESTADES DE los numeros, y extraccion de la raiz quadrada.

225. Potencias de un numero, se llama al mismo numero, y à los productos que resultan de dicho numero multiplicado por si propio.

226. Distinguense de este modo: al numero en su primer estado que se presenta, se dice 1.ª *potencia*; al producto de él por sì mismo 2ª *potencia, ò quadrado*; y al producto de esta 2.ª potencia por la 1.ª se llama 3ª *potencia, ò cubo*; al de esta 3.ª potencia por la primera, *quarta*;

ta; y asi resultan las demas 5^a 6^a, &c.

227 Por tanto, quando se quiere indicar que una cantidad qualquiera está, ò se ha de elevar à una potencia, se cierra en un parentesis, y se le coloca à la derecha un poco alto el numero que indica el grado de la potencia, à que llaman por tanto *exponente*; asi 12 elevado à la 2^a potencia se indica $(12)^2$ à la 3^a asi $(12)^3$

228. A la primera potencia tambien se *llama rayz* de qualquiera de las otras, y asi dos en si mismo es 1^a potencia (226) ò raiz $2 \times 2 = 4$ es 2^a potencia del 2; $2^2 \times 2 = 4 \times 2 = 8$ es 3^a potencia, y $(2)^3 \times 2 = 8 \times 2 = 16$ es 4^a potencia del 2 &c.

229. Tratémos por ahora en hallar la 2^a potencia de qualquier numero, y extraer la 1^a potencia ò rayz de él, ò de otro qualquiera que le considerémos elevado à la 2^a potencia ò quadrado.

COM-

COMPOSICION DEL QUADRADO, ó segunda potencia de qualquier numero.

230. Si el 24 por egemplo lo multiplicamos por si mismo, asì (35) $24 \times 24 = 576$ este producto (226) será 2ª potencia del 24. Observemos pues los productos de que se compone.

$$\begin{array}{r} 24 \\ 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

Primeramente 4×4 es unidades por unidades, y su producto será *el quadrado de las unidades*. 2º 4×2 es 4 unidades del multiplicador por 2 decenas del multiplicando, lo mismo que *un producto de decenas por unidades.*

3º 2×4 esto es, 2 decenas del multiplicador por 4 unidades del multiplicando, es tambien *un producto de decenas por unidades.* 4º 2×2 dos decenas del multiplicando por 2 decenas del multiplicador, *es el quadrado de las decenas.*

231. Lo mismo se verifica en otro qualquier numero, porque aunque sea 124×124 serán la 1 centena y dos decenas lo mismo que 12 decenas, y se tiene 4×4 quadrado de unidades, 4×12 y 12×4 los dos productos de decenas por unidades, y 12×12 será el quadrado de las decenas.

232. Luego *todo quadrado se compone del quadrado de las decenas de el de las unidades, y de dos productos de decenas por unidades.*

233. Tenemos pues que $120+4 = 124$ asimismo $100+24 = 124$; pero $(120+4)^2 = (124)^2$ segun acabamos de conocer; luego (43) tambien $(100+24^2 = (124)^2$, esto es, si tomamos al 100 en lugar de decenas, y al 24 como unidades se verificará la misma propiedad; luego si llamamos á las decenas 1ª parte, y á las unidadas 2ª resulta que podemos sentar mas generalmente que, *si una cantidad se divide como quiera en dos partes, el quadrado de toda*

da ella serà igual à los quadrados de las partes mas à dos productos de las mismas partes, asi pues que $326 = 320+6 = 300+26$ será $(326)^2 = (320+6)^2 = (300+26)^2 = (320)^2 + (6)^2 + 2(320 \times 6) = 106276$, como se vé en la formacion 1ª, y $(300)^2 + (26)^2 + 2(300 \times 26) = 106276$ formacion 2

Formacion 1ª	*Formacion 2ª*
$(320)^2 = 102400$	$(300^2 = \ldots 90000$
$6^2 = \ldots\ldots 36$	$(26)^2 = \ldots 676$
$2(320 \times 6 = \begin{cases} .1920 \\ .1920 \end{cases}$	$2(300 \times 26) = \begin{cases} 7800 \\ 7800 \end{cases}$
$(326)^2 = 106276$	$(326)^2 = 106276$

234 Queda pues patente la composicion del quadrado de todo numero, el qual tendremos siempre que se divida en dos partes, y se egecuten con ellas los productos que acabamos de indicar: à este por tanto se llama *quadrado racional*, ò que tiene rayz justa.

235. Pero à todo numero, to-

ma-

mado yà como quadrado, y que no se componga de dichos productos, se llama *irracional*; porque hasta ahora, à pesar de todos los esfuerzos de muchos, y grandes Matematicos que lo han solicitado, no se ha encontrado modo para sacarle rayz justa, y tenemos que contentarnos con poderla extraér de los quadrados perfectos ò racionales, justa; pero de los imperfectos ò irracionales, solo aproximada à la justa, mas y mas, aunque sin alcanzarle jamás.

EXTRACCION DE LA RAYZ quadrada de un numero ó guarismo.

236. La extraccion de la rayz quadrada no es otra cosa, que, dado el quadrado, hallar su primera potencia ó rayz, que multiplicada por sì misma dió de producto el quadrado que se propone; cuya operacion con que se consigue es una descomposicion del quadrado: y asi observarémos,

237. , Primero: Si el numero, que se proponga para extraerle su rayz, no pasa de decenas, se infiere, que su raiz son unidades, ò que no llega à 10. pues solo una cifra aun la mayor 9 elevada al quadrado dà 81. que no pasa de decenas, ò no llega à centenas, y diez que son las menores decenas elevadas al quadrado dan centenas, asi $(10)^2 = 100$: *luego en 2 cifras de quadrado hay solo una de rayz.*

238. Segundo: Si el numero quadrado que se proponga no pasa de millares ó miles, ni es menos que centenas, tendrá 2 cifras en la rayz; porque las dos cifras menores 10 elevadas al quadrado dan 100, que es el menor quadrado de decenas; y 99 que son las mayores decenas elevadas al quadrado dan 8901, que no pasa de millares. Luego *todo quadrado que llegue à centenas, y no pase de millares, tendrà dos cifras en la rayz*: y se deja conocer *que tendrà* 3 *el quadrado que llegue á* 5 *ci-*

cifras; quatro el que llegue à 7; y 5 el que llegue à 9.: de donde sacarémos esta regla.

239. Primera, Para extraer la rayz de un numero quadrado, dividase de dos en dos cifras de derecha à izquierda, y (238) tendrà tantas cifras la rayz como divisiones resulten en el quadrado, asì $\sqrt{576.}$ quedará $\sqrt{5,76.}$

Segunda, Extraygase la rayz de la 1ª. division de la izquierda, que en este caso es 5, esto es, la rayz del quadrado mayor 4, contenido en 5. que es 2., y puesta à parte, restando su quadrado 4. de 5. y al residuo 1. bajandole à la derecha, la 2ª. division que sigue quedará el egemplo en esta forma.

$$\begin{array}{rl} \sqrt{5,76} & \underline{|\ 2\ldots}\ \text{raiz} \\ \underline{4} & \\ 1\ 76 & \end{array}$$

Es

Es patente que el quadrado 4.
restado de la 3.ª cifra ha sido res-
tar el quadrado de las decenas, lue-
go (232) se infiere que quanto que-
da en 176 debe ser los dos pro-
ductos de decenas por unidades, mas
el quadrado de las unidades; o lo
que es lo mismo, el duplo de las
decenas multiplicado por las unida-
des; mas el quadrado de las unidades.

Por tanto, para hallar las uni-
dades, ó cifra que sigue à la rayz,
tengase al 176, por un dividendo,
cuyo divisor sea la cifra hallada,
considerada como decenas, multipli-
cada por 2; asì 20 x 2 = 40; divi-
dase pues 176 à 40, y su cociente
4 sera la cifra de unidades que se
busca, multipliquese 4 por el di-
visor 40, y el producto 160, mas
el quadrado 16 de las unidades res-
tese del dividendo 176, y da por re-
siduo cero sentando ultimamente las
4 unidades en la raiz quedarà el
exemplo asì.

$$
\begin{array}{rl}
\sqrt{576} & |\ \underline{24..\text{raiz}} \\
\underline{4} & \\
176 & |\ \underline{40..\text{Divisor}} \\
\underline{176} & \quad \underline{4} \\
\cancel{0} & 160 \\
 & \underline{16} = (4)^2 \\
 & 176
\end{array}
$$

Puedese responder que la rayz justa de 576 es 24, de que ya estamos seguros (230); pero quando queda algun residuo es indicio de que el numero que se propuso, no fue quadrado perfecto ò racional.

240. Para prueba en ambos casos de estar bien extraida la rayz se eleva esta al quadrado, y en el primer caso dará el quadrado propuesto racional; en el segundo añadiendole el residuo tambien darà el quadrado propuesto irracional.

Egemplo segundo.

241. Extraigamos la rayz del quadrado racional (233) 106276 para-

ra que mas bien veamos que esta operacion es la descomposicion del quadrado.

Indicada la operacion con el signo $\sqrt{}$ divido el guarismo propuesto de dos en dos cifras, y hallo que por dar tres divisiones (238) debe tener 3 cifras su rayz.

Extraigo la del quadrado mayor contenido en la primera division 10 de la izquierda, que es 3, la que siento à parte para rayz. Resto su quadrado 9 de 10. y à la derecha del residuo 1 bajo la segunda division 62; con lo que à el todo 162 le considero como el dividendo (232) compuesto de los dos productos de decenas por unidades, mas el quadrado de unidades.

$\sqrt{106276}$	$\lvert$ 326 raiz
9	
162	$\lvert$ 60.... 1r divisor.
124	$\overset{2}{120}$
3876	†..4=$(2)^2$
3876	124
0	$\lvert$ 640..2o divisor.
	$384\overset{6}{0}$
	† 36=$(6)^2$
	3876

Ahora considerando al 3 como decenas, y multiplicado por 2, busco al divisor primero que sale 60, conque 162 partido á 60. toca à 2. segunda cifra que viene para rayz, y su producto 2x60 † $(2)^2$ =124. restolo del dividendo 162, à cuyo residuo 38 bajo la tercera division 76, y el todo 3876 representa un dividendo compuesto del duplo de decenas X por unidades, mas el quadrado de unidades.

Halla

Hallo el segundo divisor, que es $320 \times 2 = 640$, por el qual partidos 3876, dá de cociente 6, que pongo en la rayz; multiplico 460 por 6, y el producto 3840 mas $(6)^2 = 3876$ restado del dividendo 3876. queda de residuo cero; lo que manifiesta que el numero propuesto 106276 es quadrado perfecto, cuya rayz justa es 326, como se sabe, de (233).

Egemplo tercero.

242. Sea extraer la rayz del quadrado irracional 2037.6976 con animo de tener la del quadrado racional mayor, contenido en el propuesto, y además una fraccion, que junta con la rayz hallada, sea el todo una rayz proxima del irracional, quanto puede bastar en muchos casos.

$\sqrt{20,37,69,76}$	4514† $\frac{780}{2029}$
16	
437	80.... 1.r divisor
425	
1269	900. 2.º divisor
901	
36876	9020. 3.º divisor
36096	
780	

243. Para esta solucion sigo los mismos pasos anteriores con solo la diferencia, que para que salga el quadrado de unidades con el producto del divisor por la cifra que resulte de cociente, imagino esta cifra colocada sobre el cero, lugar de las unidades en el divisor, con lo que resto de una vez el producto y quadrado de unidades de las cifras que se hallan en division.

244. Por fin, si concluida la ope-

operacion hasta haber bajado todas las divisiones, quedàse algun residuo, como sucede en este egemplo con el 780, se puede colocar à la derecha de la raiz como numerador de un quebrado, cuyo denominador serà el duplo de toda la raiz hallada, mas la unidad; y asi diriamos, que una raiz proxima del quadrado irracional propuesto 20376976, es $4514 + \frac{780}{9029}$, cuyo quadrado es menor que el propuesto en $\frac{6434220}{81522841}$ menos que $\frac{1}{12}$ de una unidad del quadrado propuesto, ò $\frac{1}{244523712}$ de todo el quadrado.

245. Esta practica de añadir à la raiz tal fraccion puede tener apoyo en el discurso siguiente.

$\sqrt{16 + 8 + 1}$	$4 + 1$.... raiz.
16	
$0 + 8 + 1$	$8 + 1$.... divisor.
$- 8 - 1$	1
0	

Tenemos, que siendo $5=4+1$ y (233) $5^2=(4+1)=16+8+1$, será $\sqrt{5^2}=\sqrt{16+8+1}$, estraigamos la raiz de esta expresion por el mismo estilo que antes, y tenemos que la de la primera parte es 4, y queda en $8+1$. los dos productos de la primera 4 por la segunda 1. mas el quadrado de la segunda parte.

Para hallar la segunda duplese la primera 4, y à su duplo 8 juntando la unidad da $8+1$ por divisor, y se tiene $8+1$ dividendo que quedó, partido à $8+1$ divisor, es el cociente 1. justamente la segunda parte que faltaba, y que añadida à la primera 4. completa la raiz justa 5. que debe ser. *Luego el residuo de todo irracional* que està representado en $8+1$, que à qui quedò, *partido por el duplo de la raiz, ò primera parte hallada, mas la unidad, dará una fraccion por segunda parte, que junta con la primera será una raiz que se aproximarà à la justa.*

APRO-

APROXIMAR UNA RAIZ por decimales.

246. A la aproximacion de raiz anterior es preferible la siguiente, llamada por decimales: consiste solo en extraer la raiz de los enteros, y al residuo que queda añadir dos ceros para cada cifra de aproximacion que se quiere en la raiz; esto es, dos ceros para decimos, quatro para centesimos, 6 para milesimos &c. fundase el añadir los ceros en la propiedad siguiente.

247. *Si dos potestades de un mismo grado se multiplican entre sì, el producto es una potestad del propio grado, cuya raiz es el producto de las raices.*

Tomemos para verlo las potestades segundas 4 y 9, cuyas raices son 2 y 3, y tendrémos $4 \times 9 = 36$, y $\sqrt{36} = 6$. es cabalmente el producto de las raices 2 y 3; porque $2 \times 3 = 6$: lo mismo sucede con otras qualesquiera, por egemplo 25 y 100; pues $25 \times 100 =$

2500

2500, cuya raiz es 50, igual al producto de sus raices 5 y 10.

248. Luego del mismo modo, si tomamos qualquiera irracional como 3, y otro quadrado, por egemplo 100. Tendrémos $3 \times 100 =$ 300. la potestad del mismo grado, cuya raiz será el producto de las raices, que se extraerá por el estilo que antes, y partiendola por la raiz de 100, que es 10, el cociente será la raiz de 3.

Egemplo primero.

249. Sea lo que se ofrece aproximar la raiz de 3 hasta centesimos.

Siento à la derecha del 3 quatro ceros asì 30000. que será lo mismo que haber multiplicado el irracional 3 por 10000, quadrado de 100, y estrahida la raiz de esta expresion 30000, como antes, dá 173 por el producto de las raices, pero como sabemos que la del quadrado 10000 es 100, será 173 partido por 100; esto es $\frac{173}{100} = 1, 73$

la

la raiz de 3 aproximada hasta centesimos.

El quadrado de esta raiz es menor que el justo solamente en $\frac{71}{10000}$, poco mayor que $\frac{1}{141}$ de una unidad, ó $\frac{1}{423}$ del quadrado 3, y aun en caso necesario se puede aproximar hasta milesimos, diez milesimos, &c. y sus quadrados diferenciarán menos del justo.

Extraer la raiz de quebrados.

250. La operacion para extraer la raiz de quebrados, se egecuta en numerador y denominador; porque quando el quebrado se elevase al quadrado, ó segunda potestad, sería multiplicandolo por sì mismo (226) así $(\frac{3}{4})^2$ será $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$, y por tanto, &c.

Egemplo primero.

251. Extraer la raiz de un quebrado racional, como $\frac{9}{16}$. *Resolucion:* Extraigase del numerador y denomi-

minador, así $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$, y digo que $\frac{3}{4}$ es la raiz de $\frac{9}{16}$.

Egemplo segundo.

252. Quando solo denominador tenga raiz exacta, se extraerá de este (239) y del numerador por aproximacion (249); asì se pide la raiz de $\frac{5}{9}$ aproximada hasta centesimos.

La raiz del denominador desde luego la tenemos que es 3. y la del numerador aproximada hasta centesimos que se pide será $\sqrt{5{,}00{,}00} = 2{,}23$; luego $\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{2{,}23}{3} = \frac{223}{300}$, la qual dá un quadrado menor que el justo en $\frac{271}{90000}$, que mas reducido es proximamente $\frac{1}{332}$; y menor diferencia darìa si la aproximacion fuese à milesimos, diez milesimos, &c.

Egemplo tercero.

253. Si el numerador solamente tiene raiz del mismo modo, tendremos la aproximada facilitando la del denominador por decimales; sea

sea la que se pide $\sqrt{\frac{4}{7}}$, aproximada hasta centesimos será $\sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{70000}{}}} = \frac{2}{2,64} = \frac{200}{264} = (102)\ \frac{25}{33}$ cuyo quadrado es mayor que el justo en $\frac{19}{7623}$; que mas reducido es cerca de $\frac{1}{401}$: y á este modo se desenredarán los semejantes.

Quarto egemplo.

254. Quando numerador, y denominador son irracionales, es indispensable la aproximacion en ambos, ò usar de la preparacion siguiẽte.

Sea la peticion extraer la raiz de $\frac{5}{8}$; multiplico numerador, y denominador por el mismo denominador, y será $\sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{\frac{40}{64}}$, con que nos hallamos en el caso segundo, y la raiz de $\frac{40}{64}$ lo es de su igual $\frac{5}{8}$.

Esta preparacion la egecutaré multiplicando con el denominador, quando busque la raiz que no exceda da á la verdadera; pero quando mas convenga la que sea mayor que la justa, multiplicaré con el numerador, así $\sqrt{\frac{5}{8}}$ será $= \sqrt{\frac{25}{40}} = \frac{5}{\sqrt{40}}$ aproximada hasta donde se pida. La razon de esto se hace patente en los dos egemplos segundo y tercero; pues ademas de manifestarse en sus pruebas, es claro que en el segundo, como la raiz del numerador no llega à la justa, y la del denominador sì, queda menor la fraccion que forman las raices, y al contrario en el egemplo tercero, donde no consiguiendose la raiz justa del denominador, queda este disminuido; y por tanto (88) mayor el quebrado que forman las raices.

De lo qual se infiere, que si queremos una raiz aun mas proxima que qualquiera de las dos, se tendrà con sumarlas, y sacando la mitad, serà esta una raiz mas proxima à la verdadera.

De

De la razon entre cantidades.

255. *Razon*: Se dice á la comparacion que se hace de una cantidad à otra de su misma especie, como 8 libras de plata à 6 de la misma.

256. El juicio que se forma en esta comparacion, puede dirigirse à conocer el modo como la una contiene à la otra, y entonces se llama *razon Geometrica*, que se forma asi 8 : 6 interponiendo dos puntos à las cantidades: ò puede dirigirse à conocer el exceso que lleva la una à la otra, en cuyo caso se dice *razon Aritmetica*, que se forma asì 8. 6; interponiendo solo un punto à las cantidades.

257. *Antecedente*: se llama à la primera cantidad que se compara, como el 8.

258. *Consequente*: Se dice à la cantidad à quien se compara, como el 6; y á una y otra *terminos de la razon.*

259. Quando el antecedente es

igual

igual al consequente, la razon se llama de *igualdad* como 6 : 6; quando es mayor, *de mayor desigualdad*, como 8 : 6; y si menor, como 6 : 8, se dice *de menor desigualdad.*

260. El modo como la una cantidad contiene à otra, ò està contenida, se conoce partiendo, y al cociente que resulta llaman *exponente de la razon Geometrica*; unos quieren que el antecedente por el consequente, y otros que el consequente por el antecedente; de que resulta complicacion, que aunque de corta entidad, enreda y hace vando contrario; porque quando la razon es de mayor desigualdad, como en la razon de 12 à 4. segun la opinion de los unos, será $12:4 = 3$. el exponente; y segun otros será $4:12 = \frac{1}{3}$; que cada uno sostenga su pleito no es de estrañar, porque sea el 3 ò $\frac{1}{3}$ el que deba ser, cada uno por su rumbo averigua las mismas propiedades à unas mismas razones, aunque explicadas de distinto modo.

Se-

Seguirèmos à los que llevan que el exponente es partiendo el antecedente por el consequente por la uniformidad que de este modo lleva siempre el exponente con la razon; pues partiendo el consequente por el antecedente sale lo contrario; esto es, que à mayor razon corresponde menor exponente; y en este caso parece que el exponente no cumple tanto con su oficio de exponer directamente: y por lo que toca à nombrar los exponentes llamemos al primer exponente *directo* y al segundo *inverso*.

261 De lo dicho resulta, que razones iguales tendrán exponentes iguales; asi si la razon de 16:8. es igual à la de 8:4. será $\frac{16}{8} = \frac{8}{4}$, como efectivamente en ambas es 2.

262. A todas las razones, en quienes el exponente es 2. como las dichas, llaman *duplas*; quando es 3. *triplas*; y *quadruplas* si 4 &c. *subduplas* si es $\frac{1}{2}$, *subtriplas* si es $\frac{1}{3}$ *subquadruplas* si $\frac{1}{4}$ &c.

263. Tambien de este modo de haver el exponente, tenemos que los exponentes son como las razones; y para averiguar qual de dos razones es mayor, ó menor, hallarémos sus exponentes: asi 8:7 y 5:2. se tiene $\frac{8}{7} < \frac{5}{2}$ pues $\frac{8}{7} = 1 + \frac{1}{7}$, y $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, luego mayor razon tiene 5 à 2 que 8 à 7.

264. Se vé tambien, que lo mismo es razon que quebrado, porque el exponente viene à ser una fraccion, cuyo numerador es el antecedente, y denominador el consequente. Luego se verificarán en las razones las propiedades que en los quebrados; por tanto podremos hacer que una razon sea dupla, tripula, &c. Segun se aumentò el quebrado (96 y 97), multiplicando el antecedente, ò partiendo el consequente.

Y se podrá disminuir la razon del modo que se disminuye el quebrado (98 y 99), partiendo su antecedente, ò multiplicando el consequente.

265. Siguese que una razon no varía aunque sus dos terminos se multipliquen ó partan por una misma cantidad: está probado (100) pero ademàs sea la razon $3:5$, digo que $3:5 = 3\times2:5\times2$; esto es $3:5 = 6:10$; porque los exponentes $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$ (114) son iguales, luego (261) la razon no ha variado. Esto ha sido lo mismo que probar, *que los productos que tienen producentes iguales y desiguales, tienen la razon de los producentes desiguales, ó que los duplos, triplos &c. de qualesquiera cantidades, tienen la misma razon que dichas cantidades.*

266. Digo, que partiendo los dos terminos de una razon por una misma cantidad, la razon no varía: sea la razon de $3:5$ y 4, la cantidad que les divide será $3:5 = \frac{3}{4}:\frac{5}{4}$; hallense sus exponentes, y tendremos $\frac{3}{5} = (\frac{3}{4})$ partido por $(\frac{5}{4}) =$ (141) $\frac{3}{5}$. Luego la razon no varía partiendo sus dos terminos por una misma cantidad; y esto manifiesta *que las frac-*

ciones,

ciones, cuyos denominadores son iguales, tienen la razon de los numeradores; y asi mismo que *las mitades, tercios, quartos, &c. de qualesquiera cantidades tienen la misma razon que dichas cantidades.*

267. *En qualesquiera numero de razones iguales la suma de los antecedentes à la suma de los consequentes tienen la misma razon que un antecedente qualquiera à su consequente:* sean las razones $3:6$, $4:8$, y $1:2$, será $3+4+1:6+8+2=4:8$; esto es simplificando la primera razon, tenemos $3+4+1=8$ y $6+8+2=16$, será pues $8:16=4:8$; porque en ambas el exponente es $\frac{1}{2}$; luego se verifica lo propuesto, y era preciso; pues siendo todas las razones iguales ha sido lo mismo que tomar una razon 3 veces, ó multiplicar sus dos terminos por 3, luego (265) &c.

Razon compuesta.

268. *Razon compuesta* llaman à la que tiene el producto de los antecedentes al producto de los con-

sequentes de qualesquiera razones, sean iguales ò desiguales. Pongamos las razones 1:3,2:5,2:3, y 4:1. la compuesta es 1x2x2x4:3x5x3x1.; esto es 16:45 y à qualquiera de dichas razones, llaman *componentes* de la 16:45.

269. *Razon duplicada*, es la compuesta de dos razones iguales, asi la compuesta de las razones subtriplas 2:6 y 4:12, que es 2x4:6x12: ó bien 8:72, es duplicada de qualquiera de sus componentes 2:6 y 4, 12; y estas respecto la compuesta se llaman *subduplicadas*.

270. *Los quadrados tienen la razon duplicada de sus raices*: porque la compuesta de las razones 2:3 y 2:3, que es una misma, es 2x2:3x3; esto es, 4:9; y como 4:9 son los quadrados de 2 y 3 (226), pues se han multiplicado por sì mismos, resulta la propuesta, que los quadrados &c. y la razon de las raices respecto la de sus quadrados, es *subduplicada*.

271 *Razon triplicada*, del mismo modo es la compuesta de 3 razones iguales sean 1:2,3:6, y 2:4, su compuesta es 1x3x2:2x6x4; esto es 6:48; y esta es triplicada de qualquiera de las razones componentes, como tambien estas respecto la compuesta se dicen *subtriplicadas*.

272. *Los cubos, ò potencias terceras, tienen la razon triplicada de sus raices.* Sean las raices 2 y 3, serán 2:3,2:3,2:3. las razones componentes, y la compuesta 2x2x2: 3x3x3.; esto es 8:27.; pero estos son los cubos (226) luego &c.

273. Si alguna de las razones componentes fuese de igualdad, esta no altera à las otras razones; quiero decir, que la compuesta es la misma que si la de igualdad no entrase en composicion. Sean las razones; 3:5 y 4:4. resulta la compuesta 3x4:5x4, que es igual á la de 3:5; pues siendo en la una el antecedente igual al consequente es lo mismo que haver multipli-

cado

cado los dos terminos de la razon 3:5 por una misma cantidad; y por tanto (265) no varìa; ademas se vé que resulta $\frac{3}{5}=\frac{12}{20}$, que son exponentes iguales (115), luego &c.

De la proporcion Geometrica.

274. *Proporcion Geometrica*: es la comparacion de dos razones iguales geometricas; y los quatro terminos que le forman se dicen proporcionales, al primero y quarto se llaman *extremos*, y al segundo, y tercero *medios*, asì 2:4=3:6 es una proporcion, y se lee 2 es à 4, como 3 à 6.

275. La proporcion es *discreta* quando los quatro terminos son distintos, como la dicha 2:4=3:6.

276. Es *continua* quando el consequente de la primera razon es igual al antecedente en la segunda; asì 3:6=6:12; la qual puede sentarse de este modo ∺ 3:6:12, y esta es la disposicion que llamaré-

mos continua, y se lee 3 es à 6 como el mismo 6 à 12.

277. Si las razones son de igualdad, la proporcion tambien serà de igualdad, como $6:6=5:5$.

278 Si las razones son de mayor, ò menor desigualdad, la proporcion será de la misma especie.

279 En toda proporcion, los antecedentes, que pueden tomarse como causas, deben ser semejantes, para que los consequentes, que serán sus efectos, sean tambien semejantes.

280. Por ser las dos razones de la proporcion iguales, *el producto de los terminos extremos será igual al de los medios.*

Sean $2:4=3:6$, digo que será $2\times6=4\times3$; porque ademas de la evidencia de ser $2\times6=4\times3=12$, tenemos que si $2:4=3:6$ será (261) $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$; y por ser quebrados iguales, reducidos à un comun denominador, seràn sus nuevos numeradores iguales (115) esto es $2\times6=4\times3$; pero

2×6. es el producto de los extremos, y 4×3 el de los medios; luego &c.

281. Por tanto, si tuviesemos *dos productos iguales*, estaràn sus factores en razon reciproca, ò al reves; esto es, que los de un producto seràn los medios, y los del otro los extremos; porque si es $2\times6 = 4\times3$. serà $2:4 = 3:6$ tambien $2:3 = 4:6$, asimismo $6:3 = 4:2$; $6:4 = 3:2$; $4:2 = 6:3$; $4:6 = 2:3$; $3:2 = 6:4$; y $3:6 = 2:4$; pues siempre dan $2\times6 = 4\times3$; esto es producto de extremos igual à producto de medios (280).

282. *En toda proporcion continua el producto de los extremos es igual al quadrado del termino medio.*

Sea la proporcion $2:6:18$. será $2\times18 = (6)^2$; porque si $2:6 = 6:18$. serà $\frac{2}{6} = \frac{6}{18}$ (261), y reducidos à una denominacion (115) da $2\times18 = 6\times6 = (6)^2$; pero 2×18 es el producto de los extremos, y 6×6. es el quadrado del termino medio, luego &c.

283. *Si un quadrado es igual á*

un

un producto, se podrà formar una proporcion continua donde la raiz del quadrado serà el medio proporcional. Asi si se tiene $2 \times 8 = 4 \times 4 = (4)^2$ serà $2:4 = 4:8$; y $8:4 = 4:2$. tambien $4:2 = 8:4$; y $4:8 = 2:4$; porque en todas resulta $2 \times 8 = 4 \times 4 = (4)^2$; esto es el producto de los extremos igual al quadrado del termino medio (282).

284. Para tener presentes algunas de las mutaciones (281 y 282) que puede hacerse en una proporcion con sus terminos, sin que estos dejen de estar proporcionales, se dà nombre à algunas de las dichas, y otras mutaciones que pueden tener en la forma siguiente.

Los terminos de una proporcion se pueden comparar de varios modos, sin que dejen de ser proporcionales, consistiendo esto en hacer las mismas mutaciones en una y otra razon, para que se conserve su igualdad, y de consiguiente la proporcion.

285. Supuesta una proporcion

como

como $2:4 = 3:6$. en cuyo primer estado se llama *directamente.*

Digo que *No muda la proporcion alternando.* Llaman comparar alternando quando se compara el antecedente de la primera razon al antecedente de la segunda, como el consequente de la primera al consequente de la segunda, así siendo

directamente............ $2:4 = 3:6$.

es alternando........... $2:3 = 4:6$.

donde tenemos $2x6 = 3x4$; esto es el producto de los extremos igual al de los medios, luego &c.

286. *No muda una proporcion invirtiendo*: Llaman comparar *invirtiendo* quando se compara el consequente de la primera razon à su antecedente, como el consequente de la segunda al suyo.

Sea directamente......... $2:4 = 3:6$.

Invirtiendo es........... $4:2 = 6:3$.

porque $4x3 = 2x6$; esto es producto de extremos igual à producto de medios, luego &c.

287. *No muda la proporcion permu-*

mutando: Comparar *permutando* es trocar de sitio las razones.

Sea directamente.........2:4 =3:6.
será permutando.........3:6 =2:4.
y no se altera la proporcion, pues 3x4 = 6x2 como antes.

288. *No muda la proporcion componiendo*: Llaman comparar *componiendo*, quando se compara la suma de antecedente, y consequente de cada razon, al antecedente ò consequente suyo.

Sea directamente..........2:4 = 3:6.
Componiendo es....2†4:4 = 3†6:6.
Simplificando es.........6:4 = 9:6.
y pues dá 6x6 =4x9. =36. en ambos productos no se há alterado la proporcion (280).
es tãbien cõponiendo...2†4:2=3†6:3.
simplificando es............6 : 2 = 9 : 3.
y no se há alterado la proporcion, pues dá 3x6 =2x9.

289. *No muda la proporcion dividiendo*. Llaman comparar *dividiendo* quando se compara la diferencia de antecedente, y consequente de cada razon, à su antecedente ó consequente.

Sea

Sea directamente.......... $2:4=3:6$.

Dividiendo será.. $2-4:4=3-6:6$.

Simplificando es.... $-2:4=-3:6$, pues $-2\times6=4\times-3=-12$ en ambos; esto es producto de extremos igual producto de medios.

Tambien dividiendo. $2-4:2=3-6:3$

Simplificando es.......... $-2:2=-3:3$ y tenemos $-2\times3=2\times-3=-6$ en ambas partes.

290. Hay otros modos de comparar, dos de ellos son *convirtiendo componiendo*; y *convirtiendo dividiendo*,

Sea directamente........ $2:4=3:6$.

1.º cõvirtiẽdo cõponiẽdo $2:2+4=3:3+6$

2.º Idem dividiendo.. $2:2-4=3:3-6$

3.º Idem................ $2:4-2=3:6-3$

291. Y pueden hacerse comparaciones de otros varios modos, segun suele convenir, que no destruyen la proporcion siempre que lo mismo se egecute en una razon que en otra.

Pro-

Proporcion compuesta.

292. *Proporcion compuesta* será la que conste de razones compuestas (268).

293. *Si los terminos de una proporcion se multiplican ó parten por una misma cantidad, la proporcion queda la misma.*

Porque cada razon de por sì no se altera (265) aunque se multipliquen ó partan sus terminos por una misma cantidad, luego (274) la proporcion queda la misma.

Practicamente, sea la proporcion 2:4=3:6, multiplicados sus terminos por una cantidad qualquiera, v. g. 3, resulta una proporcion 6:12=9:18, que es compuesta de la proporcion 2:4=3:6, y otra de igualdad 3:3=3:3, y como cada razon no se ha alterado, (265) tampoco la proporcion, pues tenemos ademas 6x18=12x9.

Resulta de aquì, que siempre que se haya de sacar alguna proporcion compuesta, en que sea de igual-

igualdad alguna razon ó proporcion de las componentes, se podrá esta omitir, ò por el contrario se podrà multiplicar quando convenga.

294. Si los terminos de una proporcion se multiplican por los correspondientes de otra, los productos formarán una proporcion compuesta, cuyo exponente es el producto de los exponentes de las razones componentes.

Sean las proporciones: $\left\{\begin{array}{l} 2:4=3:6. \text{ subdupla} \\ 2:6=1:3 \text{ subtripla} \end{array}\right.$

Resulta la compuesta $4:24=3:18.$ subsextupla

Porque las dos, ò mas razones primeras forman razon compuesta (268), lo mismo las segundas, luego los productos forman proporcion compuesta, en quien el producto de los extremos será igual al de los medios (280), y los exponentes de ambas razones compuestas son de la $1.^a$ $\frac{4}{24}=\frac{2}{4}\times\frac{2}{6}$ exponentes de sus dos ra-

razones componentes; el de la 2. $\frac{3}{18}=\frac{3}{6}\times\frac{1}{3}$ exponentes de las suyas. *Luego el exponente de cada razon compuesta es el producto de los exponentes de las razones componentes.*

Problemas Geometricos.

295. A tres numeros qualesquiera v. g. 5, 10, y 6. hallar un quarto proporcional geometrico.

Dispónganse estos terminos segun se propone, esto es, colocarlos en proporcion, y poner á x. en lugar del que se busca, por ser esta una de las letras llamadas *incognitas*, admitidas para representar á la cantidad que está por conocer, asi $5:10=6:x$.

Estando los terminos en proporcion sabemos (280) que $5\times x=10\times 6$ esto es $5x=60$, pero si el producto $5x$ se parte por 5. da de cociente x; luego si el otro producto su igual 60. se parte por el mismo 5 el cociente será tambien x;

esto

esto es su valor en cantidad conocida, porque *cantidades iguales partidas por iguales dan cocientes iguales*, luego $x = \frac{60}{5} = 12$. y este es el quarto proporcional. Luego *para hallar un quarto proporcional geometrico á tres numeros dados* puede usarse esta regla, *multipliquese el segundo por el tercero, y el producto partase por el primero.*

296. Para satisfacerse de ser el numero hallado el que se intentaba, pongase en lugar de x. en la proporcion $5:10 = 6:x$ y será $5:10 = 6:12$., de donde resulta $5 \times 12 = 10 \times 6. = 60$; esto es el producto de los extremos igual al de los medios.

Problema segundo.

297. A dos numeros dados 5 y 10. hallar un tercero proporcional geometrico.

Por lo visto (282), los numeros dados, y el tercero que se busca formarán una proporcion continua, así $\div\div 5:10:x$. ò bien $5:10 = 10:x$. en donde se tiene $5x = 10 \times 10 = (10)^2$,

esto

esto es $5x=100.$, y de consiguiente $x=\frac{100}{5}=20$ = tercero proporcional que se busca.

La prueba.

298. Será sentando el valor en lugar de la incognita $5:10=10:20.$ en donde $5\times20=10\times10.$ Se vé que *para hallar un tercero proporcional geometrico à dos numeros dados no se ha hecho otra cosa que quadrar el segundo, y partir su quadrado por el primero.* Luego puede usarse esta regla en los casos semejantes.

Problema tercero.

299 Dados dos numeros, como 4, y 36., hallar un medio proporcional geometrico. De (283) se infiere que los numeros dados y el que se busca formarán esta proporcion $4:x=:x:36.$ de donde $x^2=4\times36=144.$ y $x=\sqrt{144}=12.$, y este es el medio que se busca, en prueba tendremos $4:12=12:36.$ ó bien $\div 4:12:36,$ donde $4\times36=12\times12=$

$(12)^2$, luego *para hallar un medio proporcional geometrico se multiplicaràn los dos numeros, y del producto extraigase la raiz quadrada.*

300. Ocurrirá muchas veces no poderse extraer la raiz justa, y en estos casos es preciso contentarse con aproximarla por decimales, ù otro methodo; pues la regla siempre es cierta, como se vé en este egemplo. Pidese un medio geometrico entre 5 y 7. será $5:x=x:7$. de donde $x^2=35$. y $x=\sqrt{35}$.

Demonstracion, serà $5:\sqrt{35}=\sqrt{35}:7$. donde 5×7 producto de extremos debe ser igual $\sqrt{35}\times\sqrt{35}=(\sqrt{35})^2=35$.; esto es el producto de los medios, en que no debe quedar duda, que si conocieramos la raiz de 35., quadrandola darìa su quadrado 35. luego el medio es $\sqrt[2]{35}$.

301. Observando puntualmente las reglas dichas se satisfará á sus questiones, sea con quebrados, ó

como

como quiera, siempre que se disponga la proporcion de modo que los antecedentes sean semejantes entre sí, y tambien los consequentes.

ALGUNAS PROPIEDADES de las razones puestas en proporcion.

302. *Qualesquiera dos razones tienen entre sí la misma razon que el producto de primero y quarto termino al producto de segundo y tercero; esto es, que el producto de los extremos al de los medios.*

Sean las razones $3:4$ y $5:7$, digo que será $(3:4):(5:7) = 3 \times 7 : 4 \times 5 = 21:20$.

Demonstracion: Siendo las razones supuestas $3:4$ y $5:7$ tendrèmos (263) $3:4 = \frac{3}{4}$, $5:7 = \frac{5}{7}$, y reduciendo los dos exponentes $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{7}$ á un comun consequente, ó denominador, salen el $\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$. y el $\frac{5}{7} = \frac{20}{28}$., luego por razon de igualdad hay la proporcion........................ $\frac{3}{4} : \frac{21}{28} = \frac{5}{7} : \frac{20}{28}$.
y alternando.................. $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{21}{28} : \frac{20}{28}$.

Aho-

Ahora, si en lugar de los exponentes ponemos las razones sus iguales, y se omite (266) el denominador comun 28 de la otra razon, queda $(3:4):(5:7)=21:20.$; pero 21 es el producto de primero, y quarto, ó el producto de los extremos, y 20. el de segundo y tercero, ò el producto de los medios, luego está verificado quanto se propuso.

303. *Si de quatro terminos el primero al segundo tiene mayor, igual, ò menor razon que el tercero al quarto. Tambien será el producto de los extremos mayor, igual, ò menor que el de los medios.* Sea $3:4 > 5:7$. digo que será $21 > 20$.

Porque, si por suposicion es $3:4 > 5:7$. tambien (363) $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$, y reduciendo à una denominacion tendrémos $\frac{21}{28} > \frac{20}{28}$; esto es $21 > 20$. que era &c. lo mismo se demuestra la segunda parte de igualdad, y tercera de menor desigualdad.

304. Si de quatro cantidades, la primera tiene mayor razon á la segun-

gunda que la tercera à la quarta, tambien la compuesta de primera y segunda á la segunda tendrá mayor razon que la compuesta de tercera y quarta á la quarta.

Sean $3:4 > 5:7.$, digo que será $3+4:4 > 5+7:7$. Demonstracion: Por ser $3:4 > 5:7.$ tenemos (303) $3\times7 > 4\times5.$; esto supuesto.

Ahora si las razones fueran iguales; esto es, si $3:4 = 5:7.$, sería (288) $3+4:4 = 5+7:7$ y (302) $(3+4:4.):(5+7:7) = 3\times7+4\times7:5\times4+7\times4.$; tenemos pues en la segunda razon $4\times7.$ del antecedente $= 7\times4.$ del consequente; y $3\times7. = 21. > 5\times4 = 20.$ por el supuesto, luego es razon de mayor desigualdad, y por lo mismo lo debe ser la primera tambien; esto es $3+4:4 > 5+7:7.$, que era lo propuesto.

ALGUNAS PROPIEDADES DE las razones Aritmeticas.

305. Pues que razon aritmetica es quando se atiende à la diferencia

cia entre dos cantidades de una misma especie (256), y *á esta diferencia*, que se halla restando, *le llaman exponente de la razon aritmetica*, se sigue, que razones aritmeticas iguales, tendrán exponentes iguales, como las 5. 2, y 7. 4 que en ambas es el exponente 3.

306. Estas razones serán tambien aritmeticamente como los exponentes, y por tanto aumentarémos una razon, ò le disminuirémos, añadiendo ò restando al antecedente las unidades que fueren necesarias para que sea doble, triplo &c. que antes; asì si la razon 5. 4; se quiere dupla, será 5†1:4.; esto es 6. 4. dupla de 5. 4.; porque el exponente 2. es doble que 1 de la otra.

307. Asimismo harémos sea una razon dupla tripla que otra, añadiendo à su antecedente tantas unidades como sea necesario para que su exponente sea doble, triplo &c. que el de la otra. Por egemplo,

harémos que la razon 6. 4 sea dupla de la de 5. 2 añadiendo al antecedente 6. de la primera quatro unidades, y será 10. 4 dupla de 5. 2. porque el exponente $10 - 4 = 6$ de la una queda doble que el exponente $5 - 2 = 3$. de la otra.

308. Tendrémos que *una razon aritmetica no mudará aunque á los dos terminos se les junte ó reste una misma cantidad*; así, si à los terminos de la razon 7. 4. se les añade 3. será $7+3 . 4+3$; esto es, resultará la compuesta $10. 7. = 7. 4.$ porque $10 - 7. = 7 - 4 = 3.$ exponente de ambas.

Del mismo modo se verificará la igualdad restando, sea la razon 7. 4. tendrémos $7 - 3. 4 - 3 = 7. 4$; esto es $4. 1 = 7. 4$; porque $4 - 1 = 7 - 4 = 3$ exponente de ambas luego &c.

DE LA PROPORCION Aritmetica.

309. *Proporcion Aritmetica* es la igual-

igualdad de dos razones aritmeticas, y los quatro terminos se dicen proporcionales aritmeticos.

310. Tambien la proporcion es de mayor, igual, ò menor desigualdad, segun fueren las razones; y quantas propiedades se verifiquen en las razones, convienen tambien à las proporciones.

311. *En toda proporcion aritmetica discreta la suma de los extremos es igual à la de los medios.* Sea la proporcion 5. 3 = 9. 7 Será 5†7 = 3 + 9.

Demonstracion: Es evidente; pero además demonstrarémos de esta manera; si en la proporcion propuesta quitamos el exponente 2. de cada antecedente, quedará la proporcion de igualdad 3. 3 = 7. 7, donde es mas evidente que suma de extremos 3†7 es igual à 3†7. suma de medios, y si à cada suma se le buelve el exponente 2 que antes se quitò de un medio y un extremo, será 3†7†2 suma de extremos igual 3†7†2 suma de medios.

312. *Si la proporcion es continua, la suma de los extremos será igual al duplo del termino medio.* Sea la proporcion ÷ 6. 4. 2, que es lo mismo que 6. 4 = 4. 2; Si del mismo modo quitamos el exponente 2. queda la proporcion de igualdad 4. 4 = 2. 2. donde 2†4. extremos igual 4†2 medios, y restituyendo el exponente 2. será 4†2†2 medios igual 4†2†2 extremos, pero 4†2†2. suma de medios es duplo de 4. medió en la continua, luego &c.

313. Estas dos demonstraciones anteriores están acordando un Axioma tan comun como util, que es. *Si á cantidades iguales se suman, ó restan cantidades iguales, las sumas ó residuos son iguales.*

Aclaracion: Sean las cantidades 6 y 6, si se les suman las iguales 2 y 2, dan de sumas iguales 8 y 8, y restando dan los residuos iguales 4 y 4, es todo verdad patente, y por tanto llaman axioma: vamos à ver de su grande uso alguna parte.

PRO-

PROBLEMAS DE LA PRO- *porcion Aritmetica.*

314. Primero à 3. numeros dados como 5, 8 y 10, hallar un quarto proporcional aritmetico. Dispongase la proporcion $5.8 = 10.x.$ y serà (301) $5+x=8+10$, y como buscamos solo à x.; esto es, su valor en cantidad conocida, quitarémos (313) de las dos partes à 5. que sobra en la parte de x, y quedarà $x=8+10-5=13$.; y este es el quarto termino que se busca.

En prueba de ello pongase el 13 en lugar de x en la proporcion, y serà $5.8=10.13$, donde tenemos $5+13=8+10$. que satisface à la precisa condicion (311).

315. Si reparamos en el hecho para conseguir el quarto termino, se verà que no ha sido mas que formar el cimiento à la siguiente regla, que puede practicarse en casos semejantes. *Para hallar con 3. numeros dados un quarto proporcional aritmetico, sumese el segundo con el ter-*

tercero, y de la suma restese el primero, y el residuo será el quarto que se busca.

316. A dos numeros 5 y 9. hallar un tercero proporcional; esto es, un numero que con los dados forme una proporcion continua, de modo que (312) el primero, y tercero sean igual al duplo del medio 9.

Será pues $5 \cdot 9 \cdot x$; y $5 + x = 9 + 9$. quitemos de una y otra parte à 5, y quedará en la una x, y en la otra su valor (313), asì $x = 9 + 9 - 5 = 13$, y este es el 3º. que se busca, pues colocado en lugar de x. en la proporcion es $5 \cdot 9 \cdot 13$, que dà $5 + 13 = 9 + 9 = 2 \times 9 = 18$.

317. Si atendemos à lo practicado, se vé queda cumplida esta regla, que en casos semejantes se puede seguir.

Para hallar un tercero proporcional aritmetico á dos numeros dados, duplese el segundo, y de su duplo restese el primero, el residuo será el tercero que se busca.

318. A dos numeros dados 6 y 10 por egemplo se pide hallar un medio proporcional aritmetico; esto es, uno cuyo duplo sea igual à la suma de los dos, y que formen los tres una proporcion continua, así 6. x. 10.

Serà por lo mismo $6+10=2\times x=2x$. pero si $2x$ se parte por 2 asi $\frac{2x}{2}$, da de cociente x. luego su igual $6+10$ partido por dos dará el valor de x. así $x.=\frac{6+10}{2}=\frac{16}{2}=8$. y este es el medio que se busca, porque puesto en su lugar, dá la proporcion 6. 8. 10., y en ella tenemos $6+10=2\times 8=16$.

319. En el hecho de hallar el medio proporcional, hemos cumplido la regla siguiente, que puede servir en casos semejantes.

Para con dos numeros dados hallar un medio proporcional aritmetico, sumense los dos, de la suma saque-

se

se la mitad, y esta serà el medio que se pretende.

Progresiones Geometricas.

320. *Progresion Geometrica* llaman à una continuacion de terminos proporcionales en razon geometrica, de modo que cada uno es consequente del que le antecede, y antecedente del que le sigue, asì 2:4:8:16. &c.

321. En toda progresion se verifica, que la razon que tiene el primer termino al tercero, ò el segundo al quarto, ó el tercero al quinto &c. es duplicada de la que tiene el primero al segundo, ó el segundo al tercero, ò el tercero al quarto &c.; esto es, $2:8=2\times2:4\times4=4:16$. duplicada de la de $2:4$., y reducida es $1:4=2:8$.

322. La que tiene el primer termino al quarto, ò el segundo al quinto, ò el tercero al sexto &c. es triplicada de la que tiene el primero al segundo, ò el segundo al

ter-

tercero, ò el tercero al quarto &c. pues 2:16 = 2x2x2: 4x4x4 = 8:64., que (265) reducida es 1:8 = 2:16.

323. *Ascendente* llaman à la progresion quando los terminos aumentan, como 1:2:4:8:16. &c.

324. *Descendente* se llama la progresion quando sus terminos disminuyen como 12:6:3. $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{8}$. &c.

325. La generacion de la ascendente, es dado el primer termino, multiplicarlo por 2 si las razones han de ser subduplas, por 3. si subtriplas; &c. asi, dado el primer termino 2., y que la razon sea subdupla, será el segundo 2x2 = 4; el tercero 4x2 = 8; el quarto 8x2 = 16, &c.

326. La generacion de la descendente será partiendo el primer termino dado por el 2 si las razones deben ser duplas, por 3. si triplas &c. ò multiplicar por este numero puesto por denominador de fraccion, cuyo numerador sea la unidad; pues en este caso hace el mis-

mismo oficio segun se vió (153). Asì dado el primer termino 12. si las razones que han de formar los terminos deben ser triplas, será 12: 3, ò bien $12 \times \frac{1}{3} = \frac{12}{3} = 4$. el segundo termino; será 4:3, ò $4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. el tercer termino; y $\frac{4}{3} : 3$, ò $\frac{4}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$. el quarto &c. y asi continuando se produce la progresion $\div\div$ $12 : 4 : \frac{4}{3} : \frac{4}{9} : \frac{4}{27}$. &c. que se dicen *infinitas*, porque no se hallará el fin hasta donde pueden ir llegando, la ascendente en aumento, y la descendente en diminucion, por lo qual tambien les dán el nombre de *series*.

327. En toda progresion geometrica el producto de dos terminos, igualmente distantes de los medios, es igual al producto de otros dos igualmente distantes de los medios, ó al quadrado del termino medio, si fuere el numero de los terminos impar; porque, pues son proporcionales en una misma razon, tendrán la propiedad que la proporcion donde se verifica la

pre-

presente, así en la progresion $2:4:8:16:32$. &c. se verifica $2 \times 32 = 4 \times 16 = 8 \times 8 = (8)^2$.

ULTIMO TERMINO DE UNA *progresion Geometrica.*

328. Es patente en la formacion de la progresion $2:6:18:54$ &c. que el segundo termino 6. se compone del primero $2 \times 3. = 2 \times (3)^1 = 6.$; el tercero que se sacò de este modo $6 \times 3 = 18.$ es lo mismo que $2 \times (3)^2 = 2 \times 9 = 18.$; el quarto que se sacò asì $18 \times 3 = 54.$ es igual $2 \times (3)^3 = 2 \times 27 = 54.$; y yá se vé el orden que siguen estos terminos, el qual es que cada uno, y por consiguiente *el ultimo termino de toda progresion geometrica se compone de el primero multiplicado por el numero multiplicador elevado à una potestad, que dice el numero de los terminos de la progresion menos uno*; asì el nono termino de esta progresion será $2 \times (3)^8 = 2 \times 6561 = 13122$.

SU-

SUMA DE LOS TERMINOS *de toda progresion geométrica.*

329. Si en la progresion 1:2:4:8:16:32:&c. ù otra, queremos saber la suma de sus terminos, la podemos sacar por ahora mediante esta reflexion.

Pues que los terminos de la progresion son continuos formando razones iguales, todos menos el ultimo harán oficio de antecedentes, y todos menos el primero de conseqüentes, y si llamamos S. à la suma de todos, la de los antecedentes será $S-32$, la de los conseqüentes será $S-1.$, luego (267) tenemos $S-32:S-1=1:2$, y multiplicando extremos y medios dá $\overline{S-32}\times 2=\overline{S-1}\times 1.$; esto es $2S-2\times32=S-1$, quitemos S. de una y otra parte, y quedará (313) $S-2\times32=-1.$, añadirémos tambien à las dos patres -2×32 que faltan á S. para quedar sola y completa, y resulta $S=-1+2\times32$; esto es $S=64-1=63.$, y ésta es la suma de los ter-

terminos de la progresion propuesta hasta el sexto 32 incluso.

330. El egemplo anterior nos señala el camino para sacar la expresion general de suma de los terminos de toda progresion geometrica: para acreditarla supongamos la progresion $2^{3}:6:18:54:$ &c, tendrèmos (329) $S-54:S-2=2:6=1:3$. y multiplicando extremos y medios es $\overline{S-54}\times 3=\overline{S-2}\times 1.$ $=S-2$. y quitando, y añadiendo, queda $3S-s=54\times 3-2.$; esto es $S\times\overline{3-1}=54\times 3-2$, y $S=\frac{54\times 3-2}{3-1}$, cuya expresion nos da la ley general siguiente.

La suma de los terminos de toda progresion geometrica es igual al producto del ultimo termino por el numero multiplicador, menos el primer termino partido todo por el mismo numero menos la unidad.

Pro-

Progresion Aritmètica.

331. *Progresion Aritmètica* se dice à una continuacion de terminos en razon Aritmética, ò que se diferencian de una misma cantidad; de modo que cada uno sea conseqüente del que le antecede, y antecedente del que le sigue, como 1^{2}. 3. 5. 7. 9. 11. 13. &c.

332. Se verifica, que la razon que tiene el primer termino 1 al tercero 5. es dupla de la que tiene al segundo 3. pues la razon de 1 á 5. es compuesta de las 1. 3. y 3 5, asì 1†3: 3†5 = 4. 8. (308) ò es dupla de una misma 1. 3 asì 1 † 1. 3†3 = 2. 6 = 1. 5; asì mismo la que tiene el primero al quarto es tripla de la que tiene al segundo, por que la de 1. 7 es compuesta de las iguales 1. 3, 3. 5, 5. 7, asì 1†3 †5. 3†5†7, = 9. 15 (308) = 1. 7, que tambien es tripla de qualquiera de éllas v. g. 1. 3, asì 1†1†1. 3†3†3. ; esto es 3. 9 que asìmismo es como 1. 7 luego &c.

333.

333. También la progresion aritmetica es ascendente quando se suma con el primer termino la diferencia, asì sea el primer termino 1, y la diferencia 3., será el segundo termino 1†3=4; el tercero 4†3=7; el quarto 7†3=10. &c.

334. Descendente se consigue restando, sea el primer termino 12. y la diferencia 3. será el segundo 12 − 3=9, el tercero 9 − 3=6; el quarto 6 − 3=3. el quinto 3 − 3=0. el sexto =0 − 3=− 3.; el septimo =− 3 − 3=− 6. &c.

ULTIMO TERMINO EN TODA progresion Aritmetica.

335. Se vé en la formacion de la progresion aritmetica que cada termino se compone del primero mas ò menos la diferencia tomada tantas veces como terminos le anteceden; esto es, en la progresion 1.3.5.7.9. &c. el segundo termino 3 se compone del primero mas la diferencia; esto es, 1†2=3. el tercero

que

que fué hallado asì $3+2=5$ es lo mismo que el primero mas la diferencia tomada 2 veces, así $1+2+2=5$; el quarto que fué hallado asì $5+2=7$. es igual $1+2\times3.=7$, luego cada termino, y por consiguiente *el ultimo se compone del primero, mas la diferencia tomada tantas veces como es el numero de los terminos menos uno quando ascendente, y restada tantas veces quando descendente.*

SUMA DE LOS TERMINOS DE toda progresion Aritmetica.

336. Formando los terminos de toda progresion aritmetica razones aritmeticas, ó siendo todos los terminos continuos proporcionales, se verificará (312) que la suma de los terminos extremos será igual à la de otros dos qualesquiera equidistantes de los medios, y al duplo del termino medio, si el numero de ellos fuere impar, asì en la progresion $1^{3}.4.7.10.13.16.19.$ &c. tendrémos $1+19=4+16=7+13=10\times2=20$

$=20.$, luego el contenido de esta progresion será el todo de las sumas que contenga, y pues cada dos terminos componen una suma, habrá tantas sumas como es la mitad del numero de los terminos. *Luego la suma de toda progresion aritmetica, es igual à la suma de dos terminos equidistantes del medio, v. g. la de los extremos multiplicada por la mitad del numero de los terminos.* Asì la suma de la progresion anterior será $\overline{1+19}\times\frac{2}{7}=20\times\frac{7}{2}=\frac{140}{2}=70$.

337. Los Problemas que resultan de este asunto, y se procrean de los 5 datos que entran en progresion, tanto geometrica como aritmetica, se resuelven mas facilmente por algebra, y por tanto se omiten aquì. Los 5 datos son, primer termino, numero que multiplica ò suma, numero de terminos, ultimo, y suma de todos; de modo, que dados 3. de estos se halla uno, ò los dos restantes.

REGLA DE TRES.

338. *Regla de 3 es la que con tres terminos dados de una proporcion se halla el quarto que falta.*

339. Por tanto no es otra cosa que la aplicacion de las propiedades de la proporcion al cumplimiento de algunas condiciones, y la variedad de estas hace que la regla de tres se distinga *en simple, y compuesta, directa, ó inversa*, su conocimiento en todos casos depende de saber, que, *las causas son proporcionales con sns efectos producidos en igual tiempo.*; esto es, que si en una hora por ciertos hombres se hace tal obra, en la misma hora por mas hombres se hará mas obra, ò por menos hombres menos obra, ò con los mismos hombres en mas ò menos horas se hará mas ò menos obra. Es principio fisico que nada repugna à la razon.

340. Dicese regla de tres *simple* quando de la question resultan solamente quatro terminos, de los qua-

quales alguno está por conocer. Esto es, tres deben ser conocidos para poder averiguar el quarto: como ¿si 6 hombres ganan 68 pesos, 5 hombres quantos ganarán?

341. *Compuesta*, es, quando consta de mas de dos razones, de consiguiente de mas de quatro terminos, de los quales alguno está por conocer: como ¿si 6 hombres en 8 dias ganan 200 pesos, 9 hombres en 7 dias quantos ganarán?

342. *Simple directa*, es quando dispuestos los quatro terminos en proporcion (279) examinadas las razones, resultan ambas de menor, igual, ò mayor desigualdad; esto es, quando colocados los terminos en proporcion resulte que debiendo ser el quarto, menor, igual, ó mayor que el segundo ò su semejante, es tambien el tercero menor, igual, ò mayor que el primero, como se vé en estos egemplos.

EXA-

EXAMEN DE LA REGLA DE 3 *simple directa.*

343. Primero, si 6 hombres ganan 30 reales; ¿7 hombres quantos ganarán? examino: creciendo los hombres que son causas deben crecer los efectos (339); esto es, *x* debe ser mayor que 30. y 7. es mayor que 6., luego son razones ambas de menor desigualdad; esto es, las causas y efectos forman razones de una especie, y por tanto la proporcion es directa (342).

344. Si 40 hombres ganan 100 pesos, 40 hombres ganarán *x*. pesos. *Examen*, pues que los hombres como causas son los mismos, los efectos deben ser iguales (339), luego hombres con hombres, y pesos con pesos forman razon de igualdad, y asi es directa la proporcion.

345. Tercero; si 15 hombres hacen 7 vestuarios, ¿20 hombres quantos vestuarios harán? *x uso de la razon ó discurso*: se vé, que pues los hombres crecen, que son causa,

(279), deben crecer los efectos (339); y por tanto resulta $x > 7$. y 20 hombres $>$ 15 hombres son razones de menor desigualdad, y directa la proporcion.

RESOLUCION DE LA REGLA de 3 simple directa.

346. Supuesto que la proporcion examinada se halle directa, puede tenerse por regla general para la resolucion multiplicar extremos y medios (295), y partir el producto de los terminos conocidos por el otro termino que multiplica à la incognita, el cociente será el termino que se busca.

347. Asi el primer egemplo sentado (343) 6 hombres : 30 reales $=$ 7 hombres : x reales será $6 \times x = 30 \times 7$ (280); esto es $6x = 210$, y $x = \frac{210}{6} = 35$ reales que ganaràn los 7 hombres, cuya resolucion es lo mismo que si se hubiera hallado un quarto proporcional como se halló (295).

348 El segundo egemplo (344) 40 hombres : 100 pesos $=$ 40 hombres : x pesos, está patente que pues la causa no se altera, tampoco el efecto que debe ser 100. pesos, pues $40x = 100 \times 40$. y $x = \frac{100 \times 40}{40} = 100$. numero de pesos.

349. El tercer egemplo (345) 15 hombres : 7 vestuarios $=$ 20 hombres : x, vestuarios. da $15 \times x = 20 \times 7$. y $x = \frac{20 \times 7}{15} = \frac{140}{15} = 9\frac{1}{3}$ vestuarios que harán los 20 hombres mientras los 15 hacen 7. vestuarios.

Para satisfacerse en estos casos de estar averiguado el termino que se buscó, pongase en lugar de la incognita x, y vease si da la proporcion producto de extremos igual à producto de medios, como se vió (296) así $15 : 7 = 20 : 9\frac{1}{3}$. da $15 \times 9\frac{1}{3} = 7 \times 20 = 140$ en ambos.

Regla de 3 simple inversa.

350. *Regla de 3 simple inversa*

se

se llama à la proporcion que resulta, quando sus terminos semejantes forman la una razon de mayor ò igual, y la otra de menor desigualdad; esto es, quando colocados sus terminos en proporcion (279) resulta que siendo el 4.° menor, igual, ò mayor que el 2.°, el 3.° no sigue el mismo orden.

Examen de la regla de 3 inversa.

Nota: no mezclamos la resolucion de los egemplos con el exâmen, para que no perturbe al intento de conocer la inversion, y por lo mismo tambien se separó en la directa.

351. Primero si 6 hombres hacen una obra en 6. dias ⁜ 12 hombres para hacer la misma obra ¿quantos dias necesitan?

Será la proporcion 6 hombres: 6 dias ⁜ 12 hombres : x dias; *discurso*, pues que el efecto ha de ser el mismo, esto es, la obra, aumentando los hombres deben dismiminuír los dias que han de tardar; esto es patente, porque supuesto que los 6 hombres hacen la obra en 6 dias si á los 6 hombres se agrega uno mas habrá mayor parte de la obra trabajada en un dia, y la obra restante durará menos de los cinco dias que quedan. Si los hombres agregados fuesen 2, del mismo modo la parte de la obra trabajada serà mayor, y la restante menor; esto es, quedará para menos tiempo, y asi de los demás hasta los 12 hombres. Luego al páso que crecen los hombres disminuyen los dias, y por tanto tenemos x dias $<$ 6 dias, y 12 hombres $>$ 6 hombres forman razones de menor, y mayor desigualdad, è inversa la proporcion (350).

352. Segundo: En un Navio se consumen 16 onzas por racion cada individuo al dia, y à este respecto se tiene para 100 dias; es necesario que lleguen los viveres à 120 dias, se pregunta ¿à quanto

es

se ha de dar por racion? segun lo dicho (279) es la proporcion $100: 16 :: 120: x$.

Examen. Si alcanza la racion para 100 dias à 16 onzas por dia, para que alcance à 120. se habrán de consumir x onzas, que deben ser menos que 16. Porque de las 16 onzas diarias que hai para cada individuo por los 100 dias, se necesita dejar cierta parte para los dias que la Campaña se alarga, y esta parte será mayor ó menor, segun este numero de dias. Luego la racion diaria disminuye al mismo páso que se alargan los dias, y resulta $x < 16$, y $120 > 100$, es inversa (350); pues los semejantes forman razones de menor, y mayor desigualdad.

353. Tercero. Estando un Navio para salir à Campaña con 750 hombres, lleva viveres para 5 meses, pero en el dia de hacerse à la vela se le echaron 96 hombres mas; se pide saber el tiempo que

con

con este motivo le han de durar los viveres.

Examino. Yá que 750. hombres llevan viveres para 5 meses, 846 hombres con los mismos viveres tendrán para menos tiempo; pues creciendo los hombres consumirán cada dia mayor parte, y por tanto se acabaràn mas pronto. Luego formada la proporcion 750 hombres : 5 meses $::$ 846 hombres : x, tenemos que siendo $x < 5$, y $846 > 750$. son razones de menor y mayor desigualdad, y por tanto la proporcion es inversa.

354. Quarto. Hai 3000 hombres de guarnicion en una Plaza con viveres para tes meses y 19 dias, y precisando sacar 837 para guarnecer un puesto, se desea saber, para que tiempo les quedan viveres à los permanentes en la Plaza.

Digo, si 3000 hombres tenian viveres para 3 meses y 19. dias = 109 dias, 2163 hombres que quedan en la Plaza con los mismos viveres

veres deben tener para mas dias; pues lo que no consumen los que marchan, queda en favor de los existentes en la Plaza, y por consiguiente tendrán para mas tiempo.

Tendrémos la proporcion, 3000 hombres : 109 dias $::$ 2163 hombres: x dias, donde $x > 109$, y $2163. < 3000$. forman razones de mayor y menor desigualdad, y por esto es proporcion inversa.

RESOLUCION DE LA REGLA de 3 inversa.

355. La resolucion de esta regla, esto es de los egemplos que resulten con inversion, no se diferencia de la resolucion hecha (346) en la regla de 3 simple directa, despues de preparar la proporcion que se halla inversa, trayendola al estado de directa, como veremos ahora en la resolucion de los egemplos anteriores que hemos reconocido con inversion.

356. Primer egemplo (351), nos

dió

dió la proporcion 6 hombres à 6 dias ∸ 12 hombres : x dias, y por aquellas razones debe ser $x < 6$ dias y 12 es $>$ que 6 hombres, es inversa como se vió, por tanto para resolverle *pongamos sus terminos directamente*, permutando *ó cambiando los antecedentes asì*
∸ 12 hombres : 6 dias = 6 hombres : x dias, ò lo que es lo mismo. 12 hombres : 6 hombres = 6 dias : x dias; pues en ambas tendrémos $12 \times x = 6 \times 6$, y $x = \frac{6 \times 6}{12} = 3$. dias, en que harán los 12 hombres la misma obra que los 6 hombres en 6 dias; pues mirados como causas, dias, y hombres, que fisicamente lo son, dan 6 hombres x 6 dias = 12 hombres x 3 dias = 36 en ambos, que se puede mirar como efecto, ó la obra hecha.

El egemplo (352).

357. Nos dió la proporcion inversa 100 dias : 16 onzas ∸ 120 dias:

x

x onzas, en quien se reconoció debe ser $x < 16$. y $120 > 100$.

Puesta directa es $120 : 100 = 16 : x$, de donde $120 \times x = 100 \times 16$ y $x = \frac{100 \times 16}{120} = 13\frac{1}{3}$ numero de onzas, à que queda reducida la racion diaria para cada individuo.

El 3.º egemplo (353)

358. Fue la proporcion inversa 75 hombres: 5 meses 846 hombres: x ms., directa es $846 : 750 = 5 : x$, que dá $846 \times x = 750 \times 5$, y $x = \frac{750 \times 5}{846} = \frac{3750}{846} = 4\frac{61}{141}$, numero de meses para que llevan racion los 846. hombres.

Quarto egemplo (354).

359. Reconocida la inversion de la proporcion, es 3000 hombres: 109 dias // 2163 hombres: x dias, y directa es $2163 : 3000 = 109 : x$; que da $2163 \times x = 3000 \times 109$. y $x = \frac{3000 \times 109}{2163} = 151 + \frac{387}{2163}$, numero de

dias

dias para que tienen provision los que permanecen en la Plaza.

Regla de tres compuesta.

360. *Llamase regla de tres compuesta* à la proporcion en que para cada efecto ha concurrido mas de una causa; esto es, los efectos tienen la razon compuesta de diferentes causas que se expresan en las condiciones de la question, y se representan con las cantidades que entran en èlla, por egemplo.

361. Si 6 hombres en 7. dias hacen 40 varas de foso; ¿16 hombres en 3 dias, que varas harán?

Si reflexionamos en el caso presente, se ve que si quando los 6 hombres trabajaron 7 dias, hubieran sido mas hombres (339) se tendria por efecto mayor numero de varas de foso trabajadas en los mismos 7. dias; y si como fueron 7. dias de trabajo hubieran sido mayor numero de dias empleados, tambien por este motivo sería mayor numero de varas el efecto. Dis-

Discurriendo por el contrario, suponiendo las causas menores, tambien (339) es consiguiente menor efecto; luego podemos sentar, que, *los efectos producidos por diferentes causas tienen la razon compuesta de las causas concurrentes.*

362. De este discurso sale un methodo general para resolver este genero de questiones, pues yá sea que entre la incognita, como causa, ó como efecto, con los terminos de la question se podrà dar cumplimiento à esta regla.

El producto de las causas es à su efecto, como el producto de las otras causas semejantes à las primeras es al efecto correspondiente semejante à el otro. En cuya proporcion, sacando el valor de la incognita despues de haber multiplicado extremos y medios, se tendrá lo que se pretende en todos los casos que pertenecientes à esta regla pueden ocurrir, como se vé en los que siguen.

RE-

RESOLUCION DEL *egemplo* 1º. (361)

363. Respecto que los 6 hombres en 7. dias hacen 40 varas, son los hombres y dias causas, y el efecto las varas, estas partes se conocen ó distinguen así; sinó hubiese habido hombres, no habria varas trabajadas; y sino hubiese habido dias ò tiempo, tampoco podia haber varas, luego huvo, ò hai varas de efecto, porque huvo hombres y tiempo; luego hombres y tiempo son causas, y varas el efecto: bolviendo à la resolucion tendrémos $6 \times 7 : 4 = 16 \times 3 : x$ (362); esto es $42 : 40 = 48 : x$, y $x = \frac{40 \times 48}{42} = 45\frac{6}{7}$, numero de varas que trabajarán los 16 hombres en tres dias.

Segundo egemplo.

364. Si 4 hombres en 2 dias y 18 horas ganan 40. rs. 5 hombres, en 4 dias y 2 horas quantos ganarán?

En

En este egemplo se ve, que la causa tiempo es necesario hacerla de una especie; esto es, reducir los dias à horas; pues es claro, que si se hiciese la multiplicacion de causas sin dicha reduccion, los 2 dias x 18 horas da un producto 36. mucho mayor que 4 dias x 2 horas, y à dicho producto es consiguiente un efecto mayor, siendo realmente 2 dias y 18 horas $<$ que 4 dias y 2 horas.

Evitarèmos pues este inconveniente con reducir, y mudar el egemplo anterior en este. Si 4 hombres en 66 horas ganan 40. reales y 5 hombres en 98 horas ¿que reales ganarán?

Tendrèmos $4 \times 66 : 40 = 5 \times 98 : x$; esto es $264 : 40 = 490 : x$, $= \frac{190 \times 40}{264} = 74\frac{8}{33}$, numero de reales que ganarán los 5 hombres en 4 dias y 2 horas.

Tercer egemplo.

365. Mui distinta es la propuesta quando venga de esta manera.

6 hombres en 15 dias trabajando 8 horas al dia, ganaron 72 pesos :: 4 hombres en 20 dias trabajando 12 horas al dia ¿quantos pesos ganarán? En esta las horas deben entrar como causa, y tendremos 6 hombres x 15 dias x 8 horas : 72 pesos = 4 hombres x 20 dias x 12 horas : x pesos; esto es 720 :

$$72 = 960 : x = \frac{960 \times 72}{720} = \frac{96 \times 72}{72} = 96.$$

pesos que ganarán los 4 hombres en 20 dias, trabajando 12 horas al dia.

366. Si la incognita fuese qualquiera de las causas, con la misma facilidad se averiguará un medio donde suele ella quedar; veamoslo.

367. Supongamos que la question fuese de esta manera. Para ganar 72 pesos, trabajaron 6 hombres 15 dias à 8. horas :: para ganar 96. pesos por 4 hombres en 20 dias ¿quantas horas trabajarán.

Ten-

Tendrémos (362) $6 \times 15 \times 8 : 72 = 4 \times 20 \times x : 96.$; esto es, $720 : 72 = 80 \, x : 96.$, de donde (280) $720 \times 96 = 72 \times 80 \, x.$ y (295) $x = \frac{69120}{5760} = 12$ horas que se deben trabajar cada dia de los 20. para ganar los 96 pesos por los 4 hombres.

SEGUNDO METHODO DE RESOLVER la regla de tres compuesta.

368. Este segundo methodo consiste en comparar todos los terminos de la qüestion con los terminos de la especie que falta por conocer, mirando à estos como efectos, seanlo, ó no realmente.

Supongase la qüestion siguiente. 6 hombres à 8 reales cada uno hicieron 24 varas de obra ∺ 10 hombres, para que hagan 16 varas, quantos reales se les ha de dar? ordenados los terminos dan esta formacion. 6 hombres: 8 reales: 24 varas ∺ 10 hombres: x reales: 16 varas; de la qual saco las dos proporciones siguientes.

1.ª

1ª..6 hõbres : 8 rs. ※ 10 hõbres: x rs.
2ª..24 varas : 8 rs. ※ 16 varas : 8 rs.

Examino si son directas, ò inversas; de este modo 1ª Si 6 hombres hacen ciertas varas por 8 reales ※ 10 hombres por las mismas varas de obra llevarán cada uno menos reales, pues creciendo el numero de los hombres, tocales à menos trabajo, y de consiguiente menos paga.

Resulta, pues $x < 8$ y $10 > 6$. es inversa; examino la segunda, si 24 varas las hacen ciertos hombres à 8 reales, 16 varas los mismos hombres las harán por menos reales, porque siendo la obra menor y los hombres los mismos, les toca à menos trabajo, y de consiguiente deben llevar menos reales, luego.

Tenemos $x < 8$ y $16 < 24$. es directa; siento pues las dos proporciones (356) de modo que queden directas, asì.

1ª. 10 hombres:6 hombres $=$ 8 rs.::x rs.
2ª.. 24 varas: 16 varas $=$ 8 rs.: x rs.

369. Pero mirando ahora à los rea-

reales como efectos (361) tendrán la razon compuesta de hombres y varas, que serán sus causas, será $10 \times 24 : 6 \times 16 = 8 : x$, que reduciendo las razones si se quiere (265) para mayor facilidad, es $5 \times 12 : 3 \times 8 = 8 : x$, lo mismo que $60 : 24 = 8 : x$, de donde $x = \frac{24 \times 8}{60} = 3\frac{1}{5}$, numero de reales que debe llevar cada uno de los 10 hombres por concurrir à las 16 varas de obra.

370. Podemos confrontar breve este resultado con el que dè el methodo primero en este mismo caso; pues tendrémos la proporcion compuesta.

6 hombres x 8 rs. : 24 varas = 10 hombes x x : 16 varas; esto es $48 : 24 = 10x : 16$. de donde $48 \times 16 = 24 \times 10x$ y $x := \frac{48 \times 16}{24 \times 10} = \frac{768}{240} = 3\frac{1}{5}$ identito resultado á el anterior, y por tanto se puede usar el methodo que mas acomode

De

371. *Equacion*, llaman á qualquiera expresion como $6\dagger2=8$, en quien el valor de una ò mas cantidades es igual al valor de otra ù otras.

372. Cada una de las partes $6\dagger2$ y 8 iguales, llaman *miembros de la equacion*.

373. Tenemos (313), que si tanto al un miembro como al otro se añaden, ò quitan cantidades iguales, las sumas ò residuos serán iguales.

374. Luego, si una de dichas cantidades es la incognita x. ú otra; esto es, si la equacion fuese $x\dagger6-1=8$. para tener el valor de x, no hai mas que á uno y otro miembro quitar ò restar 6 que le sobran à la incognita x, y añadir ò sumar 1 que falta, y quedará x sola en un miembro, y su valor en el otro como aparece.

$$x + 6 - 1 = 8$$
$$- 6 + 1 = -6 + 1$$

$$\text{Suma.......... } x = 8 - 6 + 1 = 3.$$

375. Se vé que el valor de x. es 3., y que no se há hecho otra cosa en sustancia que pasar todas las cantidades que se hallaban en la parte, ò miembro de x. al otro miembro con signos contrarios, la que tenia + con −, y la que − con +, de donde sacarèmos esta regla.

376. *Para despejar la incognita; esto es*, dejarla en un miembro sola, *quando se halle con cantidades sumadas, ò restadas à ella, se pasaràn estas al otro miembro con signos contrarios.*

Qüestion primera.

377. Uno preguntó à otro, que dinero tenia en el bolsillo; respondió; si á los reales que tengo les juntamos 5 y se quitan 6. me quedarán 20 reales.

PLAN-

PLANTEO.

378. Para traducir las qüestiones en equacion de las pocas reglas que se pueden dar, una es, *practicar con la incognita las mismas operaciones que se harían con su valor para confrontar si era el cierto*; de este modo. Si yo supiese los reales que tenia en el bolsillo les juntaría 5 y quitaría 6., y este resultado debia ser 20. segun la condicion de la qüestion, pues hagamos esto mismo con x. y tendrémos.

$$x + 5 - 6 = 20.$$

Despejar la incognita.

379. De esta equacion sacamos, egecutando lo dicho (376) $x = 20 - 5 + 6 = 21$, valor de la incognita x., dinero que tenia en el bolsillo; y en prueba de ello, pongase el 21 en lugar de x en la equacion (à que llaman substituir) y dá $21 + 5 - 6 = 20$. que satisface à la qüestion, como es patente, luego 21 reales tenia en el bolsillo.

380. Pues que, cantidades iguales, multiplicadas por cantidades iguales (43) dán productos iguales, y (49) se infiere que cantidades iguales, partidas por cantidades iguales dan cocientes iguales, tendrémos que *si una equacion se multiplica ó parte por una misma cantidad, se conservará en los productos ò cocientes la igualdad.* Luego quando la incognita resulte multiplicada, ó dividida por alguna cantidad, se podrà despejar facilmente.

Qüestion segunda.

381. Preguntó Juan à Pedro, que salario tenía, respondiò: la quinta parte de los reales que gáno multiplicada por 8. menos 12 reales, es la mitad de lo que gáno.

PLANTEO.

Segun (378) si fuese x. lo que gana Pedro, tendrémos que $\frac{x}{5} \times 8$; esto es $\frac{8x}{5}$, y de esto restando 12.

así

asì $\frac{8x}{5} - 12$ serìa igual $\frac{x}{2}$ segun la condicion de la qüestion, tenemos pues la equacion.

$$\frac{8x}{5} - 12 = \frac{x}{2}$$

Despejo la incognita.

Para que sea comun á todos los terminos, y poder quitar al denominador 5, multiplico por él los demás terminos de la equacion, y resulta $\frac{8x}{5} - \frac{12\times5}{5} = \frac{5x}{5\times2}$; esto es, $8x - 60 = \frac{x}{2}$ quedando la igualdad aunque se haya omitido el denominador comun 5. Practicando lo mismo para el 2. quedará $16x - 120 = 5x$. y dejando à x en un solo miembro, pasando las demàs cantidades al otro, (376) es $16x - 5x = 120$. lo mismo que $11x = 120$., y $x = \frac{120}{11} = 10$, y $\frac{10}{11}$ numero de reales de salario que tenia Pedro.

382. Quando resultan mas incogni-

cognitas que equaciones; esto es, dos ó mas incognitas en una equacion, como si se piden dos numeros cuya suma sea 12., llamanse *qüestiones indeterminadas*. Porque sean x, y z los numeros tendrémos.

$$x+z=12 \ldots\ldots \text{ y } x=12-z.$$

383. No se puede saber el valor de x en cantidad conocida, sin determinar el de z. por alguna otra condicion qualquiera, como si á la propuesta se añadiese, que la diferencia de los dos sea 9. así $x-z=9$; pues yá con este medio tendriamos en esta $x=9+z$, y substituido este valor en la otra equacion $x+z=12$. en lugar de su incognita x, será $9+z+z=12$, ò $2z=12-9=3$, y $z=\frac{3}{2}$. substituido este valor de $z=\frac{3}{2}$ en la equacion $x=9+z$, será $x=9+\frac{3}{2}=10\frac{1}{2}$; y estos dos numeros $10\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$ son los que satisfacen à las condiciones, pues $10\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=12$. que cumple con la primera. Y $10\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=9$ cumpla con la segunda.

384. Se hace bastante perceptible

ble que debe haber tantas equaciones como incognitas resulten de la qüestion, y que para hallar sus valores, no hai mas que hacer que despejar el de una en qualquiera equacion donde se halle, y substituirlo en todas las demás equaciones en lugar de su misma incognita, y se tendrà por este hecho una equacion menos; siguiendo así con las demás se llegará à tener la ultima incognita con valor conocido. Este buelto à substituir en las equaciones, bolviendo por el mismo camino, irá dando el de las demás, hasta tenerlas todas despejadas, y resuelta la qüestion.

ESCOLIO.

385. Este asunto de equaciones es mas dilatado, pues no solo son infinitas las qüestiones que puede haber, sino que resultan de primero, segundo, tercero, &c. grado; esto es, que la incognita esté elevada à la primera, segunda, tercera poten-

cia

cia (los que llevamos sentados son de primero) pero por la mayor facilidad con que se desenredan algebricamente estas qüestiones, es mas propio acuda el aplicado à enterarse en aquel lugar por estenso; pues aquì parece bastante lo tratado para el fin que se ha propuesto.

Regla de compañias.

386. Regla de compañias *es la que enseña à distribuir entre varios interesados la perdida, ó ganancia total que han tenido durante el tiempo de la compañia, en la razon de los fondos particulares.*

387. Debe ser esta reparticion en razon de los fondos, por el supuesto, que el convenio de los interesados al principio fuese exponer sus caudales à perdidas ò ganancias, segun el de cada uno con que entraba en compañia, pues algun otro caso, en que haya trato distinto, se debe conformar la resolu-

cion

cion con la condicion que en él se sentase.

CASO PRIMERO.

388. Supongamos que 3 hicieron compañia, el primero puso 20 pesos, el segundo 35., y el tercero 52.; y que habiendo tenido 150 pesos de ganancia, se pide saber; quanto corresponde à cada uno de los interesados.

Supuesto que están à perdidas ò ganancias segun el fondo de cada uno, le sacarémos lo que le corresponde con esta proporcion.

389. *El fondo total es á la ganancia total como el fondo particular de cada uno à lo que le corresponde de ganáncia*, y desenrredadas las tres proporciones, dán los resultados que se vén en la siguiente formacion.

Sugetos.	Fondos.	Proporciones.	Partes de ganancia.
1.°......	..20.....	.107:150=20:x=$\frac{150\times20}{107}$=	..28 $\frac{4}{108}$
2.°......	...35.....	.107:150=35:x=$\frac{150\times35}{107}$=	..49 $\frac{7}{}$
3.°......	...52.....	.107:150=52:x=$\frac{150\times52}{107}$=	..72 $\frac{96}{}$
Sumas... 107		....	150

390. La suma de las ganancias particulares deben componer la total, y mediante la proporcion se vé

que

que nada mas se há hecho, que dividir à la ganancia en tantas partes como son los interesados, y que estas partes tienen entre sì la misma razon que los fondos particulares.

COMPAÑIA COMPUESTA, ò con tiempo.

391 Llaman compañia con tiempo, *quando los interesados exponen su caudal à perdida ò ganancia por el tiempo que estè en compañia, de manera que puedan en qualquier tiempo sacar, ó introducir el caudal: Sea el caso.*

392 Dos hicieron compañia, el primero puso 76 pesos, y los tuvo en compañia $8\frac{1}{2}$ meses; el segundo puso 100 pesos, que estuvieron en compañia 6 meses y 22 dias: fue la ganancia 1080 pesos.

REFLEXION.

393. Es patente que quanto mas tiempo esté el caudal en compañia, y quanto mayor sea el mismo caudal

dal (361), tanto mayor deberá ser la ganancia que le corresponderá à cada individuo, y por tanto la ganancia tendrá la razon compuesta de caudal y tiempo.

Reduciendo (364) el tiempo à una especie; esto es â dias, serán los fondos particulares

1°. 8 mes. y 15 dias = 255 dias x 76 = 19380
2°. 6 mes. y 22 dias = 202 dias x 100 = 20200

RESOLUCION.

1°. $39580:1080 = 19380:x = 528.\frac{1608}{1979}$.
2°. $39580:1080 = 20200:x = 551.\frac{371}{1979}$.

394. La suma de las ganancias debe componer la total 1080, y parece que habiendo hallado la del primero $528\frac{1608}{1979}$ el residuo al total debia tenerse por ganancia del segundo; pero esto puede ser bajo el supuesto de no haber errado el calculo del primero; pues si sucediese esto, tambien la ganancia del segundo era de consiguiente falsa, aunque la suma de las dos diera la ganancia total; y parece que

Q todo

todo se evita con sacarle à cada uno su ganancia por proporcion.

Tercer caso.

395. Dos hicieron compañia, el primero puso 600 pesos; pero á los 6 meses sacò 158 pesos.

El segundo puso 266 pesos, y à los 5 meses puso mas 224 pesos: la ganancia al cabo de un año fué 1240 pesos, pidese saber quanto corresponde à cada uno.

REFLEXION PARA SACAR los fondos particulares.

396. Si los 600 pesos del primero hubieran estado los 12 meses del año, serìa el capital del primero $600 \times 12 = 7200$, pero como los 158 pesos que sacó no estuvieron en compañia 6 meses será $158 \times 6 = 948$ capital que no tiene ganancia, y por tanto el fondo particular del primero es $7200 - 948 = 6252$.

El segundo tiene primeramente por los 266 pesos à 12 meses

que

que estubieron en compañia 266x 12=3192. Mas, por los 224 pesos que estubieron 7 meses en compañia 224x7=1568, y por tanto 3192†1568=4760 es el fondo del segundo.

RESOLUCION.

1°. $11012:1240=6252:x=704\dagger\frac{8}{2753}$.

2°. $11012:1240=4760:x=535\dagger\frac{2745}{2753}$.

Quarto caso.

397. Dos hicieron compañia, el primero no se sabe lo que puso, pero tuvo de ganancia 40 pesos; el segundo puso 5 pesos, y se ignora su ganancia. Asimismo se sabe que la ganancia del primero era igual al producto de los dos fondos particulares, hai que averiguar fondo del primero, ganancia del segundo, y ganancia total.

Suposiciones, y resolucion.

Supongamos que fué x lo que puso el primero, y z la ganancia del segundo, tendrémos.

in-

individuos.	fondos.	ganancias.
1°...............	x	...40.
2°...............	5	...z.

Y por la otra condicion, que la ganancia del primero es igual al producto de los dos capitales; esto es $40 = x \times 5$.

Tenemos pues de $5x = 40$. $x = \frac{40}{5} = 8$. fondo que puso el primero, y respecto que las ganancias tienen la misma razon que los fondos (390), tendrémos la proporcion $8:5 = 40:z = 25$. ganancia del segundo; y por fin $40+25 = 65$ ganancia total.

Caso quinto.

398. Dos hicieron compañia, el primero puso 6 doblones, se ignora los meses que tuvo en compañia este caudal, pero le tocò de ganancia y capital $103\frac{13}{29}$ pesos.

De el segundo se ignoran los doblones que puso, y se sabe que los tuvo 7 meses en compañia; y asi mismo se ignora su ganancia; y la total de ambos. Mas se sabe que

que la suma de los pesos del segundo, y meses del primero es igual 9, la suma de los fondos particulares, ò productos de tiempo y dinero eran 58. Se pide saber los meses del primero; pesos, y ganancia del segundo.

Suposiciones, y resolucion.

Supongamos en x los meses del 1°., z los pesos del 2°. y g. la ganancia del mismo; con lo que se tendrá la formacion siguiente.

Sugets.pesos de fondo.mes.capit.gananc.

1°.........6..............x....$6x$....$103\frac{13}{29}$.

2°........z.........$\ldots$.7....$7z$.......g.

Y pues la razon de los fondos (390) es igual á la de las ganancias, tenemos la proporcion siguiente.

$$6x:7z=103\tfrac{13}{29}:g.$$

En la que tenemos tres incognitas, de las quales hai que determinar dos para llegar à la ultima solucion.

Tenemos pues en la otra condicion $x+z=9.$, y $6x+7z=58$ de

las

las que sale $x=9-z$. de la primera, y substituyendo en la segunda dá $54-6z+7z=58$. de donde $z=4$., y por tanto $x=9-4=5$., cuyos valores substituidos en la proporcion anterior la transforman en esta

$$30:28=103\tfrac{13}{29}:g.$$

Cuyo quarto proporcional es, $g=96\tfrac{16}{29}$ ganancia del 2°., y por tanto la total fué $103\tfrac{13}{29}+96\tfrac{16}{29}=200$ pesos.

TESTAMENTOS.

399 Por ser el origen de algunas qüestiones la condicion de algun testamento, hai algunas conocidas con este nombre.

EGEMPLO.

Un testador dejó 12000 pesos à tres hijos, con tal que el mayor llevase à razon de la mitad, el 2°. de $\frac{1}{3}$, y el 3°. de $\frac{1}{4}$. pidese saber quanto corresponde à cada uno.

RE-

RESOLUCION.

Necesitamos pues saber que razon tienen estas partes con su todo, para que con la misma se divida la herencia. Saco por lo mismo el denominador comun de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ que es 24, cuya mitad, ò nuevo numerador 12 del $\frac{1}{2}$ es la que representa la parte del 1°., 8 del 2°., y 6 del 3°.; tendremos pues las tres siguientes proporciones que satisfacen.

$$1^{\circ}.\ 26 : 12 = 12000 : x = \frac{12000 \times 12}{26} = 5538\tfrac{6}{13}$$

$$2^{\circ}.\ 26 : 8 = 12000 : x = 3692\tfrac{4}{13}.$$

$$3^{\circ}.\ 26 : 6 = 12000 : x = 2769\tfrac{3}{13}.$$

Cuya suma de las partes que les toca compone el todo 12000; y es de advertir, que el principal obgeto de la solucion de estas qüestiones de testamentos, será cumplir la mente del testador quando esta fue arreglada à las leyes divinas, y humanas.

ALIGACIONES.

400. Por aligaciones se entiende mezclar varias materias, con tal proporcion que resulte el mismo que se pretenda; asunto, que ofrece varios problemas, para cuya inteligencia, que puede ser mui util, hagamos patente el axioma siguiente.

401. La suma de las mitades, tercios, &c. de las partes, es igual à la mitad, tercera &c. parte del todo.

Tomemos à 8 como todo, y 4, 2, 1 y 1. como sus partes, serà $\frac{4}{2}+\frac{2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{8}{2}=4$. mitad del todo. Lo mismo es los tercios asì $\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$, que es la tercera parte del todo.

TEOREMA.

402. *Si se mezclan varias especies, y del mismo se toma qualquiera parte, serà su valor semejante parte de todo el valor de las materias simples.*

Porque despues de mezclado todo, es preciso concebir, que si tomamos qualquiera parte del misto, por egemplo, la mitad, esta mitad

se

se compondrà de un medio de cada una de las especies que se han mezclado; porque á no ser asi, no tendriamos verificado el misto que suponemos; pero el valor de cada una de estas mitades es la mitad de su precio particular, y la suma de estos valores (401) es la mitad de todo el valor del misto, luego la mitad del misto vale tanto como la mitad de todo el valor de los simples.

Lo mismo resulta si se hace la reflexion con tercera, quarta, &c. parte del misto, que siempre sale por su valor la tercera, quarta parte de todo el valor de los simples. Luego.

Problema primero.

403. Hay 3 arrobas de aceite, cuyos precios son 40, 46, y 50. se desea saber, mezclado, y puesto en venta, qual será el precio de la arroba para no perder ni ganar.

RESOLUCION.

$$\text{Formacion..}\begin{cases}1.\ \text{arroba} = 40\ \text{reales}\\ 1.\ \text{idem} = 46\ \text{reales}\\ 1.\ \text{idem} = 50\ \text{reales}\end{cases}$$

$$3.\ \text{arrobas} = 136\ \text{rs.}$$

Ahora, pues las arrobas son 3., y partes iguales, será (402) $136:3 = 45\frac{1}{3}$ rs. el valor de la arroba de misto, y en prueba tendremos, que $45\frac{1}{3} \times 3 = 136$; esto es, las 3 arrobas de misto si se venden à $45\frac{1}{3}$ reales, importarán 136 reales, que es su fisico valor, lo mismo que si se vendiesen antes de mezclarlo cada una por su precio.

Problema segundo.

404. Se han de mezclar 3 libras de oro de 23 quilates, 7 idem de à 18, 6 de à 16, y 4 de à 14; se desea saber, mezclado todo de que quilates resultará la libra.

RE-

RESOLUCION.

$3 \times 23 = ..69.$quilates
$7 \times 18 = 126.$idem
$6 \times 16 = ..96.$idem
$4 \times 14 = ..56.$idem

20.........347. num.° de quilates.

Tenemos (402) $347:20 = \frac{347}{20} = 17\frac{7}{20}$ quilates de la libra de misto. La prueba es semejante à la del caso anterior.

Problema tercero.

405. Se han mezclado 40. arrobas de polvora de à 50° de fuerza, 17 de 83°, y 53 de à 75°; pidese el grado de que há resultado el misto.

RESOLUCION.

Arrobas.	Grados.
$40 \times 50 =$	2000.
$17 \times 83 =$	1411.
$53 \times 75 =$	3975.
110.........	7386.

Será (402) $7386:110 = 67\frac{8}{55}$ grados

dos de cada arroba de polvora; esto es, que resulta polvora de $67\frac{8}{56}$ grados de fuerza, y à este modo se satisfarán los casos semejantes que se puedan ofrecer, aun quando resulten incognitas, pues en las condiciones que incluya la qüestion, debe concederse lo bastante para hallar sus valores como en este caso.

Problema quarto.

406. Se sabe que era 8 reales el valor de cada una de ciertas libras de cera que se mezclaron con 7 libras de otra cera, cuyo precio se ignora.

Se sabe mas, que el precio de la libra del misto que resultò fue $6\frac{5}{6}$ reales: asimismo se acuerda, que el exceso de 8 reales al otro precio, dividido por dos, dá un numero igual á la diferencia del numero de reales al numero de libras que no se saben.

RE-

RESOLUCION.

Sean x las libras, y z los reales que no se saben. Tendrémos esta formacion.

$$\begin{array}{rcl}
\underline{\text{Libras.}} & & \underline{\text{Rs.}} \\
x \times 8 & = & 8x. \\
7 \times z & = & 7z. \\
\hline
x + 7 & = & 8x + 7z.
\end{array}$$

Y pues sabemos por condicion que el precio medio era $6\frac{5}{6}$; esto es, (402) $\frac{8x+7z}{x+7} = 6\ \frac{5}{6}$, quitando los denominadores, y reducida es $x + 6z = 41$, resultan pues dos incognitas en una equacion.

Saquemos de la otra condicion el valor de una de ellas para substituirlo en esta. Segun aquella condicion tenemos $\frac{8-z}{2} = z - x$ de donde $x = \frac{3z-8}{2}$; que substituido en la $x + 6z = 41$. se muda en esta $\frac{3z-8}{2} + 6z = 41$, de donde sale $z = 6$ reales

les, que valia cada libra de cera de las 7., substituido este valor en la equacion $x = \frac{3z-8}{2}$, resulta $x = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$ numero de libras de cera que se mezclaron con las 7. En prueba de ello se pueden substituir estos valores en la formacion, en lugar de sus incognitas, y satisfaràn à las condiciones puestas.

ELIGIDO EL PRECIO MEDIO hallar las partes que de cada especie han de entrar en misto.

407. Teorema. "Las partes que »de cada especie se toman para com»poner un misto de determinado pre»cio medio deben tener la razon in»versa de las diferencias de sus pre»cios ò valores, con el medio."

DEMONSTRACION.

Porque elegidò, ò dado el precio medio, es preciso que su producto con el todo de las especies que

que se tomen sea igual à la suma de los productos parciales de cada especie por su precio particular como se vió (403), pues de lo contrario no sería justo el misto (402) ó sería contra el supuesto de precio medio. Para verlo supongamos sea 5 el precio medio dado, 3 y 9 los precios ò valores de los simples, z la parte que se haya de tomar del uno, y x la del otro, digo que será $5-3:9-5=z:x$.

Segun la propiedad que llevamos sentada (402) tenemos $\frac{3x+9z}{x+z}=5$ ò bien despejando al denominador $3x+9z=5x+5z$ de donde $5x-3x=9z-5z$ ò lo que es lo mismo $x(5-3)=z(9-5)$, y por lo visto (281) que dos productos iguales tienen sus factores en razon recíproca sale $5-3:9-5=z:x$. que es lo propuesto.

408. Para hacer aplicacion de esta propiedad solo necesitamos determinar uno de los dos valores en

z ò x, pues con él se determinará el otro: por egemplo, sea $z = 7$, con este valor tenemos que la parte que hemos de tomar de la especie del precio 3 en el caso supuesto es $x = \frac{9 - 5 \times 7}{5 - 3} = \frac{28}{2} = 14$.

409. Se vè, que si como se tomó la parte 7 de la una especie se huviera tomado otra qualquiera 11. tambien varia x, y se mantendría el precio medio: *Luego un mismo precio medio puede venir del compuesto de muchos simples*, y por tanto se podràn determinar las partes de cada simple de varios modos para tener una cantidad compuesta de misto; segun verèmos en los egemplos siguientes.

Problema primero.

410. Hay oro de 23 y 13 quilates, y se quiere hacer una mezcla de 200 libras, cuyo grado de quilates sea 20.

FOR-

FORMACION.

$$\text{Grado medio..}20 \begin{cases} 13 \cdots 3 \\ 23 \cdots 7 \end{cases}$$

RESOLUCION.

Saco la diferencia entre 20 y 13, precios medio y menor que es 7, y debe representar à la parte que de la especie del grado mayor se ha de tomar.

La otra diferencia 3 entre 20 y 23, grados medio y mayor, representará asimismo à la parte de la especie del grado menor, y respecto que ha de ser el misto 200 libras con la suma de las diferencias 3 y 7, se sacarán proporcionalmente así.

$10 : 200 = 3 : x = \frac{200 \times 3}{10} = 60$, numero de libras del de à 13 quilates.

$10 : 200 = 7 : x = \frac{200 \times 7}{10} = 140$ libras que han de entrar en el misto de el de 23 quilates; pues tenemos en prueba $60+140=200$ libras, y 200×20 quilates $=4000$ quilates, lo mismo que $60 \times 13+140 \times 23$ $=4000$ quilates.

411. Quando el precio medio tenga por arriba ó abajo mayor, ò menor numero de valores, cambian diferencias dos ò mas con uno solo.

PROBLEMA.

Hai trigo de 37, 42, y 47, y se quiere hacer una mezcla de 500 fanegas, cuyo precio sea 45.

Formació	Diferēcias.	Resolucion.
45	$47 \cdot\cdot 3+8=11$	$15:500=11:x=366\frac{2}{3}$
	$42 \ldots\ldots 2$	$15:500=2:x=66\frac{2}{3}$
	$37 \ldots\ldots 2$	Idem. . . . . . . $66\frac{2}{3}$
Suma de diferencias	$15 \therefore$	Suman las fanegas 500.

412. Son varios los egemplos que pueden ocurrir en mezclas, y para tener alguna luz en el asunto parece bastante lo dicho, y el egemplo que sigue.

PRO-

PROBLEMA.

Se tiene cera de los precios 16, 18, 27, y 32, se quiere hacer una mezcla de 6138 libras, y que sea su precio medio 20 reales.

Formacion.		Diferencias.
	16........	12
	18.........	7
Precio m.° 20		
	27..........	2
	32..........	4
		25

RESOLUCION.

$$25:6138=12:x=\frac{6138\times12}{25}=2946\tfrac{6}{25}$$

$$25:6138=7:x=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1718\tfrac{16}{25}$$

$$25:6138=2:x=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 491\tfrac{1}{25}$$

$$25:6138=4:x=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 982\tfrac{2}{25}$$

$$6138.$$

Resuelto el egemplo nos dá las partes que se manifiestan, consequencia de las proporciones; pero se vé

en

en este egemplo lo dicho (409), pues asi como el precio 16 cambió diferencia con el 32, pudo haverlo hecho con el 27, y tambien el 32 con el 18, con lo qual se tendria la mezcla pedida con diferentes cantidades, y que tambien satisfarian à la qüestion; por tanto es patente que esta especie de problemas se pueden resolver de varios modos.

DE LA FORMACION DEL cubo, y extraccion de su raiz.

413. Para tratar de la formacion del cubo, y extraccion de su raiz por el modo que lo harémos, convenia tener al sugeto, que lo ha de entender de nuevo tan dispuesto como le considero si posehe lo que comprehende esta obra hasta aquì, con esto vamos adelante.

414. *Definicion*: Cubo de un numero (226) se llama al producto que resulta del numero multiplicado por si mismo que dá el quadrado, y lue-

luego multiplicado por este dicho numero el producto, es su cubo, así $(12)^3$ será $12 \times 12 \times 12 = 1728$, y lo mismo se entiende de los demas cubos que se pidan, sea de enteros ò de quebrados.

Composicion del cubo.

415. El cubo de todo numero que tenga decenas y unidades se compone de quatro partes, à saber:

1.ª Cubo de decenas.

2.ª Tres veces el quadrado de decenas multiplicado por las unidades.

3.° El triplo del quadrado de las unidades multiplicado por las decenas

4.° El cubo de las unidades.

416. Si el numero no lo dividimos en decenas y unidades, y sì en dos partes qualesquiera, los quatro productos anteriores se mudan en estos quatro.

1.° Cubo de la primera parte.

2.° Triplo del quadrado de la primera, multiplicado por la segunda.

3.° Triplo del quadrado de la segun-gunda, multiplicado por la primera.

4.° El cubo de la segunda parte.

Para ver esta propiedad en general supongamos, que a represente à las decenas, *o* à la primera parte, b à las unidades ò à la segunda parte, y los quatro productos anteriores serán estos $a^3+3a^2ab+3ab^2+b^3$.

Supongamos $a+b=30+7$.

Serà (42) ......$(a+b)^3=(30+7)^3$

Vamos à egecutar los productos por partes, como se hizo (46).

Multiplicando $30+7$.

Multiplicador $30+7$.

1.° ....$(30)^2+30\times7$.

2.° ....$30\times7+7^2$.

Es el quadrado....$(30)^2+2\times30\times7+7^2$.

Multiplico otra vez por........ $\}$ $30+7$.

$$(30)^3+2\times30^2\times7+30\times7^2$$
$$30^2\times7+2\times30\times7^2+7^3$$

Es el cubo $(30)^3+3\times30^2\times7+3\times30\times7^2+7^3$

Egecutémos el mismo calculo con los caracteres generales.

Mul-

Multiplicando......$a + b$
Multiplicador......$a + b$

1.º..................$a^2 + ab$
2.º.......................$ab + b^2$

Es el quadrado....$a^2 + 2ab + b^2$
Multiplico otra vez por...... $\left.\right\}$ $a + b$

1.º.......................$a^3 + 2a^2b + ab^2$
2.º..............................$a^2b + 2ab^2 + b^3$

Es el cubo.................$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

De modo, que efectuados los productos aritmeticos y comparados con sus iguales,

Sale....$a^3 = (30)^3 = 30 \times 30 \times 30 = 27000$
$3a^2b = 3 \times 30 \times 30 \times 7 = ...18900$
$3ab^2 = 3 \times 30 \times 7^2 = ...4410$
$b^3 = 7 \times 7 \times 7 = ...343$

Luego...$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = ...50653$

417. Queda patente la composicion del cubo; esto es, de que partes consta el cubo de todo numero, y si fuese necesario mas convencimiento elevese el 37 al cubo

por

por la multiplicacion ordinaria, así $37 \times 37 \times 37$, y dará los 50653.

Esta doctrina es general; esto es, que se puede sacar el cubo de todo numero, tenga centenas, millares, &c. dividiendolo en dos partes, ò en decenas y unidades, como se hizo para el quadrado (233), y practicando con ellas los quatro productos que indica esta formula $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ será la suma el cubo de el tal numero.

418. Aunque la elevacion al cubo de todo numero por la multiplicacion ordinaria sea mas facil, importanos saber esta composicion de productos, de que consta todo cubo, para mediante ella entender el methodo de sacar la raiz cubica; esto es, dado el cubo hallar su raiz, en cuyo asunto entramos.

DE LA EXTRACCION DE LA *raiz cubica.*

419. Siendo la extraccion de la raiz cubica, dado un cubo hallar su

raiz,

raiz, es consiguiente, que si el cubo que se propone es racional, le hallarémos raiz justa; pero si el cubo es irracional, es preciso conformarse con hallarle raiz proxima.

420. Observèmos primero à semejanza de (237, y 238) lo siguiente.

1°. Todo numero que se dé como cubo, para extraer su raiz que no tenga mas de tres cifras, no tendrá mas que una su raiz en enteros; porque si elevamos al cubo qualquiera de las cifras desde 1 hasta 9, esta que es la mayor, dá 729, y 10, que son las menores decenas, elevadas al cubo dá 1000 que pasa de tres cifras; luego 3 cifras de cubo solo dan una de enteros en la raiz; esto es, unidades.

2°. Todo numero dado como cubo que pase de 3 cifras, y no de 6, tendrá 2 cifras en su raiz; esto es, decenas y unidades; porque 10, que son las menores decenas elevadas al cubo dan 1000, y 99 que son las

las mayores decenas dan de cubo 970299, que no pasan de 6 cifras, luego &c. y por el mismo camino se vè que si llega à 7, y no pasa de 9 cifras, tendrá su raiz 3 cifras; esto es, centenas, decenas, y unidades, como tambien si pasa de 9, y no de 12 tendrá 4 su raiz &c.; de cuyas reflexiones sacamos la regla primera de que vamos à usar.

Primer egemplo.

Se pide la raiz cubica del numero 50653.

421. 1ª regla, divido el numero propuesto de 3 en 3 cifras principiando por la derecha, è infiero (240) que tendrá su raiz tantas cifras como divisiones resulten, aunque la ultima division de la izquierda quede solo con una ò dos cifras, como sucede en el caso presente que queda asì $\sqrt[3]{50,653}$.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{50{,}653} & 37 \text{ Raiz} \\ -27 & \\ \hline \quad 23653 & 2791 \text{ Divisor.} \\ -23653 & \quad 7. \\ \hline \quad\; 0 & \end{array}$$

2.ª Saco la raiz cubica de la 1.ª division de la izquierda, que en este caso es 50, y su raiz cubica en enteros es 3 que pongo al sitio de la raiz, resto su cubo 27 de 50, y queda de residuo 23, bájo à su lado la 2.ª division 653, y queda 23653, que miraremos como un dividendo; cuyo divisor vamos à buscar para encontrar la cifra que sigue de raiz.

422. Para ello observo, que la cifra encontrada 3 son las decenas, y su cubo 27 restado de los 50 hà sido lo mismo que restar 27000 que era el cubo de las decenas (416), luego el residuo son los tres productos restantes representados en $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 23653$. Para

Para encontrar este divisor descompondremos la expresion $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ en las dos siguientes.

$$1^a \ldots\ldots\ldots 3a^2 + 3a + 1.$$

$$2^a \ldots\ldots\ldots b + b^2 + b^3.$$

La 1ª nos dice, que el todo de tres veces, el quadrado de las cifras halladas consideradas como decenas, mas tres veces las mismas decenas, mas la unidad hará de divisor, por el qual partido el dividendo ò residuo que quedò con la division bajada, dará la cifra que sigue à la raiz.

423. Por la 2ª inferimos, que la cifra que salga debe ser tal, que multiplicando por ella el triplo del quadrado de la cifra ò cifras halladas, considerados como decenas, mas el triplo de las mismas decenas multiplicado por el quadrado de la cifra que salga al cociente, mas el cubo de la misma cifra, estos tres productos no han de pasar de la cantidad que quedó, que en este caso es 23653. Sea pues el di-

vi-

visor $3a^2+3a+1$ y con la cifra hallada su igual $3 \times 30^2 + 3 \times 30 + 1 = 2791$ que llamarémos 1° divisor, por el qual partidos los 23653 aunque dé al cociente 8, es necesario contar con que sea menor para que pueda formar dichos productos sin exceso al dividendo, es pues 7, y con él harémos.

$$3a^2+3a+1=2700+90+1$$
$$b+b^2+b^3=\ldots\ldots 7+49+343.$$
$$3a^2b+3ab^2+b^3=18900+4410+343=23653$$

Estos 23653 restados del residuo ò dividendo anterior queda cero, y resulta que la raiz cubica de 50653 es 37, como ya sabemos (416) lo debia ser.

Segundo egemplo.

424. Se pide la raiz cubica de 970299. Por la primera regla (420) divido al numero propuesto de 3 en 3 cifras, saco la raiz de 970. 1ª division de la izquierda que sale 9, pongola en el sitio de la raiz, y su

cubo

cubo 729 restado de 970 dá de residuo 241, à quien bajandole la 2.ª division 299 queda un dividendo 241299.

$\sqrt[3]{970{,}299}$	99 Raiz.
-729	
241299	24571 Divisor.
-241299	9.
—0—	

Busco (422) el divisor que debe ser $3\times(90)^2+3\times90+1=24571$, y partiendo hallo de cociente 9, formo los productos $3\times(90)^2\times9+3\times90\times9^2+9^3=241299$, y restado del anterior dividendo, queda cero, luego 99 es la raiz cubica justa de 970299, que por tanto es cubo perfecto ò racional.

Tercer egemplo.

425. Extraher la raiz de un cubo irracional, ò que no la tiene justa, v. g. de 65749076.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{65749076} & 403 \\ -64 & \\ \hline 1749076 & 481201. \\ -1450827. & 3 \\ \hline 288249. & \end{array}$$

1ª Regla (420) divido al numero propuesto de 3 en 3 cifras, y por resultar tres divisiones tendrà tres cifras la raiz; extraigo la de la 1ª division 65 que es 4, pongola en el sitio de raiz, y su cubo 64 restado de 65 dá de residuo 1, à quien bájo la segunda division 749, y el todo 1749 es un dividendo. 2ª hallo el divisor (422) que debe ser $3\times(40)^2+3\times40+1=4921$, y respecto que el dividendo 1749 no le contiene, pongo cero por 2ª cifra de la raiz. Continúo bajando al lado de 1749 la 3ª division, ò 76, y el todo 1749076 le considero dividendo. Para hallar la 3ª cifra de raiz busco del mismo modo el divisor, que

debe

debe ser $3\times(400)^2 + 3\times400 + 1 = 481201$, por el que partido el anterior dividendo dá de cociente 3, formo con él los productos $3\times(400)^2\times3 + 3\times400\times3^2 + 3^3 = 1450827$, que restado del dividendo queda 288249 de residuo, y podemos responder, que la raiz cubica de 65749076, es 403 enteros. Mas el residuo 288249 puede tambien ser numerador de un quebrado à semejanza de (244), cuyo denominador sea 3 veces el quadrado de la raiz hallada, considerado decenas, mas 3 veces las mismas decenas, mas la unidad, esta fraccion con la raiz hallada hacen una raiz proxima del cubo irracional propuesto, pero à esta aproximacion es preferible la siguiente por decimales.

APROXIMACION DE LA raiz cubica por decimales.

426. Para extraher de un cubo irracional la raiz aproximada por decimales, tenemos la propiedad (247)

(247) que si dos potestades cubicas se multiplican, el producto es una potestad del mismo grado, cuya raiz es el producto de las raices, así $\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{216} = 6 = 2 \times 3$, del mismo modo $\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{8000.} = 20. = 2 \times 10.$, y de àquì $\sqrt[3]{8} = \frac{20}{10} = 2$ por lo que si en lugar de 8 se pone un irracional qualquiera, y esta potestad se multiplica por el cubo de 10, 100, 1000, &c. extrahida la raiz del producto, y partida por la otra raiz, 10, 100, 1000, ú la que sea, se tendrá en el cociente la raiz del irracional aproximada à décimos, à centesimos, milesimos, &c.

427. Se pide la raiz cubica de 19 aproximada à décimos, centesimos, milesimos, &c.

1º La raiz cubica de 19 en enteros es 2, que pongo à un lado ò sitio de la raiz, resto su cubo

8 de 19, y queda el residuo 11.

$\sqrt{19}$	2
−8	
1.r Dividendo. 11000......	1261....1.r Divisor.
−9576	6
2.° Dividendo...1424000	1203581..........2.°
−1245096	6
3.r Dividendo.....178904000	121234781..3.°
170325632	8
8578368	

428. 2.° Para aproximarla à décimos junto 3 ceros al residuo 11, asì 11000, y esto es lo mismo que si se hubiera pretendido desde el principio la raiz de 19000. $= \sqrt{19x}$

$\sqrt[3]{19} \times \sqrt[3]{1000}$, vamos adelante. Tenemos pues à 11000 por primer dividendo, busco su divisor (422) que sale 1261, y de cociente 6, formo con este los productos (423) que dán 9576, y restado queda de residuo 1424. Tenemos, pues, por raiz cubica de 19 aproximada á décimos 2 enteros y 6 décimos.

429. Si la aproximacion se pidiese hasta centesimos sería lo mismo que $\sqrt[3]{19} \times \sqrt[3]{1000000} = \sqrt[3]{19000000}$; esto es $\sqrt[3]{19}$ multiplicada por el cubo de 100, ò lo que viene à ser lo mismo haber añadido al irracional 19 seis ceros, y yá se vé que por cada cifra de aproximacion en la raiz se han de añadir 3 ceros, y que lo mismo tiene ir los juntando al residuo que quede.

Asì, queriendo ahora los centesimos será 1424000. 2°. dividendo, buscole el divisor del mismo modo (422), y sale 203581, y de co-

cociente 6, formo los productos, y restados, queda de residuo 178904, y por 3°. dividendo 178904000; suponiendo que se quieren los milesimos de raiz, busco el 3°. divisor que sale 21234781, y de cociente 8, formo y resto los productos, y queda de residuo 8578.368, con el qual se continuaria si mas aproximacion se quisiese; aunque por lo regular no se acostumbra mas aproximacion, porque el valor de diez milesimos, &c. se reputa en nada por pequeño.

EXTRAHER RAIZ CUBICA de quebrados.

430. La raiz cubica de quebrados tambien se extrahe de numerador y denominador, pues quando se elevase el quebrado al cubo seria elevando su numerador y denominador, así $(\frac{2}{3})^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$, luego para extraher su raiz debe ser por camino inverso, así $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$.

431. Ocurren quatro casos 1°, puede tener raiz justa en numerador y denominador como $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ que hemos visto es $\frac{2}{3}$.

432. 2°. Puede tenerla justa solo el numerador como $\sqrt[3]{\frac{8}{35}}$ en cuyo caso se extrahe la del numerador y la del denominador aproximada, (429) quanto se quiera, así $\sqrt[3]{\frac{8}{35}}$ hasta cẽtesimos sale $\frac{2}{3,27} = \frac{2,0}{3,27}$ cuyo cubo es mayor que el propuesto $\frac{8}{35}$ en $\frac{1}{4470}$, lo que manifiesta quan proxima está la raiz hallada de la verdadera.

433. 3°. Puede tener raiz justa el denominador, y el numerador no, y en este caso se aproxima la del numerador, por egemplo el quebrado $\frac{53}{64}$ será su raiz cubica hasta centesimos $\sqrt[3]{\frac{53}{64}} = \frac{\sqrt[3]{53}}{4} = \frac{3,75}{4} = \frac{375}{400}$, que mas reducida es $\frac{15}{16}$, cuyo cubo es menor que el propuesto $\frac{53}{64}$ en $\frac{77}{4096}$ ó proximamente $\frac{1}{300}$, y se infiere que menor diferencia daria si se hubiese aproximado hasta los milesimos.

434. 4°. Puede no tener raiz justa en numerador, ni denominador el quebrado que se proponga para extrahersela, como por egemplo el $\frac{5}{7}$ y este es el caso en que se transforma el quebrado en otro su igual que la tenga exacta en numerador ò denominador, segun que la raiz convenga ser mayor (432) ò menor (433) que la verdadera, pero asi como en la quadrada (254) se multiplicaban los dos terminos por el numerador ò por el denominador, aquì debe ser por su quadrado para que tenga raiz cubica.

Sea pues la peticion extraher la raiz cubica de $\frac{5}{7}$ transformólo asì $\frac{5}{7} \times 7^2 = \frac{5}{7} \times 49 = \frac{245}{343}$, y será $\sqrt[3]{\frac{245}{343}} = \frac{\sqrt[3]{245}}{7} = \frac{6,25}{7} = \frac{35}{28}$, cuyo cubo es menor que el propuesto $\frac{5}{7}$ de $\frac{1}{39}$ proximamente, y menor diferencia darìa si se hubiese aproximado á milesimos.

DE

DE LOS LOGARITMOS.

435. Aunque de los Logaritmos se debe tratar con estension en el tratado de Trigonometrias, donde tienen sus mayores aplicaciones, darémos aquì à entender su construccion y uso, para que quando el aplicado llegue à aquel parage tenga yá la puerta abierta.

436. *Definicion*: Por Logaritmos se entiende dos progresiones ò series, una geometrica (320), cuyos terminos se corresponden con los de otra aritmetica (331); esto es, primero con primero, segundo con segundo, &c., así.

Geometric. 1^3:3:9:27:81:243:729:&c.

Aritmetica. 0^2. 2. 4. 6. 8. 10. 12. &c.

De modo que los terminos de la aritmetica se llaman Logaritmos de la geometrica; esto es, el Logaritmo del primero 1. es cero de la aritmetica, 2 de la aritmemetica es Logaritmo de 3. en la geometrica, 4 lo es de 9, y así de los demas.

437. Por lo dicho se vé que pueden haber muchas progresiones, distintas geometrica y aritmetica que se correspondan del propio modo que las anteriores, y por tanto puede haber muchos distintos Logaritmos, pero sepamos que entre esta variedad han escogido los Autores estas progresiones.

Geometric.	1:	10:	100:	1000:	10000:	100000.	&c.
Aritmetica.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	&c.

La geometrica llamada de cupla porque su multiplicador es 10. y la aritmetica de los numeros naturales.

Valiendose de estas dos progresiones se construyen dos dilatadas tablas ò colunas, interponiendo entre 1, y 10 de la geometrica un numero crecido de medios geometricos, è igual numero de medios aritmeticos entre cero y 1 de la

arit-

aritmetica, lo mismo se practica entre 10, y 100 de la geometrica, y entre 1 y 2 de la aritmetica, &c. En estas tablas se verifican las mismas propiedades que vamos à ver en las primeras progresiones sentadas.

USO DE LOS LOGARITMOS.

438. 1°. Si multiplicamos dos numeros de la geometrica, por egemplo 3, y 27. se vé, que el producto 81. es el termino que se corresponde con la suma de sus logaritmos 8, asì

$$\ldots\ldots\ldots 3\times 27=81.$$
$$y\ldots 2+6=8.$$

Esto era preciso, porque tantas veces como fué factor el multiplicador, ò exponente inverso 3. en la geometrica para producir qualquiera de sus terminos, otras tantas se ha sumado la diferencia 2. en la aritmetica para producir su logaritmo, y por tanto las opera-

cio-

ciones del multiplicar en la geometrica se corresponden con las de sumar en la aritmetica.

Luego quando se quiera saber el producto de dos numeros en la progresion geometrica bastarà sumar sus logaritmos, y ver à la suma que termino le corresponde en la geometrica, y aquel será el producto.

439. 2°. Por el contrario, si partimos un numero como 243. por 3 de la geometrica, se ve que el cociente 81 corresponde à la resta de sus logaritmos, asì.

$$343 : 3 = 81.$$
$$10 - 2 = 8.$$

Tambien esto era preciso por la misma razon anterior (438). *Luego quando se pretende hacer una particion con dos numeros de la progresion geometrica, se tendrá conseguido con restar el logaritmo del divisor del logaritmo del dividendo, y la resta corresponderà á un termino en la geometrica, que será el cociente,*

440. 3°. Si elevamos un numero en la geometrica, por egemplo, el 3 á la quarta potencia dá el 81, y vemos que si su logaritmo 2 lo multiplicamos por 4. dá 8, logaritmo que corresponde al 81., quarta potencia del 3. *Luego si qualquiera numero de la geometrica se pretende elevar à qualquiera potencia, bastarà tomar el logaritmo del numero, y multiplicandolo por el exponente de la potencia dará al producto el logaritmo, á cuyo lado en la geometrica estará la potencia que se busca.*

441. 4°. Por el contrario, si sacamos la raiz cubica de un numero en la geometrica, v.g. de 729 sale 9, y si el logaritmo de 729, que es 12, se parte por 3, dá al cociente 4, logaritmo, à cuyo lado en la geometrica está 9., que es la raiz cubica del propuesto, *Luego si se pretende la raiz qualquiera de una cantidad en la geometrica, se tomarà su logaritmo, y*

par-

partiendolo por el exponente de la raiz, el cociente serà un logaritmo, à cuyo lado en la geometrica estarà la raiz que se pide.

442. Y, yá se vé, que quando las tablas sean tan extensas como se necesiten, nos facilitarán un producto con solo hacer una suma; un cociente con hacer una resta, una elevacion á potencia con hacer una sencilla multiplicacion, y la extraccion dilatada de una raiz con solo una sencilla particion.

En esta poca doctrina de los logaritmos conocerá qualquiera mediano talento el aprecio que merece este ramo de logaritmos, y por tanto debe quedar aficionado para aspirar à poseher los maravillosos usos que tienen.

Finalizo con esto, huyendo de causar fastidio, y aspirando à dejar aficion en el aplicado, para que con ella emprenda el que siga, si Dios quiere.

FIN.