



TESE DE DOUTORAMENTO

**MODELIZACIÓN DE FENÓMENOS
SOCIAIS MEDIANTE PROPIEDADES
EMERXENTES DAS REDES DE
INTERCONEXIÓN DENTRO DUNHA
COMUNIDADE**

Mariamo Mussa Juane

ESCOLA DE DOUTORAMENTO INTERNACIONAL DA UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

PROGRAMA DE DOUTORAMENTO EN CIENCIAS DE MATERIAIS

SANTIAGO DE COMPOSTELA

2021



D./Dna. **MARIAMO MUSSA JUANE**

Título da tese: Modelización de fenómenos sociais mediante propiedades emerxentes das redes de interconexión dentro dunha comunidade

Presento a miña tese, seguindo o procedemento axeitado ao Regulamento, e declaro que:

- 1) A tese abarca os resultados da elaboración do meu traballo.
- 2) De ser o caso, na tese faise referencia ás colaboracións que tivo este traballo.
- 3) Confirmo que a tese non incorre en ningún tipo de plaxio doutros autores nin de traballos presentados por min para a obtención doutros títulos.

E comprométome a presentar o Compromiso Documental de Supervisión no caso de que o orixinal non estea na Escola.

En **Santiago de Compostela, 7 de xullo do 2021.**

Sinatura electrónica



AUTORIZACIÓN DO DIRECTOR / TITOR DA TESE

Modelización de fenómenos sociais mediante propiedades
emerxentes das redes de interconexión dentro dunha
comunidade

D. ...ALBERTO PÉREZ MUÑUZURI

INFORMA/N:

Que a presente tese, correspóndese co traballo realizado por D/Dna. MARIAMO MUSSA JUANE , baixo a miña dirección, e autorizo a súa presentación, considerando que reúne os requisitos esixidos no Regulamento de Estudos de Doutoramento da USC, e que como director desta non incorre nas causas de abstención establecidas na Lei 40/2015.

De acordo co indicado no Regulamento de Estudos de Doutoramento, declara tamén que a presente tese de doutoramento é idónea para ser defendida en base á modalidade de compendio de artigos nos que a participación do/a doutorando/a foi decisiva para a súa elaboración e as publicacións se axustan ao Plan de Investigación.

En Santiago de Compostela, .28.. de .Xullo.... de 2021



Cahiryvo, muanaca ona wira
(*Se non o fago, fará a miña filla / o meu fillo*)

Proverbio macúa





Índice

Resumo	13
Introdución	17
1 Complexidade	17
1.1 Lei de potencias	22
1.2 Autoorganización	24
1.3 Modelos sociais na física	30
2 Redes	33
2.1 Redes teóricas	33
2.1.1 Formalismo matemático dunha rede	33
2.1.2 Propiedades das redes	35
2.1.3 Redes aleatorias	37
2.1.4 Redes de pequeno mundo	38
2.1.5 Redes libres de escala	40
2.1.6 O modelo Barabási-Albert para redes libres de escala	45
2.2 Redes reais. Twitter	49
3 Inestabilidade de Turing deslocalizada	53
3.1 Inestabilidade de Turing	53
3.1.1 Inestabilidade de Turing como mecanismo diferenciador	55
3.1.2 Inestabilidade de Turing deslocalizada	59

3.1.3	Análise de estabilidade linear	61
3.2	A constante difusiva e o seu significado	65
Hipótese e obxectivos		71
Metodoloxía		77
Resultados		81
4	Como a rede afecta a inestabilidade de Turing	81
5	Evolución lingüística na Galiza	85
6	Evolución lingüística mediada polo mecanismo de Turing	95
7	Discusións xerais	99
Conclusións		107
Apéndice		115
8	A parametrización do sistema complexo máis aló de Nakao-Mikhailov	115
Agradecementos finais: O sistema complexo como expresión do cambio		121
Listaxe de publicacións		125

Resumo





Andentrarémonos no mundo dos sistemas complexos porque comprendemos que, dentro do marco establecido, a natureza está artellada como tal. Faremos unha introdución as redes, a súa parametrización, a que tipo de redes teóricas existen na literatura e, a continuación, presentamos un tipo de redes reais, obtidas de Twitter. Acto seguido mergullarémonos no formalismo matemático das estruturas de Turing deslocalizadas, que dan conta desta inestabilidade en sistemas reactivo-difusivos en redes complexas. Da análise linear destes sistemas, extraeremos o obxecto matemático factor de crecemento que nos permite medir o ritmo de evolución dun sistema tras sufrir unha perturbación. O seu módulo, negativo ou positivo, indica que o sistema retorna ao estado inicial homoxéneo, no primeiro caso, ou que pode evolucionar cara a un estado de equilibrio novo, no segundo. Atopar valores positivos do factor de crecemento danos a condición necesaria para a existencia da inestabilidade. Se a nova estrutura emerxe, aparece un novo estado estable no espazo e no tempo.

Poder escribir o sistema complexo de xeito matemático, como o fixo Turing, como unha parte reactiva dada pola cinemática do sistema máis unha parte difusiva, permítenos facer análise de diferentes sistemas que se concretan no eido social. O traballo central é a análise dos distintos ritmos evolutivos da lingua dentro do territorio galego a través do valor do factor de crecemento. Veremos como as urbes galegas sofren ritmos de evolución lingüística máis lentos en relación ao rural.



Introducción





Capítulo 1

Complexidade

A realidade obxectiva evaporouse e o que observamos non é natureza en si senón a natureza exposta ao noso método de interrogación. (Heisenberg)

O contexto existencial e vivencial, o modo de vida e, a súa vez, a fonte que orixina e rexe o modo xeral de coñecer, propio dun determinado período histórico-cultural e ubicado tamén dentro dunha xeografía específica, [...] consiste no modo propio e peculiar, que ten un grupo humano, de asignar significados ás cousas e aos eventos, é dicir, na súa capacidade e forma de simbolizar a realidade [...] por conseguinte é un sistema de condicións do pensar, prelórico ou preconceptual, xeralmente inconsciente, que constitúe a mesma vida e o modo de ser e que dá orixe a unha Weltanschauung ou cosmovisión, a unha mentalidade e ideoloxía específicas, a un Zeitgeist ou espírito do tempo, a un paradigma (cambio de escenario ou modo de mirar, interiorizar e expresar a realidade), a certo grupo de teorías e, en último termo tamén, a un método e unhas técnicas ou estratexias adecuadas para investigar a natureza dunha realidade natural ou social. [1]

Jorge Wagensberg comeza do seguinte modo o seu texto *Ideas sobre a complexidade do mundo*: "En máis de tres séculos de ciencia

todo cambiou excepto talvez unha cousa: o amor polo simple. Desde que Galileo, Descartes e Newton inventaran a física [moderna], simples son os obxectos descritos pola ciencia, moi simples as leis para describir e simplisimas as súas expresións matemáticas. De tal simplicidade dedúcese boa parte do seu prestixio: rigor, universalidade e incluso beleza. [...] Quíxose ver na complexidade un obstáculo interposto pola natureza para protexer o segredo das súas leis, un obstáculo coa soa misión de suxerir diferenzas entre sistemas iguais, varios fenómenos onde só hai un, ou certos forzados modelos onde rixe unha única lei natural. [...] O naturalmente *natural* era antes o determinista [...]; o artificialmente *excepcional* era o aleatorio” [2].

A palabra complexidade está formada con raíces latinas e significa “cualidade do enteiramente enredado”. As súas compoñentes léxicas son: o prefixo con- (xunto, total), *plexus* (entrelazado) e o sufixo -dad (cualidade). A palabra latina é *complexus*. “*Complexus* quere dicir o que está tecido en conxunto; a trama, o tecido de constituíntes heteroxéneos inseparables asociados que presenta á vez o paradoxo do un e o múltiple. Tecido de eventos, accións, interaccións, retroaccións, determinacións, azares que constitúen o noso mundo fenoménico” [3].

Un sistema complexo está composto por moitas partes que interactúan cuxos vínculos poden xerar información adicional sen que poidamos coñecer cal é a causa exacta que a orixina. Nun sistema complexo existen variables ocultas cuxo descoñecemento nos impide analizar o sistema con exactitude. “Os sistemas complexos están formados por un conxunto grante de compoñentes individuais que interactúan entre si e que poden modificar os seus estados internos como produto desas interaccións. Estes sistemas poden ser estruturalmente simples, malia que tal simplicidade non impide que exhiban comportamentos dinámicos diversos e non triviais” [4]. Así é que, un sistema complexo, posúe máis información que cada parte independente. “O todo é máis que as partes”. Non basta con coñecer as partes por separado. É necesario coñecer o funcionamento do sistema completo unha vez se poñen en relación as súas partes. A realidade complexa é relacional. Isto é, a parte en si non existe senón en relación co resto de partes. Desde o paradigma da realidade complexa

a individualidade é unha entelequia.

Os sistemas complexos presentan decotío comportamentos non lineares: responden de xeitos diferentes ao mesmo *input* segundo o estado ou contexto no que se atopan. En física e matemáticas, a non linealidade describe sistemas nos que un cambio na magnitude da causa non produce cambios proporcionais en magnitude no efecto. Se visualizamos uns eixos cartesianos, a relación entre a variable de entrada e a de saída non é linear. O caos refírese a esta enorme sensibilidade ás condicións iniciais. Pequenos cambios nas condicións iniciais poden dar resultados dramaticamente distintos.

O alicerce do caos como unha nova ciencia débese ao matemático, físico e filósofo francés Henri Poincaré quen, a finais do século XIX, a partir do plantexamento matemático das ecuacións diferenciais non lineares, deu explicación aos sistemas dinámicos do mundo non linear. Cando os sistemas abandonan o rexime linear para entrar no non linear aparecen discontinuidades e inestabilidades. O estado estacionario compatible coas condicións que impón o ambiente xa non é único e as fluctuacións espontáneas, antes sempre condenadas a regresar, poden amplificarse e arrastrar ao sistema cara novos e imprevistos estados estables.

Poincaré destruíu a imaxe mecanicista da natureza ao dubidar da estabilidade do sistema solar e asomar a posibilidade de curiosas órbitas erráticas e caóticas ao preguntarse, que pasaría se ao sistema ideal de dous corpos se lle engade o movemento dun terceiro? Con esta pregunta e o seu descubrimento, Poincaré forza cuestionar o paradigma newtoniano que cimentara a ciencia ata entón. "Poincaré revelou que o caos, ou o potencial do caos, é a esencia dun sistema non linear e que incluso un sistema completamente determinado como os planetas en órbita podía ter resultados indeterminados. En certo modo viu que a realimentación podía magnificar os efectos máis pequenos. Advertira que un sistema simple podía estourar nunha perturbadora complexidade" [5].

Segundo a dinámica newtoniana, a natureza é un mecanismo rexido por leis naturais, inmutables e eternas. Estas leis, expresadas a través de ecuacións, determinan que, baixo circunstancias idénticas,

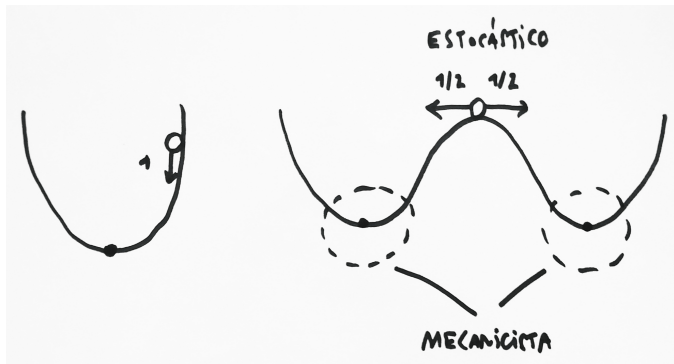


Figura 1.1: Imaxe mecanicista (esquerda) e imaxe estocástica (dereita). Os sistemas físicos evolucionan cara aos estados máis probables. Na física mecanicista, onde o réxime é linear, o punto fixo é único e o sistema vese abocado a evolucionar cara a ese único estado estacionario, pois a probabilidade de acadar ese estado é sempre 1. Na física dos sistemas complexos, onde o réxime é non linear, o espazo fásico é máis rico, aparecen máis puntos fixos e nas entornas deses puntos aparecen solucións con probabilidades idénticas polo que o estado estacionario final depende fortemente das condicións iniciais.

os resultados serán idénticos e, se as circunstancias varían levemente, o resultado cambiará de forma proporcionalmente pequena. O que sería unha resposta linear. Porén, ás veces, unha diferenza pequena nas causas provoca unha enorme diferenza nos efectos. Este tipo de comportamento é o que se coñece co sobrenome de caótico.

Houbo que agardar os superordenadores para poder observar estas non-lineariedades. A matemática do caos descubriuse cando, ao tentar reiterar unha función moitas veces, se atopaba un resultado case imprevisible. A resposta do sistema era moi sensible ás variacións iniciais. Acuñada polo meteorólogo Edward Lorenz, a comenzos dos anos sesenta, o efecto bolboreta converteuse no símbolo da teoría do caos. Lorenz empregaba un ordenador para calcular mediante código as condicións climáticas máis probables cando se decatou de que ao redondear os datos iniciais un pouco, os finais eran radicalmente

distintos. Unha bolboreta parece non ser nada comparándoa coas enormes forzas físicas que actúan na atmosfera. Porén, o que se extrae da observación de Lorenz é que talvez o bater das ás dunha bolboreta pode desatar un tornado no outro lado da Terra. Resulta directo comprender que a bolboreta non é un elemento illado do sistema caótico senón que forma parte deste e, por tanto, todo o que faga inflúe no demais sen forma de o demostrar. A conclusión de todo isto é que por moi potentes que sexan os ordenadores, xamais poderemos prognosticar o tempo que fará mañá cun 100% de seguridade: ata unha bolboreta pode invalidar os cálculos máis meticulosos ...

Porén, a abundancia dos sistemas complexos non implica unha innumerable diversidade de condutas dinámicas diferentes. Aquí radica a súa elegancia. Os sistemas complexos posúen características universais con independencia dos detalles específicos de cada sistema en particular. A circuitaxe do cerebro ou dunha computadora derivan na emerxencia comportamentos similares. O que poden compartir é unha estrutura interconectada e formada por elementos individuais (neuronas ou circuítos eléctricos) que interactúan para intercambiar información e modificar os seus estados internos. Isto é, emerxen fenómenos colectivos semellantes sen que os elementos mátericos sexan de todo relevantes.

A substancialidade deste feito é radical. É posible identificar propiedades dinámicas similares entre o sistema nervioso, un ordenador, a interacción entre xenes, a tectónica de placas, unha colonia de formigas, o crecemento dunha urbe, ... Sistemas, en aparencia, moi dispares. Ao final a diversidade comportamental está sostida sobre dinámicas similares.

”A aportación fundamental da ciencia dos sistemas complexos na tarefa de coñecer e transformar a nosa realidade é identificar os principios e fundamentos xerais da operación de ditos sistemas sen importar os detalles particulares da súa realización material. Así, por exemplo, podemos imaxinar un biólogo do futuro que estudaría o fenómeno chamado ”vida” desde unha perspectiva de principios (talvez leis?) xerais. Tal biólogo tería consciencia de que o fenómeno da ”vida” tal e como existe na Terra é tan só un caso particular de como ”a

vida” se manifestou nas condicións particulares da Terra, expresándose coa forma dunha realización material moi específica (unha bioquímica de carbono predominantemente levóxira). Porén, este biólogo estaría preparado para identificar o fenómeno ”vida” se por un casual fose detectado noutro planeta ou parte do Universo noutras realizacións materiais específicas [...]. O exemplo pode ir máis lonxe. Podemos imaxinar un sociólogo do futuro que sexa capaz de identificar os principios xerais do fenómeno ”social” independentemente de que este ocorra en grupos humanos, animais, microbios, plantas, robots ou, incluso, se o seu colega biólogo ten sorte, en grupos sociais fóra do noso planeta” [4].

A natureza de seu tende a se estruturar en entes discretos excitables que interactúan e se organizan con diferentes graos de complexidade. Talvez a estruturación non é tan discreta mais é o xeito simplificado que temos de observala e así facilitar a súa análise. Ao revés do que podemos pensar, os sistemas complexos non son casos raros nin curiosidades senón que dominan a arquitectura do Universo. De aí a intrincación deses entes discretos en sistemas complexos. As propiedades que presentan os sistemas complexos son a existencia de leis de escalamento, a formación de padróns espaciais de autoorganización e os procesos colectivos emerxentes que imos esmiuzar a continuación.

1.1 Lei de potencias

As leis de escalamento ou de potencias nas fluctuacións temporais e espaciais dun sistema complexo implican que o sistema non está suxeito a unha escala específica senón que o fenómeno colectivo é válido en todas as escalas. Todas as propiedades do mesmo mantéñense con independencia da escala. Cando un sistema complexo responde a lei de potencias, as fluctuacións de grandes magnitudes ocorren con moi pouca frecuencia. Pola contra eventos de menor magnitude son máis frecuentes. ”A profusión do pequeno non é unha imaxe literaria. Pretende ser aquí unha constatación científica pois, en efecto, en moitas

ciencias da natureza pode afirmarse decotío, que o vasto é escaso e que abundante é o breve. [...] Hai máis planetas que estrelas, máis estrelas que galaxias. [...] Hai máis átomos que moléculas, máis moléculas que células, máis células que individuos. [...] hai máis hidróxeno que chumbo, máis sal que proteína, máis bacterias que formigas, máis formigas que ratos, máis ratos que cabalos e máis cabalos que baleas. E as palabras curtas (preposicións ou pronomes, por exemplo) son máis frecuentes que as palabras longas (substantivas ou adxectivos) en calquera discurso. Agora xa non existe unha razón *a priori* que trivialice a profusión do pequeno e podemos sospeitar que a natureza nos esconde aquí unha das súas leis” [2].

Unha das leis de potencias máis sonada é a chamada lei de Gutenberg-Richter que relaciona a magnitude dos sismos coa frecuencia coa que estes ocorren. A teoría da tectónica de placas de Wegener explica a existencia e orixe dos sismos. A Terra non é unha rocha sólida senón que está composta por capas e a máis superficial, a codia, flota sobre un manto fluído. A codia tampouco é continua. Está composta por fragmentos que están en perpetuo movemento. Colisionan, cizallan ou sepáranse. Isto explica, entre outros fenómenos xeolóxicos, os sismos que non son máis que a expresión da liberación de enerxías acumuladas no interior da Terra. O sistema de placas tectónicas, baixo un prisma físico, é un sistema complexo formado por partes, as placas, que interactúan ao disipar enerxía en forma de sismos.

Podemos representar, en escala logarítmica, a distribución da magnitude do sismo, é dicir, a frecuencia do sismo fronte a súa magnitude obtemos unha liña recta descendente. Isto obedece a unha lei de potencias. A interpretación é directa. Sismos pequenos ocorren cunha frecuencia maior que os de grandes magnitudes.

A relación entre frecuencia e magnitude non é arbitraria. Responde a unha lei de potencias. Isto, asemade, quere dicir que a ”lei de sismos” non responde a escalas concretas. É válida para o planeta enteiro como para un sistema máis local no que só interactúan dúas placas. Na vía deste supoñer, unha persoa que se adicase á xeofísica agardaría observar a mesma lei de potencias noutros corpos do Universo cuxa estrutura non fose de todo sólida e tivese actividade tectónica.

Esta lei de potencias pódese extrapolar a outros eidos. No social, existen moitos casos de procesos que obedecen a este escalamento na distribución de eventos que ocorren dentro dun sistema complexo. O primeiro en exemplificar estas leis de potencias foi o economista Vilfredo Pareto que amosou que o número de persoas cuxos ingresos excenden unha certa cantidade segue unha lei cuantitativa de potencias. A xente que acumula grandes fortunas é moi pouca mentres que a pobre é a maioría. Por ir adiantando, cando nos adentremos no mundo das redes, chamaremos a este tipo de sistema redes libres de escala, aquelas que seguen unha lei de potencias.

Esta "lei de distribución da riqueza" é a que opera nas sociedades capitalistas e é válida en todas as escalas. É válida nunha urbe pero tamén nun estado ou nun ámbito máis rexinal ou global. Neste tipo de sistemas os ingresos xerarquízanse segundo as calificacións académicas, laborais, a experiencia laboral, a antigüidade, ... e isto fai que abunde a xente pobre e escasee a rica. O mundo da economía aplica a lei de Pareto en España, na Unión Europea ou en todo sistema baseado no capital.

Ao final, un sistema económico destas características pódese tratar como un sistema complexo con entes con maior ou menor independencia (individuos, familias, empresas, estados) que interactúan dentro de estruturas diversas (mercados) máis aló do ámbito local. A chamada globalización non é máis que a intensificación e diversificación desas interaccións mercantís. A efectos da lei de potencias, esta economía do capital non dista moito da tectónica de placas de Wegener.

1.2 Autoorganización

Outra característica que poden presentar os sistemas complexos é a de autoorganizarse. "Os sistemas complexos poden situarse en reximes críticos caracterizados pola presenza de fluctuacións espaciais e temporais en todas as escalas posibles. Esta situación de criticalidade pódese alcanzar de maneira espontánea e sen a intervención de factores

ou forzas externas ao sistema; fálase entón dun sistema autoorganizado. O proceso de interaccións pode xerar comportamentos colectivos e globais. É dicir, condutas que non están definidas nos elementos individuais pero que emerxen como un proceso colectivo e que non poden ser reducidas nin explicadas tomando aisladamente os elementos constituíntes” [4].

A dinámica dos sistemas complexos pode derivar na emerxencia de padróns estruturais espaciais globais. Estes padróns xorden de interaccións locais, como dixemos ao presentar estes sistemas, imperceptibles. A partir dun estado desordenado ou completamente homoxéneo, aparecen a orde e emerxen estruturas que de xeito espontáneo se organizan. A termodinámica diría que houbo un desprazamento desde un estado fóra do equilibrio a outro estable. Estes sistemas son capaces de crear orde espacial onde con anterioridade non a había. Estase a dar unha ruptura da simetría desde ese estado inicial indiferenciado que, pola súa inestabilidade, calquera fluctuación que se poida orixinar vai levar o sistema a un estado máis estable no tempo.

En 1973, no libro *De máquinas e seres vivos*, [6], para definir a química de automantemento das células, os biólogos Humberto Maturana e Francisco Varela crean o concepto de autopoiese: ”unha máquina autopoietica é unha máquina organizada (definida como unha unidade) como unha rede de procesos de produción (transformación e destrución) de compoñentes que: (i) a través das súas interaccións e transformación continuamente rexeneran a rede de procesos (as relacións) que os produciron e (ii) que a constitúen (a máquina) como unha unidade concreta no espazo no que eles (os compoñentes) existen especificando o dominio topolóxico da súa realización como tal dunha rede. [...] o espazo definido por un sistema autopoietico é autocontido e non se pode describir mediante o uso de dimensións que definen o espazo. Non obstante, cando nos referimos as súas interaccións cun sistema autopoietico concreto, proxectamos este sistema no espazo das nosas manipulacións e facemos unha descrición desta proxección”.

A autopoiese non sería máis que a capacidade que teñen os nosos sistemas complexos de se autoorganizar. Están a falar ao mesmo tempo da autoorganización como autopoiese e da lei de potencias que non

escala o fenómeno ao falar de que non hai dimensións que poidan definir o espazo que ocupa.

Schrödinger no seu conciso e fermoso texto *Que é a vida?* de 1944 expresa: "a vida parece ser o comportamento ordenado e reglamentado da materia, que non está asentado exclusivamente na súa tendencia de pasar da orde á desorde, senón baseado en parte nunha orde existente que se mantén. Espero facer o meu punto de vista máis claro aos físicos (aínda que só a eles) dicindo: o organismo vivo parece ser un sistema macroscópico cuxo comportamento, en parte, se aproxima á conduta puramente mecánica (en contraste coa termodinámica) á que tenden todos os sistemas cando a temperatura se aproxima ao cero absoluto e se elimina a desorde molecular".

Schrödinger fala da vida como estados autoorganizativos da materia previo á descuberta do ADN por Rosalind Franklin, Francis Crick e James Watson no 1953, [7]. O segundo principio da termodinámica sinala que a materia ten unha tendencia á desorde molecular e á desorganización mentres que a vida, pola contra, tende á organización, a complexidade crecente. Isto non entra en contradición xa que a segunda lei está limitada aos sistemas illados. E un ser vivo non o é. É un sistema aberto que intercambia enerxía e materia coa súa entorna. Daquela, o sistema illado ser vivo máis entorna, non contradi a segunda lei de aumento de entropía. Os organismos desprenden esa entropía no medio ao se alimentar e a morte sería o momento máximo de entropía do sistema.

Diversos equipos científicos, entre eles Jorge Wagensberg e colaboradores da Universidade de Barcelona, estudaron calorimetricamente o crecemento das bacterias. Se se supón, en principio, como hipótese simplificadora, que a calor disipada polo sistema está directamente relacionada coa entropía producida polo sistema debido ao seu crecemento ou diferenciación, os resultados calorimétricos conducen a unha etapa de rápido crecemento da produción da entropía que chega ata un máximo e diminúe despois ata un valor mínimo onde o sistema permanece en estado estacionario. Nesta última etapa a colonia xa non crece. Acadou o máximo da súa capacidade e limítase a manterse.

O balance entrópico reflexa como se pode manter un estado estacionario. O sistema envía ao medio a entropía que lle sobra e así consegue mantela constante no seu interior. A persistencia do estado estacionario supón a conservación dunha estrutura ou grao de organización. A evolución cara ese estado estacionario desde unha configuración inicial conleva a acomodación interna do sistema as condicións impostas polo ambiente. Así o sistema se adapta ao medio. "É a pel de galiña fronte ao frío, a agricultura fronte a escaseza ou risco de caza, os semáforos fronte a un aumento do tráfico ..." [2]. Cando o sistema non pode absorber unha perturbación no ambiente, o sistema entra en crise. O sistema ou ben se extingue ou ben cambia bruscamente de estrutura interna, autoorganízase.

No século XX, as consecuencias da termodinámica deixan de se arrecantar xusto polos problemas que plantexa. Nos sistemas illados, o equilibrio final é unha consecuencia necesaria. Pero se observamos a natureza, unha célula, unha cidade, vemos que son sistemas abertos, en continuo intercambio co medio, é dicir, son sistemas complexos. Ilya Prigogine formula unha termodinámica fóra do equilibrio porque ese vai ser o terreo dos sistemas abertos autoorganizados. Esta termodinámica permite tratar os problemas que xorden cando as desviacións do equilibrio non son pequenas. A tese fundamental de Prigogine é que hai unha tendencia cara a orde nos sistemas abertos e está relacionada coa súa teoría das estruturas disipativas. Esta idea está recollida nun dos seus máis célebres libros, *Tan só unha ilusión*, unha antoloxía de dez ensaios. Esta teoría derruba a tese da ciencia tradicional para a cal a emerxencia de estruturas novas era pura ilusión e que consideraba a vida no Universo como un fenómeno froito do azar como unha anomalía accidental da segunda lei da termodinámica que aboca á morte térmica como perspectiva final. Prigogine asegura que as estruturas disipativas abren un novo diálogo entre o ser humano e a natureza.

Afastada do equilibrio, a materia adquire novas propiedades. Por exemplo, as celas de Bénard que aparecen nun fluído cun gradiente térmico crítico. Porén, esta estrutura desaparece en canto deixamos de quentar o sistema, xa que, ao eliminar o suministro de calor, a

diferenza de temperaturas diminúe, o movemento cesa e o líquido acaba finalmente o estado de equilibrio de temperatura uniforme. Ha de alimentarse o sistema para que este poida manter a estrutura en rexime non linear. En canto deixamos de o alimentar, a súa estrutura comeza a difuminarse, o sistema morre e acaba o estado de equilibrio orixinal. Prigogine chama a estes sistemas abertos estruturas disipativas, é dicir, que a súa forma e estrutura se mantén por unha continua disipación (ou consumo) de enerxía. Como a auga se move nun remuíño e, ao mesmo tempo, o crea, a enerxía se trasfire a través das estruturas disipativas e simultaneamente as crea. Para a vida non é diferente.

Por curiosidade e por estar á orde do día, apuntamos sobre os virus. Os virus aproveítanse da capacidade autoorganizativa dos seres vivos. O virus é unha estrutura de equilibrio que recorda moito as estruturas cristalinas inorgánicas. A súa complexidade é limitada. Non realiza nin a función de nutrición nin a de relación, só a de reprodución. Porén, para reproducirse precisa de aniñar nunha célula que recibe o nome de hóspede. Polo que os virus non teñen de seu capacidade adaptativa. Non son estruturas disipativas. Para experimentar cambios estruturais internos precisan da célula hóspede. Son os virus meros axentes destrutivos? Pois non. Semella que poden ser compoñentes esenciais para o mantemento dos ecosistemas, [8]. Este estudo realizado en plantas sostén que os virus prevenen o crecemento desmesurado de plantas xeneticamente homoxéneas e ademais poden axudar os organismos hóspedes a se adaptar mellor ao medio. Talvez controvertidos resultados pero dan pistas sobre o posible desenvolvemento de virus na gandaría extensiva e nos monocultivos extensivos, que xusto teñen como principais consumidores este tipo de gandaría. Estes ambientes homoxéneos xeneticamente serían un bo caldo de cultivo para os virus que reequilibrarían o sistema hospedándose nestes organismos e modificando a estrutura interna destes para a mellor adaptación ao ambiente. Os virus parecen ser axentes activos na sustentación da biodiversidade dos ecosistemas.

A formación dun organismo pode parecer altamente improbable se a ligamos soamente a leis mecanicistas. Prigogine amosa que en realidade estes procesos onde se xera orde a partir do caos son

bastante frecuentes. Prigogine pon de manifesto que a natureza posúe a capacidade de xerar novas estruturas, diferentes da simple agregación das compoñentes e constitúe unha valiosa axuda para advertir as deficiencias da cosmovisión mecanicista. Vencellar complexidade e vida implica unha lóxica particular de funcionamento dos seres vivos onde indeterminación, desorde e azar son factores da autoorganización a estruturas diferenciadas. A vida como un sistema que se autoorganiza e xera os seus propios constituíntes supón unha ruptura paradigmática e constitúe unha revolución biolóxica sen precedentes no século XX. E as sociedades tampouco escapan da complexidade. "O ser humano xa non é unha entidade pechada [en terminoloxía física sería máis preciso dicir illado] respecto a esta totalidade complexa senón un sistema aberto que goza dunha relación de autonomía/dependencia organizativa no seo dun ecosistema" [9]. "Nas sociedades animais, e especialmente na dos mamíferos, existe unha orde complexa que supón unha certa desorde ou ruído como ingrediente indeispensable a súa propia complexidade" [9]. A desorde xa non é vista como unha anomalía senón como un factor máis que se atopa nos movementos do sistema solar, nos cambios climáticos, na tectónica de placas, na vida ou nas sociedades.

Durante as últimas décadas do século pasado, comezou a xestarse un cambio paradigmático que afecta a todas e cada unha das disciplinas científicas de maneira simultánea, desde a bioloxía a xeoloxía pasando pola socioloxía. O novo paradigma pódese coñecer baixo o nome de estudo dos sistemas complexos. Trátase dunha resposta ao xiro copernicano fronte a conceptos como desorde ou caos que estaban desprazados da física newtoniana, por ser considerados imperfectos e baleiros de significación. Os sistemas complexos ubícanse entre a categoría de orde entendida como sinónimo de determinismo e previsibilidade total da natureza e o caos, concebido como azar e desorde total, onde nada pode ser previsto. O novo paradigma complexo, contrario a crenza mecanicista onde os sistemas illados e estables constitúen a norma, sostén que a non-lineariedade se atopa por todas partes e que son xusto os sistemas clásicos a excepción.

1.3 Modelos sociais na física

”Como a interacción entre axentes sociais crea orde a partir dunha situación inicial desordenada? Orde é unha traslación na liguaxe física do que nas ciencias sociais se denota por consenso, acordo, uniformidade, mentres que desorde se refire a fragmentación ou desacordo” [10]. Como crear modelos matemáticos de fenómenos sociais?. Podemos propoñer o paradigma de Ising do electromagnetismo. Este é un modelo simple onde a configuración final depende do estado da maioría das partes interactuantes. Se consideramos unha colección de N spin (axentes sociais) s_i que poden asumir dous valores ± 1 . Cada spin vese forzado a se aliar co seu spin veciño. A enerxía total é:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j \quad (1.1)$$

onde a suma é sobre spin veciños i, j . O Hamiltoniano debe minimizarse para que un spin mude o seu estado. A dinámica computacional máis empregada é o algoritmo de Metropolis [11]. Primeiro escolle un spin ao azar. Despois calcula a variación de enerxía ΔE tras cambialo de signo. Se decrece cambia de signo. Se non decrece, lanza outro número aleatorio. Se ese aleatorio é menor que $\exp(-\Delta E/k_B T)$, sendo T a temperatura do sistema, o spin cambia de signo. Para temperaturas T por debaixo dun valor crítico T_c , o sistema absorbe as fluctuacións e tende cara a estados ordenados. Así, ruído termico destrúe os estados ordenados e por enriba desa temperatura crítica T_c dominan estados desorganizados ou en termos sociais discordantes. Imaxinemos, por exemplo, que queremos analizar o poder que ten de convocatoria unha idea, $+1$, fronte a outra oposta, -1 , que están en interacción dentro duna comunidade. Así pois, o modelo de Ising úsase amplamente para analizar fenómenos sociais deste tipo [12], [13], [14]. O caso xeralizado é o modelo de Potts, [15], que contempla q estados diferentes en interacción. O modelo de Ising sería o caso particular de $q = 2$.

Outro modelo matemático para tratar de parametrizar interaccións

sociais é o modelo epidemiolóxico básico SIR onde as persoas poden ser Susceptibles de se infectar, Infectadas ou Recuperadas e poden saltar dunha categoría a outra cunha certa probabilidade que se cuantifica a priori. Entra dentro dos chamados modelos compartimentais [16]. Nun dos traballos realizado polo noso equipo empregámolo para estudar como o COVID-19 se pode propagar dependendo da rede de interacción dunha comunidade [17].

Para estudar o proceso de difusión cultural, Axelrod constrúe un modelo baseándose en dúas asuncións: (1) que as persoas son máis susceptibles de interactuar con aquelas persoas coas que comparte atributos culturais; (2) estas interaccións fan que se incrementen os atributos culturais compartidos. Esta é a mesma idea que hai detrás do modelo de Ising e de minimizar o valor ΔE . "Unha persoa é máis propensa a falar con alguén que fale a mesma lingua e o mero feito de falar fai que os seus padróns de fala se homoxeinicen". O obxectivo deste modelo é estudar a persistencia da diversidade cultural que sería contraintuitivo segundo esta hipótese [18].

Un primeiro traballo realizado por compañeiros do equipo, [19], reforza esta idea de que se pode manter a diversidade, neste caso lingüística máis concretamente, dentro dunha rede social. A conclusión é que lonxe de homoxeneizar unha lingua dominante, as redes que se establecen dentro dunha comunidade poden ser a causa de que apareza diferenciación e axuda a coexistencia de dúas linguas. Realizáronse máis estudos arredor do bilingüismo con modelos físicos como estudos nos que se analizaron tempos nos que se acadara o estado estacionario, [20], ou estudos nos que a solución estable só é a monolingüe, [21]. Neste documento presentamos traballos nos que se amosa que é posible manter estados estables bilingües reforzado con datos experimentais que o avalan.

Imos supoñer que a complexidade e o que está por tras, a autoorganización, son, pois, os principios básicos de deseño da natureza. Desde un punto de vista da dinámica non linear, a autoorganización pode definirse como a tendencia espontánea que presentan moitos sistemas para romper a súa simetría e artellarse en estruturas complexas, [22]. Xa que a complexidade é o tecido de

tecidos, comezaremos esta viaxe sumerxéndonos nas redes. Faremos unha introdución a que son as redes, as súa descrición matemática e aos tipos de redes teóricas que hai. Tras disto, damos paso a inestabilidade de Turing que é o paradigma matemático da autoorganización cun desenvolvemento da primeira achega que Turing fai a través de sistemas reactivo-difusivos para dar paso a unha análise deste fenómeno en redes. Nestes sistemas reticulares a inestabilidade de Turing leva o apelido de deslocalizada. Irán atravesando o texto resultados de traballos realizados polo noso equipo no eido social dos sistemas complexos. Como dixemos, centrarémonos contra o final sobre como afecta a rede a dinámica de linguas en interacción.



Capítulo 2

Redes

2.1 Redes teóricas

Os animais sono cando van en manda, as ratas son rizomas [o concepto equivale a rede para nós]. As madrigueiras sono en todas as funcións de hábitat, de provisiónm de desprazamento, de guarida e de ruptura. [...] Nun rizoma non hai puntos ou posicións [...]. Un rizoma pode ser roto, interrompido en calquera parte, pero sempre recomeza segundo esta ou aquela liña e segundo outras. É imposible acabar coas formigas, posto que forman un rizoma animal que aínda que se destrúa na súa meirando parte, non cesa de se reconstruír [23].

Unha das características que presentamos ao comezo deste texto é que os sistemas complexos se caracterizan por estar integrados por partes artelladas nunha rede. Polo que a necesidade de traducir estas estruturas reticulares a linguaxe matemática é fundamental.

2.1.1 Formalismo matemático dunha rede

Unha rede é unha colección de obxectos conectados. Por exemplo, cando os seres humanos deciden vivir en comunidade están a formar unha rede. Neste caso, os obxectos serían cada unha das persoas que compoñen a comunidade e as conexións, as relacións establecidas.

Como o que queremos é traballar desde a matemática con esas redes, chamaremos nós a cada un dos obxectos que forman parte desa rede e enlaces as conexións entre eles.

En matemáticas, unha rede é unha estrutura que establece enlaces entre N nós por pares. O obxecto que recolle esta información recibe o nome de matriz de adxacencia. A matriz de adxacencia A_{ij} con $i = 1, \dots, N$ é unha matriz cadrada na que os elementos son nulos, $A_{ij} = 0$, se non existe conexión entre os nós i e j .

Se $A_{ij} = 1$ diremos que a conexión, e por tanto a rede, é non pesada. Se é outro número real, a conexión é pesada. Unha rede pesada é aquela na que as conexións teñen un peso asignado. Se a rede é non pesada só estará dando conta de que existe conexión entre os nós. Se a rede é pesada xa engade máis información: a influencia que pode haber entre os nós. Nun grande número de redes reais, non todas as conexións teñen o mesmo valor. De feito, a miúdo, as conexións asóciase con pesos que varían en función da súa intensidade, forza ou capacidade, [24].

Se a matriz de adxacencia é simétrica, diremos que a rede é non dirixida xa que non existe unha xerarquía entre os nós, isto é, o nó i está conectado a j e viceversa. Se a matriz de adxacencia non é simétrica, diremos que a rede é dirixida e que existe unha xerarquía entre os nós; só un dos nós está conectado ao outro. Pensemos nunha conta *influencer* dunha rede social de internet calquera. O máis probable é que, se eu tamén pertenzo a esa rede social, vexa a conta *influencer* e que ela non saiba da miña existencia. Pola contra, nunha relación entre persoas fóra das redes dixitais, non existe esa asimetría e ambas recibimos algún tipo de influencia da outra.

Como a matriz de adxacencia alberga información de se un nó i está conectado a outro j , podemos definir a conectividade k_i como o número de nós aos que i está conectado:

$$k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} \quad (2.1)$$

A conectividade é unha medida da centralidade do nó. Nós con conectividades máis elevadas ocuparan posicións de maior influencia

dentro da rede. Voltando ao exemplo antes citado, unha conta que sexa *influencer* nunha rede social dixital calquera terá unha conectividade superior a unha conta que non o sexa. Observar o valor da conectividade axuda a estimar o grao de relevancia dun nó concreto.

Unha vez temos definida a matriz de adxacencia A_{ij} e a conectividade k_i , e antes de presentar unha serie de redes teóricas que se empregan na literatura, imos ver algúns conceptos relacionados coas redes para poder despois empregalos se precisar.

2.1.2 Propiedades das redes

En redes, a lonxitude promedia do camiño máis curto entre dous nós calquera é un concepto topolóxico das redes complexas que define o número medio de pasos que hai que percorrer a través do camiño máis curto para todos os posibles pares da rede. É unha medida da eficiencia no transporte da información dunha rede. Canto máis baixo sexa o valor da lonxitude promedia do camiño, máis fácil será propagar unha información. Os nós establecen conexións máis eficaces uns cos outros. Algúns exemplos son: o número de persoas coas que tes que contactar para coñecer a unha descoñecida, o número de clicks para chegar dunha páxina web a outra.

Se consideramos a rede de nós ou vértices v_i con $i = 1, \dots, N$ pertencentes ao conxunto V , $d(v_1, v_2)$, con $v_1, v_2 \in V$, é a distancia máis curta entre v_1 e v_2 . Se asumimos que $d(v_1, v_2) = 0$ se v_2 non se pode alcanzar desde v_1 , entón, a lonxitude promedia do camiño máis curto é l_G :

$$l_G = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} d(v_1, v_2) \quad (2.2)$$

O diámetro da rede defínese como a maior das lonxitudes de entre todos os camiños máis curtos posibles entre dous nós.

Outro medidor da robustez dunha rede é a distribución de conectividades. Xa vimos previamente o que era a conectividade dun nó para poder introducir o formalismo matemático da inestabilidade de Turing. Recordamos que a conectividade dun nó é o número de

conexións que establece ese nó. Se se fai un reconto do número de nós asociados a cada conectividade, obtemos unha distribución de conectividade $P(k)$ que equivale a unha distribución de probabilidade da rede. A distribución de conectividade dá información, por tanto, da probabilidade que temos de atopar un nó cunha certa conectividade k . Iremos vendo exemplos de distribución de conectividade a medida que presentemos as redes teóricas.

O último medidor que queremos mencionar é o coeficiente de agrupamento (*clustering coefficient*) que mide o grao con que os nós dunha rede tenden a se agrupar, [25]. A tendencia natural que teñen as sociedades a se agrupar é o que cuantifica o coeficiente de *clustering*. O concepto ten a súa orixe na socioloxía e aparecía baixo o nome de "fracción de tripletes transitivos", [26], [27]. Relacións entre tres partes (tripleto) recíprocas (transitivas).

Centrémonos nun nó i da rede, que establece k_i conexións con outros k_i nós. Para cada veciño de i , habería $k_i(k_i - 1)/2$ posibles conexións entre os nós da veciñanza. A fracción entre o número E_i de conexións que realmente existen entre estes k_i nós e o número total posible $k_i(k_i - 1)/2$ dá o valor do coeficiente de clustering C_i do nó i , [28]:

$$C_i = \frac{2E_i}{k_i(k_i - 1)} \quad (2.3)$$

O valor deste coeficiente de agrupamento local será cero se os nós aos que está conectado o nó i non están conectados entre eles. Imaxinemos unha rede en forma de estrela onde o nó i ocupa o seu centro. O valor deste coeficiente de agrupamento será un se todos os veciños de i están conectados entre eles. Chámase clique a rede na que todos os nós están conectados con todos e, por tanto, cuxo coeficiente é un. Podemos pensar no coeficiente de agrupamento como unha medida de a que se aproxima máis a rede. A unha rede de estrela ou a unha rede de clique.

O coeficiente de clustering da rede enteira é a media de todos os coeficientes C_i de cada nó i . Semella que a meirande parte das redes reais, pensemos nas redes sociais, tenden a crear grupos dentro das

comunidades caracterizados por unha elevada densidade de nexos. A probabilidade de que estas formacións se manteñan e crezan tende a ser maior que a probabilidade media de que unnexo entre só dous nós aleatorios se estableza. Veremos máis adiante como Barabási e Albert teñen en conta esta ensamblaxe natural á hora de crear a súa rede modélica. O agrupamento é unha propiedade moi común nas redes sociais. Os círculos de amizade, as familias, onde todos os membros se coñecen, forman, así, un grupo na rede.

Lonxitude promedia de camiño, distribución de conectividade e o agrupamento, serán conceptos que nos servirán para agora poder amosar unha serie de redes teóricas que serven para traballar con diferentes agrupacións dentro da natureza. Imos falar de redes aleatorias, redes de mundo pequeno e redes libres de escala, dentro das que está a rede modélica Barabási-Albert que xa adiantamos neste apartado.

2.1.3 Redes aleatorias

As redes aleatorias son as redes que se describen cunha distribución de conectividades aleatoria e que se xeran con procesos aleatorios. Por exemplo, o xogo do 'amigo invisible' no que cada persoa ten que ofrecer un agasallo a outra persoa do grupo escollida ao azar. Na terminoloxía de redes, esta tamén será un xogo de rede dirixida.

En matemáticas o modelo canónico é o modelo Erdős-Rényi, [29]. O nome do modelo xorde dos matemáticos Paul Erdős e Alfréd Rényi que son os primeiros en introducir as redes aleatorias en 1959, xunto con Edgar Gilbert que acadou menos sona. No modelo Erdős-Rényi, fíxanse o número de nós e a conectividade de cada nó. A aleatoriedade introdúcese nas conexións nó-nó que se establecen. Esta é unha particulariedade do modelo Erdős-Rényi que non sempre se ten que cumprir. Como o número de conexións se fixan ao inicio, non hai dispersión na conectividade e, por tanto, non existe espallamento na distribución de conectividades.

Podemos, por exemplo, lanzar un número aleatorio e que ese número aleatorio dictamine se dous nós se unen. É a táctica usada na

nosa publicación *Turing instability in nonlinear chemical oscillators coupled via an active medium*, [30]. Na rede empregada neste artigo, as conexións se establecen de forma aleatoria, a maioría de nós teñen aproximadamente a mesma conectividade, próxima a conectividade media $\langle k \rangle$ da rede. Aquí si hai espallamento nas conectividades. A distribución da conectividade dunha rede aleatoria deste tipo é unha poissoniana co pico en $P(\langle k \rangle)$. Neste traballo, a aparición de estruturas organizadas no espazo débese a que se establece unha interdependencia entre especies químicas que reaccionan aleatoriamente no seo dun medio activo. Como por exemplo o peixe pallaso que vive nun matriarcado dentro dunha anemona. Os roles sexuais vanse rotando en relación ao resto de integrantes da comunidade. A femia lidera, seguida do macho e as crías asexuais. Cando ela morre, o macho ocupa o seu posto e a cría que o segue convértese no macho.

2.1.4 Redes de pequeno mundo

Nunha rede aleatoria, na que os nós teñen de forma aproximada o mesmo número de ligazóns, a exclusión dun nó aleatorio fai que aumente a probabilidade de que o camiño se volte máis curto de forma significativa, para calquera nó que sexa excluído. Neste sentido, as redes aleatorias son vulnerables a perturbacións aleatorias. Pola contra, existe un tipo de redes que resisten mellor e que, polo tanto, son máis robustas. As redes de pequeno mundo, do inglés *Small World*, son aquelas redes nas que a meirande parte dos nós non están conectados pero que moitos dos seus nós poden alcanzarse desde cada nó a través de poucos saltos. A lonxitude promedio do camiño é curta. Pensemos, por exemplo, nunha rede familiar. Os membros da familia coñécense todos. Unha aldea tamén poderíase modelizar cunha rede pequeno mundo. Temos pequenos corpúsculos familiares que se unen uns cos outros no espazo público. Chamaremos a estas conexións establecidas, por exemplo, dentro dun grupo familiar, de curto alcance e as que se establecen fóra de longo alcance.

Nas redes de pequeno mundo, as conexións de longo alcance

son poucas. En redes sociais, isto resulta no fenómeno do mundo pequeno no que xente que non se coñece acaba tendo nexos comúns que posibilitan o encontro. Como xa dixemos, moitas redes sociais amosan este efecto de pequeno mundo. Por exemplo, *Wikipedia*, a enciclopedia online máis visitada, ten unha estrutura de gran densidade cuxos artigos teñen miles de ligazóns e nos que perderse ou atopar información valiosa de forma fotuíta é moi común. É fácil perderse e pasar moitas horas lendo información que non ten nada que ver ou que non tiñamos intención de buscar de primeiras. Típico dunha rede pequeno mundo. *Wikipedia* é un exemplo clásico de rede pequeno mundo, pasar dunha pesquisa a outra que non ten nada que ver leva, de media, 4.5 'clicks' [31]. A arquitectura subxacente de Internet responde ben tamén a unha rede pequeno mundo. Pensemos na rede inicial de mensaxería establecida entre ordenadores do CERN que deu lugar a rede de redes. Todas as persoas máis que menos se coñecían. A adecuación de Internet á rede pequeno mundo pode deberse á variabilidade da conectividade dos nós e a preferencia polas conexións locais [32].

Fóra do ámbito social, podemos atopar outro caso de rede pequeno mundo na xenómica,[33], [34]. Por exemplo, análises en diferentes estadios do adenocarcinoma de pulmón, o tumor máis letal do mundo, revelan que os xenes marcadores de eventos canceroxénicos forman redes pequeno mundo [35]. A presenza de redes pequeno mundo a longo dos diferentes estadios cancerosos constitúen unha sincronización dentro da entorna desordenada do cancro e promove a metástase. Semella que estas redes pequeno mundo son resilientes a ataques externos . Isto indica que a efectividade dunha droga como intervención terapéutica é limitada. Isto débese a robustez das redes de pequeno mundo. Se nos atopásemos perante unha rede aleatoria que , como dixemos con anterioridade, é máis vulnerable a perturbacións aleatorias, o cancro sería máis fácil de combater.

Watts e Strogatz desenvolveron un modelo teórico para as redes de pequeno mundo [25]. A rede xérase do seguinte xeito. Dispóñense os N nós da rede en círculo e establécense tantas conexións como indique a conectividade k cos seus nós veciños. O parámetro p , $0 \leq p \leq 1$, regula a probabilidade que ten cada nó de reconectarse a nós máis distantes

no anel. Como vemos na figura 2.1, as redes que cumpren o criterio $0 < p < 1$ teñen propiedades de pequeno mundo.

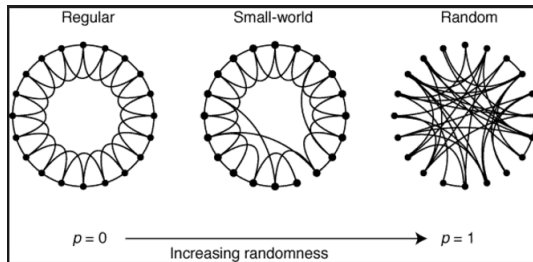


Figura 2.1: Rede Watts-Strogatz para diferentes valores do parámetro p . O estadio $p = 0$, ao que chaman rede Regular, é o caso no que todos os nós están conectados aos seus nós veciños. O estadio $p = 1$ correspóndese coa rede aleatoria na que a distribución de conectividades xerada a partir dun proceso aleatorio de conexións. O estadio intermedio $0 \leq p \leq 1$ é o caso de pequeno mundo. No caso pequeno mundo, dependendo da magnitude do parámetro p , os nós establecen a un certo número de liazóns cos seus nós veciños e, cunha probabilidade p , establecen liazóns con nós distantes do anel, [25].

2.1.5 Redes libres de escala

Amosar en que punto do rizoma [rede] se forman os fenómenos de masificación, de burocracia, de leadership, de fascitización, etc., que liñas persisten a pesar de todo, [36].

Vimos no apartado anterior como unha rede de pequeno mundo pode representar moi ben o comportamento relacional da xente que habita unha vila. Para poder modelizar unha cidade, coas súas heteroxenias, barrios, nichos, temos que recurrir a outro modelo matemático que albergue esa fragmentación toda.

As redes libres de escala son redes complexas cuxa distribución de conectividade segue unha lei de potencia, na que a meirande parte dos nós teñen poucas conexións en contraste coa existencia duns poucos

nós que presentan un elevado número de ligazóns. Son redes nas que na súa xénese predominan as conexións aos nós con conectividades máis elevadas. Deste xeito, nas redes libres de escala, dominan un número relativamente pequeno de nós o que denominamos *hub*. Así como as redes de pequeno mundo eran robustas a calquera perturbación aleatoria, fose no nó que fose, as redes libres de escala son, por norma, máis resistentes a fallas accidentais tamén pero vulnerables a ataques coordinados. A organización financeira dunha cidade verase máis afectada se a área administrativa sofre algún tipo de crise.

Nestas redes libres de escala a probabilidade de que un nó teña k unións decae cando k aumenta, segundo unha lei de potencia:

$$P(k) \sim k^{-\gamma} \quad (2.4)$$

onde γ é un parámetro cuxo valor está tipicamente no rango $2 < \gamma < 3$ aínda que as veces pode caer fóra deste rango.

O termo libre de escala xurdiu dun estudo [37] liderado por László Barabási na Universidade de Nôtre Dame en 1998 onde, ao mapear a *World Wide Web*, (*WWW*), [38], puideron verificar que 80% das páxinas web tiñan apenas 4 hiperligazóns e que aproximadamente 0.001% das páxinas tiñan máis de 1000 hiperligazóns. Practicamente ao mesmo tempo, unha observación semellante foi obtida polos irmáns Faloutsos en 1999, [39]. E máis tarde Broder et al. no 2000, [40], confirmaron os datos obtidos, a través dun mapeamento da Web nunha escala maior.

A *WWW* é unha rede na que os seus nós son documentos e as ligazóns son *URLs*, localizadores uniformes de recursos do inglés *Uniform Resource Locator*. O *URL* é un texto curto que identifica calquera recurso (servizo, páxina, documento, enderezo de correo electrónico, enciclopedia, ...) accesible a unha rede. Os *URLs* permítenos navegar cun "click" dun recurso a outro a través da rede. En 1991, a *WWW* contaba cun único nó, a primeira páxina web vislumbrada por Tim Berners-Lee. Cun tamaño estimado actual dun millón de millóns de documentos ($N = 10^{12}$), a *WWW* é a rede máis grande xamais creada polo ser humano. Excede incluso nunha orde a rede de neuronas do noso cerebro, $N = 10^{11}$, [41].

Non se pode menoscar a relevancia que a *WWW* ten no noso

día a día. Tampouco é esaxerado salientar o papel que a *WWW* xogou no desenvolvemento da teoría de redes. Facilitou a descuberta de características fundamentais das redes e converteuse nun paradigma para probar propiedades das redes.

Como xa adiantamos, o primeiro mapeo da *WWW* obtívose co obxectivo explícito de comprender cal era a estrutura que se agochaba detrás da rede e realizouno Hawoong Jeong no equipo de Barabási e Albert na Universidade de Nôtre Dame, [42]. Mapeou o dominio *nd.edu*. Artellábanos arredor de 300000 documentos e 1.5 millóns de ligazóns. Comparáronse as propiedades da *WWW* cun modelo de rede aleatoria. Nese ano, 1998 había motivos razoables para crer que a *WWW* se podía adecuar a unha rede aleatoria. O contido de cada documento reflexaba os intereses persoais e profesionais de individuos e organizacións que o creaban. Dada a diversidade destes intereses, as ligazóns destes documentos debían apuntar a que se conectaban de xeito aleatorio.

Un vistazo rápido ao mapa da figura 2.2 apoia esta hipótese. Parece haber aleatoriedade no enfiado dos documentos. Unha inspección máis minuciosa, revela un entramado diferente entre esta rede e unha aleatoria. De certeza, nunha rede aleatoria non aparecen nós altamente conectados. Porén, nesta rede da imaxe coexisten nós moi pouco conectados cuns poucos *hubs*, que recordamos que son nós cun elevado número de conexións.

Se a rede *WWW* fose unha rede aleatoria, a conectividade da rede de documentos seguiría unha distribución Poissoniana que non foi o caso. Porén, nunha escala log-log os puntos ordenábanse sobre una liña recta polo que podía estar a suxerir que a distribución de conectividade da *WWW* se aproximaba a unha distribución de potencias como a da expresión en 2.4. Nunha escala log-log, o expoñente γ é a pendente desa recta.

A rede *WWW* é unha rede dirixida xa que os seus documentos están caracterizados por unha conectividade de saída, k_{out} , e outra de entrada, k_{in} . Mantemos a notación saxona para ser fieis á literatura. A conectividade de saída representa o número de ligazóns que certo documento establece con outro. A conectividade de entrada son o

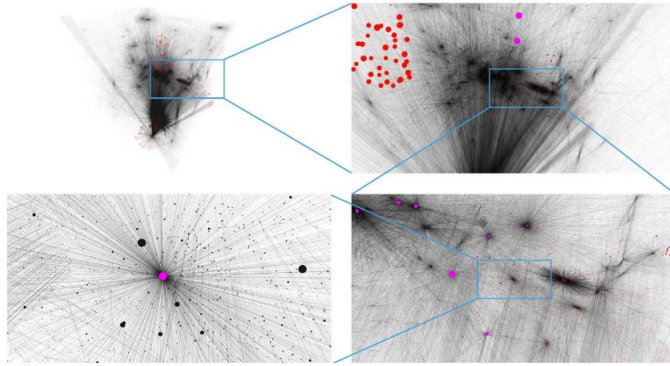


Figura 2.2: Topoloxía da *World Wide Web*. Capturas da mostra da *World Wide Web* mapeada por Hawoong Jeong en 1998, [42]. A secuencia de imaxes amosa unha zona cada vez máis magnificada da rede. No primeiro panel amósanse os 325729 nós e dá unha visión global da rede *nd.edu*. Os nós con máis de 500 ligazóns están coloreados en vermello e nós con máis de 500 ligazóns, en morado. Ao ir amplificando, revélase a presenza de nós altamente conectados ou *hubs* que apuntan a unha rede libre de escala. Extraído do texto de Barabási do 2014 sobre as propiedades das redes libres de escala [43].

número de documentos que apuntan cara certo documento. Se a rede fose non-dirixida este número diferiría. Así podemos distinguir dúas distribucións de conectividades. A probabilidade de que un documento escollido de forma aleatoria apunte a k_{out} documentos, ou $P(k_{out})$, e a probabilidade de que k_{in} apunten a certo documento ou $P(k_{in})$. Para a WWW, en ambos casos, $P(k_{out})$ e $P(k_{in})$ pódense aproximar por leis de potencia:

$$P(k_{in}) \sim k^{-\gamma_{in}} \quad (2.5)$$

$$P(k_{out}) \sim k^{-\gamma_{out}} \quad (2.6)$$

onde γ_{in} e γ_{out} son os expoñentes para as conectividade de entrada e de saída repectivamente. No caso da figura 2.2, temos $\gamma_{in} = 2.1$ e $\gamma_{out} =$

2.45. Os resultados, pois, amosan que a distribución de conectividades da *WWW* difiren abondo dunha Poissoniana que é a distribución que caracteriza as redes aleatorias. Estas redes son as que chamamos libres de escala. Este exemplo da rede *WWW* permítenos definir e comprender o que son as redes libres de escala:

As redes libres de escala son aquelas redes nas que a súa distribución de conectividades segue unha lei de potencias.

A diferenza principal entre unha rede aleatoria e unha rede libre de escala radica na cauda da distribución de conectividades, que representa a rexión das conectividades elevadas. Para valores pequenos das conectividade k , a lei de potencias sobrepassa a Poissoniana o que quere dicir que nas redes libres de escala hai un gran número de nós con poucas conexións, ausentes nas redes aleatorias. Para conectividades k na proximidade do valor medio $\langle k \rangle$, é a Poissoniana a que sobrepassa a lei de potencias. Isto indica que nas redes aleatorias ha un exceso de nós con conectividades similares ao valor medio, $k \sim \langle k \rangle$. Para valores elevados da conectividade k , a lei de potencias sobrepassa de novo a curva Poissoniana. Isto indica que a probabilidade de atopar nós con conectividades elevadas ou *hubs* é máis alta nunha rede libre de escala que nunha rede aleatoria. Con todo, o valor do expoñente γ da distribución de conectividades para as redes libres de escala, marca un afastamento ou achegamento desta rede á rede aleatoria. Canto máis alto sexa o valor de γ , máis se aproxima a distribución a unha Poissoniana; resulta indistinguible un modelo do outro.

Watts trataba as súas redes sociais como redes aleatorias no sentido de que as conexións entre os nós, individuos, se establecían de modo aleatorio. Entre tanto, Barabási introduciu a preferencialidade das unións. As redes tiñan unha orde na dinámica de estruturación. Dependía do grao de notoriedade ou popularidade que cada nó posuía. Ese padrón de estruturación respondía ao que Barabási expresou como '*rich get richer*' [44]. Os *hubs* ou nós cun número elevado de conexións marcan a diferenza entre unha rede aleatoria e unhas rede libre de escala.

2.1.6 O modelo Barabási-Albert para redes libres de escala

O mapa é aberto, conectable en todas as súas dimensións, desmontable, alterable, susceptible de recibir constantes modificacións. Pode ser roto, alterado, adaptarse a distintas montaxes, iniciado por un individuo, un grupo, unha formación social, [45].

Para explicar como sistemas tan diferentes acadan a mesma arquitectura, Barabási e Albert propuxeron un mecanismo dinámico que designaron unión preferencial para explicar o aparecemento de redes libres de escala. O mecanismo presentado tiña como idea base que o crecemento das redes obedecía a algunhas regras. Os novos nós adicionados á rede líganse de forma preferente aos nós con conectividade maior. Outro feito a ter en conta en comparación cos outros dous modelos explicados ata o de agora, o er para redes aleatorias e o Watts-Strogatz para redes de pequeno mundo, son o recoñecemento de que crecemento e conexións preferenciais coexisten nas redes reais.

Pártese de m_0 nós. As conexións entre eles establécense de maneira arbitraria de modo que cada nó teña, polo menos, unha conexión. A rede constrúese da forma seguinte:

- a Crecemento. En cada paso temporal, engádese un novo nó con $m \leq m_0$ conexións que se une a m nós existentes na rede.
- b Unión preferencial. A probabilidade de que o novo nó se conecte a un nó da rede i depende da conectividade k_i de dito nó:

$$P(k_i) = \frac{k_i}{\sum_i k_j} \quad (2.7)$$

A unión preferencial segue unha regra probabilística: un novo nó é libre de se conectar a calquera dos nós da rede. Porén, un novo nó ten unha maior probabilidade de se conectar a un nó de conectividade elevada.

Despois de t pasos de tempo, o modelo de Barabási-Albert xera unha rede de $N = t + m_0$ nós e $m_0 + mt$ conexións.

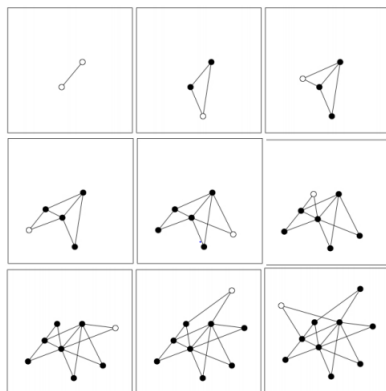


Figura 2.3: Evolución no tempo do modelo Barabási-Albert. A secuencia de imaxes amosa a emerxencia gradual de poucos nós moi conectados, ou hubs, a través da unión preferencial. Os círculos brancos marcan os novos nós adicionados á rede que deciden con quen establecer as súas ligazóns ($m = 2$) a través da unión preferencial[43].

Dinámica da conectividade

Para entender a evolución temporal do modelo Barabási-Albert, imos analizar a dependencia temporal da conectividade dun nó. No modelo, un nó ten a oportunidade de aumentar a súa conectividade cada vez que un novo nó chega a rede. Cando se engade un novo nó á rede, este unírase a m dos $N(t)$ nós presentes nese instante no sistema. O nó i ten m oportunidades de ser escollido pesado pola probabilidade de unión:

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = mP(k_i) = m \frac{k_i}{\sum_j^{N-1} k_j} \quad (2.8)$$

no denominador, suma sobre todos os nós da rede excepto o novo (empézase en $t = 1$):

$$\sum_j^{N-1} k_j = 2mt - m \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m \frac{k_i}{2mt - m} = \frac{k_i}{2t - 1} \quad (2.10)$$

para $t \rightarrow \text{inf}$

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{k_i}{2t} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial k_i}{k_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial t}{t} \quad (2.12)$$

Integramos e temos en conta que en t_i o nó i se une a m nós, $k_i(t_i) = m$:

$$\ln \frac{k_i(t)}{k_i(t_i)} = \frac{1}{2} \ln \frac{t}{t_i} \quad (2.13)$$

A conectividade de cada nó i segue a mesma lei de crecemento:

$$k_i(t) = m \left(\frac{t}{t_i} \right)^\beta \quad (2.14)$$

con $\beta = 1/2$. Canto antes se engada o nó, maior é a súa conectividade. A centralidade do nó destá moi vinculada ao momento en que o nó se aderiu á rede. Por tanto, o crecemento temporal da conectividade k_i de cada nó i :

$$\frac{dk_i(t)}{dt} = \frac{m}{2} \frac{1}{\sqrt{t_i t}} \quad (2.15)$$

que indica que nós máis antigos no tempo adquiren máis unións. Ademais, canto antes se engada o nó, máis central será a súa posición na rede.

Distribución da conectividade

O valor do parámetro γ das redes libres de escala na rede Barabási-Albert é $\gamma = 3$. Como rede libre de escala, esta distribución

é independente do tempo e do número de nós da rede e conexións m establecidas.

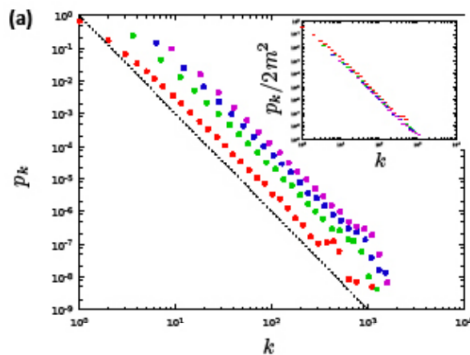


Figura 2.4: Distribución de conectividades para a rede Barabási-Albert. Mostra de que $P(k)$ é independente dos parámetros m e m_0 para unha rede de $N = 10^5$ e $m_0 = m = 1$ (red), 3 (green), 5 (blue) and 7 (purple). Que as curvas sexan paralelas indica que γ é independente de m e m_0 . A pendente da curva punteada é -3 [43].

Así como a lei de escala libre observada nas redes reais describe sistemas de diferetes tamaños en diferentes estadios de desenvolvemento, esperase que un modelo correcto proporcione unha distribución cuxa característica principal sexa a independencia co tempo. Como amosa a figura 2.5, $P(k)$ é independente co tempo e en consecuencia independente do sistema de tamaño $m_0 + mt$. Isto indica que, a pesar do seu crecemento continuado, o sistema se autoorganiza como un estado sen escala [38].

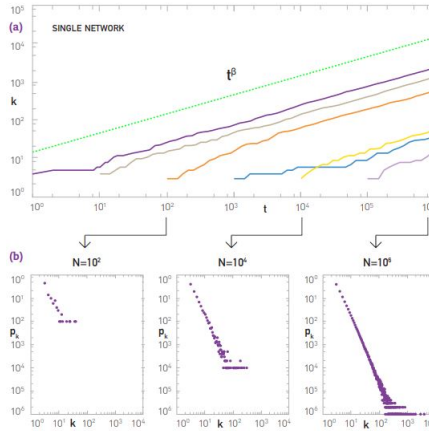


Figura 2.5: Dinámica da conectividade. **(a)** O crecemento da conectividade dos nós engadidos a tempos $t = 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$ (liñas continuas de esquerda a dereita) no modelo de Barabási-Albert. Cada nó aumenta a súa conectividade seguindo a lei preferencial. Como consecuencia, a cada paso temporal, os nós máis antigos teñen conectividades superiores. A liña punteada correspóndese coa predición analítica con $\beta = 1/2$ dada en 2.14. **(b)** Distribución de conectividades para a rede despois de engadir $N = 10^2, 10^4, 10^6$ para os tempos $t = 10^2, 10^4, 10^6$ sinalados con frechas. Canto maior é a rede, máis evidente se fai a lei de potencias natural das redes libres de escala. A distribución p_k amósase en escala linear para que se observe mellor a emerxencia dos estados libres de escala, [43].

2.2 Redes reais. Twitter

Neste capítulo, ata o momento, presentamos diferentes modelos que se empregan na literatura para describir comportamentos colectivos. Neste apartado, pretendemos amosar como grandes bases de datos nos poden permitir construír unha rede interactiva que despois podemos introducir nos nosos modelos. A evolución dos sistemas reactivos se verá modificada en relación a rede real que insertemos. Introducir unha rede real aproxímanos máis ao comportamento social que se pode

estar dando nun lugar concreto con circunstancias concretas. Podemos modelar cunha rede pequeno mundo unha vila da costa galega e unha vila da costa levantina pero as estruturas sociais de seguro non son as mesmas. De aí o poder de posuír eses datos locais. Só precisamos unha táboa de datos que identifique os nós e outra que identifique as conexións establecidas entre eles.

Twitter, (www.twitter.com), é unha rede social de balde creada no 2006 que ofrece un servizo de microblogueo. O microblogueo é un medio de transmisión en liña que existe como unha forma específica de blogueo. Un microblogueo diferénciase dun blogue tradicional porque o seu contido é normalmente menor tanto no tamaño do ficheiro real como no agregado.

Twitter lidera os sistemas de microblogueo. A idea é simple: unha caixa de texto para escribir mensaxes de ata 280 caracteres (antes 140) chamados *tweets* que se amosan na páxina principal da conta. Ademais de publicar mensaxes, en *Twitter* pódese seguir a outras persoas ás que chamamos *followers*. Por defecto, as mensaxes son públicas pero tamén se poden difundir de maneira privada de forma que só se amosen a seguidoras determinadas.

Parte moi importante do labor investigativo que realicei durante todos estes anos foi o manexo de grandes bases de datos de *Twitter*. A través da aplicación do paquete de *Office NodeXL*, [46], descargamos grandes bases de datos da rede social que despois visualizamos con Gephi, [47], ou puidemos correr nos nosos sistemas dinámicos ao transformar a información en matrices Laplacianas.

Facebook, a rede social máis grande do mundo, con 2701 millóns de contas rexistradas. *Facebook*, ademais, posúe *Whatsapp* e *Instagram*, que están na cúspide das 6 con máis de 1 millón de contas rexistradas, [48]. Ningunha delas facilita os seus datos, polo menos non cunha ferramenta de acceso libre. É por iso que nos decantamos por *Twitter*. Salientamos a escolla de *Twitter* como exemplo de rede social real pola accesibilidade dos seus datos.

Twitter pode ser un indicador da axitación social en Internet. No traballo *Incorporating social opinion in the evolution of an epidemic spread* [17], empregamos unha rede de redes de *hashtag* de *Twitter*.

Construímos dúas redes. Unha dun momento previo a epidemia do COVID-19, outubro de 2019, e outra dun momento do primeiro confinamento, abril 2020. Despois, esa rede meteuse nun modelo epidemiolóxico tipo SIR [16]. Substraéronse dous resultados. Primeiro, que a epidemia se propaga menos se se establece algún tipo de control sobre a poboación. Segundo, que, durante o confinamento, o nivel de axitación social era menor e que, por tanto, a epidemia era máis facilmente controlable.

Na figura 2.6 amósanse as dúas redes de *hashtag* creadas para os dous momentos, antes e durante a epidemia. A figura *c* é a distribución de conectividade axustada segundo unha rede teórica libre de escala. A rede de outubro ten un coeficiente γ menor. Isto implica que é unha rede libre de escala "máis pura" onde existe unha xerarquización máis acusada e, por tanto, *hubs* con maior influencia sobre o resto. A rede do comezo da pandemia, ten un coeficiente γ maior o que a aproxima máis a unha rede aleatoria onde non hai nós preferenciais. Neste caso, os intercambios son máis comuniais e horizontais con menos xerarquías e propagar una idea neses tempos era máis doado xa que redes dese tipo facilitan a propagación.

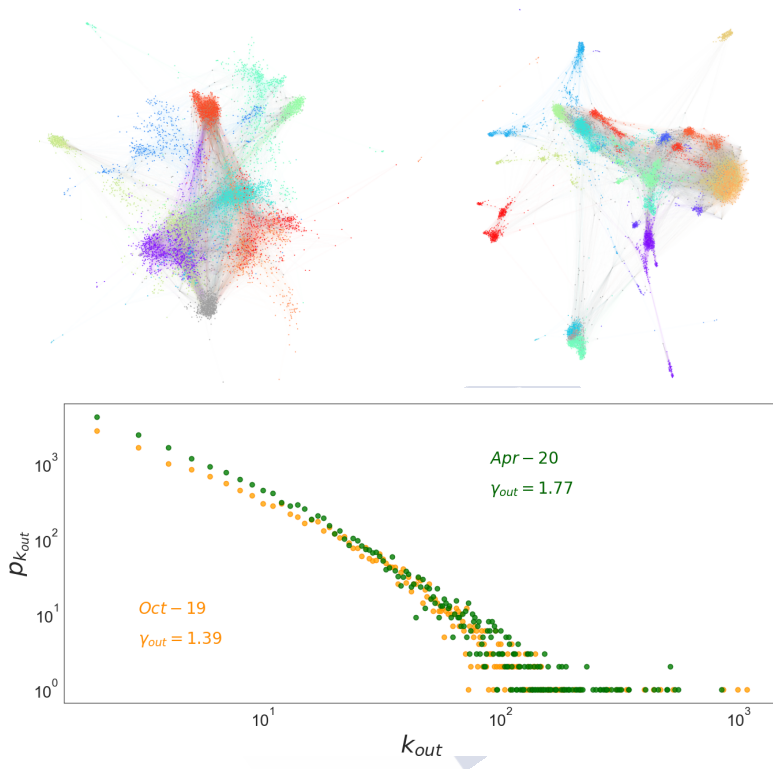


Figura 2.6: Estrutura da rede de redes de *hashtag* de *Twitter*. (a) Rede de *Twitter* de outubro de 2019. (b) Rede de *Twitter* de abril de 2020. Cada cor marca as diferentes subredes de *hashtag*. As contas coloreadas en gris marcan as contas ponte. Os enlaces teñen a cor da conta de orixe. (c) Distribución de conectividade das dúas redes. Usouse o algoritmo *ForceAtlas2* de *Gephi* para xerar as dúas representacións. O algoritmo *ForceAtlas2* estimula o sistema físico para organizar a rede no espazo segundo o balance de forzas. Os nós repélense uns douros outros como se fosen partículas coa mesma carga eléctrica mentres os enlaces atraen os nós cunha forza elástica que segue a lei de Hooke. Nós máis distantes intercambian menos información [17].

Capítulo 3

Inestabilidade de Turing deslocalizada

3.1 Inestabilidade de Turing

En 1952 Alan Turing suxire que, ante certas condicións, dúas ou máis especies químicas poden reaccionar e difundirse coa consecuente xeración de padróns espaciais heteroxéneos estacionarios no tempo.

Unha reacción química é un proceso polo cal dúas ou máis especies, os reactivos, interactúan para dar lugar a novas especies, os produtos. A reacción provoca a reorganización dos átomos que compoñen os reactivos para dar lugar aos produtos. A difusión é un proceso físico derivado dunha asimetría espacial ou perturbación das concentracións das especies presentes. A asimetría implica un gradiente de concentracións que se anula mediante o fluxo das especies. As ecuacións que describen este proceso físico-químico son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v) + \nabla^2 u$$

(3.1)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v) + d\nabla^2 v$$

onde u e v son densidades locais das especies activadora e inhibidora, respectivamente. Activadora porque activa a reacción e inhibidora porque a inhibe. Os primeiros termos da ecuación recollen o proceso químico. As funcións $f(u, v)$ e $g(u, v)$ especifican a cinemática do activador, que autocatalíticamente aumenta a súa concentración, e a cinemática do inhibidor que reprime o aumento do activador. Os segundos termos recollen o proceso físico: Turing demostrou que a razón das constantes de difusión das especies activadora D_u e inhibidora D_v , ($d = D_v/D_u$), pode desestabilizar o estado uniforme inicial e así emerxer, de forma espontánea, padróns espaciais. Altérganse zonas ricas e pobres en activador. As condicións que se deben cumprir para que no sistema xurda a inestabilidade son:

- 1) En ausencia de difusión, u e v evolucionan a un estado estacionario estable e uniforme.
- 2) Con difusión, é dicir, con perturbación espacial, o punto fixo desestabilízase e aparecen as estruturas de Turing.

Así, ao contrario do que podemos intuír, Turing demostra que a difusión sexa un proceso que anula un gradiente de concentracións é dicir unha asimetría espacial non implica que reestableza a situación de estabilidade uniforme inicial senón que pode dar lugar a unha nova asimetría estacionaria. A difusión non é un proceso estabilizador en si. A difusión pode dar lugar a novas estruturas estables que denominamos estruturas de Turing. O fenómeno recibe o nome de inestabilidade de Turing xa que as novas estruturas derivan dunha perturbación do medio. Este mecanismo é de gran importancia porque na actualidade

se considera o mecanismo diferenciador que a natureza emprega para xerar estruturas e atópase presente en multitude de sistemas, que exemplificamos no apartado seguinte.

3.1.1 Inestabilidade de Turing como mecanismo diferenciador

En 1971, Othmer e Scriven [49] suxiren unha teoría máis xeral que a proposta por Turing. Inestabilidades dinámicas nos procesos reactivo-difusivos en grupos de células intercomunicadas podían facer emerxer padróns e oscilacións periódicas. Othmer e Scriven estaban a falar de que a inestabilidade de Turing podía darse en sistemas organizados en redes. A estrutura da rede influenciaría a interacción entre as reaccións químicas intracelulares e as transferencias difusivas intercelulares e, así, a estabilidade do estado estacionario da rede. Con esta teoría, os efectos dos cambios na topoloxía da rede, pódense tratar de xeito sistemático. Esta interconexión celular, cun equilibrio entre a reacción intracelular e a difusión intercelular, debe xogar un papel fundamental nos estadios temperáns da morfoxénese biolóxica, xa que os morfoxenes se difunden a través de conexións intercelulares.

Un sistema, homoxéneo de orixe, pode, máis tarde, desenvolver padróns ou estruturas debido a unha inestabilidade no equilibrio homoxéneo, disparado por unha perturbación aleatoria [50]. A rotura espontánea da simetría desestabiliza o sistema e xera gradientes que se resollen cos procesos difusivos que nos ocupan. Organismos multicelulares primixenios puideron usar a rotura espontánea da simetría como estratexia para definir o seu eixo embrionario, [51]. A orientación da polaridade do cigoto pode deberse a numerosos gradientes ambientais, como a luz ou a gravidade.

O exemplo tipo é o caso do animal invertebrado hidra. Hidra é un organismo que nos serve de mostra de como a rotura espontánea da simetría é un aspecto crucial na autoorganización e formación de padróns. *Hydra vulgaris* é un pólipo de augas doces de 1cm de longo con forma cilíndrica cunha boca rodeada de tentáculos dun lado e un pé do outro. O corpo está composto dunha bicapa de células en continua

proliferación. As células que se orixinan no corpo cilíndrico, migran ás extremidades onde se diferencian de xeito irreversible e forman tecidos especializados antes de morrer.

O desenvolvemento de hidra está controlado por un grupo pequeno de células localizadas na parte apical da cabeza. Este grupo de células constitúen o chamado "organizador da cabeza" (*head organizer*) e os sinais xerados nesta rexión transmítense ao corpo para establecer un gradiente de información posicional que organiza e padroniza o animal. O primeiro equipo en estudar o mecanismo diferenciador da hidra foi o de Belousov [52]. Na súa rexeneración, a hidra primeiro forma unha bóla oca formada por una bicapa celular. A simetría esférica rómpese en estadios avanzados do desenvolvemento cando a hidra crea un punto máis débil na bóla oca. Como resultado desta rotura da simetría, a hidra desenvolve un grupo de células diferenciadas irreversibles que constitúen o centro organizador da cabeza. Esta e a primeira estrutura en se formar. Tras disto, xérase a cabeza, os tentáculos e o pé. Turing foi o primeiro en recoñecer a relevancia do proceso reactivo-difusivo no proceso de morfoxénese da hidra [50].

Queremos ilustrar con fermosos exemplos do xurdimento de estruturas de Turing debido a un intercambio de información co medio. Velaí a nosa inqueda por coñecer e indagar máis sobre os nosos comportamentos como rede. A natureza é rede. Con tan só 2mm de diámetro, *Volvox carteri* é unha colonia de algas unicelulares que se xuntan para operar como un único organismo [53], [54].

En 1700, Antoni van Leeuwenhoek foi o primeiro en observar *Volvox*, [55]. Leeuwenhoek é coñecido por ter inventado o microscopio e máis polo seu traballo pioneiro nas áreas da bioloxía celular e da microbioloxía. Está considerado como un dos primeiros microscopistas e microbiólogos. Foi o primeiro en observar e describir organismos unicelulares.

Pénsase que *Volvox* desenvolveu o seu estilo de vida colonial hai 200 millóns de anos, durante o Triásico, [56], período onde aparecen os primeiros mamíferos.

Volvox non só fascina ao mundo da bioloxía senón que se converteu en organismo modelo para a investigación sobre o paso

da vida unicelular a pluricelular de interese noutros eidos, como no noso: a física. *Volvox* é un fermoso exemplo de estrutura de Turing deslocalizada. Inestabilidade de Turing pola morfoxénese da colonia a partir de organismos unicelulares e deslocalizada pola necesidade da rede que as interconecta.

Outro paradigma de autoorganización en redes son os sifonóforos, *Siphonophora*. Dentro dos sifonóforos podemos atopar ata 175 especies con diversidade en formas e tamaños dependendo do hábitat no que habiten. Os sifonóforos de maiores dimensións [57], [58] viven nas profundidades dos océanos e son un dos animais máis longos da Terra, poden chegar a medir 40m. *Siphonophora* funciona como unha máquina con diferentes partes altamente especializadas. Algunhas partes cazan, outras dixiren, outras reproducen e outras nadan. Algunhas son bioluminiscentes. Entre os sifonóforos atopamos unha especie do xénero *erenna* que é unha das dúas únicas especies animais que emite bioluminescencia vermella. Polo que os sifonóforos tamén viven como colonia.

Xa temos dous exemplos de colonias de organismos unicelulares para ilustrar a inestabilidade de Turing. Unha alga, *Volvox*, e un animal, *Siphonophora*. As bacterias tamén poden formar colonias chamadas biofilms e comunicarse a través do *quorum sensing* [59]. *Quorum* é un cultismo que nos chega do latín e refírese ao número de persoas necesarias para poder tomar decisións. En bioloxía, *quorum sensing* é a habilidade de modificar a regulación xenética ao detectar cambios na densidade de poboación celular. O *quorum sensing* permite ás bacterias restrinxir a expresión de certos xenes ante un aumento na densidade celular polo que o fenotipo será máis beneficioso. Algúns destes biofilms que forman polo *quorum sensing* especialízanse. Por exemplo, comunidades de *Cellulophaga lytica* emiten diferentes cores e as unidades iridiscentes elementais son similares en tamaño a subcomunidades de células bacterianas [60]. Estánse autoorganizando e formando padróns.

Ademais da sabida regulación da inestabilidade de Turing na morfoxénese nos primeiros estadios da maduración, outros procesos que responden ao mesmo mecanismo de especialización están a

ter lugar a diario no interior do noso corpo: o crecemento do pelo, a rexeneración da pel, ... A pesar de que as células están compartimentalizadas, pódense comunicar unhas coas outras para regular a expresión xenética que marca o inicio dun novo ciclo de desenvolvemento. Está a operar o mesmo *quorum sensing* bacteriano. Outro exemplo de especialización de Turing é a hematopoiese [61]. A hematopoiese xera toda a variedade de compoñentes celulares do sangue a partir de células nai indiferenciadas. E isto só é posible grazas a ocorrencia do proceso dentro do sangue. Ser parte do ambiente e reaccionar nel e con el, modifica certos comportamentos colectivos.

Para asentarse nas súas entornas, como a galiña da que falabamos ao inicio deste capítulo, os acentros diversifícanse. Puido acontecer isto na especialización temperá de fotótrofos e heterótrofos dun ancestro mixótrofo, capaz de obter enerxía tanto de fontes inorgánicas como de orgánicas [62]. A mixotrofía está amplamente estendida nos protistas planctónicos. De seguro, o plancto, segundo a dispoñibilidade enerxética do ambiente, pode reaxustar a súa estratexia trófica, autótrofa ou heterótrofa [63]. Recordemos que o plancto é a base da cadea trófica oceánica e contribúe con case a metade da produción primaria da Terra. Así pois, o plancto é tan crucial no ciclo do carbono como todas as plantas terrestres xuntas [64] e, por tanto, modulador do cambio climático a ter en conta [65].

Subindo en complexidade, os animais sociais forman comunidades en entornas moi concretas. Fóra das coñecidas formigas e abellas, o peixe pallaso, por exemplo, vive en matriarcados formados por unha femia líder, un macho e o resto de peixes pallaso asexuais que coidan dos ovos e a anémona onde viven [66]. Cando a femia morre, o macho cambia de sexo e convértese na líder e o máis forte dos peixes pallasos, no macho.

Turing non menciona en ningún momento as redes pero están implícitas na súa análise. Para que exista difusión debe existir algún tipo de interacción entre as especies que están a reaccionar. Definidos os conceptos de matriz de adxacencia A_{ij} e de conectividade k_i co capítulo adicado a redes, podemos comezar a trasladar o formalismo da inestabilidade de Turing dos medios continuos ao espazo discreto

reticular.

3.1.2 Inestabilidade de Turing deslocalizada

Turing estableceu as condicións necesarias para que as estruturas de Turing emerxeran nun medio continuo. O que non sopesou é que este era un caso particular do caso máis xeral que é comprender que os elementos na natureza interactúan a través de redes. O medio continuo é unha rede sinxela na que os seus constituíntes establecen conexións de curto alcance. Imos ampliar o formalismo matemático ao espazo discreto propio das redes. No espazo continuo, o transporte difusivo aparece debido a un gradiente de concentracións:

$$j_u = D_u \nabla^2 u(x, t) \quad (3.2)$$

$$j_v = D_v \nabla^2 v(x, t)$$

Denomínase Lei de Fick a aparición dese fluxo difusivo j_u e j_v debido ao gradiente das especies u e v no espazo x e tempo t . D_u e D_v son os coeficientes difusivos das especies u e v respectivamente.

No espazo discreto a localización específica x desaparece e só serán necesarias as relacións que se establecen entre os distintos nós. A matriz de adxacencia A_{ij} dá información das conexións entre os N nós que compoñen a rede. Usemos A_{ij} para definir o fluxo difusivo en medios discretos:

$$j_{u,i} \sim \sum_{j=1}^N A_{ij} (u_j - u_i) \quad (3.3)$$

O fluxo $j_{u,i}$ da especie activadora u no nó i e proporcional as diferenzas de concentracións entre todos as concentracións dos nós j conectados co nó i . A matriz de adxacencia A_{ij} anula os fluxos

entre os nós que non están conectados e permite os fluxos entre os nós conectados. Buscamos unha expresión máis elegante:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N A_{ij}(u_j - u_i) &= \sum_{j=1}^N A_{ij}u_j - u_i \sum_{j=1}^N A_{ij} = \\ &= \sum_{j=1}^N A_{ij}u_j - u_i k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij}u_j - k_i \sum_{j=1}^N \delta_{ij}u_j \end{aligned} \quad (3.4)$$

No caso da especie inhibidora v_i faríase de igual modo. Introducimos a definición da ecuación (2.1) da conectividade e a definición da delta de Kronecker no segundo termo. Agora definimos o operador Laplaciana L_{ij} que nos serve para expresar o fluxo difusivo dun xeito máis compacto. A Laplaciana substitúe a nabla nos medios discretos:

$$L_{ij} = A_{ij} - k_i \delta_{ij} \quad (3.5)$$

Vemos que a Laplaciana L_{ij} contén información das conexións que se establecen entre os distintos nós a través da matriz de adxacencia A_{ij} pero tamén o número de conexións que cada nó ten a través da conectividade k_i . O operador Laplaciana L_{ij} dá conta das conexións existentes entre os N nós da rede e ademais da súa centralidade na rede. Queremos facer notar que o operador L_{ij} existe na literatura matemática pero co signo oposto. Diremos que nos interesa usalo con este signo para que a expresión nas ecuacións quede cun signo positivo. Así, o fluxo en medios discretos pódese escribir de forma sincrética como:

$$j_{u,i} = \sum_{j=1}^N L_{ij}u_j \quad (3.6)$$

$$j_{v,i} = \sum_{j=1}^N L_{ij}v_j$$

Onde $j_{u,i}$ é o fluxo da variable u no nó i debido a existencia dun gradiente de concentracións entre un total de N nós que compoñen a rede. A difusión só se dará se existe unha diferenza de concentracións entre nós conectados. A información da existencia de conexións e o número delas albégaa a matriz Laplaciana L_{ij} .

Por tanto, as ecuacións que gobernan un sistema activador-inhibidor en redes cun mecanismo reactivo-difusivo que posibilita a aparición de estruturas de Turing son:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i = f(u_i, v_i) + \varepsilon \sum_{j=1}^N L_{ij} u_j \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_i = g(u_i, v_i) + \varepsilon \sigma \sum_{j=1}^N L_{ij} v_j$$

A evolución da especie activadora u_i depende do seu proceso reactivo $f(u_i, v_i)$ que pode ter dependencia das dúas especies activas e depende tamén das perturbacións que poidan existir na súa concentración dentro do sistema interconectado ao que pertenza. A difusión só terá lugar entre nós que estean conectados cun peso ε , no caso da especie activadora, que é a constante que asignan Mikhailov et al. [67] para o coeficiente difusivo: $\varepsilon = D_u$ para a especie u e $\sigma = D_v/D_u$ é a razón dos coeficientes difusivos.

$f(u_i, v_i)$ e $g(u_i, v_i)$ representan a cinemática local do sistema activador-inhibidor en cada nó e deben cumprir a primeira e a segunda condición de Turing.

3.1.3 Análise de estabilidade linear

Para poder predicir a evolución dun sistema dinámico, achegámonos ás proximidades dun punto fixo estable do mesmo. Observamos como evoluciona o sistema ao longo das variables das que depende, polo que vai haber derivadas involucradas no cálculo. Chamamos a este procedemento análise de estabilidade linear, linear en

tanto que nos achegamos ao comportamento linear nas proximidades do punto fixo estable e desprezamos comportamentos de ordres superiores. En redes, a análise de estabilidade linear realízase de xeito análogo ao caso de medios continuos. É máis, a análise para redes é o caso xeral como veremos a continuación. No caso clásico de medios continuos, as perturbacións descompóñense nun conxunto de modos de Fourier que representan ondas planas con diferentes números de onda [67]. Nunha rede, o papel das ondas planas e dos números de onda xógano, respectivamente, os autovectores $\Phi^\alpha = (\Phi_1^\alpha, \dots, \Phi_N^\alpha)$ e autovalores Λ_α , $\alpha = 1, \dots, N$ da matriz laplaciana L_{ij} :

$$\sum_{j=1}^N L_{ij} \Phi_j^\alpha = \Lambda_\alpha \Phi_i^\alpha \quad (3.8)$$

Esta expresión define os autovalores Λ_α e autovectores Φ_i^α da matriz Laplaciana L_{ij} . Ao aplicar o operador Laplaciana L_{ij} sobre os vectores Φ_i^α , estes non cambian a súa dirección e o factor polo que cal se dilataron son os autovalores Λ_α , $\alpha = 1, \dots, N$. Pensando no proceso difusivo, conectar o sistema de N dun xeito concreto determinado pola matriz Laplaciana L_{ij} introduce direccións preferenciais de deformación dadas polos autovectores cunhas amplitudes de deformación dadas polos autovalores. Todos os autovalores Λ_α son reais e negativos.

As perturbacións δu_i e δv_i toman a forma:

$$\delta u_i = C_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \Phi_i^\alpha \quad (3.9)$$

$$\delta v_i = C_\alpha B_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \Phi_i^\alpha$$

O primeiro paso para realizar a análise de estabilidade linear é obter o punto fixo estable do sistema. Con ese fin, buscamos a solución estacionaria e anulamos a cinemática, $f(u, v) = g(u, v) = 0$,

que converxe a un punto fixo. Para saber se é estable, hai que establecer un modo de determinar como a cinemática varía con u e v . A esta pregunta responde unha derivada. Interésanos linearizar a cinemática para ver a dependencia multivariable. Escribimos a matriz Jacobiana do sistema:

$$J = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Onde f_u é a derivada parcial de f con respecto a u e así para o resto de funcións e variables. Queremos analizar a estabilidade do punto fixo polo que a Jacobiana debe de evaluarse no punto fixo acadado con anterioridade. Obtemos os autovalores asociados a Jacobiana. Se ámbolos dous son negativos quere decir que baixo esa cinemática, na entorna do punto fixo, as traxectorias de evolución caen no val de atracción do punto fixo. De forma intuitiva, un punto fixo é estable se para calquera traxectoria o suficientemente próxima ao punto no momento inicial, por exemplo a unha distancia pequena δ , permanece próxima ao punto para todo tempo, é dicir, a traxectoria permanece sempre dentro dun círculo de centro o punto e radio moi pequeno.

Unha vez temos un punto fixo e estable, queremos ver como se comporta o sistema acoplado a unha rede. O estado perturbado $(u_i, v_i) = (u_0, v_0) + (\delta u_i, \delta v_i)$ introdúcese nas ecuacións 3.7 linearizadas en torno ao punto fixo (u_0, v_0) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta u_i = f_u \delta u_i + f_v \delta v_i + \varepsilon \sum_{j=1}^N L_{ij} \delta u_j \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta v_i = g_u \delta u_i + g_v \delta v_i + \varepsilon \sigma \sum_{j=1}^N L_{ij} \delta v_j$$

Introducimos as definicións das perturbacións 3.9 nas ecuacións linearizadas do sistema:

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha C_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \Phi_i^\alpha &= f_u C_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \Phi_i^\alpha + f_v C_\alpha B_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \Phi_i^\alpha + \varepsilon \sum_{j=1}^N L_{ij} C_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \Phi_j^\alpha \\ \lambda_\alpha C_\alpha B_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \Phi_i^\alpha &= g_u C_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \Phi_i^\alpha + g_v C_\alpha B_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \Phi_i^\alpha + \varepsilon \sigma \sum_{j=1}^N L_{ij} C_\alpha B_\alpha e^{\lambda_\alpha t} \Phi_j^\alpha\end{aligned}\tag{3.12}$$

Dividimos por $C_\alpha e^{\lambda_\alpha t}$ e usamos a definición de autovalor da rede dada pola ecuación 3.8. O resultado son N ecuacións linearmente independentes para os distintos modos normais α :

$$\lambda_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ B_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u + \varepsilon \Lambda_\alpha & f_v \\ g_u & g_v + \varepsilon \sigma \Lambda_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ B_\alpha \end{pmatrix}\tag{3.13}$$

O factor de crecemento é o autovalor asociado á matriz $J_{ampliada}$, ecuación 3.14, e é un medidor do ritmo de evolución coa que se acada o novo estado estacionario tras unha perturbación. Canto maior é o valor absoluto do factor de crecemento, máis rápido se acada o novo estado estacionario.

$$J_{ampliada} = \begin{pmatrix} f_u + \varepsilon \Lambda_\alpha & f_v \\ g_u & g_v + \varepsilon \sigma \Lambda_\alpha \end{pmatrix}\tag{3.14}$$

Observamos que chamamos a matriz asociada os factores de crecemento Jacobiana ampliada. Esta matriz é equivalente a matriz Jacobiana da ecuación 3.10 cuns termos na diagonal asociados á rede difusiva. Se anulamos a difusión, $\varepsilon = 0$, o problema redúcese á análise dos autovalores da Jacobiana. Por iso dicimos, que o caso de redes é un caso xeral de medios continuos.

Entón, o factor de crecemento λ_α é un medidor do ritmo co que

evoluciona o sistema a un novo estado estacionario. Ademais, danos información sobre a existencia ou non da inestabilidade de Turing. A inestabilidade de Turing aparece cando, polo menos, a parte real do factor de crecemento é positiva para algún dos modos α , $Re(\lambda_\alpha) > 0$, $\alpha = 1, \dots, N$.

3.2 A constante difusiva e o seu significado

As ecuacións reactivo-difusivas amosadas con anterioridade, describen moi ben migracións dunha especie A dun territorio de orixe x a outro destino y debido, por exemplo, a falta de recursos no territorio de orixe. Que pasa se existe unha especie B que tamén compite por eses recursos? como podemos modificar as nosas ecuacións reactivo-difusivas para modelizar a interacción das especies A e B non por como reaccionen senón por como se difundan para reestablecer equilibrios?

Realicemos un desenvolvemento a segunda orde das ecuacións reactivo-difusivas do sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_i &= f(u_i, v_i) + \sum_{j=1}^N L_{ij}(\varepsilon + a_{11}u_j + a_{12}v_j)u_j \\ \frac{\partial}{\partial t} v_i &= g(u_i, v_i) + \sum_{j=1}^N L_{ij}(\varepsilon\sigma + a_{21}u_j + a_{22}v_j)v_j \end{aligned} \quad (3.15)$$

Os termos a_{11} e a_{22} son correccións a segunda orde do termo difusivo en ε . Podémoslos chamar termos de autodifusión. Os termos a_{12} e a_{21} fan referencia á difusión cruzada.

Se os termos de autodifusión son positivos, $a_{11}, a_{22} > 0$, significa que as especies se moven cara nós onde a súa concentración é menor, con maior magnitude que para a difusión simple en ε . Acudir a un mitin político ou ir a un concerto son exemplos de autodifusión. Se estes coeficientes son negativos, $a_{11}, a_{22} < 0$, as especies móvense cara nós onde a súa concentración é maior como acontece nos 'ghetto' ou áreas de concentración de minorías, hospitais psiquiátricos, cárceres,

... Todas as tribus urbanas ou os movementos de música e danza urbana exemplifican a autodifusión negativa, lugares de seguridade e autoafirmación de identidades oprimidas. Recordemos os movementos feministas ou LGTBI+ nos seus comezos.

Os parámetros de difusión cruzada regulan difusión onde hai unha competición entre as dúas especies implicadas polo espazo ocupado. Se son os parámetros de difusión cruzada os que son positivos, $a_{12}, a_{21} > 0$, significa que, por exemplo, a especie A se move cara a outro nó se a concentración da especie contraria B é inferior no nó de destino como no 'bullying'. Pola contra, se a difusión cruzada é negativa, $a_{12}, a_{21} < 0$, significa que o fluxo se opón ao gradiente. A especie A migra cara nós onde a concentración da especie B é maior. Unha araña devorada ao caer no seo dunha colonia de formigas. A nivel social, pensemos nas migracións en distintos momentos do século XX cara as Américas ou cara Europa Central. Un grupo minoritario dunha cultura diferente que chega a núcleos industriais con supostas grandes oportunidades laborais. Os nas migracións actuais que cruzan Europa. Ou as invasións, guerras e bombardeos: Iraq, Guernica, Vietnam, Hiroshima e Nagasaki, ... O tráfico humano ou o terrorismo...

Nun contexto lingüístico, introducir difusión cruzada pode permitir a coexistencia de linguas, [19]. Para entendela, situémonos na Galiza de inicios do século XX. A migración galega cara Nova Iorque pódense parametrizar cunha constante de difusión cruzada negativa, $a_{12} < 0$. Unha comunidade pequena, neste caso galega, migra cara un territorio ocupado por unha comunidade moito maior cunha cultura dominante e hexemónica e aínda así consegue se asentar e manter as súas formas culturais, nas que se inclúe a lingua.

Moitas veces, un desenvolvemento a primeira orde non basta para acadar a inestabilidade de Turing porque a condición necesaria de que o factor de crecemento sexa negativo en módulo non se dá. Realizar un desenvolvemento a segunda orde pode resolver o problema. Pódese precisar da difusión cruzada para que apareza a inestabilidade de Turing, [68]. Encontramos traballos, por exemplo, cun modelo predador-presa no que introducir autodifusión favorece a aparición das estruturas, [69].

Vemos que introducir esta corrección de segunda orde no modelo abre un grande abano de fenómenos biolóxicos e sociais que se poden analizar baixo o prisma dun sistema reactivo-difusivo. Do mesmo modo que analizamos a estabilidade linear nas ecuacións de primeira orde, tamé o podemos facer aquí. Como a diferenza é na magnitude, anulamos os termos a_{11} y a_{22} para sincretizar a análise. Primeiro que todo, calculamos os autovalores da rede que son independentes do proceso difusivo, ecuación 3.8. Linearizamos en torno ao punto fixo u_0, v_0 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \delta u_i &= f_u \delta u_i + f_v \delta v_i + \sum_{j=1}^N L_{ij} ((\varepsilon + a_{11} u_0 + a_{12} v_0) \delta u_j + a_{12} u_0 \delta v_j) \\ \frac{\partial}{\partial t} \delta v_i &= g_u \delta u_i + g_v \delta v_i + \sum_{j=1}^N L_{ij} (a_{21} v_0 \delta u_j + (\varepsilon \sigma + a_{21} u_0 + 2a_{22} v_0) \delta v_j)\end{aligned}\tag{3.16}$$

Introducimos as perturbacións que definimos en 3.9, dividimos por $C_\alpha e^{\lambda_\alpha t}$ e usamos a definición de autovalor da rede dada pola ecuación 3.8. O factor de crecemento é o autovalor asociado á matriz:

$$\begin{pmatrix} f_u + (\varepsilon + a_{11} u_0 + a_{12} v_0) \Lambda_\alpha & f_v + a_{12} u_0 \Lambda_\alpha \\ g_u + a_{21} v_0 \Lambda_\alpha & g_v + (\varepsilon \sigma + a_{21} u_0 + a_{22} v_0) \Lambda_\alpha \end{pmatrix}\tag{3.17}$$

Que é equivalente a matriz $J_{ampliada}$, ecuación 3.14, se anulamos os termos de difusión cruzada. Introducir difusión cruzada pode modificar o signo do factor de crecemento e así a estabilidade do sistema.

Daquela tanto a estrutura da rede como as formas en que se difundan as especies, isto é, as magnitudes e signos das constantes difusivas (ε , σ , a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22}) poden estar detrás da emerxencia de estruturas autoorganizadas. No traballo que realizamos *Turing instability in nonlinear chemical oscillators coupled via an active medium*, [30], a aparición de estruturas organizadas debíase á

Capítulo 3. Inestabilidade de Turing deslocalizada

rede, que analizaremos con máis detalle no capítulo de redes, pero tamén do proceso difusivo de migración das especies químicas. O parámetro da difusión cruzada debía ser negativo para o xurdimento da inestabilidade de Turing.



Hipótese e obxectivos





Se somos quen de transformar datos en matrices de adxacencia A_{ij} , a obtención da matriz de difusión Laplaciana L_{ij} é directa a través da conectividade k_{ij} , 3.5. Unha vez temos a rede, podemos acoplala á dinámica que queiramos. A análise do sistema reactivo-difusivo orixinado permitiranos atisbar a posibilidade ou non de acadar a inestabilidade de Turing co signo do factor de crecemento. Valores negativos do factor de crecemento facilitan a aparición da inestabilidade. Se non abonda coa rede, podemos, ademais, modificar os sentidos da difusión a través dos parámetros da difusión (ϵ , σ , a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22}). Tras sufrir perturbacións, os sistemas tratan de reestablecer un equilibrio. Pero ese equilibrio non implica homoxeneidade. Introducir unha perturbación nun sistema interconectado pode derivar na emerxencia de estruturas organizadas. E esta é a aprendizaxe que sacamos da análise da inestabilidade de Turing deslocalizada. Equilibrio non significa homoxeneidade.

Como desde un substrato indiferenciado poden xurdir estruturas heteroxéneas foi o fito que nos deixou Turing. Pensemos nun sistema artellado en partes. Ese sistema é reactivo, isto é, cada unha das partes son como pequenos tanques onde unhas especies se transforman noutras. Ademais, ese sistema tamén é difusivo, está permitido que esas especies reactivas transiten os tanques todos que compoñen o sistema. Nun principio, o sistema está en equilibrio. Non se dá nin transformación na forma de reacción nin transferencia na forma de difusión. Por algún motivo, o sistema pertúrbase. Pode ser, por algún estímulo externo, como luz ou gravidade ou unha fonte de auga, por poñer exemplos. A natureza está sempre na procura de balances e de mínimos de enerxía. Prodúcese o que se chama unha rotura espontánea da simetría. Nun tanque en concreto, unha desas especies reactivas ten unha concentración anómala. A intuición dinos que o sistema vai reestablecer o equilibrio inicial. Pero isto pode non ocorrer ao ter un sistema artellado en partes. A rede difusiva que as interconecta pode alocar os vales de mínimos de enerxía e reestruturar o sistema nun xeito completamente novo. Dun substrato indiferenciado pero coa capacidade de reaccionar e se difundir, emerxe un padrón máis adaptativo ás novas circunstancias que o circundan. Esta é a base da

inestabilidade de Turing.

É a resposta ante unha crise. Dúas alternativas: perecer ou reinventarse. Neste caso, a estrutura de Turing é unha solución que a natureza dá ante perturbacións que poida sufrir un sistema natural. Un sistema indiferenciado rompe a súa simetría por algún tipo de perturbación externa. Aparecen gradientes. Os gradientes resólvense con fluxos das especies a través do sistema que sempre o levan a mínimos enerxéticos. O todo é máis que a suma de partes. Cada unha das partes por separado, se as partes son iguais, ten o mesmo val de mínimo de enerxía. A rede difusiva aloca os vales de mínimo de enerxía. Se o sistema indiferenciado non sofre perturbación algunha, permanece nese estado metaestable inicial homoxéneo. Agora ben, unha pequena perturbación pode transformar o sistema por completo debido ao desprazamento dos mínimos de enerxía. Emerxe un padrón máis eficiente.

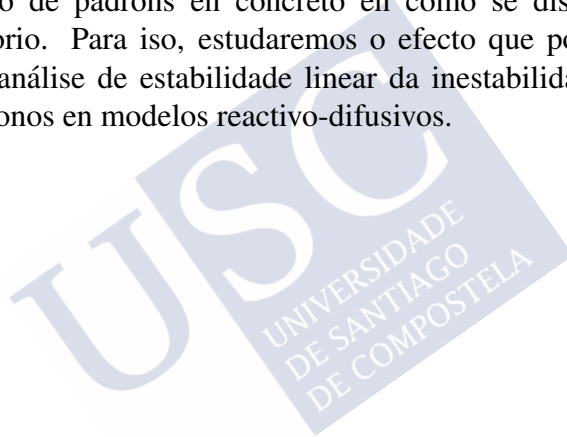
Nestes sistemas artellados en partes con intrarrelacións, entre as especies que forman as partes, e interrelacións, entre as especies de distintas partes, unha perturbación inestabilizadora pode xerar estruturas con formas moi diversas. E iso vai depender do proceso difusivo e por tanto da rede que interconecte as partes. Explícase así a proba evolutiva embriolóxica. Como dun gameto indiferenciado poden xermolar organismos tan distintos e é que, de seguro, as redes que establecen as partes dese gameto son distintas. Isto xera un feixe de perfís de vales de mínimos de enerxía distintos que explican as derivas correspondentes. Este é o Turing deslocalizado. A topoloxía da rede é relevante na formación da estrutura heteroxénea. A rede determina o padrón.

A inestabilidade de Turing deslocalizada é unha pedra angular de morfoxéneses e evolución. Morfoxéneses e evolución aplicables a todo sistema natural. Veremos que podemos saír da bioloxía e ollar con este prisma a como se organizan as sociedades. Imos aplicar estas ideas orixinarias da bioloxía a redes de interconexións sociais centrándonos na emerxencia de padróns lingüísticos de coexistencia de linguas dentro de territorios concretos.

Se somos quen de construír a matriz Laplaciana L_{ij} , podemos obter

os factores de crecemento λ_α asociados ao sistema. Estes factores van depender tanto da reacción do sistema, albergada na cinemática do, como da difusión, propiciada pola interconexión das partes nunha rede. Os factores de crecemento son os autovalores asociados a esa matriz Laplaciana L_{ij} . O módulo do factor de crecemento mide a velocidade coa que se acada un estacionario tras o sistema sufrir unha perturbación. A continuación, veremos como este obxecto matemático riguroso nos axuda a analizar un fenómeno social como é a evolución lingüística nun territorio.

O obxectivo é, pois, analizar os efectos que a rede pode ter no xurdimento de padróns en concreto en como se distribúen falantes nun territorio. Para iso, estudaremos o efecto que pode ter a rede a través da análise de estabilidade linear da inestabilidade de Turing e centraremos en modelos reactivo-difusivos.





Metodoloxía





Usouse a linguaxe de programación *python*, [70], para resolver os diferentes sistemas que se foron presentando. Parte fundamental do traballo foi analizar a estabilidade linear das diferentes cinemáticas, do que xa se falou no capítulo adicado a inestabilidade de Turing. Primeiro de todo, linearízase o sistema reativo-difusivo en torno ao punto fixo. Recordemos que as ecuacións que gobernan un sistema activador-inhibidor en redes cun mecanismo reativo-difusivo que posibilita a aparición de estruturas de Turing son:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i = f(u_i, v_i) + \varepsilon \sum_{j=1}^N L_{ij} u_j \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_i = g(u_i, v_i) + \varepsilon \sigma \sum_{j=1}^N L_{ij} v_j$$

Despois disto, séguese un desenvolvemento ata chegar a unha matriz que é como unha Jacobiana ampliada que depende dos parámetros internos reactivos da cinemática (contidos en $f(u_i, v_i)$ e $g(u_i, v_i)$) e dos parámetros reticulares difusivos (ε , σ , ademais dos coeficientes difusivos a segunda orde no caso de houber, e os autovalores da matriz Laplaciana Λ_α). Os autovalores desa matriz Jacobiana ampliada son os chamados factores de crecemento λ_α que dan conta da converxencia ou diverxencia tras perturbar o sistema ademais da celeridade coa que isto acontece.

Na seguinte parte, adicada aos resultados, veremos traballos con diferentes sistemas reactivos artellados con redes diferentes. No primeiro traballo que se presenta, *Turing patterns mediated by network topology in homogeneous active systems*, emprégase o modelo Mimura-Murray propio da ecoloxía para estudar o balance predador-presa. Este traballo é o máis teórico dos recollidos nesta parte e pretende amosar que a dispersión nas conectividades do sistema reticular son fundamentais para a emerxencia e mantemento do padrón no tempo.

A seguir, no artigo titulado *Urbanity and the dynamics of language*

shift in Galicia, emprégase un modelo proposto por Seoane et al., esmiuzado no artigo [71]. Este modelo é un modelo lingüístico que contempla dous estados monolingües máis un terceiro bilingüe. Esta foi a primeira vez que se contemplou un modelo lingüístico que contemple un estado bilingüe. O resultado deste artigo previo é un mapa de distribución de falantes do territorio. Ademais, chégase a un resultado secundario e é que o ritmo de evolución da lingua é diverso e isto depende do nivel de urbanidade de cada rexión. No artigo no que tamén participamos nós, tomamos este modelo proposto como parte reactiva e engadimos unha rede como parte difusiva. A través deste plantexamento, puidemos artellar o territorio nunha rede e así empregar os factores de crecemento para acompañar o resultado secundario do artigo previo con todo o rigor matemático. O resultado secundario era que o devir da lingua no territorio galego é heteroxéneo e depende do nivel de urbanidade da rexión e o factor de crecemento é, pois, o obxecto matemático idóneo por medir xusto iso: o ritmo de evolución dun sistema cara a un novo estado estacionario tras sufrir unha perturbación.

O último traballo recollido, *Linguistic evolution driven by network heterogeneity and the Turing mechanism*, é unha continuación deste segundo xa que segue a analizar que acontece no territorio galego a nivel lingüístico afinando a rede ao construímos unha rede de estradas que vertebran os diferentes núcleos de poboación. Neste caso, emprégase un modelo loxístico con dúas linguas en interacción como se dun modelo predador-presa se tratáse. O aporte deste artigo radica na ampliación da rede a unha rede real, a de estradas galegas, ademais da aplicación do modelo a outro territorio, Carintia.

Resultados





Capítulo 4

Como a rede afecta a inestabilidade de Turing

No traballo *Turing patterns mediated by network topology in homogeneous active systems*, [72], publicado no ano **2019** na revista *Physical Review E* cun índice de impacto do 2.296 nese ano (<https://doi.org/10.1038/s41467-019-09688-8>), no que participei derivado dunha estadía en Rochester, Nova Iorque, analizamos como a estrutura da rede podía afectar ao xurdimento da inestabilidade de Turing. O propósito foi afondar máis na inestabilidade de Turing deslocalizada e comprender como o tipo de rede que artellase as diferentes partes do sistema podía estar a afectar na emerxencia da inestabilidade. A miña contribución foi facer toda a traslación do aparello matemático da análise de estabilidade linear así como os cálculos derivados.

The author has the right to use the article or a portion of the article in a thesis or dissertation without requesting permission from APS, provided the bibliographic citation and the APS copyright credit line are given on the appropriate pages
<https://journals.aps.org/copyrightFAQ.html>

Partimos dunha hipótese e é que a dispersión na conectividade parecía dar lugar a padróns máis diferenciados e estables. Unha rede sen dispersión na conectividade sería, por exemplo, unha rede cadrada,

na que os nós están colocados nos vértices dun mallado cadrado, con conexións aos catro veciños máis próximos que nos leva a pensar nas primeiras discretizacións as que nos afrontamos á hora de realizar simulacións de espazos continuos. Estas redes sen dispersión presentan unha distribución sen dispersión xa que todos os nós teñen o mesmo número de conexións, catro do caso do mallado cadrado.

Unha rede aleatoria pode ser o seguinte nivel. A conectividade media presenta unha desviación estándar baixa pero non nula. Non todos os nós presentan a mesma conectividade. Hai variacións lixeiras. O paradigma da dispersión nas redes que presentamos neste capítulo é a rede libre de escala. Nestas redes podemos atopar moitos nós con conectividades baixas e uns poucos nós altamente conectados.

Así como o padrón se pode controlar coa modificación da conectividade media da rede, a natureza mesma do padrón final está determinado por unha intrincada interacción entre a fluctuación da conectividade e os coeficientes difusivos e a dinámica interna do sistema. Pensemos na condición necesaria para o xurdimento da inestabilidade de Turing expresada no factor de crecemento onde este é o autovalor dunha matriz onde un dos parámetros de control son os parámetros da dinámica interna máis os coeficientes difusivos sexan de primeira ou segunda orde onde se englobaría a difusión cruzada. Nesas redes cunha distribución da conectividade máis picada, os padróns son puramente estocásticos e están determinados polas perturbacións do estado inicial. Pola contra, as redes cunha fluctuación da conectividade maior inducen padróns máis robustos a perturbacións iniciais. Neste caso, é a estrutura da rede a que determina o padrón final e non a fluctuación presente no estado inicial como acontece coas redes con baixa dispersión na conectividade.

Usouse unha dinámica reactivo-difusiva como a proposta por Mikhailov e Nakao [67], onde a dinámica interna segue o modelo Mimura-Murray que se emprega en procesos ecolóxicos que involucran poboacións predador-presa onde a presa xoga o papel de activador e o predador se corresponde co inhibidor.

O estudo revela, primeiro, que o padrón se estabiliza ao ralentizar o proceso, facer que as especies flúan máis devagar, que se regula

coa constante difusiva. E segundo que, de comparar unha rede libre de escala con outra aleatoria tipo Erdős-Renyi, a heteroxeneidade da conectividade permite a estabilización do padrón no espazo.

A conclusión do traballo que realizamos titulado *Turing patterns mediated by network topology in homogeneous active systems* é que fluctuacións nas conectividades dos nós dunha rede tenden a xerar padróns (de Turing no contexto deste artigo que podemos ler como sociais neste) estables no espazo-tempo mentres que redes máis homoxéneas, como poden ser as aleatorias, a aparición destes padróns é máis estocástica.

Se aplicamos este resultado a análise que fixemos das dúas redes de Twitter do pre-pandémico e do pandémico, obxecto de estudo no artigo baixo o título *Incorporating social opinion in the evolution of an epidemic spread*, que xa tratamos no capítulo adicado a redes, podemos visulizar como convencer á poboación dunha idea concreta, non é máis que xerar estruturas de Turing de ideas que conviven. Así é máis doado durante a pandemia por ser unha rede máis aleatoria pero de igual modo este convencemento pode ser máis feble, azaroso e inestable no tempo xa que as fluctuacións na conectividade son baixas. As políticas que se poidan seguir durante a pandemia propáganse con grande facilidade. Todo isto podémolo concluír pola estrutura da rede e é o resultado que volcou o traballo *Incorporating social opinion in the evolution of an epidemic spread*.



Capítulo 5

Evolución lingüística na Galiza

Neste capítulo, amósase o traballo de investigación recollido no artigo *Urbanity and the dynamics of language shift in Galicia* publicado no ano 2019 na revista *Nature Communications* cun índice de impacto do 12.121 nese ano (<https://doi.org/10.1038/s41467-019-09688-8>) [73]. A miña contribución foi tomar as ecuacións reactivas que xa estaban plantexadas e inserilas nunha rede. O modelo previo consideraba o territorio como rexións illadas e con este aporte a evolución depende da rede que se establece entre elas. Así, a miña contribución foi resolver cunha simulación as ecuacións reactivo-difusivas, a determinación dos parámetros do termo difusivo e a obtención dos factores de crecemento do sistema que determinan os diferentes ritmos de evolución das distintas rexións.

Authors have the right to reuse their article's Version of Record, in whole or in part, in their own thesis. Additionally, they may reproduce and make available their thesis, including Springer Nature content, as required by their awarding academic institution (<https://www.springer.com/gp/rights-permissions/obtaining-permissions/882>).



Non hai lingua en si, nin universalidade da linguaxe, tan só hai un cúmulo de dialectos [...]. O locutor-oínte ideal non existe, nin tampouco a comunidade lingüística homoxénea. A lingua é [...] unha realidade esencialmente heteroxénea. Non hai lingua nai, senón toma de poder dunha lingua dominante nunha multiplicidade política. A lingua estabilízase arredor dunha parroquia, dun obispado, duna capital. [...] Evoluciona por talos e fluxos subterráneos, ao longo de vales fluviais ou de liñas de ferrocarril, desprázase por manchas de aceite.

páx 13, Mil Mesetas, Gilles Deleuze e Félix Guatarri

Como xa suxerimos na introdución, hai sistemas complexos nos diversos eidos do coñecemento. No paradigma complexo a autoorganización, emerxencia e coadaptación son claves. A lingua tampouco foxe desta estruturación. No libro colectivo *Complejica. Cervell, societat i llengua desde la transdisciplinitat* fálase da lingua como un sistema complexo adaptativo [74] xa que a súa composición consiste en múltiples axentes que interactúan entre eles. Estes axentes basean o seu comportamento nas súas experiencias pasadas e presentes, a súa competencia depende da súa percepción subxectiva e das motivacións sociais. As estruturas da lingua emerxen da experiencia, a interacción social e os modelos cognitivos. Este xeito de ver a lingua permíte observar relacións entre fenómenos lingüísticos aparentemente desvinculados, que van desde a súa variación ata todos os niveis organizativos da lingua, sociais e territoriais. A acción comunicativa é unha síntese das presións que os seres humanos experimentan por comunicarse e por utilizar un determinado código lingüístico. Estas presións están relacionadas co prestixio da lingua que así parametrizamos no presente traballo. Ponse de manifesto que nos sistemas complexos existen presións que proveñen do imaxinario colectivo, do estado do mundo, nun contexto cultural, histórico, xeográfico e temporal concreto onde se ubican as necesidades, ideoloxías, valores e crenzas, así como la máxima facilidade compartida. O concepto e parámetro similariedade

interlingüística dá conta do grao de facilidade de cambiar dunha lingua a outra e é outra presión para adoptar unha lingua ou outra. Todas as presións exercen unha forza en diferentes direccións. A dominante inflúe na elección lingüística. Ao tratarse dun sistema complexo, os mesmos códigos establecidos poden derivar de diferentes presións. A xestión lingüística resulta imposible desde unha consideración mecanicista. Este traballo pretende dar unha achega desde a física da complexidade do fenómeno da adopción de linguas.

”No contexto galego, no entanto, un único tema lingüístico, diferente da adquisición das normas, penetra nos libros de texto. Trátase do conflito entre linguas en contacto, tratado como contexto para certos asuntos literarios - os séculos escuros ou, en xeral, a existencia de períodos de baixa produción literaria - ou sociais - a diglosia - e non como tema espiñento, cun amplo debate académico e social por tras. Talvez excepcionalidade inflúa en que o tema non estea tratado co debido rigor [...]”[75].

Galiza ¹ é un territorio caracterizado pola súa alta dispersión. Asemade, hai que unirle a súa crise demográfica que fai que cada vez máis núcleos queden despoboados. Estes dous factores fan que concentre máis do 50% de entidades singulares de poboación con menos de 100 habitantes do estado español, isto é case 1 de cada 6. Unha entidade singular de poboación, segundo o Instituto Nacional de Estatística, é ”calquera área habitable dun termo municipal, habitada, ou excepcionalmente desabitada, claramente diferenciada dentro do mesmo e que é coñecida por unha denominación específica que a identifica sen posibilidade de confusión”.

Neste territorio peculiar por esta demografía avellentada e ordenación territorial complexa, coexisten dúas linguas. O galego, exclusiva do territorio, aínda que se fala en pequenas zonas limítrofes con Portugal de Castela e Estremadura. E o castelán. O contacto entre dúas linguas é moi frecuente. Porén qUe o bilingüismo poida parecer a opción preferente, a tendencia natural é a diglosia. Fálase de diglosia

¹ Así como a norma acepta tanto a forma Galicia como Galiza, tómome a licenza de empregar a segunda xa que nese fluído lingüístico no que me atopo sumerxida así o expresaría.

cando unha das linguas é a hexemónica ou que goza do maior prestixio social e institucional. Como consecuencia, a lingua hexemónica acaba engulindo a outra por completo e xérase segregación entre as persoas que falan as distintas linguas. Talvez a estrutura illada da sociedade galega permite que o bilingüismo sexa o fenómeno sociolóxico que prime na Galiza. Estase mantendo a diversidade.

Falar de diversidade nun substrato común, territorial, social e cultural e falar de Turing deslocalizado. A emerxencia de dúas entidades lingüísticas diferenciadas nun mesmo substrato xa se analizou en traballos previos, [19]. Neste estudo, mediuse o efecto da conectividade das persoas falantes desas linguas en coexistencia. De forma inesperada talvez, en vez de homoxeneizar o sistema, demóstrase que unha elevada conectividade axuda a manter a diferenciación e a pervivencia das dúas linguas.

Imos, pois, estudar a dinámica lingüística do territorio galego onde falantes de galego e castelán están en contacto en forma de monolingüismo e bilingüismo. A dinámica do sistema segue o modelo proposto no artigo *The importance of interlinguistic similarity and stable bilingualism when two languages compete*, [71], que presentamos no seguinte apartado.

Neste traballo de 2011, divídese o territorio en 20 rexións que agrupan as 53 comarcas galegas. O modelo predí como será a evolución lingüística segundo o valor duns parámetros sociolingüísticos asociados a cada rexión (o prestixio e a similariedade interlingüística entre o galego e o castelán) despois de o Instituto Galego de Estatística ter realizado entrevistas as familias sobre o fío lingüístico familiar. Que linguas se falan e falan no núcleo familiar.

Extróuxose un mapa con catro tendencias sociolingüísticas evolutivas: grupo A, *comarcas con tendencia a substitución lingüística*, con tendencia a estabilización á baixa de bilingües e a desaparición de galegofalantes; grupo B, *rexións con tendencia a estabilización dun bilingüismo maioritario*; grupo C, *rexións con tendencia ao predominio do bilingüismo con maior peso do monolingüismo en galego*; grupo D, *rexións con tendencia ao mantemento do monolingüismo en galego e presenza reducida de monolingüismo en castelán*. Porén, este modelo

introduce *ex profeso* un parámetro que axusta os ritmos evolutivos das distintas rexións observando que estes ritmos eran máis pausados, contraintuitivamente, nas rexións máis urbanas. No modelo, enténdese cada un deses núcleos poboacionais como entes illados. A aportación do traballo que aquí se presenta é a interconexión desas 20 rexións. Nunha aproximación máis axeitada, existen transferencias entre as distintas rexións. O territorio está artellado nunha rede.

No traballo *The importance of interlinguistic similarity and stable bilingualism when two languages compete*, [71], todas as probabilidades de cambio dunha lingua a outra ían multiplicadas por un parámetro c relacionado coa escala temporal. Canto maior é o valor de c , máis rápida é a evolución ao novo estado estacionario. Neste novo artigo en conxunto, elimínase o parámetro c que se introduciu *ad hoc* e carece de significado físico. No seu lugar, acóplase una rede ao modelo. As rexións non son sistemas completamente illados senón que están interconectadas as unhas coas outras. Como xa dixemos, queremos demostrar que a evolución diferenciada se explica pola existencia da rede. O parámetro c substitúese polo factor de crecemento λ cun significado físico claro. O concepto do factor de crecemento introduciuse no capítulo da inestabilidade de Turing deslocalizada e obtense da análise de estabilidade linear do sistema. Recordamos que o factor de crecemento é un medidor da velocidade coa que se acada un novo estado estacionario tras perturbar un sistema.

Queremos amosar canto dá de si o modelo creado ao engadir a parte da rede. No modelo temos unha serie de parámetros que establecemos como fixos que son o prestixio da lingua s , a similariedade interlingüística k e a fracción de poboación urbana u . Os dous primeiros parámetros, prestixio e similariedade interlingüística refírense á dinámica interna do sistema. A fracción urbana xa forma parte da rede e regula o fenómeno difusivo. Hai unha relación linear entre o coeficiente difusivo K_i e a fracción de poboación urbana u mediado polos outros parámetros modificables α e β , $K_i = \alpha(1 + \beta u_i)$. Con esta configuración, o parámetro α mide o grao de acople a rede e, por tanto, a homoxeneidade do territorio á hora de acceder á información. E o parámetro β é o peso que o factor urbano ten

	$\alpha \ll 1$	$\alpha \gg 1$
$\beta \ll 1$	disperso, dinámica interna dominante	ben conectada, igualitaria
$\beta \gg 1$	disperso, non igualitaria	ben conectada, rede dominante

Table 5.1: Diferentes combinacións para os parámetros da constante difusiva K . O caso galego poderíase incluír na primeira das filas. [73]

dentro do sistema: a dixitalización ou tecnoloxización do territorio. O punto galego pode encaixar nos dós casos da primeira fila onde o efecto da urbanidade é baixo. Estamos nun territorio onde o peso da dixitalización ou tecnoloxización é baixo. Esta análise resulta de alto interese xa que as políticas que se fagan poden ter isto en conta á hora de facer lexislación lingüística ou como indicativo do grao de conectividade do territorio. De seguro, outros casos sociolingüísticos serán diferentes en función de como estea artellado o territorio.

Por tanto, atopámonos cun territorio moi disperso, que xa adiantamos na introdución deste traballo en concreto, onde podemos achar máis da metade de núcleos poboados do Estado e ao mesmo tempo as taxas máis elevadas de dispersión. Recordemos que cada vez son máis as aldeas a desaparecer por este motivo. No traballo previo, *The importance of interlinguistic similarity and stable bilingualism when two languages compete*, puidose facer unha predición de como diferentes rexións galegas podían evolucionar lingüísticamente. Obsérvanse catro grupos diferenciados. Dous grupos con tendencias monolingües, un cara ao galego e outro cara ao castelán. Tamén podemos observar que coincide coas zonas máis rurais e urbanas do territorio, respectivamente, a excepción das rexións de Allariz, Maceda, Caldelas, Trives e Valdeorras que se corresponden coa saída da estrada a León. Os outros dous grandes grupos son os grupos cunha predominancia bilingüe con máis peso do galego ou do castelán. Este foi o resultado dese traballo previo.

Ao abeiro, outro resultado emerxeu. E é que, no modelo era

necesario introducir un parámetro temporal c que axustase ben as curvas de evolución. Este parámetro temporal estaba a indicar que as rexións máis urbanas evolucionaban máis devagar. A intención do presente traballo era eliminar ese parámetro *ad hoc* e cambialo por unha rede que artellase todo o territorio xa que, ata o momento, o modelo matemático pensaba cada unha das 20 rexións por separado.

Con grande acerto, esa substitución deu os seus froitos. A eliminación do parámetro temporal c non supuxo unha quebra do resultado final. Servíndonos da análise de estabilidade linear que se adoita facer para a inestabilidade de Turing deslocalizada, isto é, a emerxencia de estruturas de Turing en sistemas reticulares, puidemos explicar o fenómeno. O factor de crecemento λ que é o expoñente dunha solución aproximada exponencial dun sistema reticular, volcou o resultado idéntico. Este factor de crecemento mide o ritmo de evolución do sistema a posteriori de ser perturbado.

As rexións máis urbanas xeraban factores de crecemento menores en módulo o que implicaba a evolución máis paulatina. O parámetro temporal c introducido adrede xa non era necesario pois se podía substituír por outro parámetro con vigor científico. Pensar o territorio como unha rede permite explicar os diferentes ritmos de evolución.

Este forma diferente de afrontar o problema, permítenos extrapolar o modelo a outros escenarios. O coeficiente difusivo que depende dos parámetros α e β que podemos modificar vai establecer un balance entre a dinámica interna e a rede, 5.1. Cando o acople ao campo medio, que é a rede coa que estamos a traballar, é suave, encontrámonos nun rexime de α baixo por exemplo. Nesta situación domina a dinámica interna que é o caso do territorio galego no que as urbes evolucionan máis devagar. Podemos atoparlle un senso a este evoluir lento se pensamos na intrincada organización territorial dunha cidade.

Unha cidade está conformada por distintos barrios con distintas formas de se relacionar a xente. Pola contra, unha vila, máis pequena, funciona como unha comunidade toda ela onde se pode dicir que case todo o mundo se coñece. Chegar cunha idea atractiva a unha cidade é máis complicado, no senso de que sexa captada e asimilada, que chegar coa mesma idea a unha vila. Isto débese a estrutura do propio núcleo

poboacional. A estrutura máis fragmentada da cidade artellada en barrios impide a fácil propagación de dita idea o que non acontece nun ámbito máis comunal da vila. Un lugar que opere como comunidade permite que ideas se compartan. Isto é o que pode estar a acontecer no territorio galego coas linguas.

O resultado deste traballo é que neste territorio domina a dinámica interna sobre a rede, ou sexa, os distintos territorios que a conforman funcionan dun xeito bastante illado. Os procesos intrarreticulares pesan máis que os interreticulares e isto provoca a evolución máis pausada das linguas nas urbes debido a súa estrutura máis rota. Se o acople a rede de campo medio fose maior, digamos que o peso da urbanidade sería maior tamén o que indicaría que estaríamos diante dun territorio altamente dixitalizado e tecnoloxizado xa que o coeficiente β que modifica a fracción de poboación urbana sería máis elevado. Neste escenario, cun peso interreticular máis elevado facilitado pola alta conectividade entre os territorios e por ende alta tecnoloxización, os procesos sociais serían máis rápidos nas urbes. A lingua modificaríase máis rapidamente nos territorios máis urbanos.

Con este entendemento, a evolución vai depender de variables intrarreticulares e interreticulares a ter en conta. As variables intrarreticulares propias do modelo como son o prestixio da lingua e a similariedade interlingüística que se poden modificar con políticas lingüísticas e as variables interreticulares que dependen máis, para que se comprenda, da carteira do Ministerio de Interior. Aquí collería todas as infraestruturas de ferrocarrís, rede de estradas e Internet, por exemplo, todo isto artella industrialmente ou tecnoloxicamente o territorio.

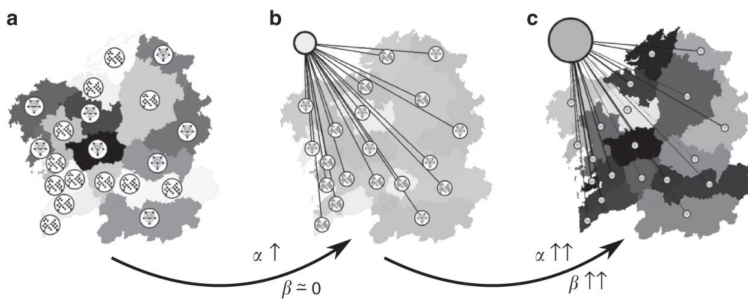


Figura 5.1: Representación esquemática dos pesos das dinámicas como o acople entre distintas áreas con fraccións de poboación urbana diversas a un campo medio. **a** Dentro do modelo proposto, para valores baixos para ambos parámetros da constante difusiva α e β , falantes das distintas rexións evolucionan independentemente segundo a súa dinámica interna. Os datos indican que predomina a evolución máis devagar nas rexións máis urbanas neste réxime. Isto está en acordo cos resultados computacionais, que predí tempos máis lentos de converxencia para redes máis complexas. A complexidade das cidades fai que as súas linguas muden máis lento. **b** Este efecto dilúese se permitimos que os nós interactúen nun campo medio. Isto conseguímo-lo se elevamos os valores dos parámetros α e β . **c** A conexión ao campo medio favorece as áreas urbanas. O noso modelo predi que as áreas urbanas poden evolucionar máis rápido que as rurais se a conexión a ese campo medio supera á dinámica interna. As áreas urbanas teñen a capacidade de seguir as tendencias de escalas territoriais superiores. [73]

Capítulo 6

Evolución lingüística mediada polo mecanismo de Turing

Neste capítulo, amósase o traballo de investigación recollido no artigo *Linguistic evolution driven by network heterogeneity and the Turing mechanism* publicado no ano 2021 na revista *Physical Review Research* [76] (journals.aps.org/prresearch/abstract/10.1103/PhysRevResearch.3.023241). O índice de impacto para este ano aínda non se pode determinar pois foi lanzada no 2020. Son necesarios dous anos de publicacións polo que recibirá o seu primeiro índice de impacto no ano 2022. A miña contribución foi ensinar todo o aparello conceptual dos factores de crecemento e das ecuacións reactivos-difusivas e artellar a rede galega de estradas cunha matriz de adxacencia gravitacional.

The author has the right to use the article or a portion of the article in a thesis or dissertation without requesting permission from APS, provided the bibliographic citation and the APS copyright credit line are given on the appropriate pages <https://journals.aps.org/copyrightFAQ.html>

Queremos presentar neste apartado outro traballo no que tivemos participación. Este traballo xorde da colaboración co equipo de Rochester, Nova Iorque, no que realicei a estadía. No artigo *The importance of interlinguistic similarity and stable bilingualism when*

two languages compete xerouse un mapa con tendencias evolutivas para as linguas galegas, establecendo catro grandes grupos como xa indicamos. No seguinte, *Urbanity and the dynamics of language shift in Galicia*, deuse unha explicación matemática ao distinto ritmo de evolución debido a maior ou menor urbanidade das 20 rexións das que se tiñan datos. Ademais, ofrecéronse distintos escenarios evolutivos dependendo do acople da dinámica interna á rede.

Neste traballo, recollido no artigo *Linguistic evolution driven by network heterogeneity and the Turing mechanism*, [76], pretendeuse facer unha análise máis detallada ao pasar dunha rede de 20 nós a unha rede de máis de 500 nós. Este salto cuantitativo conlevou a modificación do modelo xa que o presentado no artigo orixinario, precisa de datos experimentais dos que non se conta para tantas localidades. Asemade, este artigo compara dous casos sociolingüísticos: o da Galiza e o da Carintia.

Empregouse un modelo tipo Lotka-Volterra de predador-presa que se propuxo por vez primeira en [77] e [78] cun parámetro relativo ao prestixio da lingua, que se pode modificar para cada un dos núcleos poboacionais, e introduciuse difusión cruzada, xa explicada no capítulo da inestabilidade de Turing deslocalizada. De ter valores positivos, os fluxos van contra gradiente de concentracións. Neste caso máis fino, onde imos ter máis nós que compoñan a rede a tratar, en comparación co traballo anterior, o modelo empregado é diferente. Isto débese a que o modelo anterior tratábase dun modelo con parámetros empíricos dos que, a nivel nó, non podemos contar neste caso a falta de datos. Unha vez está establecido a cinemática, hai que escoller que tipo de rede interconecta os distintos distritos. Cóntase coa rede de estradas galegas que interconecta todos os núcleos poboacionais. Escóllese un modelo gravitatorio, [79], [80], que depende das poboacións dos dous núcleos p_i e p_j e da distancia d_{ij} entre eles para construír a matriz de adxacencia $A_{ij} = \frac{p_i p_j}{d_{ij}}$. Trátase dunha matriz pesada xa que os valores dos termos da matriz de adxacencia non son discretos senón que $A_{ij} \in (0, 1)$ e dunha matriz conexión todos con todos. A distancia d_{ij} é a lonxitude da estrada máis curta entre os dous núcleos. O modelo gravitatorio indica que as conexións serán máis intensas entre núcleos máis poboados e a menor

distancia.

Se aplicamos este modelo ao caso galego, estableceuse unha distribución bimodal para o prestixio lingüístico. Un valor positivo naqueles núcleos onde o galego tiña maior prestixio e outro negativo na situación oposta. Semella que se obteñen os resultados máis adecuados se introducimos a heteroxeneidade do parámetro de prestixio e a natureza espacial da rede. Pode apreciarse unha predominancia do castelán no eixo da AP-9 e nas comarcas da saída cara León: A Limia Alta e Biaxa, A Terra de Celanova, Verín, Viana. Este modelo non reporta a fracción de bilingües polo que non se pode coñecer a súa distribución con el. O valor das constantes difusivas son baixos puidendo indicar que o peso da rede é baixo como tamén se apreciou no traballo anterior.

Para Carintia, acontece o mesmo, os resultados optimízanse se temos en conta a natureza xeográfica da rede e valores heteroxéneos para o parámetro de prestixio. Neste caso, a asimetría de valores para este parámetro estableceuse segundo cal fose a lingua maioritaria do núcleo. Naqueles núcleos onde o alemán é maioritario, escolleuse o valor positivo e naqueles outros onde o eslovaco era maioría, negativo.

A relevancia deste traballo é a introdución dunha xeografía no modelo, que ao final dá conta de topoloxías reticulares diferentes. No caso galego, non somentes poder posuír un número de entidades poboacionais máis de dúas ordes maior que no artigo anterior. Comparemos os 20 distritos cos máis de 500 que temos aquí. Se non tamén poder contar con datos de poboación e de distancias entre núcleos poboados. Forzar unha rotura da simetría, romper a homoxeneidade do prestixio lingüístico nun territorio fai que se estableza unha inestabilidade de Turing. A pesar de que non ten en conta a poboación bilingüe, predí unha distribución de falantes similar ao artigo previo. Asemade, amosar o caso de Carintia demostra que pode ser aplicable a máis dun caso.



Capítulo 7

Discusións xerais

A motivación de iniciar esta tese debeuse a existencia do artigo previo *The importance of interlinguistic similarity and stable bilingualism when two languages compete*, [71]. Neste artigo, conseguíuse adecuar a distribución de falantes do territorio galego experimental coas previsións dun modelo. Este modelo, desenvolvido por este equipo de científicos, ten en conta dous parámetros: a similariedade interlingüística entre as dúas linguas en contacto, que mide cando se afastan ou aproximan dúas linguas, e máis o prestixio da lingua. Ambos parámetros axustáronse a valores experimentais despois de realizar enquisas a diversas familias. Ademais desta distribución de falantes, o modelo precisaba dunha corrección *ad hoc* para axustar os ritmos de evolución nas distintas rexións pois acontecía que nas rexións máis urbanas os ritmos eran máis pausados, isto é, mudar dunha lingua a outra nunha cidade galega era máis difícil. Neste artigo inicial, introduciuse un parámetro que corrixiu os diferentes ritmos de evolución. Podíase solucionar doutro xeito. Aquí o xermolo do artigo, coido central da tese, no que xa participa o noso equipo: *Urbanity and the dynamics of language shift in Galicia*. Artellemos o territorio galego nunha rede e eliminemos o parámetro *ad hoc* pois os factores de crecemento derivamos da análise linear dun sistema reticular responden do mesmo xeito que eses parámetros vencellados ao ritmo de evolución. Os factores de crecemento, repetimos, miden canto de rápido

evoluciona un sistema despois de ser perturbado.

A razón de que sexa o artigo *Turing patterns mediated by network topology in homogeneous active systems*, [72], que abra esta parte é que este artigo amosa a relevancia dos sistemas reticulares á hora de que aparezan padróns diferenciados no espazo e sostidos no tempo. O paradigma da emerxencia de estruturas diferenciadas é a inestabilidade de Turing, á cal adicamos un capítulo nesta tese. Como a natureza está artellada en redes, era imprescindible trasladar todo o formalismo de ecuacións reactivo-difusivas que Turing iniciou a redes, que foi o labor que comezaron a realizar Nakao e Mikhailov, [67]. No traballo que Turing realizou estaba a ter en conta, talvez sen se percatar, redes a primeiros veciños onde a difusión acontece entre entidades colindantes. Unha vez consideramos conscientemente a rede como factor que afecta a evolución dun sistema, o seguinte paso é analizar como inflúe o tipo de rede. Adicamos, tamén, un capítulo enteiro as redes por este motivo. Este artigo é un intento de facer achegas a esta cuestión. A conclusión do mesmo é que redes con fluctuacións na conectividade dan lugar a padróns de Turing máis estables. Isto é, redes que teñan vares de conectividades diversas levaran ao sistema máis facilmente a un estado estacionario onde apareza unha estrutura diferenciada.

Unha vez constatamos que a topoloxía da rede é fundamental á hora de que xurda unha estrutura estable no espazo e no tempo, voltamos ao caso que deu orixe a esta investigación doutoral. No artigo *Urbanity and the dynamics of language shift in Galicia*, exposto en segundo lugar neste apartado da tese, collimos o modelo proposto no artigo *The importance of interlinguistic similarity and stable bilingualism when two languages compete* e substituímos o parámetro *c ad hoc* por unha rede. Como xa dixemos, este parámetro dá conta do ritmo de evolución de cada unha das rexións nas que se dividiu o territorio e resultaba diferir para as diferentes rexións. Así, rexións máis urbanas tiñan valores de *c* máis baixos dando conta do seu ritmo de evolución máis pausado. A abordaxe era a seguinte. Ao interconectar as rexións entre elas, a rede de seu explica os diferentes ritmos de evolución xa que o factor de crecemento a nivel conceptual equival ao parámetro *ad hoc c*. Eliminouse o parámetro *c*, realizouse a análise de estabilidade

linear e obtívose o rango de valores do factor de crecemento que mellor se adecuaba a situación real. Así se conseguiu explicar, co rigor matemático necesario a través dos factores de crecemento derivados da análise de estabilidade linear de sistemas reactivo-difusivos reticulares, como o cambio de linguas nas urbes acontece máis devagar no territorio galego actual.

Unha vez se conseguiu explicar os diferentes ritmos de evolución dependendo do nivel de urbanidade das rexións, o seguinte que fixemos foi analizar como o maior ou menor acople da cinemática á rede afectaba o ritmo de evolución. O resultado de que as urbes evolucionen máis devagar é un resultado que depende do tipo de conexión que se establece entre as distintas rexións. Isto pode variar no tempo se esa relación se modifica. Podemos trasladarnos a outros escenarios. A figura 5.1 resume de forma gráfica que pode acontecer. En vez do parámetro c *ad hoc* agora nas ecuacións aparece a fracción de poboación urbana da rexión que iso é un dato experimenta. A fracción urbana forma parte das ecuacións e regula o fenómeno difusivo. Hai unha relación linear entre o coeficiente difusivo K_i e a fracción de poboación urbana u mediado polos outros parámetros modificables α e β , $K_i = \alpha(1 + \beta u_i)$. Con esta configuración, o parámetro α mide o grao de acople a rede e, por tanto, a homoxeneidade do territorio á hora de acceder á información. E o parámetro β é o peso que o factor urbano ten dentro do sistema: a dixitalización ou tecnoloxización do territorio. O punto galego pode encaixar nos dous casos da primeira fila onde o efecto da urbanidade é baixo. Estamos nun territorio onde o peso da dixitalización ou tecnoloxización é baixo. Esta análise resulta de alto interese xa que as políticas que se fagan poden ter isto en conta á hora de facer lexislación lingüística. Asemade, estes valores tamén son indicativos do grao de conectividade do territorio. De seguro, outros casos sociolingüísticos serán diferentes en función de como estea artellado o territorio.

O terceiro dos artigos presentados, *Linguistic evolution driven by network heterogeneity and the Turing mechanism*, pretende ser unha continuación do segundo. Neste caso, realizouse unha estadía en Rochester, Nova Iorque, onde se puido obter a rede de estradas

real galega que interconecta máis de 500 núcleos poboacionais. Non podíamos empregar o modelo do artigo *The importance of interlinguistic similarity and stable bilingualism when two languages compete*, [71], xa que este precisa de datos experimentais dos que non se contan nun mallado tan fino. Optouse por un modelo de ecuacións loxísticas acopladas. Se aplicamos este modelo ao caso galego, estableceuse unha distribución bimodal para o prestixio lingüístico. Un valor positivo naqueles núcleos onde o galego tiña maior prestixio e outro negativo na situación oposta. Acadáronse resultados máis adecuados ao introducir a heteroxeneidade do parámetro de prestixio e a natureza espacial da rede. O valor das constantes difusivas son baixos puidendo indicar que o peso da rede é baixo como tamén se apreciou no traballo anterior apoiando a idea de que o territorio galego non está moi industrializado. Asemade, este modelo tamén consegue reproducir bastante ben a distribución de falantes de Carintia, o que o valida para futuros usos noutros territorios. Consegúronse bos resultados con este modelo empregando unha rede de poboacións bastante grande. Contar cunha base de datos experimentais cunha fragmentación maior do territorio, axudaríanos a ver unha distribución de falantes do territorio máis fina, de aí a relevancia dos datos experimentais.

Así, a partir da relevancia que a rede ten á hora de facer emerxer padróns estables, [72], co modelo proposto para a coexistencia de linguas, [71], artellamos o sistema nunha rede. Ao interconectar as distintas rexións, [73], para as que tiñamos datos experimentais, puidemos explicar con rigor matemático por que as zonas máis urbanas evolucionan máis devagar a nivel lingüístico a través do factor de crecemento. Unha vez explicado isto, quixemos ver como afectaba o acople da rede a dinámica do sistema. Concluíuse que o territorio galego ten un acople baixo á rede o que pode indicar unha baixa tecnoloxización. Isto implica que se mudásemos o acople, poderíamos atopar un marco completamente diferente onde as urbes fosen as que sufrisen os cambios lingüísticos dun xeito máis drástico. Ampliamos esta investigación ao construír un sistema reactivo-difusivo coa rede real de estradas galegas, co que se obtivo unha distribución de falantes similar. Ademais conseguíse reproducir a distribución de falantes

doutro territorio, Carintia, validándose o modelo para outros lugares. En todos estes artigos, estudouse o efecto que a rede pode ter no xurdimento de padróns en sistemas reactivo-difusivos.





Conclusións





Si un hombre nunca se contradice, es porque nunca dice nada

Miguel de Unamuno

Parece claro e evidente, pero hai que dicilo: o saber illado, conseguido por un grupo de especialistas nun campo limitado, non ten ningún valor, unicamente a súa síntese co resto do saber

Bart Kosko

Un día souben que a ciencia non é verdade. Non recordo que día, si o momento. O Deus do século XX xa non era Deus. Había un erro, e parecía que ninguén na ciencia deixaba de o cometer. Dicía que todo era verdadeiro ou falso ... Os científicos podían errar nas matemáticas e na lóxica. E eran quen de manter o seu erro con toda a soberbia e intolerancia dunha secta relixiosa ...

Bart Kosko

El contexto es casi lo único que existe. Las cosas no son nada en sí mismas, [81].

Onde ficaría o coñecemento que xa non nos molestamos en transcribir a papel porque hai xa dispositivos electrónicos que o len?, [82].

Andentrámonos no mundo dos sistemas complexos porque comprendemos que, dentro do marco establecido, a natureza está artellada como tal. Desde unha célula onde os axentes interactuantes serían os diferentes orgánulos e as interaccións os metabolitos intercambiados. A unha cidade os axentes, xa sociais, serían as persoas que as habitan e as interaccións todas as relacións que se dan entre elas. Así precisamos de facer unha introdución as redes para poder diseccionar estes sistemas e comezar análises de comportamentos que emerxen do xeito en que as partes se relacionan. Parametizamos as redes. Definimos a matriz de adxacencia A_{ij} que dá conta da existencia de interacción entre dous nós i, j . Se un elemento desa matriz é nulo, non existe interacción. A raíz de definir a matriz de adxacencia, puidemos calcular a conectividade k_i de cada nó i vencellado a esa rede.

Puidemos, por tanto, graficar distribucións desas conectividades o que nos permite establecer clasificacións de tipos de redes coas que se pode traballar. Acudimos a redes teóricas que existen na literatura. As redes aleatorias, onde as conexións, como di o seu nome propio, se establecen de xeito aleatorio e a un tipo específico o modelo Erdős-Rényi. Outro tipo de rede son as redes pequeno mundo onde priman as conexións de curto alcance pero tamén se dan as de longo alcance. Aquí o modelo máis sonado é o Watts-Strogatz onde a disposición inicial da rede é en anel. Neste modelo, eses nós están conectados a un número específico de primeiros veciños e pódense reconectar a outros nós con certa aleatoriedade predefinida. Obsérvese que se esta aleatoriedade é nula teríamos unha rede conectada só a primeiros veciños e se a aleatoriedade é máxima, 1, retomamos a rede aleatoria. Así, a rede de pequeno mundo é un caso intermedio entre a rede aleatoria e a rede a primeiros veciños. Se a meirande parte dos nós teñen poucas conexións en contraste coa existencia duns poucos nós que presentan un elevado número de ligazónsm, chegamos as redes libre de escala. Nas redes libres de escala, o tamaño da rede non importa no sentido de que a distribución de conectividades se mantén o modificar o número de nós mantendo a topoloxía. A grande escala ou a pequena escala, fenómenos de grandes magnitudes son minoritarios e a distribución segue unha lei de potencias $P(k) \sim k^{-\gamma}$. O paradigma é a

rede Barabási-Albert. Este modelo permítenos construír unha rede libre de escala cuxo expoñente é $\gamma = 3$. A continuación, para amosar que as redes non só quedan nun plano teórico, presentamos un tipo de redes reais, obtidas de Twitter e coas que podemos traballar [17].

Acto seguido mergullámonos no formalismo matemático das estruturas de Turing deslocalizadas, que dan conta desta inestabilidade en sistemas reactivo-difusivos en redes complexas. A cinemática dun fenómeno pódese conter na parte reactiva e a interaccións entre os nós modúlase na parte difusiva. Se podemos contruír a matriz de adxancia A_{ij} dun sistema reticular, podemos construír a matriz Laplaciana L_{ij} que alberga a información de como as especies se difunden dentro do sistema xa que a relación é directa a través da conectividade $k_i = \sum_j A_{ij}$, $L_{ij} = A_{ij} - k_i \delta_{ij}$.

En medios continuos podemos analizar como o sistema reacciona ante unha perturbación a través da matriz Jacobiana que se obtén tras linearizar o sistema en torno a un punto fixo. Os autovalores desta matriz Jacobiana deterniman a converxencia ou diverxencia cara ao punto fixo tras ser perturbado. Nos sistemas reticulares podemos realizar unha análise análoga. Linearizamos o sistema e na matriz onde calculamos os autovalores que determinan a converxencia van aparecer parámetros a maiores relacionados coa rede. Desa matriz, a cal nos referimos no corpo deste texto como matriz Jacobiana ampliada, extraemos os autovalores que denotamos por factores de crecemento. O obxecto matemático factor de crecemento permite medir o ritmo de evolución dun sistema tras sufrir unha perturbación. O factor de crecemento en sistemas reticulares é equivalente aos autovalores da matriz Jacobiana nos medios continuos. O seu módulo, negativo ou positivo, indica que o sistema retorna ao estado inicial homoxéneo, no primeiro caso, ou que pode evolucionar cara a un estado de equilibrio novo, no segundo. Atopar valores positivos do factor de crecemento danos a condición necesaria para a existencia da inestabilidade. Se a nova estrutura emerxe, existe unha rotura de simetría no sistema que se mantén estable no tempo.

Poder escribir o sistema complexo de xeito matemático, como unha parte reactiva dada pola cinemática do sistema máis unha parte

difusiva expresada a través da matriz Laplaciana L_{ij} , permítenos facer análise de diferentes sistemas que se concretan no noso caso no eido social. O traballo central é a análise dos distintos ritmos evolutivos da lingua dentro do territorio galego a través do valor do factor de crecemento. Partiuse dun traballo previo [71] que conseguía corroborar a actual e predicir a futura distribución de falantes. Asemade, o estudo verteu un segundo resultado. Nos sitios máis urbanos a evolución sucedía dun xeito máis lento. Isto é, nas urbes unha persoa muda con máis dificultade de lingua ante unha influencia externa (medios de comunicación, internet, ...). Nas ecuacións do modelo proposto houbo que introducir a propósito un parámetro c que dá conta dos diferentes ritmos de evolución das rexións. No traballo que propuxemos a raíz deste, eliminamos este parámetro e introducimos unha rede que interconecta as distintas rexións. Supuxemos o territorio como artellado nunha rede. A traslación era directa. O significado do parámetro c era o mesmo có do factor de crecemento. Consequimos amosar con rigor matemático e cun modelo que permite estados bilingües e que se apoia en datos experimentais que as urbes galegas sofren ritmos de evolución lingüística máis lentos en relación ao rural pois a súa estrutura interna é máis intrincada, [73]. Asemade, este resultado fortaleceuse cun traballo posterior noso, [76], ao obter unha distribución lingüística similar ao ampliar a rede á rede de estradas ademais de facer sólido este este novo modelo ao aplicalo a outro territorio, Carintia.

A inestabilidade de Turing é o mecanismo que está por tras da morfoxénese e diferenciación de moitos procesos naturais, como quedou plasmado nesta tese, desde a bioloxía ata o social. Desde a metamorfóse dunha bolboreta, pasando polo cambio de sexo dun peixe para a viabilidade da súa reprodución, a como comunidades establecen a súa lingua. Se trasladamos a unha linguaxe física, a análise da estabilidade linear destes sistemas amósanos como coñecer a dinámica interna do sistema é necesaria para determinar a emerxencia da inestabilidade mais non é suficiente. Como se interrelacionan as partes é determinante á hora de configurarse un novo estado. Por exemplo, as relacións que se establecen dentro dunha cidade distan moito das relacións dentro dunha aldea. E isto queda reflexado en como

se tece a rede entre esas persoas que forman a comunidade. Así, o papel das redes de interconexión dentro das comunidades, como se recolleu aquí, para poder determinar e predicir a emerxencia de novos padróns é crucial.





Apéndice





Capítulo 8

A parametrización do sistema complexo máis aló de Nakao-Mikhailov

Na análise de estabilidade linear de Nakao e Mikhailov [67] sobre como xorde o padrón nos sistemas reactivo-difusivos, contemplan o efecto da rede ao establecer solucións exponenciais ortogonais:

$$\delta X_i \sim e^{\lambda_\alpha t} \Phi_i^\alpha \quad (8.1)$$

onde, recordamos, λ_α son os factores de crecemento e Φ_i^α son os autovectores da matriz Laplaciana que describe o proceso difusivo dun sistema de N nós con $\alpha = 1, \dots, N$ modos vibracionais onde i é cada un dos nós. A vibración do nó j dentro da rede pódese descompoñer en α modos de vibración dados polas compoñentes j dos N α autovectores Φ^α da rede. Os autovalores λ_α , que despois chamamos factores de crecemento, farán crecer (módulo positivo) ou decrecer (negativo) cada unha desas compoñentes vibracionais.

Ademais de determinar a velocidade de evolución, a análise dos módulos do factor de crecemento permitiunos determinar se a perturbación ía facer diverxer ou converxer o sistema, interesándonos o primeiro dos casos por se condición necesaria para a emerxencia de padróns estables no tempo e espazo. Buscamos que a rotura da

simetría dese lugar a novas estruturas máis estables enerxeticamente.

Unha das cuestións que me retumbaba á hora de calcular estes autovalores λ_α da que chamamos Jacobiana ampliada era que aparecían tantas series de autovalores λ_α como variables tiña o sistema de partida, cada unha das series con N autovalores, tantos como nós ten o sistema. Polo que se se nos presentaba un sistema con dúas especies, por exemplo, aparecían dúas series con N autovalores. De inmediato, tal e como facían Nakao e Mikhailov, colliamos unha das series e continuabamos traballando desde aí. Eu seguía o pautado e operaba segundo o indicado. Porén, seguía a pregunta, que sucede coa outra serie? é unha solución a desbotar ou é outra posible solución?

Supoñamos que o resto de series de autovalores son posibles. Como aparecían tantas series como variables talvez a dinámica interna estaba a ter un efecto sobre a dinámica total do estado perturbado, ademais do efecto que podía ter o proceso difusivo definido por eses autovalores e autovectores puramente reticulares. Con esta premisa á solución dada por Nakao e Mikhailov faltáballe algo... Partindo desta premisa dun posible efecto da dinámica interna, reactiva, nos modos vibracionais do sistema reactivo-difusivo, engadamos unha compoñente máis á nosa solución vibracional:

$$\delta X_{ik} = C_{\alpha k} e^{\lambda_{\alpha k} t} u_k^{\alpha k} \Phi_i^\alpha \quad (8.2)$$

Para un nó i hai tantos modos vibracionais como variables k ten o sistema reactivo cuxa vibración será unha combinación das compoñentes i dos autovectores Φ_i^α da matriz Laplaciana do proceso difusivo dentro dun sistema reticular de N nós. Se tivesemos un sistema activador-inhibidor de dúas especies intercambiando información dentro dun sistema reticular, existirían dous modos vibracionais determinados pola cinemática do sistema. Sen rede, todos os nós evolucionarían do mesmo xeito. Porén, a difusión, ao interconectar eses nós dentro dunha rede, introduce asimetrías no sistema. Estruturas máis complexas posuirán maiores asimetrías e máis fácil será que xurdan inestabilidades.

Escribimos o sistema reactivo-difusivo desta forma:

$$X_{ik} = f^k(X_{ik}) + D_k \sum_j^N L_{ij} X_{jk} \quad (8.3)$$

onde X_{ik} son as variables que interactúan e temos tantas variables k como especies reactivas artelladas nunha rede con N nós i . O proceso reactivo está descrito con tantas funcións k como variables descrito en $f^k(X_{ik})$. O proceso difusivo, regulado pola constante D_k , outra vez, tantas como variables, está descrito no termo da Laplaciana L_{ij} que aplica sobre as k variables dos N nós.

Facemos o desenvolvemento linear aplicamos a definición de autovalor Λ_α da Laplaciana:

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha k} \delta X_{ik} &= f_m^k \delta X_{im} + D_k \sum_j^N L_{ij} C_{\alpha k} e^{\lambda_{\alpha k} t} u_k^{\alpha k} \Phi_i^\alpha = \\ &= f_m^k \delta X_{im} + C_{\alpha k} D_k u_k^{\alpha k} e^{\lambda_{\alpha k} t} \sum_j^N L_{ij} \Phi_i^\alpha = f_m^k \delta X_{im} + C_{\alpha k} D_k \Lambda_\alpha e^{\lambda_{\alpha k} t} u_k^{\alpha k} \Phi_i^\alpha \end{aligned} \quad (8.4)$$

Podemos dividir todo por $e^{\lambda_{\alpha k} t} u_k^{\alpha k}$ e chegamos á expresión dada por Nakao e Mikhailov:

$$\lambda_{\alpha k} C_{\alpha k} \Phi_i^\alpha = C_{\alpha k} \left(f_m^k + D_k \Lambda_\alpha \right) \Phi_i^\alpha \quad (8.5)$$

Os factores de crecemento $\lambda_{\alpha k}$ son os autovalores da matriz $(f_m^k + D_k \Lambda_\alpha)$ e dan conta do ritmo de evolución do sistema tras sufrir unha perturbación. Hai tantas series de factores de crecemento $\lambda_{\alpha k}$ como variables k ten o proceso reactivo e o proceso difusivo introduce variacións entre as dinámicas dos distintos nós a través da estrutura da rede determinada polos autovalores Λ_α da rede.

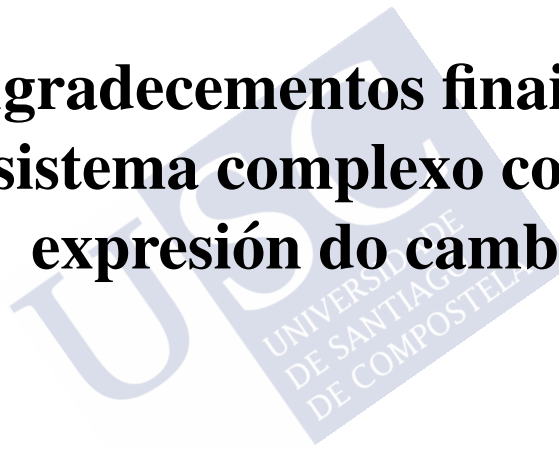
A expresión á que chegan Nakao e Mikhailov é practicamente idéntica a este fóra do índice k . O índice k marca que existen tantos modos vibracionais como variables ten o sistema. A dinámica interna modifica a dinámica global non só a dinámica reticular. A expresión dada para a perturbación é máis concisa. A solución para o sistema sen redes, a análise da estabilidade da dinámica interna que nos ensinan na

carreira, está contida en $(f_m^k + D_k \Lambda_\alpha)$.

A dispersión da conectividade introduce variacións na dinámica de cada nó. Ao interconectar nós cunha cinemática idéntica cunha rede que establece asimetrías na conectividade fai que perdan o seu carácter de indistinguibilidade e isto poida permitir derivas dos nós moi diferentes detro da mesma rede. Por exemplo, cunha rede libre de escala. Agora ben, interconectar nós idénticos cunha rede máis homoxénea, unha aleatoria, por exemplo, fai que os modos non se vexan tan modificados dun nó a outro o que fai que o padrón non se orixine.



**Agradecementos finais: O
sistema complexo como
expresión do cambio**





$\dot{X}_{ik} = f^k(X_{ik}) + D_k \sum_j^N L_{ij} X_{jk}$ é o sistema complexo que consideramos nesta tese. É a forma que teríamos de parametrizar o sistema complexo. De como, a partir das premissas establecidas pola ciencia, o ser humano sistematiza o que identifica como autoorganizado e libre de escala en linguaxe matemática. Nakao e Mikhailov estaban expresando o sistema complexo.

Vimos que o libre de escala xera as heteroxeneidades necesarias dentro deses sistemas e proporciona acoples diferentes das distintas partes que o conforman e facilita a autoorganización [72]. Por iso que sexan característicos dos sistemas complexos tanto a lei do escalamento como a autoorganización. Son as caras da mesma moeda.

Este traballo non está rematado nin pretende estalo. Vertéronse dúbidas, inquedanzas de moitos anos que fixeron que esta tese collese a forma que ten. Non ten ningunha pretensión máis aló de servir as persoas que veñan detrás coas súas propias inquedanzas.

Esta estación que inicia, faime recordar a beleza desta disciplina, a física, que coa súa linguaxe consegue expresar a formación das primeiras chuvias de abril. Imaxino todo o sistema Terra reequilibrándose, tratando de reestablecer algún tipo de equilibrio trala rotura de simetría térmica que se presenta nas masas de aire. Ollo para estas nubes primaverais doutro xeito pois son a materialización de que o ciclo non para e que se ha de repetir sen descanso. As nubes recórdanme que na rotura da simetría está o cambio.

Capítulo 8. A parametrización do sistema complexo máis aló de Nakao-Mikhailov

Aos cursos 2017-2018, 2018-2019 de Física computacional. Ao curso 2018-2019 de Técnicas experimentais I. Ao alumnado do curso de verán de Cambio Climático que tivo lugar entre o 2 e o 6 de setembro de 2019. A Álvaro, Adrián e Pablo que me deron a oportunidade de os acompañar na realización dos seus respectivos TFG. Ao Grupo de Física Non Linear, en especial a Irma por compartir estes 10 anos de física. A Andrea, Isidro, Damián, Damián, Fontán e Guille. A Iago, Adolfo, Iago, Tino, Eric, Samuel, Darío e Álex. E a Alberto por guiarme todos este tempo de doutoramento.

A mamá e abu, miñas nais, que me alimentaron e ensinaron a habitar este mundo e permitiron que outras persoas tamén fosen as miñas nais. A todas elas. A Benazira e Sol, as miñas irmás presentes e cómplices. A Dirk, Karim, Magnito, Adan e Tahlil. A Rocío, Melina e Paula. A Carlota, Nuria, Saya, Blanca, Maitane, Raquel e Dennis. A Pablo, Adri, Ramón, Hadri, Iago e Iago. A Nacho e Rafa.

Ás malandras todas.

Somos moitas.

Listaxe de publicacións





- Alejandro Carballosa, Mariamo Mussa Juane, Alberto Pérez Muñuzuri. "Incorporating social opinion in the evolution of an pandemic spread". In: *Scientific Reports* 11.1(2021), pp. 1-12.
- Sayat Mimar, Mariamo Mussa Juane, Jorge Mira, Juyong Park, Alberto P Muñuzuri, Gourab Ghoshal. "Linguistic evolution driven by network heterogeneity and the Turing mechanism". *Physical Review Research* 3.2 (2021) 023241.
- Alejandro Carballosa, Mariamo Mussa Juane, Alberto P. Munuzuri. "Social opinion influence on epidemic scenarios. In "Analysis of Infectious Disease Problems (Covid-19) and Their Global Impact" edited by Praveen Agarwal, Juan J Nieto, Michael Ruzhansky, Delfim F. M. Torres. *Springer Nature Singapore Pte Ltd.* (2020) Chapter 22.
- Mariamo Mussa Juane, David García Selfa, Alberto P Muñuzuri. "Turing instability in nonlinear chemical oscillators coupled via an active medium". In: *Chaos, Solitons & Fractals* 133 (2020), p. 1096023.
- Sayat Mimar, Mariamo Mussa Juane, Juyong Park, Alberto P Muñuzuri, Gourab Ghoshal. "Turing patterns mediated by network topology in homogeneous active systems". In: *Physical review E* 99.6 (2019), p.062303.
- Mariamo Mussa Juane, Luís F Seoane, Alberto Pérez Muñuzuri, Jorge Mira. "Urbanity and the dynamics of language shift in Galicia". In: *Nature communications* 10.1 (2019). pp. 1-9.



Bibliografía

- [1] Miguel Martínez Miguélez. “El desafío de la racionalidad científica clásica. Necesidad de un nuevo paradigma epistemológico”. In: (2001).
- [2] Jorge Wagensberg. “Ideas sobre la complejidad del mundo”. In: (1985).
- [3] Edgar Morín. “Introducción al pensamiento complejo”. In: (1997).
- [4] Carlos Torres Alcaraz Javier Torres Nafarrete Guy Duval Pedro Miramontes Octavio Miramontes José Luis Gutiérrez Sánchez Santiago Ramírez Germinal Cocho. “Perspectivas en las teorías de sistemas”. In: ()).
- [5] F.D. Briggs J.; Peat. “Espejo e reflexo: del caos al orden. Guía ilustrada da teoría do caos e a ciencia da totalidade”. In: (1994).
- [6] Humberto R. Varela Francisco J.; Maturana. “De Máquinas y Seres Vivos: Una teoría sobre la organización biológica”. In: (1973).
- [7] James D Watson and Francis HC Crick. “Molecular structure of nucleic acids: a structure for deoxyribose nucleic acid”. In: *Nature* 171.4356 (1953), pp. 737–738.
- [8] Pierre Lefevre, Darren P Martin, Santiago F Elena, Dionne N Shepherd, Philippe Roumagnac, and Arvind Varsani. “Evolution and ecology of plant viruses”. In: *Nature Reviews Microbiology* 17.10 (2019), pp. 632–644.

- [9] Edgar Morín. “El paradigma perdido. Ensayo de bioantropología.” In: (1974).
- [10] Claudio Castellano, Santo Fortunato, and Vittorio Loreto. “Statistical physics of social dynamics”. In: *Reviews of modern physics* 81.2 (2009), p. 591.
- [11] David Landau and Kurt Binder. *A guide to Monte Carlo simulations in statistical physics*. Cambridge university press, 2021.
- [12] Shihuan Liu, Lei Ying, and Srinivas Shakkottai. “Influence maximization in social networks: An ising-model-based approach”. In: *2010 48th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton)*. IEEE, 2010, pp. 570–576.
- [13] Dietrich Stauffer. “Social applications of two-dimensional Ising models”. In: *American Journal of Physics* 76.4 (2008), pp. 470–473.
- [14] Georg Zaklan, Frank Westerhoff, and Dietrich Stauffer. “Analysing tax evasion dynamics via the Ising model”. In: *Journal of Economic Interaction and Coordination* 4.1 (2009), pp. 1–14.
- [15] Fa-Yueh Wu. “The potts model”. In: *Reviews of modern physics* 54.1 (1982), p. 235.
- [16] William Ogilvy Kermack and Anderson G McKendrick. “A contribution to the mathematical theory of epidemics”. In: *Proceedings of the royal society of london. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character* 115.772 (1927), pp. 700–721.
- [17] Alejandro Carballosa, Mariamo Mussa-Juane, and Alberto P Muñuzuri. “Incorporating social opinion in the evolution of an epidemic spread”. In: *Scientific Reports* 11.1 (2021), pp. 1–12.
- [18] Robert Axelrod. “The dissemination of culture: A model with local convergence and global polarization”. In: *Journal of conflict resolution* 41.2 (1997), pp. 203–226.

- [19] Ignacio Vidal-Franco, Jacobo Guiu-Souto, and Alberto P Muñuzuri. “Social media enhances languages differentiation: a mathematical description”. In: *Royal Society open science* 4.5 (2017), p. 170094.
- [20] Xavier Castelló, Víctor M Eguíluz, and Maxi San Miguel. “Ordering dynamics with two non-excluding options: bilingualism in language competition”. In: *New Journal of Physics* 8.12 (2006), p. 308.
- [21] Els Heinsalu, Marco Patriarca, and Jean Léo Léonard. “The role of bilinguals in language competition”. In: *Advances in Complex Systems* 17.01 (2014), p. 1450003.
- [22] A.Loskutov and A.S.Mikhailov. “Introduction into Synergetics”. In: (1990).
- [23] Félix Guatarri Gilles Deleuze. “Mil mesetas. Capitalismo y esquizofrenia”. In: (1980), pp. 12, 14, 15.
- [24] Alain Barrat, Marc Barthelemy, Romualdo Pastor-Satorras, and Alessandro Vespignani. “The architecture of complex weighted networks”. In: *Proceedings of the national academy of sciences* 101.11 (2004), pp. 3747–3752.
- [25] Duncan J Watts and Steven H Strogatz. “Collective dynamics of ‘small-world’ networks”. In: *nature* 393.6684 (1998), pp. 440–442.
- [26] Paul W Holland and Samuel Leinhardt. “Transitivity in structural models of small groups”. In: *Comparative group studies* 2.2 (1971), pp. 107–124.
- [27] Stanley Wassermann and Katherine Faust. *Social network analysis: Methods and applications*. 1994.
- [28] Réka Albert and Albert-László Barabási. “Statistical mechanics of complex networks”. In: *Reviews of modern physics* 74.1 (2002), p. 47.

- [29] Paul Erdős and Alfréd Rényi. “On the evolution of random graphs”. In: *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci* 5.1 (1960), pp. 17–60.
- [30] Mariamo Mussa Juane, David García-Selfa, and Alberto P Muñuzuri. “Turing instability in nonlinear chemical oscillators coupled via an active medium”. In: *Chaos, Solitons & Fractals* 133 (2020), p. 109603.
- [31] Stephen Dolan. “Six degrees of Wikipedia”. In: *Retrieved June* (2008).
- [32] Shudong Jin and Azer Bestavros. “Small-world characteristics of internet topologies and implications on multicast scaling”. In: *Computer Networks* 50.5 (2006), pp. 648–666.
- [33] Danielle Smith Bassett and ED Bullmore. “Small-world brain networks”. In: *The neuroscientist* 12.6 (2006), pp. 512–523.
- [34] Andreas Wagner and David A Fell. “The small world inside large metabolic networks”. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences* 268.1478 (2001), pp. 1803–1810.
- [35] Asim Bikas Das. “Small-world networks of prognostic genes associated with lung adenocarcinoma development”. In: *Genomics* 112.6 (2020), pp. 4078–4088.
- [36] Félix Guatarri Gilles Deleuze. “Mil mesetas. Capitalismo y esquizofrenia”. In: (1980), p. 19.
- [37] AL BArABási. “BonABeAu e., 2003”. In: *Scale-Free Networks* (), pp. 60–9.
- [38] Albert-László Barabási and Réka Albert. “Emergence of scaling in random networks”. In: *science* 286.5439 (1999), pp. 509–512.
- [39] Michalis Faloutsos, Petros Faloutsos, and Christos Faloutsos. “On power-law relationships of the internet topology”. In: *ACM SIGCOMM computer communication review* 29.4 (1999), pp. 251–262.

- [40] Andrei Broder, Ravi Kumar, Farzin Maghoul, Prabhakar Raghavan, Sridhar Rajagopalan, Raymie Stata, Andrew Tomkins, and Janet Wiener. “Graph structure in the web”. In: *Computer networks* 33.1-6 (2000), pp. 309–320.
- [41] Suzana Herculano-Houzel. “The human brain in numbers: a linearly scaled-up primate brain”. In: *Frontiers in human neuroscience* 3 (2009), p. 31.
- [42] Réka Albert, Hawoong Jeong, and Albert-László Barabási. “Diameter of the world-wide web”. In: *nature* 401.6749 (1999), pp. 130–131.
- [43] Albert-László Barabási. “Network science”. In: (2014).
- [44] AL Barabási. “The Seventh Link: Rich Get Richer”. In: *Linked: The New Science of Networks* 1 (2002), p. 82.
- [45] Félix Guatarri Gilles Deleuze. “Mil mesetas. Capitalismo y esquizofrenia”. In: (1980), p. 18.
- [46] Ceni A. Milic-Frayling N. Shneiderman B. Mendes Rodrigues E. Leskovec J. Dunne C. Smith M. “NodeXL: a free and open network overview, discovery and exploration add-in for Excel 2007/2010/2013/2016, <http://nodexl.codeplex.com/> from the Social Media Research Foundation, <http://www.smrfoundation.org>”. In: (2010).
- [47] Jacomy M. Bastian M. Heymann S. “Gephi: an open source software for exploring and manipulating networks”. In: (2009).
- [48] J Clement. “Global social networks ranked by number of users 2020”. In: *Statista. com* (2020).
- [49] Hans G Othmer and LE Scriven. “Instability and dynamic pattern in cellular networks”. In: *Journal of theoretical biology* 32.3 (1971), pp. 507–537.
- [50] Alan Mathison Turing. “The chemical basis of morphogenesis”. In: *Bulletin of mathematical biology* 52.1 (1990), pp. 153–197.

- [51] John E Fowler and Ralph S Quatrano. “Cell polarity, asymmetric division, and cell fate determination in brown algal zygotes”. In: *seminars in DEVELOPMENTAL BIOLOGY*. Vol. 6. 5. Elsevier. 1995, pp. 347–358.
- [52] LV Belousov, NI Kazakova, NN Luchinskaia, and VLADIMIR V Novoselov. “Studies in developmental cytomechanic.” In: *International Journal of Developmental Biology* 41.6 (2004), pp. 793–799.
- [53] Stephen M Miller. “Volvox, Chlamydomonas, and the evolution of multicellularity”. In: *Nature Education* 3.9 (2010), p. 65.
- [54] Knut Drescher, Kyriacos C Leptos, Idan Tuval, Takuji Ishikawa, Timothy J Pedley, and Raymond E Goldstein. “Dancing volvox: hydrodynamic bound states of swimming algae”. In: *Physical review letters* 102.16 (2009), p. 168101.
- [55] Antoni Van Leeuwenhoek. “IV. Part of a letter from Mr Antony Van Leeuwenhoek, concerning the worms in Sheeps livers, Gants and animalcula in the excrements of Frogs”. In: *Philosophical transactions of the Royal Society of London* 22.261 (1753), pp. 509–518.
- [56] Gogu Gheorghita. “SOME CONSIDERATIONS ON THE TRANSITION FROM UNICELLULAR TO MULTICELLULAR LIFE”. In: *Analele Stiintifice ale Universitatii” Alexandru Ioan Cuza” din Iasi Sec. II a. Genetica si Biologie Moleculara* 18.2 (2017), pp. 47–58.
- [57] GO Mackie, PR Pugh, and JE Purcell. “Siphonophore biology”. In: *Advances in Marine biology* 24 (1988), pp. 97–262.
- [58] Steven HD Haddock, Casey W Dunn, Philip R Pugh, and Christine E Schnitzler. “Bioluminescent and red-fluorescent lures in a deep-sea siphonophore”. In: *Science* 309.5732 (2005), pp. 263–263.
- [59] Anatol Eberhard. “Inhibition and activation of bacterial luciferase synthesis”. In: *Journal of Bacteriology* 109.3 (1972), pp. 1101–1105.

- [60] Betty Kientz, Stephen Luke, Peter Vukusic, Renaud Péteri, Cyrille Beaudry, Tristan Renault, David Simon, Tâm Mignot, and Eric Rosenfeld. “A unique self-organization of bacterial sub-communities creates iridescence in *Cellulophaga lytica* colony biofilms”. In: *Scientific reports* 6.1 (2016), pp. 1–11.
- [61] Stuart H Orkin and Leonard I Zon. “Hematopoiesis: an evolving paradigm for stem cell biology”. In: *Cell* 132.4 (2008), pp. 631–644.
- [62] Tineke A Troost, Bob W Kooi, and Sebastiaan ALM Kooijman. “When do mixotrophs specialize? Adaptive dynamics theory applied to a dynamic energy budget model”. In: *Mathematical biosciences* 193.2 (2005), pp. 159–182.
- [63] Tineke A Troost, Bob W Kooi, and Sebastiaan ALM Kooijman. “Ecological specialization of mixotrophic plankton in a mixed water column”. In: *The American Naturalist* 166.3 (2005), E45–E61.
- [64] Edward A Laws, Paul G Falkowski, Walker O Smith Jr, Hugh Ducklow, and James J McCarthy. “Temperature effects on export production in the open ocean”. In: *Global Biogeochemical Cycles* 14.4 (2000), pp. 1231–1246.
- [65] Paul Falkowski. “Ocean science: the power of plankton”. In: *Nature* 483.7387 (2012), S17–S20.
- [66] Peter Buston. “Size and growth modification in clownfish”. In: *Nature* 424.6945 (2003), pp. 145–146.
- [67] Hiroya Nakao and Alexander S Mikhailov. “Turing patterns in network-organized activator–inhibitor systems”. In: *Nature Physics* 6.7 (2010), pp. 544–550.
- [68] Vladimir K Vanag and Irving R Epstein. “Cross-diffusion and pattern formation in reaction–diffusion systems”. In: *Physical Chemistry Chemical Physics* 11.6 (2009), pp. 897–912.
- [69] Hongwei Yin, Xiaoyong Xiao, and Xiaoqing Wen. “Turing patterns in a predator-prey system with self-diffusion”. In: *Abstract and Applied Analysis*. Vol. 2013. Hindawi. 2013.

- [70] Guido Van Rossum and Fred L Drake Jr. *Python reference manual*. Centrum voor Wiskunde en Informatica Amsterdam, 1995.
- [71] Jorge Mira, Luis F Seoane, and Juan J Nieto. “The importance of interlinguistic similarity and stable bilingualism when two languages compete”. In: *New Journal of Physics* 13.3 (2011), p. 033007.
- [72] Sayat Mimar, Mariamo Mussa Juane, Juyong Park, Alberto P Munuzuri, and Gourab Ghoshal. “Turing patterns mediated by network topology in homogeneous active systems”. In: *Physical review E* 99.6 (2019), p. 062303.
- [73] Mariamo Mussa Juane, Luis F Seoane, Alberto P Muñuzuri, and Jorge Mira. “Urbanity and the dynamics of language shift in Galicia”. In: *Nature communications* 10.1 (2019), pp. 1–9.
- [74] Albert Bastardas Boada Àngels Massip Bonet. “Compléxica. Cerebro, sociedad y lengua desde la transdisciplinariedad”. In: (2014).
- [75] Teresa Moure. “Lingüística eco-. O estudo das línguas no Antropoceno”. In: (2019).
- [76] Sayat Mimar, Mariamo Mussa Juane, Jorge Mira, Juyong Park, Alberto P Munuzuri, and Gourab Ghoshal. “Linguistic evolution driven by network heterogeneity and the Turing mechanism”. In: *Physical Review Research* 3.2 (2021), p. 023241.
- [77] Juan Pablo Pinasco and Liliana Romanelli. “Coexistence of languages is possible”. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 361.1 (2006), pp. 355–360.
- [78] Anne Kandler and James Steele. “Ecological models of language competition”. In: *Biological Theory* 3.2 (2008), pp. 164–173.
- [79] Hugo Barbosa, Marc Barthelemy, Gourab Ghoshal, Charlotte R James, Maxime Lenormand, Thomas Louail, Ronaldo Menezes, José J Ramasco, Filippo Simini, and Marcello Tomasini. “Human mobility: Models and applications”. In: *Physics Reports* 734 (2018), pp. 1–74.

- [80] George Kingsley Zipf. “The P 1 P 2/D hypothesis: on the intercity movement of persons”. In: *American sociological review* 11.6 (1946), pp. 677–686.
- [81] Agustín Fernández Mallo. “Teoría general de la basura”. In: (2020), p. 327.
- [82] María Reimóndez. “Cobiza”. In: (2021), p. 186.

