FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Superficies separables

Iria Pose Lagoa

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Superficies separables

Iria Pose Lagoa

Xullo, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía
Título: Superficies separables
Breve descrición do contido
Unha superficie no espazo Euclídeo dise separable se pode ser expresada de forma implícita por unha ecuación do tipo $f(x)+g(y)+h(z)=0$, para algunhas funcións reais f, g e h. A motivación para estudar estas superficies vén da análise clásica de superficies minimais, con exemplos como o catenoide ou o helicoide. O obxectivo do traballo é analizar as superficies separables con curvatura de Gauss constante e curvatura media constante.

Índice xeral

Resumo

O obxectivo desta memoria é estudar as superficies separables no espazo Euclídeo. Ditas superficies están determinadas por unha ecuación $f(x) + g(y) + h(z) = 0$ onde f, g e h son funcións reais dunha variable real e conteñen ás superficies de translación e de revolución como casos particulares. Proporcionarase unha clasificación completa das superficies separables con curvatura de Gauss constante, distinguindo os casos en que dita curvatura é cero ou non, así como das superficies con curvatura media constante non minimais.

Abstract

The objective of this project is to study separable surfaces in the Euclidean space. These surfaces can be expressed as an equation of type $f(x) + g(y) + h(z) = 0$ where f, g and h are real functions of one real variable. The particular cases of these surfaces are translation and revolution surfaces. We will provide a complete classification of separable surfaces with constant Gauss curvature, telling the difference between $K = 0$ and $K = c \neq 0$, and surfaces of revolution with constant mean curvature that are not minimal surfaces.

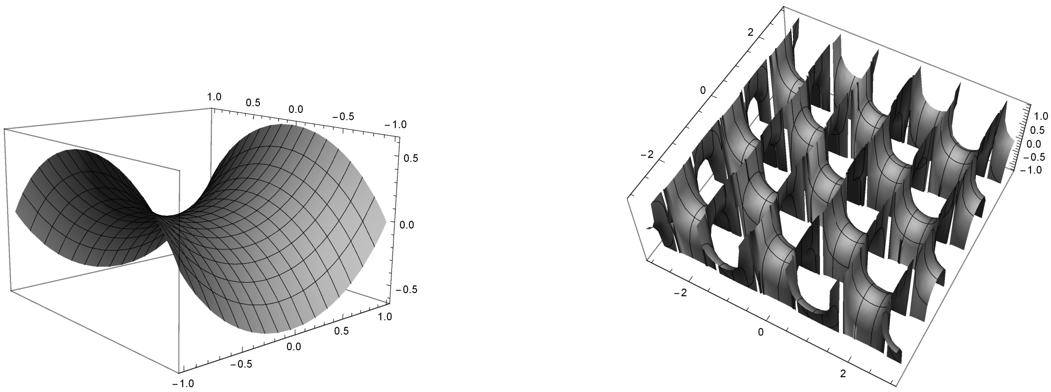
Introdución

Intuitivamente, entendemos por curvatura dunha superficie á maneira na que o plano tanxente á mesma varía en cada punto ou, o que é o mesmo, á maneira na que varía o seu vector normal. A curvatura de Gauss e a curvatura media constitúen as dúas curvaturas fundamentais dunha superficie e resultan ser moi distintas entre elas. En efecto, a curvatura de Gauss é unha cantidade xeométrica intrínseca, que depende da propia xeometría da superficie, mentres que a curvatura media é unha cantidade xeométrica extrínseca, pois o seu valor depende de como a superficie estea inmersa no espazo ambiente tridimensional. Dito doutra forma, unha mesma superficie pode meterse no espazo euclídeo de diferentes maneiras e con distintos valores para a súa curvatura media.
Por outra banda, o feito de que a curvatura, tanto de Gauss como media, dunha superficie sexa ou non constante, pode resultar interesante e incluso importante. Por exemplo, en problemas de optimización pode resultar de utilidade o feito de que, se unha superficie non ten curvatura media constante, esta non pode minimizar o volume que encerra pois, matematicamente, unha superficie con curvatura media constante do espazo ambiente minimiza localmente, entre todas as superficies con igual fronteira, a área sen cambiar o volume que encerra.

Consideremos agora o espazo euclídeo 3-dimensional $\mathbb{R}^3$ dotado da métrica euclídea que, en coordenadas cartesianas (x, y, z), se expresa como $\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle = dx^2 + dy^2 + dz^2$. O noso estudo neste traballo terá como fin responder á pregunta de cales son as superficies separables de $\mathbb{R}^3$ con curvatura de Gauss e curvatura media constante. Unha superficie regular en $\mathbb{R}^3$ dirase unha *superficie separable* se pode ser expresada mediante unha ecuación implícita do xeito

$$f(x) + g(y) + h(z) = 0,$$

onde $f(x)$, $g(y)$ e $h(z)$ son funcións reais dunha variables real. Así a condición característica deste tipo de superficies non é xeométrica, senón que constitúe un aspecto puramente analítico. O estudo das superficies separables ten as súas orixes na teoría das superficies minimais, sendo o catenoide (Euler, 1744) e o helicoide (Meusnier, 1766) as dúas primeiras superficies minimais descubertas na historia que tamén comparten a condición de ser separables. Porén, foi Scherk quen, en 1835, deu coas ecuacións explícitas de novas superficies mínimas e separables. Para iso, fixo uso de técnicas analíticas de separación de variables. Scherk conseguiu clasificar todas as superficies minimais do tipo $z = \Phi(x) + \Psi(y)$, onde Φ e Ψ son dúas funcións reais.



(a) $z = \log \frac{\cos(y)}{\cos(x)}$ (b) $z = \frac{1}{3} \log \frac{\cos(3y)}{\cos(3x)}$

Figura 1: Superficie de Scherk similar a repetición dunha cadeira de montar.

Máis tarde, en 1887, Weingarten mostrou que as superficies separables do tipo $f(x) + g(y) + h(z) = 0$ constituían unha ampla familia de superficies minimais dadas en termos de integrais elípticas e superficies periódicas. Non obstante, foi Fréchet quen máis tarde proporcionou parametrizacións explícitas de algunha delas.

O principal obxectivo deste traballo será determinar as superficies separables de $\mathbb{R}^3$ con curvatura de Gauss constante ou curvatura media constante, a excepción das superficies minimais. Dun modo mais preciso, o traballo estruturase como segue.

No primeiro capítulo introduciranse as condicións de regularidade que se dan sobre as superficies, así como as nocións básicas que podemos definir a partir delas, como o son a primeira e a segunda formas fundamentais. Ademais, introducirase o concepto de superficie dada en forma implícita e desenvolveranse as expresións explícitas das curvaturas de Gauss e media para as mesmas, pois serán de utilidade no noso estudo.

No segundo capítulo, introducirase o concepto de superficie separable e farase unha breve análise dos principais tipos de superficies separables sobre as que traballaremos. Dunha forma xeral, e dependendo do comportamento das funcións f, g e h, teranse distintos casos particulares deste tipo de superficies que son ben coñecidos ao longo da historia: as superficies cilíndricas, as superficies de translación e as superficies de revolución.

No terceiro capítulo damos resposta ao primeiro problema deste traballo: cales son as superficies separables con curvatura de Gauss constante. O feito de que as curvaturas principais, e en consecuencia a curvatura de Gauss, sexan constantes é unha condición moi restritiva, pois unha superficie cumprindo tal condición ha de ser localmente isométrica a un plano, unha esfera ou un cilindro circular recto [11]. A esfera, o plano, o cilindro e o cono son os exemplos máis coñecidos de superficies con curvatura de Gauss constante cero, pero existen moitos outros exemplos de tales superficies. A análise das superficies separables con curvatura de Gauss constante dependerá de si dita curvatura é cero ou non. O caso de curvatura de Gauss constante non nula é moi ríxido e as únicas posibles solucións veñen dadas polas superficies de revolución como mostra o seguinte Teorema.

Theorem 3.3. [5] *As únicas superficies separables con curvatura de Gauss constante e distinta de cero son as superficies de revolución con curvatura de Gauss constante cuxo eixo de rotación é paralelo a un dos tres eixos coordenados.*

Nótese que é posible construír exemplos de superficies con curvatura de Gauss constante positiva ou negativa a partir das superficies de revolución, variando a curva xeratriz. Así, para o caso de curvatura positiva, aparecen ademais das esferas, outras superficies de tipo barril ou balón de rugby. No caso de curvatura negativa, ademais da pseudoesfera, aparecen outras familias de superficies do tipo cónico ou hiperbólico. A esfera e a pseudoesfera correspóndense cos valores límite das outras familias de superficies de revolución con curvatura de Gauss constante [1]. A situación correspondente á anulación da curvatura de Gauss recolle un abanico máis amplo de superficies tal e como se enuncia no seguinte Teorema.

Theorem 3.1. [5] *As únicas superficies separables con curvatura de Gauss identicamente nula son congruentes con:*

1. *Un cilindro recto sobre unha curva plana contida nun dos planos coordenados.*
2. *Unha superficie de translación $z = ax + g(y)$, onde $a \neq 0$ e g é unha función regular.*
3. *Unha superficie de revolución con curvatura de Gauss cero.*
4. *Unha superficie cilíndrica e unha superficie cónica con parametrizacións*

$$m_3 z + n_3 = (m_1 x + n_1)^p (m_2 y + n_2)^q, \tag{1}$$

$$n_1 e^{m_1 x} + n_2 e^{m_2 y} + n_3 e^{m_3 z} = 0, \tag{2}$$

$$(m_1 x + n_1)^{1/(1-k)} + (m_2 y + n_2)^{1/(1-k)} + (m_3 z + n_3)^{1/(1-k)} = 0, \tag{3}$$

onde $m_i, n_i \in \mathbb{R}$, $m + q = 1$ e $k \neq 1$.

No capítulo catro, darase resposta ao segundo obxectivo deste traballo, o estudo das superficies separables con curvatura media constante e distinta de cero. Estas superficies resultarán ser as que se coñecen como *superficies de Delaunay*, que non son máis que as superficies de revolución con curvatura media constante. Así, as superficies de Delaunay son os cilindros, as catenoides, as onduloides e as nodoides. Estas constituirán os únicos exemplos de superficies separables con curvatura media constante distinta de cero, feito que establece o seguinte teorema.

Theorem 4.1. [6] *As superficies de Delaunay, excepto o plano e o catenoide, son as únicas superficies separables no espazo Euclídeo de* $\mathbb{R}^3$ *con curvatura media constante e distinta de cero.*

A obtención xeométrica destas superficies foi proposta tamén polo propio Delaunay. Delaunay estableceu que as xeratrices das superficies de revolución con curvatura media constante obtéñense como a ruleta das cónicas (circunferencia, elipse, parábola e hipérbole). Se imaxinamos que nun foco da cónica hai un lapis de cor e a facemos xirar, sen deslizarse, sobre unha recta, o que pinta o lapis é a ruleta. Ao revolucionar a ruleta en torno a un dos tres eixos, obtéñense as superficies de revolución de curvatura media constante das que falamos. Desta maneira, tense que facendo xirar a elipse sobre unha liña recta e pintando a súa ruleta obtense unha ondularia, que é a curva xeratriz dunha onduloide. Como a circunferencia é un caso particular da elipse, podemos considerar o cilindro un caso límite. Isto é, se facemos rodar unha circunferencia con foco o centro, resulta claro que a ruleta será unha liña recta horizontal, isto é, a xeratriz dun cilindro. Así mesmo, facendo rodar unha catenaria obtense unha catenoide e facendo rodar unha hipérbole obtense unha noidoide.

Capítulo 1

Preliminares

O obxectivo deste capítulo será introducir a terminoloxía e nocións básicas da teoría de superficies regulares. Denotemos por $\mathbb{R}^3$ o espazo Euclídeo 3-dimensional, isto é, o espazo vectorial real 3-dimensional coa métrica Euclídea

$$\langle \cdot\, , \cdot \rangle = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

onde (x, y, z) representan as coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^3$.

1.1. Superficies regulares

Introduciremos agora a noción de superficie parametrizada en $\mathbb{R}^n$, como unha xeneralización directa á dimensión 2 dunha curva en $\mathbb{R}^n$, isto é, como unha función de dúas variables cuxa imaxe é un subconxunto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1. Unha *superficie parametrizada* é unha aplicación diferenciable

$$\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$$

sendo $\mathcal{U}$ un subconxunto aberto de $\mathbb{R}^2$. En xeral, se A é un subconxunto arbitrario de $\mathbb{R}^2$, dise que unha aplicación $\mathbf{x}\colon A \to \mathbb{R}^n$ é unha superficie parametrizada se $\mathbf{x}$ pode ser estendida a unha aplicación diferenciable de $\mathcal{U}$ en $\mathbb{R}^n$, sendo $\mathcal{U}$ un subconxunto aberto que contén a A.

Esta definición permítenos definir agora o concepto de superficie regular en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.2. Un subconxunto non baleiro $\mathcal{M}\subset \mathbb{R}^n$ é unha *superficie regular* se para todo punto p de $\mathcal{M}$ existe un entorno aberto $\mathcal{V}$ de p en $\mathbb{R}^n$ e unha aplicación $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ dun subconxunto aberto $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^n$ sobre $\mathcal{V} \cap \mathcal{M}$ tal que:

(I) $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ é diferenciable;

(II) $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V} \cap \mathcal{M}$ é un homeomorfismo;

(III) para todo $q \in \mathcal{U}$, a diferencial $d\mathbf{x}_q\colon \mathbb{R}^2_q \to \mathbb{R}^n_{x(q)}$ é inxectiva, isto é, cada aplicación $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ é unha superficie parametrizada regular.

Cada unha destas aplicacións $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ denomínase *carta local* ou sistema de coordenadas locais nun entorno de $p \in \mathcal{M}$.

A fin de recordar os conceptos de primeira e segunda forma fundamental, introduciremos unha serie de definicións previas.

Definición 1.3. Unha *curva* sobre unha superficie regular $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ é unha aplicación $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha(t) \in \mathcal{M}$ para $a < t < b$.

A curva α dise *diferenciable* se a composición $\mathbf{x} \circ \alpha\colon (a,b) \to \mathcal{U}$ é diferenciable para calquera parametrización local $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \to \mathcal{M}$, sendo $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$.

A anterior definición permítenos introducir o concepto de vector tanxente a unha superficie regular.

Definición 1.4. Sexa $\mathcal{M}$ uha superficie regular en $\mathbb{R}^n$ e sexa $p \in \mathcal{M}$. Diremos que $\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n_p$ é *tanxente* a $\mathcal{M}$ en p se existe unha curva $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = \mathbf{v_p}$ e $\alpha(t) \in \mathcal{M}$ para $a < t < b$. O espazo tanxente a $\mathcal{M}$ en p é o conxunto

$$\mathcal{M}_p = \{\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n_p \mid \mathbf{v}_p \text{ é tanxente a } \mathcal{M} \text{ en } p\}.$$

Notación 1.5. Cando falemos do espazo euclídeo de $\mathbb{R}^3$ denotaremos o plano tanxente a unha superficie $\mathcal{M}$ no punto p por $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$. A condición (III) da definición de superficie regular vai resultar esencial para dotar ao plano tanxente da estrutura de espazo vectorial.

No espazo euclídeo de $\mathbb{R}^3$, a restrición do produto escalar de $\mathbb{R}^3$ ao plano tanxente $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$ en cada punto da superficie induce unha norma, á cal chamaremos primeira forma fundamental. Isto é, considerando a forma bilinear, simétrica e definida positiva,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p \colon \mathcal{T}_p\mathcal{M} \times \mathcal{T}_p\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R},$$

que vén dada por $\langle v, w \rangle_p = \langle v, w \rangle$, para calquera vectores $v, w \in \mathcal{T}_p\mathcal{M}$, chamaremos *primeira forma fundamental* dunha superficie regular $\mathcal{M}$ no punto p á forma cadrática

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_p \colon \mathcal{T}_p\mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto \mathbb{I}_p(w) := \|w\|^2 = \langle w, w \rangle. \end{aligned}$$

Dada unha parametrización local $(U, \mathbf{x})$ da superficie $\mathcal{M}$, temos a seguinte definición.

Definición 1.6. Sexa $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ unha superficie parametrizada. Chamamos coeficientes da primeira forma fundamental ás funcións $E, F, G\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p, \quad F = \langle \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v \rangle_p, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p.$$

Entón, podemos expresar a primeira forma fundamental como

$$\mathbb{I}_p = Edu \otimes du + F(du \otimes dv + dv \otimes du) + Gdv \otimes dv,$$

sendo $\{du, dv\}$ a base de $\mathcal{T}_p^*\mathcal{M}$, que é o espazo vectorial dual da base de campos coordenados.

A primeira forma fundamental permítenos falar de aspectos xeométricos intrínsecos da superficie como o son as lonxitudes, ángulos ou áreas. Isto dá lugar a noción de isometría local, como aquela aplicación que conserva a primeira forma fundamental entre dúas superficies e, en consecuencia, preserva todos os conceptos métricos que podemos definir a través dela.

Definición 1.7. Unha *isometría local* entre dúas superficies regulares, $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$, é unha aplicación diferenciable $\Phi\colon \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ que conserva a primeira forma fundamental, é dicir, que conserva o produto escalar

$$\langle d\Phi_p(v), d\Phi_p(w) \rangle = \langle v, w \rangle,$$

para cada $p \in \mathcal{M}_1$ e calquera $v, w \in T_p\mathcal{M}_1$.

Así, Φ é unha isometría local, se e só se, é unha aplicación diferenciable onde a diferencial $d\Phi_p\colon T_p\mathcal{M}_1 \to T_{\Phi(p)}\mathcal{M}_2$ é unha isometría lineal.
Se dúas superficies $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ son localmente isométricas, sempre vai ser posible elixir parametrizacións de cada unha delas, con dominio común, de tal xeito que os coeficientes da primeira forma fundamental coincidan en ambas.

Observación 1.8. A anterior definición establece unha equivalencia xeométrica entre superficies regulares. Porén, esta equivalencia só se da de forma local. Para poder atopar unha identificación total entre dúas superficies é necesario, ademais, que ambas sexan idénticas dende o punto de vista topolóxico e diferenciable. Un exemplo disto ocorre co plano e o cilindro, onde a isometría global non ten cabida, pois non son nin sequera homeomorfos.

Outro tipo de aplicación que se dá entre dúas superficies arbitrarias, $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$, e que nos vai ser de utilidade á hora de simplificar o noso estudo é a que introducimos a continuación. Denotemos por $O(n)$ ao subgrupo ortogonal, isto é, aos isomorfismos lineais $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que preservan o produto escalar $\langle G\vec{x}, G\vec{y} \rangle = \langle x, y \rangle$ para calquera $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Un *movemento ríxido* de $\mathbb{R}^3$ é unha aplicación diferenciable, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que conserva a distancia euclidiana, isto é,

$$d(F(p), F(q)) = \|F(q) - F(p)\| = \|q - p\| = d(p, q).$$

Claramente, toda transformación ortogonal é un movemento ríxido, ao igual que as translacións $T_{\vec{b}}$ por un vector dado $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$. O seguinte resultado mostra que, de feito, todo movemento ríxido vén dado por unha transformación ortogonal especial e unha translación.

Teorema 1.9. *Sexa $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un movemento ríxido. Entón existe $G \in O(n)$ e unha translación $T_{\vec{b}}$ de forma que $F = T_{\vec{b}} \circ G$.*

Observación 1.10. Toda transformación ortogonal verifica que $\det G = \pm 1$. Se o $det(G) = 1$ falaremos de movemento ríxido *directo* ou que *conserva a orientación*, pola contra falaremos de movemento ríxido *inverso* ou que *inverte a orientación* se o $det(G) = -1$.

Definición 1.11. Dúas superficies, $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$, dinse *congruentes* se existe un movemento ríxido $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de forma que $\mathcal{M}_2 = F(\mathcal{M}_1)$.

Resulta sinxelo ver que dúas superficies congruentes son isométricas. Porén, o recíproco non é certo. Dúas superficies poden ser isométricas e non existir ningún movemento ríxido de $\mathbb{R}^3$ entre elas, como ocorre no caso do cilindro e o plano.

Para poder introducir a definición da segunda forma fundamental necesitamos recordar o que coñecemos por aplicación de Gauss. Intuitivamente, a noción de vector perpendicular a unha superficie en $\mathbb{R}^3$ é clara. O produto vectorial en $\mathbb{R}^3$ proporciónanos un método útil para a determinación dun vector ortogonal a dous vectores dados. Deste xeito, para unha superficie parametrizada regular $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ o *campo de vectores normal e unitario* ou *normal unitario* $\mathbf{U}$ da superficie está dado por:

$$\mathbf{U}(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\| \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \|}(u, v). \tag{1.1}$$

Observación 1.12. A posibilidade de construír un campo de vectores normais depende da orientación da superficie pero, como o noso traballo se vai centrar en cuestións locais, asumiremos sen ningunha restrición esta condición.

A aplicación que asigna a cada punto p dunha superficie, $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^3$, o punto sobre a esfera unidade, $\mathbb{S}^2(1) \subset \mathbb{R}^3$, cuxo vector de posición vén dado polo vector unitario, $\mathbf{U}(p)$, recibe o nome de *aplicación de Gauss*.

Un bo método para poder determinar como se curva unha superficie regular $\mathcal{M}$ en $\mathbb{R}^3$ consiste en medir como varía a normal unitaria $\mathbf{U}$ da superficie punto a punto. O operador lineal autoadxunto que nos permitirá facelo denomínase *Operador Forma*, que aplicado a un vector $\mathbf{v}_p$ é o oposto da derivada de $\mathbf{U}$ na dirección de $\mathbf{v}_p$.

Definición 1.13. Sexa $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^3$ unha superficie regular e sexa $\mathbf{U}$ unha normal unitaria dunha superficie $\mathcal{M}$ definida nun entorno dun punto $p \in \mathcal{M}$. Para cada vector $\mathbf{v}_p$ tanxente a $\mathcal{M}$ en p, definimos o *operador forma* como o endomorfismo

$$S(\mathbf{v}_p) = -\mathbf{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{U}.$$

O operador forma pódese considerar como a aplicación oposta da aplicación tanxente á aplicación de Gauss. Estamos xa en condicións de introducir a *segunda forma fundamental.*

Definición 1.14. Sexa $\mathcal{M}$ unha superficie regular e $p \in \mathcal{M}$ un punto de $\mathcal{M}$. Defínese a *segunda forma fundamental* dunha superficie como a forma cadrática asociada ao operador forma

$$\begin{aligned} \mathbb{II}_p \colon \mathcal{T}_p(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ w &\mapsto \mathbb{II}_p(w) := \langle S(\mathbf{w}_p), w\rangle = -\langle \mathbf{DU}(w), w\rangle. \end{aligned}$$

En términos dunha parametrización local $(\mathcal{U}, \mathbf{x})$ dunha superficie temos

$$\mathbb{II}_p = \mathbf{e} du \otimes du + \mathbf{f}(du \otimes dv + dv \otimes du) + \mathbf{g} dv \otimes dv,$$

onde as funcións compoñentes $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ veñen dadas por:

$$\mathbf{e} = \langle \mathbf{U}, \mathbf{x}_{uu}\rangle_p, \qquad \mathbf{f} = \langle \mathbf{U}, \mathbf{x}_{uv}\rangle_p, \qquad \mathbf{g} = \langle \mathbf{U}, \mathbf{x}_{vv}\rangle_p.$$

Sabemos que o operador forma $\mathcal{S}$ é un operador linear simétrico sobre cada espazo tanxente dunha superficie regular en $\mathbb{R}^3$. Por tanto, sabemos da álxebra lineal que os autovalores de S son reais. Estes autovalores, $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$, representan os valores máximos e mínimos da Segunda Forma Fundamental restrinxida ao círculo unidade de $\mathcal{T}_p(\mathcal{S})$ e reciben o nome de *curvaturas principais*. Os autovectores asociados denomínanse *direccións principais* [7], [2]. O endomorfismo dado polo operador forma está caracterizado, dende un punto de vista alxébrico, polo seu polinomio característico ou, o que o mesmo, polos seus invariantes alxébricos: a traza e o determinante. Ambos definen funcións sobre as superficies e desempeñarán un papel esencial no estudo das mesmas.

Definición 1.15. Sexa $\mathcal{M}$ unha superficie regular en $\mathbb{R}^3$. A *curvatura de Gauss*, K, e a *curvatura media*, H, de $\mathcal{M}$ son as funcións $K, H \colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$K(p) = det(S(p)) \quad \text{e} \quad H(p) = \frac{1}{2}tr(S(p)). \tag{1.2}$$

Ademais, as definicións de K e H non dependen da elección que se faga para a representación matricial do Operador Forma. Notemos tamén que, se ben o operador forma, S, e a curvatura media, H, dependen da elección da normal unitaria, $\mathbf{U}$, da superficie, a curvatura de Gauss, K, é independente de dita elección.

Teorema 1.16. *A curvatura de Gauss e a curvatura media dunha superficie regular $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ relaciónanse coas curvaturas principais mediante as expresións*

$$K = \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \quad \text{e} \quad H = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2).$$

Considerando a base do espazo tanxente en cada punto, as curvaturas de Gauss e media exprésanse como:

Teorema 1.17. *Sexa $\mathbf{x}\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ unha superficie parametrizada regular. Entón a curvatura de Gauss e a curvatura media de $\mathbf{x}$ están dadas polas expresións:*

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \tag{1.3}$$

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}, \tag{1.4}$$

onde e, f e g son os coeficientes da segunda forma fundamental de $\mathbf{x}$ e E, F e G son os coeficientes da súa primeira forma fundamental.

A expresión en coordenadas da segunda forma fundamental xunto coas fórmulas de Gauss e Weingarten, as cales se poden consultar en [7], permítennos demostrar que a anterior fórmula da curvatura de Gauss admite unha expresión que depende unicamente dos coeficientes da primeira forma fundamental, demostrando así que estamos ante un invariante intrínseco da xeometría dunha superficie.

Teorema 1.18 (Egregium de Gauss)**.** *Sexa $\Phi\colon \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ unha isometría local entre dúas superficies regulares $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathbb{R}^3$. Denotemos as curvaturas de Gauss de $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ por K_1 e K_2 respectivamente. Entón*

$$K_1 = K_2 \circ \Phi.$$

A pesar de ser un invariante intrínseco da xeometría dunha superficie, a curvatura de Gauss non permite caracterizar totalmente a mesma, pois podemos atopar superficies coa mesma curvatura de Gauss pero que non son localmente isométricas. De feito, o helicoide e a superficie de revolución determinada pola gráfica da función logaritmo teñen a mesma curvatura de Gauss, pero non son localmente isométricas [7]. Porén, o recíproco do Teorema Egregium de Gauss si se dá cando estamos ante superficies con curvatura de Gauss constante [2], [7].

Teorema 1.19. (Minding) *Se as superficies $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ teñen a mesma curvatura de Gauss constante entón son localmente isométricas.*

1.2. Superficies dadas en forma implícita

Ata o de agora, consideráronse superficies regulares definidas mediante cartas locais, isto é, a representación paramétrica dunha superficie regular. Outra alternativa para describir unha superficie regular, $\mathcal{M}$, é por medio dunha representación non paramétrica. Para unha superficie regular en $\mathbb{R}^3$ isto significa que $\mathcal{M}$ é o conxunto de puntos que son aplicados por unha función diferenciable $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ no mesmo número real. Vexamos isto:

Definición 1.20. Dada unha función f diferenciable, definida sobre un conxunto aberto $V \subset \mathbb{R}^3$, dicimos que p é un *punto crítico* de f se o vector gradiente é identicamente nulo $\nabla f_p = (f_x(p), f_y(p), f_z(p)) \equiv 0$. En tal caso, o valor $f(p)$ denomínase *valor crítico*. Se $a \in \mathbb{R}^3$ non é un valor crítico dicimos que é un *valor regular*.

Proposición 1.21. *Sexa $f : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ unha función diferenciable e $a \in \mathbb{R}$ un valor regular de f. Entón:*

$$\mathcal{M}(a) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid f(p) = a\} = f^{-1}(a) \tag{1.5}$$

é unha superficie regular de $\mathbb{R}^3$ denominada superficie de nivel. Ademais, o campo de vectores ∇f é perpendicular a $\mathcal{M}(a)$ en todos os seus puntos.

Demostración. Para cada $p \in \mathcal{M}(a)$ temos que atopar unha carta local dunha veciñanza de p. A hipótese de que $\nabla f_p \neq 0$ é equivalente a que polo menos unhas das derivadas parciais,

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\},$$

sexa non nula en p. Supoñamos sen perda de xeneralidade que $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. O Teorema da Función Implícita, que pode consultarse en [7], establece que, nestas condicións, a ecuación $f(x, y, z) = a$ pódese resolver en z. De forma máis precisa, existe unha función diferenciable h tal que

$$f(x, y, h(x, y)) = a.$$

Así, a carta local buscada defínese por:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, h(u, v)).$$

Ademais, sexa $\mathbf{v}_p = (v_1, v_2, v_3)_p \in \mathcal{M}(a)_p$. Existe entón unha curva α en $\mathcal{M}(a)$ con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \mathbf{v}_p$. Escribimos $\alpha(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t))$. Posto que α está contida en $\mathcal{M}(a)$, verifícase que $f(c_1(t), c_2(t), c_3(t)) = a$ para todo t. A regra da cadea implica entón que

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial f}{\partial u_i} \circ \alpha\right) \frac{dc_i}{dt} = 0.$$

En particular,

$$0 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial u_i}(\alpha(0))\frac{dc_i}{dt}(0) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial u_i}(p)v_i = \nabla_{f_p} \cdot \mathbf{v}_p.$$

Polo tanto, ∇_{f_p} é perpendicular a $\mathcal{M}(a)_p$ para cada $p \in \mathcal{M}(c)$. □

Como o gradiente dunha función $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é sempre perpendicular a cada unha das súas superficies de nivel, existe un método moi sinxelo para obter a aplicación de Gauss de tales superficies. Sexan $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ unha función diferenciable e a un número real tal que ∇f é non nulo en todos os puntos da superficie de nivel $\mathcal{M}(a) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid f(p) = a\}$. Entón, o campo de vectores $\mathbf{U}$ definido por

$$\mathbf{U} = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$$

é unha *normal unitaria* definida globalmente sobre $\mathcal{M}(a)$. Polo tanto, a aplicación de Gauss de $\mathcal{M}(a)$ pódese definir globalmente. Tamén é posible obter a expresión xeral da curvatura de Gauss e da curvatura media das superficies parametrizadas dadas en forma implícita. A expresión dunha tal superficie vén dada por:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, h(u, v)), \tag{1.6}$$

como vimos na demostración da Proposición 1.21. Tendo en conta a expresión da curvatura de Gauss en (1.3),

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

para o cálculo da mesma precisamos coñecer os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental. O mesmo ocorre coa curvatura media, que se obtén mediante a expresión:

$$H(p) = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}.$$

Derivando en (1.6) con respecto a cada variable, obtemos os seguintes campos coordenados:

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, h_u(u, v)), \quad \mathbf{x}_v = (0, 0, h_v(u, v)).$$

As derivadas segundas:

$$\mathbf{x}_{uu} = (0, 1, h_{uu}), \quad \mathbf{x}_{uv} = (0, 1, h_{uv}), \quad \mathbf{x}_{vv} = (0, 1, h_{vv}).$$

Para o cálculo do vector normal:

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & h_u(u, v) \\ 0 & 1 & h_v(u, v) \end{vmatrix} = (-h_u(u, v), -h_v(u, v), 1),$$

polo tanto:

$$\mathbf{U(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}}(-h_u, -h_v, 1).$$

Agora, xa estamos en condicións de calcular os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental:

$$\begin{array}{ll} E =< x_u, x_u >= 1 + h_x^2, & e =< \mathbf{U}, x_{uu} >= \frac{h_{uu}}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}}, \\ F =< x_u, x_v >= h_u h_v, & f =< \mathbf{U}, x_{uv} >= \frac{h_{uv}}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}}, \\ G =< x_v, x_v >= 1 + h_v^2, & g =< \mathbf{U}, x_{vv} >= \frac{h_{vv}}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}}. \end{array}$$

E, por tanto, podemos obter:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1+h_u^2 & h_u h_v \\ h_u h_v & 1+h_v^2 \end{pmatrix}, \quad L_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{h_{uu}}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}} & \frac{h_{uv}}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}} \\ \frac{h_{uv}}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}} & \frac{h_{vv}}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}} \end{pmatrix}.$$

Calculando agora ambos determinantes:

$$det(g_{ij}) = 1 + h_u^2 + h_v^2, \quad det(L_{ij}) = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{1 + h_u^2 + h_v^2}.$$

De onde a curvatura de Gauss toma a seguinte forma:

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{det(L_{ij})}{det(g_{ij})} = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^2}.$$

Seguindo un procedemento análogo obtemos tamén a expresión da curvatura media en función dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental:

$$H(p) = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{h_{uu}(1 + h_v^2) - 2h_{uv}h_u h_v + h_{vv}(1 + h_u^2)}{2(1 + h_u^2 + h_v^2)^{3/2}}.$$

Capítulo 2

Superficies separables

Posto que o obxectivo final deste traballo é chegar á clasificación das superficies separables con curvatura de Gauss e media constante, neste capítulo introducirase o concepto de superficie separable en $\mathbb{R}^3$ e daranse unha serie de resultados que nos serán de gran utilidade para o estudo. Ademais, como paso previo á clasificación que se fará en capítulos posteriores, analizaranse as superficies cilíndricas, de translación e de revolución como casos especiais de superficies separables.
Localmente, calquera superficie de $\mathbb{R}^3$ vén dada como un conxunto de nivel dunha función F definida nun conxunto aberto de $\mathbb{R}^3$. No que segue, o noso interese centrarase naquelas superficies onde a función F é unha función separable nas súas variables. Introdúcese agora de xeito formal o concepto de superficie separable.

Definición 2.1. Unha superficie (regular) $\mathcal{M}$ dise *separable* se pode ser expresada como

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) + g(y) + h(z) = 0\}, \tag{2.1}$$

para algunhas funcións regulares $f : I_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : I_2 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h : I_3 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Grazas a regularidade de S e das funcións f, g e h cúmprese que

$$f'(x)^2 + g'(y)^2 + h'(z)^2 \neq 0 \quad \text{para todo} \quad (x, y, z) \in I_1 \times I_2 \times I_3. \tag{2.2}$$

Antes de comezar coa clasificación destas superficies, veremos como se expresan a curvatura de Gauss, K, e a curvatura media, H, para unha superficie separable e regular $\mathcal{M}$ definida por unha ecuación implícita $F(x, y, z) = 0$, con F unha función regular de $\mathbb{R}^3$. Como se mostrou antes, a superficie $\mathcal{M} = F^{-1}(0)$ vén dada como a imaxe inversa dun valor regular e, polo tanto,

$$\nabla F_p = (F_x, F_y, F_z) \neq 0, \quad \text{en todo punto} \quad p \in \mathcal{M} = F^{-1}(0).$$

Esta condición implica que, polo menos, unha das tres derivadas parciais ha de ser distinta de cero. Ademais, como toda superficie regular $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^3$ vén dada, localmente e de xeito único, pola gráfica dunha función diferenciable da forma $z = h(x, y)$, $y = g(x, y)$ ou $x = f(x, y)$, pódese supoñer, sen perda de xeneralidade, que $F_z \neq 0$ nalgún entorno de $\mathcal{M}$ e que por tanto, a superficie $\mathcal{M}$ vén dada pola gráfica dunha función $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, isto é,

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, h(x, y)) = 0\}. \tag{2.3}$$

Considérese a seguinte parametrización local:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, h(u, v)) \tag{2.4}$$

para unha función $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $F(x, y, h(x, y)) = 0$. Como se demostrou no capítulo anterior, a curvatura de Gauss vén dada pola seguinte expresión:

$$K(p) = \frac{det(L_{ij})}{det(g_{ij})} = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2}.$$

Aínda que a función $h(u, v)$ no se coñece de forma explícita, as súas derivadas parciais poden ser calculadas a partir da ecuación $F(x, y, h(x, y)) = 0$. Derivando:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x}F(x, y, h(x, y)) = F_x + F_z h_x \quad \text{e, polo tanto,} \quad h_x = -\frac{F_x}{F_z}, \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial y}F(x, y, h(x, y)) = F_y + F_z h_y \quad \text{e, polo tanto,} \quad h_y = -\frac{F_y}{F_z}, \end{aligned}$$

onde o último paso está garantido grazas a condición que se está a supoñer de que $F_z \neq 0$. De xeito semellante, obtéñense as derivadas segundas:

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{\partial^2}{\partial xx}F(x, y, h(x, y)) = F_{xx} + F_{zz}h_x^2 + 2F_{xz}h_x + F_z h_{xx} \quad \text{e, polo tanto,} \\ & h_{xx} = -\frac{1}{F_z}(F_{xx} + F_{zz}h_x^2 + 2F_{xz}h_x), \\ 0 =& \frac{\partial^2}{\partial xy}F(x, y, h(x, y)) = F_{zz}h_y h_x + F_{xy} + 2F_{xz}h_y + F_{zy}h_x + F_z h_{xy} \quad \text{e, polo tanto,} \\ & h_{xy} = -\frac{1}{F_z}(F_{zz}h_y h_x + F_{xy} + F_{xz}h_y + F_{zy}h_x), \\ 0 =& \frac{\partial^2}{\partial yy}F(x, y, h(x, y)) = F_{yy} + F_{zz}h_y^2 + 2F_{yz}h_y + F_z h_{yy} \quad \text{e, polo tanto,} \\ & h_{yy} = -\frac{1}{F_z}(F_{yy} + F_{zz}h_y^2 + 2F_{yz}h_y). \end{aligned}$$

Substituíndo agora estes valores na expresión da curvatura de Gauss:

$$\begin{aligned} K(p) = \big(& F_z^{-2}(F_{xx} + F_{zz}h_x^2 + 2F_{xz}h_x)(F_{yy} + F_{zz}h_y^2 + 2F_{yz}h_y) \\ & - F_z^{-1}(F_{zz}h_y h_x + F_{xy} + F_{xz}h_y + F_{zy}h_x)^2\big)\left(1 + F_x^2 F_z^{-2} + F_y^2 F_z^{-2}\right)^{-2}. \end{aligned}$$

Desenvolvendo o numerador:

$$F_z^{-2}\left(F_{xx}+F_{zz}h_x^2+2F_{xz}h_x\right)\left(F_{yy}+F_{zz}h_y^2+2F_{yz}h_y\right)-F_z^{-1}(F_{zz}h_yh_x+F_{xy}+F_{xz}h_y+F_{zy}h_x)^2$$

$$\begin{aligned}
=&F_z^{-2}(F_{zz}^2F_x^2F_y^2F_z^{-4}-2F_{zz}F_{xz}F_xF_y^2F_z^{-3}-2F_{zz}F_{yz}F_x^2F_yF_z^{-3}+F_{xx}F_{zz}F_y^2F_z^{-2}\\
&+F_{yy}F_{zz}F_x^2F_z^{-2}+4F_{xz}F_{yz}F_xF_yF_z^{-2}-2F_{xx}F_{yz}F_yF_z^{-1}-2F_{yy}F_{xz}F_xF_z^{-1}\\
&+F_{xx}F_{yy})-F_z^{-2}(F_{zz}^2F_x^2F_y^2F_z^{-4}-2F_{zz}F_{xz}F_xF_y^2F_z^{-3}-2F_{zz}F_{yz}F_x^2F_yF_z^{-3}\\
&+2F_{zz}F_{xy}F_yF_xF_z^{-2}+2F_{xz}F_{zy}F_yF_xF_z^{-2}-2F_{xy}F_{xz}F_yF_z^{-1}-2F_{xy}F_{zy}F_xF_z^{-1}\\
&+F_{xz}^2F_y^2F_z^{-2}+F_{zy}^2F_x^2F_z^{-2}+F_{xy}^2)\\
=&F_z^{-2}(F_{xx}F_{yy}-2F_{xx}F_{yz}F_yF_z^{-1}+F_{xx}F_{zz}F_y^2F_z^{-2}-2F_{yy}F_{xz}F_xF_z^{-1}\\
&+2F_{xz}F_{yz}F_xF_yF_z^{-2}+F_{yy}F_{zz}F_x^2F_z^{-2}-F_{xz}^2F_y^2F_z^{-2}+2F_{xy}F_{xz}F_yF_z^{-1}\\
&-F_{zy}^2F_x^2F_z^{-2}+2F_{xy}F_{zy}F_xF_z^{-1}-2F_{zz}F_{xy}F_yF_xF_z^{-2}-F_{xy}^2\\
=&F_z^{-4}(F_{xx}F_{yy}F_z^2-2F_{xx}F_{yz}F_yF_z+F_{xx}F_{zz}F_y^2-2F_{yy}F_{xz}F_xF_z\\
&+2F_{xz}F_{yz}F_xF_y+F_{yy}F_{zz}F_x^2-F_{xz}^2F_y^2+2F_{xy}F_{xz}F_yF_z\\
&-F_{zy}^2F_x^2+2F_{xy}F_{zy}F_xF_z-2F_{zz}F_{xy}F_yF_x-F_{xy}^2F_z^2).
\end{aligned}$$

Desenvolvendo o denominador:

$$(1+h_x^2+h_y^2)^2=(1+F_x^2F_z^{-2}+F_y^2F_z^{-2})^2=F_z^{-4}(F_z^2+F_x^2+F_y^2)=F_z^{-4}\|\nabla F\|^2.$$

E, por tanto, a expresión da curvatura de Gauss toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
K\|\nabla F\|^2=&F_x^2\begin{vmatrix}F_{yy}&F_{yz}\\F_{yz}&F_{zz}\end{vmatrix}+F_y^2\begin{vmatrix}F_{zz}&F_{zz}\\F_{xz}&F_{xx}\end{vmatrix}+F_z^2\begin{vmatrix}F_{xx}&F_{xy}\\F_{xy}&F_{yy}\end{vmatrix}\\
&-2F_xF_y\begin{vmatrix}F_{xy}&F_{yz}\\F_{xz}&F_{zz}\end{vmatrix}-2F_yF_z\begin{vmatrix}F_{yz}&F_{xz}\\F_{xy}&F_{xx}\end{vmatrix}-2F_xF_z\begin{vmatrix}F_{xz}&F_{xy}\\F_{yz}&F_{yy}\end{vmatrix}.
\end{aligned}\tag{2.5}$$

Agora ben, como se está a traballar con superficies separables definidas pola ecuación implícita $F(x,y,z)=f(x)+g(y)+h(z)=0$, pódese reducir aínda máis a expresión da curvatura de Gauss que se acaba de obter pois, derivando por exemplo con respecto a x temos que $\frac{\partial F}{\partial x}=F_x=f'$. Se derivamos de novo, obtemos que $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial x}=F_{xx}=f''$. Analogamente, tense derivando con respecto a y que $\frac{\partial F}{\partial y}=F_y=g'$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y}=F_{yy}=g''$ e derivando con respecto a z que $\frac{\partial F}{\partial z}=F_z=h'$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial z}=F_{zz}=h''$. Deste xeito, resulta sinxelo ver que as derivadas cruzadas son identicamente nulas $F_{xy}=F_{xz}=F_{yx}=F_{yz}=F_{zx}=F_{zy}=0$. Polo tanto, a expresión (2.5) será agora:

$$K=\frac{(f')^2g''h''+(g')^2f''h''+(h')^2f''g''}{(f')^2+(g')^2+(h')^2}.\tag{2.6}$$

Para o cálculo da curvatura media procédese de xeito similar. Así, no capítulo anterior vimos que a curvatura media, na parametrización local $\mathbf{x}(u,v)=(u,v,h(u,v))$, viña dada pola seguinte expresión:

$$H(p)=\frac{h_{uu}(1+h_v^2)-2h_{uv}h_uh_v+h_{vv}(1+h_u^2)}{2(1+h_u^2+h_v^2)^{3/2}}.$$

Procedendo do mesmo xeito que o fixemos para a curvatura de Gauss, obtemos o seguinte

$$\begin{aligned}H(p)=&\frac{h_{xx}(1+h_y^2)-2h_{xy}h_xh_y+h_{yy}(1+h_x^2)}{2(1+h_x^2+h_y^2)^{3/2}}\\=&\left((F_{xx}+F_{zz}h_x^2+2F_{xz}h_x)\left(1+\frac{F_y^2}{F_z^2}\right)-2(F_{zz}h_yh_x+F_{xy}+F_{xz}h_y+F_{zy}h_x)\frac{F_x}{F_z}\frac{F_y}{F_z}\right.\\&\left.(F_{yy}+F_{zz}h_y^2+2F_{yz}h_y)\left(1+\frac{F_x^2}{F_z^2}\right)\right)\left(-2^{-1}F_z^{-1}\left(1+\frac{F_x^2}{F_z^2}+\frac{F_y^2}{F_z^2}\right)^{-3/2}\right).\end{aligned}$$

Simplificando a ecuación anterior e substituímos os valores de $h_x=-\frac{F_x}{F_z}$ e $h_y=-\frac{F_y}{F_z}$ obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}H(p)=&-\frac{1}{2}\left(\left(F_{xx}+F_{zz}\frac{F_x^2}{F_z^2}-2F_{xz}\frac{F_x}{F_z}\right)\left(1+\frac{F_y^2}{F_z^2}\right)-2\left(F_{zz}\frac{F_xF_y}{F_z^2}+F_{xy}-F_{xz}\frac{F_y}{F_z}\right.\right.\\&\left.\left.-F_{zy}\frac{F_x}{F_z}\right)\frac{F_xF_y}{F_z^2}+\left(F_{yy}+F_{zz}\frac{F_y^2}{F_z^2}-2F_{yz}\frac{F_y}{F_z}\right)\right)\left(1+\frac{F_x^2}{F_z^2}\right)F_z^2(F_z^2+F_x^2+F_y^2)^{-3/2}\\=&-\frac{1}{2}\left(F_{xx}+F_{zz}\frac{F_x^2}{F_z^2}-2F_{xz}\frac{F_x}{F_z}+F_{xx}\frac{F_y^2}{F_z^2}-2F_{xy}\frac{F_xF_y}{F_z^2}+F_{yy}+F_{zz}\frac{F_y^2}{F_z^2}-2F_{yz}\frac{F_y}{F_z}\right.\\&\left.+F_{yy}\frac{F_x^2}{F_z^2}\right)F_z^2(F_z^2+F_x^2+F_y^2)^{-3/2}\end{aligned}$$

de novo, sacando factor común $\frac{1}{F_z^2}$, obtemos o resultado:

$$\begin{aligned}H(p)=&-\frac{1}{2}\left(F_{xx}F_z^2+F_{xx}F_y^2+F_{yy}F_z^2+F_{yy}F_x^2+F_{zz}F_x^2+F_{zz}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y\right.\\&\left.-2F_{xz}F_xF_z-2F_{yz}F_yF_z\right)(F_z^2+F_x^2+F_y^2)^{-3/2}.\end{aligned}$$

Dado que se está a traballar con superficies separables, ao igual que no caso da curvatura de Gauss, obtense unha expresión máis sinxela para a curvatura media:

$$H(p)=-\frac{1}{2}\frac{f''(h')^2+f''(g')^2+g''(h')^2+g''(f')^2+h''(f')^2+h''(g')^2}{((f')^2+(g')^2+(h')^2)^{3/2}}$$

ou, o que é o mesmo,

$$f''((h')^2+(g')^2)+g''((h')^2+(f')^2)+h''((f')^2+(g')^2)=-2H((f')^2+(g')^2+(h')^2)^{3/2}. \quad (2.7)$$

2.1. Casos especiais de superficies separables

2.1.1. Cilindro recto.

Unha superficie cilíndrica en $\mathbb{R}^3$ é unha superficie que ten como base unha curva directriz plana C e as curvas xeratrices son paralelas. En particular, un cilindro recto está formado por todas as rectas que son ortogonais a unha curva plana dada. Tras un movemento ríxido pode suporse que a curva C está contida nun dos tres planos coordenados. Entón a superficie é separable onde unha das funcións f, g ou h é constante. Pódese supoñer, sen perda de xeneralidade, que a curva está contida no plano $z = 0$ e, por tanto, será da forma

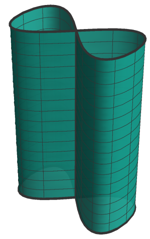


Figura 2.1: Cilindro sobre a curva do oito.

$$f(x) + g(y) = a, \qquad a \in \mathbb{R},$$

dando lugar ao cilindro recto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) + g(y) = 0\}$.

Curvatura de Gauss dun cilindro recto

Considerando a expresión da curvatura de Gauss dada en (2.6) e asumindo que a función h é constante, un sinxelo cálculo mostra que

$$K(p) = \frac{(f')^2 g'' h'' + (g')^2 f'' h'' + (h')^2 f'' g''}{(f')^2 + (g')^2 + (h')^2} = 0$$

para toda superficie cilíndrica.

Curvatura media dun cilindro recto

Ao igual que no caso anterior, utilizando a expresión obtida anteriormente para a curvatura media e tendo en conta que a función h é constante, obtense o seguinte:

$$\begin{aligned} H(p) &= -\frac{1}{2} \frac{f''(h')^2 + f''(g')^2 + g''(h')^2 + g''(f')^2 + h''(f')^2 + h''(g')^2}{((f')^2 + (g')^2 + (h')^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{f''(g')^2 + g''(f')^2}{((f')^2 + (g')^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

2.1.2. Superficies de translación

Unha superficie $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ dise que é unha superficie de translación se pode ser expresada como

$$z = \phi(x) + \psi(y),$$

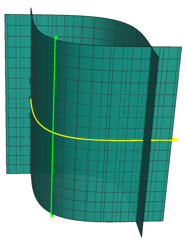
onde $\phi(x)$ e $\psi(y)$ son funcións regulares. Esta superficie é a suma das curvas planas

$$\alpha(x)\colon x \mapsto (x, 0, \phi(x))$$
$$\beta(y)\colon y \mapsto (0, y, \psi(y))$$

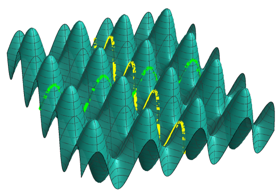
de xeito que a superficie $\mathcal{M}$ parametrízase por

$$\mathbf{x}(x,y) = \alpha(x) + \beta(y) = (x, 0, \phi(x)) + (0, y, \psi(y)) = (x, y, \phi(x) + \psi(y)).$$

Unha superficie separable é unha superficie de translación se, e soamente se, unha das tres funcións en (2.1) é linear. Tómese, sen perda de xeneralidade $h(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ (o caso $a = 0$ correspóndese cun cilindro recto). Neste caso, e se se toma $\phi(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, a ecuación implícita da superficie é $z = ax + b + \psi(y)$ e, por tanto, trátase dunha superficie cilíndrica a excepción do cilindro recto.
Na seguinte figura móstranse dous exemplos de superficies de translación: no primeiro deles temos unha superficies cilíndrica onde a curva xeratriz é unha recta, mentres que no segundo exemplo, temos unha superficie de translación de tipo plano onde nin a curva xeratriz nin a directriz son rectas.



(a) $\operatorname{sen}^2(x) + x^2 = 1$



(b) $z = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y)$

Observación 2.2. Unha superficie regrada da forma $\mathbf{x}(t,s) = \alpha(t) + sv(t)$ con $v(t)$ constante é unha superficie de translación. Unha superficie cilíndrica é unha superficie regrada coa curva direccional constante $v(t) = v$, isto é, contén rectas paralelas pasando por cada punto da superficie. Ademais, todas estas superficies son invariantes baixo calquera translación na dirección do vector v. Un sinxelo cálculo móstranos que, con esta parametrización dunha superficie cilíndrica, os campos coordenados son $\mathbf{x}_1 = \alpha'$ e $\mathbf{x}_2 = v$ e polo tanto as súas derivadas $\mathbf{x}_{11} = \alpha''$, $\mathbf{x}_{12} = 0$ e $\mathbf{x}_{22} = 0$. Deste xeito, os coeficientes da segunda forma fundamental verifican que $L_{12} = L_{21} = L_{22} = 0$, de onde se segue que $det(L_{ij} = 0)$ e, en consecuencia, a curvatura de Gauss é cero.

Curvatura de Gauss dunha superficie de translación

Dada a parametrización $\mathbf{x}(x,y) = (x, y, \phi(x) + \psi(y))$, pódese calcular a primeira e segunda forma fundamental dunha superficie de translación:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1+\phi'(x)^2 & \phi'(x)\psi'(y) \\ \phi'(x)\psi'(y) & 1+\psi'(y)^2 \end{pmatrix}, \quad L_{ij} = \frac{1}{\sqrt{1+\phi'(x)^2+\psi'(y)^2}} \begin{pmatrix} \phi''(x) & 0 \\ 0 & \psi''(y) \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

e, en consecuencia, a súa curvatura de Gauss

$$K = \frac{\phi''(x)\psi''(y)}{(1+\phi'(x)^2+\psi'(y)^2)^{3/2}}.$$

As superficies de translación con curvatura de Gauss constante identicamente nula foron estudadas e clasificadas polos autores en [10] probando que:

1. As únicas superficies de translación con curvatura de Gauss nula son as superficies cilíndricas.

2. Non hai superficies de translación con curvatura de Gauss constante e distinta de cero se unha das curvas xeratrices é plana.

Curvatura media dunha superficie de translación

Dada a parametrización $\mathbf{x}(x,y) = (x, y, \phi(x) + \psi(y)))$, a expresión da curvatura media dunha superficie de translación vén dada por

$$H(p) = \frac{1}{2}\frac{(1+\psi'^2)\phi'' + (1+\phi'^2)\psi''}{(1+\phi'^2+\psi'^2)^{3/2}}.$$

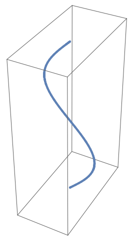
A descrición das superficies de translación con curvatura media constante divídese en dous casos segundo a curvatura media sexa cero ou non. Así:

1. As superficies de translación minimais son planos ou superficies de Scherk dadas por $z = \log \frac{\cos y}{\cos x}$ [9].

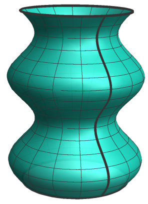
2. As superficies de translación con curvatura media constante $H \neq 0$ son os cilindros circulares rectos [4].

2.1.3. Superficies de revolución

Unha superficie de revolución obtense ao xirar unha curva plana en torno a unha recta de $\mathbb{R}^3$. De forma máis precisa, dado un plano $\Pi \in \mathbb{R}^3$ denomínase *superficie revolución* $\mathcal{M}$ ao conxunto de puntos resultante de xirar unha curva C en torno a unha recta L. A curva



(a) Curva xeratriz



(b) Superficie de revolución

Figura 2.2: Superficie de revolución que se obtén ao xirar a curva $t \to (2 + (1/2)\,\mathrm{sen}(2t), t)$

C recibe o nome de *curva xeratriz* e a recta L é o *eixo de rotación.*
Tomarase, sen perda de xeneralidade, o plano $y = 0$ como plano Π e para L tomarase o eixo z. Ademais, a curva C terá unha parametrización α diferenciable. Unha tal superficie de revolución $\mathcal{M}$ ten a forma

$$h(z) = x^2 + y^2$$

e, por tanto, é unha superficie separable. En xeral, se o eixo de rotación é paralelo ao eixo z, a ecuación implícita da superficie $\mathcal{M}$ toma a forma

$$h(z) = x^2 + y^2 + ax + by + c$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Curvatura de Gauss dunha superficie de revolución

Dada a parametrización local dunha superficie de revolución

$$\mathbf{x}(u, v) = (\phi(v)\cos(u), \phi(v)\,\mathrm{sen}(u), \psi(v)), \quad \text{con} \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times (a, b),$$

pódense calcular os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \phi^2 & 0 \\ 0 & \phi'^2 + \psi'^2 \end{pmatrix}, \quad L_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\phi'^2+\psi'^2}} \begin{pmatrix} -|\phi|\psi' & 0 \\ 0 & sign(\phi)(\phi''\psi' - \phi'\psi'') \end{pmatrix}$$

e, en consecuencia, o valor da curvatura de Gauss:

$$K = \frac{-\psi'^2\phi'' + \phi'\psi'\psi''}{\phi(\phi'^2 + \psi'^2)^2}.$$

Se a curva $\alpha = (\phi, 0, \psi)$ ten velocidade unitaria, entón os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental son:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \phi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_{ij} = \begin{pmatrix} -|\phi|\psi' & 0 \\ 0 & sign(\phi)(\phi''\psi' - \phi'\psi'') \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

e a curvatura de Gauss é

$$K = \frac{-\phi''}{|\phi|}.$$

Neste traballo interésanos coñecer e analizar as superficies con curvatura de Gauss constante. Resulta posible construír exemplos a partir de superficies con curvatura de Gauss constante positiva ou negativa a partir das superficies de revolución. Deste xeito, variando a curva xeratriz poderemos obter exemplos para calquera valor desexado de curvatura constante. Isto é, para curvatura de Gauss constante positiva teremos máis exemplos ademais da esfera de igual maneira que, para curvatura de Gauss constante negativa, teremos máis exemplos ademais da pseudoesfera.

Algúns exemplos de superficies con curvatura de Gauss constante positiva

Na figura 2.3 vemos tres exemplos de superficies de revolución con curvatura de Gauss constante positiva. Todas elas veñen dadas pola parametrización local

$$x(u,v) = (\phi(v)\cos(u), \phi(v)\operatorname{sen}(u), \psi(v)),$$

onde

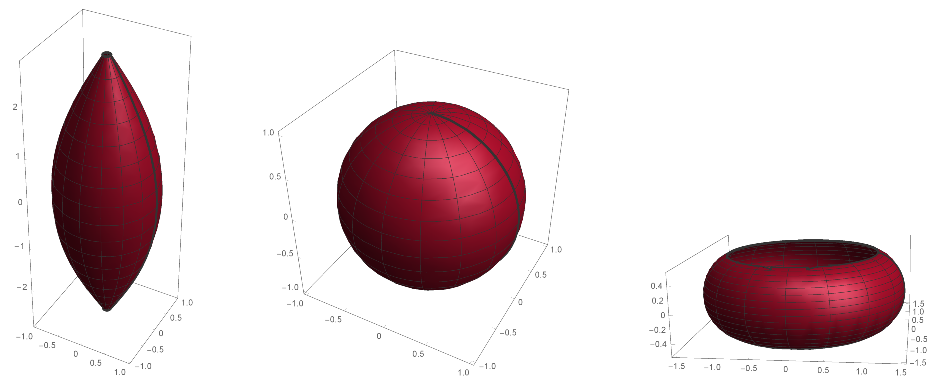
$$\begin{aligned} \phi(v) &= b\cos(v/a), \\ \psi(v) &= \int_0^v \sqrt{1 - b^2/a^2(\operatorname{sen}(t/a))^2}dt = aE\left(\frac{v}{a}, \frac{b^2}{a^2}\right), \end{aligned}$$

con $E\left(\frac{v}{a}, \frac{b^2}{a^2}\right)$ integral elíptica de segunda especie e $a, b > 0$. Estas superficies teñen curvatura de Gauss constante igual a $1/a^2$.

a) Se $0 < b < a$, entón estamos ante unha superficie de revolución de tipo ahusado que se asemella a unha sarta infinita de abelorios, cada un dos cales ten unha forma semellante a un balón de rugby cos vértices situados no eixo de revolución. Neste caso, a variable v ten que cumprir $-\infty \leq v \leq \infty$. No exemplo temos que $a = 2$ e $b = 1$.

b) Se $b = a$, a superficie é unha esfera de radia a. No exemplo, temos a esfera de radio 1. Neste caso, a variable v ten que cumprir $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$. Se aumentamos o rango da variable v, obtemos unha familia de esferas tanxentes polos polos.

c) Se $0 < a < b$, atopámonos ante unha superficie de tipo pandeado con forma semellante a dun tonel que non corta ao eixo de revolución. Neste caso, a variable v ten que cumprir que $-a \operatorname{arcsen}(a/b) \leq v \leq a \operatorname{arcsen}(a/b)$. No exemplo temos que $a = 1$ e $b = 1{,}5$.



(a) Tipo ahusado ou balón de rugby (K=1/4)

(b) Esfera (K=1)

(c) Tipo pandeado ou barril (K=1)

Figura 2.3: Superficies de revolución con curvatura de Gauss constante positiva

Algúns exemplos de superficies con curvatura de Gauss constante negativa

Na figura 2.4 vemos tres exemplos de superficies de revolución con curvatura de Gauss constante negativa. Todas elas veñen dadas pola parametrización local

$$x(u,v) = (\phi(v)\cos(u), \phi(v)\,\mathrm{sen}(u), \psi(v)),$$

onde segundo a expresión que tomen ϕ e ψ distinguimos os seguintes casos:

a) Tipo hiperboloide.
Neste caso tense que

$$\phi(v) = b\cosh(v/a),$$
$$\psi(v) = -iaE\left(\frac{iv}{a}, \frac{-b^2}{a^2}\right),$$

para algunha constante $b > 0$ e con v acoutado por $-a\,\mathrm{senh}^{-1}(a/b) \leq v \leq a\,\mathrm{senh}^{-1}(a/b)$. Na figura tense que as constante toman os valores de $a = 10$ e $b = 2$.

b) Pseudoesfera.
No caso da pseudoesfera a curva xeratriz $\alpha = (\phi, \psi)$ pode tomar dúas parametrizacións distintas en función dos valores que tome v. Para $0 \leq v < \infty$

$$\alpha(v) = \left(ae^{-v/a}, \int_0^v \sqrt{1 - e^{-2t/a}dt}\right),$$

mentres que se $-\infty < v \leq 0$, tense

$$\alpha(v) = \left(ae^{v/a}, \int_0^v \sqrt{1 - e^{2t/a}dt}\right).$$

No exemplo, a variable v toma valores positivos, e a constante a toma o valor 1.

c) Tipo cónico.

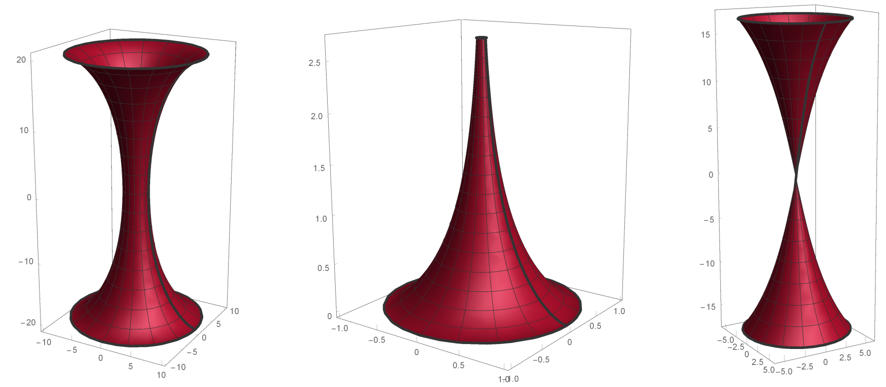
Neste caso a expresión da curva toma os seguintes valores:

$$\phi(v) = b\,\mathrm{senh}(v/a),$$
$$\psi(v) = -i\sqrt{a^2-b^2}E\left(\frac{iv}{a}, \frac{b^2}{a^2-b^2}\right),$$

para algunha constante b con $0 < b \leq a$, e v acoutada por $-a\,\mathrm{senh}^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right) \leq v \leq a\,\mathrm{senh}^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)$.

No apartado (c) vemos un exemplo con $a = 10$ e $b = 2$.

Todas estas superficies teñen curvatura de Gauss constante igual a $-1/a^2$.



(a) Tipo hiperboloide (K=0.01) (b) Pseudoesfera (K=-1) (c) Tipo cónico (K=0.01)

Figura 2.4: Superficies de revolución con curvatura de Gauss constante negativa

Curvatura media dunha superficie de revolución

Atendendo aos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental dunha superficie de revolución calculados no apartado anterior, podemos calcular a curvatura media da superficie separable, $\mathcal{M}$, obtendo

$$H = \frac{\phi(\phi''\psi' - \phi'\psi'') - \psi'(\phi'^2 + \psi'^2)}{2|\phi|(\phi'^2 + \psi'^2)^{3/2}}.$$

Do mesmo xeito que antes, se a curva $\alpha = (\phi, 0, \psi)$ ten velocidade unitaria, entón os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental toman os valores de (2.9) e por conseguinte, a súa curvatura media é

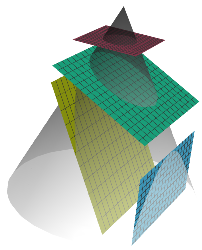
$$H = \frac{1}{2}\left(sign(\phi)(\phi''\psi' - \phi'\psi'') - \frac{\psi'}{|\phi|}\right).$$

Esencialmente, as únicas superficies de revolución que son simultaneamente minimais son o catenoide e o plano, tal e como mostra o seguinte resultado [1].

Teorema 2.3. *Unha superficie de revolución $\mathcal{M}$ que sexa minimal está contida necesariamente nun plano ou nunha catenoide.*

Ademais, Delaunay demostrou que dada unha superficie de revolución, $\mathcal{M}$, completa e con curvatura media constante, entón, salvo un movemento ríxido do espacio euclidiano, a superficie é unha esfera, un cilindro, unha onduloide, unha catenoide ou unha nodoide. Probou que as superficies de revolución con curvatura media constante son aquelas que se obteñen ao xirar unha cónica, sen esvarar, sobre unha liña recta. Estas superficies reciben o nome de *Superficies de Delaunay.*

Definición 2.4. Denomínase *sección cónica*, ou simplemente cónica, á intersección dun cono circular recto cun plano que non pasa polo seu vértice. Clasifícanse en tres tipos: elipse, parábola e hipérbole.



Tipos de cónicas.

As curvas que darán lugar as xeratrices das superficies de revolución van ser as ruletas das cónicas.

Definición 2.5. O movemento que describe o foco dunha curva pechada e convexa que roda, sen esvarar, sobre outra curva recibe o nome de *ruleta.* As ruletas descritas polo foco das cónicas que rodan ao longo dunha liña recta dan lugar ás superficies con curvatura media constante.

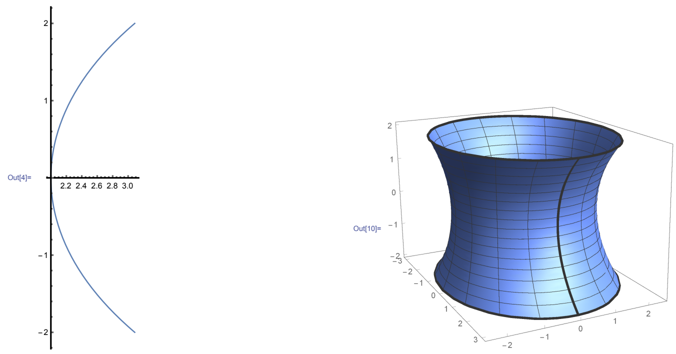
Distínguense catro tipos de superficies de Delaunay segundo o tipo de cónica.

Catenoide

A catenoide é a superficie de revolución xerada pola curva catenaria. A catenoide vén dada pola seguinte parametrización:

$$\text{catenoide}(v,u) := (c\cosh(u/c)\cos(v), c\cosh(u/c)\,\text{sen}(v), u)$$

onde c é unha constante.
Esencialmente, a catenoide xunto co plano, son as únicas superficies de revolución minimais ($H=0$), tal e como se enunciaba no Teorema 2.3.



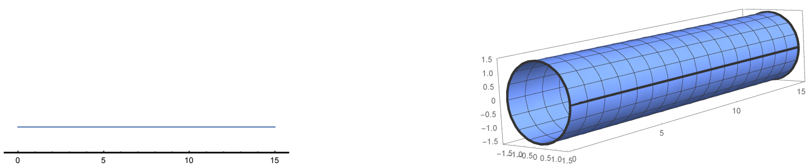
(a) Catenaria (b) Catenoide

Figura 2.5: Curva xeratriz e catenoide

Cilindro

Por ser a circunferencia un caso particular da elipse, podemos obter a xeratriz dun cilindro facendo rodar a circunferencia e obtendo como ruleta a recta horizontal descrita polo centro da mesma. Como xa se demostrou en varias ocasións o cilindro é unha superficie con curvatura media constante distinta de cero. O cilindro vén dado pola seguinte parametrización:

$$\text{cilindro}(u, v) := (a\cos(u), a\,\text{sen}(u), v) \tag{2.10}$$



(a) Recta (b) Cilindro

Figura 2.6: Curva xeratriz e cilindro

Onduloide

A onduloide obtense ao revolucionar a curva ondularia, que se corresponde coa ruleta dunha elipse. Esta superficie ten unha curvatura media constante distinta de cero.
A onduloide é a solución da ecuación diferencial

$$y^2 - \frac{2ay}{\sqrt{1+y'^2}} + b^2 = 0,$$

onde a e b son constantes. A parametrización dunha onduloide pode vir representada por

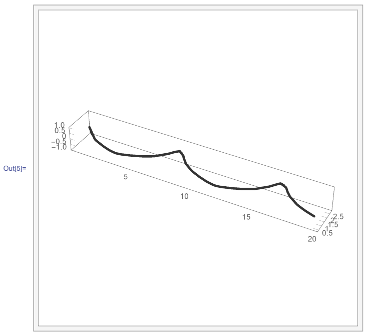
$$\text{onduloide}(u, v) = (x(u), y(u)\cos(v), y(u)\,\text{sen}(v)),$$

onde

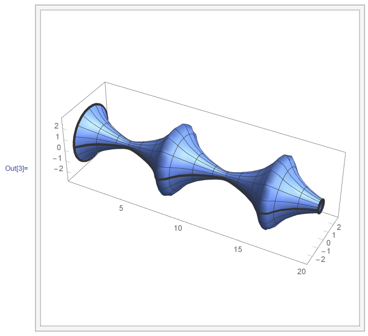
$$x(u) = \int_0^u \sqrt{a^2\,\text{sen}^2(\phi) + b^2\cos^2(\phi)}\; d\phi + \frac{\sqrt{a^2-b^2}\,\text{sen}(u)(\sqrt{a^2-b^2}\cos(u)+a)}{\sqrt{a^2\,\text{sen}^2(u)+b^2\cos^2(u)}},$$

$$y(u) = \frac{b(\sqrt{a^2-b^2}\cos(u)+a)}{\sqrt{a^2\,\text{sen}^2(u)+b^2\cos^2(u)}}.$$

Segundo os valores de a e b temos distintas onduloides:

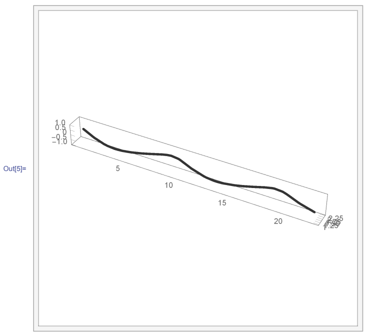


(a) Ondularia (a=1.6, b=1)

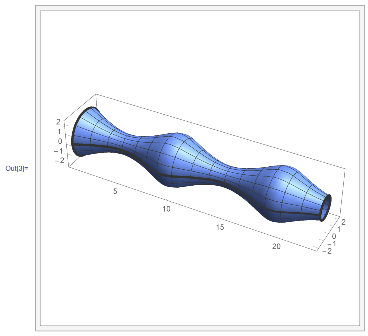


(b) Onduloide (a=1.6, b=1)

Figura 2.7: Curva xeratriz e onduloide

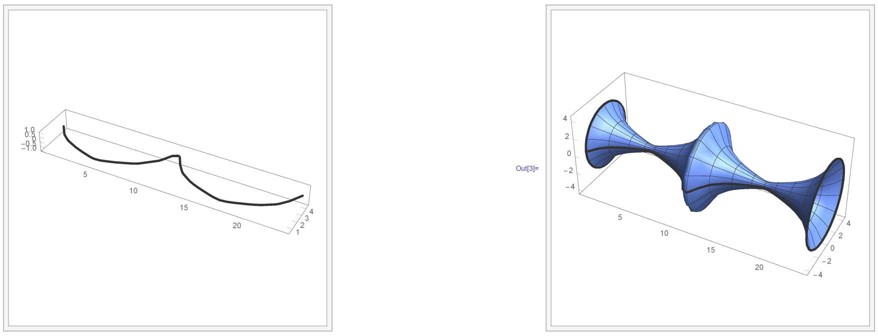


(a) Ondularia (a=1.6, b=1.44)



(b) Onduloide (a=1.6, b=1.44)

Figura 2.8: Curva xeratriz e onduloide



(a) Ondularia (a=2,45, b=1.35) (b) Onduloide (a=2.45, b=1.35)

Figura 2.9: Curva xeratriz e onduloide

Nodoide

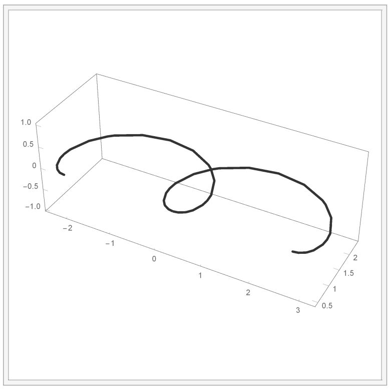
A nodoide é unha superficie de revolución con curvatura media constante distinta de cero que se obtén ao revolucionar con respecto ao eixo de rotación a curva nodaria . Esta curva resulta de facer xirar unha hipérbole sobre unha liña recta.
A ecuación paramétrica dunha nodoide é

$$\mathrm{nodoide}(u,v) = (x(u), y(u)\cos(v), y(u)\,\mathrm{sen}(v)),$$

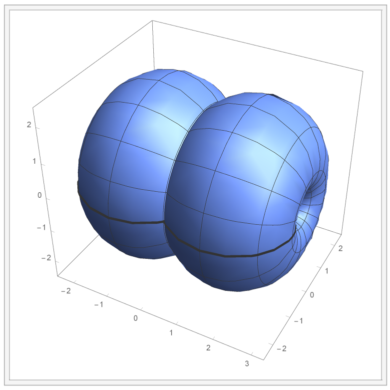
onde

$$x(u) = a\left(1-\cos(u)+\int_0^u \frac{\mathrm{sen}^2(\alpha)}{\sqrt{\mathrm{sen}^2(\alpha)+\beta}}\,d\alpha\right)$$
$$y(u) = a(\mathrm{sen}(u)+\sqrt{\mathrm{sen}^2(u)+\beta}).$$

con $\beta = a^2+b^2$, onde a e b son constantes, e con curvatura media $H = \frac{1}{2a}$. Ao igual que ocorría co onduloide e a súa curva xeratriz, temos diferentes tipos e nodoides. No segundo exemplo que temos a continuación, os signos do primeiro seno e coseno nas expresións analíticas para x e y están cambiados e no último exemplo prescíndese deles:

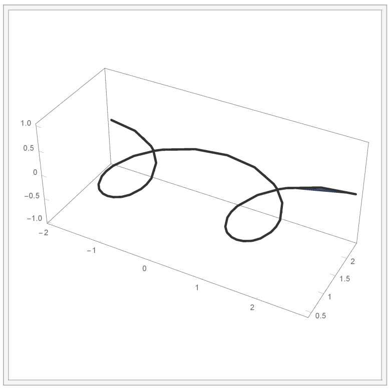


(a) Nodaria

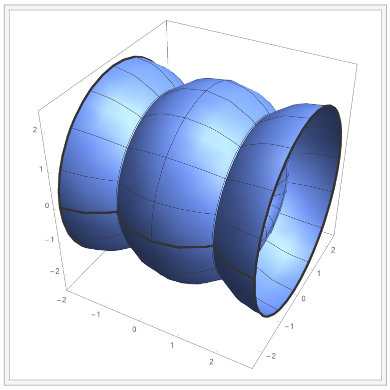


(b) Nodoide

Figura 2.10: Curva xeratriz e nodoide

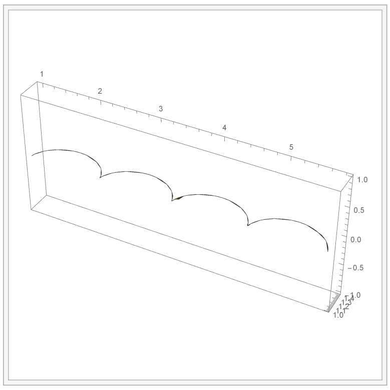


(a) Nodaria

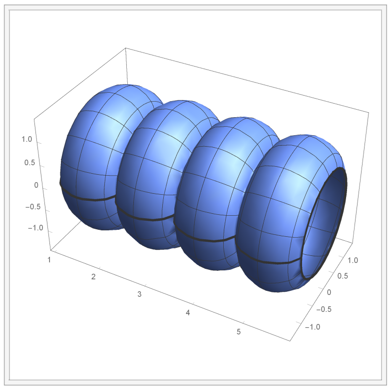


(b) Nodoide

Figura 2.11: Curva xeratriz e nodoide



(a) Nodaria



(b) Nodoide

Figura 2.12: Curva xeratriz e nodoide

Capítulo 3

Superficies separables con curvatura de Gauss constante

Neste capítulo centrarémonos no estudo de superficies separables con curvatura de Gauss constante e proporcionaremos unha descrición completa das mesmas obtendo as súas parametrizacións explícitas. Estes resultados dependerán de se a curvatura é constantemente cero ou distinta de cero, tal e como mostran os seguintes Teoremas.

Se a curvatura de Gauss toma constantemente o valor cero, as superficies separables correspondentes serán as superficies cilíndricas, de translación e cónicas que se mostran a continuación.

Teorema 3.1. [5] *As únicas superficies separables con curvatura de Gauss identicamente nula son congruentes con:*

1. *Un cilindro recto sobre unha curva plana contida nun dos planos coordenados.*

2. *Unha superficie de translación* $z = ax + g(y)$, *onde* $a \neq 0$ *e* g *é unha función regular.*

3. *Unha superficie de revolución con curvatura de Gauss cero.*

4. *Unha superficie cilíndrica e unha superficie cónica con parametrizacións*

$$m_3 z + n_3 = (m_1 x + n_1)^p (m_2 y + n_2)^q, \tag{3.1}$$

$$n_1 e^{m_1 x} + n_2 e^{m_2 y} + n_3 e^{m_3 z} = 0, \tag{3.2}$$

$$(m_1 x + n_1)^{1/(1-k)} + (m_2 y + n_2)^{1/(1-k)} + (m_3 z + n_3)^{1/(1-k)} = 0, \tag{3.3}$$

onde $m_i, n_i \in \mathbb{R},\ m + q = 1$ *e* $k \neq 1$.

Observación 3.2. Chegados a este punto, obsérvase que un primeiro caso a distinguir na clasificación dáse cando unha das funcións f, g ou h, na expresión (2.6) é constante. Sen perda de xeneralidade, pódese supoñer que h é constante e, polo tanto, $h(z) = a$, $z \in I_3$, para algún $a \in \mathbb{R}$. Entón, a ecuación da superficie será do xeito $f(x) + g(y) + a = 0$, isto é, a superficie correspóndese cun cilindro recto sobre a curva plana

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) + g(y) + a = 0\},$$

que ten curvatura de Gauss $K = 0$. Este caso correspóndese co primeiro apartado do Teorema 3.1.

No caso de que a curvatura de Gauss sexa constante e distinta de cero, as únicas superficies separables que darán solución ao problema serán as superficies de revolución.

Teorema 3.3. [5] *As únicas superficies separables con curvatura de Gauss constante e distinta de cero son as superficies de revolución con curvatura constante cuxo eixo de rotación é paralelo a un dos tres eixos coordenados.*

Notación 3.4. Antes de afondar nestes resultados, imos introducir unha notación que nos será de axuda para entender as súas respectivas demostracións. Supoñamos que as derivadas $f'(x)g'(y)h'(z) \neq 0$ para todo punto $(x, y, z) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ pois, doutro xeito, estariamos no caso anterior. Podemos entón introducir novas variables u, v e w dadas por:

$$u = f(x), \quad v = g(y), \quad w = h(z),$$

de xeito que a condición de separabilidade $f(x) + g(y) + h(z) = 0$ se traduce en que ditas variables determinan un subespazo vectorial $u + v + w = 0$. Ademais, definimos novas funcións:

$$X(u) = f'(x)^2, \quad Y(u) = g'(x)^2, \quad Z(u) = h'(x)^2, \tag{3.4}$$

de forma que as súas derivadas veñen dadas por:

$$X'(u) = 2f''(x), \quad Y'(u) = 2g''(x), \quad Z'(u) = 2h''(x). \tag{3.5}$$

Empregando esta notación, a expresión da curvatura de Gauss en (2.6), redúcese a

$$4K(X + Y + Z)^2 = XY'Z' + YX'Z' + ZX'Y', \tag{3.6}$$

pra todo punto (u, v, w) no subespazo $u + v + w = 0$.

É importante resaltar que as variables u, v e w non son independentes pois están baixo a condición $u + v + w = 0$. Por isto, introduciranse dous resultados que nos serán de axuda para o que resta: o primeiro deles dá unha relación entre as derivadas dunha función implícita nas tres variables u, v e w; mentres que o segundo permite expresar os tres tipos de superficies que estamos a analizar en termos das funcións X, Y e Z que acabamos de definir.

Lema 3.5. *Sexa $Q = Q(u, v, w)$ unha función regular definida nun dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Se $Q(u, v, w) = 0$ para toda tripla $(u, v, w) \in \Omega \cap \Pi$ onde Π é o plano de ecuación $u+v+w = 0$. Entón temos que*

$$Q_u = Q_v = Q_w \qquad \text{en} \qquad \Omega \cap \Pi, \tag{3.7}$$

onde Q_u, Q_v e Q_w denotan as derivadas parciais de Q.

Demostración. Como $u + v + w = 0$ entón, podemos pensar a función Q como función de dúas variables tomando $w = -u - v$ e, polo tanto, $Q(u, v, w) = Q(u, v, -u - v) = 0$ para calquera valores das variables u e v. Derivando con respecto a primeira variable:

$$\frac{\partial}{\partial u} Q(u, v, -u - v) = Q_u - Q_w = 0 \quad \text{e, polo tanto,} \quad Q_u = Q_w. \tag{3.8}$$

Analogamente,

$$\frac{\partial}{\partial v} Q(u, v, -u - v) = Q_v - Q_w = 0 \quad \text{e, polo tanto,} \quad Q_v = Q_w. \tag{3.9}$$

Agora séguese de (3.8) e (3.9) que $Q_u = Q_w = Q_v$ no subespazo $u + v + w = 0$, o que conclúe a proba. □

Observación 3.6. Coas expresións introducidas na Notación 3.4, temos as seguintes posibilidades para unha superficie separable:

1. Se unha das funcións $X, \quad Y$ ou Z se anula, entón a superficie é un cilindro recto sobre unha curva plana contida nun dos tres planos coordenados.

2. Se unha das funcións $X', \quad Y'$ ou Z' se anula, entón a superficie é un cilindro recto sobre unha curva plana contida nun dos tres planos coordenados ou unha superficie de translación.

3. Se unha das funcións $X' - Y', \quad X' - Z'$ ou $Y' - Z'$ se anula, entón a superficie é unha das superficies dos dous casos anteriores ou é unha superficie de revolución cuxo eixo de rotación é paralelo a un dos tres eixos coordenados.

Demostración. Probaremos cada un dos tres casos por separado, se ben o primeiro apartado xa foi tratado ao comezo deste capítulo. En cada un deles, utilizaremos a Notación 3.4 para coñecer de maneira explícita a expresión que toma cada unha das funcións $f(x)$, $g(y)$ e $h(z)$ dunha superficie separable.

1. Este caso xa foi visto ao comezo da sección na Observación 3.2. Coa notación introducida, isto equivale a considerar que unha das funcións X, Y ou Z se anula en (3.4). Polo que, tomando $Z = h'(z)^2 = 0$ e integrando, concluímos que a superficie é un cilindro recto sobre unha curva plana contida nun dos tres planos coordenados.

2. Supoñamos, sen perda de xeneralidade, que $Z' = 0$. Entón,

$$Z = h'^2 = \tilde{a} \quad \text{con} \quad \tilde{a} \in \mathbb{R}^+,$$

de maneira que

$$h'(z) = \sqrt{\tilde{a}} = a \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{R},$$

de onde se ten:

$$h(z) = \int h'(z)\ dz = \int a\ dz = az + b, \quad b \in \mathbb{R}$$

e por tanto a nosa superficies é un dos dous casos seguintes:

- *Caso* $a = 0$. Estamos no caso anterior, pois

$$h(z) = b \quad \text{de onde} \quad f(x) + g(y) + b = 0$$

e a nosa superficies é da forma:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) + g(y) + a = 0\},$$

isto é, un cilindro recto.

- *Caso* $a \neq 0$.

$$h(z) = az + b, \quad \text{de onde} \quad f(x) + g(y) + az + b = 0$$

e tomando $a = 1$ e $b = 0$, atopámonos ante unha superficie de translación con ecuación $z = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(y)$.

3. Supoñamos, sen perda de xeneralidade, que $X' - Y' = 0$. Como $X' - Y' = f''(x) - g''(y) = 0$, que son funcións en variables distintas, ten que existir unha constante $a \in \mathbb{R}$ tales que $X' = Y' = a$. Distinguimos os seguintes casos:

- *Caso* $a = 0$. Estudado nos casos anteriores.
- *Caso* $a \neq 0$. Neste caso, se resolvemos as ecuacións $X'(u) = a$ e $Y'(v) = a$, temos:

$$X'(u) = a, \quad X(u) = au + b_1 = af(x) + b_1,$$

$$Y'(u) = a, \quad Y(u) = av + b_1 = ag(y) + b_2,$$

con $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^3$. Como $f'(x) = X(u)$ e $g'(x) = Y(v)$, temos as seguintes EDO's:

$$f'(x)^2 = af(x) + b_1, \quad g'(y)^2 = ag(y) + b_2.$$

Como neste caso o noso interese radica en coñecer a expresión explícita das funcións $f(x)$ e $g(y)$, resolvendo as EDO's anteriores temos:

$$f'(x) = (af(x) + b_1)^{\frac{1}{2}}; \quad \frac{f'}{(af(x) + b_1)^{\frac{1}{2}}} = 1,$$

de onde
$$\begin{cases} \int \frac{dx}{(af(x)+b_1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{a}(af(x) + b_1)^{\frac{1}{2}} + k_1, & k_1 \in \mathbb{R} \\ \int dx = x + k_2, & k_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e, por tanto,

$$\frac{2}{a}(af(x) + b_1)^{\frac{1}{2}} + k_1 = x + k_2,$$

elevando ao cadrado,

$$4(af(x) + b_1) = (ax + c_1)^2,$$

obtemos o resultado que buscabamos:

$$f(x) = \frac{(ax + c_1)^2}{4a} - \frac{b_1}{a},$$

onde $c_1 = ak_2 - k_1$ e $a, c_1, b_1 \in \mathbb{R}$. Analogamente, $g(y) = \frac{(ay+c_2)^2}{4a} - \frac{b_2}{a}$ con $a, c_2, b_2 \in \mathbb{R}$. Como estamos a traballar con superficies separables que cumpren a expresión $f(x) + g(y) + h(z) = 0$, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(z) &= f(x) + g(y) \\ &= \frac{(ax + c_1)^2}{4a} - \frac{b_1}{a} + \frac{(ay + c_2)^2}{4a} - \frac{b_2}{a} \\ &= \frac{a}{4}(x^2 + y^2) + \frac{c_1}{4}x + \frac{c_2}{4}y + \frac{c_1^2 + c_2^2}{4a} - \frac{b_1 + b_2}{a} \\ &= x^2 + y^2 + \tilde{c_1}x + \tilde{c_2}y + \tilde{b}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade se debe a suposición $a \neq 0$ e con $\tilde{c_1}, \tilde{c_2}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$.
Polo tanto, concluímos que a nosa superficie $\mathcal{M}$ é unha superficie de revolución con respecto a unha liña paralela ao eixo z.

□

3.1. Superficies separables con curvatura de Gauss constantemente nula

Nesta sección probaremos o Teorema 3.1. No que segue suporemos que a curvatura de Gauss é constantemente nula, o que simplifica a ecuación que tiñamos en (3.6) da curvatura de Gauss, que pasa a tomar a seguinte forma :

$$XY'Z' + YX'Z' + ZX'Y' = 0, \quad \text{para todo} \quad u + v + w = 0. \tag{3.10}$$

Pola Observación 3.6 temos que se unha das funcións $X,\ Y,\ Z$ é constante, $X',\ Y',\ Z'$ é cero ou $X'-Y',\ Y'-Z',\ X'-Z'$ é cero, entón atopámonos nos tres primeiros apartados do Teorema 3.1.

Por tanto, no que queda suporemos que a nosa superficie non se corresponde con ningún dos tres casos anteriores. En particular, suporemos que $X',\ Y',\ Z' \neq 0$ e polo tanto podemos escribir a ecuación (3.10) da curvatura de Gauss con $K=0$ do seguinte xeito:

$$X'Y'Z'\left(\frac{X}{X'}+\frac{Y}{Y'}+\frac{Z}{Z'}\right)=0,$$

ou, de forma equivalente, por seren $X', Y', Z' \neq 0$,

$$\left(\frac{X}{X'}+\frac{Y}{Y'}+\frac{Z}{Z'}\right)=0. \tag{3.11}$$

Así, o noso obxectivo reducirase a demostrar o apartado restante do Teorema 3.1, isto é, probaremos que cando a curvatura de Gauss é constantemente nula os únicos tipos de superficies separables que podemos ter son as superficies cilíndricas e cónicas que se enuncian no apartado 4 do Teorema 3.1 e completaremos así a demostración do mesmo.

Se nos fixamos, a expresión anterior, (3.11), atópase nas condicións do Lema 3.5, de xeito que se cumpre que

$$\left(\frac{X}{X'}\right)'=\left(\frac{Y}{Y'}\right)'=\left(\frac{Z}{Z'}\right)'.$$

Como nos atopamos ante tres funcións dependendo das variables u, v e w, ten que existir necesariamente unha constante $k\in\mathbb{R}$ tal que

$$\left(\frac{X}{X'}\right)'=\left(\frac{Y}{Y'}\right)'=\left(\frac{Z}{Z'}\right)'=k. \tag{3.12}$$

Chegados a este punto, distinguimos dous casos en función dos valores de k. Recordemos que a condición de separabilidade dunha superficie cúmprese cando $f(x)+g(y)+h(z)=0$. Deste xeito, intentaremos obter as expresións que toman cada unha das funcións $f(x),\ g(y)$ e $h(z)$ para poder chegar así a expresión xeral das superficies separables correspondente para cada valor da constante k.

- *Caso* $k=0$. Como $X',\ Y'$ e Z' son distintos de cero, tamén o son $X,\ Y$ e Z e, por tanto,

  $$\frac{X}{X'}=k_1,\quad \frac{Y}{Y'}=k_2,\quad \frac{Z}{Z'}=k_3.$$

  Tomando $k_1=a/2,\ k_2=b/2$ e $k_3=c/2$ tales que

  $$\frac{X}{X'}+\frac{Y}{Y'}+\frac{Z}{Z'}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}=0$$

cúmprese que $a+b+c=0$.
Integrando con respecto a u a expresión $\frac{X}{X'}=\frac{a}{2}$, tense que

$$\ln(X)=\frac{2}{a}u+\tilde{c}.$$

Se agora substituímos $X=f'(x)^2$ e $u=f(x)$:

$$\ln(f'(x)^2)=2\frac{f(x)}{a}+\tilde{c},$$

polo que tomando $\tilde{c}=0$ e aplicando as propiedades dos logaritmos, obtemos:

$$f'(x)=e^{\frac{f(x)}{a}},$$

ou, o que é o mesmo,

$$f'(x)e^{-\frac{f(x)}{a}}=1.$$

Se agora integramos con respecto a x para coñecer $f(x)$, obtemos que

$$-ae^{-\frac{f(x)}{a}}=x+k,$$

de onde, tomando logaritmos:

$$f(x)=-a\ln\left(\frac{x+k}{-a}\right).$$

Supoñendo agora, sen perda de xeneralidade, que $\frac{x+k}{-a}>0$ e renomeando as constantes, chegamos ao resultado desexado:

$$f(x)=-a\ln(m_1x+n_1).$$

De xeito análogo, obtemos:

$$g(y)=-b\ln(m_2y+n_2),$$
$$h(z)=-c\ln(m_3z+n_3).$$

Agora ben, como a nosa superficie é separable sabemos que $f(x)+g(y)+h(z)=0$, polo que a ecuación implícita toma a seguinte forma :

$$-a\ln(m_1x+n_1)-b\ln(m_2y+n2)-c\ln(m_3z+n_3)=0.$$

Aplicando as propiedades dos logaritmos e empregando a exponencial,

$$e^{\ln\left((m_1x+n_1)^{-a}(m_2y+n_2)^{-b}(m_3z+n_3)^{-c}\right)}=1,$$

chegamos a seguinte expresión:

$$(m_1x+n_1)^{-a}(m_2y+n_2)^{-b}(m_3z+n_3)^{-c}=1,$$

e, por tanto,

$$(m_1x+n_1)^{a}(m_2y+n_2)^{b}(m_3z+n_3)^{c}=1. \tag{3.13}$$

Como $m_i \neq 0$ para todo $i \in \{1,2,3\}$ e $a+b+c=0$, podemos expresar a anterior ecuación do seguinte xeito:

$$\begin{aligned} m_1^a\left(x+\frac{n_1}{m_1}\right)^a m_2^b\left(y+\frac{n_2}{m_2}\right)^b &= m_3^{-c}\left(z+\frac{n_3}{m_3}\right)^{-c} \\ \left(x+\frac{n_1}{m_1}\right)^a\left(y+\frac{n_2}{m_2}\right)^b &= m_1^{-a}m_2^{-b}m_3^{a+b}\left(z+\frac{n_3}{m_3}\right)^{a+b}. \end{aligned}$$

E esta superficie correspóndese co cono xeneralizado de vértice $\left(\frac{-n_1}{m_1},\frac{-n_2}{m_2},\frac{-n_3}{m_3}\right)$ e directriz a curva plana

$$\begin{cases} \left(x+\frac{n_1}{m_1}\right)^a\left(y+\frac{n_2}{m_2}\right)^b = m_1^{-a}m_2^{-b}m_3^{a+b}\left(d+\frac{n_3}{m_3}\right)^{a+b} \\ z=d\neq\frac{-n_3}{m_3} \end{cases}$$

Outra forma máis sinxela de expresar a ecuación (3.13), pode ser

$$(m_3z+n_3)^c=(m_1x+n_1)^{-a}(m_2y+n_2)^{-b}, \quad c=-(a+b),$$

de xeito que, se tomamos $c=1$, obtemos:

$$m_3z+n_3=(m_1x+n_1)^p(m_2y+n_2)^q, \quad p=-a,\ q=-b,\ p+q=1, \tag{3.14}$$

que se corresponde con unha superficie dada polo produto de dúas funcións nas variables x e y da forma $z=\phi(x)\psi(y)$. Este tipo de superficies constitúen un caso particular do apartado 4 do Teorema 3.1 e foron estudadas en profundidade en [10].

- *Caso* $k\neq 0$. Intentaremos ver, coma no caso anterior, quen son as funcións $f(x)$, $g(y)$ e $h(z)$ e obter a expresión xeral da superficie separable. Como $k\neq 0$, tomaremos como k o valor $\tilde{k}=\frac{1}{2k}$. Así, a ecuación (3.12) queda do seguinte xeito:

$$\left(\frac{X}{X'}\right)'=\left(\frac{Y}{Y'}\right)'=\left(\frac{Z}{Z'}\right)'=\tilde{k}$$

e, integrando con respecto a cada variable,

$$\int\left(\frac{X}{X'}\right)'du=\int\frac{1}{2k}du,$$

obtemos:

$$\frac{X'}{X} = \frac{2k}{u+a}. \tag{3.15}$$

Analogamente,

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{2k}{v+b} \quad \text{e} \quad \frac{Z'}{Z} = \frac{2k}{w+c}.$$

Substituíndo as últimas expresións en (3.11), temos:

$$\frac{u+a}{2k} + \frac{v+b}{2k} + \frac{w+c}{2k} = 0,$$
$$u+v+w+a+b+c = 0$$

e, como as novas variables que definimos en Notación 3.4 determinan un subespazo vectorial $u+v+w=0$, concluímos que as constantes a, b e c cumpren que $a+b+c=0$.
Ao igual que nos casos anteriores, interésanos coñecer a expresión de $f(x)$, $g(y)$ e $h(z)$ polo que, integrando con respecto a u a expresión (3.15), obtemos

$$\ln(X) = 2k\ln(u+a) + d$$

e, dado que $X = f'(x)^2$, tense o seguinte:

$$\ln(f'(x)^2) = 2k\ln(f(x)+a) + d.$$

Aplicando as propiedades do logaritmo e a exponencial e supoñendo, sen perda de xeneralidade, que $f'(x),\ f(x)+a\ \geq 0$, tense finalmente que

$$f'(x) = (f(x)+a)^k e^d.$$

Renomeando as constantes obtemos:

$$f'(x) = m_1(f(x)+a)^k.$$

De maneira análoga,

$$g'(y) = m_2(g(y)+b)^k,$$
$$h'(z) = m_3(h(z)+c)^k,$$

con $m_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ con $i \in 1,2,3$.
Para poder obter a expresión explícita da forma $f(x)+g(y)+h(z)=0$ que toma a superficie separable correspondente, precisamos resolver de novo estas EDO's. Obteremos agora a solución das mesmas en función dos valores de k, a excepción do cero.

(a) $k = 1$.
Se buscamos a solución da primeira EDO's que acabamos de obter, $f'(x) = m_1(f(x) + a)$ temos que, se integramos,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)+a}dx = \int m_1 dx,$$

obtense o seguinte:

$$\ln(f(x)+a) = m_1 x + k_1; \quad f(x) + a = e^{m_1 x} e^{k_1}.$$

Renomeando $e^{k_1} = n_1$, obtense:

$$f(x) = n_1 e^{m_1 x} - a.$$

Do mesmo xeito chégase a que

$$g(y) = n_2 e^{m_2 y} - b,$$
$$h(z) = n_3 e^{m_3 z} - c,$$

con $n_i \in \mathbb{R}$ para $i \in \{1,2,3\}$. Por tanto, a ecuación da superficie $\mathcal{M}$ é da forma

$$f(x) + g(y) + h(z) = n_1 e^{m_1 x} + n_2 e^{m_2 y} + n_3 e^{m_3 z} = 0, \tag{3.16}$$

por ser $a + b + c = 0$. Con isto, concluímos que esta superficie é un cilindro xeneralizado cuxas xeratrices son paralelas a $\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \frac{1}{m_3}\right)$ e con curva directriz

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{m_1} + \frac{y}{m_2} + \frac{z}{m_3} &= 0 \\ n_1 e^{m_1 x} + n_2 e^{m_2 y} + n_3 e^{m_3 z} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Así, os cilindros xeneralizados constitúen o segundo caso particular do apartado 4 do Teorema 3.1.

(b) $k \neq 1$.
Ao igual que no caso anterior, buscamos as solucións das distintas EDO's que se obtiveron para coñecer os valores de $f(x)$, $g(y)$ e $h(z)$ e, en consecuencia, o tipo de superficie separable con curvatura de Gauss cero que nos falta por coñecer. Entón, integrando en (3.15),

$$\int \frac{f'(x)}{(f(x)+a)^k}dx = \int m_1 dx,$$

obtense o seguinte:

$$(f(x)+a)^{1-k}\frac{1}{1-k} = m_1 x + n_1; \quad f(x) + a = ((1-k)(m_1 x + n_1))^{\frac{1}{1-k}}.$$

Isto dá lugar a solución:

$$f(x) = ((1-k)(m_1x+n_1))^{\frac{1}{1-k}} - a.$$

De igual forma obtemos,

$$\begin{aligned} g(y) &= ((1-k)(m_2y+n_2))^{\frac{1}{1-k}} - b, \\ h(z) &= ((1-k)(m_3x+n_3))^{\frac{1}{1-k}} - c, \end{aligned}$$

con $n_i \in \mathbb{R}$ para $i \in \{1,2,3\}$. Entón, a ecuación implícita da superficie separable $\mathcal{M}$ é

$$(m_1x+n_1))^{\frac{1}{1-k}} + (m_2y+n_2))^{\frac{1}{1-k}}(m_3z+n_3))^{\frac{1}{1-k}} = 0, \tag{3.17}$$

xa que $k \neq 1$ e $a+b+c=0$. Esta expresión correspóndese coa ecuación dunha cónica que ten de vértice o punto $\left(\frac{-n_1}{m_1}, \frac{-n_2}{m_2}, \frac{-n_3}{m_3}\right)$ e como curva directriz

$$\begin{cases} (m_1x+n_1))^{\frac{1}{1-k}} + (m_2y+n_2))^{\frac{1}{1-k}} = -(m_3d+n_3))^{\frac{1}{1-k}} \\ \qquad z = d \neq \dfrac{-n_3}{m_3} \end{cases}$$

Cabe destacar que para algúns valores de k, como $k = \frac{2n-1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, a ecuación anterior representa a un único punto:

$$m_1x + n_1 + m_2y + n_2 = -m_3d + n_3.$$

Este último caso correspóndese co terceiro caso particular do apartado 4 do Teorema 3.1 e completa así, a demostración do mesmo.

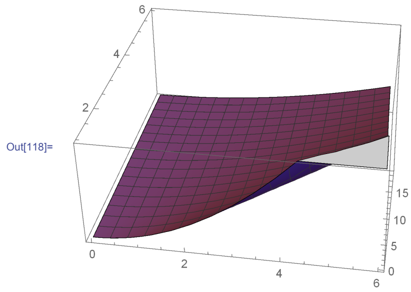
Para rematar esta sección, veremos algúns exemplos concretos de superficies que se mencionan na demostración que se acaba de ver do Teorema 3.1, en particular, daremos un exemplo de cada unha das superficies cilíndricas e cónicas do apartado 4 do mencionado Teorema.

Exemplo 1.

Veremos aquí un exemplo dunha superficie que se corresponde co primeiro dos casos particulares do apartado 4 do Teorema 3.1:

$$m_3z + n_3 = (m_1x+n_1)^p(m_2y+n_2)^q, \quad p=-a,\ q=-b,\ p+q=1.$$

No caso especial en que os parámetros $p = 2$, $q = -1$, $m_i = 1$ e $n_i = 0$, obtemos a superficie $x^2 = yz$ ou, o que é o mesmo, $z = x^2/y$ con $y \neq 0$ que temos a continuación:



Representación gráfica
da superficie $z = x^2/y$

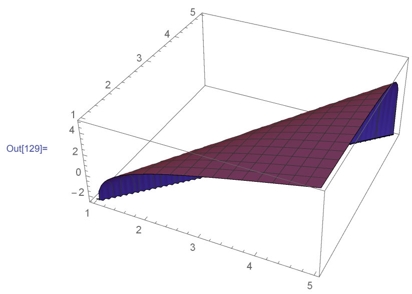
Exemplo 2.

Veremos agora un exemplo das superficies con expresión xeral

$$n_1 e^{m_1 x} + n_2 e^{m_2 y} + n_3 e^{m_3 z} = 0,$$

que se corresponden co segundo caso particular do apartado 4 do Teorema 3.1.

Tomando $n_1 = -1$, $n_2 = n_3 = 1$ e $m_i = 1$ obtemos a superficie separable con ecuación implícita $-e^x + e^y + e^z = 0$. Esta ecuación pode expresarse como $z = ln(e^x - e^y)$, de xeito que unha representación desta superficie é por exemplo:



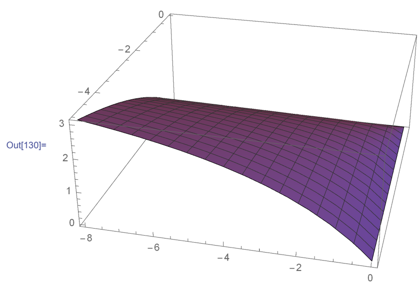
Representación gráfica
da superficie $z = ln(e^x - e^y)$

Exemplo 3.

Veremos agora un exemplo do último dos tres casos particulares do apartado 4 do Teorema 3.1, que se trata dunha superficie con ecuación xeral

$$(m_1 x + n_1))^{\frac{1}{1-k}} + (m_2 y + n_2))^{\frac{1}{1-k}} (m_3 z + n_3))^{\frac{1}{1-k}} = 0.$$

Tomando $m_i = 1$ e $n_i = 0$, obtemos $1/x + 1/y + 1/z = 0$, ou o que é o mesmo, $z = -xy/(x + y)$. Esta ecuación correspóndese cos figura que aparece a continuación:



Representación gráfica
da superficie $z = -xy/(x + y)$

3.2. Superficies separables con curvatura de Gauss constante non nula

O obxectivo desta sección será probar que as únicas superficies separables con curvatura de Gauss constante e distinta de cero son as superficies de revolución, como mostra o Teorema 3.3. A proba do mesmo levarase a cabo por contradición, isto é, suporemos que a superficie non é unha superficie de revolución con respecto a unha recta paralela a un dos tres eixos coordenados. Para iso, desenvolveremos unha serie de resultados previos que nos permitirán completar a proba.

Como estamos a supoñer que a nosa superficie non é de revolución, sabemos pola Observación 3.6 que ningunha das funcións $X'-Y'$, $X'-Z'$ ou $Y'-Z'$ pode ser identicamente nula. Por tanto, se retomamos a expresión que obtiñamos da curvatura de Gauss en (3.6), como $K \neq 0$, e a superficie non é nin cilíndrica nin de translación, ou o que é o mesmo, $XYZ \neq 0$ e $X'Y'Z' \neq 0$, a ecuación (3.6) transfórmase en:

$$XY'Z' + YX'Z' + ZX'Y' = 4K(X^2 + Y^2 + 2XY + Z^2 + 2(X+Y)Z).$$

Reagrupando en función da variable Z:

$$(XY' + YX')Z' + (X'Y' - 8K(X+Y))Z - 4KZ^2 - 4K(X+Y)^2 = 0. \tag{3.18}$$

Simplificando a notación obtense:

$$PZ' + QZ + R = 4KZ^2 \qquad \text{con} \qquad \begin{aligned} P(u,v) &= XY' + YX', \\ Q(u,v) &= X'Y' - 8K(X+Y), \\ R(u,v) &= -4K(X+Y)^2. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Se nos fixamos as funcións $Q(u,v)$ e $R(u,v)$ non poden ser identicamente nulas, pois $X', Y' \neq 0$ e $X+Y$ non pode ser cero, xa que iso implicaría que $X = -Y = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ por seren X e Y funcións en variables distintas. Pero esta última afirmación implicaría que $X' = Y' = 0$, chegando de novo a unha contradición, pois estamos a supoñer que a nosa superficie non é nin cilíndrica nin de translación. Entón, probaremos agora un Lema que nos garantirá que o coeficiente de Z', isto é, a función $P(u,v)$ non pode ser cero.

Lema 3.7. *A función $P(u,v) = XY' + YX'$ non pode ser identicamente nula en ningún entorno aberto.*

Demostración. Por redución ao absurdo supoñamos que $XY' + YX' = 0$ nalgún entorno aberto, entón $YX' = -XY'$ e en consecuencia $\frac{X'}{X} = \frac{-Y'}{Y} = a,\ a \in \mathbb{R}$.
Entón, o segundo termo que tiñamos da expresión da curvatura de Gauss en (3.6) sería

$$XY'Z' + YX'Z' + ZX'Y' = XYZ\left(\frac{Y'Z'}{YZ} + \frac{X'Z'}{XZ} + \frac{X'Y'}{XY}\right) = -a^2 XYZ,$$

dando lugar a ecuación:

$$-a^2XYZ = 4K(X+Y+Z)^2 \tag{3.20}$$

e, como $XYZ \neq 0$, $K \neq 0$, e X, Y, $Z \neq 0$, obtemos que a constante $a \neq 0$.
Para poder aplicar o Lema 3.5 a expresión

$$T \coloneqq 4K(X+Y+Z)^2 + a^2XYZ = 0,$$

derivamos con respecto a u:

$$\begin{aligned} T_u &= 8K(X+Y+Z)X' + a^2X'YZ = X\left(8K(X+Y+Z)\frac{X'}{X} + a^2\frac{X'}{X}YZ\right) \\ &= X(8Ka(X+Y+Z) + a^3YZ) \end{aligned} \tag{3.21}$$

e con respecto a v:

$$\begin{aligned} T_v &= 8K(X+Y+Z)Y' + a^2Y'XZ = Y\left(8K(X+Y+Z)\frac{Y'}{Y} + a^2\frac{Y'}{Y}XZ\right) \\ &= -Y(8Ka(X+Y+Z) + a^3XZ) \end{aligned} \tag{3.22}$$

e así, de (3.21) e (3.22), obtense:

$$X(8Ka(X+Y+Z) + a^3YZ) = -Y(8Ka(X+Y+Z) + a^3XZ).$$

Simplificando esta expresión,

$$8KaX(X+Y+Z) + a^3XYZ = -8KaY(X+Y+Z) - a^3XYZ,$$

obtense:

$$4K(X+Y)(X+Y+Z) = -a^2XYZ, \tag{3.23}$$

de xeito que, combinando (3.20) con (3.23) e empregando o feito de que $a \neq 0$ tense o resultado pois,

$$4K(X+Y)(X+Y+Z) = 4K(X+Y+Z)^2,$$

de onde

$$X+Y = X+Y+Z,$$

que daría lugar a que $Z = 0$ pero, como se estaba a supoñer que $Z \neq 0$, chégase a unha contradición que vén de supoñer que o coeficiente de Z', $P(u,v)$, era identicamente nulo. Deste xeito, conclúese a demostración do Lema. □

Unha vez visto isto, retomamos a ecuación simplificada (3.19) e derivamos con respecto a u e v aplicando o Lema 3.5:

$$(P_u - P_v)Z' + (Q_u - Q_v)Z + (R_u - R_v) = 0,$$

ou, de xeito equivalente,

$$(X''Y - XY'')Z' + (X''Y' - X'Y'' - 8K(X' - Y'))Z - 8K(X + Y)(X' - Y') = 0 \quad (3.24)$$

e denotaremos a partir de agora:

$$\begin{aligned} A(u, v) &= P_u - P_v = X''Y - XY'', \\ B(u, v) &= Q_u - Q_v = X''Y - X'Y'' - 8K(X' - Y'), \\ C(u, v) &= R_u - R_v = -8K(X + Y)(X' - Y'). \end{aligned}$$

Así, podemos simplificar a ecuación (3.24) como:

$$AZ' + BZ + C = 0, \text{ para todo } u + v + w = 0. \quad (3.25)$$

Recordemos que o noso obxectivo é demostrar que as únicas superficies separables con curvatura de Gauss constante e distinta de cero son as superficies de revolución. Para iso, estabamos supoñendo que a nosa superficie non eran de revolución, de xeito que obtiñamos unha expresión para a curvatura de Gauss en función das variable Z e coa notación introducida en 3.4. Acabamos de ver que os coeficientes desta ecuación non podían ser identicamente nulos o que nos permitía obter unha nova simplificación, (3.25), da expresión da curvatura de Gauss para unha superficie separable que non é nin cilíndrica, nin de translación, nin de revolución.

A demostración do Teorema 3.3 completarase levando a cabo sucesivas aplicacións do Lema 3.5. Porén, antes precisamos probar dous lemas técnicos necesarios para a mesma. O primeiro deles mostra que as funcións A, B e C da ecuación (3.25) non poden ser identicamente nulas e o segundo permite asegurar que as funcións B/A e C/A son funcións na variable $u + v$.

Lema 3.8. *Os coeficientes A, B e C da expresión* (3.25) *non poden ser identicamente nulos.*

Demostración. Resulta claro que se $C = 0$ entón $-8K(X + Y)(X' - Y') = 0$, o cal implicaría que $X' - Y' = 0$ e, por tanto, a nosa superficie sería de revolución, chegando a unha contradición.
Suponse agora que $A = 0$ ou $B = 0$ e mostraremos cada un dos casos procedendo por contradición:

1. *Caso A(u,v)=0.*
   Tense neste caso que $A(u, v) = P_u - P_v = X''Y - XY'' = 0$ de onde despexando

$\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = a \in \mathbb{R}$. Deste xeito, a expresión (3.24) queda:

$$\begin{aligned} F :=& XY\left(\frac{X''}{X} - \frac{Y''}{Y}\right)Z' + XY\left(\frac{X''Y'}{XY} - \frac{X'Y''}{XY} - 8K\frac{X'-Y'}{XY}\right)Z \\ &- 8K(X+Y)(X'-Y') \\ =& (a(XY' - X'Y) - 8K(X'-Y'))Z - 8K(X+Y)(X'-Y') = 0. \end{aligned}$$

Polo Lema (3.5), temos que $F_u - F_v = 0$ e entón, derivando e empregando o feito de que $\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = a \in \mathbb{R}$, obtense:

$$\begin{aligned} F_u &= (a(X'Y' - X''Y) - 8KX'')Z - 8K(X'(X'-Y') + (X+Y)X'') \\ &= \left(aXY\left(\frac{X'Y'}{XY} - \frac{X''}{X}\right) - 8KX\frac{X''}{X}\right)Z - 8K\left(X'(X'-Y') + (X+Y)X\frac{X''}{X}\right) \\ &= (a(X'Y' - aXY) - 8KaX)Z - 8K(X'(X'-Y') + (X+Y)Xa) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_v &= (a(XY'' - X'Y') - 8KY'')Z - 8K(Y'(X'-Y') + (X+Y)Y'') \\ &= \left(aXY\left(\frac{Y''}{Y} - \frac{X'Y'}{XY}\right) - 8KY\frac{Y''}{Y}\right)Z - 8K\left(Y'(X'-Y') - (X+Y)Y\frac{Y''}{Y}\right) \\ &= (a(aXY - X'Y') - 8KaY)Z - 8K(Y'(X'-Y') - (X+Y)Ya) = 0. \end{aligned}$$

E por tanto, aplicando de novo o Lema 3.5:

$$\begin{aligned} G := F_u - F_v =& (2aX'Y' - 2a^2XY - 8Ka(X+Y))Z - 8K((X'-Y')(X'-Y') \\ &+ a(X+Y)(X+Y)) \\ =& (2aX'Y' - 2a^2XY - 8Ka(X+Y))Z - 8K((X'-Y')^2 \\ &+ a(X+Y)^2) = 0. \end{aligned}$$

Se empregamos de novo o Lema 3.5 para a función G,

$$\begin{aligned} G_u =& (2aX''Y' - 2a^2X'Y - 8aKX')Z - 8K(2(X'-Y')X'' + 2a(X+Y)X') \\ =& (2a^2XY' - 2a^2X'Y - 8aKX')Z - 8K(2a(X'-Y')X + 2a(X+Y)X') \\ =& 0, \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} G_v =& (2aX'Y'' - 2a^2XY' - 8aKY')Z - 8K(2a(X+Y)Y' - 2(X'-Y')Y'') \\ =& (2a^2X'Y - 2a^2XY' - 8aKY')Z - 8K(2a(X+Y)Y' - 2a(X'-Y')Y) \\ =& 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

obtense que, de (3.26) e (3.27),

$$\begin{aligned} G_u - G_v =& (4a^2XY' - 4a^2X'Y - 8aK(X'-Y'))Z - 16aK(X'-Y')(X+Y) \\ &- 16aK(X'-Y')(X+Y) \\ =& (4a^2XY' - 4a^2X'Y - 8aK(X'-Y'))Z - 32aK(X'-Y')(X+Y) = 0 \end{aligned}$$

e, por tanto, restando esta expresión de $4aF$ temos:

$$\begin{aligned}4aF-(G_u-G_v)=&4a^2(XY'-X'Y)Z-32aK(X'-Y')Z\\&-32aK(X+Y)(X'-Y')\\&-4a^2(XY'-X'Y)Z+8aK(X'-Y')Z\\&+32aK(X'-Y')(X+Y)=0,\end{aligned}$$

de onde deducimos que $24aK(X'-Y')Z=0$ o cal non pode ser, xa que estamos a supoñer que tanto a curvatura de Gauss, K, como a constante a son distintos de cero e que a nosa superficie non é nin cilíndrica, nin de translación, nin de revolución, en particular, $Z'\neq 0$ e $X'-Y'\neq 0$. Así, $24aK(X'-Y')Z\neq 0$.

2. *Caso B(u,v)=0.*
Neste caso, tense que $B(u,v)=Q_u-Q_v=X''Y'-X'Y''-8K(X'-Y')=0$ de onde, como $X'\neq 0$ e $Y'\neq 0$, por non ser a nosa superficie de cilíndrica, nin de translación, nin de revolución,

$$\frac{X''}{X'}Y'X'+8KY'\frac{X'}{X'}=X'Y'\frac{Y''}{Y'}+8KX'\frac{Y'}{Y'},$$

simplificando esta expresión, obtense:

$$\left(\frac{X''}{X'}+8K\frac{1}{X'}\right)X'Y'=\left(\frac{Y''}{Y'}+8K\frac{1}{Y'}\right)X'Y'$$

e, por tratarse dunha igualdade de expresións en variables distintas,

$$\left(\frac{X''}{X'}+8K\frac{1}{X'}\right)=\ a=\left(\frac{Y''}{Y'}+8K\frac{1}{Y'}\right),$$

onde $a\in\mathbb{R}$. Se agora despexamos:

$$X''=aX'-8K,\quad Y''=aY'-8K. \tag{3.28}$$

Deste xeito, a expresión (3.24) é da forma:

$$\begin{aligned}F:=&((aX'-8K)Y-X(aY'-8K))Z'+((aX'-8K)Y'-X'(aY'-8K)\\&-8K(X'-Y'))Z-8K(X+Y)(X'-Y')\\=&(a(X'Y-XY')+8K(X-Y))Z'-8K(X+Y)(X'-Y')=0.\end{aligned}\tag{3.29}$$

Derivando con respecto a u e v e empregando (3.28),

$$\begin{aligned}F_u=&(a(X''Y-X'Y')+8KX')Z'-8K(X'(X'-Y')+(X+Y)X'')\\=&(a^2X'Y-8KaY-aX'Y'+8KX')Z'-8K(X'X'-X'Y'+aXX'\\&-8KX+aX'Y-8KY),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_v =&(a(X'Y' - XY'') + 8KY')Z' - 8K(Y'(X' - Y') - (X + Y)Y'')\\ =&(aX'Y' - a^2XY' + 8KaX - 8KY')Z' - 8K(Y'X' - Y'Y' - aXY'\\ &+ 8KX - aYY' + 8KY)\end{aligned}$$

e aplicando o Lema 3.5 a F temos:

$$\begin{aligned}G \coloneqq F_u - F_v =&(a^2(X'Y + XY') - 2aX'Y' - 8Ka(X + Y) + 8K(X' + Y'))Z'\\ &- 8K(X'^2 + Y'^2 - 2X'Y' + a(XX' + XY' + YY' + YX')\\ &- 16KX - 16KY)\\ =&(a^2(X'Y + XY') - 8Ka(X + Y) - 2aX'Y' + 8K(X' + Y'))Z'\\ &- 8K(X' - Y')^2 - 8aK(X + Y)(X' + Y') + 128K^2(X + Y) = 0.\end{aligned}$$

De novo, aplicando o Lema 3.5 a función G e empregando (3.28),

$$\begin{aligned}G_u =&(a^2(X''Y + X'Y') - 8aKX' - 2aX''Y' + 8KX'')Z' - 16K(X' - Y')X''\\ &- 8aK(X'(X' + Y') + (X + Y)X'') + 128K^2X'\\ =&(a^2X'Y' + a^3X'Y - 8a^2KY - 8aKX' - 2a^2X'Y' + 16aKY' + 8aKX'\\ &- 64K^2)Z' - 16K(X' - Y')(aX' - 8K) - 8aK(X'X' + X'Y' + aXX'\\ &+ aYX' - 8KX - 8KY) + 128K^2X',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_v =&(a^2(X'Y' + XY'') - 8aKY' - 2aX'Y'' + 8KY'')Z' + 16K(X' - Y')(Y'')\\ &- 8aK(Y'(X' + Y') + (X + Y)Y'') + 128K^2Y'\\ =&(a^2X'Y' + a^3XY' - 8Ka^2X - 8aKY' - 2a^2X'Y' + 16aKX' + 8aKY'\\ &- 64K^2)Z' - 16K(X' - Y')(8K - aY') - 8aK(Y'X' + Y'Y' + aXY'\\ &+ aYY' - 8KX - 8KY) + 128K^2XY',\end{aligned}$$

e entón,

$$\begin{aligned}G_u - G_v =&(a^3(X'Y - XY') - 16aK(X' - Y') + 8Ka^2(X - Y))Z' - 16K(X'\\ &- Y')(a(X' + Y') - 16K) - 8a^2K(X + Y)(X' - Y') - 8aK(X'X'\\ &- Y'Y') + 128K^2(X' - Y')\\ =&(a^3(X'Y - XY') - 16aK(X' - Y') + 8Ka^2(X - Y))Z' - 24aK(X'\\ &- Y')(X' + Y') - 8a^2K(X + Y)(X' - Y') + 384K^2(X' - Y') = 0.\end{aligned}$$

E, por tanto, se $a = 0$ temos que $X' - Y' = 0$ e a superficie sería unha superficie de revolución, contradición que vén de supoñer que $B = 0$. Así, conclúese que $a \neq 0$ e combinando a ecuación anterior con (3.29) multiplicada por a^2,

$$\begin{aligned}&(a^3(X'Y - XY') + 8a^2K(X - Y))Z' - 8a^2K(X + Y)(X' - Y') - (a^3(X'Y - XY') \\ &\quad + 16aK(X' - Y') - 8Ka^2(X - Y))Z' + 24aK(X' - Y')(X' + Y') + 8a^2K(X \\ &\quad + Y)(X' - Y') - 384K^2(X' - Y') \\ =&16aK(X' - Y')Z' + 24aK(X' - Y')(X' + Y') - 384K^2(X' - Y'),\end{aligned}$$

temos o seguinte:

$$H := 2aZ' + 3a(X' + Y') - 48K = 0.$$

Esta última ecuación obtense de dividir por $8K(X'-Y')$, onde todos os términos son distintos de cero. Se agora aplicamos o Lema 3.5 á función H e empregamos (3.28), temos o seguinte:

$$\begin{aligned}H_u &= 3aX'' = 3a(aX' - 8K), \\ H_v &= 3aY'' = 3a(aY' - 8K), \\ H_u - H_v &= 3a^2(X'' - Y'') = 3a^2(X' - Y') = 0,\end{aligned}$$

o cal é unha contradición, pois implicaría que $a = 0$ e acabamos de ver que non pode ser.

□

Derivando a ecuación simplificada da curvatura de Gauss que tiñamos en (3.25) con respecto a u e v e aplicando o Lema 3.5 obtemos a seguinte ecuación

$$(A_u - A_v)Z' + (B_u - B_v)Z + (C_u - C_v) = 0.$$

Probaremos agora o segundo Lema técnico que nos permitirá completar a proba da demostración do Teorema 3.3. Este Lema vainos permitir demostrar que as funcións $\frac{B}{A}$ e $\frac{C}{A}$ son funcións na variable $u + v$.

Lema 3.9. *Coa notación introducida temos*

$$\frac{A_u - A_v}{A} = \frac{B_u - B_v}{B} = \frac{C_u - C_v}{C}$$

ou, o que é o mesmo,

$$\left(\frac{B}{A}\right)_u = \left(\frac{B}{A}\right)_v; \quad \left(\frac{C}{A}\right)_u = \left(\frac{C}{A}\right)_v; \quad \left(\frac{C}{B}\right)_u = \left(\frac{C}{B}\right)_v.$$

Demostración. Se despexamos Z' da ecuación (3.25),

$$AZ' + BZ + C = 0, \quad \text{de onde} \quad Z' = \frac{-BZ - C}{A}$$

e substituímos o seu valor na expresión (3.18) co fin de eliminar Z', obtemos:

$$\begin{aligned}
&(X'Y + XY')Z' + (X'Y' - 8K(X+Y))Z - 4KZ^2 - 4K(X+Y)^2 \\
=&(X'Y + XY')\frac{-BZ - C}{A} + (X'Y' - 8K(X+Y))Z - 4KZ^2 - 4K(X+Y)^2 \\
=&(X'Y + XY')(-BZ) - (X'Y + XY')C + (X'Y' - 8K(X+Y))AZ - 4KAZ^2 \\
&- 4K(X+Y)^2A \\
=&- 4KAZ^2 + ((X'Y' - 8K(X+Y))A - (X'Y + XY')B)Z - 4K(X+Y)^2A \\
&- (X'Y + XY')C = 0,
\end{aligned}$$

escrito doutro xeito,

$$4KAZ^2 + ((8K(X+Y) - X'Y')A + (X'Y + XY')B)Z + 4K(X+Y)^2A + (X'Y + XY')C = 0.$$

Se simplificamos a notación:

$$LZ^2 + MZ + N = 0, \tag{3.30}$$

onde

$$\begin{aligned}
L &= 4KA, \\
M &= (8K(X+Y) - X'Y')A + (X'Y + XY')B = -QA + PB, \\
N &= 4K(X+Y)^2A + (X'Y + XY')C = -RA + PC.
\end{aligned}$$

Se agora aplicamos o Lema 3.5 a expresión (3.30), derivando con respecto a u e v, obtemos:

$$(L_u - L_v)Z^2 + (M_u - M_v)Z + (N_u - N_v) = 0, \tag{3.31}$$

onde

$$\begin{aligned}
L_u - L_v =& 4K(A_u - A_v), \\
M_u - M_v =& - Q_uA - QA_u + P_uB + PB_u + Q_vA + QA_v - P_vB - PB_v \\
=& (8K(X+Y) - X'Y')(A_u - A_v) + (X'Y - XY')(B_u - B_v), \\
N_u - N_v =& - R_uA - RA_u + P_uC + PC_u + R_vA + RA_v - P_vC - PC_v \\
=& 4K(X+Y)^2(A_u - A_v) + (X'Y + XY')(C_u - C_v).
\end{aligned}$$

E así distinguiremos dous casos:

1. $L_u - L_v \neq 0$.
As ecuacións (3.30) e (3.31) teñen as mesmas solucións pois supoñamos que Z_1 e Z_2 son solucións da ecuación (3.30), temos entón que se cumpre

$$LZ_i^2 + MZ_i + N = 0.$$

Derivando esta última ecuación con respecto a u e v temos:

$$L_u Z_i^2 + M_u Z_i + N_u = 0,$$
$$L_v Z_i^2 + M_v Z_i + N_v = 0,$$

se agora as restamos, obtemos:

$$(L_u - L_v)Z_i^2 + (M_u - M_v)Z_i + (N_u - N_v) = 0,$$

e, por tanto, as solucións Z_i con $i \in \{1, 2\}$ de (3.30) tamén son solucións da ecuación anterior, isto é, da ecuación (3.31). Deste xeito, por teren (3.30) e (3.31) as mesmas solucións, cúmprese polas fórmulas de Vieta que

$$\frac{L_u - L_v}{L} = \frac{M_u - M_v}{M} = \frac{N_u - N_v}{N}$$

ou, o que é o mesmo,

$$M(L_u - L_v) = L(M_u - M_v),$$
$$N(L_u - L_v) = L(N_u - N_v).$$

Substituíndo os valores de cada unha das variables, temos:

$$M(L_u - L_v) = L(M_u - M_v)$$
$$4KB(X'Y + XY')(A_u - A_v) = 4KA(X'Y - XY')(B_u - B_v)$$
$$B(X'Y + XY')(A_u - A_v) = A(X'Y - XY')(B_u - B_v)$$

e, por outro lado,

$$N(L_u - L_v) = L(N_u - N_v)$$
$$4KC(X'Y + XY')(A_u - A_v) = 4KA(X'Y + XY')(C_u - C_v)$$
$$C(X'Y + XY')(A_u - A_v) = A(X'Y + XY')(C_u - C_v)$$

e como $(X'Y + XY') \neq 0$, chegamos ao resultado que queríamos probar:

$$\frac{A_u - A_v}{A} = \frac{B_u - B_v}{B}; \quad \frac{A_u - A_v}{A} = \frac{C_u - C_v}{C}.$$

2. $L_u - L_v = 0$.
   Se $M_u - M_v = 0$, entón $N_u - N_v = 0$ e, por tanto,

$$0 = L_u - L_v = 4K(A_u - A_v),$$
$$0 = M_u - M_v = (8K(X+Y) - X'Y')(A_u - A_v) + (X'Y - XY')(B_u - B_v),$$
$$0 = N_u - N_v = 4K(X+Y)^2(A_u - A_v) + (X'Y + XY')(C_u - C_v),$$

   de onde $A_u - A_v = B_u - B_v = C_u - C_v = 0$, pois estamos a supoñer que o resto dos termos son distintos de cero, por non ser a nosa superficie de revolución.
   Se $M_u - M_v \neq 0$, entón

$$(M_u - M_v)Z + N_u - N_v = 0, \quad \text{de onde} \quad Z = \frac{N_v - N_u}{M_u - M_v}.$$

   Como as ecuacións (3.30) e (3.31) teñen as mesmas solucións e neste caso a (3.31) só ten unha solución para Z deducimos que o discriminante da ecuación (3.30), $M^2 - 4LN$, ten que ser cero e así, obtemos tamén unha única solución para Z:

$$Z = \frac{-M}{2L} \quad \text{de onde} \quad 2LZ + M = 0.$$

   Derivando e tendo en conta que se está a supoñer que $L_u - L_v = 0$:

$$2(L_u - L_v)Z = -(M_u - M_v); \; M_u - M_v = 0,$$

   chegando así a unha contradición con que $M_u - M_v \neq 0$.

□

Unha vez probados os Lemas 3.8 e 3.9 xa podemos completar a demostración do Teorema 3.3. Recordemos que estabamos a supoñer que a nosa superficie era de revolución e tiñamos por obxectivo chegar a unha contradición. Do Lema 3.9 que acabamos de probar, deducimos que existen funcións Φ e Ψ dunha variable tales que

$$\Psi = \tfrac{B(u,v)}{A(u,v)} \quad \text{e} \quad \Phi = \tfrac{C(u,v)}{A(u,v)}.$$

Por outra banda, polo Lema 3.8 tense que $A \neq 0$ e entón $L = 4KA \neq 0$ de xeito que podemos escribir a ecuación (3.30) como

$$Z^2 + \frac{M}{L}Z + \frac{N}{L} = 0, \tag{3.32}$$

tendo así unha ecuación polinómica na variable Z.
As dúas raíces desta ecuación, $Z_1(w)$ e $Z_2(w)$ satisfán:

$$Z_1(w) + Z_2(w) = \tfrac{-M}{L}, \quad Z_1(w)Z_2(w) = \tfrac{-N}{L},$$

onde as funcións $\frac{-M}{L} = \frac{-Q}{4K} + \frac{P}{4K}\frac{B}{A}$ e $\frac{-N}{L} = \frac{-R}{4K} + \frac{P}{4K}\frac{C}{A}$ dependen só da variable $-w = u+v$ debido ao Lema 3.9. Así, denotamos

$$\Psi_1 = \tfrac{M(u,v)}{L(u,v)} \quad \text{e} \quad \Phi_1 = \tfrac{N(u,v)}{L(u,v)}$$

e, renomeando a ecuación (3.32),

$$Z^2 + \Psi_1 Z + \Phi_1 = 0.$$

Aplicando de novo o Lema 3.5 e derivando con respecto a w e u, obtemos:

$$(2Z + \Psi_1)Z' - \Psi_1' Z - \Phi_1' = 0.$$

Se agora despexamos o valor de Z',

$$Z' = \frac{\Phi_1' + \Psi_1' Z}{2Z + \Psi_1},$$

co fin de eliminalo da ecuación da curvatura de Gauss (3.19), que obtiñamos tendo en conta que a nosa superficie non era nin cilíndrica, nin de translación, nin de revolución,

$$P\left(\frac{\Phi_1' + \Psi_1' Z}{2Z + \Psi_1}\right) + QZ + R = 4KZ^2,$$

obtemos o seguinte:

$$((2Z + \Psi_1)Q + P\Psi_1')Z + (2Z + \Psi_1)R + P\Phi_1' = 4KZ^2(2Z + \Psi_1)$$

ou, o que é o mesmo,

$$8KZ^3 + 4K\Psi_1^2 Z^2 - 2QZ^2 - \Psi_1 QZ - P\Psi_1' Z - 2ZR + \Psi_1 R - P\Phi_1' = 0.$$

Reordenando os termos,

$$Z^3 + \left(\frac{\Psi_1}{2} - \frac{Q}{4K}\right) Z^2 - \left(\frac{\Psi_1 Q + P\Psi_1' + 2R}{8K}\right) Z - \frac{\Psi_1 R + P\Phi_1'}{8K} = 0,$$

chégase a unha ecuación polinómica na variable Z.
Sexan $Z_1(w), Z_2(w)$ e $Z_3(w)$ as tres raíces desta ecuación. Entón, polas fórmulas de Vieta, a función

$$T(u+v) = Z_1(w) + Z_2(w) + Z_3(w)$$

é o oposto do coeficiente de Z^2 na ecuación que acabamos de obter, isto é,

$$T(u+v) = \frac{Q(u,v)}{4K} - \frac{\Psi_1(u+v)}{2}.$$

Se aplicamos unha última vez o Lema 3.5 a este expresión, obtemos:

$$\frac{Q_u}{4K} = \frac{Q_v}{4K},$$

de onde

$$\frac{1}{4K}(Q_u - Q_v) = \frac{1}{4K}B(u,v) = 0,$$

o que implica que $B(u,v) = 0$ chegando a unha contradición co Lema 3.8 que vén de supoñer que a superficie non era de revolución e conclúe así a demostración do Teorema 3.3.

Capítulo 4

Superficies separables con curvatura media constante

As superficies de revolución con curvatura media constante reciben o nome de Superficies de Delaunay. Unha construción xeométrica destas superficies foi vista no capítulo 2. Veremos agora que as superficies separables con curvatura media constante e distinta de cero son, salvo movementos ríxidos, a esfera, a catenoide, a onduloide e a nodoide, tal e como mostra o seguinte Teorema.

Teorema 4.1. [6] *As superficies de Delaunay, excepto o plano e o catenoide, son as únicas superficies separables no Espazo Euclídeo de* $\mathbb{R}^3$ *con curvatura media constante e distinta de cero.*

Procederemos agora coa demostración deste Teorema que nos dará unha proba de que as únicas superficies con curvatura media constante distinta de cero serán as superficies de revolución, en concreto, as superficies de Delaunay. Para a proba do mesmo empregaremos a notación e os resultados introducidos na sección anterior.

Un primeiro caso a distinguir dáse cando unha das funcións f, g ou h é constante. Sen perda de xeneralidade, pódese supoñer que h é constante e, polo tanto, $h(z) = a$, $z \in I_3$, para algún $a \in \mathbb{R}$. Entón, a nosa superficie separable $\mathcal{M}$ será da forma $f(x) + g(y) + a = 0$ que se corresponde cun cilindro recto sobre a curva plana

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) + g(y) + a = 0\},$$

que ten curvatura de Gauss $K = 0$, tal e como vimos no capítulo 3 deste traballo. A curvatura media desta superficie vén dada por $H = \frac{\kappa}{2}$, onde κ se corresponde coa curvatura da curva C. Así, se $H = 0$ entón $\kappa = 0$ e a curva C da que falamos é unha liña recta e consecuentemente a superficie é un plano. Outro caso moi coñecido ocorre cando H é unha constante distinta de cero. Neste caso, a curva C trátase dun círculo, ou parte del, con radio $r = \frac{1}{2|H|}$ de xeito que $\mathcal{M}$ é un cilindro circular. Neste caso, teríamos que a curvatura media toma o valor $H = \pm\frac{1}{2r}$, segundo a elección da aplicación de Gauss.

No que segue, supoñeremos que ningunha das funcións f, g ou h é constante ou, o que é o mesmo, supoñeremos que

$$f'(x)g'(y)h'(z) \neq 0,$$

no dominio de definición das tres funcións $\Omega = I_1 \times I_2 \times I_3$. Unha superficie separable determinada por $f(x)+g(y)+h(z) = 0$ é unha superficie de translación $z = \phi(x)+\psi(y)$ se, e só se, unha das función $f(x)$, $g(y)$ ou $h(z)$ é linear. Supoñamos, sen perda de xeneralidade, que a función $h(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ é linear. Liu probou en [10] que as superficies de translación con curvatura media constante $H \neq 0$ veñen dadas por

$$z = \frac{\sqrt{1+a^2}}{2H}\sqrt{1-4H^2x^2} + ay$$

e correspóndense con cilindros circulares de radio $\frac{1}{2|H|}$ e, polo tanto, son superficies de Delaunay.

Acabamos de ver que se a superficie separable $\mathcal{M}$ é unha superficie de translación entón, $\mathcal{M}$ é un cilindro circular e, en particular, unha superficie de Delaunay.

Agora probaremos que cando a superficie non é de translación, a única posibilidade para que a curvatura media, H, sexa constante e distinta de cero é que esteamos ante unha superficie de revolución. A proba desta afirmación levarase a cabo por contradición, isto é, suporemos que a nosa superficie non pode ser de revolución e chegaremos a unha contradición.

Coa notación introducida, e como estamos a supoñer que a nosa superficie non é nin de translación nin de rotación, temos que, pola Observación 3.6:

$$(X' - Y')(Y' - Z')(Z' - X') \neq 0 \text{ en } \Omega. \tag{4.1}$$

Deste xeito, podemos escribir a ecuación da curvatura media (2.7) como unha ecuación lineal en Z:

$$(X + Y)Z' + (X' + Y')Z + X'Y + XY' = -4H(X + +Y + Z)^{3/2}. \tag{4.2}$$

Se aplicamos o Lema 3.5 a esta ecuación, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} &= X'Z' + X''Z + X''Y + X'Y' = -6H(X + Y + Z)^{1/2}X', \\
\frac{\partial}{\partial v} &= Y'Z' + Y''Z + X'Y' + XY'' = -6H(X + Y + Z)^{1/2}Y',
\end{aligned}$$

de onde se ten

$$(X' - Y')Z' + (X'' - Y'')Z + X''Y - XY'' = -6H(X' - Y')(X + Y + Z)^{1/2}.$$

Como estamos a supoñer que a nosa superficie non é de revolución, podemos supoñer, sen perda de xeneralidade, que $(X' - Y') \neq 0$. Así, podemos despexar Z' da ecuación anterior,

$$Z' = -6H(X + Y + Z)^{1/2} + \frac{-(X'' - Y'')Z - (X''Y - XY'')}{(X' - Y')},$$

e combinala coa expresión da curvatura media, (4.2), obtendo:

$$\begin{aligned} -6H(X+Y)(X'-Y')(X+Y+Z)^{1/2} - (X+Y)(X''-Y'')Z - (X+Y)(X''Y - XY'') \\ + (X'+Y')(X'-Y')Z + (X'Y + XY')(X'-Y') = -4H(X+Y+Z)^{3/2}(X'-Y'), \end{aligned}$$

de onde

$$\begin{aligned} &(X'^2 - Y'^2 - (X+Y)(X''-Y''))Z + (X'-Y')(X'Y + XY') \\ &- (X+Y)(X''Y - XY'') = 2H(X'-Y')(X+Y-2Z)(X+Y+Z)^{1/2}. \end{aligned}$$

Se denotamos por:

$$\begin{aligned} P &= (X'^2 - Y'^2 - (X+Y)(X''-Y'')), \\ Q &= (X'-Y')(X'Y + XY') - (X+Y)(X''Y - XY''), \end{aligned}$$

a ecuación da curvatura media redúcese a

$$PZ + Q = 2H(X'-Y')(X+Y-2Z)(X+Y+Z)^{1/2}.$$

Agora, elevemos ao cadrado a expresión que acabamos de obter,

$$(PZ + Q)^2 = (2H(X'-Y')(X+Y-2Z)(X+Y+Z)^{1/2})^2$$

e entón, tense que

$$\begin{aligned} P^2Z^2 + Q^2 + 2PZQ =& 4H^2(X'-Y')^2((X+Y)^2 + 4Z^2 - 4Z(X+Y))((X+Y)+Z) \\ =& 16H^2(X'-Y')^2Z^3 - 12H^2(X'-Y')^2(X+Y)^2Z \\ &+ 4H^2(X'-Y')^2(X+Y)^3 \end{aligned}$$

ou, o que é o mesmo, se agrupamos en función da variable Z:

$$\begin{aligned} &16H^2(X'-Y')^2Z^3 - P^2Z^2 - (12H^2(X'-Y')^2(X+Y)^2 + 2PQ)Z \\ &+ 4H^2(X'-Y')^2(X+Y)^3 - Q^2 = 0. \end{aligned}$$

Se agora denotamos por

$$
\begin{aligned}
L =&16H^2(X'-Y')^2,\\
M =&-P^2,\\
N =&-12H^2(X'-Y')^2(X+Y)^2-2PQ,\\
R =&4H^2(X'-Y')^2(X+Y)^3-Q^2,
\end{aligned}
$$

podemos escribir a expresión anterior como:

$$LZ^3+MZ^2+NZ+R=0.$$

Como por hipótese estamos a supoñer que a curvatura media non se anula, $H\neq 0$, e que a nosa superficie non é de revolución, $(X'-Y')\neq 0$, entón $L\neq 0$ e podemos escribir:

$$Z^3+\frac{M}{L}Z^2+\frac{N}{L}Z+\frac{R}{L}=0, \tag{4.3}$$

de xeito que chegamos así a unha ecuación polinómica en Z onde os coeficientes van depender das tres raíces solución da mesma: $Z_1(w)$, $Z_2(w)$ e $Z_3(w)$. Ademais, como $u+v+w=0$, temos que $w=-(u+v)$ e as anteriores son funcións nunha variable. Definimos entón:

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(u+v) =&\frac{M(u,v)}{L(u,v)},\\
\Phi_2(u+v) =&\frac{N(u,v)}{L(u,v)},\\
\Phi_3(u+v) =&\frac{R(u,v)}{L(u,v)}.
\end{aligned}
$$

Con esta notación, temos que (4.3) se converte en

$$Z^3+\Phi_1Z^2+\Phi_2Z+\Phi_3=0.$$

Derivando con respecto a w, obtemos:

$$3Z^2Z'-\Phi_1'Z^2+2\Phi_1ZZ'-\Phi_2'Z+\Phi_2Z'-\Phi_3'=0,$$

de onde

$$(3Z^2+2\Phi_1Z+\Phi_2)Z'=\Phi_1'Z^2+\Phi_2'Z+\Phi_3'. \tag{4.4}$$

Da ecuación da curvatura media, (4.2), sabemos que Z' é

$$Z'=-\frac{1}{X+Y}((X'+Y')Z+X'Y+XY'+4H(X+Y+Z)^{3/2}),$$

de maneira que usando isto na ecuación (4.4) que acabamos de obter, chégase a:

$$
\begin{aligned}
&(3Z^2 + 2\Phi_1 Z + \Phi_2)((X' + Y')Z + X'Y + XY' + 4H(X + Y + Z)^{3/2}) \\
&\quad = -(\Phi_1' Z^2 + \Phi_2' Z + \Phi_3')(X + Y),
\end{aligned}
$$

ou, o que é o mesmo,

$$
\begin{aligned}
&(3Z^2 + 2\Phi_1 Z + \Phi_2)((X' + Y')Z + X'Y + XY') + (\Phi_1' Z^2 + \Phi_2' Z + \Phi_3')(X + Y) \\
&= -4H(X + Y + Z)^{3/2}(3Z^2 + 2\Phi_1 Z + \Phi_2).
\end{aligned}
$$

Recordemos que o noso obxectivo é atopar unha contradición por supoñer que a nosa superficie separable con curvatura media constante e distinta de cero non é de revolución. Así, traballaremos coa ecuación anterior ata chegar a algunha contradición. Elevemos agora ao cadrado esta expresión:

$$
\begin{aligned}
&(3Z^2 + 2\Phi_1 Z + \Phi_2)^2((X' + Y')Z + X'Y + XY')^2 + (\Phi_1' Z^2 + \Phi_2' Z + \Phi_3')^2(X + Y)^2 \\
&+ 2(3Z^2 + 2\Phi_1 Z + \Phi_2)((X' + Y')Z + X'Y + XY')(\Phi_1' Z^2 + \Phi_2' Z + \Phi_3')(X + Y) \\
&= 16H^2(X + Y + Z)^3(3Z^2 + 2\Phi_1 Z + \Phi_2)^2.
\end{aligned}
$$

Se nos fixamos, a ecuación anterior é unha ecuación de grado 7 en Z, o que implica que $\sum_{n=0}^{7} a_n Z^n = 0$ para algúns coeficientes a_k. Para calcular o valor do coeficiente a_7 basta con desenvolver o término da dereita da ecuación anterior

$$
\begin{aligned}
16H^2(X + Y + Z)^3(3Z^2 + 2\Phi_1 Z + \Phi_2)^2 = &16H^2(9Z^4 + 4\Phi_1^2 Z^2 + 12\Phi_1 Z^3 + \Phi_2^2 \\
&+ 2(3Z^2 + 2\Phi_1 Z)\Phi_2)(X^3 + 3X^2 Y \\
&+ 3X^2 Z + 3XY^2 + 6XYZ + 3XZ^2 \\
&+ Y^3 + 3Y^2 Z + 3YZ^2 + Z^3),
\end{aligned}
$$

de onde concluímos que $a_7 = 144H^2$, que non pode ser cero. Os restantes coeficientes veñen determinados polas raíces do polinomio asociado mediante as fórmulas de Vieta, polo que son funcións da variable $w = -(u + v)$. Vexamos que ocorre co coeficiente a_6.

Se nos fixamos na ecuación, entendemos que para obter grado seis precisamos tanto o término da dereita como o primeiro término da esquerda. Facendo un sinxelo cálculo tense

$$
9(X' + Y')Z^6 = 16H^2(27(X + Y) + 12\Phi_1)Z^6,
$$

de onde obtemos que

$$
a_6 = 16H^2(27(X + Y) + 12\Phi_1) - 9(X' + Y')^2.
$$

Se agora derivamos con respecto a u e con respecto a v e aplicamos o Lema 3.5, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}a_6 &= 432H^2X' - 18(X'+Y')X'',\\
\frac{\partial}{\partial v}a_6 &= 432H^2Y' - 18(X'+Y')Y'',\\
(a_6)_u + (a_6)_v &= 24H^2(X'-Y') - (X'+Y')(X''-Y'') = 0,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade se obtén ao dividir entre 18 o resultado da resta das ecuacións previas. Como estamos a supoñer que a nosa superficie non é de translación nin está dada por unha función lineal temos que $X'+Y' \neq 0$. Doutro xeito, teríamos que se $X'+Y'=0$ entón, $X'-Y'=0$ e chegaríamos a unha contradición con (4.1), pois se isto fose así, estariamos ante unha superficie de revolución. Entón, despexando:

$$24H^2\frac{X'-Y'}{X'+Y'} = X''-Y''.$$

Derivando esta última igualdade con respecto de u, obtemos:

$$24H^2\frac{X''(X'+Y')-(X'-Y')X''}{(X'+Y')^2} = 48H^2\frac{X''Y'}{(X'+Y')^2} = X'''.$$

Derivando isto de novo con respecto a v,

$$48H^2\frac{X''Y''(X'+Y')^2 - 2X''Y'(X'+Y')Y''}{(X'+Y')^4} = 48H^2\frac{X''Y''X' - X''Y''Y'}{(X'+Y')^3} = 0,$$

de onde

$$48H^2(X'-Y')\frac{X''Y''}{(X'+Y')^3} = 0.$$

Como $X'-Y' \neq 0$ concluímos que $X''Y''=0$. Se en (4.2) cambiamos os roles das variables X e Y por Y e Z e finalmente, por X e Z, obtemos: $X''Z'' = Y''Z'' = 0$ e, por tanto,

$$X''Y'' = X''Z'' = Y''Z'' = 0.$$

De aquí concluímos que polo menos unha das funcións X'', Y'', Z'' ten que ser cero. Se, por exemplo, tomamos $X''=Y''=0$, entón a expresión que nos dá o coeficiente a_6 implica que $24H^2(X'-Y')=0$, o cal é unha contradición, pois estamos a supoñer por hipótese que a nosa superficie non é de revolución e por (4.1) tense que $X'-Y' \neq 0$. O mesmo ocorre se supoñemos que $Y''=Z''=0$ ou que $X''=Z''=0$, chegando a unha contradición en cada caso. Esto completaría a proba do Teorema 4.1 o que nos permite concluír que o eixo de rotación é paralelo a un dos eixos coordenados ou, en caso de que non sexa así, a superficie é un cilindro circular, caso que aparece cando a superficie é de translación con eixo arbitrario.

Bibliografía

[1] Abbena, E., Salamon, S. & Gray, A. (2006). *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica.* Chapman & Hall/CRC.

[2] Do Carmo, M. P. (1995). *Geometría diferencial de curvas y superficies.* Madrid, España: Alianza Editorial.

[3] Eells, J. (1978). *On the surfaces of Delaunay and their Gauss maps.* Warwick University.

[4] Hasanis, Th. (2019). Translation surfaces with non-zero constant mean curvature in Euclidean space. *J. Geom. 110*(2), Paper No. 20, 8 pp.

[5] Hasanis, Th. & López,R. (2020). Classification of separable sur-faces with constant Gaussian curvature. *Manuscripta Mathematica*, 1-15.

[6] Hasanis, Th. & López, R. (2020). A characteristic property of Delaunay surfaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, *148*, 5291-5298.

[7] Hernández Cifre, M. A. y Pastor González, J. A. (2010). *Un curso de geometría diferencial.* Madrid, España: CSIC Press.

[8] Kenmotsu, K. (1980). Surfaces of revolution with prescribed mean curvature. *Tohoku Mathematical Journal*, Second Series, *32*(1), 147-153.

[9] Liu, H. (1999). Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces. *J. Geom. 64*(1-2), 141-149.

[10] López, R. & Moruz, M. (2015). Translation and homothetical surfaces in euclidean space with constant curvature. *J. Korean Math. Soc. 52*, 523-535.

[11] Montiel, S. & Ros, A. (2009). *Curves and surfaces.* (Vol. 69) American Mathematical Soc.

[12] Perdomo, O. M. (2011). Superficies con curvatura media constante. *Bol. Mat. 18*(2), 137-162.

[13] Wagon, S. (2010). *Mathematica in Action*. New York, USA: Springer-Verlag.

[14] Códigos e pautas para gráficos en 3D:
`https://www.wolfram.com/language/fast-introduction-for-math-students/es`