



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Introducción a los métodos asintóticos en problemas de perturbación relativos a ecuaciones diferenciales ordinarias

Andrea Fernández Precedo

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Introducción a los métodos
asintóticos en problemas de
perturbación relativos a ecuaciones
diferenciales ordinarias

Andrea Fernández Precedo

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Matemática Aplicada
Título: Introducción a los métodos asintóticos en problemas de perturbación relativos a ecuaciones diferenciales ordinarias
Breve descripción do contido
Se considerará una familia de problemas relativos a EDOs dependiente de un pequeño parámetro ε . Se asumirá que la solución de la familia es expresable como una serie de potencias de ε y se calcularán los primeros coeficientes de esa serie. Finalmente, se tratará de complementar el proceso anterior con una estimación del error de aproximación.

Índice general

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Conceptos previos de EDO'S	1
1.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias	1
1.2. Resultados de existencia y unicidad de solución para EDO	4
2. Método de desarrollos asintóticos	7
2.1. Algunos ejemplos de problemas de perturbación en EDO	7
2.2. Generalización del método	18
3. Problemas de perturbación singular	29
3.1. Ejemplos	29
Bibliografía	35

Resumen

El objetivo de este trabajo de fin de grado es dar a conocer alguna de las técnicas de la teoría de la perturbación sobre problemas que requieren de EDOs e involucren un pequeño parámetro ε . Para ello, profundizaremos fundamentalmente en el método de desarrollos asintóticos para ciertos problemas en particular y analizaremos brevemente algunos problemas de perturbación singulares con el objetivo de caracterizarlos.

Abstract

The major objective of this Bachelor's Degree Final Project will be to bring attention to some of the perturbation theory techniques about problems requiring ODE's and involving a small ε parameter. In order to do this, we will mainly go into detail about the asymptotic development method concerning various problems in particular and we will briefly analyse several singular perturbation problems with the aim of characterizing them.

Introducción

En las ciencias y la ingeniería ha estado siempre presente el desarrollo de modelos matemáticos para entender mejor muchos de los fenómenos físicos que nos rodean. Con frecuencia, estos modelos se pueden expresar en términos de ecuaciones diferenciales que contienen al menos un pequeño parámetro ε . Dichos problemas se denominan *problemas de perturbación*.

Para comprender la necesidad de la teoría de la perturbación (basándonos en [3]) debemos saber que ha estado con nosotros, de una forma u otra, durante un poco más de un siglo (aunque el término “perturbación singular” data de la década de 1940). Dicha teoría, y las técnicas asociadas a ella, han evolucionado durante este período como una respuesta a la necesidad de encontrar soluciones (en forma analítica) a problemas complejos. Estos problemas pueden surgir en diversos campos. Por ejemplo, en química, para establecer cómo cambia la concentración de reactivos con el tiempo en una reacción, se hace uso de la ecuación diferencial

$$-u'(t) = \varepsilon u^2(t).$$

Otro ejemplo ilustrativo es el oscilador armónico simple, relativo al ámbito de la mecánica. Si consideramos un sistema formado por una masa y un muelle que se mueven a lo largo de una recta, la ecuación del movimiento vendrá dada por la ecuación diferencial

$$u''(t) = -\varepsilon u(t).$$

Sin embargo, la mayoría de estos problemas presentan ciertas características que los excluyen de una resolución analítica exacta. Incluso aunque la solución exacta pudiera encontrarse explícitamente puede resultar más útil recurrir a las técnicas de perturbación para poder obtener mejor información sobre tales soluciones. Entre los métodos de aproximación los más importantes son los *métodos asintóticos o métodos de perturbación singular* cuyo objetivo principal es proporcionar una expresión razonablemente precisa de la solución mediante el desarrollo de ciertas técnicas. Dichos métodos han sido uno de los avances más importantes en matemática aplicada en este siglo. El propósito de este trabajo es

exponer alguna de estas técnicas de perturbación para ecuaciones diferenciales ordinarias.

Capítulo 1

Conceptos previos de EDO'S

El propósito de este capítulo es hacer una recopilación de algunos conceptos básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales ya que es de gran importancia en el estudio de modelos matemáticos de las ciencias aplicadas. No se trata de una profundización en el tema sino de exponer algunas ideas para poder utilizarlas en el capítulo siguiente. Se han utilizado los libros de Nagle, R. K. - Saff, E. B. - Snidder, A. D. [8] y George F. Simmons [9].

1.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Una ecuación diferencial ordinaria es una igualdad que relaciona la variable independiente con la n -ésima derivada de la variable dependiente (y usualmente también derivadas de orden menor). Más precisamente:

Definición 1.1. Una **ecuación diferencial ordinaria** es una ecuación que se puede expresar en la forma:

$$F(x, y, y', \dots, y^n) = 0; \quad (1.1)$$

donde F es una función de la variable independiente x , de la variable dependiente y , y de las derivadas de y hasta el orden n . Suponemos que x varía en un determinado intervalo I . Al mayor orden de derivación n se le llama **orden** de la *EDO*.

Definición 1.2. Cuando se puede despejar y^n de (1.1), es decir,

$$y^n = f(x, y, y', \dots, y^{n-1}) \quad (1.2)$$

la *EDO* se dice **explícita** o en forma **normal**.

Algunos ejemplos de *EDO* son:

Desintegración radiactiva:

$$A' = -kA,$$

donde $A = A(t)$ es la cantidad de **sustancia radiactiva** y k es la **constante de decaimiento radiactivo**.

Oscilador masa-resorte amortiguado:

$$mx'' + bx' + kx = f(t)$$

donde $x = x(t)$ es la **posición**, m se corresponde al valor de la **masa**, b es un término asociado a la **fricción**, k la constante del **muelle**, y f la **fuerza externa**.

Circuitos eléctricos:

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E(t)$$

donde $q = q(t)$ es la **carga**, L la **inductancia**, R la **resistencia**, C la **capacitancia** y E la **fuerza electromotriz**.

Definición 1.3. Se llama **solución explícita** de la *EDO* (1.1) o (1.2) en un intervalo I a una función $y = y(x)$ que esté definida y sea derivable, tantas veces como indique el orden de la *EDO*, en el intervalo I y que satisface la *EDO* para todo valor de $x \in I$.

Definición 1.4. Una relación de la forma

$$G(x, y) = 0 \tag{1.3}$$

se llama **solución implícita** de la *EDO* (1.1) o (1.2) en I , si se pueden obtener las derivadas de y y al sustituirlas en (1.1) o (1.2) se verifica ésta para todo valor de $x \in I$.

A diferencia de las ecuaciones algebraicas, las ecuaciones diferenciales tienen por solución una función. Además, una ecuación diferencial tiene generalmente un número infinito de soluciones que recibe el nombre de **solución general**.

Definición 1.5. Se llama **solución general** de la *EDO* (1.1) o (1.2) en un intervalo I a una función

$$y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (1.4)$$

que depende de n constantes arbitrarias (tantas como el orden de la *EDO*), definida y derivable (tantas veces como indique el orden de la *EDO*) en el intervalo I y que verifique la *EDO* para todo $x \in I$ y para cualquier valor de las constantes C_1, C_2, \dots, C_n .

Algunas ecuaciones diferenciales tienen soluciones que no pueden obtenerse de la solución general y en este caso reciben el nombre de **soluciones singulares**.

Cuando tenemos una *EDO*, algunas de las cuestiones que se nos plantean son si tiene solución, cuántas tiene, cuál será la que nos interesa y cómo podremos calcularla. Es por esto por lo que, en ocasiones, se desea encontrar una solución particular que satisfaga ciertas condiciones adicionales llamadas **condiciones iniciales**. El problema de determinar una solución de una ecuación diferencial que satisfaga ciertas condiciones iniciales se llama **problema de valores iniciales** o **problema de Cauchy**.

Definición 1.6. Un *problema de Cauchy* o de *valores iniciales* para la ecuación (1.1), consiste en encontrar una función $y = y(x)$ definida en un intervalo I que verifique:

$$(PVI) \begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) & \forall x \in I, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \quad (1.5)$$

donde $x_0 \in I$ e y_0, y_1, \dots, y_{n-1} son constantes dadas.

En particular, para ecuaciones diferenciales de **primer orden**, este problema se reduce a hallar una función $y = y(x)$ definida y derivable en un intervalo I tal que:

$$(PVI) \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & \forall x \in I, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

En el próximo capítulo haremos uso de algún ejemplo práctico de *problema de contorno*, por tanto, resultará conveniente dejar constancia la siguiente definición:

Definición 1.7. Un *problema de valores en la frontera* o *problema de contorno de tipo Dirichlet* es aquel que consta de una ecuación diferencial ordinaria de orden n y de n condiciones impuestas sobre la función desconocida en n valores de la variable independiente, de modo que

$$(PC) \begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), & \forall x \in I, \\ y(x_0) = y_0, \\ y(x_1) = y_1, \\ \dots \\ y(x_{n-1}) = y_{n-1} \end{cases} \quad (1.6)$$

donde $x_0, \dots, x_{n-1} \in I$ e y_0, y_1, \dots, y_{n-1} son constantes dadas.

1.2. Resultados de existencia y unicidad de solución para EDO

Esta sección la dedicaremos a recapitular los resultados que garantizan la *existencia* y *unicidad* de solución para el siguiente problema.

Sea $f : (x, y) \in A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}^n$ y consideremos el *problema de valores iniciales* para ecuaciones diferenciales de **primer orden**

$$(PVI) \begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.7)$$

El siguiente resultado garantiza la existencia (local) de solución. Las hipótesis constituyen una condición suficiente pero no necesaria para la existencia de solución. Tampoco establece el número de soluciones.

Teorema 1.8. (Teorema de Cauchy-Peano). Sea A un abierto de \mathbb{R}^{n+1} , f la aplicación $f : (x, y) \in A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}^n$ y $y' = f(x, y)$ la ecuación diferencial asociada.

Si f es continua en A , entonces, fijando un punto $(x_0, y_0) \in A$, existe solución de la ecuación pasando por (x_0, y_0) , definida en un entorno de x_0 .

Estableceremos ahora una condición suficiente para que exista solución del problema y que sea única.

Definición 1.9. Diremos que la función $f : (x, y) \in A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}^n$ es Lipschitziana en A con respecto a la variable y si existe $k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$ tal que, cualesquiera que sean $(x, y_1), (x, y_2) \in A$, se cumple que

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|$$

En ese caso, escribiremos $f \in L(A, y)$ o $f \in L_k(A, y)$.

Definición 1.10. Diremos que f es localmente Lipschitziana en A con respecto a la variable y , y escribiremos $f \in L_{loc}(A, y)$, si, para cada $(x_0, y_0) \in A$, existe un entorno U de (x_0, y_0) tal que $f \in L(U, y)$.

Teorema 1.11. (Teorema de Picard-Lipschitz). *Dada la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, si A es un abierto, f es continua en A y $f \in L_{loc}(A, y)$, entonces, fijado $(x_0, y_0) \in A$, existe solución de $y' = f(x, y)$ pasando por (x_0, y_0) y es única.*

Este último teorema resultará fundamental para garantizar la existencia y unicidad de solución en los problemas prácticos que relataremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Método de desarrollos asintóticos

En este capítulo haremos una introducción de cómo reconocer distintos problemas de perturbación así como la ejemplificación de cada uno de ellos. También describiremos con detalle el *método de desarrollos asintóticos* o *de perturbaciones*, que cabe destacar que es uno de los métodos de aproximación más potentes que existe hoy en día. Se siguieron fundamentalmente los textos de J.A Álvarez Dios y J.M Viaño [1] y C.M Bender y S.A Orszag [2].

2.1. Algunos ejemplos de problemas de perturbación en EDO

La teoría de la perturbación es una gran colección de métodos iterativos para obtener *soluciones analíticas aproximadas* a problemas que involucran un pequeño parámetro ε . La idea básica de la teoría de perturbación es tratar de descomponer un problema difícil en un número infinito de problemas relativamente fáciles.

Luego, en esta sección vamos a mostrar cómo podemos aplicar la teoría de perturbación en algunos problemas particulares de diferentes ámbitos como biología, cinética química o mecánica. Veremos que dichos problemas van a resultar siendo problemas de *perturbación regular*. Para comprender el funcionamiento de resolución de estos problemas haremos uso de un sistemático método que comenzaremos describiendo mediante un sencillo ejemplo.

Ejemplo 1. Vamos a considerar un modelo que se usa para representar el crecimiento de poblaciones que viene dado por el siguiente *problema de valor inicial lineal de primer orden*

$$(PVI) \begin{cases} u'(t) = Ku(t) \\ u(0) = a_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

donde u es el **tamaño de población**, K es la **tasa de crecimiento** de la población, y a_0 es la **población inicial**. Supongamos que la constante K toma cierto valor pequeño positivo. Trataremos este problema mediante las técnicas de perturbación por lo cual lo embeberemos en una familia de problemas que involucren un pequeño parámetro ε de forma que el problema para $\varepsilon = 0$ se pueda resolver fácilmente. Cuando $\varepsilon = 0$ el problema se conoce como problema *no perturbado*. Luego,

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} u'(t) = \varepsilon u(t) \\ u(0) = a_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

donde $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, para un cierto ε_0 positivo, de forma que se puede recuperar el problema original para el valor de $\varepsilon = K$.

Claramente, para cada valor de ε , este problema tiene solución única debido al teorema de Picard, por tanto, para resolver este problema, asumiremos que dicha solución tiene la forma

$$u_\varepsilon(t) = u_0(t) + u_1(t)\varepsilon + u_2(t)\varepsilon^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\varepsilon^n \quad (2.3)$$

es decir, que la solución tiene un desarrollo en serie de potencias de ε . Esta expresión se conoce como *desarrollo asintótico* o *serie de Poincaré*. Luego, sustituyendo (2.3) en la ecuación diferencial de (2.2) se obtiene que

$$(u'_0 + u'_1\varepsilon + u'_2\varepsilon^2 + \dots) - \varepsilon(u_0 + u_1\varepsilon + u_2\varepsilon^2 + \dots) = 0$$

Hay que tener en cuenta que vamos a asumir en todo momento que las distintas operaciones infinitesimales van a poder ser realizables término a término. Ahora, desarrollando y agrupando en términos de potencias de ε tenemos que

$$u'_0 + (u'_1 - u_0)\varepsilon + (u'_2 - u_1)\varepsilon^2 + \dots = 0$$

Debido a que ε es variable, podemos concluir que el coeficiente de cada potencia de ε tiene que ser igual a cero. Por otra parte, desarrollemos también la condición inicial $u(0) = a_0$ que podemos reescribirla del siguiente modo

$$u(0) = u_0(0) + u_1(0)\varepsilon + u_2(0)\varepsilon^2 + \dots = a_0 + 0 \cdot \varepsilon + 0 \cdot \varepsilon^2 + \dots$$

Luego, igualando los coeficientes de las potencias de ε se obtienen las distintas condiciones iniciales

$$u_0(0) = a_0, u_1(0) = 0, u_2(0) = 0, \dots$$

Por tanto, hemos llegado finalmente al siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_0 = 0 \\ u_0(0) = a_0 \\ \\ u'_1 - u_0 = 0 \\ u_1(0) = 0 \\ \\ u'_2 - u_1 = 0 \\ u_2(0) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ u'_n - u_{n-1} = 0 \\ u_n(0) = 0 \end{array} \right.$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se puede resolver fácilmente, pues

$$u'_0(t) = 0 \Rightarrow u_0(t) = C_0.$$

Imponiendo las condiciones iniciales, $u_0(0) = a_0 = C_0$. De lo que se deduce que

$$u_0(t) = a_0.$$

Esta solución se conoce como solución de *orden cero* y, en los problemas de perturbación regular, coincide con la solución del problema *no perturbado*. Generalmente, es la existencia de una solución de orden cero lo que asegura que los términos de orden superior también pueden determinarse analíticamente.

Ahora,

$$u'_1(t) - u_0(t) = 0 \Rightarrow u'_1(t) = u_0(t) = a_0 \Rightarrow u_1(t) = a_0t + C_1.$$

Imponiendo las condiciones iniciales, $u_1(0) = 0 = C_1$. De lo que se deduce que

$$u_1(t) = a_0t.$$

De esta forma, de manera general, podemos escribir el término de orden n ($n \geq 1$) como sigue:

$$u_n(t) = \int_0^t u_{n-1}(s)ds.$$

Para obtener una expresión más explícita del término general u_n , haremos uso del principio

de inducción en n . Probemos entonces que $u_n(t) = \frac{a_0}{n!}t^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ se tiene que la fórmula es válida, pues ya hemos visto que $u_1(t) = a_0t$. Supongamos ahora, por hipótesis de inducción, que la fórmula se cumple para u_{n-1} , es decir,

$$u_{n-1} = \frac{a_0}{(n-1)!}t^{n-1}$$

Entonces, sabemos que

$$u_n(t) = \int_0^t u_{n-1}(s)ds = \int_0^t \frac{a_0}{(n-1)!}s^{n-1}ds = \frac{a_0}{(n-1)!} \frac{s^n}{n} \Big|_0^t = \frac{a_0}{n!}t^n$$

que es lo que queríamos comprobar. Por tanto, con esto termina nuestra prueba por inducción y podemos concluir que la fórmula es válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, teniendo en cuenta la expresión de $u_\varepsilon(t)$ que usamos en (2.3) resulta que:

$$u_\varepsilon(t) = a_0 + (a_0t)\varepsilon + \left(\frac{a_0}{2}t^2\right)\varepsilon^2 + \dots + \left(\frac{a_0}{n!}t^n\right)\varepsilon^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{n!}t^n\varepsilon^n \quad (2.4)$$

Por tanto, por una parte, hemos conseguido reducir el problema (2.2) a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de fácil resolución, y, por otra parte, hemos aproximado la solución exacta del problema por los primeros términos de un *desarrollo* o *serie asintótica*.

Para completar el problema, daremos ahora una cota de nuestro error de aproximación entre la solución exacta del problema y la solución aproximada mediante el método de desarrollos asintóticos. La solución exacta del problema es

$$u(t) = a_0e^{\varepsilon t},$$

de modo que el error cometido al aproximar hasta el término ε^m es

$$\left| a_0e^{\varepsilon t} - \sum_{n=0}^m \frac{a_0}{n!}t^n\varepsilon^n \right| \leq \frac{e^\xi}{(m+1)!}(\varepsilon t)^{m+1}$$

con $0 \leq \xi \leq \varepsilon t$, por la fórmula del resto de Lagrange para el polinomio de Taylor.

A continuación, vamos a plantear un modelo, ya mencionado en la introducción del trabajo, que establece cómo cambia la concentración de reactivos con el tiempo en una reacción química de orden dos.

Ejemplo 2. Este modelo viene dado por un *problema de valor inicial no lineal de primer orden*

$$(PVI) \begin{cases} -u'(t) = Ku^2(t) \\ u(0) = a_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

donde $u(t)$ es la **concentración de reactivos** y K la **constante cinética** o **constante de velocidad**. Suponiendo que la constante K toma cierto valor pequeño positivo, convertiremos este problema en un problema de perturbación incluyéndolo en una familia de problemas que dependen de un pequeño parámetro ε . Entonces, identificando K con ε

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} -u'(t) = \varepsilon u^2(t) \\ u(0) = a_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

donde $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, para un cierto ε_0 positivo, de forma que se puede recuperar el problema original para el valor de $\varepsilon = K$.

Utilizando el mismo argumento que el ejemplo anterior, sabemos que, para cada valor de ε , este problema tiene solución única por el teorema de Picard. Luego, para resolverlo mediante el método de perturbación, asumiremos que la solución $u_\varepsilon(t)$ de este problema tiene una expresión de la forma

$$u_\varepsilon(t) = u_0(t) + u_1(t)\varepsilon + u_2(t)\varepsilon^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\varepsilon^n \quad (2.7)$$

Ahora, sustituyendo (2.7) en la ecuación diferencial de (2.6) obtenemos

$$(u'_0 + u'_1\varepsilon + u'_2\varepsilon^2 + \dots) + \varepsilon(u_0 + u_1\varepsilon + u_2\varepsilon^2 + \dots)^2 = 0,$$

esto es

$$(u'_0 + u'_1\varepsilon + u'_2\varepsilon^2 + \dots) + \varepsilon(u_0^2 + 2u_0u_1\varepsilon + 2u_0u_2\varepsilon^2 + u_1^2\varepsilon^2 + 2u_0u_3\varepsilon^3 + 2u_1u_2\varepsilon^3 + \dots) = 0,$$

desarrollando y agrupando en términos de potencias de ε se tiene

$$u'_0 + (u'_1 + u_0^2)\varepsilon + (u'_2 + 2u_0u_1)\varepsilon^2 + (u'_3 + 2u_0u_2 + u_1^2)\varepsilon^3 + \dots = 0.$$

Igualando a cero los coeficientes de ε y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del

problema obtenemos el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_0 = 0 \\ u_0(0) = a_0 \\ \\ u'_1 + u_0^2 = 0 \\ u_1(0) = 0 \\ \\ u'_2 + 2u_0u_1 = 0 \\ u_2(0) = 0 \\ \\ \dots\dots\dots \\ u'_n + (u_0u_{n-1} + u_1u_{n-2} + \dots + u_{n-1}u_0) = 0 \\ u_n(0) = 0 \end{array} \right.$$

Es importante destacar en este ejemplo que hemos partido de un problema no lineal y hemos conseguido reducirlo a un sistema de ecuaciones diferenciales que son lineales. Si resolvemos el sistema tenemos que

$$u'_0(t) = 0 \Rightarrow u_0(t) = C_0.$$

Luego, imponiendo las condiciones iniciales, $u_0(0) = a_0 = C_0$. De lo que se deduce que

$$u_0(t) = a_0.$$

Ahora,

$$u'_1(t) + u_0^2(t) = 0 \Rightarrow u'_1(t) = -u_0^2(t) = -a_0^2 \Rightarrow u_1(t) = -a_0^2 t + C_1.$$

Entonces, imponiendo las condiciones iniciales, $u_1(0) = 0 = C_1$. De lo que se deduce que

$$u_1(t) = -a_0^2 t.$$

De este modo, de manera general, podemos escribir el término de orden n ($n \geq 1$) como sigue:

$$u_n(t) = \int_0^t -(u_0u_{n-1} + u_1u_{n-2} + \dots + u_{n-1}u_0)(s)ds.$$

Vamos ahora a obtener una expresión más explícita del término general u_n . Para esto, utilizaremos el principio de inducción en n . Probemos que $u_n(t) = (-1)^n a_0^{n+1} t^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ se cumple la fórmula anterior, pues como acabamos de ver $u_1(t) = -a_0^2 t$. Supongamos ahora, por hipótesis de inducción, que la fórmula es válida hasta u_{n-1} , esto es

$$u_j = (-1)^j a_0^{j+1} t^j,$$

para todo $j > 0$ con $j \leq n - 1$. Sabemos que

$$u_n(t) = \int_0^t -(u_0 u_{n-1} + u_1 u_{n-2} + \dots + u_{n-1} u_0)(s) ds.$$

Pero observemos que

$$u_0 \cdot u_{n-1} = ((-1)^0 a_0^1 t^0) ((-1)^{n-1} a_0^n t^{n-1}) = (-1)^{n-1} a_0^{n+1} t^{n-1}$$

$$u_1 \cdot u_{n-2} = ((-1)^1 a_0^2 t^1) ((-1)^{n-2} a_0^{n-1} t^{n-2}) = (-1)^{n-1} a_0^{n+1} t^{n-1}$$

y, en general,

$$u_k \cdot u_{n-1-k} = \left((-1)^k a_0^{k+1} t^k \right) \left((-1)^{n-1-k} a_0^{n-k} t^{n-1-k} \right) = (-1)^{n-1} a_0^{n+1} t^{n-1}$$

Entonces

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \int_0^t -(u_0 u_{n-1} + u_1 u_{n-2} + \dots + u_{n-1} u_0)(s) ds = \int_0^t -((-1)^{n-1} a_0^{n+1} s^{n-1} \cdot n) ds \\ &= \int_0^t (-1)^n a_0^{n+1} s^{n-1} \cdot n ds = (-1)^n a_0^{n+1} \frac{s^n}{n} \cdot n \Big|_0^t = (-1)^n a_0^{n+1} t^n, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos comprobar. Hemos terminado de esta forma la prueba por inducción y concluimos entonces que la fórmula es válida para todo $n \in \mathbb{N}$. En definitiva, hemos encontrado una solución aproximada de la forma (2.7) para el problema (2.6) de modo que

$$u_\varepsilon(t) = a_0 + (-a_0^2 t) \varepsilon + (a_0^3 t^2) \varepsilon^2 + \dots + ((-1)^n a_0^{n+1} t^n) \varepsilon^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_0^{n+1} t^n \varepsilon^n \quad (2.8)$$

De la misma forma que el ejemplo anterior, vamos a dar, por último, una cota de nuestro

error de aproximación. La solución exacta del problema es

$$u(t) = \frac{1}{\varepsilon t + 1/a_0}$$

luego, el error cometido al aproximar hasta el término ε^m es

$$\left| \frac{1}{\varepsilon t + 1/a_0} - \sum_{n=0}^m (-1)^n a_0^{n+1} t^n \varepsilon^n \right| \leq \frac{(m+1)! (-1)^{m+1} (\xi + C)^{-m-2}}{(m+1)!} (\varepsilon t)^{m+1} = (-1)^{m+1} (\xi + C)^{-m-2}$$

con $0 \leq \xi \leq \varepsilon t$, por la fórmula del resto de Lagrange para el polinomio de Taylor.

Otro modelo interesante, que también se destacó en la introducción del trabajo, es el **oscilador armónico simple** (extraído de los apuntes de Modelización Matemática [7]).

Ejemplo 3. Si consideramos un sistema formado por una masa y un muelle que se mueven a lo largo de una recta y despreciamos cualesquiera fuerzas de amortiguamiento o externas que puedan estar presentes, la expresión del desplazamiento de la masa en función del tiempo t viene dada por el siguiente *problema de valor inicial lineal de segundo orden*

$$(PVI) \begin{cases} mu''(t) = -Ku(t) \\ u(0) = a_0 \\ u'(0) = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

donde $u(t)$ es la **posición** de una masa puntual m y K es la **constante de rigidez** o **constante del muelle**. Además, estamos asumiendo que la velocidad inicial es cero.

Simplifiquemos la ecuación diferencial de (2.9) dividiendo por la masa m y así tenemos que

$$u''(t) = -\frac{K}{m}u(t).$$

Suponiendo que la constante $\frac{K}{m}$ toma cierto valor pequeño positivo, vamos a convertir este problema en un problema de perturbación introduciéndolo en una familia de problemas que involucren un pequeño parámetro ε . Asociando $\frac{K}{m}$ con ε obtenemos

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} u''(t) = -\varepsilon u(t) \\ u(0) = a_0 \\ u'(0) = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

donde $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, para un cierto ε_0 positivo, de forma que se puede recuperar el problema original para el valor $\varepsilon = \frac{K}{m}$.

Vamos a asumir ahora que la solución $u_\varepsilon(t)$ de este problema tiene una expresión de la forma

$$u_\varepsilon(t) = u_0(t) + u_1(t)\varepsilon + u_2(t)\varepsilon^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\varepsilon^n \tag{2.11}$$

Por tanto, si sustituimos (2.11) en la ecuación diferencial de (2.10) obtenemos

$$(u_0'' + u_1'\varepsilon + u_2''\varepsilon^2 + \dots) + \varepsilon(u_0 + u_1\varepsilon + u_2\varepsilon^2 + \dots) = 0,$$

desarrollando y agrupando en términos de potencias de ε se tiene

$$u_0'' + (u_1'' + u_0)\varepsilon + (u_2'' + u_1)\varepsilon^2 + \dots = 0.$$

Igualando a cero los coeficientes de ε y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del problema obtenemos el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0'' = 0 \\ u_0(0) = a_0, \quad u_0'(0) = 0 \\ \\ u_1'' + u_0 = 0 \\ u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0 \\ \\ u_2'' + u_1 = 0 \\ u_2(0) = 0, \quad u_2'(0) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ u_n'' + u_{n-1} = 0 \\ u_n(0) = 0, \quad u_n'(0) = 0 \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema tenemos que

$$u_0''(t) = 0 \Rightarrow u_0'(t) = C_0 \Rightarrow u_0(t) = C_0t + C_1.$$

Como $u_0(0) = a_0$, entonces

$$u_0(0) = a_0 = C_1 \Rightarrow C_1 = a_0.$$

Ahora, $u'_0(t) = C_0$, y como $u'_0(0) = 0$, entonces $C_0 = 0$. Se deduce, por tanto, que

$$u_0(t) = 0 \cdot t + a_0 = a_0 \Rightarrow u_0(t) = a_0.$$

Del mismo modo,

$$u''_1(t) + u_0(t) = 0 \Rightarrow u''_1(t) = -u_0(t) = -a_0 \Rightarrow u'_1(t) = -a_0 t + C_2.$$

Como $u'_1(0) = 0$, entonces $C_2 = 0$. Luego, $u'_1(t) = -a_0 t$.

Ahora,

$$u'_1(t) = -a_0 t \Rightarrow u_1(t) = -a_0 \frac{t^2}{2} + C_3.$$

Como $u_1(0) = 0$, entonces $C_3 = 0$. Se deduce, por tanto, que

$$u_1(t) = -a_0 \frac{t^2}{2} + 0 = -a_0 \frac{t^2}{2}.$$

De manera general, podemos escribir el término de orden n ($n \geq 1$) de la siguiente forma:

$$u_n(t) = \int_0^t \int_0^s -u_{n-1}(r) \, dr \, ds.$$

Vamos a obtener una expresión más explícita del término general u_n utilizando inducción en n . Probemos que $u_n = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} t^{2n}$.

Para $n = 1$ se cumple la fórmula anterior, pues hemos visto que $u_1(t) = -a_0 \frac{t^2}{2}$. Supongamos ahora, por hipótesis de inducción, que la fórmula es válida para u_{n-1} , es decir

$$u_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1} a_0}{(2n-2)!} t^{2n-2}$$

Entonces, sabemos que

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \int_0^t \int_0^s -u_{n-1}(r) \, dr \, ds = \int_0^t \int_0^s - \left(\frac{(-1)^{n-1} a_0}{(2n-2)!} r^{2n-2} \right) \, dr \, ds = \int_0^t \frac{(-1)^n a_0}{(2n-2)!} \frac{r^{2n-1}}{2n-1} \Big|_0^s \, ds \\ &= \int_0^t \frac{(-1)^n a_0}{(2n-2)!} \frac{s^{2n-1}}{2n-1} \, ds = \int_0^t \frac{(-1)^n a_0}{(2n-1)!} s^{2n-1} \, ds = \frac{(-1)^n a_0}{(2n-1)!} \frac{s^{2n}}{2n} \Big|_0^t = \frac{(-1)^n a_0}{(2n-1)!} \frac{t^{2n}}{2n} \\ &= \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} t^{2n}, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos comprobar. Con esto termina nuestra prueba por inducción y podemos concluir que la fórmula es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

En consecuencia, hemos encontrado una solución aproximada del problema (2.10) de la forma

$$u_\varepsilon(t) = a_0 + \left(\frac{-a_0}{2}t^2\right)\varepsilon + \left(\frac{a_0}{24}t^4\right)\varepsilon^2 + \dots + \left(\frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}t^{2n}\right)\varepsilon^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} t^{2n} \varepsilon^n \quad (2.12)$$

Para complementar el problema, vamos a acotar el error de aproximación entre la solución exacta y la solución aproximada del problema por la fórmula del resto de Lagrange para el polinomio de Taylor. La solución exacta del problema es

$$u(t) = a_0 \cos(\sqrt{\varepsilon}t),$$

por tanto, el error cometido al aproximar hasta el término ε^m es, o bien

$$\left| a_0 \cos(\sqrt{\varepsilon}t) - \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} t^{2n} \varepsilon^n \right| \leq \left| \frac{(-1)^{m/2} \sin(\xi)}{(m+1)!} (\sqrt{\varepsilon}t)^{m+1} \right| \leq \frac{(-1)^{m/2}}{(m+1)!} (\sqrt{\varepsilon}t)^{m+1}$$

si m es par, con $0 \leq \xi \leq \sqrt{\varepsilon}t$, o bien

$$\left| a_0 \cos(\sqrt{\varepsilon}t) - \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} t^{2n} \varepsilon^n \right| \leq \left| \frac{(-1)^{(m+1)/2} \cos(\xi)}{(m+1)!} (\sqrt{\varepsilon}t)^{m+1} \right| \leq \frac{(-1)^{(m+1)/2}}{(m+1)!} (\sqrt{\varepsilon}t)^{m+1}$$

si m es impar, con $0 \leq \xi \leq \sqrt{\varepsilon}t$.

2.2. Generalización del método

En todos los ejemplos discutidos anteriormente cabe destacar que se ha utilizado el mismo procedimiento de resolución para cada uno de los problemas dados. Dicho método se denomina *método de desarrollos asintóticos* o *método de perturbaciones* y es la base para obtener la solución de un problema de perturbación regular.

Por tanto, de manera general, dado cualquier problema físico que pueda representarse mediante una *EDO* o mediante un *problema de valores iniciales*,

$$(PVI) \begin{cases} u^{(n)} = f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) & \forall t \in I, \\ u(0) = a_0, \\ u'(0) = a_1, \\ \dots \\ u^{(n-1)}(0) = a_{n-1} \end{cases} \quad (2.13)$$

siendo $t_0 = 0 \in I$ el tiempo inicial y a_0, a_1, \dots, a_{n-1} constantes dadas, será posible transformarlo en un *problema de perturbación* embebiendo dicho problema en una familia de problemas que involucren un pequeño parámetro ε , donde ε es un parámetro representativo del problema.

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} u^{(n)} = L_0(t, u, u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) + \varepsilon L_1(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) & \forall t \in I, \\ u(0) = a_0, \\ u'(0) = a_1, \\ \dots \\ u^{(n-1)}(0) = a_{n-1} \end{cases} \quad (2.14)$$

para $\varepsilon \in \xi(0)$, siendo $\xi(0)$ un pequeño entorno del cero. Las funciones L_0 y L_1 presentarán las mismas características que la función f del problema original

Para cada uno de los problemas de valor inicial de (2.14) que resultan de cada valor de ε , la deducción de la existencia y unicidad de solución, será cuestión de aplicar los teoremas de Cauchy-Peano o Picard-Lipschitz anteriormente expuestos. Simplemente, basta tener en cuenta que toda ecuación diferencial real de orden n puede ser escrita como una ecuación diferencial de orden 1 sobre \mathbb{R}^n o, en otras palabras, un sistema de n ecuaciones

diferenciales de orden 1. En consecuencia, asumiremos que la función f es continua (existencia de solución) y lipshitziana respecto a las n últimas variables (unicidad de solución). Definiendo entonces la función

$$u : \varepsilon \in \xi(0) \longrightarrow u = u(\varepsilon) = u_\varepsilon \in C^1(I)$$

y asumiendo que esta función es suficientemente regular tenemos que u_ε tendrá un desarrollo en serie de potencias en torno al punto cero de la forma

$$u_\varepsilon = u_0 + u_1(\varepsilon - 0) + u_2(\varepsilon - 0)^2 + \dots = u_0 + u_1\varepsilon + u_2\varepsilon^2 + \dots$$

Por tanto, formalmente, podemos concluir que este método consiste en encontrar una solución para el problema (2.14) en forma de potencias de ε (para ε pequeño)

$$u_\varepsilon = u_0 + u_1\varepsilon + u_2\varepsilon^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\varepsilon^n \quad (2.15)$$

donde u_n es independiente de ε y u_0 es la solución del *problema no perturbado*. El desarrollo (2.15) se llama *desarrollo asintótico o serie de Poincaré*.

Como ya hemos visto en los ejemplos, los coeficientes u_n se determinarán sustituyendo la expresión formal (2.15) en la ecuación

$$u^{(n)} = L_0(t, u, u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) + \varepsilon L_1(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)),$$

seguidamente se desarrolla para ε pequeño y se identifican los coeficientes de la misma potencia de ε . Dado que estas ecuaciones deben ser satisfechas para todos los valores de ε , cada coeficiente de ε debe ser cero independientemente dado que las sucesiones ε^n son linealmente independientes. Esto da lugar, como ya hemos visto, a ecuaciones más simples para u_n que pueden resolverse de forma más sencilla.

De este modo tenemos que la solución del problema original se “aproxima” por los primeros términos de esta serie constituyendo así una aproximación uniformemente válida de la solución en todo el dominio del problema.

Vamos a introducir ahora una serie de ejemplos de problemas de perturbación regular algo más complejos que los vistos anteriormente.

Ejemplo 4. Consideremos el *problema de valor inicial no lineal de primer orden* que hemos recogido de [5]

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} u'(t) + 2tu(t) - \varepsilon u^2(t) = 0 \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad (2.16)$$

con $0 \leq t < \infty$ y $\varepsilon \rightarrow 0$

Vamos a asumir que la solución $u_\varepsilon(t)$ de este problema tiene una expresión de la forma

$$u_\varepsilon(t) = u_0(t) + u_1(t)\varepsilon + u_2(t)\varepsilon^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\varepsilon^n \quad (2.17)$$

Si sustituimos (2.17) en la ecuación diferencial de (2.16) se obtiene que

$$(u'_0 + u'_1\varepsilon + u'_2\varepsilon^2 + \dots) + 2t(u_0 + u_1\varepsilon + u_2\varepsilon^2 + \dots) - \varepsilon(u_0 + u_1\varepsilon + u_2\varepsilon^2 + \dots)^2 = 0,$$

esto es

$$(u'_0 + u'_1\varepsilon + \dots) + 2t(u_0 + u_1\varepsilon + \dots) - \varepsilon(u_0^2 + 2u_0u_1\varepsilon + 2u_0u_2\varepsilon^2 + u_1^2\varepsilon^2 + 2u_0u_3\varepsilon^3 + 2u_1u_2\varepsilon^3 + \dots) = 0,$$

desarrollando y agrupando ahora en términos de potencias de ε , podemos reescribirlo como

$$(u'_0 + 2tu_0) + (u'_1 + 2tu_1 - u_0^2)\varepsilon + (u'_2 + 2tu_2 - 2u_0u_1)\varepsilon^2 + \dots = 0.$$

Igualando a cero los coeficientes de ε y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del problema, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} u'_0 + 2tu_0 = 0 \\ u_0(0) = 1 \\ \\ u'_1 + 2tu_1 - u_0^2 = 0 \\ u_1(0) = 0 \\ \\ u'_2 + 2tu_2 - 2u_0u_1 = 0 \\ u_2(0) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ u'_n + 2tu_n - (u_0u_{n-1} + u_1u_{n-2} + \dots + u_{n-1}u_0) = 0 \\ u_n(0) = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación diferencial del sistema es una EDO de variables separadas, luego

utilizando la notación $u'_0 = \frac{du_0}{dt}$, se escribe de la forma $\frac{du_0}{dt} + 2tu_0 = 0$. Entonces

$$\frac{du_0}{dt} = -2tu_0 \Rightarrow \frac{du_0}{u_0} = -2tdt.$$

Así pues, tomando integrales indefinidas en ambos miembros, se tiene

$$\int \frac{du_0}{u_0} = \int -2tdt,$$

de modo que

$$\ln u_0 = -t^2 + C$$

y, por tanto,

$$u_0(t) = e^{-t^2} C_1.$$

Imponiendo ahora la condición inicial $u_0(0) = 1$

$$u_0(0) = 1 = C_1 \Rightarrow C_1 = 1.$$

Por lo que finalmente obtenemos

$$u_0(t) = e^{-t^2}.$$

Para calcular $u_1(t)$ en la segunda ecuación diferencial $u'_1 + 2tu_1 = e^{-2t^2}$ utilizaremos el *método del factor integrante*. Sea

$$A(t) = \int -2tdt.$$

Multiplicaremos ambos miembros por $e^{-A(t)} = e^{t^2}$ que será el **factor integrante**. Luego,

$$e^{t^2} u'_1 + e^{t^2} 2tu_1 = e^{-t^2}.$$

El primer miembro es la derivada de $e^{t^2} u_1$, así pues, se tiene

$$\frac{d}{dt}(e^{t^2} u_1) = e^{-t^2}.$$

Integrando en ambos miembros tenemos

$$e^{t^2} u_1 = \int e^{-t^2} dt + C$$

Y, por tanto,

$$u_1(t) = e^{-t^2} \left(\int e^{-t^2} dt + C \right) = e^{-t^2} \left(\int_0^t e^{-s^2} ds + C \right)$$

Imponiendo ahora la condición inicial $u_1(0) = 0$,

$$u_1(0) = 0 = C \Rightarrow C = 0.$$

Por lo que finalmente obtenemos

$$u_1(t) = e^{-t^2} \left(\int_0^t e^{-s^2} ds \right).$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta la expresión de $u_\varepsilon(t)$ que usamos en (2.17) resulta que :

$$u_\varepsilon(t) = e^{-t^2} + \left(e^{-t^2} \int_0^t e^{-s^2} ds \right) \varepsilon + \dots \quad (2.18)$$

Ejemplo 5. Consideremos el *problema de condiciones de contorno no lineal de segundo orden* que hemos extraído de [3]

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} u''(t) + u'(t) + \varepsilon u^2(t) = 0 \\ u(0) = 1 \\ u(1) = e^{-1} \end{cases} \quad (2.19)$$

con $0 \leq t \leq 1$.

Primero, asumiremos que hay una solución $u_\varepsilon(t)$ del problema (2.19) de la forma

$$u_\varepsilon(t) = u_0(t) + u_1(t)\varepsilon + u_2(t)\varepsilon^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\varepsilon^n \quad (2.20)$$

Sustituyendo (2.20) en la ecuación diferencial de (2.19) tenemos que

$$(u_0'' + u_1''\varepsilon + \dots) + (u_0' + u_1'\varepsilon + \dots) + \varepsilon(u_0 + u_1\varepsilon + \dots)^2 = 0,$$

es decir,

$$(u_0'' + u_1''\varepsilon + \dots) + (u_0' + u_1'\varepsilon + \dots) + \varepsilon(u_0^2 + 2u_0u_1\varepsilon + 2u_0u_2\varepsilon^2 + u_1^2\varepsilon^2 + 2u_0u_3\varepsilon^3 + 2u_1u_2\varepsilon^3 + \dots) = 0.$$

Ahora, desarrollando y agrupando en términos de potencias de ε , reescribimos como

$$(u_0'' + u_0') + (u_1'' + u_1' + u_0^2)\varepsilon + (u_2'' + u_2' + 2u_0u_1)\varepsilon^2 + \dots = 0.$$

Los coeficientes de cada potencia de ε deben ser cero, luego teniendo en cuenta las condiciones de contorno del problema, obtenemos el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0'' + u_0' = 0 \\ u_0(0) = 1 \quad u_0(1) = e^{-1} \\ \\ u_1'' + u_1' + u_0^2 = 0 \\ u_1(0) = 0 \quad u_1(1) = 0 \\ \\ u_2'' + u_2' + 2u_0u_1 = 0 \\ u_2(0) = 0 \quad u_2(1) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ u_n'' + u_n' + (u_0u_{n-1} + u_1u_{n-2} + \dots + u_{n-1}u_0) = 0 \\ u_n(0) = 0, \quad u_n(1) = 0 \end{array} \right.$$

La solución general de la primera ecuación diferencial es

$$u_0(t) = A_0 + B_0e^{-t} \tag{2.21}$$

donde A_0, B_0 son constantes arbitrarias. La función $u_0(t)$ está claramente definida en $0 \leq t \leq 1$, por lo que podemos imponer las condiciones de contorno dadas para obtener que

$$\begin{aligned} u_0(0) &= A_0 + B_0 = 1 \Rightarrow B_0 = 1 - A_0 \\ u_0(1) &= A_0 + (1 - A_0)e^{-1} = e^{-1} \Rightarrow A_0 = 0 \end{aligned}$$

así pues, se deduce que

$$A_0 = 0, \quad B_0 = 1.$$

Sustituyendo dichos valores en (2.21) tenemos que

$$u_0(t) = e^{-t}.$$

Entonces, la segunda ecuación diferencial del sistema se convierte en

$$u_1'' + u_1' = -u_0^2 = -e^{-2t}$$

que, a su vez, tiene como solución general

$$u_1(t) = A_1 + B_1 e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t} \quad (2.22)$$

donde A_1, B_1 son nuevas constantes arbitrarias. La función $u_1(t)$ está claramente definida en $0 \leq t \leq 1$, por lo que podemos imponer las condiciones de contorno dadas para obtener que

$$\begin{aligned} u_1(0) &= A_1 + B_1 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow B_1 = \frac{1}{2} - A_1 \\ u_1(1) &= A_1 + \left(\frac{1}{2} - A_1\right)e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-2} = 0 \end{aligned}$$

desarrollando y despejando A_1 en la segunda ecuación, se deduce finalmente que

$$A_1 = -\frac{1}{2}e^{-1}, \quad B_1 = \frac{1}{2}(1 + e^{-1}).$$

Sustituyendo dichos valores en (2.22) tenemos que

$$u_1(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-1} + e^{-1-t} - e^{-2t}).$$

En consecuencia, hemos encontrado una solución de la forma (2.20) para el problema (2.19) de modo que

$$u_\varepsilon(t) = e^{-t} + \frac{\varepsilon}{2}(e^{-t} - e^{-1} + e^{-1-t} - e^{-2t}) + \dots \quad (2.23)$$

Para finalizar con estos ejemplos, vamos a mostrar por último un problema ligeramente más sofisticado extraído de [2].

Ejemplo 6. Consideremos el *problema de valor inicial lineal de segundo orden*

$$(PVI) \begin{cases} y'' = f(x)y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad (2.24)$$

donde $f(x)$ es continua.

La característica de este problema es que no tiene solución que pueda resolverse de forma exacta salvo para casos muy especiales de la función f , por tanto, trataremos de encontrar una solución aproximada.

En primer lugar transformaremos el problema (2.24) en un problema de perturbación introduciendo artificialmente un parámetro ε de forma que el problema no perturbado se pueda resolver fácilmente. Luego,

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} y'' = \varepsilon f(x)y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

donde se puede ver que podemos recuperar el problema original haciendo $\varepsilon = 1$.

Asumimos que la solución $y(x)$ del problema (2.25) tiene una expresión de la forma:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x)\varepsilon + y_2(x)\varepsilon^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\varepsilon^n \quad (2.26)$$

Entonces, sustituyendo (2.26) en la ecuación diferencial de (2.25) tenemos

$$(y_0'' + y_1''\varepsilon + y_2''\varepsilon^2 + \dots) = \varepsilon f(x)(y_0 + y_1\varepsilon + y_2\varepsilon^2 + \dots).$$

Desarrollando y agrupando en términos de potencias de ε obtenemos que

$$y_0'' + (y_1'' - y_0 f(x))\varepsilon + (y_2'' - y_1 f(x))\varepsilon^2 + \dots = 0$$

Ahora igualando a cero los coeficientes de ε y teniendo en cuenta las condiciones iniciales

del problema, resulta el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0'' = 0 \\ y_0(0) = 1 \quad y_0'(0) = 1 \\ \\ y_1'' - y_0 f(x) = 0 \\ y_1(0) = 0 \quad y_1'(0) = 0 \\ \\ \dots\dots\dots \\ y_n'' - y_{n-1} f(x) = 0 \\ y_n(0) = 0 \quad y_n'(0) = 0 \quad n \geq 1 \end{array} \right. \quad (2.27)$$

Resolvamos ahora la primera ecuación diferencial del sistema, que coincide con la solución del problema no perturbado:

$$y_0''(x) = 0 \Rightarrow y_0'(x) = C_0 \Rightarrow y_0(x) = C_0 x + C_1.$$

Como $y_0(0) = 1$, resulta que

$$y_0(0) = 1 = C_1 \Rightarrow C_1 = 1.$$

Ahora, $y_0'(x) = C_0$, y como $y_0'(0) = 1$, tenemos que

$$y_0'(0) = 1 = C_0 \Rightarrow C_0 = 1.$$

De modo que

$$y_0(x) = x + 1.$$

Es importante tener en cuenta en este ejemplo que, mediante las técnicas de perturbación, se ha transformado la ecuación original (2.25), que es intratable salvo para casos especiales de $f(x)$, por una sucesión de ecuaciones no homogéneas (2.27) que pueden resolverse fácilmente siempre que se conozca la solución de la ecuación homogénea asociada. En nuestro caso, la ecuación homogénea es precisamente el problema no perturbado $y'' = 0$, del cual conocemos su solución, por eso es tan importante que el problema no perturbado sea resoluble.

Así pues, podemos escribir el término general de la siguiente forma

$$y_n(x) = \int_0^x \left[\int_0^t f(s)y_{n-1}(s)ds \right] dt \quad (n \geq 1)$$

y, por tanto, hemos llegado a una solución aproximada de (2.25) de la forma (2.26)

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(x) = & 1 + x + \varepsilon \int_0^x \left[\int_0^t f(s)(1+s)ds \right] dt \\ & + \varepsilon^2 \int_0^x \left[\int_0^t f(s) \left[\int_0^s \left[\int_0^v (1+u)f(u)du \right] dv \right] ds \right] dt + \dots \end{aligned} \quad (2.28)$$

Esta serie es sumable para todo x pues f es una función continua y el término N -ésimo de la serie está acotado por

$$\frac{\varepsilon^N x^{2N} K^N (1+|x|)}{(2N)!}$$

donde K es un límite superior para $|f(t)|$ en el intervalo $0 \leq |t| \leq |x|$. Luego, la serie es convergente para todo x . También concluimos que si $x^2 K$ es pequeño, entonces la serie para $\varepsilon = 1$ es rápidamente convergente y se puede obtener una aproximación precisa del problema original (2.24) calculando únicamente los primeros términos de la serie.

En definitiva, hemos visto que si consideramos el problema de encontrar una solución a la ecuación

$$L(t, u, u', \dots, u^n), \varepsilon) = 0 \quad (2.29)$$

que contiene el parámetro ε y cuya incógnita es un elemento $u(\varepsilon)$. Para $\varepsilon = 0$ el problema

$$L(t, u, u', \dots, u^n), 0) = 0 \quad (2.30)$$

se denomina problema *no perturbado*. Por tanto, si $u(\varepsilon)$ es la solución al problema (2.29) y $u(\varepsilon)$ tiende a la solución u_0 del problema (2.30) cuando ε tiende a cero entonces diremos que el problema (2.29) es del tipo de *perturbación regular*. En otro caso, estaremos ante un problema de perturbación del tipo *singular* del cual hablaremos de forma muy concisa en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Problemas de perturbación singular

Este último capítulo tiene como finalidad caracterizar los problemas de perturbación singular y dar a conocer algún ejemplo de los mismos. Se ha hecho uso de los libros de J.A Álvarez Dios y J.M Viaño [1] y Mark H. Holmes [6].

3.1. Ejemplos

Definición 3.1. Un problema de *perturbación singular* es un problema en el cual la serie de perturbación

a) no puede tomar la forma de serie de potencias, o

b) puede tomar la forma de serie de potencias con radio de convergencia igual a cero

En este tipo de problemas la solución exacta del problema no perturbado es totalmente diferente en carácter de la solución del problema perturbado, es decir, tienen propiedades notablemente diferentes.

Para tratar de reconocer este tipo de problemas y observar las diferencias que presentan con respecto a los problemas regulares vistos hasta ahora, mostraremos de forma breve algún ejemplo de ellos.

Ejemplo 7. El problema que se plantea es el siguiente,

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + 2y' + 2y = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Una indicación importante de que este problema no va a ser tan sencillo como los problemas resueltos en el Capítulo 2 es la presencia del pequeño parámetro ε multiplicando la

derivada de mayor orden, pues, si hacemos $\varepsilon = 0$ entonces el problema no perturbado ya no es de segundo orden a diferencia del problema perturbado. Esto conduce a lo que generalmente denominamos como problema de *perturbación singular*, aunque la singularidad puede ocurrir por otras razones.

Para empezar a intentar resolverlo, buscaremos la solución según el método de perturbaciones, luego, vamos a asumir que la solución se puede expresar en potencias de ε . En otras palabras,

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x)\varepsilon + y_2(x)\varepsilon^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\varepsilon^n \quad (3.2)$$

Entonces sustituyendo (3.2) en (3.1), se obtiene que

$$\varepsilon(y_0'' + y_1''\varepsilon + y_2''\varepsilon^2 + \dots) + 2(y_0' + y_1'\varepsilon + y_2'\varepsilon^2 + \dots) + 2(y_0 + y_1\varepsilon + y_2\varepsilon^2 + \dots) = 0$$

Desarrollando y agrupando en términos de potencias de ε obtenemos que

$$(2y_0' + 2y_0) + (y_0'' + 2y_1' + 2y_1)\varepsilon + (y_1'' + 2y_2' + 2y_2)\varepsilon^2 + \dots = 0$$

Ahora igualando a cero los coeficientes de ε y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del problema, resulta el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2y_0' + 2y_0 = 0 \\ y_0(0) = 0 \quad y_0(1) = 1 \\ \\ 2y_1' + 2y_1 = -y_0'' \\ y_1(0) = 0 \quad y_1(1) = 0 \\ \\ 2y_2' + 2y_2 = -y_1'' \\ y_2(0) = 0 \quad y_2(1) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ 2y_n' + 2y_n = -y_{n-1}'' \\ y_n(0) = 0 \quad y_n(1) = 0 \end{array} \right. \quad n \geq 1 \quad (3.3)$$

La solución general de la primera ecuación es

$$y_0(x) = ae^{-x} \quad (3.4)$$

donde a es una constante arbitraria. Observando ahora dicha solución nos encontramos ante un dilema ya que tenemos solamente una constante arbitraria que debemos hallar pero tenemos dos condiciones de contorno dadas. Es decir, la condición $y_0(0) = 0$ requiere que $a = 0$ y la condición $y_0(1) = 1$ implica que $a = e$. Por tanto, esto significa que vamos a ser incapaces de describir la solución en todo el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Concretamente, este tipo de problemas se denominan de *capa límite*.

Ejemplo 8. Consideremos ahora el siguiente *problema de valor inicial no lineal de segunda orden*

$$(PVI) \begin{cases} u'' + u + \varepsilon u^3 = 0, & 0 < t < \infty \\ u(0) = a \\ u'(0) = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Apliquemos de nuevo el método de desarrollos asintóticos en este problema y veamos que ocurre en este caso. Es necesario tener en cuenta que se conoce que la solución es acotada para todo t cuando $\varepsilon > 0$.

Asumimos que la solución u_ε tiene una expresión de la forma:

$$u_\varepsilon(t) = u_0(t) + u_1(t)\varepsilon + u_2(t)\varepsilon^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\varepsilon^n \quad (3.6)$$

Luego, sustituyendo (3.6) en la ecuación diferencial de (3.5) tenemos que

$$(u_0'' + u_1''\varepsilon + u_2''\varepsilon^2 + \dots) + (u_0 + u_1\varepsilon + u_2\varepsilon^2 + \dots) + \varepsilon(u_0 + u_1\varepsilon + u_2\varepsilon^2 + \dots)^3 = 0$$

Desarrollando y agrupando en términos de potencias de ε obtenemos que

$$(u_0'' + u_0) + (u_1'' + u_1 + u_0^3)\varepsilon + (u_2'' + u_2 + 3u_0^2u_1)\varepsilon^2 + \dots = 0$$

Entonces, igualando a cero los coeficientes de ε y teniendo en cuenta las condiciones iniciales del problema, resulta el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0'' + u_0 = 0 \\ u_0(0) = a \quad u_0'(0) = 0 \\ \\ u_1'' + u_1 = -u_0^3 \\ u_1(0) = 0 \quad u_1'(0) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ u_n'' + u_n = -u_{n-1}^3, \dots \\ u_n(0) = 0 \quad u_n'(0) = 0 \end{array} \right. \quad n \geq 1 \quad (3.7)$$

Resolviendo el sistema, tenemos que la solución de la primera ecuación diferencial es

$$u_0(t) = a \cos(t).$$

Del mismo modo, la solución de la segunda ecuación del sistema es

$$u_1(t) = -\frac{3a^3}{8}t \sin t + \frac{a^3}{32}(\cos 3t - \cos t).$$

Es muy importante observar en la expresión anterior el término $-\frac{3a^3}{8}t \sin t$, pues se conoce como *término secular* y proviene de resolver la ecuación

$$u_1'' + u_1 = -a^3 \cos^3 t = -\frac{1}{4}a^3 \cos 3t - \frac{3}{4}a^3 \cos t,$$

en la cual va a ser el término $\frac{3}{4}a^3 \cos t$ quien produzca la aparición de dicho término secular.

Por tanto, teniendo en cuenta la expresión de u_ε que usamos en (3.6) tendríamos que

$$u_\varepsilon = a \cos(t) + \frac{1}{32}\varepsilon a^3(-\cos t + \cos 3t - 12t \sin t) + \dots$$

Sin embargo, a causa del término secular mencionado anteriormente va a ocurrir que este desarrollo asintótico no es uniformemente válido en $0 \leq t \leq \infty$, en contradicción con el hecho de que la solución del problema es acotada y continua para todo t . Esta aparición de términos seculares es característica de los problemas de perturbación singular y se necesitarán de ciertos métodos de supresión de dichos términos para corregir estas singularidades.

Con esto queda claro que para poder abordar un problema de *perturbación singular* necesitaremos agregar algunas técnicas específicas para resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales. Estas técnicas se conocen generalmente como *métodos asintóticos* o *métodos de perturbación singular*. De entre dichos métodos se encuentran los métodos de supresión de términos seculares, los métodos asintóticos en capa límite, los métodos WKB o los métodos de múltiple escala, pero no serán objeto de estudio de este trabajo.

Bibliografía

- [1] J.A Álvarez Dios y J.M Viaño, *Notas sobre Métodos Asintóticos en Ecuaciones Diferenciales*. Santiago de Compostela, 2000
- [2] C.M Bender y S.A Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, Nueva York, 1978
- [3] R.S Johnson, *Singular perturbation theory techniques with applications to engineering* Springer, 2004
- [4] Ali H. Nayfeh, *Perturbation Methods*, John Wiley & Sons, 2000
- [5] J. Kevorkian, J. D. Cole, *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*, Springer, 1996
- [6] Mark H. Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*, 2nd ed., Springer, 2013
- [7] Alfredo Bermúdez de Castro y Rafael Muñoz Molina, *Modelización Matemática*, Universidade de Santiago de Compostela
- [8] Nagle, R. K. - Saff, E. B. - Snidder, A. D. *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Ed. Addison-Wesley - Pearson Education (2001)
- [9] George F. Simmons, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, McGraw-Hill