TESE DE DOUTORAMENTO

PROBLEMAS DE CONTORNO PARA ECUACIONES EN DIFERENCIAS Y ECUACIONES DIFERENCIALES FUNCIONALES

Juan Bosco Ferreiro Darriba

DEPARTAMENTO DE ANÁLISE MATEMÁTICA
FACULTADE DE MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE COMPOSTELA
ANO 2014

TESE DE DOUTORAMENTO

PROBLEMAS DE CONTORNO PARA ECUACIONES EN DIFERENCIAS Y ECUACIONES DIFERENCIALES FUNCIONALES

Juan Bosco Ferreiro Darriba

DEPARTAMENTO DE ANÁLISE MATEMÁTICA
FACULTADE DE MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE COMPOSTELA
ANO 2014

Problemas de contorno para ecuaciones en diferencias y ecuaciones diferenciales funcionales

A presente memoria foi realizada por D. Juan Bosco Ferreiro Darriba, baixo a dirección de D. Alberto Cabada Fernández, catedrático do Departamento de Análise Matemática da Universidade de Santiago de Compostela, e D. Eduardo Liz Marzán, catedrático do Departamento de Matemática Apicada II da Universidade de Vigo, para optar ao grao de Doctor en Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela.

Santiago de Compostela, 28 de xullo de 2014

Vº e Pr.

Os directores da tese

Asdo.: Alberto Cabada Fernández

Asdo.: Eduardo Liz Marzán

O doutourando

Asdo.: Juan Bosco Ferreiro Darriba

Á miña familia
A María
A Pedro e a Carolina María

Agradecementos

En primeiro lugar, desexo expresar o meu máis sincero agradecemento a Alberto Cabada Fernández e a Eduardo Liz Marzán: por teren aceptado ser os directores deste traballo —cousa que non era doada—, por todo o tempo e o esforzo que adicaron a que se puidese levar a cabo, por tódolos medios dos que puiden dispor —debido a intervención deles— para a súa realización, e por toda a paciencia coa que me teñen aturado nas diferentes fases do proceso de execución.

É importante para min dicir que, ademais de seren os directores desta memoria, tamén son amigos meus. En ausencia desta circunstancia, tería sido aínda máis difícil que este traballo saíse cara adiante. Polo menos eran meus amigos antes de empezar nesta historia, espero que non teñan renunciado a seguir séndoo.

Personalizarei en Juan José Nieto Roig, o director do grupo de investigación «Ecuacións diferenciais non lineares GI-1561» da USC —ao que teño a honra de pertencer—, o meu agradecemento a tódalas persoas que forman parte del, por térenme axudado naquilo que precisei.

Agradecer tamén aos meus compañeiros e compañeiras do Departamento de Matemática Aplicada, fundamentalmete aos do Campus de Lugo, por teren contribuído a establecer un ambiente laboral axeitado para o desenvolvemento deste traballo, e polos bos momentos que temos pasado xuntos.

Grazas, en particular, ao profesor Miguel Ernesto Vázquez Méndez, por ter empregado moito do seu tempo en axudarme en tantas cousas, como tamén aos profesores Ulises Diéguez Aranda e David Miranda Barrós, e a Margarita Díaz Blanco, polo seu constante apoio e estímulo.

Non vou estender os agradecementos fóra do ámbito académico, aínda que non estaría de máis, porque promete ocupar máis espazo esta parte da memoria que a puramente científica, pero terminarei dicindo que moitas outras persoas puxeron da súa parte para que este traballo teña rematado con éxito, aínda que non as mencione expresamente.

Grazas a todas e a todos!

Índice general

Introducción 1

1. Soluciones positivas de ecuaciones en diferencias 7

1.1. Definiciones y preliminares . . . 8
1.2. Un resultado general de existencia . . . 12
1.3. Estudio del signo de la función de Green . . . 18
1.4. Casos particulares . . . 27
1.4.1. Problemas de primer orden . . . 28
1.4.2. Problemas de segundo orden . . . 31
1.4.3. Problemas de orden n . . . 34
1.5. Algunas conclusiones . . . 37

2. Ecuaciones en diferencias con máximo 39

2.1. Resultados previos . . . 40
2.2. Condiciones de frontera no lineales . . . 41
2.2.1. Existencia de soluciones . . . 43
2.2.2. Soluciones extremas . . . 46
2.2.3. Ejemplos . . . 53
2.3. Condiciones de frontera periódicas . . . 55
2.3.1. El problema cuasilineal . . . 56
2.3.2. El problema no lineal . . . 62

3. La desigualdad de Halanay discreta 67

3.1. Lema de Halanay discreto . . . 69
3.1.1. Estabilidad exponencial de ecuaciones en diferencias . . . 70
3.1.2. La aplicación de Lozi . . . 73
3.1.3. Discretización de ecuaciones diferenciales con retardo . . . 75
3.2. Desigualdad de Halanay discreta generalizada . . . 76
3.2.1. Estabilidad de ecuaciones en diferencias . . . 77
3.3. Estabilidad de ecuaciones en diferencias con máximo . . . 80

4. Ecuaciones diferenciales con argumentos constantes a trozos 85
4.1. Preliminares 87
4.2. El problema lineal de orden n 91
4.3. El problema lineal de primer orden 97
4.3.1. El problema de valor inicial 97
4.3.2. Función de Green para el problema periódico 100
4.4. Resultados de comparación 103
4.5. El problema no lineal 109
4.5.1. Sub y sobresolución débilmente acopladas 109
4.5.2. Sub y sobresolución clásicas 119

Bibliografía 125

Introducción

Habitualmente se considera que los procesos reales que se producen a lo largo del tiempo, en un determinado espacio físico, son continuos: se desarrollan como un flujo ininterrumpido desde que comienzan hasta que finalizan. «La realidad —entendida como proceso o cambio— es continua», suele decirse.

Sin embargo, cuando queremos conocer la evolución de un determinado sistema a través del tiempo, no siempre estamos interesados en obtener la descripción del mismo en todo momento. A menudo solo nos interesa conocer el estado del sistema en determinados instantes, separados por intervalos de tiempo, sin importarnos lo que ocurre durante esos intervalos.

A este tipo de procesos, de los que analizaremos su estado solo en momentos concretos, los denominaremos *procesos discretos*. Adquieren especial relevancia en el estudio de la evolución —o dinámica— de poblaciones, en el área de la economía y en el de las ciencias sociales, entre otras (pueden verse numerosos ejemplos en las monografías [4, 47, 65, 95]).

La herramienta matemática adecuada para construir modelos que representen procesos discretos son las ecuaciones en diferencias.

Supongamos, por ejemplo, que analizamos el tamaño de una determinada población generación a generación, y asumimos que el tamaño $x(k+1)$ de la generación $k+1$ es función del tamaño de la generación inmediatamente anterior. Podemos expresar la antedicha relación con la siguiente ecuación en diferencias de primer orden:

$$x(k+1) = g(x(k)), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Este es el caso más simple, y existen abundantes tanto artículos científicos como libros y monografías de numerosos autores dedicados a su estudio.

Las ecuaciones en diferencias de orden dos o superior, que no han sido estudiadas de manera tan extensa, juegan un importante papel cuando el estado de un proceso después de k pasos depende de los n estados previos (con $n > 1$), y no solo del inmediatamente anterior.

Utilizando la notación $x(k) \equiv x_k$, la *ecuación en diferencias general de orden n*:

$$x_{k+n} = g(k, x_k, \ldots, x_{k+n}), \qquad k \in \mathbb{N},$$

en donde $g : \mathbb{N}\times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ es una función continua, será la protagonista de los tres primeros capítulos de esta tesis.

Esta ecuación es, en general, *no autónoma* (también llamada dependiente del tiempo o dependiente del estado). Una solución de esta ecuación es cualquier sucesión de números reales $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que cumpla dicha ecuación para $k \in \mathbb{N}$, aunque no es posible, en general, calcular soluciones de forma explícita.

Si en la ecuación en diferencias general de orden n suponemos que la función g no depende de la última variable, dicha ecuación puede escribirse de la siguiente manera:

$$x_{k+n} = g(k, x_k, \ldots, x_{k+n-1}), \qquad k \in \mathbb{N},$$

en donde $g : \mathbb{N}\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua. Este caso suele conocerse como *explícito* (a diferencia del anterior, denominado *implícito*) ya que, conocidos n valores reales $x_k \in \mathbb{R}$ para $0 \le k < n$, puede calcularse explícitamente la única solución $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que cumple la ecuación para $k \in \mathbb{N}$, y tal que los n primeros elementos son x_k para $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Por otra parte, las ecuaciones diferenciales con argumentos constantes a trozos (EPCA), a cuyo estudio se dedica el Capítulo 4, aparecen a principios de los años ochenta ([39, 96, 101]) en un intento de extender la teoría de las ecuaciones diferenciales funcionales con argumentos continuos a ecuaciones diferenciales con argumentos discontinuos.

Un ejemplo típico de EPCA es el siguiente:

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x(h(t))\big),$$

en donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función continua y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función constante a trozos, es decir, toma valores constantes en determinados intervalos. Por ejemplo, en nuestro trabajo analizaremos casos en los que $h(t)$ adopta la forma $[t-n]$, en donde n es un número natural y $[\cdot]$ representa la parte entera de un número real.

La solución de una EPCA como la anterior (de primer orden) se define como una función continua y derivable a trozos que satisface la ecuación en esos intervalos, y estará determinada por un conjunto finito de datos iniciales, en lugar de una función-dato inicial como en las ecuaciones diferenciales funcionales.

La continuidad de la solución en los extremos de dichos intervalos provoca que se establezca una relación recurrente entre los valores de la solución en esos puntos. De esta manera, debajo de cada EPCA subyace un sistema dinámico gobernado por una ecuación en diferencias. No es sorprendente, por lo tanto, que en el estudio de este tipo de ecuaciones se combinen técnicas clásicas que habitualmente se aplican a ecuaciones diferenciales con otras comúnmente utilizadas para ecuaciones en diferencias.

A lo largo de esta tesis se utilizarán diversas herramientas bien conocidas y ampliamente utilizadas tanto en el ámbito de las ecuaciones diferenciales ordinarias como en el de las ecuaciones en diferencias. Algunas de estas herramientas aparecen en todos los capítulos de este trabajo —con la excepción del Capítulo 3— y están estrechamente relacionadas entre sí: el método de las sub y sobresoluciones, el método monótono y las funciones de Green.

El método de las sub y sobresoluciones es una herramienta clásica, a menudo denominada topológica, ampliamente utilizada en los ámbitos de las ecuaciones en derivadas parciales y de las ecuaciones diferenciales ordinarias, especialmente cuando se tratan problemas no lineales y/o con condiciones de frontera no lineales. Dicho método permite no solo garantizar la existencia de soluciones para un determinado problema, sino que también sitúa esas soluciones entre dos funciones que satisfacen ciertas desigualdades.

La teoría de las sub y sobresoluciones arranca en un trabajo [89] de Picard de 1890, aplicada a ecuaciones en derivadas parciales, y en otro [90] de 1893, aplicada en este caso a ecuaciones diferenciales ordinarias. Utilizando este método, Perron [87] probó en 1915 la existencia de soluciones para el problema de Cauchy, mientras que Scorza Dragoni [94] hizo lo propio en 1931 para problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con valores de frontera tipo Dirichlet.

En los libros de Bernfeld y Lakshmikantham [14] y Ladde et al. [70] se explican tanto el método de las sub y sobresoluciones como el —intrínsecamente asociado— método monótono. Este último es una técnica iterativa en la que, empezando en la subsolución y en la sobresolución de un determinado problema, se construyen sendas sucesiones monótonas en las que cada elemento es la solución de un problema lineal asociado. Estas sucesiones convergen, respectivamente, a la menor y la mayor de las soluciones del problema original, situadas entre la sub y la sobresolución.

La aplicación de estos métodos a las ecuaciones en diferencias es bastante más reciente, aunque podemos mencionar los trabajos de Eloe [48, 49], Agarwal [1] o Zhuang, Chen y Cheng [109], como también los libros de Lakshmikantham y Trigiante [71] o del propio Agarwal [2].

Cualquier persona interesada en estos métodos puede encontrar más información, reseñas históricas y referencias bibliográficas incluidas, en los trabajos de Mawhin [79], en los de De Coster y Habets [45, 46], o en el más reciente de Cabada [24].

Las funciones de Green fueron introducidas por el matemático George Green [55] en 1828[1], en el ámbito de las ecuaciones en derivadas parciales. Neumann [83] las utilizó para su estudio de la ecuación de Laplace y, tras

[1]Este trabajo de Green permaneció prácticamente desconocido hasta su posterior publicación entre 1850 y 1854.

el éxito obtenido, muchos otros matemáticos y físicos (como Hobson, Appell, Sommerfeld o Kirchhoff, entre otros) comenzaron a usarlas en el estudio de la ecuación del calor y la ecuación de onda.

El concepto de función de Green para ecuaciones diferenciales ordinarias fue introducido por Burkhardt [17] en 1894 para la ecuación $y'' = 0$, y generalizado por Bôcher [15] en 1901 para ecuaciones diferenciales lineales de orden n. Es el propio Bôcher el que extiende el concepto a las ecuaciones en diferencias en un trabajo [16] de 1911.

Dedicaremos el Capítulo 1 de este trabajo a la búsqueda de soluciones positivas para el caso implícito de la ecuación en diferencias general de orden n, junto con condiciones de frontera periódicas del tipo

$$x_i = x_{N+i}, \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

en donde $N \in \mathbb{N}$ es tal que $1 \leq n \leq N$.

Con ese objetivo, combinaremos dos técnicas bien conocidas: el método de las sub y sobresoluciones, y los resultados basados en el clásico teorema de punto fijo para operadores definidos en extensiones o contracciones de un cono, debido a Krasnosel'skiĭ. Parte del estudio realizado se basa en el análisis del signo de la función de Green asociada al problema de frontera.

Lo recogido en este primer capítulo es, esencialmente, lo publicado en el trabajo [27].

En el Capítulo 2 se estudian las *ecuaciones en diferencias con máximo*, que son la versión discreta de las ecuaciones diferenciales con máximo, un caso especial de ecuaciones funcionales con retardo:

$$x'(t) = f\big(t, x(t), \max_{t-h \leq s \leq t} x(s)\big), \quad t \in [0, T].$$

Estableceremos resultados de existencia de solución para problemas implícitos con diversas condiciones de frontera, en general no lineales, en presencia de un par de sub y sobresolución. Bajo hipótesis más restrictivas, demostraremos la existencia de soluciones extremas, y desarrollaremos el método monótono para aproximarlas.

En la segunda parte del capítulo se estudia únicamente el problema implícito con condiciones de frontera periódicas, aunque de una manera diferente a la utilizada anteriormente.

Se deducirán resultados de existencia de solución (única) no comparables a los obtenidos en la primera parte, y se obtendrán principios del máximo para el problema linealizado, que permitirán la aproximación de las soluciones del problema general.

Los resultados más importantes incluidos en este capítulo también pueden verse en [9, 10, 29].

Iniciamos el Capítulo 3 introduciendo una versión discreta de la bien conocida *desigualdad de Halanay*, y aplicándola al estudio de la estabilidad de ciertas ecuaciones en diferencias, al igual que la desigualdad original ha sido utilizada por numerosos autores en el estudio de la estabilidad de ecuaciones diferenciales funcionales.

Se estudian algunos ejemplos concretos, como la *aplicación de Lozi*, y se muestra que, al discretizar algunas ecuaciones diferenciales con retardo mediante el método de Euler, el criterio clásico de estabilidad absoluta (estabilidad independiente del retardo) se mantiene para la versión discreta.

En la segunda parte del capítulo se establece una generalización del resultado inicial, obteniendo nuevas condiciones que garantizan la estabilidad de ecuaciones en diferencias. En particular, se introduce una versión discreta de la *condición de Yorke*, y se analiza la estabilidad de las ecuaciones diferenciales con máximo.

Todos los resultados expuestos en este tercer capítulo han sido publicados en [75] y en [76].

Para finalizar, en el Capítulo 4 se aborda el estudio de las EPCA. Comenzamos mostrando cómo las soluciones del problema de orden n con condiciones de frontera periódicas pueden escribirse en términos de la función de Green asociada.

Como puede observarse, la función de Green retoma el papel esencial que ha desempeñado a lo largo de esta memoria. Más, si cabe, ya que, hasta donde sabemos, la teoría de funciones de Green no ha sido utilizada en el ámbito de las EPCA antes de [30]. En este trabajo, junto con [28], están recogidos los principales resultados del capítulo.

A continuación resolvemos el problema de valor inicial de primer orden y, a partir de su solución, obtenemos la expresión de la función de Green asociada al problema periódico. Dependiendo del signo de la citada función, establecemos principios de comparación para el operador de primer orden, tanto para el caso de valor inicial como para el de condiciones de frontera periódicas.

Tomando como referencia los mencionados principios del máximo, y aplicando los métodos de las sub y sobresoluciones, y de las sub y sobresoluciones débilmente acopladas, deducimos resultados de existencia de soluciones extremas para el problema general no lineal de primer orden, con condiciones de frontera en general no lineales, como también algunos resultados de unicidad de solución.

Capítulo 1

Soluciones positivas de ecuaciones en diferencias con valores de frontera periódicos

En el reciente trabajo [26], los autores utilizan el clásico teorema de Krasnosel'skiĭ con el objetivo de probar un nuevo teorema de punto fijo para operadores crecientes en espacios de Banach ordenados por un cono normal con interior no vacío. Este teorema mejora el resultado obtenido previamente por Persson en [88] para operadores monótonos definidos en $\mathbb{R}_+^m$, el subconjunto de $\mathbb{R}^m$ formado por los elementos con todas sus componentes positivas o iguales a cero.

Es bien conocido que los clásicos teoremas de punto fijo tipo Krasnosel'skiĭ (véase [66]) de operadores definidos en conos permiten garantizar la existencia de soluciones positivas de ecuaciones diferenciales, imponiendo restricciones en el comportamiento asintótico de la parte no lineal de la ecuación, tanto en 0 como en $+\infty$.

El método empleado en [26] permite deducir la existencia de soluciones positivas sin imponer restricciones en el comportamiento asintótico de la parte no lineal de la ecuación en 0, si bien se hace necesario asumir algún otro tipo de condición adicional.

En este capítulo, a partir del nuevo resultado de punto fijo probado en [26], deduciremos la existencia de solución de un problema discreto de orden n con condiciones de frontera periódicas. Para ello combinaremos dos diferentes técnicas: el método de las sub y sobresoluciones (ver [14, 21, 23, 24, 44, 45, 46, 70]), y los resultados basados en el clásico teorema de punto fijo de Krasnosel'skiĭ para operadores definidos en extensiones o contracciones de un cono (ver, por ejemplo, [8, 11, 50, 57, 60, 99]).

Organizamos este capítulo de la siguiente manera: en la Sección 1.1 presentamos algunas definiciones y algunos resultados conocidos que necesitaremos para el desarrollo tanto del resto del capítulo como, en algunos casos, del resto de la tesis. La Sección 1.2 se dedica a probar la existencia de —al menos— una solución positiva para un problema general no lineal de valores de frontera periódicos de orden n. Expondremos, en la Sección 1.3, condiciones que aseguran la validez de algunos resultados de comparación para operadores lineales. En la Sección 1.4 presentamos algunos casos particulares para los que obtenemos condiciones más concretas que garantizan la existencia de soluciones positivas. Finalmente, en la Sección 1.5 indicamos algunas conclusiones sobre todo lo expuesto y sugerimos nuevas direcciones en este campo.

Los principales resultados que vamos a presentar en este capítulo están recogidos en [27].

1.1. Definiciones y preliminares

A lo largo de todo el trabajo, denominaremos $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales (considerando el 0 como tal), $\mathbb{Z}$ al conjunto de los números enteros y $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales. Asimismo, $\mathbb{R}_+$ será el conjunto de los números reales no negativos, es decir, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\} = [0, +\infty)$.

Definición 1.1. Sea $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$ un espacio normado real, diremos que un subconjunto $\mathcal{K} \subset \mathcal{N}$ es un *cono* si es cerrado y verifica que $\mathcal{K} + \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$, $\lambda\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ para todo número real $\lambda \geq 0$, y $\mathcal{K} \cap (-\mathcal{K}) = \{\mathbf{0}\}$.

Todo cono $\mathcal{K} \subset \mathcal{N}$ define un orden parcial $\preceq$ en el espacio $\mathcal{N}$, para el que denotaremos:

- $\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{y}$ si y solo si $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \in \mathcal{K}$.
- $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$ si y solo si $\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$.
- $\boldsymbol{x} \lll \boldsymbol{y}$ si y solo si $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \in int(\mathcal{K})$, siempre que $int(\mathcal{K}) \neq \emptyset$.

También denotaremos $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ si y solo si $\boldsymbol{y} \preceq \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ si y solo si $\boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{x}$, y $\boldsymbol{x} \ggg \boldsymbol{y}$ si y solo si $\boldsymbol{y} \lll \boldsymbol{x}$.

Diremos que $\mathcal{N}$ es un *espacio normado ordenado* si $\mathcal{N}$ está ordenado por un cono.

Diremos que un cono $\mathcal{K}$ es *normal* si existe $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, tal que $\|\boldsymbol{x}\| \leq c\|\boldsymbol{y}\|$ para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{N}$ con $\mathbf{0} \preceq \boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{y}$.

Ejemplo 1.1. Como es bien conocido, el conjunto $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}\times \overset{m}{\cdots} \times\mathbb{R}$, junto con la norma euclidiana

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=0}^{m-1} x_i^2\right)^{1/2}, \text{ para todo } \boldsymbol{x} = (x_0, \ldots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}^m,$$

es un espacio de Banach real.

El subconjunto de $\mathbb{R}^m$

$$\mathbb{R}^m_+ = \{(x_0, \ldots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}^m \,|\, x_i \geq 0 \text{ para todo } i = 0, \ldots, m-1\}$$

es un cono.

La relación de orden parcial inducida por $\mathbb{R}^m_+$ es el orden habitual en $\mathbb{R}^m$, que utilizaremos a lo largo de todo el trabajo. A saber, dados $\boldsymbol{x} = (x_0, \ldots, x_{m-1})$ e $\boldsymbol{y} = (y_0, \ldots, y_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$, denotaremos:

- $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ si $x_k \leq y_k$ para todo $k \in \{0, \ldots, m-1\}$.
- $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$ si $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ y existe $k \in \{0, \ldots, m-1\}$ tal que $x_k < y_k$.
- $\boldsymbol{x} \ll \boldsymbol{y}$ si $x_k < y_k$ para todo $k \in \{0, \ldots, m-1\}$.

Utilizaremos la notación obvia para las desigualdades inversas. Por ejemplo, denotaremos $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}$ si y solo si $\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}$.

Asimismo, denotaremos $\mathbf{0} \equiv (0, \overset{m}{\ldots}, 0) \in \mathbb{R}^m$ y, dados $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ tales que $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$,

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] := \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^m \,|\, \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{y}\}.$$

La norma euclidiana no será la única que utilizaremos en el conjunto $\mathbb{R}^m$ a lo largo de todo el trabajo. Aparecerá en numerosas ocasiones la denominada *norma del máximo* o *norma infinito*, definida para un $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ como sigue:

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{m-1}|\}.$$

Definición 1.2. Sea $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$ un espacio normado real, diremos que un operador $\boldsymbol{T} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ es *completamente continuo* si es continuo y $\overline{\boldsymbol{T}(D)}$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{N}$ para cada subconjunto acotado $D \subset \mathcal{N}$.

Presentamos ahora el clásico teorema de punto fijo en extensiones de un cono debido a Krasnosel'skiĭ, que puede verse, por ejemplo, en [66] o en [107, Teorema 13.D].

Teorema 1.1. *Sea $\mathcal{N}$ un espacio de Banach real con el orden inducido por un cono $\mathcal{K}$. Supongamos que el operador $\boldsymbol{T} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ es completamente continuo y una extensión del cono, i.e., existen $0 < r < R$ tales que*

$$\boldsymbol{x} \not\leq \boldsymbol{T}\boldsymbol{x} \quad \textit{para todo } \boldsymbol{x} \in \mathcal{K} \textit{ con } \|\boldsymbol{x}\| = r \tag{1.1}$$

y

$$\boldsymbol{x} \not\geq \boldsymbol{T}\boldsymbol{x} \quad \textit{para todo } \boldsymbol{x} \in \mathcal{K} \textit{ con } \|\boldsymbol{x}\| = R. \tag{1.2}$$

Entonces $\boldsymbol{T}$ tiene al menos un punto fijo $\boldsymbol{x}$ en $\mathcal{K}$ con $r < \|\boldsymbol{x}\| < R$.

A partir de este último resultado se prueba en [26, Teorema 2.1] el siguiente teorema, del que presentamos la demostración para una mejor comprensión del texto.

Teorema 1.2. ([26, Teorema 2.1]) *Sean $\mathcal{N}$ un espacio de Banach real, $\mathcal{K}$ un cono normal con interior no vacío y $\boldsymbol{T} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ un operador creciente y completamente continuo. Definamos $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{K} : \boldsymbol{T}\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{x}\}$ y supongamos que:*

1. *Existe $\bar{\boldsymbol{x}} \in S$ tal que $\bar{\boldsymbol{x}} \gg \boldsymbol{0}$.*

2. *S es acotado.*

Entonces existe $\boldsymbol{x} \in \mathcal{K}$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, tal que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$.

Demostración. Como $\bar{\boldsymbol{x}} \in int(\mathcal{K})$, entonces existe $r > 0$ tal que $\overline{B(\bar{\boldsymbol{x}}, r)} \subset \mathcal{K}$. Ahora bien, si $\boldsymbol{x} \in \mathcal{K}$ con $\|\boldsymbol{x}\| = r$ está claro que $\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x} \in \overline{B(\bar{\boldsymbol{x}}, r)} \subset \mathcal{K}$ y, por lo tanto, $\boldsymbol{x} \preceq \bar{\boldsymbol{x}}$.

Consideraremos dos casos diferentes.

Caso 1. Supongamos que existe $\boldsymbol{x} \in \mathcal{K}$ con $\|\boldsymbol{x}\| = r$ tal que $\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$. Definamos la sucesión $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{T}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_1,$$

por lo que, al ser $\boldsymbol{T}$ un operador creciente, se deduce por inducción que la sucesión $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ es monótona creciente. Por otra parte, dado que $\boldsymbol{x} \preceq \bar{\boldsymbol{x}}$, $\bar{\boldsymbol{x}} \in S$ y $\boldsymbol{T}$ es creciente, tenemos que

$$\boldsymbol{0} \prec \boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{T}^n\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{T}^n\bar{\boldsymbol{x}} \preceq \bar{\boldsymbol{x}} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

con lo que el hecho de ser $\mathcal{K}$ normal implica que $\|\boldsymbol{x}_n\| \leq c\|\bar{\boldsymbol{x}}\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, que la sucesión $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada.

Ahora bien, debido a que $\boldsymbol{T}$ es un operador completamente continuo, la sucesión $\{\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es relativamente compacta y, consecuentemente, existe una subsucesión $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente con límite $\boldsymbol{x}^*$. Fijémonos en que la sucesión $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es creciente (ya que lo es la sucesión $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$), por lo que $\boldsymbol{x}_{n_k} \preceq \boldsymbol{x}^*$ para cada k y, así, para cada $n \geq n_k$ tenemos que $\boldsymbol{x}_{n_k} \preceq \boldsymbol{x}_n \preceq \boldsymbol{x}^*$. Al ser $\mathcal{K}$ un cono normal, de lo anterior se deduce que $\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}_n\| \leq c\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}_{n_k}\|$, lo que implica que la sucesión $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ también es convergente con límite $\boldsymbol{x}^*$.

Como el operador $\boldsymbol{T}$ es continuo, entonces $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}^*$, es decir, $\boldsymbol{x}^*$ es un punto fijo del operador $\boldsymbol{T}$ tal que $\boldsymbol{0} \prec \boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{x}^* \preceq \bar{\boldsymbol{x}}$. En particular $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{K} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$.

Caso 2. Supongamos, por el contrario, que $\boldsymbol{x} \not\preceq \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathcal{K}$ con $\|\boldsymbol{x}\| = r$. Como S es acotado, existe $R > r$ tal que $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x} \not\preceq \boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathcal{K}$ con $\|\boldsymbol{x}\| = R$. Entonces el Teorema 1.1 garantiza, en este caso, la existencia de un punto fijo distinto del cero. □

Si tomamos $\mathcal{N} = \mathbb{R}^m$ y el cono $\mathcal{K} = \mathbb{R}^m_+$, un caso particular del teorema anterior es el siguiente corolario, que resulta ser el resultado principal obtenido por Persson en [88].

Corolario 1.1. ([26, Corolario 2.1] y [88, Teorema 5]) *Supongamos que el operador $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^m_+$ es continuo y creciente. Sea $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m_+ : \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{x}\}$. Si S es acotado y existe un $\bar{\boldsymbol{x}} \in S$ tal que $\bar{\boldsymbol{x}} \gg \mathbf{0}$, entonces existe $\boldsymbol{x} > 0$ tal que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$.*

A lo largo del capítulo, dados $n, N \in \mathbb{N}$ con $1 \leq n \leq N$, denotaremos $I := \{0, 1, \ldots, N-1\}$, $J := \{0, 1, \ldots, N+n-1\}$ y

$$\Omega_N^n := \big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{N+n} \,\big|\, x_i = x_{N+i},\ i \in \{0, \ldots, n-1\}\big\}.$$

Dados $K_0, \ldots, K_n \in \mathbb{R}$, consideraremos el siguiente operador lineal $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n] : \Omega^{N+n} \to \mathbb{R}^N$, definido por

$$T_n[K_0, \ldots, K_n] x_k \equiv x_{k+n} + \sum_{i=0}^{n} K_i\, x_{k+i}, \quad \text{para todo } k \in I. \tag{1.3}$$

Pasamos ahora a introducir los conceptos de operadores inverso positivos (inverso negativos) y fuertemente inverso positivos (fuertemente inverso negativos).

Definición 1.3. Dados $K_0, \ldots, K_n \in \mathbb{R}$ tales que $1+K_n \neq 0$ y $1+\sum_{i=0}^n K_i > 0$, decimos que el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$ es *inverso positivo* en Ω_N^n si $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]\, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ implica que $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \Omega_N^n$.

Definición 1.4. Dados $K_0, \ldots, K_n \in \mathbb{R}$ tales que $1+K_n \neq 0$ y $1+\sum_{i=0}^n K_i > 0$, decimos que el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$ es *fuertemente inverso positivo* en Ω_N^n si $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]\, \boldsymbol{x} > \mathbf{0}$ implica que $\boldsymbol{x} \gg \mathbf{0}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \Omega_N^n$.

Definición 1.5. Dados $K_0, \ldots, K_n \in \mathbb{R}$ tales que $1+K_n \neq 0$ y $1+\sum_{i=0}^n K_i < 0$, decimos que el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$ es *inverso negativo* en Ω_N^n si $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]\, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ implica que $\boldsymbol{x} \leq \mathbf{0}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \Omega_N^n$.

Definición 1.6. Dados $K_0, \ldots, K_n \in \mathbb{R}$ tales que $1+K_n \neq 0$ y $1+\sum_{i=0}^n K_i < 0$, decimos que el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$ es *fuertemente inverso negativo* en Ω_N^n si $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]\, \boldsymbol{x} > \mathbf{0}$ implica que $\boldsymbol{x} \ll \mathbf{0}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \Omega_N^n$.

OBSERVACIÓN 1.1. Es inmediato verificar que un operador fuertemente inverso positivo (fuertemente inverso negativo) en Ω_N^n es también un operador inverso positivo (inverso negativo) en Ω_N^n.

Observación 1.2. Si el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0,\ldots,K_n]$ no es invertible en Ω_N^n, entonces existe $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{v} \in Ker(\boldsymbol{T}_n[K_0,\ldots,K_n])$. Como el operador es lineal, $\lambda\boldsymbol{v} \in Ker(\boldsymbol{T}_n[K_0,\ldots,K_n])$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, por lo que $\boldsymbol{T}_n[K_0,\ldots,K_n]$ no será inverso positivo —como tampoco fuertemente inverso positivo— en dicho caso.

Es por esto que en las definiciones 1.3 y 1.4 está implícita la existencia del operador inverso $\boldsymbol{T}_n^{-1}[K_0,\ldots,K_n]$ y, por lo tanto, la existencia de la función de Green asociada al operador $\boldsymbol{T}_n^{-1}[K_0,\ldots,K_n]$ en Ω_N^n.

En el trabajo [31] puede verse cómo se construye dicha función de Green, aunque más adelante, en este capítulo, expondremos un caso particular de tal construcción.

Del mismo modo puede comprobarse que las definiciones 1.5 y 1.6 también implican la existencia del operador inverso y su correspondiente función de Green asociada.

Observación 1.3. Está claro que la condición $1 + K_n \neq 0$ es necesaria para asegurar que el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0,\ldots,K_n]$ es un operador de orden n, y no de orden inferior.

Observación 1.4. Como puede verse en [31], tomando $\boldsymbol{u} \equiv \{C,\ldots,C\} \in \Omega_N^n$, con $C < 0$, como $\boldsymbol{T}_n[K_0,\ldots,K_n]\boldsymbol{u} \geq \mathbf{0}$ siempre que $1 + \sum_{i=0}^n K_i \leq 0$, es obvio que el operador no será inverso positivo en ese caso. Es por esto que la condición $1 + \sum_{i=0}^n K_i > 0$ no es restrictiva en las definiciones 1.3 y 1.4.

Razonando de una manera similar, podemos verificar que el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0,\ldots,K_n]$ nunca será inverso negativo en caso de que $1 + \sum_{i=0}^n K_i \geq 0$, por lo que la condición $1 + \sum_{i=0}^n K_i < 0$ no es restrictiva en las definiciones 1.5 y 1.6.

Observación 1.5. El operador opuesto $-\boldsymbol{T}_n[K_0,\ldots,K_n]$ puede escribirse también como $\boldsymbol{T}_n[-K_0,\ldots,-K_{n-1},-K_n-2]$, y no es difícil comprobar que el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0,\ldots,K_n]$ es (fuertemente) inverso positivo en Ω_N^n si y solo si el operador $-\boldsymbol{T}_n[K_0,\ldots,K_n]$ es (fuertemente) inverso negativo en Ω_N^n.

1.2. Un resultado general de existencia

Consideremos la ecuación en diferencias general implícita no autónoma de orden n,

$$x_{k+n} = g(k, x_k, \ldots, x_{k+n}), \quad k \in I, \tag{1.4}$$

en donde $g : I \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ es una función continua, junto con las siguientes condiciones de frontera periódicas,

$$x_i = x_{N+i}, \quad i \in \{0,\ldots,n-1\}. \tag{1.5}$$

Definición 1.7. Una solución del problema (1.4)-(1.5) será un elemento $\boldsymbol{x} \equiv (x_k)_{k=0}^{N+n-1} \in \mathbb{R}^{N+n}$ que satisfaga tanto la ecuación (1.4) como la ecuación (1.5).

Introducimos ahora los conceptos de sub y sobresolución.

Definición 1.8. Diremos que un elemento $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{N+n}$ es una *subsolución* del problema (1.4)-(1.5) si verifica que

$$\alpha_{k+n} \leq g(k, \alpha_k, \ldots, \alpha_{k+n}), \quad k \in I, \tag{1.6}$$
$$\alpha_i \leq \alpha_{N+i}, \quad i \in \{0, \ldots, n-1\}. \tag{1.7}$$

Definición 1.9. Diremos que un elemento $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{N+n}$ es una *sobresolución* del problema (1.4)-(1.5) si verifica que

$$\beta_{k+n} \geq g(k, \beta_k, \ldots, \beta_{k+n}), \quad k \in I, \tag{1.8}$$
$$\beta_i \geq \beta_{N+i}, \quad i \in \{0, \ldots, n-1\}. \tag{1.9}$$

En esta sección probaremos, bajo ciertas hipótesis, la existencia de al menos una solución positiva para el problema (1.4)-(1.5). Para ello reescribiremos la ecuación (1.4) en términos del operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$, de la siguiente manera:

$$T[K_0, \ldots, K_n]x_k = f(k, x_k, \ldots, x_{k+n}), \quad k \in I, \tag{1.10}$$

en donde la función $f : I \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ está definida por

$$f(k, x_k, \ldots, x_{k+n}) := g(k, x_k, \ldots, x_{k+n}) + \sum_{i=0}^{n} K_i x_{k+i}. \tag{1.11}$$

Observación 1.6. Claramente, la función f es continua si lo es la función g, y los problemas (1.4)-(1.5) y (1.10)-(1.5) son equivalentes.

Observación 1.7. También podemos adaptar la definición de subsolución al problema escrito en términos del operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$ y la función f sin más que escribir la condición (1.6) como

$$T[K_0, \ldots, K_n]\alpha_k \leq f(k, \alpha_k, \ldots, \alpha_{k+n}), \quad k \in I. \tag{1.12}$$

Y lo mismo ocurre con la definición de sobresolución.

Si el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$ es invertible en Ω_N^n, está claro que $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{N+n}$ es una solución del problema (1.4)-(1.5) si y solo si $\boldsymbol{x}$ es un punto fijo del operador $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^{N+n} \to \mathbb{R}^{N+n}$ definido por

$$Tx_k = \sum_{j=0}^{N-1} G(k, j) f(j, x_j, \ldots, x_{j+n}), \quad \text{para todo } k \in J, \tag{1.13}$$

en donde $G : J \times I \to \mathbb{R}$ es la función de Green asociada al operador inverso $\boldsymbol{T}_n^{-1}[K_0, \ldots, K_n]$.

Veamos que dicha función de Green es positiva siempre que se cumpla la siguiente hipótesis:

(H_0) El operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$ es fuertemente inverso positivo en Ω_N^n.

Lema 1.1. *El operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$ es fuertemente inverso positivo en Ω_N^n si y solo si la función de Green asociada al operador $\boldsymbol{T}_n^{-1}[K_0, \ldots, K_n]$ es positiva.*

Demostración. Supongamos que el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$ es fuertemente inverso positivo en Ω_N^n. Por la Observación 1.2 sabemos que $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$ es invertible en Ω_N^n. En [31, Corolario 5.1] se prueba que el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$ es inverso positivo en Ω_N^n si y solo si la función de Green $G : J \times I \to \mathbb{R}$ asociada al operador $\boldsymbol{T}_n^{-1}[K_0, \ldots, K_n]$ es tal que $G(k, j) \geq 0$ para todo $(k, j) \in J \times I$.

Supongamos que existe $(k_0, j_0) \in J \times I$ tal que $G(k_0, j_0) = 0$. Definamos $f : I \to \mathbb{R}$ como

$$f(k) := \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq j_0, \\ 1, & \text{si } k = j_0, \end{cases}$$

y sea $\boldsymbol{u} = (u_0, \ldots, u_{N+n-1})$ la solución única del problema

$$T_n[K_0, \ldots, K_n]u_k = f(k), \quad k \in I, \quad u_i = u_{N+i}, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Claramente $\boldsymbol{u} \in \Omega_N^n$ y $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]\,\boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}$, pero

$$u_{k_0} = \sum_{j=0}^{N-1} G(k_0, j) f(j) = 0.$$

De todo esto se deduce que $\boldsymbol{u} \not\gg \boldsymbol{0}$, lo que contradice el carácter fuertemente inverso positivo del operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$.

Para probar el recíproco, supongamos que la función G es positiva, y tomemos $\boldsymbol{u} \in \Omega_N^n$ que verifique $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}$. Entonces existe $j_0 \in I$ tal que $v_{j_0} > 0$, y así

$$u_k = \sum_{j=0}^{N-1} G(k, j) v_j \geq G(k, j_0) v_{j_0} > 0, \quad \text{para todo } k \in J.$$

Por consiguiente, $\boldsymbol{u} \gg \boldsymbol{0}$ y la demostración ha acabado. $\square$

Observación 1.8. De manera similar, podemos concluir que el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0,\dots,K_n]$ es fuertemente inverso negativo en Ω_N^n si y solo si la función de Green asociada al operador $\boldsymbol{T}_n^{-1}[K_0,\dots,K_n]$ es negativa en $J\times I$.

Estamos ahora en condiciones de demostrar el resultado principal de este capítulo, en el que se deduce la existencia de al menos una solución positiva del problema (1.4)-(1.5).

Teorema 1.3. *Supongamos que se satisfacen tanto la hipótesis* (H_0) *como las siguientes condiciones:*

(H_1) $f(k,\boldsymbol{x})\geq 0$ *para todo* $k\in I$ *y todo* $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}_+^{n+1}$.

(H_2) $f(k,\boldsymbol{x})\leq f(k,\boldsymbol{y})$ *para todo* $k\in I$, *y para todo* $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}_+^{n+1}$ *tales que* $\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{y}$.

(H_3) *Existe* $\bar{\boldsymbol{x}}\in\Omega_N^n$ *tal que* $\bar{\boldsymbol{x}}\gg\mathbf{0}$ *y*

$$T_n[K_0,\dots,K_n]\bar{x}_k\geq f(k,\bar{x}_k,\bar{x}_{k+1},\dots,\bar{x}_{k+n}),\ \text{para todo } k\in I.$$

(H_4) *Existe* $i\in\{0,\dots,n\}$ *tal que*

$$\lim_{x_i\to\infty}\frac{f(k,x_0,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)}{x_i}=\infty,$$

para todo $x_j>0$, $j\in\{0,\dots,n\}\setminus\{i\}$, *y para todo* $k\in I$.

Entonces el problema (1.4)-(1.5) *tiene al menos una solución* $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{N+n}$ *tal que* $\boldsymbol{x}\gg\mathbf{0}$.

Demostración. Denotemos

$$m:=\min_{(k,j)\in J\times I}G(k,j)\qquad\text{y}\qquad M:=\max_{(k,j)\in J\times I}G(k,j).$$

Utilizando la hipótesis (H_0) y el Lema 1.1, tenemos que $0<m<M$. Dado que la condición (H_3) implica que $\min_{k\in J}\bar{x}_k>0$, podemos elegir $0<\xi<m/M<1$ suficientemente pequeño tal que

$$\min_{k\in J}\bar{x}_k>\xi\|\bar{\boldsymbol{x}}\|_\infty.$$

Ahora definimos

$$\mathcal{K}:=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{N+n}\;\middle|\;\min_{k\in J}x_k\geq\xi\|\boldsymbol{x}\|_\infty\right\},\tag{1.14}$$

que es un cono normal ($c=1$) en $\mathbb{R}^{N+n}$, y con interior no vacío.

Sea "$\preceq$" el orden inducido en $\mathbb{R}^{N+n}$ por el cono $\mathcal{K}$, i.e.,

$$\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \min_{k \in J}(y_k - x_k) \geq \xi \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|_\infty.$$

También definimos

$$S := \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{K} \,|\, \boldsymbol{T}\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{x}\},$$

en donde $\boldsymbol{T}$ es el operador definido en (1.13).

Como paso previo a la aplicación del Teorema 1.2, probaremos las siguientes aserciones.

Aserción 1. $\boldsymbol{T}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$.

Si $\boldsymbol{x} \in \mathcal{K}$, entonces $x_k \geq 0$ para todo $k \in J$ y, utilizando (H_1), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\min_{k \in J} Tx_k &= \min_{k \in J} \sum_{j=0}^{N-1} G(k,j) f(j, x_j, \ldots, x_{j+n}) \geq \sum_{j=0}^{N-1} m\, f(j, x_j, \ldots, x_{j+n}) \\
&\geq \sum_{j=0}^{N-1} \xi\, M\, f(j, x_j, \ldots, x_{j+n}) \geq \xi \max_{k \in J} \sum_{j=0}^{N-1} G(k,j) f(j, x_j, \ldots, x_{j+n}) \\
&= \xi\, \|Tx\|_\infty,
\end{aligned}$$

por lo que $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x} \in \mathcal{K}$, y la aserción está probada.

Aserción 2. El operador $T : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ es monótono creciente.

Sean $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{K}$ tales que $\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{y}$. Está claro que también $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$, así que, usando la hipótesis (H_2) y realizando los cálculos de manera análoga a los de la anterior afirmación, llegamos a la conclusión de que

$$\min_{k \in J} (Ty_k - Tx_k) \geq \xi \|\boldsymbol{T}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}\|_\infty,$$

por lo que $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$.

Aserción 3. El operador $\boldsymbol{T} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ es completamente continuo.

El operador $\boldsymbol{T}$ es continuo y está definido en un espacio de dimensión finita, por lo que también es completamente continuo.

Aserción 4. $\bar{\boldsymbol{x}} \in S$ y $\boldsymbol{0} \lll \bar{\boldsymbol{x}}$.

Debido a cómo hemos elegido ξ previamente y a la definición de $\mathcal{K}$, tenemos que $\bar{\boldsymbol{x}} \in int(\mathcal{K})$, o lo que es lo mismo, $\boldsymbol{0} \lll \bar{\boldsymbol{x}}$.

Por otra parte, la condición (H_3) garantiza que existe una función no negativa $h : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$T_n[K_0, \ldots, K_n]\bar{x}_k = f(k, \bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_{k+n}) + h_k \text{ para todo } k \in I.$$

Como el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0,\dots,K_n]$ es invertible en Ω_N^n, la igualdad previa es equivalente a la siguiente expresión:

$$\bar{x}_k - T\bar{x}_k = T_n^{-1}[K_0,\dots,K_n]h_k \equiv \sum_{j=0}^{N-1} G(k,j)h_j \quad \text{para todo } k\in J.$$

Ahora, realizando cálculos similares a los utilizados en la demostración de la *Aserción* 1, deducimos que

$$\min_{k\in J}(\bar{x}_k - T\bar{x}_k) \geq \xi\|\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}}\|_\infty,$$

lo que implica que $\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{x}} \preceq \bar{\boldsymbol{x}}$ y, por lo tanto, $\bar{\boldsymbol{x}}\in S$.

Aserción 5. S está acotado.

La condición (H_4) nos dice que existen $i\in\{0,\dots,n\}$ y $\delta>0$ tales que, si $x_i>\delta$, entonces

$$\frac{f\left(k,\frac{1}{\xi mN},\dots,\frac{1}{\xi mN},x_i,\frac{1}{\xi mN},\dots,\frac{1}{\xi mN}\right)}{x_i} > \frac{1}{\xi mN}$$

para todo $k\in I$.

Tomemos $\alpha = \max\{\frac{1}{\xi mN},\delta\} > 0$. Entonces, si $\boldsymbol{x}\in\mathcal{K}$ es tal que $\min_{j\in J} x_j > \alpha$, como f es creciente debido a (H_2), tenemos que

$$\frac{f(j,x_j,\dots,x_{j+i},\dots,x_{j+n})}{x_{j+i}} \geq \frac{f\left(j,\frac{1}{\xi mN},\dots,\frac{1}{\xi mN},x_{j+i},\frac{1}{\xi mN},\dots,\frac{1}{\xi mN}\right)}{x_{j+i}} > \frac{1}{\xi mN}$$

para todo $j\in I$.

Debido a todo esto, si $\boldsymbol{x}\in\mathcal{K}$ es tal que $\min_{j\in J} x_j>\alpha$, entonces

$$\begin{aligned} Tx_k &= \sum_{j=0}^{N-1} G(k,j)f(j,x_j,\dots,x_{j+n}) > \sum_{j=0}^{N-1} G(k,j)\frac{x_{j+i}}{\xi mN} \\ &\geq \sum_{j=0}^{N-1} m\frac{\xi\|\boldsymbol{x}\|_\infty}{\xi mN} = \|\boldsymbol{x}\|_\infty \geq x_k, \quad \text{para todo } k\in J. \end{aligned}$$

De este modo $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}\not\preceq\boldsymbol{x}$ y, como consecuencia, $\boldsymbol{x}\notin S$. Por lo tanto, siempre que $\boldsymbol{x}\in S$ tenemos que $\min_{j\in J} x_j \leq \alpha$ y, utilizando el hecho de que

$$\alpha \geq \min_{j\in J} x_j \geq \xi\|\boldsymbol{x}\|_\infty,$$

deducimos que $S\subset\overline{B(\mathbf{0},\alpha/\xi)}$ y la afirmación está probada.

Para finalizar, a partir del Teorema 1.2 y las aserciones previas, se deduce que el operador $\boldsymbol{T}$ posee un punto fijo no trivial $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{K}$, que es una solución del problema (1.4)-(1.5). Ahora bien, de la definición del cono $\mathcal{K}$ se deduce directamente que cualquier elemento $\boldsymbol{x} \in \mathcal{K}$ o bien es $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ o bien es $\boldsymbol{x} \gg \boldsymbol{0}$, por lo que $\boldsymbol{x}^*$ es una solución del problema (1.4)-(1.5) tal que $\boldsymbol{x}^* \gg \boldsymbol{0}$. $\square$

Observación 1.9. De la hipótesis (H_3) se deduce que $\bar{\boldsymbol{x}}$ es una sobresolución del problema (1.4)-(1.5), mientras que está claro que (H_0) implica que $\bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}$ es una subsolución de ese problema. Debido a ello, el Teorema 2.1 en [31] garantiza que tal problema tiene una solución $\boldsymbol{u}$ que verifica $\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{u} \leq \bar{\boldsymbol{x}}$. Sin embargo, no podemos garantizar que $\boldsymbol{u} \gg \boldsymbol{0}$ (ni siquiera que $\boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}$).

Por otra parte, si existe una solución $\boldsymbol{u}$ tal que $\boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}$ pero $\boldsymbol{u} \not\gg \boldsymbol{0}$, podemos asegurar, como consecuencia directa del teorema previo, que existen dos soluciones distintas del problema (1.4)-(1.5).

Observación 1.10. En la demostración del teorema anterior, utilizando únicamente las hipótesis (H_0) y (H_3), podemos elegir un $0 < \xi < m/M < 1$ apropiado para construir un cono $\mathcal{K}$ adecuado para nuestros propósitos. Debido a esto, es posible relajar la hipótesis (H_4) de la manera siguiente:

(H_4') Existe $i \in \{0, \ldots, n\}$ tal que

$$\lim_{x_i \to \infty} \frac{f(k, x_0, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{x_i} > \frac{1}{\xi m N},$$

para todo $x_j \geq (1/\xi m N)$, $j \in \{0, \ldots, n\} \backslash \{i\}$ y para todo $k \in I$.

1.3. Estudio del signo de la función de Green

Como hemos visto en el Teorema 1.3, si la función de Green asociada al operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$ es positiva en $J \times I$, imponiendo condiciones adicionales a la función f, puede deducirse la existencia de al menos una solución del problema (1.4)-(1.5) con todas sus componentes positivas. El conjunto de valores $\{K_0, \ldots, K_n\}$ en el que esta propiedad se cumple ha sido estudiado para problemas con condiciones de frontera periódicas (ver [11, 31, 32]), condiciones tipo Neumann ([33]) o, entre otros, problemas con condiciones multipunto de orden superior ([4]). A pesar de esto, esta cuestión está lejos de ser totalmente resuelta, solo los problemas de primer y segundo orden han sido estudiados en profundidad.

Podemos ver en [31, 32] algunos resultados acerca del carácter inverso positivo del operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$ en función de los valores $K_0, \ldots, K_n$. Esos resultados se obtienen a partir del estudio del signo de la función de Green asociada al operador $\boldsymbol{T}_n^{-1}[K_0, \ldots, K_n]$, y la expresión de dicha función se calcula resolviendo un sistema algebraico de n ecuaciones lineales. Presentamos ahora un caso particular del Teorema 5.1 en [31], tomando $K_n = 0$, aunque el caso general se obtiene directamente de este sin más que dividir por $1 + K_n$.

Teorema 1.4. *Sean $K_0, \ldots, K_{n-1}$ números reales fijados. Supongamos que el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_{n-1}, 0]$ es invertible en Ω_N^n. Entonces, para $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^N$, la única solución del problema*

$$T_n[K_0, \ldots, K_{n-1}, 0]u_k = \sigma_k, \quad k \in I, \tag{1.15}$$

$$u_{N+i} = u_i, \quad i \in \{0, \ldots, n-1\}, \tag{1.16}$$

viene dada por la expresión

$$u_k = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} z_{k-j-1}\sigma_j + \sum_{j=k}^{N-1} z_{N+k-j-1}\sigma_j, & \text{si } k \in I, \\[2ex] \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1-N} z_{k-j-1-N}\,\sigma_j + \sum_{j=k-N}^{N-1} z_{k-j-1}\sigma_j, & \text{si } k \in J \backslash I, \end{cases}$$

en donde $\boldsymbol{z}$ es la única solución del problema

$$T_n[K_0, \ldots, K_{n-1}, 0]z_k = 0, \quad k \in I, \tag{1.17}$$

$$z_i - z_{N+i} = 0, \quad i \in \{0, \ldots, n-2\}, \tag{1.18}$$

$$z_{n-1} - z_{N+n-1} = 1. \tag{1.19}$$

Además, a partir del Lema 1.1, no es difícil comprobar la certeza de los siguientes resultados, que son una generalización del Corolario 5.1 en [31]:

Corolario 1.2. *Supongamos que $1 + K_n > 0$ y sea z la única solución de*

$$T_n\left[\frac{K_0}{1+K_n}, \ldots, \frac{K_{n-1}}{1+K_n}, 0\right] z_k = 0, \quad k \in I,$$

verificando las condiciones (1.18)-(1.19). *Entonces, si $1 + \sum_{i=0}^n K_i > 0$, el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$ es fuertemente inverso positivo en Ω_N^n si y solo si $z_k > 0$ para todo $k \in I$.*

Corolario 1.3. *Supongamos que $1 + K_n > 0$ y sea z la única solución de*

$$T_n\left[\frac{K_0}{1+K_n}, \ldots, \frac{K_{n-1}}{1+K_n}, 0\right] z_k = 0, \quad k \in I,$$

verificando las condiciones (1.18)-(1.19). *Entonces, si $1 + \sum_{i=0}^n K_i < 0$, el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$ es fuertemente inverso negativo en Ω_N^n si y solo si $z_k < 0$ para todo $k \in I$.*

Observación 1.11. Por la Observación 1.5, el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0,\dots,K_n]$ es fuertemente inverso positivo (fuertemente inverso negativo) en Ω_N^n si y solo si el operador opuesto $\boldsymbol{T}_n[L_0,\dots,L_n] \equiv \boldsymbol{T}_n[-K_0,\dots,-K_{n-1},-2-K_n]$ es fuertemente inverso negativo (fuertemente inverso positivo) en Ω_N^n.

Además resulta que $1+L_n = -1-K_n$ y $1+\sum_{i=0}^n L_i = -1-\sum_{i=0}^n K_i$.

Entonces, en caso de que $1+K_n<0$ y $1+\sum_{i=0}^n K_i>0$, podemos aplicar el Corolario 1.3 al operador $\boldsymbol{T}_n[L_0,\dots,L_n]$ para obtener que $\boldsymbol{T}_n[K_0,\dots,K_n]$ es fuertemente inverso positivo en Ω_N^n si y solo si $z_k<0$ para todo $k\in I$.

De manera análoga, siempre que $1+K_n<0$ y $1+\sum_{i=0}^n K_i<0$, podemos aplicar el Corolario 1.2 al operador $\boldsymbol{T}_n[L_0,\dots,L_n]$ para obtener que $\boldsymbol{T}_n[K_0,\dots,K_n]$ es fuertemente inverso negativo en Ω_N^n si y solo si $z_k>0$ para todo $k\in I$.

En [31, subsección 6.1], los autores muestran que la expresión de la función z asociada al operador $\boldsymbol{T}_1[-\lambda,0]$ —cuando este es invertible— viene dada por

$$z_k = \frac{\lambda^k}{1-\lambda^N}, \quad \text{para todo } k\in J, \tag{1.20}$$

siempre que $\lambda\neq 0$, y por $z\equiv\{1,0,\dots,0\}$ cuando $\lambda=0$. A partir de esta expresión puede deducirse que $z_k>0$ para todo $k\in I$ si y solo si $\lambda\in(0,1)$, mientras que $z_k<0$ para todo $k\in I$ si y solo si $\lambda>1$.

Utilizando estos cálculos, llegamos al siguiente resultado:

Proposición 1.1. *Sean K_0, $K_1\in\mathbb{R}$ tales que $1+K_1>0$, entonces los siguientes enunciados son ciertos:*

1. *El operador $\boldsymbol{T}_1[K_0,K_1]$ es fuertemente inverso positivo en Ω_N^1 si y solo si $1+K_1>-K_0>0$.*
2. *El operador $\boldsymbol{T}_1[K_0,K_1]$ es fuertemente inverso negativo en Ω_N^1 si y solo si $1+K_1<-K_0$.*

Demostración. Como $1+K_1>0$, debido a los Corolarios 1.2 y 1.3 sabemos que el operador $\boldsymbol{T}_1[K_0,K_1]$ es fuertemente inverso positivo (fuertemente inverso negativo) en Ω_N^1 si y solo si la función z asociada al operador

$$\boldsymbol{T}_1\left[\frac{K_0}{1+K_1},0\right]$$

verifica que $z_k>0$ (<0) para todo $k\in I$.

Sin más que tomar $\lambda=-K_0/(1+K_1)$ en la expresión (1.20), tenemos que $z_k>0$ para todo $k\in I$ si y solo si

$$0<\frac{-K_0}{1+K_1}<1,$$

que es equivalente a decir, en este caso, que $1 + K_1 > -K_0 > 0$.

Del mismo modo, sabemos que $z_k < 0$ para todo $k \in I$ si y solo si

$$1 < \frac{-K_0}{1 + K_1},$$

o, lo que es lo mismo, $1 + K_1 < -K_0$. □

Observación 1.12. En el caso de que $1 + K_1 < 0$, de la Observación 1.11 se deduce que el operador $\boldsymbol{T}_1[K_0, K_1]$ es fuertemente inverso positivo en Ω_N^1 si y solo si $1 + K_1 > -K_0$, y es fuertemente inverso negativo en Ω_N^1 si y solo si $1 + K_1 < -K_0 < 0$.

En [31, subsección 6.2] podemos ver que la función z asociada al operador $\boldsymbol{T}_2[K_0, K_1, 0]$, cuando este es invertible, viene dada por una de las siguientes expresiones, dependiendo de las raíces del polinomio característico del operador:

1. El polinomio característico tiene dos raíces reales distintas $\lambda_1 > \lambda_2$,

$$z_k = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{\lambda_1^k}{1 - \lambda_1^N} - \frac{\lambda_2^k}{1 - \lambda_2^N}\right), \quad \text{para todo } k \in J. \tag{1.21}$$

En este caso, $z_k > 0$ para todo $k \in I$ cuando $0 \leq \lambda_2 < \lambda_1 < 1$ o $1 < \lambda_2 < \lambda_1$. Por otro lado, $z_k < 0$ para todo $k \in I$ cuando $0 \leq \lambda_2 < 1 < \lambda_1$. En el resto de los casos z toma valores tanto positivos como negativos.

2. El polinomio característico tiene una raíz real doble $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$,

$$z_k = \frac{\lambda^{k-1}(\lambda^N(N-k) + k)}{(1 - \lambda^N)^2}, \quad \text{para todo } k \in J, \tag{1.22}$$

si $\lambda \neq 0$, y $z \equiv \{0, 1, 0, \dots, 0\}$ si $\lambda = 0$. Entonces $z_k > 0$ para todo $k \in I$ cuando $1 \neq \lambda > 0$, mientras que z toma valores de distinto signo o iguales a cero en cualquier otro caso.

3. El polinomio característico tiene raíces complejas $r \cos\theta \pm i\, r \operatorname{sen}\theta$, con $r > 0$ y $\theta \in (0, \pi)$,

$$z_k = \frac{r^{k-1}(r^N \operatorname{sen}(N-k)\theta + \operatorname{sen} k\theta)}{\operatorname{sen}\theta\,[(r^N - \cos N\theta)^2 + \operatorname{sen}^2 N\theta]}, \quad \text{para todo } k \in J. \tag{1.23}$$

Ahora $z_k > 0$ para todo $k \in I$ si y solo si $\theta \in (0, \pi/N)$.

En el caso de que $\theta \in (\pi/N, \pi)$, z toma valores de distinto signo.

Un cuidadoso análisis de estas expresiones nos permite obtener el siguiente resultado:

Proposición 1.2. *Sean K_0, K_1, $K_2 \in \mathbb{R}$ tales que $1+K_2>0$. Además, si $K_1^2 - 4\,K_0\,(1+K_2) < 0$ denotamos*

$$\theta = \arctan\left(\frac{-\sqrt{4K_0(1+K_2)-K_1^2}}{K_1}\right) \in (0,\pi).$$

Los siguientes enunciados son ciertos:

1. *Siempre que $1+K_0+K_1+K_2>0$, el operador $\boldsymbol{T}_2[K_0,K_1,K_2]$ es fuertemente inverso positivo en Ω_N^2 si y solo si se verifica una de las siguientes condiciones:*

   (i) $K_1^2-4K_0(1+K_2)<0$ *y* $\theta \in (0,\pi/N)$.

   (ii) $K_1^2-4K_0(1+K_2)=0$ *y* $0<-K_1 \neq 2(1+K_2)$.

   (iii) $K_1^2-4K_0(1+K_2)>0$, $2(1+K_2)+K_1>0$, $K_1<0$ *y* $K_0 \geq 0$.

   (iv) $K_1^2-4K_0(1+K_2)>0$ *y* $2(1+K_2)+K_1<0$.

2. *Siempre que $1+K_0+K_1+K_2<0$, el operador $\boldsymbol{T}_2[K_0,K_1,K_2]$ es fuertemente inverso negativo en Ω_N^2 si y solo si $K_1^2-4K_0(1+K_2)>0$, $K_1<0$ y $K_0 \geq 0$.*

Demostración. Para probar la primera parte, al ser $1+K_2>0$, por el Corolario 1.2 sabemos que el operador $\boldsymbol{T}_2[K_0,K_1,K_2]$ es fuertemente inverso positivo en Ω_N^2 si y solo si $1+K_0+K_1+K_2>0$ y la función z asociada al operador

$$\boldsymbol{T}_2\left[\frac{K_0}{1+K_2},\frac{K_1}{1+K_2},0\right]$$

verifica que $z_k>0$ para todo $k\in I$.

Pero es claro que, si $K_1^2-4K_0(1+K_2)<0$, tomando

$$r=\sqrt{\frac{K_0}{1+K_2}}$$

y

$$\theta = \arctan\left(\frac{-\sqrt{4K_0(1+K_2)-K_1^2}}{K_1}\right) \in (0,\pi),$$

la función z viene dada por la expresión (1.23). Por lo tanto, $z_k>0$ para todo $k\in I$ si y solo si $\theta\in(0,\pi/N)$.

En caso de que $K_1^2 - 4K_0(1+K_2) = 0$, la función z está definida por (1.22), con

$$\lambda = \frac{-K_1}{2(1+K_2)},$$

por lo que $z_k > 0$ para todo $k \in I$ si y solo si $0 < -K_1 \neq 2(1+K_2)$.

Por último, cuando $K_1^2 - 4K_0(1+K_2) > 0$, la función z resulta ser la de la expresión (1.21), en donde

$$\lambda_1 = \frac{-K_1 + \sqrt{K_1^2 - 4K_0(1+K_2)}}{2(1+K_2)}$$

y

$$\lambda_2 = \frac{-K_1 - \sqrt{K_1^2 - 4K_0(1+K_2)}}{2(1+K_2)}.$$

Así, para que se cumpla que $z_k > 0$ para todo $k \in I$, o bien $K_1 + 2(1+K_2) < 0$, o bien $K_1 + 2(1+K_2) > -K_1 > 0$ y $K_0 \geq 0$.

Por otro lado, cuando $1+K_2 > 0$, el Corolario 1.3 garantiza que el operador $\boldsymbol{T}_2[K_0, K_1, K_2]$ es fuertemente inverso negativo en Ω_N^2 si y solo si $1+K_0+K_1+K_2 < 0$ y la función z asociada al operador

$$\boldsymbol{T}_2\Big[\frac{K_0}{1+K_2}, \frac{K_1}{1+K_2}, 0\Big]$$

verifica que $z_k < 0$ para todo $k \in I$.

A partir del anterior análisis del signo de la función asociada al operador $\boldsymbol{T}_2[\lambda_1, \lambda_2, 0]$ se deduce que $z_k < 0$ para todo $k \in I$ si y solo si $K_1^2 - 4K_0(1+K_2) > 0$, $K_1 < 0$ y $K_0 \geq 0$. □

Observación 1.13. En caso de que $1+K_2 < 0$ y $1+K_0+K_1+K_2 > 0$, tenemos que el operador $\boldsymbol{T}_2[K_0, K_1, K_2]$ es fuertemente inverso positivo en Ω_N^2 si y solo si $K_1^2 - 4\,K_0\,(1+K_2) > 0$, $K_1 > 0$ y $K_0 \leq 0$.

Por otra parte, si $1+K_0+K_1+K_2 < 0$ el operador $\boldsymbol{T}_2[K_0, K_1, K_2]$ es fuertemente inverso negativo en Ω_N^2 si y solo si se verifica alguna de las siguientes condiciones:

(i) $K_1^2 - 4K_0(1+K_2) < 0$ y $\theta \in (0, \pi/N)$.

(ii) $K_1^2 - 4K_0(1+K_2) = 0$ y $0 < K_1 \neq -2(1+K_2)$.

(iii) $K_1^2 - 4K_0(1+K_2) > 0$, $2(1+K_2) + K_1 < 0$, $K_1 > 0$ y $K_0 \leq 0$.

(iv) $K_1^2 - 4K_0(1+K_2) > 0$ y $2(1+K_2) + K_1 > 0$.

Para ecuaciones de orden superior solo se han obtenido resultados parciales. En [32, Lemas 2.3 y 2.4] se estudia un problema de orden n utilizando el hecho de que la composición de operadores inverso positivos, definidos en conjuntos apropiados, es también un operador inverso positivo, y expresando dicho operador como la composición de operadores inverso positivos de primer y segundo orden.

Definición 1.10. Dados m, n números naturales positivos tales que $m + n \leq N$, y dados $K_0, \dots, K_n$ y $L_0, \dots, L_m$ números reales, denominaremos *composición* de los operadores $\boldsymbol{T}_n[K_0, \dots, K_n]$ y $\boldsymbol{T}_m[L_0, \dots, L_m]$ al operador

$$\boldsymbol{T}_n[K_0, \dots, K_n] \circ \boldsymbol{T}_m[L_0, \dots, L_m] : \Omega_N^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^N, \tag{1.24}$$

definido por

$$\boldsymbol{T}_n[K_0, \dots, K_n] \circ \boldsymbol{T}_m[L_0, \dots, L_m]\boldsymbol{u} := \boldsymbol{T}_n[K_0, \dots, K_n]\big(\boldsymbol{T}_m[L_0, \dots, L_m]\boldsymbol{u}\big).$$

Observación 1.14. Tomando $n < r \leq N$, es posible relacionar biunívocamente los elementos del conjunto Ω_N^n (puede interpretarse que $\mathbb{R}^N \equiv \Omega_N^0$) con los del conjunto Ω_N^r, de la siguiente manera:

A cada elemento

$$(x_0, \dots, x_n, \dots, x_r, \dots, x_{N-1}, x_0, \dots, x_{n-1})$$

de Ω_N^n le corresponde el elemento

$$(x_0, \dots, x_n, \dots, x_r, \dots, x_{N-1}, x_0, \dots, x_{n-1}, \dots, x_{r-1})$$

de Ω_N^r.

De este modo, la definición del operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \dots, K_n]$ puede ser generalizada extendiendo su dominio al conjunto Ω_N^r, e interpretar aquel como un operador

$$\boldsymbol{T}_n[K_0, \dots, K_n] : \Omega_N^r \longrightarrow \Omega_N^{r-n}.$$

A partir de estas consideraciones, está claro que la composición de operadores (1.24) está bien definida.

Observación 1.15. Igual que hemos generalizado la definición del operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \dots, K_n]$, podemos generalizar las definiciones de operador inverso positivo (inverso negativo) y fuertemente inverso positivo (fuertemente inverso negativo) a los nuevos operadores. Así, dado $n < r \leq N$, resulta evidente que el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \dots, K_n]$ es inverso positivo (inverso negativo) en Ω_N^r si y solo si lo es en Ω_N^n, y lo mismo ocurre si el operador es fuertemente inverso positivo o fuertemente inverso negativo.

Estamos ahora en condiciones de generalizar el Lema 2.1 de [32].

Lema 1.2. *Si el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0,\dots,K_n]$ es fuertemente inverso positivo en el espacio Ω_N^n, mientras que el operador $\boldsymbol{T}_m[M_0,\dots,M_m]$ es fuertemente inverso positivo (fuertemente inverso negativo) en Ω_N^m, entonces el operador composición $\boldsymbol{T}_n[K_0,\dots,K_n]\circ\boldsymbol{T}_m[M_0,\dots,M_m]$ es fuertemente inverso positivo (fuertemente inverso negativo) en Ω_N^{n+m}. Además, si ambos operadores, $\boldsymbol{T}_n[K_0,\dots,K_n]$ y $\boldsymbol{T}_m[M_0,\dots,M_m]$, son fuertemente inverso negativos en, respectivamente, Ω_N^n y Ω_N^m, entonces el operador composición $\boldsymbol{T}_n[K_0,\dots,K_n]\circ\boldsymbol{T}_m[M_0,\dots,M_m]$ es fuertemente inverso positivo en Ω_N^{n+m}.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{u}\in\Omega_N^{n+m}$ tal que

$$\boldsymbol{T}_n[K_0,\dots,K_n]\circ\boldsymbol{T}_m[M_0,\dots,M_m]\boldsymbol{u}>\boldsymbol{0}.$$

Atendiendo a la Observación 1.14, sabemos que $\boldsymbol{T}_m[M_0,\dots,M_m]\boldsymbol{u}\in\Omega_N^n$ y, al ser $\boldsymbol{T}_n[K_0,\dots,K_n]$ fuertemente inverso positivo en Ω_N^n, necesariamente se cumple que $\boldsymbol{T}_m[M_0,\dots,M_m]\boldsymbol{u}\gg\boldsymbol{0}$.

Como $\boldsymbol{T}_m[M_0,\dots,M_m]$ es fuertemente inverso positivo en Ω_N^m, también lo es en Ω_N^{n+m} —Observación 1.15— y, por consiguiente, $\boldsymbol{u}\gg\boldsymbol{0}$. □

A continuación, siguiendo las ideas expuestas en [32, Lemas 2.3 y 2.4], presentamos un resultado general que nos permite, en función de las raíces del polinomio característico, asegurar que la función de Green es positiva. En la demostración haremos uso del siguiente lema y la observación adjunta, que son una modificación, respectivamente, de [31, Teorema 4.1] y [31, Observación 4.1].

Lema 1.3. *Sean $K_0,\dots,K_n$ números reales tales que $1+K_n>0$ y $1+\sum_{i=0}^n K_i>0$. Sean $L_0,\dots,L_n$ números reales tales que $L_i\geq K_i$ para todo $i\in\{0,\dots,n\}$. Supongamos que el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0,\dots,K_n]$ no es fuertemente inverso positivo en Ω_N^n, entonces el operador $\boldsymbol{T}_n[L_0,\dots,L_n]$ no es fuertemente inverso positivo en Ω_N^n.*

Observación 1.16. En caso de que $1+L_n>0$ y $1+\sum_{i=0}^n K_i<0$, si reemplazamos la condición $L_i\geq K_i$ para todo $i\in\{0,\dots,n\}$ por $L_i\leq K_i$ para todo $i\in\{0,\dots,n\}$, el lema anterior es válido para operadores fuertemente inverso negativos.

Teorema 1.5. *Sean $K_0,\dots,K_n,L_0,\dots,L_n$ números reales tales que $1+K_n>0$ y $1+\sum_{i=0}^n K_i>0$. Sean $\lambda_s\in\mathbb{R}$, con $s\in\{1,\dots,k\}$ y $0\leq k\leq n$, y $r_s(\cos\theta_s\pm i\operatorname{sen}\theta_s)$, con $s\in\{1,\dots,j\}$, $0\leq j\leq n/2$ y $k+j=n$, las raíces del polinomio*

$$p(\lambda)=(1+L_n)\lambda^n+L_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+L_1\lambda+L_0.$$

Supongamos que:

(i) $r_s > 0$ *y* $\theta_s \in (0, \pi/N)$ *para todo* $s \in \{1, \ldots, j\}$.

(ii) *Existe un número par* $0 \leq m \leq k$ *tal que* $\lambda_s > 1$ *para todo* $s \in \{1, \ldots, m\}$ *y* $\lambda_s \in (0,1)$ *para todo* $s \in \{m+1, \ldots, k\}$.

Entonces el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$ *es fuertemente inverso positivo en* Ω_N^n *siempre que* $K_i \leq L_i$ *para todo* $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Demostración. Es sencillo comprobar que el operador $\boldsymbol{T}_n[L_0, \ldots, L_n]$ puede descomponerse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_n[L_0, \ldots, L_n] = (1+L_n)\, \boldsymbol{T}_1[-\lambda_1, 0] \circ \cdots \circ \boldsymbol{T}_1[-\lambda_m, 0] \circ \boldsymbol{T}_1[-\lambda_{m+1}, 0] \circ \cdots \circ \\ \boldsymbol{T}_1[-\lambda_k, 0] \circ \boldsymbol{T}_2[r_1^2, -2\, r_1 \cos\theta_1, 0] \circ \cdots \circ \boldsymbol{T}_2[r_j^2, -2\, r_j \cos\theta_j, 0].\end{aligned}$$

La Proposición 1.1 nos asegura que los operadores $\boldsymbol{T}_1[-\lambda_s, 0]$ son fuertemente inverso negativos siempre que $s \in \{1, \ldots, m\}$, y fuertemente inverso positivos si $s \in \{m+1, \ldots, k\}$. Además, por la Proposición 1.2 sabemos que los operadores $\boldsymbol{T}_2[r_s^2, -2\, r_s \cos\theta_s, 0]$ son fuertemente inverso positivos para $s \in \{1, \ldots, j\}$. Así, sin más que aplicar el Lema 1.2, y teniendo en cuenta que $1+L_n \geq 1+K_n > 0$, deducimos que el operador $\boldsymbol{T}_n[L_0, \ldots, L_n]$ es fuertemente inverso positivo en Ω_N^n.

Ahora, utilizando el Lema 1.3, como $1 + \sum_{i=0}^n K_i > 0$ y $1 + K_n > 0$, esta propiedad sigue siendo válida para el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$. □

Observación 1.17. Como consecuencia de la Observación 1.16, si en el enunciado del teorema anterior cambiamos $1 + K_n > 0$ por $1 + L_n > 0$, $1 + \sum_{i=0}^n K_i > 0$ por $1 + \sum_{i=0}^n K_i < 0$ y m par por m impar, entonces el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$ es fuertemente inverso negativo en Ω_N^n siempre que $K_i \geq L_i$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Observación 1.18. Reemplazando $1+K_n > 0$ por $1+L_n < 0$ y m par por m impar en el enunciado del Teorema 1.3, sin más que aplicar la Observación 1.17 al operador $-\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$, se deduce que el operador $\boldsymbol{T}_n[K_0, \ldots, K_n]$ también es fuertemente inverso positivo en Ω_N^n siempre que $K_i \leq L_i$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Ejemplo 1.2. El siguiente operador de orden 5:

$$\begin{aligned}T_5[L_0, \ldots, L_5]u_k \equiv 4u_{k+5} - (16 + 4\sqrt{3})u_{k+4} + (23 + 16\sqrt{3})u_{k+3} \\ - (22 + 19\sqrt{3})u_{k+2} + (19 + 6\sqrt{3})u_{k+1} - 6u_k,\end{aligned}$$

es fuertemente inverso positivo en Ω_5^5.

Es sencillo verificar que $1 + \sum_{i=1}^5 L_i = 2 - \sqrt{3} > 0$, $1 + L_5 = 4 > 0$, y que el polinomio característico asociado al operador puede escribirse como

$$p(\lambda) = 4(\lambda - 2)\Big(\lambda - \frac{3}{2}\Big)\Big(\lambda - \frac{1}{2}\Big)\Big(\big(\lambda - \cos\frac{\pi}{6}\big)^2 + \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{6}\Big).$$

Por lo tanto, el polinomio característico tiene tres raíces reales,

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_3 = \frac{1}{2},$$

y dos raíces complejas conjugadas,

$$\lambda_4 = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad \lambda_5 = \cos\frac{\pi}{6} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}.$$

Debido a que $\pi/6 \in (0, \pi/5)$, está claro que podemos aplicar el Teorema 1.5 para deducir que el operador $\boldsymbol{T}_5[L_0, \ldots, L_5]$ es fuertemente inverso positivo en Ω_5^5.

Además, cada operador $\boldsymbol{T}_5[K_0, \ldots, K_5]$ de orden 5 que verifique $1 + K_5 > 0$, $1 + \sum_{i=1}^{5} K_i > 0$ y $K_0 \leq -6$, $K_1 \leq 19 + 6\sqrt{3}$, $K_2 \leq -22 - 19\sqrt{3}$, $K_3 \leq 23 + 16\sqrt{3}$, $K_4 \leq -16 - 4\sqrt{3}$ y $K_5 \leq 4$, es fuertemente inverso positivo en Ω_5^5.

Observación 1.19. Dado que $\pi/6 \in (0, \pi/6]$, podemos asegurar —como puede verse en [31, secciones 6.2 y 6.3]— que el operador del anterior ejemplo es inverso positivo en el espacio Ω_6^5. Sin embargo, el Teorema 1.5 no garantiza que sea fuertemente inverso positivo en Ω_6^5, aunque, como este teorema únicamente proporciona condiciones suficientes, tampoco garantiza lo contrario. Para saber si ese operador es o no fuertemente inverso positivo en Ω_6^5, hemos de obtener la expresión de la función de Green asociada y realizar un estudio de su signo.

1.4. Casos particulares

En esta sección, con el objetivo de obtener resultados que garanticen la existencia de soluciones positivas de determinados problemas de valores de frontera periódicos —tanto de primer y segundo orden como de orden superior—, haremos uso de los resultados previamente obtenidos, junto con algunos de los argumentos utilizados en [32] para ciertos operadores periódicos de orden n.

De aquí en adelante, a lo largo de todo el trabajo, denotaremos

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k,$$
$$\Delta^l x_k = \Delta(\Delta^{l-1} x_k),$$

para todo $k \in I$ y $l \in \{2, \ldots, n\}$.

Además, durante toda la sección, reescribiremos la hipótesis (H_4) de la siguiente manera:

$$(F_0) \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(k,x)}{x} = \infty \quad \text{para todo } k \in I.$$

1.4.1. Problemas de primer orden

En primer lugar vamos a estudiar el problema explícito de primer orden, que aparece en el desarrollo del conocido método de Euler para calcular aproximaciones de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\Delta x_k = f(k, x_k), \quad k \in I, \quad x_0 = x_N. \tag{1.25}$$

Por la Proposición 1.1 sabemos que el operador

$$\boldsymbol{T}_1[M-1,0]\, x_k \equiv \Delta\, x_k + M\, x_k$$

es fuertemente inverso positivo en Ω_N^1 si y solo si $M \in (0,1)$.

A partir de ahí, llegamos al siguiente resultado de existencia para el problema (1.25).

Teorema 1.6. *Supongamos que se cumplen tanto la hipótesis* (F_0) *como las siguientes condiciones:*

1. *Existe* $M \in (0,1)$ *tal que* $f(k,x) + M\,x$ *es mayor o igual que cero y creciente para todo* $k \in I$ *y* $x \geq 0$.

2. *Existe* $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega_N^1$, *tal que* $\bar{\boldsymbol{x}} \gg \mathbf{0}$ *y* $\Delta \bar{x}_k \geq f(k, \bar{x}_k)$ *para todo* $k \in I$.

Entonces el problema (1.25) *tiene al menos una solución* $\boldsymbol{x} \in \Omega_N^1$ *tal que* $\boldsymbol{x} \gg \mathbf{0}$.

Demostración. Para cada $M \in (0,1)$ dado, el problema (1.25) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{T}_1[M-1,0]x_k = f(k,x_k) + Mx_k \equiv g(k,x_k), \quad k \in I, \quad x_0 = x_N.$$

La condición (H_0) se cumple, ya que el operador $\boldsymbol{T}_1[M-1,0]$ es fuertemente inverso positivo en Ω_N^1. Claramente g verifica (H_1), (H_2) y (H_4), y $\bar{\boldsymbol{x}}$ es una sobresolución positiva del problema considerado. Entonces, a consecuencia del Teorema 1.3, podemos garantizar la existencia de una solución, con todas sus componentes positivas, del problema (1.25). □

Ejemplo 1.3. El siguiente problema

$$\Delta x_k = x_k^{k+2} - \frac{k}{k+1}\operatorname{sen} x_k, \quad k \in I = \{0,1,2\}, \quad x_0 = x_3,$$

tiene una solución $\boldsymbol{x} \in \Omega_3^1$ con todas sus componentes positivas.

Demostración. Este problema es un caso particular del problema (1.25), tomando
$$f(k,x) = x^{k+2} - \frac{k}{k+1}\operatorname{sen} x,$$
y $N = 3$.

Por lo tanto,
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(k,x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(x^{k+1} - \frac{k}{k+1}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \infty$$
para todo $k \in I$.

Tomando $M = 2/3$ tenemos que
$$f(k,x) + Mx = x^{k+2} - \frac{k}{k+1}\operatorname{sen} x + \frac{2x}{3},$$
y no es difícil comprobar que la función $f(k,x)+Mx$ no toma valores negativos y es creciente para todo $k \in I$ y $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+$.

Por último, puede verificarse que
$$\bar{\boldsymbol{x}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{776 - 729\operatorname{sen}\left(\frac{4}{9}\right)}{1458}, \frac{1}{3}\right)$$
es una sobresolución (tal que $\bar{\boldsymbol{x}} \gg \mathbf{0}$) para este problema.

El Teorema 1.6 garantiza la existencia de una solución, sin componentes negativas ni iguales a cero, para este problema. □

A continuación consideraremos el caso implícito,
$$\Delta x_k = f(k, x_{k+1}), \quad k \in I, \quad x_0 = x_N. \tag{1.26}$$

La Proposición 1.1 muestra que el operador
$$\boldsymbol{T}_1[-1, M]\, x_k \equiv \Delta\, x_k + M\, x_{k+1}$$
es fuertemente inverso positivo en Ω_N^1 si y solo si $M > 0$.

Con argumentos análogos a los utilizados en la demostración del teorema anterior, podemos obtener el siguiente resultado para el problema (1.26).

Teorema 1.7. *Supongamos que se cumplen tanto la hipótesis (F_0) como las siguientes condiciones:*

1. *Existe $M > 0$ tal que $f(k,x) + M\,x$ es mayor o igual que cero y creciente para todo $k \in I$ y $x \geq 0$.*

2. *Existe $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega_N^1$ tal que $\bar{\boldsymbol{x}} \gg \mathbf{0}$ y $\Delta\bar{x}_k \geq f(k, \bar{x}_{k+1})$ para todo $k \in I$.*

Entonces el problema (1.26) *tiene al menos una solución* $\boldsymbol{x} \in \Omega_N^1$ *tal que* $\boldsymbol{x} \gg \mathbf{0}$.

Ejemplo 1.4. El problema

$$\Delta x_k = x_{k+1}^2 - k\, x_{k+1}, \quad k \in I = \{0,1,2\}, \quad x_0 = x_3,$$

tiene, al menos, una solución con todas sus componentes positivas.

Demostración. Este problema es un caso particular del problema (1.26) tomando $f(k,x) = x^2 - k\,x$ y $N = 3$.

Así que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(k,x)}{x} = \lim_{x\to\infty} (x-k) = \infty$$

para todo $k \in I$.

Por otra parte, tomando $M = 2$, tenemos que la función

$$f(k,x) + Mx = x^2 + (2-k)x$$

no toma valores negativos y es creciente para todo $k \in I$ y $x \geq 0$.

Para finalizar, no es complicado comprobar que

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

es una sobresolución, con todas sus componentes positivas, de este problema.

Por consiguiente, la existencia de una solución $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ (con $\boldsymbol{x} \gg \mathbf{0}$) del problema tratado es una consecuencia directa del Teorema 1.7. □

Consideremos ahora los siguientes problemas:

$$-\Delta x_k = f(k, x_k), \quad k \in I, \quad x_0 = x_N, \tag{1.27}$$

y

$$-\Delta x_k = f(k, x_{k+1}), \quad k \in I, \quad x_0 = x_N. \tag{1.28}$$

A tenor de lo expuesto en la Observación 1.12, sabemos que el operador

$$\boldsymbol{T}_1[M+1, -2] \equiv -\Delta x_k + M x_k$$

es fuertemente inverso positivo en Ω_N^1 si y solo si $M > 0$, mientras que el operador

$$\boldsymbol{T}_1[1, M-2] \equiv -\Delta x_k + M x_{k+1}$$

es fuertemente inverso positivo en Ω_N^1 si y solo si $M \in (0,1)$.

Por lo tanto, razonando del mismo modo que en la demostración del Teorema 1.6, podemos establecer los resultados que se enuncian a continuación.

Teorema 1.8. *Supongamos que se cumplen tanto la hipótesis* (F_0) *como las siguientes condiciones:*

1. *Existe* $M > 0$ *tal que* $f(k, x) + M\, x$ *es mayor o igual que cero y creciente para todo* $k \in I$ *y* $x \geq 0$.

2. *Existe* $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega_N^1$, *tal que* $\bar{\boldsymbol{x}} \gg \mathbf{0}$ *y* $-\Delta \bar{x}_k \geq f(k, \bar{x}_k)$ *para todo* $k \in I$.

Entonces el problema (1.27) *tiene al menos una solución con todas sus componentes positivas.*

Teorema 1.9. *Supongamos que se cumplen tanto la hipótesis* (F_0) *como las siguientes condiciones:*

1. *Existe* $M \in (0, 1)$ *tal que* $f(k, x) + M\, x$ *es mayor o igual que cero y creciente para todo* $k \in I$ *y* $x \geq 0$.

2. *Existe* $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega_N^1$, *tal que* $\bar{\boldsymbol{x}} \gg \mathbf{0}$ *y* $-\Delta \bar{x}_k \geq f(k, \bar{x}_{k+1})$ *para todo* $k \in I$.

Entonces el problema (1.28) *tiene al menos una solución con todas sus componentes positivas.*

1.4.2. Problemas de segundo orden

Prestaremos ahora atención a los siguientes problema de segundo orden:

$$\Delta^2 x_k = f(k, x_k), \quad k \in I, \quad x_i = x_{N+i}, \quad i \in \{0, 1\}, \tag{1.29}$$

$$\Delta^2 x_k = f(k, x_{k+1}), \quad k \in I, \quad x_i = x_{N+i}, \quad i \in \{0, 1\}, \tag{1.30}$$

y

$$\Delta^2 x_k = f(k, x_{k+2}), \quad k \in I, \quad x_i = x_{N+i}, \quad i \in \{0, 1\}. \tag{1.31}$$

Sin más que aplicar la Proposición 1.2, sabemos que se verifican las siguientes propiedades:

1. El operador $\boldsymbol{T}_2[M_0 + 1, -2, 0]\, x_k \equiv \Delta^2\, x_k + M_0\, x_k$ es fuertemente inverso positivo en Ω_N^2 si y solo si $M_0 \in (0, \tan^2 \frac{\pi}{N})$.

2. El operador $\boldsymbol{T}_2[1, M_1 - 2, 0]\, x_k \equiv \Delta^2\, x_k + M_1\, x_{k+1}$ es fuertemente inverso positivo en Ω_N^2 si y solo si $M_1 \in (0, 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2N})$.

3. El operador $\boldsymbol{T}_2[1, -2, M_2]\, x_k \equiv \Delta^2\, x_k + M_2\, x_{k+2}$ es fuertemente inverso positivo en Ω_N^2 si y solo si $M_2 \in (0, \tan^2 \frac{\pi}{N})$.

Por lo tanto, al igual que obtuvimos el Teorema 1.6, podemos obtener los siguientes resultados:

Teorema 1.10. *Supongamos que se cumplen tanto la hipótesis* (F_0) *como las siguientes condiciones:*

1. *Existe* $M \in (0, \tan^2 \frac{\pi}{N})$ *tal que* $f(k,x) + M\,x$ *es mayor o igual que cero y creciente para todo* $k \in I$ *y* $x \geq 0$.

2. *Existe* $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega_N^2$, *tal que* $\bar{\boldsymbol{x}} \gg \mathbf{0}$ *y* $\Delta^2 \bar{x}_k \geq f(k, \bar{x}_k)$ *para todo* $k \in I$.

Entonces el problema (1.29) *tiene una solución con todas sus componentes positivas.*

Teorema 1.11. *Supongamos que se cumplen tanto la hipótesis* (F_0) *como las siguientes condiciones:*

1. *Existe* $M \in (0, 4\,\sin^2 \frac{\pi}{2\,N})$ *tal que* $f(k,x) + M\,x$ *es mayor o igual que cero y creciente para todo* $k \in I$ *y* $x \geq 0$.

2. *Existe* $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega_N^2$, *tal que* $\bar{\boldsymbol{x}} \gg \mathbf{0}$ *y* $\Delta^2 \bar{x}_k \geq f(k, \bar{\boldsymbol{x}}_{k+1})$ *para todo* $k \in I$.

Entonces el problema (1.30) *tiene una solución con todas sus componentes positivas.*

Teorema 1.12. *Supongamos que se cumplen tanto la hipótesis* (F_0) *como las siguientes condiciones:*

1. *Existe* $M \in (0, \tan^2 \frac{\pi}{N})$ *tal que* $f(k,x) + M\,x$ *es mayor o igual que cero y creciente para todo* $k \in I$ *y* $x \geq 0$.

2. *Existe* $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega_N^2$, *tal que* $\bar{\boldsymbol{x}} \gg \mathbf{0}$ *y* $\Delta^2 \bar{x}_k \geq f(k, \bar{x}_{k+2})$ *para todo* $k \in I$.

Entonces el problema (1.31) *tiene al menos una solución con todas sus componentes positivas.*

Ejemplo 1.5. El siguiente problema:

$$\Delta^2 x_k = x_{k+1} \log\left(x_{k+1} + \frac{k+1}{k+2}\right), \quad k \in \{0,1,2\},$$

$$x_0 = x_3, \quad x_1 = x(4),$$

tiene, por lo menos, una solución con todas sus componentes positivas.

Demostración. Este problema es un caso particular del problema (1.30) tomando $N = 3$ y

$$f(k,x) = x \log\left(x + \frac{k+1}{k+2}\right).$$

Es inmediato comprobar que la condición (F_0) se cumple.

Por otra parte, tomando $M = \log(2) < 1 = 4\operatorname{sen}^2(\pi/6)$, tenemos que $f(k,x) + Mx$ es mayor o igual que cero y creciente para todo $k \in I$ y $x \in \mathbb{R}_+$.

Asimismo, es sencillo verificar que $\bar{\boldsymbol{x}} = (1/4, \ldots, 1/4)$ es una sobresolución, con todas sus componentes positivas, de este problema.

Así pues, el Teorema 1.11 garantiza que este problema tiene, al menos, una solución con todas sus componentes positivas. □

Al considerar los problemas

$$-\Delta^2 x_k = f(k, x_k), \quad k \in I, \quad x_i = x_{N+i}, \quad i \in \{0,1\}, \tag{1.32}$$

$$-\Delta^2 x_k = f(k, x_{k+1}), \quad k \in I, \quad x_i = x_{N+i}, \quad i \in \{0,1\}, \tag{1.33}$$

y

$$-\Delta^2 x_k = f(k, x_{k+2}), \quad k \in I, \quad x_i = x_{N+i}, \quad i \in \{0,1\}, \tag{1.34}$$

como consecuencia de la Observación 1.13 sabemos que los operadores $-\Delta^2 x_k + Mx_k$, $-\Delta^2 x_k + Mx_{k+1}$ y $-\Delta^2 x_k + Mx_{k+2}$ son fuertemente inverso positivos en Ω_N^2 si y solo si $M \in (0,1]$, $M > 0$ y $M \in (0,1)$, respectivamente.

Debido a esto, podemos deducir los siguientes resultados:

Teorema 1.13. *Supongamos que se cumplen tanto la propiedad* (F_0) *como las siguientes:*

1. *Existe* $M \in (0,1]$ *tal que* $f(k,x) + M\,x$ *es mayor o igual que cero y creciente para todo* $k \in I$ *y* $x \geq 0$.

2. *Existe* $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega_N^2$, *tal que* $\bar{\boldsymbol{x}} \gg \mathbf{0}$ *y* $-\Delta^2 \bar{x}_k \geq f(k, \bar{x}_k)$ *para todo* $k \in I$.

Entonces el problema (1.32) *tiene al menos una solución con todas sus componentes positivas.*

Teorema 1.14. *Supongamos que se cumplen tanto la propiedad* (F_0) *como las siguientes:*

1. *Existe* $M > 0$ *tal que* $f(k,x) + M\,x$ *es mayor o igual que cero y creciente para todo* $k \in I$ *y* $x \geq 0$.

2. *Existe* $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega_N^2$, *tal que* $\bar{\boldsymbol{x}} \gg \mathbf{0}$ *y* $-\Delta^2 \bar{x}_k \geq f(k, \bar{x}_{k+1})$ *para todo* $k \in I$.

Entonces el problema (1.33) *tiene al menos una solución con todas sus componentes positivas.*

Teorema 1.15. *Supongamos que se cumplen tanto la propiedad* (F_0) *como las siguientes:*

1. *Existe* $M \in (0,1)$ *tal que* $f(k,x) + M\,x$ *es mayor o igual que cero y creciente para todo* $k \in I$ *y* $x \geq 0$.

2. *Existe* $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega_N^2$, *tal que* $\bar{\boldsymbol{x}} \gg \mathbf{0}$ *y* $-\Delta^2 \bar{x}_k \geq f(k, \bar{x}_{k+2})$ *para todo* $k \in I$.

Entonces el problema (1.34) *tiene al menos una solución con todas sus componentes positivas.*

1.4.3. Problemas de orden n

En esta subsección nos ocuparemos del siguiente problema general de orden n:

$$\Delta^n x_k = f(k, x_k), \quad k \in I, \quad x_i = x_{N+i}, \quad i \in \{0, \dots, n-1\}. \tag{1.35}$$

Por medio de argumentos similares a los utilizados en [32, Lema 2.3], y aplicando el Teorema 1.5 al operador $\Delta^n\, x_k + M\, x_k$, obtenemos el siguiente resultado:

Lema 1.4. *Sea* $M > 0$, *entonces el operador* $\Delta^n\, x_k + M\, x_k$ *es fuertemente inverso positivo en* Ω_N^n *siempre que se cumpla una de las siguientes condiciones:*

1. $n = 4p$, $p \in \{1, 2, \dots\}$ *y* $M < \left[\frac{\tan\frac{\pi}{N}}{\left(1+\tan\frac{\pi}{N}\right)\cos\frac{\pi}{n}}\right]^n$,

2. $n = 2 + 4p$, $p \in \{0, 1, \dots\}$ *y* $M < \left[\frac{\tan\frac{\pi}{N}}{1+\tan\frac{\pi}{N}\cos\frac{\pi}{n}}\right]^n$,

3. n *es impar y* $M < \left[\frac{\tan\frac{\pi}{N}}{\tan\frac{\pi}{N}\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{\pi}{2n}}\right]^n$.

Así que, al igual que en el Teorema 1.6, utilizando en este caso el Lema 1.4, obtenemos los siguientes resultados de existencia para el problema (1.35).

Teorema 1.16. *Sea* f *una función que satisfaga la condición* (F_0). *Supongamos que existe* $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega_N^n$ *tal que* $\bar{\boldsymbol{x}} \gg \mathbf{0}$ *y* $\Delta^n \bar{x}_k \geq f(k, \bar{x}_k)$ *para todo* $k \in I$, *y que se cumple una de las siguientes propiedades:*

1. $n = 4p$, $p \in \{1, 2, \dots\}$, $f(k,x) + Mx$ *es positiva y creciente para todo* $k \in I$, $x \geq 0$ *y algún* $0 < M < \left[\frac{\tan\frac{\pi}{N}}{\left(1+\tan\frac{\pi}{N}\right)\cos\frac{\pi}{n}}\right]^n$.

2. $n = 2+4\,p$, $p \in \{0, 1, \dots\}$, $f(k,x) + Mx$ *es positiva y creciente para todo* $k \in I$, $x \geq 0$ *y algún* $0 < M < \left[\frac{\tan\frac{\pi}{N}}{1+\tan\frac{\pi}{N}\cos\frac{\pi}{n}}\right]^n$.

3. *n es impar, $f(k,x) + Mx$ es positiva y creciente para todo para todo $k \in I$, $x \geq 0$ y algún $0 < M < \left[\frac{\tan\frac{\pi}{N}}{\tan\frac{\pi}{N}\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{\pi}{2n}}\right]^n$.*

Entonces el problema (1.35) *tiene al menos una solución positiva.*

Ejemplo 1.6. El problema

$$\Delta^4 x_k = \lambda\left(x_k^{k+3} - \frac{x_k^{k+2}}{k+2}\right), \quad k \in I = \{0,\dots,4\},$$
$$x_i = x_{5+i}, \quad i \in \{0,\dots,3\},$$

tiene al menos una solución positiva para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \lambda < 12\left[\frac{\tan\frac{\pi}{5}}{(1+\tan\frac{\pi}{5})\cos\frac{\pi}{4}}\right]^4 \approx 1,505136.$$

Demostración. Este es un caso particular del problema (1.35) tomando $n = 4$, $N = 5$ y

$$f(k,x) = \lambda\left(x^{k+3} - \frac{x^{k+2}}{k+2}\right).$$

Si $\lambda > 0$, entonces se cumple que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(k,x)}{x} = \lambda\lim_{x\to\infty}\left(x^{k+2} - \frac{x^{k+1}}{k+2}\right) = \infty$$

para todo $k \in I$.

Por otra parte, la función $h(x) \equiv f(k,x) + Mx$ es tal que, para todo $k \in I$, $h(0) = 0$ y $h'(x) = \lambda\big((k+3)x^{k+2} - x^{k+1}\big) + M$. Por lo tanto, siempre que

$$M \geq g(x) \equiv \lambda\big(-(k+3)x^{k+2} + x^{k+1}\big), \tag{1.36}$$

la función $f(k,x) + Mx$ es creciente y mayor o igual que cero en $\mathbb{R}_+$ para todo $k \in I$.

Puede comprobarse que la función g alcanza su máximo valor en $\mathbb{R}_+$ cuando

$$x = \frac{k+1}{(k+2)(k+3)}.$$

De este modo, tomando $M = \lambda/12$, la desigualdad previa (1.36) se cumple para todo $k \in I$. Además, a partir de nuestras hipótesis, tenemos que

$$M = \frac{\lambda}{12} < \left[\frac{\tan\frac{\pi}{5}}{(1+\tan\frac{\pi}{5})\cos\frac{\pi}{4}}\right]^4 \approx 0,125428.$$

Por último, es sencillo ver que

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \left(\frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{6}\right)$$

es una sobresolución, con todas sus componentes positivas, de este problema.

Entonces el Teorema 1.16 garantiza que este problema tiene una solución positiva para $0 < \lambda < 12 \left[\frac{\tan\frac{\pi}{5}}{(1+\tan\frac{\pi}{5})\cos\frac{\pi}{4}}\right]^4$. □

Consideraremos ahora el siguiente problema:

$$-\Delta^n x_k = f(k, x_k), \quad k \in I, x_i = x_{N+i}, i \in \{0, \ldots, n-1\}. \tag{1.37}$$

Sabemos —ver Observación 1.5— que el operador $-\Delta^n x_k + M x_k$ es fuertemente inverso positivo si y solo si el operador opuesto $\Delta^n x_k - M x_k$ es fuertemente inverso negativo. Así pues, podemos utilizar argumentos similares a los usados en la demostración de [32, Lema 2.4] para obtener, como consecuencia del Teorema 1.5, el siguiente resultado:

Lema 1.5. *Sea $M < 0$, entonces el operador $-\Delta^n x_k + M x_k$ es fuertemente inverso positivo en Ω_N^n a condición de que se verifique una de las siguientes propiedades:*

1. *$n = 4p$, $p \in \{1, 2, \ldots\}$ y $M < \left[\frac{\tan\frac{\pi}{N}}{1+\tan\frac{\pi}{N}\cos\frac{2\pi}{n}}\right]^n$,*

2. *$n = 2 + 4p$, $p \in \{0, 1, \ldots\}$ y $M < \left[\frac{\tan\frac{\pi}{N}}{\cos\frac{\pi}{n}+\tan\frac{\pi}{N}\cos\frac{2\pi}{n}}\right]^n$,*

3. *n impar y $M < \left[\frac{\tan\frac{\pi}{N}}{\tan\frac{\pi}{N}\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{\pi}{2n}}\right]^n$.*

De aquí, utilizando el Lema 1.5 y razonando como en la demostración del Teorema 1.6, puede deducirse el siguiente resultado de existencia para el problema (1.37):

Teorema 1.17. *Sea f una función que satisfaga la condición (F_0). Supongamos que existe $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega_N^n$ tal que $\bar{\boldsymbol{x}} \gg \mathbf{0}$ y $-\Delta^n \bar{x}_k \geq f(k, \bar{x}_k)$ para todo $k \in I$, y que se cumple una de las siguientes propiedades:*

1. *$n = 4p$, $p \in \{1, 2, \ldots\}$, $f(k, x) + Mx$ es positiva y creciente para todo $k \in I$, $x \geq 0$ y algún $0 < M < \left[\frac{\tan\frac{\pi}{N}}{1+\tan\frac{\pi}{N}\cos\frac{2\pi}{n}}\right]^n$.*

2. *$n = 2 + 4p$, $p \in \{0, 1, \ldots\}$, $f(k, x) + Mx$ es positiva y creciente para todo $k \in I$, $x \geq 0$ y algún $0 < M < \left[\frac{\tan\frac{\pi}{N}}{\cos\frac{\pi}{n}+\tan\frac{\pi}{N}\cos\frac{2\pi}{n}}\right]^n$.*

3. n es impar, $f(k,x)+Mx$ es positiva y creciente para todo $k \in I$, $x \geq 0$ y algún $0 < M < \left[\frac{\tan \frac{\pi}{N}}{\tan \frac{\pi}{N} cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{2n}}\right]^n$.

Entonces el problema (1.37) *tiene al menos una solución con todas sus componentes positivas.*

Ejemplo 1.7. El problema

$$-\Delta^4 x_k = \lambda \left(x_k^{k+3} - \frac{x_k^{k+2}}{k+2} \right), \quad k \in I = \{0, \dots, 4\},$$
$$x_i = x_{5+i}, \quad i \in \{0, \dots, 3\},$$

tiene una solución positiva para todo $0 < \lambda < 12 \tan^4 \frac{\pi}{5} \approx 3{,}34369$.

Demostración. Esta problema es un caso particular del problema (1.37) con $n = 4$, $N = 5$ y $f(k,x) = \lambda(x^{k+3} - x^{k+2}/(k+2))$. Estamos considerando los mismos valores de n, N y la misma función f del Ejemplo 1.6, así que f verifica la condición (F_0) y solo tenemos que comprobar que

$$M = \frac{\lambda}{12} < \left[\frac{\tan \frac{\pi}{5}}{1 + \tan \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{2}} \right]^4 = \tan^4 \frac{\pi}{5} \approx 0{,}27864,$$

que es una consecuencia directa de nuestra hipótesis.

Además,

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \left(\frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{6} \right)$$

es una sobresolución, con todas sus componentes positivas, de este problema.

Por todo ello, como consecuencia directa del Teorema 1.17, el problema tiene al menos una solución positiva para esos valores de λ. □

1.5. Algunas conclusiones

Hemos obtenido diversos resultados de existencia para ecuaciones en diferencias de orden n, en este caso combinando dos técnicas diferentes: el método de las sub y sobresoluciones junto con el clásico teorema de punto fijo en conos.

En esta situación hemos deducido la existencia de una solución asumiendo que existe al menos una sobresolución e imponiendo cierta condición sobre el crecimiento de la parte no lineal de la ecuación en el infinito.

Sin embargo, no hemos sido capaces de localizar la solución de manera más precisa, como es habitual cuando tenemos la presencia añadida de una subsolución, o alguna condición sobre el crecimiento de la parte no lineal en el inicio.

La localización de la solución es un tema interesante que podría —debería— ser estudiado en desarrollos futuros de esta teoría.

Como hemos visto a lo largo de este capítulo, el análisis del signo de la función de Green asociada a la ecuación es clave para la obtención de los resultados. El estudio de la expresión de dicha función de Green permitirá obtener mejores estimaciones sobre los valores del conjunto de parámetros $\{K_0, \ldots, K_n\}$ para los que la función tiene signo constante y, en consecuencia, deducir nuevos resultados de existencia de solución para los problemas no lineales considerados.

Capítulo 2

Ecuaciones en diferencias con máximo

Una ecuación diferencial del tipo:

$$x'(t) = f\big(t, x(t), \max_{t-h\le s\le t} x(s)\big), \quad t \in [0, T],$$

en donde $T > 0$, es un caso particular de ecuación funcional con retardo que se conoce como *ecuación con máximo*. En este tipo de ecuaciones, el comportamiento de una solución en un cierto instante t depende del valor máximo alcanzado por dicha solución en un intervalo previo $[t - h, t]$, donde $h > 0$ es un parámetro de retardo. Por esta razón sirven de modelo a numerosos procesos en Física, Ingeniería o Biología (ver, por ejemplo, [91, 105] y las referencias allí citadas).

En muchos procesos reales resulta interesante considerar el análogo discreto de la ecuación diferencial que se utiliza como modelo, lo que conduce a las ecuaciones en diferencias.

Estas ecuaciones discretas adquieren especial relevancia en el diseño de métodos numéricos para aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, la desigualdad

$$u_{k+1} + au_k + b \max_{l\in\{k-h,\ldots,k\}} u_l \le 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N},$$

conocida como desigualdad de Halanay discreta, que es protagonista del siguiente capítulo de esta tesis, fue utilizada en [81] para obtener resultados de estabilidad de ciertas discretizaciones de ecuaciones diferenciales con retardo.

A lo largo de este capítulo supondremos que $h, T \in \mathbb{N}$, con $h > 0$ y $T > 1$. Asimismo, denotaremos $I_h = \{-h + 1, \ldots, -1\}$, $I = \{0, \ldots, T - 1\}$ y $J = I_h \cup I = \{-h + 1, \ldots, T - 1\}$.

Dedicaremos nuestros esfuerzos al estudio del siguiente problema implícito:

$$\Delta u_k = f\left(k, u_{k+1}, \max_{l\in\{k-h+1,\ldots,k+1\}} u_l\right), \quad k \in I, \tag{2.1}$$

$$u_k = \varphi(k,u), \quad k \in I_h, \tag{2.2}$$

en donde $f \in \mathcal{C}(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $\varphi \in \mathcal{C}(I_h \times \mathbb{R}^{T+h}, \mathbb{R})$, cuyas soluciones son elementos $\boldsymbol{u} = (u_{-h+1}, \ldots, u_0, \ldots, u_T) \in \mathbb{R}^{T+h}$ que verifican (2.1) y (2.2).

En la Sección 2.1 presentaremos algunos resultados y definiciones imprescindibles para la comprensión del resto del capítulo.

En la Sección 2.2 se buscarán soluciones del problema que satisfagan condiciones de frontera funcionales —en general no lineales— del tipo $B(u_0, \boldsymbol{u}) = 0$, en donde $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{T+h} \to \mathbb{R}$ es una función continua. Obtendremos resultados de existencia de soluciones en presencia de un par de sub y sobresolución relacionadas. Dichos resultados están recogidos en [10].

En la Sección 2.3 se estudia el mismo problema pero con condiciones de frontera periódicas ($u_0 = u_T$). Se deducen resultados de comparación (principios del máximo) para dicho problema, y se desarrollan posteriormente el método monótono y el método de las sub y sobresoluciones, con el objetivo de construir sucesiones convergentes a las soluciones del problema. El estudio es análogo al que puede verse en [9].

2.1. Resultados previos

Los contenidos de esta sección han sido extraídos de [35].

Definición 2.1. Diremos que un conjunto parcialmente ordenado Y está *dirigido superiormente* si dados $y_1, y_2 \in Y$ existe $y_3 \in Y$ tal que $y_1 \leq y_3$ e $y_2 \leq y_3$.

La definición de conjunto *dirigido inferiormente* es análoga invirtiendo las desigualdades. Diremos que Y está *dirigido* si lo está tanto superior como inferiormente.

Definición 2.2. Se dirá que un conjunto parcialmente ordenado Y es un *retículo* si para todo $y_1, y_2 \in Y$ existen $\sup\{y_1, y_2\} \in Y$ e $\inf\{y_1, y_2\} \in Y$. Un retículo Y se dice *completo* si cada subconjunto no vacío tiene supremo e ínfimo en Y.

Definición 2.3. Dado un operador $\boldsymbol{T} : \mathcal{D} \subset \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, en donde $\mathcal{N}$ es un espacio normado ordenado, diremos que $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$ es el *punto fijo mínimo* de $\boldsymbol{T}$ si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ para todo $\boldsymbol{y} \in \mathcal{D}$ con $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$. El *punto fijo máximo* de $\boldsymbol{T}$ se define de modo similar invirtiendo la desigualdad. Llamaremos *puntos fijos* *extremos* de $\boldsymbol{T}$ tanto al punto fijo mínimo como al punto fijo máximo de $\boldsymbol{T}$, en el caso de que existan.

Teorema 2.1. ([35, Teorema 2.1]) *Sean $\mathcal{N}$ un espacio normado ordenado, $\mathcal{D} \subset \mathcal{N}$ un subconjunto no vacío, acotado, cerrado y convexo, y $\boldsymbol{T} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ un operador completamente continuo. Entonces el conjunto de puntos fijos de $\boldsymbol{T}$*

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{D} \,|\, \boldsymbol{T}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\},$$

es compacto y no vacío. Además:

i) Existe el punto fijo máximo (mínimo) de $\boldsymbol{T}$ si y solo si P está dirigido superiormente (inferiormente).

ii) Si P es un retículo entonces P es un retículo completo.

2.2. Condiciones de frontera no lineales

A lo largo de esta sección se estudiará el siguiente problema implícito de primer orden:

$$\Delta u_k = f\left(k, u_{k+1}, (\phi u)_{k+1}\right), \quad k \in I, \tag{2.3}$$

$$u_k = \varphi(k, u), \quad k \in I_h, \tag{2.4}$$

$$B(u_0, \boldsymbol{u}) = 0, \tag{2.5}$$

en donde $B \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{T+h}, \mathbb{R})$, y el operador $\boldsymbol{\phi} : \mathbb{R}^{T+h} \longrightarrow \mathbb{R}^{T+1}$ está definido por

$$(\phi u)_k := \max_{l \in \{k-h, \dots, k\}} u_l, \quad \text{para todo} \quad k \in \{0, \dots, T\}. \tag{2.6}$$

Una solución de este tipo de ecuaciones será un elemento de $\mathbb{R}^{T+h}$, $\boldsymbol{u} = (u_{-h+1}, \dots, u_0, \dots, u_T)$, que verifique (2.3), (2.4) y (2.5).

Para obtener resultados de existencia de solución, asumimos la existencia de un par de sub y sobresolución relacionadas, cuya definición es la siguiente.

Definición 2.4. Diremos que dos elementos $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{-h+1}, \dots, \alpha_0, \dots, \alpha_T)$ y $\boldsymbol{\beta} = (\beta_{-h+1}, \dots, \beta_0, \dots, \beta_T)$ de $\mathbb{R}^{T+h}$ son un par de *sub y sobresolución relacionadas* del problema (2.3)-(2.5) si $\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{\beta}$ en J,

$$\Delta\alpha_k \leq f(k, \alpha_{k+1}, (\phi\alpha)_{k+1}), \quad k \in I,$$
$$\Delta\beta_k \geq f(k, \beta_{k+1}, (\phi\beta)_{k+1}), \quad k \in I,$$
$$\alpha_k \leq \varphi(k, \alpha) \leq \varphi(k, \beta) \leq \beta_k, \quad k \in I_h$$

y

$$B(\alpha_0, \boldsymbol{u}) \leq 0 \leq B(\beta_0, \boldsymbol{u}), \quad \text{para todo} \quad \boldsymbol{u} \in [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]. \tag{2.7}$$

Observación 2.1. Cuando $B(\alpha_0, \cdot)$ y $B(\beta_0, \cdot)$ son decrecientes, entonces la ecuación (2.7) se transforma en

$$B(\alpha_0, \boldsymbol{\alpha}) \leq 0 \leq B(\beta_0, \boldsymbol{\beta}),$$

lo que provoca que puedan definirse los conceptos de subsolución y sobresolución de manera independiente, de hecho la subsolución y la sobresolución no están *relacionadas*.

En este grupo podemos considerar algunos casos particulares del problema (2.3)-(2.5), como el denominado *problema periódico* ($u_0 = u_T$), para el que

$$B(x, \boldsymbol{y}) = x - y_T,$$

o el *problema de condiciones de frontera multipunto* $\left(u_0 = \sum_{k=0}^{l} a_k\, u_{j_k}\right)$, para el que

$$B(x, \boldsymbol{y}) = x - \sum_{k=0}^{l} a_k\, y_{j_k},$$

con $a_k \geq 0$ y $\{j_k\}_{k=0}^{l} \subset J$.

Es importante observar que en este último caso también se están considerando las componentes con índice negativo de u.

Resaltaremos que el *problema de valor inicial* ($u_0 = c_0$) también está cubierto, definiendo, en este caso,

$$B(x, \boldsymbol{y}) = x - c_0,$$

con lo que $\alpha_0 \leq c_0 \leq \beta_0$.

La denominación *relacionadas* solo cobra sentido cuando $B(\alpha_0, \cdot)$ o $B(\beta_0, \cdot)$ no son decrecientes. Por ejemplo, si $B(\alpha_0, \cdot)$ y $B(\beta_0, \cdot)$ son crecientes, entonces la ecuación (2.7) puede escribirse de la siguiente manera:

$$B(\alpha_0, \boldsymbol{\beta}) \leq 0 \leq B(\beta_0, \boldsymbol{\alpha}).$$

Es el caso, entre otros, del *problema antiperiódico* ($u_0 = -u_T$), en el que

$$B(x, \boldsymbol{y}) = x + y_T.$$

Es importante resaltar que en este tipo de condiciones de frontera pueden aparecer casos no lineales como

$$u_0 = \max_{k \in J_0} u_k, \quad \text{con} \quad J_0 \subset J,$$

o

$$u_0 = \min_{k \in J_1} u_k, \quad \text{con} \quad J_1 \subset J,$$

o

$$u_0 = \sum_{k \in J_2} g_k(u_k), \quad \text{con} \quad J_2 \subset J,$$

eligiendo convenientemente las funciones g_k.

Advertimos que en estos tres casos, como en el antedicho caso del problema de condiciones de frontera multipunto, se están considerando también las componentes con índice negativo de $\boldsymbol{u}$.

Esta sección se desarrollará como se explica a continuación. En la Subsección 2.2.1 se prueba que el problema (2.3)-(2.5) tiene al menos una solución entre $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$. En la Subsección 2.2.2, suponiendo que la función B verifica algunas propiedades de monotonía, se prueba la existencia de soluciones extremas del problema considerado. Además, se desarrolla el método monótono, que nos permite calcular aproximaciones de dichas soluciones extremas. Por último, en la Subsección 2.2.3, exponemos algunos ejemplos que ilustran y explican los resultados obtenidos.

2.2.1. Existencia de soluciones

Probaremos ahora la existencia de soluciones para el problema (2.3)-(2.5). Se generalizan los resultados dados en [34] para el caso implícito sin retraso y condiciones de frontera no funcionales, en [23] para el caso sin retraso y en [9] para el problema periódico.

Obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2. *Supongamos que existe un par, $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$, de sub y sobresolución relacionadas del problema* (2.3)-(2.5). *Supongamos, además, que $B \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{T+h}, \mathbb{R})$, $f(k, \cdot, \cdot)$ es una función continua en el conjunto $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] \times [(\phi\alpha)_{k+1}, (\phi\beta)_{k+1}]$ para todo $k \in I$, y $\varphi(k, \cdot)$ es una función continua en $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ para todo $k \in I_h$.*

Si $f(k, x, \cdot)$ es creciente para cada $(k, x) \in I \times [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$ y $\varphi(k, \cdot)$ es también creciente para cada $k \in I_h$, entonces el problema (2.3)-(2.5) *tiene al menos una solución $\boldsymbol{u} \in [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$.*

Demostración. Consideremos el siguiente problema modificado:

$$\Delta u_k = f(k, \bar{u}_{k+1}, (\bar{\phi} u)_{k+1}), \quad k \in I, \tag{2.8}$$

$$u_k = \varphi(k, \bar{\boldsymbol{u}}), \quad k \in I_h, \tag{2.9}$$

$$u_0 = p(0, u_0 - B(u_0, \boldsymbol{u})), \tag{2.10}$$

en donde

$$p(k, r) = \text{máx}\,\{\alpha_k, \text{mín}\,\{r, \beta_k\}\}$$

para todo $k \in J$ y $r \in \mathbb{R}$, $\bar{\boldsymbol{u}}$ se define como $\bar{u}_k = p(k, u_k)$, y $\bar{\boldsymbol{\phi}} : \mathbb{R}^{T+h} \to \mathbb{R}^{T+1}$ está definido por $(\bar{\phi}u)_k = (\phi\bar{u})_k$ para todo $k \in \{0, \dots, T\}$.

Está claro que u es una solución del problema (2.8)-(2.10) si y solo si el vector $\boldsymbol{u} = col(u_{-h+1}, \dots, u_0, \dots, u_T)$ es una solución de la ecuación matricial

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}), \tag{2.11}$$

en donde $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden $T + h$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ -1, & \text{si } h + 1 \leq i = j + 1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ es el traspuesto del vector

$$\Big(\varphi(-h+1, \bar{u}), \dots, \varphi(-1, \bar{u}), p\big(0, u_0 - B(u_0, \boldsymbol{u})\big), \\ f\big(0, p(1, u_1), (\bar{\phi}u)_1\big), \dots, f\big(T-1, p(T, u_T), (\bar{\phi}u)_T\big)\Big).$$

Entonces, una solución de la ecuación (2.11) será una solución de la ecuación $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) \equiv \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}$, en la que $\boldsymbol{H}$ es claramente una función continua de $\mathbb{R}^{T+h}$ a $\mathbb{R}^{T+h}$. Debido a la definición de p, existe $K > 0$ tal que $\|\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}\|_\infty \leq K$. Por lo tanto, el teorema del punto fijo de Brower garantiza la existencia de un punto fijo de la función $\boldsymbol{H}$ y, como consecuencia directa de esto, la existencia de —al menos— una solución al problema (2.8)-(2.10).

Sea $\boldsymbol{u}$ una de tales soluciones. Supongamos que $\boldsymbol{u} \not\geq \boldsymbol{\alpha}$ en J.

Podemos deducir, a partir de la definición de p, que $\bar{\boldsymbol{u}} \in [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$. Ahora bien, el carácter creciente de $\varphi(k, \cdot)$ garantiza, pues, que $\alpha_k \leq u_k \leq \beta_k$ para todo $k \in I_h$.

Como $\alpha_0 \leq u_0$, resulta que $j_0 = \text{mín}\,\{j \in I \text{ tal que } \alpha_j > u_j\} \geq 1$. Es obvio que $\alpha_{j_0-1} \leq u_{j_0-1}$ y, consecuentemente, como $p(k, u(k)) \geq \alpha_k$ para todo $k \in J$ y f es creciente en la tercera variable, de las definiciones de $\boldsymbol{\phi}$ y $\bar{\boldsymbol{\phi}}$ se deduce que

$$\Delta u_{j_0-1} = f(j_0 - 1, \alpha_{j_0}, (\bar{\phi}u)_{j_0}) \geq f(j_0 - 1, \alpha_{j_0}, (\phi\alpha)_{j_0}) \geq \Delta\alpha_{j_0-1}.$$

Entonces, necesariamente $0 > u_{j_0} - \alpha_{j_0} \geq u_{j_0-1} - \alpha_{j_0-1} \geq 0$, y esto es una contradicción.

Si suponemos ahora que $\boldsymbol{u} \not\leq \boldsymbol{\beta}$ en J, razonando de manera similar, obtenemos de nuevo una contradicción. Por lo tanto, $\boldsymbol{u} \in [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$.

Si $u_0 - B(u_0, \boldsymbol{u}) < \alpha_0$, debido a la definición de la función p, sabemos que $u_0 = \alpha_0$ y, entonces, como $\boldsymbol{u} \in [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$, a partir de la condición (2.7), llegamos a la conclusión de que

$$\alpha_0 > \alpha_0 - B(\alpha_0, \boldsymbol{u}) \geq \alpha_0,$$

lo que resulta ser una contradicción.

La desigualdad $u_0 - B(u_0, \boldsymbol{u}) \le \beta_0$ se obtiene razonando de manera análoga.

Por lo tanto, cada solución $\boldsymbol{u}$ de (2.8)-(2.10) es también una solución de (2.3)-(2.5), y está en el intervalo $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$. □

Como consecuencia directa de este teorema, pueden probarse los siguientes corolarios.

Corolario 2.1. *Supongamos que existen $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ elementos de $\mathbb{R}^{T+h}$ tales que $\boldsymbol{\alpha} \le \boldsymbol{\beta}$ en J y verifican las siguientes desigualdades*

$$\Delta\alpha_k - f(k, \alpha_{k+1}, (\phi\alpha)_{k+1}) \le 0 \le \Delta\beta_k - f(k, \beta_{k+1}, (\phi\beta)_{k+1}), \quad k \in I$$

y

$$\alpha_k \le c_k \le \beta_k, \quad k \in \{-h+1, \dots, 0\}.$$

Si $f(k, \cdot, \cdot)$ es una función continua en $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] \times [(\phi\alpha)_{k+1}, (\phi\beta)_{k+1}]$ y $f(k, x, \cdot)$ es creciente para cada $(k, x) \in I \times [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$, entonces el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \Delta u_k &= f(k, u_{k+1}, (\phi u)_{k+1}), \quad k \in I, \\ u_k &= c_k, \quad k \in \{-h+1, \dots, 0\}, \end{aligned}$$

tiene al menos una solución $\boldsymbol{u} \in [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$.

Corolario 2.2. *Supongamos que existen $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ elementos de $\mathbb{R}^{T+h}$ tales que $\boldsymbol{\alpha} \le \boldsymbol{\beta}$ en J y verifican las siguientes desigualdades*

$$\Delta\alpha_k - f(k, \alpha_{k+1}, (\phi\alpha)_{k+1}) \le 0 \le \Delta\beta_k - f(k, \beta_{k+1}, (\phi\beta)_{k+1}), \quad k \in I,$$

$$\alpha_k \le \varphi(k, \alpha) \le \varphi(k, \beta) \le \beta_k, \quad k \in I_h,$$

$$\alpha_0 \le \alpha_T \quad y \quad \beta_0 \ge \beta_T.$$

Si $f(k, \cdot, \cdot)$ es una función continua en $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] \times [(\phi\alpha)_{k+1}, (\phi\beta)_{k+1}]$ tal que $f(k, x, \cdot)$ es creciente para cada $(k, x) \in I \times [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$ y $\varphi(k, \cdot)$ es una función continua en $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ tal que $\varphi(k, \cdot)$ es creciente para cada $k \in I$, entonces el problema periódico

$$\begin{aligned} \Delta u_k &= f(k, u_{k+1}, (\phi u)_{k+1}), \quad k \in I, \\ u_k &= \varphi(k, \boldsymbol{u}), \quad k \in I_h, \\ u_0 &= u_T, \end{aligned}$$

tiene al menos una solución $\boldsymbol{u} \in [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$.

Corolario 2.3. *Supongamos que existen* $\boldsymbol{\alpha}$ *y* $\boldsymbol{\beta}$ *elementos de* $\mathbb{R}^{T+h}$ *tales que* $\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{\beta}$ *en* J *y verifican las siguientes desigualdades*

$$\Delta\alpha_k - f(k, \alpha_{k+1}, (\phi\alpha)_{k+1}) \leq 0 \leq \Delta\beta_k - f(k, \beta_{k+1}, (\phi\beta)_{k+1}), \quad k \in I,$$

$$\alpha_k \leq \varphi(k, \alpha) \leq \varphi(k, \beta) \leq \beta_k, \quad k \in I_h,$$

$$\alpha_0 \leq -\beta_T \quad y \quad \beta_0 \geq -\alpha_T.$$

Si $f(k, \cdot, \cdot)$ *es una función continua en* $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] \times [(\phi\alpha)_{k+1}, (\phi\beta)_{k+1}]$ *tal que* $f(k, x, \cdot)$ *es creciente para cada* $(k, x) \in I \times [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$, *y* $\varphi(k, \cdot)$ *es una función continua en* $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ *tal que* $\varphi(k, \cdot)$ *es creciente para cada* $k \in I_h$, *entonces el problema antiperiódico*

$$\begin{aligned} \Delta u_k &= f(k, u_{k+1}, (\phi u)_{k+1}), \quad k \in I, \\ u_k &= \varphi(k, \boldsymbol{u}), \quad k \in I_h, \\ u_0 &= -u_T, \end{aligned}$$

tiene al menos una solución $\boldsymbol{u} \in [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$.

Siempre que $\varphi(k, \boldsymbol{u}) = u_0$ para todo $k \in I_h$, este último resultado es el mismo que [5, Corolario 2.1] para el caso sin retraso en el que f no dependa de la tercera variable.

2.2.2. Soluciones extremas

Mejoraremos ahora el resultado de existencia expuesto en la previa subsección en el caso particular de que $B(x, \cdot)$ sea una función decreciente para cada $x \in [\alpha_0, \beta_0]$, y que φ sea tal que $\varphi(k, \boldsymbol{u}) \equiv \varphi(k, u_0)$ para todo $k \in I_h$ (por lo que se considerará definida en $I_h \times \mathbb{R}$). Para ser precisos, probaremos que, bajo las hipótesis del Teorema 2.2, si B y φ verifican las citadas propiedades, entonces el problema (2.3)-(2.5) tiene las soluciones máxima y mínima en el intervalo $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$.

Definición 2.5. Diremos que $\boldsymbol{x}^*$ es la *solución máxima* en $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ del problema (2.3)-(2.5) si cualquier otra solución $\boldsymbol{y} \in [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ del problema (2.3)-(2.5) verifica que $\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}^*$. El concepto de *solución mínima* en $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ es similar, solo tenemos que cambiar el orden de la desigualdad en la definición. Denominaremos *soluciones extremas* tanto a la solución máxima como a la solución mínima.

Como hemos resaltado en la presentación del capítulo, este resultado podrá aplicarse, entre otros, al problema de valor inicial, al problema periódico y al problema de condiciones de frontera multipunto.

La condición sobre la monotonía de la función B es imprescindible. Podemos comprobarlo sin más que pensar acerca del siguiente problema de frontera antiperiódico, un caso particular del problema (2.3)-(2.5) en el que $B(x, \boldsymbol{u}) = x + u_T$ es estrictamente creciente en la segunda variable para cada $x \in [\alpha_0, \beta_0]$.

Ejemplo 2.1.

$$\Delta u_k = g(u_{k+1}), \quad k \in I, \quad u_k = u_0 = -u_T, \quad k \in I_h, \quad T \quad \text{impar}, \tag{2.12}$$

en donde la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como

$$g(x) := \begin{cases} 4 - 2x, & \text{si } x > 1, \\ 2\,x, & \text{si } |x| \le 1, \\ -2x - 4, & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

Es obvio que $\boldsymbol{\alpha} \equiv \mathbf{-2}$ y $\boldsymbol{\beta} \equiv \mathbf{2}$ son un par de sub y sobresolución relacionadas del problema (2.12). Entonces, el Teorema 2.2 asegura la existencia de al menos una solución de este problema, $\boldsymbol{u} \in [\mathbf{-2}, \mathbf{2}]$.

Sea $\boldsymbol{u}$ una solución de la ecuación

$$\Delta u_k = g(u_{k+1}), \quad k \in I.$$

Como $f(x) \equiv x - g(x)$ verifica las siguientes propiedades:

- f es estrictamente creciente en $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$,
- $f(x) = -x$ para todo $x \in [-1, 1]$,
- f es biyectiva en $(-\infty, -5/3) \cup (5/3, +\infty)$,
- $f[-5/3, 5/3] = [-1, 1]$,

podemos deducir que la ecuación $u_0 = f(x)$, con $u_0 \in (-1, 1)$, tiene exactamente tres soluciones, pero solo una de ellas está en el intervalo $(-1, 1)$, la que es igual a $-u_0$. Las otras dos soluciones son $x_1 = (u_0 + 4)/3 > 1$ y $x_2 = (u_0 - 4)/3 < -1$. No es difícil comprobar que las soluciones que empiezan en x_1 y x_2 son estrictamente monótonas.

Por otra parte, está claro que $f(x) = \pm 1$ si y solo si $x = u_1 = \mp 1$, o $x = v_1 = \mp 5/3$, y la solución que empieza en v_1 es estrictamente monótona.

Si $u_0 \in (1, 2]$, entonces $u_1 = (u_0 + 4)/3 > 1$ y, por recurrencia, podemos ver que $u_k > 1$ para todo $k \in J$, esto es, u no puede ser solución de (2.12).

De manera análoga puede verificarse que, si $u_0 \in [-2, -1)$, entonces las soluciones son estrictamente decrecientes.

Como consecuencia de esto, las únicas soluciones del problema (2.12) en el intervalo $[-2, 2]$ verifican que $u_0 \in [-1, 1]$. En este caso, puede comprobarse que $u_k = (-1)^k\, u_0$ son las únicas soluciones del problema (2.12), de lo que se deduce que este problema no tiene soluciones extremas en $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$. $\square$

En los trabajos [5, 23] pueden verse condiciones suficientes que aseguran la unicidad de solución, en esta ocasión para ecuaciones sin retraso, así como el desarrollo de métodos iterativos para aproximar tal solución. En [51] se obtienen resultados de existencia de solución, utilizando definiciones diferentes de subsolución y sobresolución.

Probaremos, ahora, la existencia de soluciones extremas.

Teorema 2.3. *En las hipótesis del Teorema 2.2, si* $B(u_0, \cdot)$ *es una función decreciente para cada* $u_0 \in [\alpha_0, \beta_0]$ *y* $\varphi(k, \boldsymbol{u}) \equiv \varphi(k, u_0)$ *para todo* $k \in I_h$, *entonces el problema* (2.3)-(2.5) *tiene soluciones extremas en* $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$.

Demostración. Por el Teorema 2.2 sabemos que el problema (2.3)-(2.5) tiene al menos una solución en $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$.

Tomemos $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$ dos soluciones del problema (2.3)-(2.5) en $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$, y definamos los vectores $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\delta}$ como $\gamma_k = \max\{x_{1_k}, x_{2_k}\}$ y $\delta_k = \min\{x_{1_k}, x_{2_k}\}$.

Veamos que $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\delta})$ es un par de sub y sobresolución relacionadas. Para calcular $\Delta\delta_k$, con $k \in I$, existen cuatro opciones:

- $x_{1_{k+1}} \geq x_{2_{k+1}} = \delta_{k+1}$ y $x_{1_k} \geq x_{2_k} = \delta_k$. Entonces
$$\Delta\delta_k = \Delta x_{2_k} = f(k, \delta_{k+1}, (\phi x_2)_{k+1}) \geq f(k, \delta_{k+1}, (\phi\delta)_{k+1}).$$

- $x_{2_{k+1}} \geq x_{1_{k+1}} = \delta_{k+1}$ y $x_{2_k} \geq x_{1_k} = \delta_k$. Entonces
$$\Delta\delta_k = \Delta x_{1_k} = f(k, \delta_{k+1}, (\phi x_1)_{k+1}) \geq f(k, \delta_{k+1}, (\phi\delta)_{k+1}).$$

- $x_{1_{k+1}} \geq x_{2_{k+1}} = \delta_{k+1}$ y $x_{2_k} \geq x_{1_k} = \delta_k$. Entonces
$$\Delta\delta_k = x_{2_{k+1}} - x_{1_k} \geq \Delta x_{2_k} = f(k, \delta_{k+1}, (\phi x_2)_{k+1}) \geq f(k, \delta_{k+1}, (\phi\delta)_{k+1}).$$

- $x_{2_{k+1}} \geq x_{1_{k+1}} = \delta_{k+1}$ y $x_{1_k} \geq x_{2_k} = \delta_k$. Entonces
$$\Delta\delta_k = x_{1_{k+1}} - x_{2_k} \geq \Delta x_{1_k} = f(k, \delta_{k+1}, (\phi x_1)_{k+1}) \geq f(k, \delta_{k+1}, (\phi\delta)_{k+1}).$$

Para los elementos con índice $k \in I_h$, puede ocurrir que $x_{1_0} \leq x_{2_0}$, y entonces $x_{1_k} = \varphi(k, x_{1_0}) \leq \varphi(k, x_{2_0}) = x_{2_k}$, o bien que $x_{1_0} > x_{2_0}$ y, por lo tanto, $x_{2_k} = \varphi(k, x_{2_0}) \leq \varphi(k, x_{1_0}) = x_{1_k}$. En cualquiera de los dos casos se obtiene que, para $k \in I_h$,

$$\alpha_k \leq \varphi(k, \alpha_0) \leq \varphi(k, \delta_0) = \begin{cases} \varphi(k, x_{1_0}) = x_{1_k} = \delta_k, & \text{si } x_{1_0} \leq x_{2_0}, \\ \varphi(k, x_{2_0}) = x_{2_k} = \delta_k, & \text{si } x_{1_0} > x_{2_0}. \end{cases}$$

Con respecto a las condiciones de frontera, caben dos posibilidades,

$$B(\delta_0, \alpha) = \begin{cases} B(x_{1_0}, \alpha) \geq B(x_{1_0}, x_1) = 0, \text{ si } x_{1_0} \leq x_{2_0}, \\ B(x_{2_0}, \alpha) \geq B(x_{2_0}, x_2) = 0, \text{ si } x_{1_0} > x_{2_0}. \end{cases}$$

Así que $B(\delta_0, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0$, y la desigualdad $B(\alpha_0, \boldsymbol{\delta}) \leq 0$ se debe a que $\boldsymbol{\alpha}$ es una subsolución del problema (2.3)-(2.5).

Acabamos de ver que $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\delta})$ es un par de sub y sobresolución relacionadas del problema (2.3)-(2.5). Así, utilizando de nuevo el Teorema 2.2, sabemos que existe una solución $\boldsymbol{u}_1$ del problema (2.3)-(2.5) en $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\delta}]$, por lo que $\boldsymbol{u}_1 \leq \boldsymbol{\delta} \leq \boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{u}_1 \leq \boldsymbol{\delta} \leq \boldsymbol{x}_2$. Entonces el conjunto de soluciones del problema (2.3)-(2.5) en $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ es dirigido inferiormente, y el Teorema 2.1 garantiza la existencia de una solución mínima.

Utilizando argumentos análogos puede verse que $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})$ es un par de sub y sobresolución relacionadas del problema (2.3)-(2.5), con lo que obtendríamos una solución $\boldsymbol{u}_2$ de tal problema en $[\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}]$ verificando $\boldsymbol{u}_2 \geq \boldsymbol{\gamma} \geq \boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{u}_2 \geq \boldsymbol{\gamma} \geq \boldsymbol{x}_2$. Por lo tanto el conjunto de soluciones del problema (2.3)-(2.5) en $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ es dirigido superiormente y existe una solución máxima. □

Ahora, podemos aproximar las soluciones extremas como se explica a continuación.

Teorema 2.4. *Supongamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 2.3 y, además, que existe una constante $m > 0$ tal que*

$$f(k, x, z) + mx \leq f(k, y, z) + my, \tag{2.13}$$

para todo $k \in I$, para todo $x, y \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$ con $x \leq y$ y para todo $z \in [(\phi\alpha)_{k+1}, (\phi\beta)_{k+1}]$.

Entonces existen dos sucesiones monótonas en $\mathbb{R}^{T+h}$, $\{\boldsymbol{\gamma}_n\}$ y $\{\boldsymbol{\delta}_n\}$, tales que $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma}_0 \leq \boldsymbol{\gamma}_n \leq \boldsymbol{\delta}_n \leq \boldsymbol{\delta}_0 = \boldsymbol{\beta}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que convergen (componente a componente) a las soluciones mínima y máxima del problema (2.3)-(2.5) *en* $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$*, respectivamente.*

Demostración. El Teorema 2.3 garantiza que existen $\boldsymbol{\xi} \leq \boldsymbol{\chi}$, las soluciones mínima y máxima del problema (2.3)-(2.5) en $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$.

Consideremos, para cada $\boldsymbol{\eta} \in [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$, el siguiente problema:

$$(P_\eta) \begin{cases} \Delta u_k = G_\eta(k, u_{k+1}, (\phi u)_{k+1}), \quad k \in I, \\ u_k = \varphi_\eta(k, u_0), \quad k \in I_h, \\ B_\eta(u_0, \boldsymbol{u}) = 0, \end{cases}$$

en donde

$$\begin{aligned} G_\eta(k,x,y) &= f(k,\eta_{k+1},(\phi\eta)_{k+1}) + m(\eta_{k+1}-x), \quad k\in I,\\ \varphi_\eta(k,x) &= \varphi(k,\eta_0), \quad k\in I_h,\\ B_\eta(x,\boldsymbol{y}) &= B(x,\boldsymbol{\eta}). \end{aligned}$$

Dado que f, φ y B verifican las hipótesis de regularidad y monotonía exigidas en el Teorema 2.3, está claro que G_η, φ_η y B_η, tal y como están definidas, también verifican tales hipótesis.

Veamos que $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son un par de sub y sobresolución del problema (P_η) para cada $\boldsymbol{\eta}\in[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$.

A partir de (2.13), debido a que $f(k,x,\cdot)$ es creciente para cada $(k,x)\in I\times[\alpha_{k+1},\beta_{k+1}]$, llegamos a

$$\begin{aligned} & G_\eta(k,\alpha_{k+1},(\phi\alpha)_{k+1}) - f(k,\alpha_{k+1},(\phi\alpha)_{k+1}) = \\ &\qquad f(k,\eta_{k+1},(\phi\eta)_{k+1}) + m(\eta_{k+1}-\alpha_{k+1}) - f(k,\alpha_{k+1},(\phi\alpha)_{k+1}) \geq \\ &\qquad\quad f(k,\eta_{k+1},(\phi\alpha)_{k+1}) + m(\eta_{k+1}-\alpha_{k+1}) - f(k,\alpha_{k+1},(\phi\alpha)_{k+1}) \geq 0, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\Delta\alpha_k \leq G_\eta(k,\alpha_{k+1},(\phi\alpha)_{k+1}), \quad k\in I, \tag{2.14}$$

e, igualmente,

$$\Delta\beta_k \geq G_\eta(k,\beta_{k+1},(\phi\beta)_{k+1}), \quad k\in I. \tag{2.15}$$

A su vez, como $\varphi(k,\cdot)$ es creciente y $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son un par de sub y sobresolución del problema (2.3)-(2.5), resulta que

$$\alpha_k \leq \varphi(k,\alpha_0) \leq \varphi(k,\eta_0) = \varphi_\eta(k,\alpha_0), \quad k\in I_h, \tag{2.16}$$

$$\beta_k \geq \varphi(k,\beta_0) \geq \varphi(k,\eta_0) = \varphi_\eta(k,\beta_0), \quad k\in I_h. \tag{2.17}$$

Asimismo, debido al carácter decreciente de $B(x,\cdot)$ para todo $x\in[\alpha_0,\beta_0]$, podemos ver que

$$B_\eta(\alpha_0,\boldsymbol{\alpha}) = B(\alpha_0,\boldsymbol{\eta}) \leq B(\alpha_0,\boldsymbol{\alpha}) \leq 0, \tag{2.18}$$

$$B_\eta(\beta_0,\boldsymbol{\beta}) = B(\beta_0,\boldsymbol{\eta}) \geq B(\beta_0,\boldsymbol{\beta}) \geq 0. \tag{2.19}$$

De (2.14), (2.16) y (2.18) se deduce que $\boldsymbol{\alpha}$ es una subsolución del problema (P_η) para cada $\boldsymbol{\eta}\in[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$, y de (2.15), (2.17) y (2.19), que $\boldsymbol{\beta}$ es una sobresolución de dicho problema.

Además, para todo $\boldsymbol{\eta} \leq \boldsymbol{\xi}$,

$$\begin{aligned}\Delta\xi_k &= f(k, \xi_{k+1}, (\phi\xi)_{k+1}) + m\xi_{k+1} - m\xi_{k+1} \\ &\geq f(k, \eta_{k+1}, (\phi\xi)_{k+1}) + m\eta_{k+1} - m\xi_{k+1} \\ &\geq f(k, \eta_{k+1}, (\phi\eta)_{k+1}) + m\big(\eta_{k+1} - \xi_{k+1}\big) \\ &= G_\eta(k, \xi_{k+1}, (\phi\xi)_{k+1}), \quad k \in I,\end{aligned}$$

como también

$$\xi_k = \varphi(k, \xi_0) \geq \varphi(k, \eta_0) = \varphi_\eta(k, \xi_0), \quad k \in I_h,$$

y

$$B_\eta(\xi_0, \boldsymbol{\xi}) = B(\xi_0, \boldsymbol{\eta}) \geq B(\xi_0, \boldsymbol{\xi}) = 0.$$

Acabamos de ver, entonces, que $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\xi}$ son un par de sub y sobresolución del problema (P_η) para todo $\boldsymbol{\eta} \in [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}]$ y, de igual manera, puede comprobarse que $\boldsymbol{\chi}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son un par de sub y sobresolución del problema (P_η) para todo $\boldsymbol{\eta} \in [\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\beta}]$.

Por lo tanto, el Teorema 2.3 garantiza la existencia de $\boldsymbol{\gamma}_1$, la solución mínima del problema (P_α) en $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}]$, y también nos permite definir, por recurrencia, $\boldsymbol{\gamma}_{n+1}$ como la solución mínima en $[\boldsymbol{\gamma}_n, \boldsymbol{\xi}]$ del problema (P_{γ_n}). Debido a esta definición, es evidente que la sucesión $\{\boldsymbol{\gamma}_n\}$ está acotada y es creciente en J y, como consecuencia, existe $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^{T+1}$ tal que

$$\psi_k = \lim_{n\to\infty} \gamma_{n_k}, \quad k \in J.$$

Dado que f, φ y B son continuas, no es difícil deducir que $\boldsymbol{\psi}$ es una solución del problema (2.3)-(2.5) y, sin más que tener en cuenta que $\boldsymbol{\psi} \in [\boldsymbol{\gamma}_n, \boldsymbol{\xi}]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, necesariamente $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\xi}$ es la solución mínima del problema (2.3)-(2.5) en $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$.

Si ahora tomamos $\boldsymbol{\delta}_1$ como la solución máxima del problema (P_β) en $[\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\beta}]$ y definimos, por recurrencia $\boldsymbol{\delta}_{n+1}$ como la solución máxima del problema (P_{δ_n}) en $[\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\delta}_n]$, podemos construir la solución máxima del problema (2.3)-(2.5) en $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ de forma similar a la construcción de la solución mínima. $\square$

Como hemos podido comprobar a lo largo de la demostración, la suposición de que la función f sea creciente es fundamental para deducir el resultado. De hecho, tal suposición no puede ser eliminada, como podemos ver en el ejemplo siguiente, en el que la función f es decreciente en la tercera variable y, a pesar de que verifica la condición (2.13) para cualquier $m > 0$, no existe solución entre un par de sub y sobresolución dado.

Ejemplo 2.2. Consideremos el siguiente problema, con $h = 2$,

$$\Delta u_k = -2(\phi u)_{k+1}, \quad k \in \{0, 1\}, \quad u_{-1} = u_0 = u_2.$$

Es sencillo constatar que la función constante igual a cero es la única solución de este problema. Ahora bien, $\boldsymbol{\alpha} = \{-1, -1, -1, -1\}$ y $\boldsymbol{\beta} = \{1, 1, -1, 0\}$ son, respectivamente, una subsolución y una sobresolución del problema que verifican $\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{\beta}$ en J. Sin embargo, no existe solución en $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$. □

Observación 2.2. Como hemos advertido previamente, los resultados obtenidos hasta el momento para el problema (2.3)-(2.5) son también válidos para el problema periódico. Cuando la función f no tiene dependencia de la tercera variable, el Teorema 2.4, aplicado al problema periódico con $\varphi(k, u_0) = u_0$ para todo $k \in I_h$, está probado en [31].

Para concluir esta subsección, proporcionamos un resultado de existencia para el problema periódico en el que la hipótesis (2.13) es reemplazada por una más fuerte, eso sí, con la ventaja de no tener que comprobar, en cada caso, la existencia de un par de sub y sobresolución. Este resultado es el siguiente.

Teorema 2.5. *Supongamos que, para todo $k \in I_h$, $\varphi(k, \cdot)$ es una función creciente y continua en $\mathbb{R}$. Supongamos también que, para todo $k \in I$, $f(k, \cdot, \cdot)$ es una función continua en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, existe $M > 0$ tal que $f(k, \xi, \tau) + M\,\xi$ es decreciente in ξ, creciente en τ y que*

$$\inf_{x \leq 0} f(k, 0, x) > -\infty \quad y \quad \sup_{x \geq 0} f(k, 0, x) < \infty. \tag{2.20}$$

Entonces el problema periódico (con $\varphi(k, \boldsymbol{u}) \equiv \varphi(k, u_0)$) tiene al menos una solución.

Demostración. Escojamos $L \geq 0$ tal que $L \geq \sup\{f(k, 0, x) | k \in I,\ x \geq 0\}$.

Sea u una solución de

$$\Delta u_k + M u_{k+1} = L,\ k \in I, \quad u_k = \varphi(k, u_0),\ k \in I_h, \quad u_0 = u_T.$$

Sin más que usar el hecho de que la función de Green asociada al operador $\Delta u_k + M u_{k+1}$ en el espacio $\{u : \{0, \ldots, T\} \to \mathbb{R} \,|\, u_0 = u_T\}$ existe y es positiva (ver [31]) sabemos que este problema tiene una única solución $\boldsymbol{\beta}$, que es positiva en $\{0, \ldots, T\}$.

A partir de que $f(k, \xi, \tau) + M\xi$ es decreciente en ξ, tenemos que, para todo $k \in I$,

$$\triangle \beta_k + M\beta_{k+1} = L \geq f(k, 0, (\phi\beta)_{k+1}) \geq f(k, \beta_{k+1}, (\phi\beta)_{k+1}) + M\beta_{k+1}.$$

Como consecuencia de esto, $\boldsymbol{\beta}$ es una sobresolución del problema periódico.

Para encontrar la subsolución, consideremos la solución única $\boldsymbol{\alpha}$, que es negativa en $\{0, \ldots, T\}$, del siguiente problema de valores de frontera periódico,

$$\Delta u_k + M u_{k+1} = R, \quad k \in I, \quad u_k = \varphi(k, u_0), \quad k \in I_h, \quad u_0 = u_T,$$

en donde $R \leq 0$ verifica que $R \leq \inf\{f(k, 0, x) \mid k \in I, \ x \leq 0\}$. Al igual que en el caso anterior, comprobamos que $\boldsymbol{\alpha}$ es una subsolución del problema periódico.

Entonces $\alpha_k \leq 0 \leq \beta_k$ para k en I, y $\beta_k = \varphi(k, \beta_0) \geq \varphi(k, \alpha_0) = \alpha_k$ para k en I_h. Así, el Teorema 2.2 garantiza la existencia de al menos una solución del problema en $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$. $\square$

2.2.3. Ejemplos

Ejemplo 2.3. Sean $J_1 = \{0, 1\} \subset I = \{0, 1, 2\}$, m, n, $l \in \mathbb{N}$ impares y $\varphi_k \leq 0$ para todo $k \in I_h$. Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned}\Delta u_k &= \frac{1 - (-1)^{k+1}}{2} - u_{k+1} + ((\phi u)_{k+1})^{1/n}, \quad k \in I,\\ u_k &= u_0 + \varphi_k, \quad k \in I_h, \quad u_0 = \left(\min_{k \in J_1}\{u_k^l\}\right)^m.\end{aligned}$$

No es difícil comprobar que $\boldsymbol{\alpha} = (\varphi_{-h+1}, \ldots, \varphi_{-1}, 0, 1, -1, 0)$ es una subsolución del problema, mientras que $\boldsymbol{\beta} = (\varphi_{-h+1}, \ldots, \varphi_{-1}, 0, 2, 3, 4)$ es una sobresolución. El Teorema 2.2 garantiza que existe al menos una solución del problema entre $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$. $\square$

Ejemplo 2.4. Sea f es una función real, continua, creciente y que verifica $f(0) = 0$. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m \leq n$, $l \in \{1, \ldots, T\}$, $h = 1$ y $C > 2$. Consideremos el siguiente problema

$$\begin{aligned}\Delta u_k &= 1 + f\big((\phi u)_{k+1}^m - u_{k+1}^n\big), \quad k \in I,\\ u_0 &= u_l / C.\end{aligned}$$

Para cualquier número real a tal que $a > 2\,l/(C-2)$, podemos ver que $\boldsymbol{\alpha} = (0, 0, \ldots, 0)$ es una subsolución y $\boldsymbol{\beta} = (2a, 2(a+1), \ldots, 2(a+T))$ es una sobresolución del problema de valores de frontera. Entonces, utilizando el Teorema 2.2, podemos garantizar la existencia de, al menos, una solución del problema entre $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$. $\square$

Como hemos visto en la Subsección 2.2.2, la hipótesis sobre la monotonía de la función f en la tercera variable es una condición suficiente que, en general, no puede eliminarse. Sin embargo, en el siguiente ejemplo exponemos un problema en el que tal hipótesis no es necesaria.

Ejemplo 2.5. Sean $n \in \mathbb{N}$ impar, $n \geq 3$ y $\varphi_k \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_k \leq 0$. Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \Delta u_k &= u_{k+1} - ((\phi u)_{k+1})^n, \quad k \in I, \\ u_k &= u_0 + \varphi_k, \quad k \in I_h, \\ u_0 &= u_T. \end{aligned}$$

Tomando $\boldsymbol{\alpha} = (-2+\varphi_{-h+1}, \ldots, -2+\varphi_{-1}, -1, \ldots, -1)$ y $\boldsymbol{\beta} = (2, 2, \ldots, 2)$, tenemos un par de subsolución y sobresolución relacionadas para este problema, y es fácil comprobar que $f(k, x, y) = x - y^n$ no verifica la hipótesis sobre la monotonía del Teorema 2.2. Sin embargo, $\boldsymbol{u} = (\varphi_{-h+1}, \ldots, \varphi_{-1}, 0, \ldots, 0)$ es una solución del problema, y está entre $\boldsymbol{\alpha}$ and $\boldsymbol{\beta}$. □

Hemos de resaltar que el ejemplo previo nos muestra un problema para el que no se cumplen las condiciones del Teorema 2.2 y que, sin embargo, tiene solución. Queda claro, por lo tanto, que las condiciones impuestas en dicho resultado no son necesarias.

El Teorema 2.2 garantiza la existencia de solución del problema (2.3)-(2.5) siempre que existan un par de sub y sobresolución relacionadas de dicho problema, y estas no siempre son fáciles de encontrar. En el próximo ejemplo se han añadido condiciones —suficientes— sobre la función f que garantizan que las soluciones de las ecuaciones explícitas son, a su vez, un par de sub y sobresolución del problema estudiado.

Ejemplo 2.6. Consideremos el problema

$$\Delta u_k = f(k, u_{k+1}, ((\phi u)_{k+1}), \quad k \in I, \tag{2.21}$$
$$u_k = u_0 = 0, \quad k \in I_h, \tag{2.22}$$

en donde f es una función que cumple las hipótesis del Teorema 2.2.

Supongamos que existen $A, B > 0$ tales que f verifica las siguientes desigualdades:

$$f(k, x, y) \leq (x+y)/2 + A \quad \forall x, y > 0, \tag{2.23}$$
$$f(k, x, y) \geq -(x+y)/2 - B \quad \forall x, y < 0. \tag{2.24}$$

Consideremos ahora el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \Delta u_k &= (u_{k+1} + (\phi u)_{k+1})/2 + A, \quad k \in I, \\ u_k &= u_0 = 0, \quad k \in I_h. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que la única solución de este último problema es estrictamente creciente y, como consecuencia de ello, no negativa en $\{0, \ldots, T\}$. Por lo tanto, la desigualdad (2.23) implica que dicha solución es una sobresolución del problema (2.21)-(2.22).

Utilizando la desigualdad (2.24), obtenemos que la única solución del problema

$$\begin{aligned}\Delta u_k &= -(u_{k+1} + (\phi u)_{k+1})/2 - B, \quad k \in I,\\ u_k &= u_0 = 0, \quad k \in I_h,\end{aligned}$$

nos proporciona una subsolución que, además, es estrictamente decreciente y negativa en $\{0, \ldots, T\}$.

Hemos construido, de este modo, un par de sub y sobresolución del problema (2.21)-(2.22) que, además, están bien ordenadas en J. El Teorema 2.2 garantiza la existencia de solución de dicho problema. □

2.3. Condiciones de frontera periódicas

Estudiaremos el problema implícito de primer orden (2.3)-(2.5) en el caso particular de que $\varphi(k, \boldsymbol{u}) = u_0$ para todo $k \in I_h$ y $B(u_0, \boldsymbol{u}) = u_0 - u_T$, es decir

$$\Delta u_k = f\left(k, u_{k+1}, (\phi u)_{k+1}\right), \quad k \in I, \tag{2.25}$$

$$u_k = u_0, \quad k \in I_h, \tag{2.26}$$

$$u_0 = u_T. \tag{2.27}$$

Este es un caso particular del problema periódico, con lo que varios de los resultados obtenidos en la sección previa son válidos para este problema. Concretamente podemos aplicar el Corolario 2.2, el Teorema 2.3, el Teorema 2.4 y el Teorema 2.5, para obtener diversos resultados de existencia y construcción de solución, como también de existencia de soluciones extremas para el problema (2.25)-(2.27).

En esta sección abordaremos el estudio del problema (2.25)-(2.27) de un modo diferente, basado en el establecimiento de principios del máximo para el problema linealizado, y el desarrollo del método monótono. Obtendremos resultados alternativos a los de la sección anterior, en los que las condiciones exigidas serán diferentes y, en general, no comparables.

Si encontramos un elemento $\boldsymbol{u} = (u_0, \ldots, u_T)$ de $\mathbb{R}^{T+1}$ que cumpla (2.25) y (2.27), y lo extendemos a un elemento de $\mathbb{R}^{T+h}$ sin más que definir $u_k = u_0$ para todo $k \in I_h$, está claro que el resultado que obtenemos es una solución del problema (2.25)-(2.27).

Para ser totalmente precisos, hay que resaltar que la operación antedicha solo se podría hacer considerando el operador $\boldsymbol{\phi}$ definido, dependiendo del caso, en $\mathbb{R}^{T+h}$ o en $\mathbb{R}^{T+1}$, teniendo en cuenta que, para todo $k \leq h$, resulta que $\max_{l\in\{k-h,\dots,k\}} u_l = \max_{l\in\{0,\dots,k\}} u_l$.

Un ejemplo más sencillo de este tipo de ecuación es el que podríamos llamar caso cuasilineal:

$$\Delta u_k + Mu_{k+1} + N(\phi u)_{k+1} = \sigma_k, \quad k \in I, \tag{2.28}$$

en donde $M, N \in \mathbb{R}$ y $\sigma_k \in \mathbb{R}$ para todo $k \in I$.

Así, denominaremos *problema no lineal*, (PN), a la ecuación (2.25) junto con la condición periódica (2.27) y, atendiendo a lo expuesto anteriormente, consideraremos que una solución es un elemento $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{T+1}$ que verifica (2.25) y (2.27).

Del mismo modo, denominaremos *problema cuasilineal*, (PL), a la ecuación (2.28) junto con (2.27), siendo asimismo sus soluciones elementos de $\mathbb{R}^{T+1}$.

En la siguiente subsección estudiamos el problema cuasilineal, para el que obtendremos resultados de existencia y unicidad de solución, como también resultados de comparación.

En la Subsección 2.3.2 aplicamos los resultados de comparación obtenidos al problema no lineal, y deducimos resultados de existencia de solución en presencia de un par de sub y sobresolución. Presentamos, además, algunos ejemplos que ilustran los resultados obtenidos.

2.3.1. El problema cuasilineal

Comenzamos nuestro estudio del problema cuasilineal (PL) analizando algunas de las propiedades del operador $\boldsymbol{\phi}$.

Lema 2.1. *El operador $\boldsymbol{\phi}$ definido en* (2.6) *verifica:*

(i) $-(\boldsymbol{\phi}(-\boldsymbol{u}))_k = \min\limits_{l\in\{k-h,\dots,k\}} u_l$.

(ii) $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) \geq \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u})$.

(iii) $\boldsymbol{\phi}$ *es continuo.*

Demostración. (*i*) y (*ii*) se deducen directamente de la definición de $\boldsymbol{\phi}$.

La demostración de (*iii*) es sencilla a partir de la siguiente propiedad elemental:

$$\left| \max_{l\in\{0,\dots,T\}} u_l - \max_{l\in\{0,\dots,T\}} v_l \right| \leq \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|_\infty, \quad \text{para todo } \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{T+1}. \tag{2.29}$$

□

La linealidad, sin embargo, no es una de las propiedades del operador $\boldsymbol{\phi}$. Debido a esto, si queremos utilizar técnicas para ecuaciones lineares mediante funciones de Green, tendremos que incorporar el término $N(\phi u)_{k+1}$ a la parte no lineal de la ecuación asociada. A continuación, presentamos resultados de unicidad de solución para el problema (PL).

Teorema 2.6. *Supongamos que M y N verifican la condición*

$$0 \leq |N| < M. \tag{2.30}$$

Entonces el problema (PL) *tiene una única solución en* $\mathbb{R}^{T+1}$.

Demostración. Antes de nada, hemos de darnos cuenta de que $\boldsymbol{u}$ es solución del problema (PL) si y solo si

$$u_k = \sum_{j=0}^{T-1} G_M(k,j)[\sigma_j - N(\phi u)_{j+1}],$$

en donde

$$G_M(k,j) = \frac{1}{1-(1+M)^{-T}} \begin{cases} (1+M)^{j-k}, & \text{si } 0 \leq k < j \leq T-1, \\ (1+M)^{j-k-T}, & \text{si } 0 \leq j \leq k \leq T-1, \end{cases} \tag{2.31}$$

es la función de Green asociada al problema lineal con condición periódica

$$\Delta u_k + M u_{k+1} = h_k, \quad k \in I, \quad u_0 = u_T. \tag{2.32}$$

A continuación, definimos el operador $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^{T+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{T+1}$ como

$$(Fu)_k := \sum_{j=0}^{T-1} G_M(k,j)[\sigma_j - N(\phi u)_{j+1}].$$

Está claro que $\boldsymbol{u}$ es solución del problema (PL) si y solo si $\boldsymbol{u}$ es un punto fijo del operador $\boldsymbol{F}$. En particular, si $\boldsymbol{F}$ es un operador contractivo, el Teorema del punto fijo de Banach asegura que el problema (PL) tiene solo una solución $\boldsymbol{u}$ en $\mathbb{R}^{T+1}$.

Por otra parte,

$$(Fu)_k - (Fv)_k = -N \sum_{j=0}^{T-1} G_M(k,j)[(\phi u)_{j+1} - (\phi v)_{j+1}], \quad k \in \{0, \ldots, T\}.$$

Ahora bien, a partir del hecho de que $G_M \geq 0$ y utilizando (2.29), es inmediato comprobar que, para todo k en $\{0, \ldots, T\}$

$$\begin{aligned}|(Fu)_k - (Fv)_k| &\leq |N| \sum_{j=0}^{T-1} |G_M(k,j)| \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_\infty \\ &= |N| \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_\infty \sum_{j=0}^{T-1} G_M(k,j) = \frac{|N|}{M} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_\infty.\end{aligned}$$

De esta manera

$$\|\boldsymbol{Fu} - \boldsymbol{Fv}\|_\infty \leq \frac{|N|}{M} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_\infty,$$

y, teniendo presente la condición (2.30), podemos afirmar que $\boldsymbol{F}$ es una aplicación contractiva. □

Observación 2.3. Es importante resaltar que cuando $|N|$ es igual a M el anterior resultado de unicidad de solución, en general, no se verifica, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.7. Tomando $M = 1$, $N = -1$, $h = 1$ y $\sigma_k = 0$ para todo k en la ecuación (2.28), obtenemos el siguiente problema:

$$\Delta u_k + u_{k+1} - (\phi u)_{k+1} = 0, \quad k \in I, \quad u_0 = u_T.$$

Es evidente que cualquier elemento $\boldsymbol{u} \equiv (C, \ldots, C) \in \mathbb{R}^{T+1}$ es una solución del problema. □

En cualquier caso, el teorema anterior nos proporciona únicamente una condición suficiente para la existencia y unicidad de solución del problema (PL), como podemos comprobar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.8. Tomando, en la ecuación (2.28), $M = N = 1$, $\sigma_k = 0$ para todo k y $h = 1$, el problema (PL) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\Delta u_k + u_{k+1} + (\phi u)_{k+1} = 0, \quad k \in I, \quad u_0 = u_T.$$

Es sencillo ver que la única solución del problema de valor inicial

$$\Delta u_k + u_{k+1} + (\phi u)_{k+1} = 0, \quad k \in I, \quad u_0 = a,$$

viene dada por $(a, 0, \ldots, 0)$, si $a > 0$, y por $u_k = a/3^k$, $k \geq 0$, cuando $a < 0$. Debido a esto, a pesar de que la condición del Teorema 2.6 no se cumple, el problema periódico tiene una única solución $\boldsymbol{u}$ tal que $u_k = 0$ para todo $k \in \{0, \ldots, T\}$. □

Observación 2.4. Hemos de advertir que cuando $M = 0$ el problema (2.32) no tiene solución única, por lo que no existe función de Green asociada. Sin embargo, esto no quiere decir que ese problema (PL) no tenga solución única, como ocurre en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.9. Si en (2.28) tomamos $M = 0$, $N = 1$, $\sigma_k = k$ para todo k, $T = 2$ y $h = 1$, el problema (PL) se escribe

$$\Delta u_k + (\phi u)_{k+1} = k, \quad k \in \{0, 1\}, \quad u_0 = u_2.$$

Está claro que cada solución de este problema verifica que $(\phi u)_1 = (\phi u)_2$. Entonces, una de las siguientes propiedades se cumple: o bien $(\phi u)_1 = u_0$, o bien $(\phi u)_1 = u_1$.

Es sencillo ver que esta última posibilidad es falsa y que, debido a ello, este problema tiene solo una solución dada por $(1/2, 0, 1/2)$. □

A continuación estableceremos principios del máximo que nos permitirán desarrollar el método monótono para el problema (PN).

Teorema 2.7. *Sean $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{T+1}$, $M > 0$ y $N \geq 0$ tales que*

(i) $\Delta u_k + M u_{k+1} + N(\phi u)_{k+1} \geq 0, \quad k \in I.$

(ii) $u_0 \geq u_T$.

(iii) $(M + N)\,T < 1$.

Entonces $u_k \geq 0$ para todo $k \in \{0, \ldots, T\}$.

Demostración. Supongamos que el resultado no es cierto, entonces existe $b \in \{0, \ldots, T\}$ tal que $u_b = \min_{l \in \{0,\ldots,T\}} u_l < 0$.

Ahora bien, si $u_k \leq 0$ para todo $k \in \{0, \ldots, T\}$, la condición (i) garantiza que $\Delta u_k \geq 0$ para todo $k \in I$. Entonces, sin más que usar (ii) podemos deducir que $u_k = u_b < 0$ para todo $k \in \{0, \ldots, T\}$, lo que contradice (i).

Tomemos pues $u_a = \max_{l \in \{0,\ldots,T\}} u_l > 0$, con $a \in I$. Siempre que $u_T \leq 0$, también podemos tomar $\Delta u_{k_1} = \min_{l \in \{a,\ldots,T-1\}} \Delta u_l < 0$. Entonces

$$u_T - u_a = \sum_{s=a}^{T-1} \Delta u_s \geq (T - a)\Delta u_{k_1}.$$

Por otra parte, de (i) se infiere que $\Delta u_{k_1} \geq -M u_{k_1+1} - N(\phi u)_{k_1+1}$, y de ahí

$$\begin{aligned} -u_a \geq u_T - u_a \geq \Delta u_{k_1}(T - a) &\geq (-M u_{k_1+1} - N(\phi u)_{k_1+1})(T - a) \\ &\geq -(M + N) u_a (T - a) \geq -(M + N) u_a T, \end{aligned}$$

de lo que se deduce directamente que $1 \leq (M+N)T$, y esto contradice la tercera condición.

Hemos llegado a la conclusión de que $u_T > 0$ y, por lo tanto, siguiendo la hipotesis (ii), que $u_0 > 0$. Tomemos ahora $u_c = \max_{l\in\{0,\ldots,b\}} u_l > 0$. Entonces existe k_2 en $\{c,\ldots,b-1\}$ tal que

$$u_b - u_c = \sum_{s=c}^{b-1} \Delta u_s \geq \Delta u_{k_2}(b-c).$$

Sin más que usar la condición (i), podemos concluir que

$$-u_c \geq u_b - u_c \geq \Delta u_{k_2}(b-c) \geq (-Mu_{k_2+1} - N(\phi u)_{k_2+1})(b-c) \geq -(M+N)u_c T,$$

y, consecuentemente, que $1 \leq (M+N)T$, lo que de nuevo contradice la hipótesis (iii). □

El resultado del Teorema 2.7 es independiente del valor del parámetro de retardo h. A continuación presentamos un nuevo resultado de comparación en el que aparece la dependencia del parámetro de retardo.

Teorema 2.8. *Sean* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{T+1}$, $M > 0$ *y* $N \geq 0$ *tales que*

(i) $\Delta u_k + Mu_{k+1} + N(\phi u)_{k+1} \geq 0, \quad k \in I.$

(ii) $u_0 \geq u_T$.

(iii) $NT(1+M)^{-1+h} < 1$.

Entonces $u_k \geq 0$ *para todo* k *en* $\{0,\ldots,T\}$.

Demostración. Sea $\boldsymbol{H} : \mathbb{R}^{T+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{T+1}$ la aplicación definida

$$(Hu)_k = (1+M)^k u_k.$$

Si denotamos $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Hu}$, las hipótesis (i) y (ii) se convierten en

$$\Delta v_k \geq -N(1+M)^k \left(\phi(H^{-1}v)\right)_{k+1} \tag{2.33}$$

y

$$v_0 = u_0 \geq u_T = (1+M)^{-T} v_T.$$

Como $M > 0$, resulta evidente que probar que $u_k \geq 0$ para todo k es equivalente a probar que $v_k \geq 0$ para todo k. Supongamos que la última afirmación es falsa, es decir, que existe b en $\{0,\ldots,T\}$ que verifica que $v_b < 0$. Razonando de manera análoga a la utilizada en la demostración del Teorema 2.7, podemos tomar $v_a = \max_{l\in\{0,\ldots,T\}} v_l > 0$.

Siempre que $v_T \leq 0$, tenemos que

$$v_T - v_a = \sum_{s=a}^{T-1} \Delta v_s \geq \Delta v_{k_1}(T-a)$$

para algún k_1 en $\{a, \dots, T-1\}$. Sin más que utilizar la desigualdad (2.33), obtenemos que

$$\Delta v_{k_1} \geq -N(1+M)^{k_1} \left(\phi(H^{-1}v)\right)_{k_1+1} \geq -N(1+M)^{-1+h}\, v_a.$$

Entonces

$$-v_a \geq v_T - v_a \geq \Delta v_{k_1}(T-a) \geq -N(1+M)^{-1+h} v_a T,$$

por lo que $1 \leq N\,T(1+M)^{-1+h}$, lo que contradice la hipótesis (iii).

Hemos llegado a la conclusión de que $v_0 \geq (1+M)^{-T} v_T > 0$, así que existe c en $\{0, \dots, T\}$ tal que $v_c = \text{máx}_{l \in \{0,\dots,b\}} v_l > 0$, y $v_b - v_c = \sum_{s=c}^{b-1} \Delta v_s \geq \Delta v_{k_2}(b-c)$, con k_2 en $\{c, \dots, b-1\}$.

Para acabar, $-v_c \geq v_b - v_c \geq -N(1+M)^{-1+h} v_c T$, lo que contradice la hipótesis (iii) de nuevo. □

Observación 2.5. Advertimos que, cuando $N = 0$, el Teorema 2.8 puede escribirse de la siguiente manera:

Si $M > 0$ entonces

$$\Delta u_k + M u_{k+1} \geq 0, \quad k \in I, \quad u_0 \geq u_T \Rightarrow u_k \geq 0, \quad k \in \{0, \dots, T\}.$$

Este resultado ha sido probado en [31]. Este hecho nos indica que el Teorema 2.8 puede interpretarse como la generalización natural del caso en el que se consideran las ecuaciones sin retardo.

No ocurre lo mismo con el Teorema 2.7, desde el momento en que este teorema impone la condición $0 < MT < 1$ para el caso sin retardo.

Observación 2.6. La condición (iii) del Teorema 2.8 generaliza la condición (iii) del Teorema 2.7 para $1 \leq h \leq T$.

Para ver esto, fijemos h y T estrictamente positivos. Los valores de M y N para los que tanto la condición (iii) del Teorema 2.7 como la condición (iii) del Teorema 2.8 se cumplen pertenecen a dos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, que denotaremos A y B respectivamente:

$$A = \{(M,N) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty) | (M+N)T < 1\},$$
$$B = \{(M,N) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty) | N\,T\,(1+M)^{-1+h} < 1\}.$$

Probar nuestra proposición es equivalente a probar que $A \subset B$ siempre que $1 \leq h \leq T$, lo que veremos a continuación.

Es evidente que (M,N) es un elemento del conjunto A si y solo si se verifica que $NT < 1-MT$, y que (M,N) pertenece a B si y solo si $NT < (1+M)^{1-h}$. Debido a esto, para ver que $A \subset B$ será suficiente probar que, si $1 \leq h \leq T$, entonces $1-MT < (1+M)^{1-h}$ o, lo que es lo mismo, $(1+M)^{1-h}+MT-1 > 0$.

Consideremos la función $\varphi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por la siguiente relación: $\varphi(x) = (1+x)^{1-h} - 1 + Tx$.

Es sencillo comprobar que la función verifica que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = T-h+1$ y $\varphi''(x) = (1+x)^{-h-1}h(-1+h)$ para todo $x \in [0,+\infty)$. Cuando $1 \leq h \leq T$ está claro que $\varphi'(0) \geq 0$ y que $\varphi''(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,+\infty)$. Por lo tanto φ es estrictamente positiva en $(0,+\infty)$ y, en particular, $(1+M)^{1-h}+MT-1 = \varphi(M) > 0$.

2.3.2. El problema no lineal

A continuación pasamos a desarrollar el método monótono con el objetivo de estudiar la existencia y la aproximación de soluciones para el problema no lineal (PN). Lo primero que haremos será definir los conceptos de subsolución y sobresolución para dicho problema.

Definición 2.6. Diremos que un elemento $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{T+1}$ es una *subsolución* del problema (PN) si $\alpha_0 \leq \alpha_T$ y $\Delta\alpha_k \leq f(k, \alpha_{k+1}, (\phi\alpha)_{k+1})$ para todo $k \in I$.

Definición 2.7. Diremos que un elemento $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{T+1}$ es una *sobresolución* del problema (PN) si $\beta_0 \geq \beta_T$ y $\Delta\beta_k \geq f(k, \beta_{k+1}, (\phi\beta)_{k+1})$ para todo $k \in I$.

El siguiente teorema nos permitirá desarrollar el método monótono para el problema (PN).

Teorema 2.9. *Sean $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{T+1}$, respectivamente, una subsolución y una sobresolución del problema (PN). Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) $\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{\beta}$.

(ii) Existen $N \geq 0$ y $M > 0$ verificando que, si $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son elementos en $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ tales que $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$, entonces

$$\begin{aligned} f(k, x_{k+1}, (\phi x)_{k+1}) + M x_{k+1} + N(\phi x)_{k+1} \\ \leq f(k, y_{k+1}, (\phi y)_{k+1}) + M y_{k+1} + N(\phi y)_{k+1}. \end{aligned}$$

(iii) Se cumple una de las dos condiciones siguientes:

(iii)(a) $(M+N)T < 1$.

(iii)(b) $NT(1+M)^{-1+h} < 1$.

(iv) $N < M$.

Entonces, si $f(k,\cdot,\cdot)$ *es continua en* $[\alpha_{k+1},\beta_{k+1}] \times [(\phi\alpha)_{k+1},(\phi\beta)_{k+1}]$ *para todo* $k \in I$*, existen dos sucesiones monótonas* $\{\boldsymbol{\alpha}_n\}$ *y* $\{\boldsymbol{\beta}_n\}$ *que convergen, respectivamente, a la solución mínima* $\boldsymbol{\rho}$ *y a la solución máxima* $\boldsymbol{\gamma}$ *del problema* (PN) *en* $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$*, es decir, si* u *es una solución del problema* (PN) *en* $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$*, entonces* $\boldsymbol{u} \in [\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\gamma}]$.

Demostración. Para cada $\boldsymbol{\eta} \in [\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$, denotaremos $(\mathrm{PL})_\eta$ al problema (PL) tomando $\sigma_k = \sigma_{\eta,k} \equiv f(k,\eta_{k+1},(\phi\eta)_{k+1}) + M\eta_{k+1} + N(\phi\eta)_{k+1}$. El Teorema 2.6 nos permite definir el operador $\boldsymbol{A} : [\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}] \to \mathbb{R}^{T+1}$ como

$$\boldsymbol{A\eta} := \text{ única solución del problema } (\mathrm{PL})_\eta.$$

Veamos que el operador $\boldsymbol{A}$ verifica las dos propiedades siguientes.

Propiedad 1. $\boldsymbol{\alpha} \le \boldsymbol{\eta} \le \boldsymbol{\beta} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} \le \boldsymbol{A\eta} \le \boldsymbol{\beta}$.

Sea $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A\eta}$ y tomemos $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\alpha}$. Utilizando el Lema 2.1 y la condición (ii) tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta v_k + Mv_{k+1} + N(\phi v)_{k+1} &= \Delta u_k + Mu_{k+1} - \Delta\alpha_k - M\alpha_{k+1} \\
&\quad + N(\phi(u-\alpha))_{k+1} \\
&\ge \Delta u_k + Mu_{k+1} + N(\phi u)_{k+1} - \Delta\alpha_k - M\alpha_{k+1} \\
&\quad - N(\phi\alpha)_{k+1} \\
&\ge f(k,\eta_{k+1},(\phi\eta)_{k+1}) + M\eta_{k+1} + N(\phi\eta)_{k+1} \\
&\quad - f(k,\alpha_{k+1},(\phi\alpha)_{k+1}) - M\alpha_{k+1} - N(\phi\alpha)_{k+1} \\
&\ge 0.
\end{aligned}$$

Además $v_0 = u_0 - \alpha_0 \ge u_T - \alpha_T = v_T$.

Según utilicemos la condición $(iii)(a)$ o $(iii)(b)$, el Teorema 2.7 o el Teorema 2.8, respectivamente, aseguran que $v_k \ge 0$ y, consecuentemente, $\boldsymbol{\alpha} \le \boldsymbol{A\eta}$. Utilizando argumentos análogos puede probarse que $\boldsymbol{\beta} \ge \boldsymbol{A\eta}$.

Propiedad 2. $\boldsymbol{\alpha} \le \boldsymbol{\eta}_1 \le \boldsymbol{\eta}_2 \le \boldsymbol{\beta} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} \le \boldsymbol{A\eta}_1 \le \boldsymbol{A\eta}_2 \le \boldsymbol{\beta}$.

Sean $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{A\eta}_1$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{A\eta}_2$ y $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1$. Razonando de manera similar a la utilizada en la demostración de la Propiedad 1, es sencillo comprobar que $\boldsymbol{u}_1 \le \boldsymbol{u}_2$.

Es posible pues, tomando $\boldsymbol{\alpha}_0 = \boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}_0 = \boldsymbol{\beta}$, definir dos sucesiones $\{\boldsymbol{\alpha}_n\}$ y $\{\boldsymbol{\beta}_n\}$ como $\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{A\alpha}_n$ y $\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \boldsymbol{A\beta}_n$. Sin más que utilizar las dos propiedades anteriores, es inmediato comprobar que

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = \boldsymbol{\alpha} \le \boldsymbol{\alpha}_1 \le \dots \boldsymbol{\alpha}_n \le \dots \le \boldsymbol{\beta}_n \le \dots \boldsymbol{\beta}_1 \le \boldsymbol{\beta}_0 = \boldsymbol{\beta}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

La sucesión $\{\boldsymbol{\alpha}_n\}$ es monótona creciente y acotada superiormente, por lo que es convergente con límite $\boldsymbol{\rho}$. Del mismo modo, por ser decreciente y acotada inferiormente, $\{\boldsymbol{\beta}_n\}$ es convergente con límite $\boldsymbol{\gamma}$.

Además, de la definición de $(\mathrm{PL})_\eta$ y pasando al límite, se deduce que $\boldsymbol{\rho}$ and $\boldsymbol{\gamma}$ son soluciones de (PN).

Para probar que $\boldsymbol{\rho}$ y $\boldsymbol{\gamma}$ son las soluciones extremas del problema (PN) en $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$, consideremos cualquier solución $\boldsymbol{u}$ de (PN) en $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$. Debido a la definición del operador $\boldsymbol{A}$, es evidente que $\boldsymbol{u}$ es un punto fijo de dicho operador. Entonces $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} \in [\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, $\boldsymbol{u} \in [\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\gamma}]$. □

Observación 2.7. Este resultado es una alternativa al Teorema 2.4. Hay que señalar que las hipótesis que se exigen en el Teorema 2.4 y las que se exigen en el Teorema 2.9 son, en general, no comparables.

En el próximo ejemplo mostramos una aplicación del último teorema.

Ejemplo 2.10. Consideremos el problema (PN) con $T = 2$, $h = 1$ y $f(k,u_{k+1},(\phi u)_{k+1}) = \cos(k\pi) - (1/3)(\phi u)_{k+1}$, es decir,

$$\Delta u_k = \cos(k\pi) - \frac{1}{3}(\phi u)_{k+1}, \quad k \in \{0,1\}, \quad u_0 = u_2.$$

Si tomamos $N = 1/3$, para cualquier número real $M > 1/3$ se cumplen las condiciones del Teorema 2.9.

No es difícil verificar que $\boldsymbol{\alpha} = (2,-1,-2)$ y $\boldsymbol{\beta} = (0,1,0)$ son, respectivamente, una subsolución y una sobresolución de este problema. Como consecuencia directa del teorema anterior, podemos garantizar la existencia de soluciones extremas en $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$.

Por otra parte, puede comprobarse que cualquier solución $\boldsymbol{u}$ del problema que estamos considerando verifica que $(\phi u)_1 = (\phi u)_2 = 0$. Consecuentemente, $\boldsymbol{u} = (-1,0,-1)$ es la única solución de este problema.

Hay que resaltar que la condición $(iii)(a)$ del Teorema 2.9 no se cumple en este caso. □

Presentaremos ahora resultados de existencia de solución con condiciones más débiles que las del Teorema 2.9. Más concretamente, probaremos un resultado en el que no ha de cumplirse necesariamente la condición (ii) de dicho teorema, aunque no podremos asegurar la existencia de soluciones extremas. Primeramente, obtendremos un resultado de existencia a partir del carácter acotado de la función f.

Teorema 2.10. *Sean $0 \le N < M$ fijos y $f(k,\cdot,\cdot)$ una función continua en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ para todo $k \in I$. Supongamos que existe $K > 0$ verificando $Q/(M-N) \le K$, en donde $Q > 0$ es tal que $Q \ge \max_{|\xi|\le K, |\tau|\le K} |f(k,\xi,\tau)|$ para todo $k \in I$.*

Entonces el problema de valores de frontera periódicos (PN) *tiene al menos una solución $\boldsymbol{y}$ tal que $\|\boldsymbol{y}\|_\infty \le K$.*

Demostración. Sea $\mathcal{P} := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{T+1} : \|\boldsymbol{y}\|_\infty \leq K\}$, y definamos el operador $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^{T+1} \to \mathbb{R}^{T+1}$ como

$$(Fu)_k := \sum_{s=0}^{T-1} G_M(k,s)(f(s, u_{s+1}, (\phi u)_{s+1}) - N(\phi u)_{s+1})$$

para todo $k \in J$, en donde G_M es la función de Green definida en (2.31). Resulta claro que las soluciones del problema (PN) son los puntos fijos del operador $\boldsymbol{F}$.

Es sencillo ver que $\boldsymbol{F} : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{T+1}$ es un operador continuo. A continuación probaremos la siguiente afirmación:

Aserción. $\boldsymbol{F}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$.

Sea $\boldsymbol{y} \in \mathcal{P}$. Entonces, para cada $k \in J$ sabemos que

$$\begin{aligned}
|(Fy)_k| &= \left| \sum_{s=0}^{T-1} G_M(k,s) \left(f(s, y_{s+1}, (\phi y)_{s+1}) - N(\phi y)_{s+1} \right) \right| \\
&\leq \sum_{s=0}^{T-1} G_M(k,s) |f(s, y_{s+1}, (\phi y)_{s+1}) - N(\phi y)_{s+1}| \\
&\leq \max_{s\in I, |\tau|\leq K, |\xi|\leq K} (|f(s,\xi,\tau)| + NK) \sum_{s=0}^{T-1} G(k,s) \leq \frac{Q+NK}{M} \leq K,
\end{aligned}$$

lo que implica que $\|\boldsymbol{F}\boldsymbol{y}\|_\infty \leq K$, es decir, $\boldsymbol{F}\boldsymbol{y} \in \mathcal{P}$.

Por lo tanto, el teorema del punto fijo de Brower garantiza que $\boldsymbol{F}$ tiene un punto fijo en $\mathcal{P}$, que es una solución del problema (PN). $\square$

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente resultado de existencia.

Teorema 2.11. *Sean $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{T+1}$ una subsolución y una sobresolución, respectivamente, del problema* (PN). *Supongamos que se cumplen las condiciones (i), (iii) y (iv) del Teorema 2.9 y, además, también se verifica*

(ii') Existen $N \geq 0$ y $M > 0$ verificando que, para todo $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$,

$$\begin{aligned}
&f(k, \alpha_{k+1}, (\phi\alpha)_{k+1}) + M\alpha_{k+1} + N(\phi\alpha)_{k+1} \\
&\qquad \leq f(k, x_{k+1}, (\phi x)_{k+1}) + Mx_{k+1} + N(\phi x)_{k+1} \\
&\qquad\qquad \leq f(k, \beta_{k+1}, (\phi\beta)_{k+1}) + M\beta_{k+1} + N(\phi\beta)_{k+1}.
\end{aligned}$$

Entonces, si $f(k,\cdot,\cdot)$ es continua en $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] \times [(\phi\alpha)_{k+1}, (\phi\beta)_{k+1}]$ para todo $k \in I$, el problema (PN) *tiene al menos una solución en $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$.*

Demostración. Consideremos el siguiente problema de valores de frontera

$$\begin{aligned}\Delta u_k + M u_{k+1} + N(\phi u)_{k+1} &= F\big(k, u_{k+1}, (\phi u)_{k+1}\big) + Mp(k+1, u_{k+1}) \\ &\qquad + N\delta\big(k+1, (\phi u)_{k+1}\big), \quad k \in I, \qquad (2.34)\\ u_0 &= u_T, \qquad (2.35)\end{aligned}$$

en donde

$$\begin{aligned}F(k,\xi,\tau) &= f\big(k, p(k+1,\xi), \delta(k+1,\tau)\big),\\ p(k,\xi) &= \text{máx}\,\{\alpha_k, \text{mín}\,\{\xi, \beta_k\}\},\\ \delta(k,\tau) &= \text{máx}\,\{(\phi\alpha)_k, \text{mín}\,\{\tau, (\phi\beta)_k\}\},\end{aligned}$$

para todo $k \in I$.

Claramente la función F está acotada para todo $k \in I$ y para todo $\xi, \tau \in \mathbb{R}$, y es continua en la segunda y la tercera variables. Así, el Teorema 2.10 garantiza que existe una solución $\boldsymbol{u}$ del problema de valores de frontera (2.34)-(2.35). Veamos que $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{\alpha}$.

Tomemos $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\alpha}$. Por una parte, está claro que $m_0 \geq m_T$. Además, a partir del Lema 2.1 y la condición (ii'), tenemos que, para todo $k \in I$,

$$\begin{aligned}&\Delta m_k + M m_{k+1} + N(\phi m)_{k+1} \geq \\ &\quad \Delta u_k + M u_{k+1} + N(\phi u)_{k+1} - \Delta\alpha_k - M\alpha_{k+1} - N(\phi\alpha)_{k+1} \geq \\ &\qquad F(k, u_{k+1}, (\phi u)_{k+1}) + M u_{k+1} + N(\phi u)_{k+1} \\ &\qquad\qquad - f(k, \alpha_{k+1}, (\phi\alpha)_{k+1}) - M\alpha_{k+1} - N(\phi\alpha)_{k+1} \geq 0.\end{aligned}$$

Sin más que usar el Teorema 2.7 o el Teorema 2.8, llegamos a la conclusión de que $\boldsymbol{m} \geq \boldsymbol{0}$.

De manera análoga podemos ver que $\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{\beta}$. Entonces $\boldsymbol{u}$ es una solución del problema (PN) en $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$. □

Observación 2.8. Este último resultado es una alternativa al Corolario 2.2, derivado del Teorema 2.2, en el que se pide que $f(k, x, \cdot)$ sea creciente para cada $(k, x) \in I \times [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$.

Capítulo 3

Estabilidad de ecuaciones en diferencias. La desigualdad de Halanay discreta

En [59, Section 4.5], Aristides Halanay probó una fórmula asintótica para las soluciones de una desigualdad diferencial en la que aparecía el funcional máximo, y la utilizó para obtener resultados acerca de la estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con retraso. La mencionada desigualdad fue bautizada en algunos trabajos [12, 52, 63, 78, 81, 91] como *desigualdad de Halanay*.

Algunos autores [12, 81] comenzaron a extender este tipo de técnicas al estudio de la estabilidad de ciertas ecuaciones en diferencias, obtenidas como aproximaciones numéricas de ecuaciones diferenciales funcionales.

Como acertadamente se señala en [81], aunque existen numerosos métodos numéricos para aproximar las soluciones de sistemas continuos, el comportamiento asintótico de ambos tipos de sistema (el discreto y el continuo) es, a menudo, muy diferente. En [38] puede obtenerse más información acerca de las diferencias entre la dinámica de una ecuación diferencial continua con retraso y su versión discreta.

Consideraremos la ecuación en diferencias general de orden $n+1$ no autónoma

$$x_{k+1} = f(k, x_{k-n}, \dots, x_k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

en donde $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ es una función continua. Conocidos $n+1$ valores reales $\{x_{-n}, \dots, x_0\}$ siempre es posible calcular una solución (una sucesión $\{x_k\}_{k \geq -n}$ de números reales que verifica (3.1)) de forma explícita utilizando la fórmula (3.1).

Denominaremos *punto de equilibrio* de (3.1) —o *equilibrio*— a cualquier sucesión constante (con todos sus términos iguales) $x_* \equiv \{x_*\}_{k \geq -n}$ que sea solución de la ecuación. Asumiremos, a no ser que se indique lo contrario, que el único equilibrio de (3.1) será la sucesión constante cero, también llamada *solución trivial* o *solución cero*. Es decir, supondremos que $f(k, c, \ldots, c) = c$ para todo $k \in \mathbb{N}$, en donde c es un número real, si y solo si $c = 0$.

Cualquier persona interesada en la estabilidad de las soluciones de la ecuación (3.1) puede encontrar en el trabajo [74] de Liz resultados bastante recientes, obtenidos a partir de desigualdades de Halanay discretas y también con otro tipo de técnicas.

En la Sección 3.1 introduciremos la *desigualdad de Halanay discreta*, y la utilizaremos para obtener resultados de estabilidad exponencial para algunas ecuaciones en diferencias como la ecuación (3.1), y haremos un estudio específico de la aplicación de Lozi. También veremos que, eligiendo un tamaño de paso suficientemente pequeño, al discretizar determinadas ecuaciones funcionales con retardo utilizando el método de Euler, el criterio clásico de la estabilidad absoluta (estabilidad independiente del retardo) se mantiene para la ecuación en diferencias obtenida.

En la Sección 3.2 presentamos una generalización de la *desigualdad de Halanay discreta*, y la aplicamos al estudio de la estabilidad exponencial de ciertas ecuaciones en diferencias, estableciendo una condición análoga a la denominada *condición de Yorke* para ecuaciones diferenciales funcionales.

Para finalizar, en la Sección 3.3 aplicamos los resultados obtenidos en las secciones anteriores al estudio de la estabilidad de las ecuaciones en diferencias con máximo.

Los principales resultados que se presentan en este capítulo están recogidos en [75] y [76], utilizando en ocasiones las versiones que aparecen en [74].

Como paso previo, introduciremos algunas definiciones útiles para la comprensión del capítulo.

Definición 3.1. Para la ecuación (3.1) diremos que la solución trivial:

(i) es *estable* si para cada par de números reales $\epsilon > 0$ y $k_0 > 0$ existe un número real $\delta(\epsilon, k_0) > 0$ tal que si $\{x_k\}_{k \geq -n}$ es una solución de (3.1) que cumple $\|(x_{k_0-n}, \ldots, x_{k_0})\|_\infty \leq \delta$, entonces resulta que $|x_k| < \epsilon$ para todo $k \geq k_0$.

(ii) es *uniformemente estable* si para cada $\epsilon > 0$ el número δ de la definición anterior puede elegirse independientemente de k_0.

(iii) es un *atractor* si existe un número real $\mu > 0$ tal que $\lim_{k \to \infty} x_k = 0$ para cada solución $\{x_k\}_{k \geq -n}$ de (3.1) tal que $\|(x_{-n}, \ldots, x_0)\|_\infty \leq \mu$.

(iv) es *uniformemente asintóticamente estable* si es un atractor y es uniformemente estable.

(v) es un *atractor global* si $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ para cualquier solución $\{x_k\}_{k\geq -n}$ de (3.1).

(vi) es *globalmente asintóticamente estable* —o *globalmente estable*— si es estable y es un atractor global.

(vii) es *globalmente exponencialmente estable* si existen dos números reales $M > 0$ y $\lambda \in (0,1)$ tal que, para cada solución $\{x_k\}_{k\geq -n}$ de (3.1), la desigualdad

$$|x_k| \leq M\lambda^k \left(\max_{l\in\{-n,\ldots,0\}} |x_l| \right)$$

se cumple para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observación 3.1. Podemos establecer algunas relaciones entre las propiedades de estabilidad de la Definición 3.1. Por ejemplo (vii) $\Rightarrow$ (vi) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (iii), o (vii) $\Rightarrow$ (vi) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i). Señalar que, en el caso de las ecuaciones en diferencias lineales, también ocurre que (vi) $\Rightarrow$ (vii)

3.1. Lema de Halanay discreto

En esta sección estableceremos la versión discreta de la original *desigualdad de Halanay*.

Los enunciados de los resultados que involucran desigualdades tipo Halanay en [12, 81] son bastante engorrosos, debido a que las ecuaciones en diferencias son obtenidas como aproximaciones numéricas de los modelos continuos, con lo que las originales y sencillas ideas de Halanay quedan, de alguna manera, desdibujadas en las demostraciones. Debido a ello, aunque el siguiente resultado pueda deducirse de [81, Teorema 3.1], expondremos una demostración completa en la que se revela cómo la constante λ_0 que aparece en la fórmula asintótica puede obtenerse de manera sencilla.

Teorema 3.1 (*Desigualdad de Halanay discreta*)**.** *Sean $n > 0$ un número natural y $\{x_k\}_{k\geq -n}$ una sucesión de números reales que cumpla la desigualdad*

$$x_{k+1} \leq ax_k + b \max_{l\in\{k-n,\ldots,k\}} x_l, \quad k \in \mathbb{N}, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Si $0 < b < 1 - a \leq 1$, entonces existe un número real $\lambda_0 \in (0,1)$ tal que

$$x_k \leq \max\{0, x_{-n}, x_{-n+1}, \ldots, x_0\}\, \lambda_0^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Además, λ_0 puede elegirse como la única raíz de la ecuación

$$\lambda^{n+1} - a\lambda^n - b = 0 \tag{3.3}$$

en el intervalo $(0,1)$.

Demostración. Sea $\{y_n\}_{k\geq -n}$ una solución de la ecuación en diferencias

$$y_{k+1} = ay_k + b \max_{l\in\{k-n,\ldots,k\}} y_l, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Demostraremos, por inducción, que si $\{x_k\}_{k\geq -n}$ cumple la condición (3.2) y $x_k \leq y_k$ para $k \in \{-n,\ldots,0\}$, entonces $x_k \leq y_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por una parte tenemos que $x_0 \leq y_0$. Por otra parte, si suponemos que $x_k \leq y_k$ para todo $k \in \{0,\ldots r\}$, ya que $a, b \geq 0$, entonces

$$x_{r+1} \leq ax_r + b \max_{l\in\{r-n,\ldots,r\}} x_l \leq ay_r + b \max_{l\in\{r-n,\ldots,r\}} y_l = y_{r+1},$$

con lo que $x_k \leq y_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, para cualesquiera $M > 0$ y $\lambda \in (0,1)$, la sucesión $\{y_k\}_{k\geq -n}$ definida por $y_k = M\lambda^k$ es una solución de la ecuación (3.4) si y solo si λ es una raíz de (3.3).

Definamos $p(\lambda) = \lambda^{n+1} - a\lambda^n - b$. Entonces resulta que p es una función continua en $\mathbb{R}$, en particular en el intervalo $[0,1]$, $p(0) = -b < 0$, y $p(1) = 1-a-b > 0$ y, como consecuencia de esto, existe $\lambda_0 \in (0,1)$ tal que $p(\lambda_0) = 0$. Además p es derivable, y de la expresión de su derivada $p'(\lambda) = (n+1)\lambda^n - an\lambda^{n-1}$ se deduce que tiene, a lo sumo, una raíz $\lambda_* = an/(n+1) \in (0,1)$. Así pues, el hecho de que $p(\lambda)$ tuviese exactamente dos raíces en $(0,1)$ sería incompatible con que $p(0)p(1) < 0$, mientras que el hecho de que $p(\lambda)$ tuviese más de dos raíces en $(0,1)$ sería incompatible con que $p'(\lambda)$ solo tenga, como mucho, una. Por lo tanto, λ_0 es la única raíz de $p(\lambda)$ en $(0,1)$.

Una vez elegido λ_0, se tiene que $\{y_k\} = \{M\lambda_0^k\}_{k\geq -n}$ es una solución de (3.4) para cada $M \geq 0$, en particular, para $M = \max\{0, x_{-n},\ldots,x_0\}$. Claramente $y_k \geq x_k$ para todo $k \in \{-n,\ldots,0\}$, y así, haciendo uso de la primera parte de la demostración, se llega a que $x_k \leq y_k = M\lambda_0^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. □

3.1.1. Estabilidad exponencial de ecuaciones en diferencias

Dado $a \in \mathbb{R}$, consideremos ahora la siguiente ecuación en diferencias

$$x_{k+1} = ax_k + f(k, x_{k-n}, \ldots x_k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

en donde f es como en (3.1).

Es evidente que tomando $a = 0$ en la ecuación (3.5) recuperamos la ecuación (3.1).

El siguiente resultado proporciona un valor para la estabilidad exponencial de las soluciones de (3.5), estimado a partir del uso de la *desigualdad de Halanay discreta*.

Teorema 3.2. *Supongamos que existe un número real positivo b tal que $0 < b < 1 - a \leq 1$ y*

$$|f(k, \boldsymbol{x})| \leq b\|\boldsymbol{x}\|_\infty, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ y } \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Entonces existe $\lambda_0 \in (0,1)$ tal que para cada solución $\{x_k\}_{k\geq -n}$ de (3.5) se cumple

$$|x_k| \leq \left(\max_{l\in\{-n,\ldots,0\}} |x_l|\right) \lambda_0^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

en donde λ_0 puede calcularse de la forma explicada en el Teorema 3.1.

Como consecuencia de esto, la solución trivial de (3.5) es globalmente exponencialmente estable.

Demostración. Sea $\{x_n\}_{k\geq -n}$ una solución de la ecuación (3.5), entonces

$$x_k = a^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i} f(i, x_{-n+i}, \ldots, x_i), \quad k \in \mathbb{N},$$

y, a partir de (3.6), se obtiene

$$|x_k| \leq a^k |x_0| + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i} b \left(\max_{l\in\{-n+i,\ldots,i\}} |x_l| \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Definamos $\{v_k\}_{k\geq -n}$ como $v_k = |x_k|$ para $k \in \{-n, \ldots, 0\}$ y

$$v_k = a^k |x_0| + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i} b \left(\max_{l\in\{-n+i,\ldots,i\}} |x_l| \right)$$

para $k > 0$. Está claro que $|x_k| \leq v_k$ para todo $k \geq -n$ y, por lo tanto,

$$v_{k+1} = av_k + b \max_{l\in\{k-n,\ldots,k\}} |x_l| \leq av_k + b \max_{l\in\{k-n,\ldots,k\}} v_l, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Para acabar, el Teorema 3.1 garantiza que

$$|x_k| \leq v_k \leq \left(\max_{l\in\{-n,\ldots,0\}} v_l \right) \lambda_0^k = \left(\max_{l\in\{-n,\ldots,0\}} |x_i| \right) \lambda_0^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

con λ_0 calculado como se indica en el enunciado del teorema. □

Corolario 3.1. *La solución trivial de la ecuación (3.1) es globalmente exponencialmente estable si la condición (3.6) se cumple para algún número real $b \in (0,1)$.*

Ejemplo 3.1. En [58] se analiza la siguiente ecuación en diferencias:

$$\Delta x_k = -\delta x_k + f(x_{k-n}), \quad \delta > 0, \tag{3.7}$$

que es una caso particular autónomo de la ecuación (3.5), con $a = 1 - \delta$.

El Teorema 3.2 asegura que si existe $b > 0$ tal que $|f(x)| \leq b|x|$ para todo x, y $b < \delta \leq 1$, entonces todas las soluciones de (3.7) tienen límite igual a cero.

Ejemplo 3.2. La ecuación en diferencias lineal de orden n

$$x_{k+1} = \sum_{i=0}^{n} b_i(k)x_{k-i}, \quad b_i(k) \in \mathbb{R}\ \forall i \in \{0,\dots,n\}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.8}$$

es un caso particular de la ecuación (3.1), tomando $a = 0$ y $f(k, x_{k-n}, \dots .x_k) = \sum_{i=0}^{n} b_i(k)x_{k-i}$.

Siempre que se cumpla

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i=0}^{n} |b_i(k)| < 1, \tag{3.9}$$

f cumple la condición (3.6) y el Corolario 3.1 garantiza la estabilidad exponencial global del equilibrio.

Hay que resaltar que la ecuación (3.8) tiene, en general, coeficientes no constantes. En el caso de que los coeficientes fuesen constantes, i.e. $b_i(k) \equiv b_i \in \mathbb{R}$ para $i \in \{0,\dots,n\}$, la condición (3.9) pasaría a ser

$$\sum_{i=0}^{n} |b_i| < 1. \tag{3.10}$$

Esta condición es la misma que se obtiene en [47, Sección 4.2] a partir del teorema de Rouche para funciones complejas.

Por ejemplo, la ecuación $x_{k+1} = (1/p)(x_{k-n} + \cdots + x_k)$ satisface la condición (3.10) siempre que $p > n + 1$, por lo que, en ese caso, el equilibrio es globalmente exponencialmente estable.

Ejemplo 3.3. La ecuación en diferencias lineal de primer orden

$$x_{k+1} = bx_k, \tag{3.11}$$

es un caso particular de (3.8), para el que la condición (3.10) que proporciona el Teorema 3.2 es exactamente $|b| < 1$.

En este caso, no es atrevido decir que nuestro resultado ofrece una estimación óptima.

Ejemplo 3.4. Dados $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}_+$, prestemos atención a la siguiente ecuación en diferencias lineal de orden 5:

$$x_{k+1} + ax_k + bx_{k-4} = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

Cuando $a > 0$, la condición (3.10) se convierte en $a + b < 1$, que es la condición exacta para la estabilidad asintótica de la solución trivial obtenida a partir del criterio de Schur-Cohn ([47, Sección 4.2]).

Sin embargo, para $a < 0$ la condición dada por la fórmula (3.10) es $b-a < 1$, mucho menos precisa que la condición exacta de estabilidad asintótica $|a+b| < 1$, $b(b-a) < 1$, como podemos ver en la Figura 3.1.

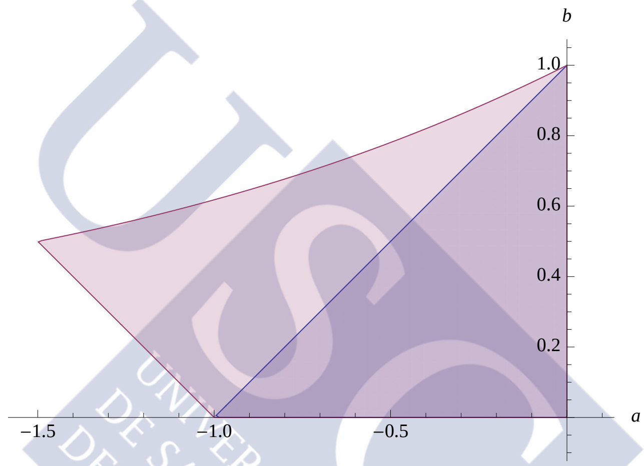

Figura 3.1: Región de estabilidad asintótica para la ecuación (3.12) en el caso $a < 0$ y $b > 0$. En oscuro, la región calculada a partir de la fórmula (3.10). En color claro, la parte que hay que añadir a la anterior para obtener la región exacta dada por el criterio de Schur-Cohn.

3.1.2. La aplicación de Lozi

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, la aplicación de Lozi

$$L(x, y) = (1 - a|x| + by, x) \tag{3.13}$$

es una función de dos variables reales introducida por Lozi en 1978, y estudiada por él mismo y muchos otros matemáticos (ver [72, 80] y las referencias bibliográficas allí mencionadas). Puede ser considerada como una versión lineal a trozos de la aplicación de Hénon.

Si se analiza qué ocurre al aplicar reiteradas veces la aplicación,

$$L^k(x, y) = L \circ \overset{k}{\cdots} \circ L(x, y),$$

se comprueba que aparece un comportamiento caótico para ciertos valores de los parámetros a y b. Resulta, pues, interesante determinar para qué valores de los parámetros un punto estacionario (x_0, y_0) es el atractor global, esto es, $\lim_{k\to\infty} L^k(x,y) = (x_0, y_0)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Veamos que el Teorema 3.2 es un herramienta útil para obtener algunos resultados en este sentido.

Definamos $L_1(x,y) = 1 - a|x| + by$. Entonces las iteraciones de la aplicación de Lozi (3.13) pueden escribirse como

$$\begin{cases} x_{k+1} = L_1(x_k, y_k), \\ y_{k+1} = x_k, \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{3.14}$$

en donde $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es una condición inicial determinada.

Por lo tanto, (3.13) es equivalente a la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden:

$$x_{k+1} = L_1(x_k, x_{k-1}) = 1 - a|x_k| + bx_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.15}$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$ y $x_{-1} = y_0 \in \mathbb{R}$ fijados.

Analizaremos únicamente el caso de un equilibrio positivo, ya que los otros casos pueden ser estudiados de manera similar.

Es inmediato comprobar que el equilibrio positivo $x_* = (1 + a - b)^{-1}$ existe si y solo si $a + 1 > b$. En este caso, el cambio de variables $z_k = x_k - x_*$ transforma (3.15) en

$$z_{k+1} = f(z_{k-1}, z_k) = -a|z_k + x_*| + ax_* + bz_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$

Por una parte, está claro que la convergencia x_n a x_* es equivalente a la convergencia de z_n a 0, mientras, por otra parte, de (3.16) se deduce directamente que

$$|f(z_{k-1}, z_k)| \leq (|a| + |b|) \operatorname{máx}\{|z_{k-1}|, |z_k|\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Consecuentemente, podemos utilizar el Teorema 3.2 para obtener el siguiente

Corolario 3.2. *Si* $|a| + |b| < 1$ *entonces*

$$|x_k - x_*| \leq \operatorname{máx}\{|x_0 - x_*|, |x_1 - x_*|\} \left(|a| + |b|\right)^{k/2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

para todas las soluciones $\{x_k\}_{k \geq -1}$ *de la ecuación* (3.15).

Observación 3.2. En particular, si $|a| + |b| < 1$, (x_*, x_*) es el atractor global del sistema dinámico de dimensión dos generado por (3.14). Este resultado es óptimo para $a > 0$, $b > 0$, ya que, en ese caso, el equilibrio (x_*, x_*) es un punto de silla si $a > 1 - b$.

3.1.3. Discretización de ecuaciones diferenciales con retardo

Consideremos la ecuación diferencial funcional

$$x'(t) = -ax(t) + b(t)f(t, x_t), \quad x_0 = \phi, \tag{3.17}$$

donde $\phi \in \mathcal{C}(I)$, $I = [-\tau, 0]$, $x_t \in \mathcal{C}(I)$ está definido por $x_t(s) = x(t+s)$ para $s \in I$, $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C}(I) \to \mathbb{R}$ es un funcional continuo, $a > 0$ y $b \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Utilizando la desigualdad de Halanay continua, puede probarse (ver [59, Corolario 3.2]) que si $|f(t, \phi)| \leq \|\phi\| = \max_{s\in I} |\phi(s)|$ para todo $\phi \in \mathcal{C}(I)$, y $\operatorname{ess\,sup}|b(t)| = b < a$, entonces todas las soluciones de (3.17) convergen a cero.

Tenemos interés en estudiar si la condición $b < a$ (independiente del retardo) para la estabilidad global de (3.17) se mantiene cuando aproximamos las soluciones de (3.17) con un método numérico.

Para obtener dicha aproximación procederemos de la siguiente manera: dividiremos el intervalo I en n subintervalos, todos de longitud $h = \tau/n$ (h será el tamaño de paso), y denotaremos

$$t_0 = 0,\ t_{k+i} = t_k + ih,\ x(t_k) = x_k,\ x(t_k + ih) = x_{k+i}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Ya que la función inicial $\boldsymbol{\phi}$ es conocida, podemos calcular $x_k = \boldsymbol{\phi}(t_k)$ para $k \in \{-n, \ldots, 0\}$. Por otra parte, dados $n+1$ puntos

$$p_{k-n} = (t_{k-n}, x_{k-n}), \ldots, p_k = (t_k, x_k),$$

definimos $\psi_k : [t_{k-n}, t_k] \to \mathbb{R}$ como la función lineal a trozos que conecta los puntos $p_{k-n}, \ldots, p_k$, y $\varphi_k(t) = \psi_k(t - t_k)$. Como $\varphi_k \in \mathcal{C}(I)$, es posible evaluar $f(t_k, \varphi_k)$.

Entonces podemos utilizar el método de Euler explícito para aproximar las soluciones de (3.17) de la siguiente manera:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = -ax_k + \bar{f}(k, x_{k-n}, \ldots, x_k), \quad k > 0, \tag{3.18}$$

en donde $\bar{f}(k, x_{k-n}, \ldots, x_k) = b(t_n)f(t_n, \varphi_n)$. Alternativamente podemos escribir (3.18) de la forma

$$x_{k+1} = (1 - ah)x_k + h\bar{f}(k, x_{k-n}, \ldots, x_k), \quad k > 0.$$

Además,

$$|h\bar{f}(k, x_{k-n}, \ldots, x_k)| = |hb(t_n)f(t_k, \varphi_k)| \leq hb\|\varphi_k\| = hb\|(k, x_{k-n}, \ldots, x_k)\|_\infty.$$

De ahí, el Teorema 3.2 nos permite asegurar que todas las soluciones de (3.18) convergen a cero si $bh < ah \leq 1$, es decir, si $b < a$ y $h \leq 1/a$. Por lo tanto, para un tamaño de paso suficientemente pequeño, podemos afirmar que las propiedades de estabilidad asintótica de la ecuación (3.17) se mantienen para la ecuación en diferencias (3.18).

3.2. Desigualdad de Halanay discreta generalizada

Presentamos, en esta sección, una generalización de la *desigualdad de Halanay discreta.*

Dados A, B, C, D, E, F números reales, consideremos las siguientes desigualdades:

$$u_{k+1} \leq Au_k + B\widetilde{u_k} + Cv_k + D\widehat{v_k}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.19}$$

$$u_k \leq A^k u_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}\big(B\widetilde{u_i} + Cv_i + D\widehat{v_i}\big), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.20}$$

$$v_k \leq Eu_k + F\widetilde{u_k}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.21}$$

en donde $\widetilde{u_k} = \max\{u_{k-n}, \ldots, u_k\}$, $\widehat{v_k} = \max\{v_{k-n}, \ldots, v_{k-1}\}$ y $n \geq 1$.

Denotemos $u \equiv \{u_k\}_{k\geq -n}$, $v \equiv \{v_k\}_{k\geq -n}$. Antes de continuar, resaltar que no es difícil probar por inducción que, cuando $A \geq 0$, si el par (u, v) cumple la desigualdad (3.19) entonces también cumple la (3.20).

Teorema 3.3. *Supongamos que el par (u, v) cumple las desigualdades* (3.20)-(3.21)*. Si $B, C, D, E, F \geq 0$, $FD + B > 0$ y*

$$B + (C + D)(E + F) < 1 - A \leq 1, \tag{3.22}$$

entonces existen constantes $K_1 \geq 0$, $K_2 \geq 0$, y $\lambda_0 \in (0, 1)$ tales que

$$u_k \leq K_1\lambda_0^k, \quad v_k \leq K_2\lambda_0^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Además, λ_0 puede elegirse como la más pequeña de las raíces de la ecuación $p(\lambda) = 0$ en el intervalo $(0, 1)$, en donde

$$p(\lambda) = \lambda^{2n+1} - (A + CE)\lambda^{2n} - (B + CF + DE)\lambda^n - DF. \tag{3.23}$$

Demostración. Sean $x \equiv \{x_k\}_{k\geq -n}$ e $y \equiv \{y_k\}_{k\geq -n}$ tales que (x, y) es una solución del sistema de ecuaciones en diferencias

$$\left.\begin{aligned} x_k &= A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}\big(B\widetilde{x_i} + Cy_i + D\widehat{y_i}\big), \\ y_k &= Ex_k + F\widetilde{x_k}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

Como $A, B, C, D, E, F \geq 0$, es sencillo probar por inducción que si $u_k \leq x_k$ y $v_k \leq y_k$ para todo $k \in \{-n, \ldots, 0\}$, entonces $u_k \leq x_k$ y $v_k \leq y_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, el sistema (3.24) es equivalente a

$$\left.\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B\widetilde{x}_k + Cy_k + D\widehat{y}_k, \\ y_k &= Ex_k + F\widetilde{x}_k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

A continuación probaremos que existe una solución (x, y) al sistema (3.25) de la forma $x_k = \lambda_0^k$, $y_k = \alpha\lambda_0^k$, con $\alpha > 0$ y $\lambda_0 \in (0, 1)$. De hecho, un par (x, y) así definido es una solución de (3.25) si y solo si

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0^{k+1} &= A\lambda_0^k + B\lambda_0^{k-n} + C\alpha\lambda_0^k + D\alpha\lambda_0^{k-n}, \\ \alpha\lambda_0^k &= E\lambda_0^k + F\lambda_0^{k-n}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

A su vez, esto es equivalente a la existencia de una solución $\lambda_0 \in (0, 1)$ de la ecuación $p(\lambda) = 0$, en donde p es el polinomio definido en (3.23).

Supongamos ahora que $DF \neq 0$, entonces $p(0) = -DF < 0$ y, en virtud de (3.22), $p(1) = 1 - A - B - (C + D)(E + F) > 0$. Por lo tanto, al ser p una función continua en $[0, 1]$, existe $\lambda_0 \in (0, 1)$ tal que $p(\lambda_0) = 0$. Como $p(\lambda)$ es un polinomio, solo puede tener un número finito de raíces y, por lo tanto, siempre podemos elegir la más pequeña de ellas.

En el caso de que $DF = 0$, tomando $q(\lambda) = p(\lambda)\lambda^{-n}$, tenemos que $q(0) = -(B + FC + ED) < 0$ y $q(1) = 1 - A - B - C(E + F) - DE > 0$. Así, existe un $\lambda_0 \in (0, 1)$ tal que $p(\lambda_0) = q(\lambda_0)\lambda_0^n = 0$.

En cualquiera de los dos casos, (λ_0, α) es una solución de (3.26), siendo $\alpha = E + F\lambda_0^{-n} \geq 0$.

Para este valor de λ_0, el par (Kx, Ky) es una solución de (3.25) para todo $K \geq 0$. Entonces, tomando

$$K = \begin{cases} \max\{0, u_{-n}, \dots, u_0, \alpha^{-1}v_{-n}, \dots, \alpha^{-1}v_0\}, & \text{si } \alpha > 0, \\ \max\{0, u_{-n}, \dots, u_0\}, & \text{si } \alpha = 0, \end{cases}$$

tenemos que $u_k \leq K\lambda_0^k$ y $v_k \leq K\alpha\lambda_0^k$ para $k \in \{-n, \dots, 0\}$. Por lo tanto, haciendo uso de la primera parte de la demostración, llegamos a la conclusión de que $u_k \leq K\lambda_0^k$ y $v_k \leq K\alpha\lambda_0^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. □

Observación 3.3. Como $A \geq 0$, entonces (3.19) implica (3.20) y, tomando $v \equiv 0$, recuperamos las conclusiones del Teorema 3.1.

3.2.1. Estabilidad de ecuaciones en diferencias

Con la ayuda del Teorema 3.3, a continuación analizaremos la estabilidad de las soluciones de la ecuación

$$x_{k+1} = ax_k - bf(k, x_{k-n}, x_{k-n+1}, \dots, x_k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.27}$$

en donde $a, b \in \mathbb{R}$ y f es como en (3.1).

Teorema 3.4. *Supongamos que existe un número real positivo b tal que se cumple una de las siguientes condiciones:*

(i) $b \leq a < 1$ *y* $0 < bn < 1$,

(ii) $a \geq 1$ *y* $0 < bn < (1 - a + b)(-1 + a + b)^{-1}$.

Si además f satisface las relaciones

$$|f(k, \boldsymbol{x})| \leq \|(x_0, \ldots, x_n)\|_\infty, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ y } \forall k \in \mathbb{N}, \quad (3.28)$$
$$|f(k, \boldsymbol{x}) - x_n| \leq n\|(\Delta x_0, \ldots, \Delta x_{n-1})\|_\infty, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ y } \forall k \in \mathbb{N}, \quad (3.29)$$

entonces existen $K > 0$ y $\lambda_0 \in (0, 1)$ tales que para cada solución $\{x_k\}_{k \geq -n}$ de la ecuación (3.27) *se tiene que*

$$|x_k| \leq K\lambda_0^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

en donde λ_0 puede calcularse de la manera explicada en el Teorema 3.3.

Como consecuencia, la solución trivial de (3.27) *es globalmente exponencialmente estable.*

Demostración. Si $\{x_k\}_{k \geq -n}$ es una solución cualquiera de la ecuación (3.27), también verifica que

$$x_{k+1} = (a - b)x_k - b\big(f(k, x_{k-n}, \ldots, x_k) - x_k\big), \quad k \in \mathbb{N},$$

y de ahí,

$$x_k = (a - b)^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (a - b)^{k-1-i}(-b)\big(f(i, x_{-n+i}, \ldots, x_i) - x_i\big), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tanto si se cumple (i) como si se cumple (ii), tenemos que $a - b > 0$, así que de (3.29) se deduce que

$$|x_k| \leq (a - b)^k |x_0| + \sum_{i=0}^{k-1} (a - b)^{k-1-i} bn \max\{|\Delta x_{-n+i}|, \ldots, |\Delta x_{i-1}|\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte, a partir de la ecuación (3.27), teniendo en cuenta (3.28), se obtiene

$$|\Delta x_k| \leq |a - 1||x_k| + b \max\{|x_{k-n}|, \ldots, |x_k|\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tomemos ahora $u_k = |x_k|$ y $v_k = |\Delta x_k|$ para $k \geq -n$, $A = a - b$, $B = C = 0$, $D = bn$, $E = |a - 1|$ y $F = b$. Entonces el par (u, v) cumple las desigualdades (3.20)-(3.21), por lo que podemos aplicar el Teorema 3.3 siempre y cuando también se cumpla la desigualdad (3.22), que en este caso resulta ser

$$\big(|a-1|+b\big)bn < 1-a+b \leq 1. \tag{3.30}$$

Para finalizar, resaltar que (3.30) se deduce tanto de la condición (i) como también de la condición (ii). $\square$

Observación 3.4. Hay numerosos ejemplos, algunos bien conocidos, de ecuaciones en diferencias, tanto lineales como no lineales, que cumplen (3.28) y (3.29). Como, para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$, se tiene que

$$|\max\{x_0,\dots,x_n\}| \leq \max\{|x_0|,\dots,|x_n|\} = \|\boldsymbol{x}\|_\infty,$$

y

$$x_n - x_i = \sum_{j=i}^{n-1} \Delta x_j \leq n \max\{\Delta x_0,\dots,\Delta x_{n-1}\}, \quad \forall i \in \{0,\dots,n\},$$

no es difícil comprobar que si se satisface la condición

$$\min_{l\in\{0,\dots,n\}} x_l \leq f(k,\boldsymbol{x}) \leq \max_{l\in\{0,\dots,n\}} x_l, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ y } \forall k \in \mathbb{N}, \tag{3.31}$$

entonces también se satisfacen tanto (3.28) como (3.29).

La condición (3.31) es análoga a la denominada *condición de Yorke* para ecuaciones diferenciales funcionales (ver [63, 68]).

Observación 3.5. Podemos analizar la estabilidad exponencial global de la ecuación (3.27) a partir de la desigualdad de Halanay discreta y el Teorema 3.2, pero solo cuando $0 < b < 1-a < 1$.

Por el contrario, el Teorema 3.4 nos permite obtener la estabilidad exponencial global de la ecuación (3.27) para algunos valores tales que $0 < 1-a < b$, y también para $1-a \leq 0$.

Queremos también poner de relieve que las condiciones en el Teorema 3.2 son independientes del orden de la ecuación (retardo), mientras que las condiciones proporcionadas por el Teorema 3.4 sí que dependen de dicho retardo.

Ejemplo 3.5. La ecuación (3.12) fue analizada en el Ejemplo 3.4, y el Teorema 3.2 proporcionaba la condición $b-a<1$ para la estabilidad exponencial global cuando $a<0$ y $b>0$.

Si aplicamos ahora el Teorema 3.4 al mismo caso, obtenemos la estabilidad exponencial global cuando se cumplan cualquiera de las siguientes condiciones:

(i) $a > -1$, $a+b \leq 0$ y $4b < 1$

(ii) $a \leq -1$ y $4b(b-a-1) < (1+a+b)$, mejorando la región de estabilidad asintótica obtenida en el Ejemplo 3.4.

En la Figura 3.2 podemos ver las regiones de estabilidad exponencial global para la ecuación (3.12), obtenidas a partir de diferentes condiciones. En azul la región calculada a partir del Teorema 3.2. En rojo las calculadas con el Teorema 3.4: la oscura se deduce de la condición (i) y la clara de la condición (ii). En verde la región que hay que añadir a las anteriores para obtener la región exacta dada por el criterio de Schur-Cohn.

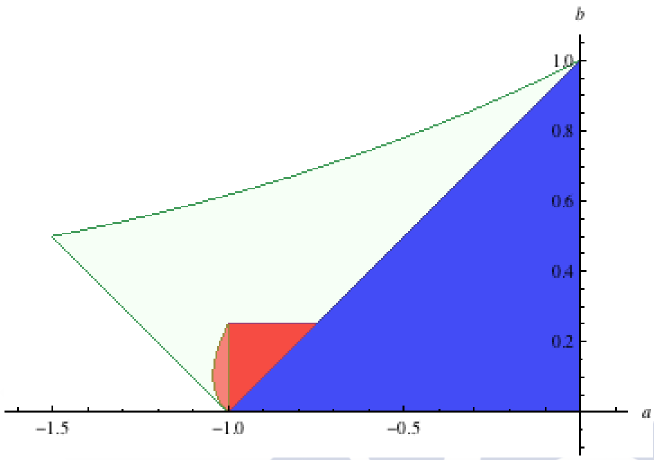

Figura 3.2: Regiones de estabilidad exponencial global para la ecuación (3.12) calculadas como se explica en el Ejemplo 3.5.

3.3. Estabilidad de ecuaciones en diferencias con máximo

En esta sección analizaremos algunas propiedades asintóticas de las soluciones de la siguiente clase de ecuaciones en diferencias:

$$\Delta x_k = -a x_k + b \max_{k-n \le l \le k} x_l, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{3.32}$$

Resaltar que la ecuación (3.32) puede interpretarse como el caso discreto de algunas ecuaciones diferenciales con máximo (ver [63, 91]).

Como consecuencia de que la función f definida por

$$f(x_0, \ldots, x_n) = \max_{l \in \{0,\ldots,n\}} x_l$$

claramente satisface la condición (3.31), podemos aplicar el Teorema 3.4 para obtener algunas relaciones entre a y b que garanticen la estabilidad exponencial global de la solución trivial. Además, a partir del Teorema 3.2 sabemos que la ecuación (3.32) es globalmente exponencialmente estable si $|b| < a \leq 1$.

Sin embargo, parece muy complicado encontrar un criterio para la estabilidad asintótica global como el expuesto en [91] para la correspondiente ecuación diferencial

$$x'(t) = -ax(t) + b \max_{t-n \leq s \leq t} x(s). \tag{3.33}$$

Por ejemplo, en [91] puede verse que la ecuación (3.33) no tiene soluciones periódicas diferentes de la trivial cuando $a \neq b$. Es más, todas las soluciones no triviales son, de hecho, estrictamente monótonas.

No ocurre lo mismo con la ecuación (3.32), como se expone en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3.6. Para $a = 2$, $b = 1$ y $n = 1$ la ecuación (3.32) se convierte en

$$x_{k+1} = -x_k + \max\{x_{k-1}, x_k\}.$$

Esta ecuación tiene una solución periódica $\{x_k\}_{k \geq -1}$, de período 2, definida por $x_k = 0$ si k es impar, y $x_k = 1$ si k es par.

Algunas propiedades pueden deducirse fácilmente para el caso general.

Teorema 3.5. *La solución trivial de la ecuación* (3.32) *es inestable si se satisface una de las siguientes condiciones:*

(i) $b > a$,

(ii) $a > 2$, $a > b > 0$.

Demostración. Para cualquiera de los casos que contemplaremos en la demostración, calcularemos una solución $\{x_k\}_{k \geq -n}$ de (3.32) a partir de una cadena inicial $\{x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0\}$ tal que $x_0 > 0$ y $x_0 \geq \max\{x_{-n}, \ldots, x_{-1}\}$, con lo que

$$\max_{l \in \{k-n, \ldots, k\}} x_l = x_0 > 0.$$

Caso (i). Cuando $b > a$ también ocurre que $1 - a + b > 1$, así que cualquier solución de (3.32) vendrá definida por $x_k = (1 - a + b)^k x_0$ para $k \in \mathbb{N}$, y es obvio que diverge a $+\infty$.

Caso (ii). Supongamos inicialmente que $a > b+2$, entonces $\lambda = a-b-1 > 1$ y se tiene que $x_1 = -\lambda x_0 < 0$. Así pues, $x_1 < x_0$ y

$$x_2 = (1-a)x_1 + bx_0 > (1-a)x_1 \geq -x_1 = \lambda x_0 > x_0.$$

Razonando de la misma manera para los términos de índice superior, obtenemos una subsucesión $\{x_{2k}\}$ tal que $x_{2k} > \lambda^k x_0$ para todo $k \geq 1$. Como $\lambda > 1$, dicha subsucesión es divergente, de lo que se deduce la inestabilidad.

Supongamos ahora que $a = b + 2$. En este caso, se llega a que

$$x_1 = -x_0 < 0, \quad x_2 = (2b+1)x_0 > x_0,$$

y se obtiene una subsucesión $x_{2k} = (2b+1)^k x_0$ para $k \in \mathbb{N}$. Ya que $2b+1 > 1$, esta subsucesión es divergente y se deduce de nuevo la inestabilidad.

Finalmente, consideremos el caso de que $2 < a < b + 2$ y $b < a$. Como $-1 < 1 - a + b < 1$ obtenemos que $x_1 = (1 - a + b)x_0 < x_0$ y

$$x_2 = (1-a)x_1 + bx_0 = \big((1-a)(1-a+b) + b\big)x_0.$$

Denotemos

$$\phi(a,b) = (1-a)(1-a+b) + b. \tag{3.34}$$

Entonces $\phi(a,b) > 0$ cuando $0 < b < a$ y, en ese caso, $\phi(a,b) > 1$ si y solo si $a > 2$. Por lo tanto, en caso de que $a > 2$, resulta que $x_2 = \phi(a,b)x_0 > x_0$, y se obtiene una subsucesión $x_{2k} = \big(\phi(a,b)\big)^k x_0$ divergente, de donde se deduce la inestabilidad. □

Observación 3.6. Cuando $a = b$, está claro que todas las sucesiones constantes son soluciones de (3.32). En ese caso, (3.32) se convierte en

$$\Delta x_k = b\big(-x_k + \max_{l \in \{k-n,\dots,k\}} x_l\big), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.35}$$

De ahí, si además $a = b > 0$, resulta que $\Delta x_k \geq 0$ y, consecuentemente, cualquier solución $\{x_k\}$ es creciente para $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\max_{k-n \leq l \leq k} x_l = x_k$ para $k \geq n$, y entonces (3.32) toma la forma $\Delta x_k = 0$, es decir, $x_{k+1} = x_k$ para todo $k \geq n$. Como consecuencia de esto, la solución trivial es estable pero no asintóticamente estable.

Si $a = b < 0$, resulta que $\Delta x_k \leq 0$, y cualquier solución es decreciente. Entonces las soluciones $\{x_n\}$ de (3.32) también son soluciones de la ecuación diferencial lineal

$$x_{k+1} = (1-a)x_k + ax_{k-n}. \tag{3.36}$$

Así, en este caso, el conjunto de soluciones de (3.32) es el conjunto de soluciones decrecientes de (3.36), y estas vienen determinadas por las raíces reales positivas del polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^{r+1} + (a-1)\lambda^r - a.$$

Ahora bien, $p(0) = -a > 0$, $p(1) = 0$, $\lim_{\lambda \to +\infty} p(\lambda) = +\infty$, y la única raíz positiva de $p'(\lambda) = 0$ es $c = (r - ra)/(r+1)$, por lo que se deduce que $p(\lambda)$ tiene sólo dos raíces positivas: $\lambda_1 = 1$ y λ_2. Distinguiremos tres casos:

- $-a > 1/r$. Entonces $\lambda_2 > c > 1$ y la solución trivial de (3.32) es inestable.
- $-a = 1/r$. También la solución trivial es inestable. Aquí $\lambda_2 = c = 1$ es una raíz múltiple del polinomio característico y, por lo tanto, $\{x_k\} = \{-mk\}$ es una solución de (3.32) para todo $m \in \mathbb{R}_+$.
- $-a < 1/r$. Ahora $\lambda_2 < c < 1$ y la solución cero es estable.

Los Teoremas 3.2, 3.4 y 3.5 proporcionan condiciones suficientes para la estabilidad o inestabilidad de las soluciones de la ecuación (3.32). En general, para un orden cualquiera $n \in \mathbb{N}$ no conocemos la naturaleza de la estabilidad de las soluciones de la ecuación (3.32) en el caso restante: $a > b$ y $1 < a \leq 2$, cuando tanto a como b son positivos.

Sin embargo, podemos abordar es estudio de la estabilidad para el caso particular en que $n = 1$, es decir, para la ecuación

$$\Delta x_k = -ax_k + b \max\{x_{k-1}, x_k\}, \quad a, b \in \mathbb{R}_+, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.37}$$

Teorema 3.6. *La solución trivial de la ecuación* (3.37) *es globalmente asintóticamente estable si y solo si $b < a < 2$.*

Demostración. Teniendo en cuenta los resultados de los Teoremas 3.2 y 3.5, solo necesitamos analizar el caso $1 < a \leq 2$.

Consideremos, inicialmente, una solución $\{x_k\}$ construida a partir de una cadena inicial $\{x_{-1}, x_0\}$ que satisfaga la condición $x_0 \geq x_{-1}$, con lo que $x_1 = (1-a+b)x_0$. Según x_0 sea cero, positivo o negativo, nos encontraremos en uno de los tres siguientes casos.

En el caso de que $x_0 > 0$, veamos, por inducción, que

$$x_k = \phi(a,b)x_{k-2}, \quad k \geq 2, \tag{3.38}$$

en donde $\phi(a,b)$ es el definido en (3.34).

Como $1 - a + b < 1$ resulta que $x_1 = (1 - a + b)x_0 < x_0$, por lo que

$$x_2 = (1-a)x_1 + bx_0 = \big((1-a)(1-a+b) + b\big)x_0 = \phi(a,b)x_0,$$

es decir, la fórmula (3.38) se cumple para $k = 2$. Supongamos que se cumple para $k \in \{2, \ldots, r\}$, veamos que también se cumple para $k = r+1$. Asumamos que r es par (el caso r impar se demuestra con argumentos similares), entonces

$$x_r = \phi(a,b)^{r/2}x_0$$

y

$$x_{r-1} = \phi(a,b)^{r/2-1}x_1 = \phi(a,b)^{r/2-1}(1-a+b)x_0.$$

Como $\phi(a,b) > 1-a+b$ y $\phi(a,b) > 0$ cuando $b < a < 2$, necesariamente $x_r \geq x_{r-1}$ y, de ahí,

$$x_{r+1} = (1-a+b)x_r = (1-a+b)\phi(a,b)^{r/2}x_0 = \phi(a,b)^{r/2}x_1 = \phi(a,b)x_{r-1},$$

con lo que (3.38) queda probado.

Debido a que $\phi(a,b) < 1$ para $b < a < 2$ y $\phi(2,b) = 1$, de (3.38) se deduce que $\lim_{k\to+\infty} x_k = 0$ si $a < 2$, mientras que $\{x_k\}$ oscila entre x_0 y $(b-1)x_0$ en el caso de que $a = 2$.

Cuando $x_0 < 0$ analizaremos dos casos distintos. Si $-1 < 1-a+b < 0$ resulta que $x_1 > 0 > x_0$ y $x_2 = \phi(a,b)x_0$, así que este caso es similar al inmediatamente anterior. Si, por el contrario, $0 \leq 1-a+b < 1$, es muy sencillo comprobar que

$$x_{k+1} = (1-a+b)^{k+1}x_0, \quad k \in \mathbb{N},$$

de donde se deduce directamente que $\lim_{k\to+\infty} x_k = 0$.

Para finalizar esta parte de la demostración, si $x_0 = 0$, entonces está claro que $x_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Si consideramos ahora una solución $\{x_k\}$ construida a partir de una cadena x_{-1}, x_0 con $x_0 < x_{-1}$, existen dos posibilidades: o bien existe $n_0 \geq 1$ tal que $x_{n_0} \geq x_{n_0-1}$, y entonces el comportamiento de la solución $\{x_k\}$ para $k \geq n_0$ será análogo al del caso ya estudiado, o bien la solución $\{x_k\}$ es estrictamente decreciente y, debido a ello, la ecuación (3.37) se convierte en la ecuación lineal de segundo orden

$$x_{k+1} = (1-a)x_k + bx_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.39}$$

El polinomio característico de (3.39) es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + (a-1)\lambda - b,$$

el cual, en el caso que nos ocupa ($0 < b < a$ y $a > 1$), tiene dos raíces reales: $\lambda_1 \in (0,1)$ y $\lambda_2 < -\lambda_1 < 0$. Ya que solo estamos interesados en las soluciones de (3.39) que son estrictamente decrecientes (las que también son soluciones de (3.37)), la única posibilidad son soluciones $\{x_k\}$ de la forma $x_k = x_0\lambda_1^k$, con $x_0 > 0$. Por lo tanto, tales soluciones convergen exponencialmente a cero, lo que completa la demostración. □

Observación 3.7. Hemos realizado varios experimentos numéricos que parecen indicar que las conclusiones del Teorema 3.6 son válidas para la ecuación (3.32) con $a, b \in \mathbb{R}_+$ y cualquier orden $n \in \mathbb{N}$.

Sin embargo, para un orden n arbitrario, nuestro método conduce a considerar un número muy elevado de casos, lo que complica excesivamente la demostración, y nos hace pensar que hay que abordar el problema desde otro punto de vista.

Capítulo 4

Ecuaciones diferenciales con argumentos constantes a trozos

El estudio de las ecuaciones diferenciales con argumentos constantes a trozos comenzó a principios de los años ochenta, y desde entonces ha sido ampliamente tratado en la literatura. Este tipo de ecuaciones, en cuyo estudio se combinan técnicas tanto de ecuaciones diferenciales como de ecuaciones en diferencias, modelan, entre otros, fenómenos biológicos (ver [18, 19, 20, 54] y las referencias allí citadas), la estabilización de sistemas de control híbridos con controlador discreto retroalimentado [69], o el comportamiento de osciladores amortiguados [104]. Asimismo, en [41] se explican modelos de dispositivos de ingeniería construidos con ecuaciones de este tipo, como el movimiento de una *rueda de Ginebra* o el soporte flexible de un agitador electrodinámico.

Podemos encontrar algún ejemplo más concreto en el estudio del efecto de la pesca en la dinámica de una población de peces. La ecuación logística, introducida por Verhulst [100] en 1838, describe el crecimiento de una población de una única especie mediante un —a día de hoy bien conocido— modelo matemático:

$$\frac{dP}{dt} = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right),$$

en donde $P(t)$ representa la población o *biomasa* en el instante $t \geq 0$, $K > 0$ se denomina *capacidad de persistencia* (capacidad de carga del sistema), y $r \geq 0$ es la *tasa intrínseca de crecimiento* de la población.

Schaefer [93] añade al modelo de Verhulst una función que incorpora el efecto de la pesca sobre el crecimiento de la población:

$$\frac{dP}{dt} = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) - cEP(t).$$

Aquí $E \geq 0$ es el *esfuerzo pesquero*, que mide la intensidad de las actividades humanas para capturar el pescado, mientras que $c \geq 0$ es un coeficiente que mide la porción de población que es capturada por unidad de esfuerzo.

En este modelo de Schaefer se asume que por cada unidad de esfuerzo pesquero se captura siempre el mismo porcentaje de población, como también que el esfuerzo pesquero no varía con el tiempo, por lo que la cantidad cE es constante.

Sin embargo, lo más frecuente es fijar el esfuerzo pesquero o el coeficiente de captura (o ambos) a partir de la población estimada de peces al inicio de cada temporada de pesca. Concretamente, el producto cE pasa a ser un porcentaje de dicha población estimada. Si tomamos la temporada de pesca como unidad de tiempo, el modelo de Schaefer se convierte en el propuesto por Gourley en [53]:

$$\frac{dP}{dt} = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) - CP([t])P(t),$$

en donde $[\cdot]$ representa la parte entera de un número real, y esta es una ecuación diferencial con argumentos constantes a trozos.

Los primeros estudios en este campo aparecen en [39, 96, 101], tras lo cual diversos autores —consultar los trabajos [40, 41] y sus referencias bibliográficas— han estudiado la estabilidad de las soluciones, propiedades de oscilación y existencia de soluciones periódicas, entre otros aspectos.

El método de las sub y sobresoluciones fue empleado en [108] para obtener resultados de existencia de soluciones periódicas. Con este objetivo, los autores presentan varios principios del máximo para el operador

$$x'(t) + M_1 x(t) + M_2 x([t-1])$$

con condiciones de frontera periódicas y deducen la existencia de al menos una solución de una ecuación no lineal de primer orden con argumentos constantes a trozos, localizada entre la subsolución y la sobresolución. En [84] se establecen varios principios del máximo para el operador lineal

$$x'(t) + mx(t) + nx([t])$$

en el espacio de las soluciones periódicas. Este operador también ha sido estudiado en [103], en este caso para el problema de valor inicial.

El antedicho método de las sub y sobresoluciones, como también el método de las —allí denominadas— sub y sobresoluciones débilmente acopladas, se utiliza en [64] para obtener condiciones que garantizan la existencia de solución para un problema de valores de frontera no lineales relativo a una ecuación diferencial en la que el retardo es una función continua.

Los principales resultados que vamos a exponer en este capítulo están recogidos en [28] y en [30]. Mejoraremos los resultados de comparación dados en [84], para lo que construiremos la función de Green asociada al operador lineal de primer orden

$$x'(t) + mx(t) + Mx([t]),$$

y obtendremos nuevos resultados de comparación dependiendo del signo de $m + M$.

Si bien la teoría de funciones de Green ha sido ampliamente estudiada para ecuaciones diferenciales ordinarias, creemos que no había sido utilizada para ecuaciones con argumentos constantes a trozos antes del trabajo [30]. Con posterioridad a la aparición de este trabajo, podemos ver funciones de Green asociadas a ecuaciones con argumentos constantes a trozos, en este caso de segundo orden, en [86] y en [106].

Este capítulo está organizado como se explica a continuación: en la Sección 4.1 presentamos las principales herramientas que utilizaremos en el resto del capítulo. En la Sección 4.2 desarrollamos una fórmula para el problema periódico general de orden n, que nos permite escribir su solución en términos de la función de Green asociada. En la Sección 4.3 resolvemos el problema de valor inicial de primer orden y, a partir de su solución, obtenemos la expresión de la función de Green asociada al problema periódico. La Sección 4.4 está dedicada a obtener principios de comparación para el operador de primer orden, tanto para el caso de valor inicial como para el de condiciones de frontera periódicas. Finalmente, en la Sección 4.5 deducimos resultados de existencia de soluciones extremas para el problema general no lineal de primer orden, con condiciones de frontera en general no lineales, como también algunos resultados de unicidad de solución. Obtenemos dichos resultados a partir de los principios del máximo estudiados en la sección anterior y de la aplicación de los métodos de las sub y sobresoluciones, como también de las sub y sobresoluciones débilmente acopladas.

4.1. Preliminares

A lo largo de todo el capítulo supondremos que T es un número real estrictamente positivo, que $[\cdot]$ representa la parte entera de un número real, denotaremos $I = [0, T] \subset \mathbb{R}$ y

$$N_T := \begin{cases} [T], & \text{si } [T] < T, \\ [T] - 1, & \text{si } [T] = T. \end{cases} \tag{4.1}$$

A partir de aquí definimos $I^* = I \cup \{-1, -2, \ldots, -N_T\}$, $I_k := [k, k+1)$ para cada $k \in \{0, \ldots, N_T - 1\}$, como también definimos $I_{N_T} := [N_T, T]$.

Denotaremos como Λ al conjunto de todas las funciones $y : I \to \mathbb{R}$ que son continuas en I_k y tales que existe $y(t^-) \in \mathbb{R}$ para todo $t \in \{1, \ldots, N_T\}$.

Para todo $r > 1$, denotaremos como Ω^r al conjunto de todas las funciones $x : I \to \mathbb{R}$ que son de clase $\mathcal{C}^{r-1}$ en I y verifican que existe $x^{(r)} \in \Lambda$. También denotaremos como $\Omega \equiv \Omega^1$ al conjunto de las funciones $x : I \to \mathbb{R}$ continuas en I y tales que existe $x' \in \Lambda$.

Así, dadas $u, v \in \Omega^r$, diremos que $u \leq v$ si y solo si $u(t) \leq v(t)$ para todo $t \in I$ y, en este caso, definiremos

$$[u, v] := \{x \in \Omega^r \mid u \leq x \leq v\}.$$

Para cada $s \in I$, denotaremos como Λ_s al conjunto de todas las funciones $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que son continuas en $[k, k+1)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \neq [s]$, son continuas en $[[s], s)$ y en $[s, [s]+1)$, y existe $v(k^-) \in \mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{Z} \cup \{s\}$. Hay que resaltar $\Lambda = \Lambda_s$ siempre que $s \in \mathbb{Z}$.

En el caso de que $r > 1$, para cada $s \in I$, denotaremos como Ω_s^r al conjunto de todas las funciones $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifican:

- $v \in \mathcal{C}^{r-2}(\mathbb{R})$.
- $v^{(r-1)} \in \mathcal{C}\big((-\infty, s)\big) \cap \mathcal{C}\big([s, +\infty)\big)$, y existe $v^{(r-1)}(s^-) \in \mathbb{R}$.
- $v^{(r)} \in \Lambda_s$.

Asimismo, para cada $s \in I$, denotaremos como $\Omega_s \equiv \Omega_s^1$ al conjunto de las funciones $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que son continuas en $(-\infty, s)$ y en $[s, \infty)$, y tales que existen $v(s^-) \in \mathbb{R}$ y $v' \in \Lambda_s$.

Utilizaremos, en el análisis de varios de los problemas que aparecerán en el capítulo, diversas propiedades de la función $h_{M,m} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en donde m y M son constantes reales, definida de la siguiente manera —ver [30]—:

$$h(t) := h_{M,m}(t) = \begin{cases} e^{-mt} - \dfrac{M}{m}(1 - e^{-mt}), & \text{si } m \neq 0, \\ 1 - Mt, & \text{si } m = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Es muy sencillo comprobar que

$$h'_{M,m}(t) = -(m+M)e^{-mt}, \quad t \in \mathbb{R},$$

y, como consecuencia directa, $h_{M,m}$ es estrictamente monótona creciente en $\mathbb{R}$ cuando $M < -m$ y estrictamente monótona decreciente en $\mathbb{R}$ si $M > -m$. Es obvio que $h_{M,m}$ es una función constante igual a 1 cuando $M = -m$, y que $h(0) = 1$ para cualquier valor tanto de m como de M. Además, denotaremos

$$C := h(1), \tag{4.3}$$

que es estrictamente mayor o estrictamente menor que 1 siempre que $m+M<0$ o $m+M>0$, respectivamente.

Dados un intervalo $I\subset\mathbb{R}$, un intervalo compacto $J=[a,b]\subset\mathbb{R}$ y una función $f:I\times J\to\mathbb{R}$, si la función $f_t:J\to\mathbb{R}$ definida por $f_t(s):=f(t,s)$ es integrable en J para cada $t\in I$, diremos que

$$\int_a^b f_t(s)ds\equiv\int_a^b f(t,s)ds$$

es una *integral paramétrica* (con parámetro $t\in I$) que determina una función $h:I\to\mathbb{R}$ definida por $h(t):=\int_a^b f(t,s)ds$.

Dados un intervalo $I\subset\mathbb{R}$ y dos funciones acotadas $a:I\to\mathbb{R}$, $b:I\to\mathbb{R}$, consideremos el conjunto

$$S(a,b)=\{(t,s)\in\mathbb{R}^2\,|\,t\in I,a(t)\le s\le b(t)\},\tag{4.4}$$

y una función $f:S(a,b)\to\mathbb{R}$. Si la función $f_t:[a(t),b(t)]\to\mathbb{R}$ definida por $f_t(s):=f(t,s)$ es integrable en $[a(t),b(t)]$ para cada $t\in I$, diremos que

$$\int_{a(t)}^{b(t)} f_t(s)ds\equiv\int_{a(t)}^{b(t)} f(t,s)ds$$

es una *integral paramétrica* (con parámetro $t\in I$) que determina una función $h:I\to\mathbb{R}$ definida por $h(t):=\int_{a(t)}^{b(t)} f(t,s)ds$.

Los siguientes lemas (ver [42]) serán clave en las primeras demostraciones que se realizarán. Los dos primeros garantizan, bajo ciertas condiciones, que las integrales paramétricas que acabamos de definir son funciones continuas. Los dos siguientes son versiones específicas de la archiconocida y comúnmente denominada *regla de Leibniz de derivación bajo el signo integral*.

Lema 4.1. *Sean $I\subset\mathbb{R}$, $J=[a,b]\subset\mathbb{R}$ dos intervalos compactos, y $f:I\times J\to\mathbb{R}$ una función continua en $I\times J$. Entonces la función $h(t)=\int_a^b f(t,s)\,ds$ es uniformemente continua en I.*

Observación 4.1. En las hipótesis del teorema anterior, puede asegurarse que, para cualquier $t_0\in I$, existen los siguientes límites y se verifica:

$$\lim_{t\to t_0}\int_a^b f(t,s)ds=\int_a^b\lim_{t\to t_0}f(t,s)ds=\int_a^b f(t_0,s)ds.$$

En el caso de que t_0 fuese uno de los extremos del intervalo I, los límites que aparecen en la fórmula anterior serían límites laterales.

Lema 4.2. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto; $a : I \to \mathbb{R}$, $b : I \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas, y $f : S(a,b) \to \mathbb{R}$ una función continua en $S(a,b)$ (definido en (4.4)). Entonces la función $h(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t,s)\,ds$ es uniformemente continua en I.*

Observación 4.2. En las hipótesis del teorema anterior, puede asegurarse que, para cualquier $t_0 \in I$, existen los siguientes límites y se verifica que:

$$\lim_{t\to t_0} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t,s)ds = \int_{\lim\limits_{t\to t_0} a(t)}^{\lim\limits_{t\to t_0} b(t)} \lim_{t\to t_0} f(t,s)ds = \int_{a(t_0)}^{b(t_0)} f(t_0,s)ds.$$

En el caso de que t_0 fuese uno de los extremos del intervalo I, los límites que aparecen en la fórmula anterior serían límites laterales.

Lema 4.3. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $J = [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto. Sea $f : I \times J \to \mathbb{R}$ una función continua en $I \times J$ tal que existe la derivada parcial $\partial f/\partial t$, que a su vez es una función continua en $I \times J$.*

Entonces la función $\int_a^b f(t,s)ds$ es derivable en I, y su derivada viene dada por:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(t,s)\,ds = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,s)\,ds, \quad t \in I. \tag{4.5}$$

Lema 4.4. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto; $a : I \to \mathbb{R}$, $b : I \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas en I; y una función $f : S(a,b) \to \mathbb{R}$ ($S(a,b)$ definido en (4.4)).*

Si a y b son funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en I, y f es continua y admite derivada parcial $\partial f/\partial t$ continua en $S(a,b)$, entonces la función $\int_{a(t)}^{b(t)} f(t,s)ds$ es derivable en I, y su derivada viene dada por:

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(t,s)\,ds = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,s)\,ds + f(t,b(t))b'(t) - f(t,a(t))a'(t), \quad t \in I. \tag{4.6}$$

Observación 4.3. En cualquier intervalo compacto $K \subset I$ seguirían siendo válidos tanto el Lema 4.3 como el Lema 4.4, aunque las derivadas en los extremos de K habría que entenderlas como derivadas laterales.

Observación 4.4. De las fórmulas (4.5) y (4.6) se deduce, respectivamente, que las derivadas de las funciones $\int_a^b f(t,s)ds$ y $\int_{a(t)}^{b(t)} f(t,s)ds$ son funciones continuas en el intervalo I.

4.2. El problema lineal de orden n

Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\sigma \in \Lambda$, estudiaremos el siguiente problema, al que nos referiremos como problema (P_n^λ):

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} m_i\, x^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{N_T} M_j x([t-j]) = \sigma(t), \quad t \in I, \tag{4.7}$$

$$x^{(i)}(0) - x^{(i)}(T) = 0, \quad i \in \{0, \ldots, n-2\}, \tag{4.8}$$

$$x^{(n-1)}(0) - x^{(n-1)}(T) = \lambda, \tag{4.9}$$

en donde $m_i, M_j \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ y $j \in \{0, \ldots, N_T\}$.

Diremos que una función $x : I^* \to \mathbb{R}$ es una *solución* del problema de valores de frontera (P_n^λ) si $x_{|I} \in \Omega^n$ y x verifica (4.7)-(4.9).

A partir del problema (P_n^λ), y con el objetivo de encontrar la solución del mismo, estudiaremos la siguiente familia de problemas, que denotaremos (P_s^n), con $s \in I$:

$$v^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} m_i v^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{N_T} M_j\, v([t-j]) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.10}$$

$$v^{(i)}(0^-) - v^{(i)}(T^+) = 0, \quad i \in \{0, \ldots, n-1\}, \tag{4.11}$$

$$v^{(n-1)}(s^+) - v^{(n-1)}(s^-) = 1. \tag{4.12}$$

Diremos que una función $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una *solución* del problema de valores de frontera (P_s^n) si $v \in \Omega_s^n$ y verifica (4.10)-(4.12).

Teorema 4.1. *Supongamos que $G(\cdot, s)$ es la única solución del problema (P_s^n) para todo $s \in I$, entonces la función $x : I^* \to \mathbb{R}$ definida por*

$$x(t) := \int_0^T G(t,s)\sigma(s)ds + \lambda G(t,0), \tag{4.13}$$

es la única solución del problema (P_n^λ).

Demostración. Denotaremos, para cada $t \in I^*$, tanto $R(t) \equiv G(t,0)$ como también $Hx(t) \equiv x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} m_i\, x^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{N_T} M_j x([t-j])$, por lo que

$$x([t-j]) = \int_0^T G([t-j],s)\sigma(s)ds + \lambda R([t-j]),\ t \in I,\ j \in \{0, \ldots, N_T\}. \tag{4.14}$$

Veamos que, si $G(\cdot, s)$ es solución del problema (P_s^n) para todo $s \in I$, entonces la función definida en (4.13) es solución del problema (P_n^λ).

Asumamos, inicialmente, que $n \geq 2$. Entonces R (su restricción al intervalo I) es una función de clase $\mathcal{C}^{n-1}$ en I y $R^{(n)} \in \Lambda$.

Por una parte, tenemos que

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^T G(t,s)\sigma(s)ds + \lambda R'(t), \quad t \in I, \tag{4.15}$$

de donde, aplicando el Lema 4.3 a la función $G(t,s)\sigma(s)$ en cada conjunto $I \times I_k$ con $k \in \{0,\dots,N_T\}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_0^T G(t,s)\sigma(s)ds &= \sum_{k=0}^{N_T} \frac{d}{dt}\int_{I_k} G(t,s)\sigma(s)ds \\ &= \sum_{k=0}^{N_T} \int_{I_k} \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\sigma(s)ds \\ &= \int_0^T \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\sigma(s)ds, \quad t \in I, \end{aligned} \tag{4.16}$$

lo que finalmente nos conduce a

$$x'(t) = \int_0^T \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\sigma(s)ds + \lambda R'(t), \quad t \in I.$$

Aquí, como en el resto de la demostración, las derivadas en los extremos de intervalos cerrados han de interpretarse como derivadas laterales (ver Observación 4.3).

En realidad $G(\cdot,s) \in \mathcal{C}^{n-2}(\mathbb{R})$ por lo que el Lema 4.3 puede aplicarse a las funciones $(\partial^i G/\partial t^i)(t,s)\sigma(s)$ para cada $i \in \{1,\dots,n-2\}$ en cada conjunto $I \times I_k$ con $k \in \{0,\dots,N_T\}$. Así, razonando como en el cálculo de $x'(t)$, por inducción obtenemos que

$$x^{(i)}(t) = \int_0^T \frac{\partial^i G}{\partial t^i}(t,s)\sigma(s)ds + \lambda R^{(i)}(t), \quad t \in I, \quad i \in \{1,\dots,n-2\}. \tag{4.17}$$

Para calcular $x^{(n-1)}$ en el conjunto I hemos de tener en cuenta que la derivada $(\partial^{(n-1)}G/\partial t^{n-1})(t,s)$ no es continua cuando $t = s$. En el caso de que $t \in \mathbb{Z}$ podemos seguir aplicando el Lema 4.3 a dicha función en cada conjunto $I \times I_k$ con $k \in \{0,\dots,N_T\}$, por lo que podemos garantizar, como en el cálculo de las derivadas de orden inferior, la existencia de la derivada y que la fórmula (4.17) es válida también para $i = n-1$ cuando $t \in I \cap \mathbb{Z}$.

Sin embargo, cuando $t \notin \mathbb{Z}$, el Lema 4.3 puede usarse para cada conjunto $I \times I_k$ con $k \in \{0,\dots,N_T\}$ tal que $k \neq [t]$ de igual manera que se hizo para las derivadas de orden inferior, pero no es aplicable al conjunto $I \times [[t],[t]+1]$, y tendremos que utilizar el Lema 4.4 para calcular $x^{(n-1)}(t)$.

Para todo $t \in I$ tal que $t \notin \mathbb{Z}$, se tiene que

$$\begin{aligned} x^{(n-1)}(t) = &\sum_{k=0}^{[t]-1} \int_{I_k} \frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(t,s)\sigma(s)ds + \frac{d}{dt}\int_{[t]}^{[t]+1} \frac{\partial^{n-2} G}{\partial t^{n-2}}(t,s)\sigma(s)ds \\ &+ \sum_{k=[t]+1}^{N_T} \int_{I_k} \frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(t,s)\sigma(s)ds + \lambda R^{(n-1)}(t), \end{aligned} \tag{4.18}$$

en donde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{[t]}^{[t]+1} \frac{\partial^{n-2} G}{\partial t^{n-2}}(t,s)\sigma(s)ds = &\frac{d}{dt}\int_{[t]}^{t} \frac{\partial^{n-2} G}{\partial t^{n-2}}(t,s)\sigma(s)ds \\ &+ \frac{d}{dt}\int_{t}^{[t]+1} \frac{\partial^{n-2} G}{\partial t^{n-2}}(t,s)\sigma(s)ds. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Aplicando el Lema 4.4 obtenemos que, para todo $t \in I$ tal que $t \notin \mathbb{Z}$,

$$\frac{d}{dt}\int_{[t]}^{t} \frac{\partial^{n-2} G}{\partial t^{n-2}}(t,s)\sigma(s)ds = \int_{[t]}^{t} \frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(t,s)\sigma(s)ds + \frac{\partial^{n-2} G}{\partial t^{n-2}}(t,t^-)\sigma(t^-),$$

y que

$$\frac{d}{dt}\int_{t}^{[t]+1} \frac{\partial^{n-2} G}{\partial t^{n-2}}(t,s)\sigma(s)ds = \int_{t}^{[t]+1} \frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(t,s)\sigma(s)ds - \frac{\partial^{n-2} G}{\partial t^{n-2}}(t,t^+)\sigma(t^+),$$

y, al ser $(\partial^{n-2}G/\partial t^{n-2})(t,s)\sigma(s)$ una función continua en $I \times \big[[t],[t]+1\big]$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{[t]}^{[t]+1} \frac{\partial^{n-2} G}{\partial t^{n-2}}(t,s)\sigma(s)ds = &\int_{[t]}^{[t]+1} \frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(t,s)\sigma(s)ds \\ &+ \frac{\partial^{n-2} G}{\partial t^{n-2}}(t,t^-)\sigma(t^-) - \frac{\partial^{n-2} G}{\partial t^{n-2}}(t,t^+)\sigma(t^+) \\ = &\int_{[t]}^{[t]+1} \frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(t,s)\sigma(s)ds. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Por lo tanto, hasta el momento hemos demostrado que

$$x^{(i)}(t) = \int_0^T \frac{\partial^i G}{\partial t^i}(t,s)\sigma(s)ds + \lambda R^{(i)}(t), \quad t \in I, \quad i \in \{1,\dots,n-1\}, \tag{4.21}$$

y que (Observación 4.4) la función $x(t)$ es de clase $\mathcal{C}^{n-1}$ en I.

Pasemos a calcular $x^{(n)}(t)$ para cualquier $t \in I$. Ahora resulta que la derivada $(\partial^{(n)}G/\partial t^n)(t,s)$ es una función de Λ_s para cada $s \in I$, debido a lo cual no puede utilizarse el Lema 4.3 en cada conjunto $I \times I_k$ como hasta ahora.

Siempre que $t \in I$ y $t \notin \mathbb{Z}$, podremos aplicar el Lema 4.3 a cada conjunto $([t],[t]+1) \times I_k$ con $k \in \{0,\ldots,N_T\}$ tal que $k \neq [t]$ para obtener

$$\begin{aligned} x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{[t]-1} \int_{I_k} \frac{\partial^n G}{\partial t^n}(t,s)\sigma(s)ds + \frac{d}{dt}\int_{[t]}^{[t]+1} \frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(t,s)\sigma(s)ds \\ + \sum_{k=[t]+1}^{N_T} \int_{I_k} \frac{\partial^n G}{\partial t^n}(t,s)\sigma(s)ds + \lambda R^{(n)}(t), \end{aligned} \tag{4.22}$$

en donde, aplicando el Lema 4.4 como en el cálculo de la derivada $x^{(n-1)}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{[t]}^{[t]+1} \frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(t,s)\sigma(s)ds = \int_{[t]}^{[t]+1} \frac{\partial^n G}{\partial t^n}(t,s)\sigma(s)ds \\ + \frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(t,t^-)\sigma(t^-) - \frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(t,t^+)\sigma(t^+) \end{aligned} \tag{4.23}$$

Ahora, hemos de tener en cuenta que $\sigma(t^+) = \sigma(t^-)$, como también que

$$\frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(t,t^-) = \frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(t^+,t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(t,t^+) = \frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(t^-,t),$$

y que $G(\cdot,s)$, al ser solución del problema (P_s^n), verifica la condición (4.12).

Entonces (4.23) pasa a ser

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{[t]}^{[t]+1} \frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(t,s)\sigma(s)ds &= \int_{[t]}^{[t]+1} \frac{\partial^n G}{\partial t^n}(t,s)\sigma(s)ds \\ &\quad + \left(\frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(t^+,t) - \frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(t^-,t)\right)\sigma(t) \\ &= \int_{[t]}^{[t]+1} \frac{\partial^n G}{\partial t^n}(t,s)\sigma(s)ds + \sigma(t), \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$x^{(n)}(t) = \int_0^T \frac{\partial^n G}{\partial t^n}(t,s)\sigma(s)ds + \lambda R^{(n)}(t) + \sigma(t), \quad t \in I,\ t \notin \mathbb{Z}. \tag{4.24}$$

Hemos visto que $x^{(n)}$ existe y es continua en el interior de los intervalos I_k para $k \in \{0,\ldots,N_T\}$. En general, para $k \in \{0,\ldots,N_T\}$, no existirá $x^{(n)}(k)$, pero sí podremos calcular $x^{(n)}(k^+) \in \mathbb{R}$ y $x^{(n)}(k^-) \in \mathbb{R}$:

$$x^{(n)}(k^+) = \lim_{t\to k^+} \int_0^T \frac{\partial^n G}{\partial t^n}(t,s)\sigma(s)ds + \lambda R^{(n)}(k^+) + \sigma(k^+), \tag{4.25}$$

en donde, aplicando el Lema 4.1 en cada conjunto $I_k \times I_j$ con $k \neq j$,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to k^+}\int_0^T \frac{\partial^n G}{\partial t^n}(t,s)\sigma(s) &= \sum_{i=0}^{N_T}\lim_{t\to k^+}\int_{I_i}\frac{\partial^n G}{\partial t^n}(t,s)\sigma(s)ds\\ &= \sum_{i=0,i\neq k}^{N_T}\int_{I_i}\frac{\partial^n G}{\partial t^n}(k^+,s)\sigma(s)ds\\ &\quad+\lim_{t\to k^+}\int_k^{k+1}\frac{\partial^n G}{\partial t^n}(t,s)\sigma(s)ds.\end{aligned}\tag{4.26}$$

A su vez, aplicando el Lema 4.2, se llega a que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to k^+}\int_k^{k+1}\frac{\partial^n G}{\partial t^n}(t,s)\sigma(s)ds &= \lim_{t\to k^+}\int_k^t\frac{\partial^n G}{\partial t^n}(t,s)\sigma(s)ds\\ &\quad+\lim_{t\to k^+}\int_t^{k+1}\frac{\partial^n G}{\partial t^n}(t,s)\sigma(s)ds\\ &=\int_k^{k+1}\frac{\partial^n G}{\partial t^n}(k^+,s)\sigma(s)ds.\end{aligned}\tag{4.27}$$

En conclusión, para $k \in \{0,\ldots,N_T\}$ se tiene que

$$x^{(n)}(k^+) = \int_0^T \frac{\partial^n G}{\partial t^n}(k^+,s)\sigma(s)ds + \lambda R^{(n)}(k^+) + \sigma(k^+),\tag{4.28}$$

y, utilizando argumentos similares, que

$$x^{(n)}(k^-) = \int_0^T \frac{\partial^n G}{\partial t^n}(k^-,s)\sigma(s)ds + \lambda R^{(n)}(k^-) + \sigma(k^-).\tag{4.29}$$

Ya se ha comprobado anteriormente que $x^{(n)}$ es una función continua en el interior de los intervalos I_k para $k \in \{0,\ldots,N_T\}$, así que finalmente $x^{(n)}$ es una función en Λ. Además,

$$x^{(n)}(t) = \int_0^T \frac{\partial^n G}{\partial t^n}(t,s)\sigma(s)ds + \lambda R^{(n)}(t) + \sigma(t),\quad t\in I,\tag{4.30}$$

tomando $x^{(n)}(k) = x^{(n)}(k^+)$ para cada $k \in \{0,\ldots,N_T\}$.

Utilizando (4.14), (4.21) y (4.30) se llega a que

$$\begin{aligned}Hx(t) &= \int_0^T \frac{\partial^n G}{\partial t^n}(t,s)\sigma(s) + \lambda R^{(n)}(t) + \sigma(t)\\ &\quad+\sum_{i=0}^{n-1} m_i\left(\int_0^T \frac{\partial^i G}{\partial t^i}(t,s)\sigma(s)ds + \lambda R^{(i)}(t)\right)\\ &\quad+\sum_{j=0}^{N_T} M_j\left(\int_0^T G([t-j],s)\sigma(s)ds + \lambda R([t-j])\right),\end{aligned}$$

de donde, agrupando convenientemente los sumandos, se obtiene que

$$Hx(t) = \int_0^T \left(\frac{\partial^n G}{\partial t^n}(t,s) + \sum_{i=0}^{n-1} m_i \frac{\partial^i G}{\partial t^i}(t,s) + \sum_{j=0}^{N_T} M_j G([t-j],s) \right) \sigma(s) ds$$
$$+ \lambda \left(R^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} m_i R^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{N_T} M_j R([t-j]) \right) + \sigma(t).$$

Si tenemos en cuenta que $G(\cdot, s)$ verifica la condición (4.10) por ser solución del problema (P_s^n) para cada $s \in I$, en particular $R(t) = G(t,0)$ es solución del problema (P_n^0), llegamos a que

$$Hx(t) = x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} m_i \, x^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{N_T} M_j x\big([t-j]\big) = \sigma(t). \tag{4.31}$$

Por otra parte, a partir de (4.21), para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ tenemos que

$$x^{(i)}(0) - x^{(i)}(T) = \int_0^T \left(\frac{\partial^i G}{\partial t^i}(0,s) - \frac{\partial^i G}{\partial t^i}(T,s) \right) \sigma(s) ds + \lambda\big(R^{(i)}(0) - R^{(i)}(T)\big).$$

Como, por ser solución de (P_s^n), $G(t,s)$ verifica (4.11) y está en Ω_s^n, no es difícil comprobar que

$$\int_0^T \left(\frac{\partial^i G}{\partial t^i}(0,s) - \frac{\partial^i G}{\partial t^i}(T,s) \right) \sigma(s) ds = 0$$

para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, como también que $R^{(i)}(0) - R^{(i)}(T) = 0$ para todo $i \in \{0, \ldots, n-2\}$.

Además, a partir del hecho de que $R(t) = G(t,0)$ verifica (4.12) por ser solución de (P_0^n), es sencillo deducir que $R^{(n-1)}(0) - R^{(n-1)}(T) = 1$.

Debido a todo lo anteriormente expuesto, resulta claro que

$$x^{(i)}(0) - x^{(i)}(T) = 0, \quad i \in \{0, \ldots, n-2\}, \tag{4.32}$$

y que

$$x^{(n-1)}(0) - x^{(n-1)}(T) = \lambda. \tag{4.33}$$

A partir de (4.31), (4.32) y (4.33) es evidente que x verifica la ecuación y las condiciones de frontera del problema (P_n^λ).

Previamente ya se comprobó que x es de clase $\mathcal{C}^{n-1}$ en I y que $x^{(n)} \in \Lambda$, es decir, que $x \in \Omega^n$ y, por lo tanto, x es solución del problema (P_n^λ).

Para acabar esta parte de la demostración, cuando $n = 1$ la expresión de x' puede obtenerse igual que se obtuvo la de $x^{(n)}$ cuando $n \geq 2$, y el resto de los cálculos se realizarían de manera análoga.

Finalizaremos la demostración comprobando que el problema (P_n^λ) tiene solución única si cada problema (P_s^n) tiene solución única para todo $s \in I$.

Si suponemos que existen dos soluciones, x_1 y x_2, distintas del problema (P_n^λ), necesariamente $u = x_1 - x_2$ será una solución no trivial del problema homogéneo (P_n^0). Entonces, para todo $s \in I$, $G(\cdot, s) + u$ será una solución del problema (P_s^n) distinta de $G(\cdot, s)$, lo que contradice las hipótesis del teorema. □

No será sencillo, en general, encontrar las soluciones de los problemas (P_s^n) y, con ellas, las del problema (P_n^λ), aunque en la siguiente sección podemos ver cómo calcular la expresión de la función de Green para el problema lineal de primer orden.

4.3. El problema lineal de primer orden

Estudiaremos en esta sección los problemas de primer orden (P_1^λ) y (P_s^1) con $m_0 = m \in \mathbb{R}$, $M_0 = M \in \mathbb{R}$ y $M_j = 0$ para $j \geq 1$, y los denotaremos (P^λ) y (P_s) respectivamente.

En concreto, dados λ, m, $M \in \mathbb{R}$ y $\sigma \in \Lambda$, denominaremos problema (P^λ) al problema

$$x'(t) + mx(t) + Mx([t]) = \sigma(t), \quad t \in I, \quad x(0) - x(T) = \lambda, \tag{4.34}$$

mientras que, para cada $s \in I$, el que denominaremos problema (P_s) será

$$x'(t) + mx(t) + Mx([t]) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.35}$$
$$x(0^-) - x(T^+) = 0, \quad x(s^+) - x(s^-) = 1. \tag{4.36}$$

Previamente estudiaremos el problema lineal pero con valor inicial.

4.3.1. El problema de valor inicial

Dados dos valores m, $M \in \mathbb{R}$ y una función $\sigma \in \Lambda$, prestemos atención al siguiente problema:

$$x'(t) + mx(t) + Mx([t]) = \sigma(t), \quad t \in [0, +\infty), \quad x(0) = x_0, \tag{4.37}$$

en donde x_0 es un número real.

Teorema 4.2. *El problema de valor inicial* (4.37) *tiene una única solución para cada* $x_0 \in \mathbb{R}$.

Demostración. Para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$, el problema (4.37) puede reformularse como una familia de problemas de valor inicial en los intervalos $[k, k+1)$ para $k \in \mathbb{N}$, esto es,

$$x'(t) + mx(t) + Mx([t]) = \sigma(t), \quad t \in [k, k+1), \quad x(k) = x_k, \tag{4.38}$$

para $k \in \mathbb{N}$.

Ya que $x([t]) = x_k$ para todo $t \in [k, k+1)$, la única solución del problema (4.38) viene dada por

$$x(t) = x_k h(t-k) + \int_k^t \sigma(s) e^{-m(t-s)} ds, \tag{4.39}$$

siendo h la función definida en (4.2).

Debido a la necesaria continuidad de x, llegamos a la siguiente ecuación en diferencias lineal

$$x_{k+1} = Cx_k + g_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4.40}$$

en donde C está definido en (4.3) y

$$g_k = \int_k^{k+1} \sigma(s) e^{-m(k+1-s)} ds, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.41}$$

Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ dado, la ecuación discreta (4.40) tiene una única solución dada por la expresión

$$x_k = C^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} C^{k-1-j} g_j, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.42}$$

Por lo tanto, el problema (4.37) tiene una única solución dada por

$$x(t) = \begin{cases} x_0\, h(t) + \int_0^t \sigma(s) e^{-m(t-s)} ds, & \text{si } t \in [0,1], \\ x_1\, h(t-1) + \int_1^t \sigma(s) e^{-m(t-s)} ds, & \text{si } t \in [1,2], \\ \quad \vdots & \\ x_k\, h(t-k) + \int_k^t \sigma(s) e^{-m(t-s)} ds, & \text{si } t \in [k, k+1], \\ \quad \vdots\,, & \end{cases} \tag{4.43}$$

en donde x_k es el de la expresión (4.42) y h la función definida en (4.2). □

El siguiente corolario es una consecuencia directa de este resultado.

Corolario 4.1. *Dados $m, M \in \mathbb{R}$ y $\sigma \in \Lambda$, el problema de valor inicial*

$$x'(t) + mx(t) + Mx([t]) = \sigma(t), \quad t \in I = [0, T], \quad x(0) = x_0, \tag{4.44}$$

tiene una única solución para cada $x_0 \in \mathbb{R}$.

Corolario 4.2. *Dados $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $C \neq 0$ (C definido en (4.3)), y $\sigma \in \Lambda$, el problema de valor intermedio*

$$x'(t) + mx(t) + Mx([t]) = \sigma(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(0) = x_0, \tag{4.45}$$

tiene una única solución para cada $x_0 \in \mathbb{R}$.

Demostración. La clave de la demostración del Teorema 4.2 es resolver la ecuación diferencial en cada intervalo $[k, k+1)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, aunque en realidad es posible resolverla para cada intervalo $[k, k+1)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Es por esto que las fórmulas (4.40) y (4.41) son válidas para $k \in \mathbb{Z}$, aunque, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, la ecuación en diferencias (4.40) solo puede resolverse para $k < 0$ cuando $C \neq 0$. En ese caso, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, la única solución de esta ecuación viene dada por la expresión

$$x_k = \begin{cases} C^k x_0 - \displaystyle\sum_{j=k}^{-1} C^j g_{k-j-1}, & \text{si } k < 0, \\ C^k x_0 + \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} C^{k-1-j} g_j, & \text{si } k \geq 0. \end{cases} \tag{4.46}$$

Por lo tanto, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, el problema (4.45) tiene una única solución dada por

$$x(t) = x_k h(t-k) + \int_k^t \sigma(s) e^{-m(t-s)} ds, \quad t \in [k, k+1), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{4.47}$$

en donde x_k es el de la expresión (4.46) y h la función definida en (4.2). $\square$

Observación 4.5. Una forma alternativa —y más simple— de expresar la solución del problema (4.45) es la siguiente:

$$x(t) = x_{[t]} h(t - [t]) + \int_{[t]}^t \sigma(s) e^{-m(t-s)} ds, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.48}$$

en donde $x_{[t]}$ se obtiene partir de las expresiones (4.41) y (4.46), es decir,

$$x_{[t]} = C^{[t]} x_0 - \sum_{k=[t]}^{-1} C^k g_{[t]-k-1}, \quad t \in (-\infty, 0), \tag{4.49}$$

o bien,

$$x_{[t]} = C^{[t]}x_0 + \sum_{k=0}^{[t]-1} C^{[t]-1-k} g_k, \quad t \in [0, +\infty). \tag{4.50}$$

Las expresiones (4.48) e (4.50) son válidas para expresar tanto la solución del problema (4.37) (substituyendo $t \in \mathbb{R}$ por $t \in [0, +\infty)$), como la del problema (4.44) (reemplazando $t \in \mathbb{R}$ por $t \in I$).

Observación 4.6. Si tomamos $\sigma \equiv 0$, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ la solución única del problema (4.45) viene dada por

$$x(t) = C^{[t]}x_0 h(t - [t]), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.51}$$

4.3.2. Función de Green para el problema periódico

Ahora vamos a obtener las soluciones del problema (P^λ) en función de las soluciones de los problemas (P_s) con $s \in I$. Veremos que tal problema tiene una única solución si y solo si los problemas (P_s) también tienen una única solución para cada $s \in I$.

Teorema 4.3. *Dados $\sigma \in \Lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $s \in I$, los problemas (P^λ) y (P_s) tienen una única solución si y solo si $m + M \neq 0$. En ese caso, la única solución del problema (P^λ) viene dada por la siguiente expresión:*

$$x(t) = \int_0^T G(t, s)\sigma(s)ds + \lambda G(t, 0), \tag{4.52}$$

en donde $G(\cdot, s)$ es la única solución del problema (P_s).

Demostración. Para resolver el problema (P_s), y asumiendo que tiene solución, denotaremos por $G(t, s)$ al valor de la solución de (P_s) en el punto $t \in \mathbb{R}$. Consideraremos varios casos distintos.

(*a*) $s = 0$. En este caso, las condiciones de frontera (4.36) se convierten en

$$x_0 = x(0^+) = x(0^-) + 1 = x(T^+) + 1 = x(T) + 1,$$

y así, $G(t, 0)$ es la solución del problema

$$x'(t) + mx(t) + Mx([t]) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x_0 = x(T) + 1.$$

Entonces, para todo $t \in [0, +\infty)$, $G(t, 0)$ viene dada por la expresión (4.51), por lo que

$$G(T, 0) = C^{N_T} x_0 h(T - N_T),$$

y, debido a ello, $x_0 = x(T) + 1$ si y solo si

$$x_0 = \frac{1}{1 - C^{N_T} h(T - N_T)}. \tag{4.53}$$

(*b*) $s = T$. Ahora las condiciones (4.36) pasan a ser

$$x_0 = x(0^+) = x(0^-) = x(T^+) = x(T^-) + 1,$$

y $G(t, T)$ es la solución de

$$x'(t) + mx(t) + Mx([t]) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x_0 = x(T^-) + 1.$$

Así es que, de nuevo, $G(t, T)$ viene dada por (4.51), lo que quiere decir que $G(t, 0) = G(t, T)$ y este caso es análogo al anterior. Por lo tanto, tenemos que $x_0 = x(T^-) + 1$ si y solo si x_0 viene dado por la expresión (4.53).

(*c*) $0 < s < T$. En este caso, $G(t, s)$ es solución del problema

$$\begin{cases} x'(t) + mx(t) + Mx([t]) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x(T), \quad x(s^+) = x(s^-) + 1. \end{cases} \tag{4.54}$$

Entonces, para todo $t \in [0, s)$, $G(t, s)$ es la solución del problema

$$x'(t) + mx(t) + Mx([t]) = 0, \quad t \in [0, s), \quad x(0) = x_0,$$

y, una vez más, vendrá dada por la expresión (4.51).

Por otro lado, para todo $t \geq s$, $G(t, s)$ será la solución del problema

$$x'(t) + mx(t) + Mx([t]) = 0, \quad t \in [s, +\infty), \quad x(s) = x_s, \tag{4.55}$$

y hemos de distinguir varios casos para calcularla.

(*c*1) $s \in \mathbb{Z}$. Tenemos que

$$x(s^-) = G(s^-, s) = C^{s-1} x_0 h(s - (s - 1)) = C^s x_0,$$

debido a lo cual

$$x_s = x(s^+) = x(s^-) + 1 = C^s x_0 + 1$$

y, para cada $s \in (0, T)$,

$$G(t, s) = \begin{cases} C^{[t]} x_0 h(t - [t]), & \text{si } 0 \leq t < s, \\ C^{[t]-s} x_s h(t - [t]), & \text{si } 0 < s \leq t. \end{cases} \tag{4.56}$$

Entonces

$$G(T, s) = C^{N_T - s} x_s h(T - N_T) = C^{N_T} x_0 h(T - N_T) + C^{N_T - s} h(T - N_T),$$

y $x(0) = x(T)$ si y solo si

$$x_0 = \frac{C^{N_T - s} h(T - N_T)}{1 - C^{N_T} h(T - N_T)}. \tag{4.57}$$

$(c2)$ $s \notin \mathbb{Z}$. Por lo tanto $s \in \big([s],[s+1]\big)$ y

$$x(s^-) = G(s^-,s) = C^{[s]}x_0 h\big(s-[s]\big),$$

con lo que

$$x_s = x(s^+) = x(s^-) + 1 = C^{[s]}x_0 h(s-[s]) + 1.$$

Para calcular la función de Green hemos de tener en cuenta que, para todo $t \in \big[s,[s]+1\big)$, resulta que $[t]=[s]$ y $G(t,s)$ es la única solución del problema

$$x'(t) + mx(t) = -MG([s],s) = -MC^{[s]}x_0, \quad x(s) = x_s, \tag{4.58}$$

es decir,

$$G(t,s) = C^{[t]}x_0 h\big(t-[t]\big) + e^{-m(t-s)}. \tag{4.59}$$

Ahora, para todo $t \geq [s]+1$, $G(t,s)$ será la única solución del problema

$$x'(t) + mx(t) + Mx([t]) = 0, \quad x([s]+1) = x_{[s]+1}, \tag{4.60}$$

en donde $x_{[s]+1}$, debido a la necesaria continuidad de la función de Green, se calcula a partir de (4.59) de la siguiente manera:

$$x_{[s]+1} = G([s]+1,s) = C^{[s]+1}x_0 + e^{-m([s]+1-s)}.$$

Por lo tanto, para todo $t \geq [s]+1$ tendremos que

$$G(t,s) = \big(C^{[s]+1}x_0 + e^{-m([s]+1-s)}\big)C^{[t]-[s]-1}h(t-[t]). \tag{4.61}$$

De ahí que, a partir de (4.51), (4.59) y (4.61), para todo $s \in (0,T)$ tal que $s \notin \mathbb{Z}$,

$$G(t,s) = \begin{cases} C^{[t]}x_0 h(t-[t]), & \text{si } 0 \leq t < s, \\ C^{[t]}x_0 h\big(t-[t]\big) + e^{-m(t-s)}, & \text{si } s \leq t < [s]+1, \\ C^{[t]-[s]-1}x_{[s]+1} h(t-[t]), & \text{si } [s]+1 \leq t. \end{cases} \tag{4.62}$$

Entonces $x(0) = x(T)$ si y solo si

$$x_0 = \begin{cases} \dfrac{e^{-m(T-s)}}{1 - C^{N_T}h(T-N_T)}, & \text{si } T < [s]+1, \\ \dfrac{e^{-m([s]+1-s)}h(T-N_T)C^{N_T-[s]-1}}{1-C^{N_T}h(T-N_T)}, & \text{si } T \geq [s]+1. \end{cases} \tag{4.63}$$

Hemos probado que, en todos los casos previos, el problema (P_s) tiene una única solución si y solo si $C^{N_T} h(T - N_T) \neq 1$.

Pero cuando $M + m > 0$, se cumple que $h(T - N_T) > 1$ y $C = h(1) > 1$, y así $C^{N_T} h(T - N_T) > 1$.

Del mismo modo, $h(T - N_T) < 1$ y $C < 1$ si $M + m < 0$, por lo que $C^{N_T} h(T - N_T) < 1$ en ese caso.

Finalmente, la función h es constante con valor 1 siempre que $M + m = 0$, así que $C = h(1) = 1 = h(T - N_T)$ y $C^{N_T} h(T - N_T) = 1$.

Por todo lo anterior, está claro que el problema (P_s) tiene una única solución si y solo si $M + m \neq 0$.

Por otra parte, a partir de la expresión (4.51), si estamos buscando la solución del problema (P^0) con $\sigma \equiv 0$, al ser un elemento de Ω, tenemos que $x_0 = x(T)$ si y solo si $x_0 = 0$ (i.e. $x \equiv 0$) o $C^{N_T} h(T - N_T) = 1$ (i.e. $m + M = 0$).

Como consecuencia de esto, el problema (P^λ) tiene una única solución si y solo si $m + M \neq 0$.

La segunda parte del resultado es un caso particular del Teorema 4.1. □

4.4. Resultados de comparación

En esta sección se prueban algunos resultados de comparación para los problemas de primer orden, tanto para el problema periódico como para el problema de valor inicial. Siguiendo los argumentos dados en [21], puede comprobarse que la solución de (P^λ) —con λ y σ no negativas— tiene signo constante en I si y solo si la función de Green asociada tiene signo constante en $I \times I$. Entonces, es suficiente discutir para qué valores de m y M la función de Green G no cambia de signo en $I \times I$.

Los siguientes dos resultados son relativos al problema periódico, en el primero exponemos las estimaciones óptimas de las constantes reales m y M para las cuales las soluciones de (P^λ) —con λ y σ no negativas— son no negativas en I.

Lema 4.5. *Supongamos que $m + M \neq 0$. Sean $\sigma \in \Lambda$ una función no negativa en I y $\lambda \geq 0$. Entonces la única solución del problema (P^λ) es no negativa en I si y solo si se cumple una de las siguientes condiciones:*

(*i*) $0 \neq -m < M \leq \dfrac{m}{e^m - 1}$.

(*ii*) $0 = -m < M \leq 1$.

Demostración. Antes de nada, fijémonos en que, cuando $m + M \neq 0$, la única solución del problema (P^0) con $\sigma \equiv 1$ viene dada por la expresión $1/(m + M)$.

Por lo tanto, $m + M > 0$ es una condición necesaria para asegurar que el resultado se cumple para cualquier $\sigma \in \Lambda$ que sea no negativa en I.

Por otra parte, el Teorema 4.3 garantiza que (4.52) es la expresión de la única solución del problema (P^λ), por lo que es evidente que si la función de Green asociada al problema (P_s) es no negativa en $I \times I$, entonces la única solución de (P^λ) será no negativa en I.

Como $M + m > 0$, sabemos que el problema (P^λ) tiene una única solución en Ω y, en este caso, como la función h definida en (4.3) es estrictamente decreciente, tenemos que $1 = h(0) > h(t) > h(1) = C$ para todo $t \in (0, 1)$, por lo que $h(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, 1]$ si y solo si $C \geq 0$.

Por otra parte, a partir de (4.53), (4.57) y (4.63) obtenemos que, si $C \geq 0$, entonces $x_0 \geq 0$ en todos los posibles casos descritos en el Teorema 4.3. Por lo tanto, teniendo en cuenta la expresión de la función de Green en (4.51), (4.56) y (4.62), no es difícil comprobar que $G(t, s) \geq 0$ en $I \times I$ si y solo si $C \geq 0$.

Pero, para $M > -m \neq 0$, $C \geq 0$ si y solo si $M \leq m/(e^m - 1)$, de lo que se deduce que el caso (i) es cierto.

Por otra parte, si $M > -m = 0$ entonces $C = 1 - M$ y, en este caso, $C \geq 0$ si y solo si $M \leq 1$, lo que prueba el caso (ii) y finaliza la demostración. □

En el siguiente resultado se trata el caso en el que las soluciones de (P^λ) son no positivas. En dicho caso las estimaciones de los valores de los parámetros no son las mejores posibles, obtener los valores óptimos para m y M queda como un problema abierto.

Lema 4.6. *Supongamos que $m + M < 0$, y sea N_T el definido en (4.1). Sean $\sigma \in \Lambda$ una función no negativa en I y $\lambda \geq 0$. Entonces, si una de las cuatro condiciones siguientes se cumple, la única solución del problema (P^λ) es no positiva en I.*

(i) $0 \leq M$.

(ii) $m > 0$ *y*

$$m \frac{(e^{-m} + 1)^{1/(N_T+1)} - e^{-m}}{e^{-m} - 1} < M < 0. \tag{4.64}$$

(iii) $m < 0$ *y*

$$m \frac{(e^{-m(T-N_T)} + 1)^{1/(N_T+1)} - e^{-m}}{e^{-m} - 1} < M < 0. \tag{4.65}$$

(iv) $m = 0$ *y*

$$1 - 2^{\frac{1}{N_T+1}} < M < 0.$$

Demostración. Razonando como en el teorema anterior, está claro que podemos reducir la demostración a comprobar que la función de Green asociada al problema (P_s) sea no positiva en $I \times I$.

Además, para conseguir —en este caso— una solución negativa de (P^0) con $\sigma \equiv 1$, la condición $m + M < 0$ ha de cumplirse.

Como $M < -m$ sabemos que el problema (P^λ) tiene una única solución y, por otra parte, que la función h definida en (4.3) es estrictamente creciente en $(0, 1)$, por lo que $h(t) \geq 1 = h(0)$ para todo $t \in [0, 1]$ y, en particular, $C = h(1) \geq 1$.

Entonces, de las expresiones (4.53), (4.57) y (4.63), se deduce sin dificultad que $x_0 \leq 0$ en todos los casos contemplados en el Teorema 4.3. De aquí, a partir de (4.51), resulta evidente que $G(t, s) \leq 0$ para todo t cuando s está en uno de los casos (a) o (b) del citado teorema, mientras que, de (4.56) y (4.62), se deduce que esa función de Green es no positiva para cada $t \in [0, s)$ si s está en el caso (c).

Veamos ahora que también se cumple que $G(t, s) \leq 0$ para todo $t \in [s, T]$ cuando s está en el caso (c), para lo que hemos de distinguir que s esté en el caso ($c1$) o ($c2$).

Cuando s está en el caso ($c1$), si se cumpliese que $x_s > 0$, tendríamos que $G(t, s) > 0$ para todo $t \geq s$ (en particular $G(T, s) > 0$), lo que sería contradictorio con el hecho de que la función G es periódica en la primera variable.

Así, necesariamente $x_s \leq 0$, por lo que $G(t, s) \leq 0$ para todo $t \geq s$. Entonces $G(t, s)$ es no positiva para todo t cuando s está en el caso ($c1$).

Siempre que s esté en el caso ($c2$) y $T \geq [s] + 1$, razonando de la misma manera se comprueba que $x_{[s]+1} \leq 0$ y la función de Green $G(t, s)$ es no positiva para todo $t \geq [s] + 1$.

Consideremos ahora la función

$$r(t) = e^{mt} G(t, s)$$

definida en el intervalo $[s, [s] + 1]$. Cuando $M \geq 0$, necesariamente $m < 0$ y esta función es, debido a que $x_0 \leq 0$, monótona creciente en dicho intervalo.

En el caso de que $T \geq [s] + 1$, acabamos de ver que

$$G([s + 1], s) = x_{[s]+1} \leq 0,$$

debido a lo cual $r([s] + 1) \leq 0$ y, consecuentemente, $r(t) \leq 0$ y $G(t, s) \leq 0$ en $[s, [s] + 1]$.

Por otra parte, si $T < [s] + 1$, entonces $r(T) \leq 0$ y, por lo tanto, $r(t) \leq 0$ y $G(t, s) \leq 0$ en $[s, T]$.

Hemos visto, pues, que la función de Green $G(t, s)$ es no positiva en $I \times I$ a condición de que $M \geq 0$, lo que completa la demostración del caso (i).

Supongamos ahora que $M < 0$. En este caso r es monótona decreciente en $[s, [s] + 1]$ y solo tenemos que verificar que $G(s^+, s) \leq 0$. No es difícil probar que si $m \neq 0$ la ecuación (4.64) implica que $G(s^+, s) \leq 0$ cuando $T < [s] + 1$, como también lo implica la ecuación (4.65) siempre que $T \geq [s] + 1$.

Hemos de resaltar que es necesario que ambas desigualdades se verifiquen simultáneamente, pero cuando $m > 0$ la condición (4.64) implica (4.65), mientras que (4.65) implica (4.64) en caso de que $m < 0$. Con esto se acaba la demostración de los casos *(ii)* y *(iii)*.

El caso *(iv)* puede probarse con argumentos similares, por lo que la demostración está completa. □

A continuación, presentamos resultados de comparación para el problema de valor inicial.

Lema 4.7. *Sean $\sigma \in \Lambda$ tal que $\sigma \leq 0$ en I y $x_0 \leq 0$. Entonces la única solución del problema (4.44) es no positiva en I si se cumple*

$$M \leq b_T(m) := \begin{cases} \max\left\{\dfrac{m}{e^m - 1}, \dfrac{m}{e^{mT} - 1}\right\}, & \text{si } m \neq 0, \\ \max\left\{1, \dfrac{1}{T}\right\}, & \text{si } m = 0. \end{cases} \tag{4.66}$$

Esta condición es óptima en el sentido de que, para cada $M > b_T(m)$ y para cada valor $x_0 < 0$, podemos definir una función $\sigma \leq 0$ en I, para la que la solución del problema (4.44) cambia de signo en I. Asimismo, siempre que $M > b_T(m)$, para cada función $\sigma \leq 0$ en I, podemos encontrar un valor $x_0 < 0$ para el que la solución del problema (4.44) cambia de signo en I.

Demostración. Supongamos en un primer momento que $T \geq 1$. En este caso

$$b(m) \equiv b_T(m) = \begin{cases} \dfrac{m}{e^m - 1}, & \text{si } m \neq 0, \\ 1, & \text{si } m = 0. \end{cases}$$

Dado que $\sigma \leq 0$ en I y $x_0 \leq 0$, de la expresión (4.42) deducimos que si $C \geq 0$ entonces $x_k \leq 0$ para todo $k \in \{0, 1, \ldots, N_T\}$.

Además la solución viene dada por la expresión (4.48), la cual, siempre que se verifique que $C \geq 0$ (y así, en este caso, $x_k \leq 0$ para todo $k \in \{0, 1, \ldots, N_T\}$), es una suma de términos no positivos, por lo que $x(t) \leq 0$ para todo $t \in I$.

En la demostración del Lema 4.5 se prueba que $C \geq 0$ si y solo si $M \leq b(m)$, finalizándose la primera parte de la demostración para este caso.

Para probar el carácter óptimo de la implicación anterior, supongamos que $M > b(m)$, con lo que $C < 0$. Dado cualquier $x_0 < 0$, sin más que tomar $\sigma \equiv 0$ se obtiene que $x_1 = C x_0 > 0$, por lo que la solución cambia de signo en I.

Por otro lado, al ser $\sigma \leq 0$ en I, o bien $k = \text{mín}_{t \in I}\{\sigma(t)\} < 0$ o bien $\sigma \equiv 0$. En caso de que $\sigma \equiv 0$, razonando igual que en el párrafo anterior, sabemos que para cualquier $x_0 < 0$ la solución cambia de signo en I.

Supongamos ahora que $M > b(m)$ y $\sigma \not\equiv 0$, entonces tomamos

$$x_0 < \frac{k}{M - b(m)} < 0$$

y, por (4.48), tenemos que

$$\begin{aligned} e^m x_1 &= e^m \left(x_0 C + \int_0^1 \sigma(s) e^{-m(1-s)} ds \right) \geq e^m \left(x_0 C + \int_0^1 k e^{-m(1-s)} ds \right) \\ &= x_0 \left(\frac{b(m) - M}{b(m)} \right) + \frac{k}{b(m)} > -\frac{k}{b(m)} + \frac{k}{b(m)} = 0, \end{aligned}$$

por lo que $x_1 > 0$. En cualquiera de los dos casos la solución cambia de signo en I.

Consideremos ahora el caso en el que $T < 1$. En esta situación el valor de la función b_T será

$$b_T(m) = \begin{cases} \dfrac{m}{e^{mT} - 1}, & \text{si } m \neq 0, \\ \dfrac{1}{T}, & \text{si } m = 0. \end{cases}$$

Además, la única solución del problema (4.44) en $I = I_0 = [0, T]$ viene dada por (4.39), que es una suma de términos negativos siempre que $h(T) \geq 0$. Pero $h(T) \geq 0$ si y solo si $M \leq b_T(m)$, con lo que se concluye la prueba del principio del máximo.

Sea ahora $M > b_T(m)$, si $x_0 < 0$, sin más que tomar $\sigma \equiv 0$ se obtiene que $x_T = h(T)x_0 > 0$. Por otro lado, si $\sigma \leq 0$ en I y no es idénticamente nula, argumentando de manera análoga al caso $T \geq 1$, podemos encontrar siempre un $x_0 < 0$ para el que el valor de la solución en $t = T$ es positivo. □

Observación 4.7. En la Figura 4.1 podemos observar la región en la que el principio del máximo anterior se verifica.

En oscuro, la región para $T \geq 1$. En color claro, la región que hay que añadir a la anterior si $T < 1$ (en este caso está representada la región para $T = 0.5$).

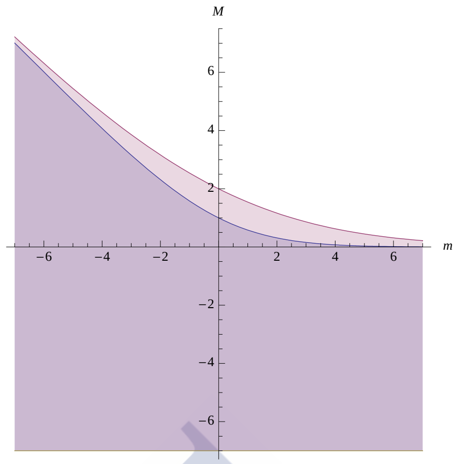

Figura 4.1: Región en la que los valores de m y M verifican el principio del máximo.

Para el caso en el que $x_0 = 0$, es posible obtener un resultado mejor que el Lema 4.7.

Lema 4.8. *Sean $\sigma \in \Lambda$ tal que $\sigma \leq 0$ en I y $x_0 = 0$. Entonces la única solución del problema* (4.44) *es no positiva en I siempre que se verifique una de los dos siguientes afirmaciones (b_T definida en* (4.66)*):*

1. *$T \leq 1$.*

2. *$T > 1$ y $M \leq b_{T-1}(m)$.*

Esta condición es óptima en el sentido de que, cuando $T > 1$, para cada $M > b_{T-1}(m)$ podemos construir una función $\sigma \leq 0$ en I tal que la única solución del problema (4.44) *con $x_0 = 0$ cambia de signo en I.*

Demostración. Supongamos que $T \leq 1$. Como $x_0 = 0$, a partir de (4.39) sabemos que la única solución del problema (4.44) en $I = I_0 = [0, T]$ viene dada por $x(t) = \int_0^t \sigma(s) e^{-m(t-s)} ds$. Por lo tanto, es obvio que si $\sigma \leq 0$ entonces $x \leq 0$.

En caso de que $T > 1$, razonando como antes, está claro que $x_1 \leq 0$. De este modo, aplicando el Lema 4.7 en el intervalo $[1, T]$, se demuestran tanto la condición 2 como el carácter óptimo de esta desigualdad. □

4.5. El problema no lineal

Estudiaremos a lo largo de esta sección el siguiente problema —en general no lineal— de valores de frontera —en general no lineales—:

$$x'(t) = Fx(t), \quad t \in I = [0, T], \quad 0 = g(x(0), x(T)), \tag{4.67}$$

en donde $Fx(t) \equiv f\,(t, x(t), x([t]))$, con $f \in C(I \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ y $g \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Una solución de este problema, como parece obvio, será una función $x : I \to \mathbb{R}$ que verifique (4.67).

Dependiendo de las condiciones de monotonía de la función g respecto de la segunda variable, utilizaremos el método de las sub y sobresoluciones o el método de las sub y sobresoluciones débilmente acopladas para, en combinación con los resultados de comparación obtenidos en la sección anterior, obtener resultados que garanticen la existencia de solución para el problema (4.67).

4.5.1. Sub y sobresolución débilmente acopladas

Si la función g, que define las condiciones de frontera, es una función creciente en la segunda variable, utilizaremos el método de las sub y sobresoluciones débilmente acopladas. Será el caso, por ejemplo, del problema con condiciones de frontera antiperiódicas ($x(0) = -x(T)$), en el que la función g vendrá definida por $g(y, z) = y + z$.

Definición 4.1. Diremos que α, $\beta \in \Omega$ son un par de *sub y sobresolución débilmente acopladas* del problema (4.67) si verifican las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &\le F\alpha(t), \quad t \in I, \quad g(\alpha(0), \beta(T)) \le 0, \\ \beta'(t) &\ge F\beta(t), \quad t \in I, \quad g(\beta(0), \alpha(T)) \ge 0. \end{aligned} \tag{4.68}$$

Observación 4.8. El nombre «débilmente acopladas» ha sido tomado de [64]. Se denominan acopladas porque la definición de ambas está relacionada, no puede definirse la subsolución sin tener en cuenta la sobresolución, y viceversa. El acoplamiento se dice débil porque se produce solo en las condiciones de frontera. Esta denominación no puede considerarse universal, ya que pueden encontrarse casos en que la subsolución y la sobresolución se definen de manera dependiente (como en esta situación), y se les da un nombre diferente. Sin ir más lejos, en el Capítulo 2 de esta tesis una situación muy similar conduce a la definición de un par de «sub y sobresolución relacionadas». Nos remitimos a la Observación 2.1 para ver por qué la denominación acopladas (o relacionadas) solo tiene sentido cuando la función g es creciente en la segunda variable.

Definición 4.2. Diremos que x, $y \in \Omega$ son *cuasisoluciones acopladas* del problema (4.67) si verifican las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} x'(t) &= Fx(t), \quad t \in I, \quad g(x(0), y(T)) = 0, \\ y'(t) &= Fy(t), \quad t \in I, \quad g(y(0), x(T)) = 0. \end{aligned} \tag{4.69}$$

Teorema 4.4. *Sean α, $\beta \in \Omega$ un par de sub y sobresolución débilmente acopladas del problema (4.67) tales que $\alpha \leq \beta$ en I. Supongamos además que se cumplen las siguientes hipótesis:*

(H_1) *Existen constantes reales m y M, tales que $M \leq b_T(m)$ y, para todo $t \in I$,*

$$f(t, y, z) - f(t, \bar{y}, \bar{z}) \leq m(\bar{y} - y) + M(\bar{z} - z) \tag{4.70}$$

cuando $\alpha(t) \leq y \leq \bar{y} \leq \beta(t)$ y $\alpha([t]) \leq z \leq \bar{z} \leq \beta([t])$.

(H_2) *Para todo $y \in [\alpha(0), \beta(0)]$ la función $g(y, \cdot)$ es creciente en el intervalo $[\alpha(T), \beta(T)]$, es decir,*

$$g(y, z) \leq g(y, \bar{z}) \quad \text{si } \alpha(T) \leq z \leq \bar{z} \leq \beta(T). \tag{4.71}$$

(H_3) *Para todo $z \in [\alpha(T), \beta(T)]$ la función $g(\cdot, z)$ verifica la siguiente condición de Lipschitz lateral: existe una constante real $K > 0$ tal que*

$$g(\bar{y}, z) - g(y, z) \leq K(\bar{y} - y) \quad \text{si } \alpha(0) \leq y \leq \bar{y} \leq \beta(0). \tag{4.72}$$

Entonces el problema (4.67) tiene cuasisoluciones acopladas ρ y γ en $[\alpha, \beta]$ tales que $\rho \leq \gamma$. Además, ρ y γ son extremas en el sentido de que, si μ y η son cuasisoluciones acopladas del problema (4.67) tales que $\alpha \leq \mu \leq \eta \leq \beta$, entonces $\rho \leq \mu \leq \eta \leq \gamma$.

Demostración. Dados $\xi, \varphi \in [\alpha, \beta]$, consideremos los siguientes problemas de valor inicial:

$$\begin{aligned} x'(t) + mx(t) + Mx([t]) &= F\xi(t) + m\xi(t) + M\xi([t]), \quad t \in I, \\ x(0) &= \xi(0) - \frac{1}{K} g\big(\xi(0), \varphi(T)\big), \end{aligned} \tag{4.73}$$

y

$$\begin{aligned} x'(t) + mx(t) + Mx([t]) &= F\varphi(t) + m\varphi(t) + M\varphi([t]), \quad t \in I, \\ x(0) &= \varphi(0) - \frac{1}{K} g\big(\varphi(0), \xi(T)\big). \end{aligned} \tag{4.74}$$

El Corolario 4.1 nos permite definir los operadores $A,\ B : [\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta] \to \Omega$ como

$$A(\xi,\varphi) := \text{única solución del problema (4.73)},$$

y

$$B(\xi,\varphi) := \text{única solución del problema (4.74)}.$$

Veamos, en un primer momento, que si ξ y φ son un par de sub y sobresolución débilmente acopladas del problema (4.67) tales que $\alpha \le \xi \le \varphi \le \beta$, entonces

$$\alpha \le \xi \le u \le v \le \varphi \le \beta, \tag{4.75}$$

en donde $u = A(\xi,\varphi)$ y $v = B(\xi,\varphi)$.

Tomemos $r = \xi - u$ y $s = v - \varphi$. Sin más que tener en cuenta que ξ y φ son un par de sub y sobresolución débilmente acopladas, llegamos a que

$$\begin{aligned} r'(t) + mr(t) + Mr([t]) &= \xi'(t) + m\xi(t) + M\xi([t]) - F\xi(t) - m\xi(t) - M\xi([t]) \\ &= \xi'(t) - F\xi(t) \le 0, \\ r(0) &= \xi(0) - \xi(0) + \frac{1}{K} g\big(\xi(0), \varphi(T)\big) \le 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} s'(t) + ms(t) + Ms([t]) &= F\varphi(t) + m\varphi(t) + M\varphi([t]) - \varphi'(t) - m\varphi(t) - M\varphi([t]) \\ &= F\varphi(t) - \varphi'(t) \le 0, \\ s(0) &= \varphi(0) - \frac{1}{K} g(\varphi(0), \xi(T)) - \varphi(0) \le 0. \end{aligned}$$

Ahora bien, como $M \le b_T(m)$ por (H_1), entonces el Lema 4.7 garantiza que $r \le 0$ y $s \le 0$ en I, es decir, $\xi \le u$ y $v \le \varphi$.

Sea ahora $w = u - v$, a partir de (H_1) se deduce que

$$\begin{aligned} w'(t) + mw(t) + Mw([t]) &= F\xi(t) - F\varphi(t) + m(\xi(t) - \varphi(t)) + M(\xi([t]) - \varphi([t])) \\ &\le m(\varphi(t) - \xi(t)) + M(\varphi([t]) - \xi([t])) \\ &\quad + m(\xi(t) - \varphi(t)) + M(\xi([t]) - \varphi([t])) = 0, \end{aligned}$$

mientras que de (H_2) y (H_3) obtenemos que

$$\begin{aligned} w(0) &= \xi(0) - \varphi(0) + \frac{1}{K}\big(g(\varphi(0), \xi(T)) - g(\xi(0), \varphi(T))\big) \\ &\le \xi(0) - \varphi(0) + \frac{1}{K}\big(g(\varphi(0), \xi(T)) - g(\xi(0), \xi(T))\big) \\ &\le \xi(0) - \varphi(0) - \xi(0) + \varphi(0) = 0. \end{aligned}$$

Aplicando de nuevo el Lema 4.7 obtenemos que $w \leq 0$, es decir, que $u \leq v$. Queda probado, pues, que la desigualdad (4.75) se cumple.

Demostraremos ahora que u y v son un par de sub y sobresolución débilmente acopladas del problema (4.67). Razonando igual que antes, de (H_1) se deduce

$$\begin{aligned} u'(t) - Fu(t) &= F\xi(t) - Fu(t) + m(\xi(t) - u(t)) + M(\xi([t]) - u([t])) \leq 0, \\ v'(t) - Fv(t) &= F\varphi(t) - Fv(t) + m(\varphi(t) - v(t)) + M(\varphi([t]) - v([t])) \geq 0, \end{aligned}$$

mientras que (H_2) y (H_3) nos llevan a

$$\begin{aligned} 0 &= K(u(0) - \xi(0)) + g(\xi(0), \varphi(T)) \geq g(u(0), \varphi(T)) \geq g(u(0), v(T)), \\ 0 &= K(v(0) - \varphi(0)) + g(\varphi(0), \xi(T)) \leq g(v(0), \xi(T)) \leq g(v(0), u(T)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, queda probado que u y v son un par de sub y sobresolución débilmente acopladas del problema (4.67).

El siguiente paso será construir dos sucesiones que converjan a las cuasisoluciones extremas del problema (4.67). Con este fin, tomemos $\alpha_0 = \alpha$ y $\beta_0 = \beta$ y definamos las sucesiones $\{\alpha_l\}$ y $\{\beta_l\}$ como $\alpha_{l+1} = A(\alpha_l, \beta_l)$ y $\beta_{l+1} = B(\alpha_l, \beta_l)$. A partir de la propiedad (4.75), es inmediato comprobar que

$$\alpha(t) \leq \alpha_1(t) \leq \cdots \leq \alpha_l(t) \leq \cdots \leq \beta_l(t) \leq \cdots \leq \beta_1(t) \leq \beta(t), \ \forall t \in I, \ \forall l \in \mathbb{N},$$

debido a lo cual las sucesiones $\{\alpha_l\}$ y $\{\beta_l\}$ están uniformemente acotadas.

A partir de las definiciones de los problemas (4.73) y (4.74) y de las propiedades de f, no es difícil verificar que las sucesiones $\{\alpha_l'(t)\}$ y $\{\beta_l'(t)\}$ también están acotadas en I. Entonces $\{\alpha_l\}$ y $\{\beta_l\}$ son equicontinuas en $C(I)$ y el teorema de Ascoli-Arzelà garantiza la existencia de subsucesiones convergentes $\{\alpha_{l_j}\} \subset \{\alpha_l\}$ y $\{\beta_{l_j}\} \subset \{\beta_l\}$, con límites uniformes ρ, $\gamma \in \mathcal{C}(I)$ respectivamente. Al ser ambas sucesiones $\{\alpha_l\}$ y $\{\beta_l\}$ monótonas, necesariamente convergen uniformemente a ρ y γ respectivamente.

De la definición de los operadores A y B sabemos que, para todo $l \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\alpha_{l+1}(0) = \alpha_l(0) - \frac{1}{K} g(\alpha_l(0), \beta_l(T)) \quad \text{y} \quad \beta_{l+1}(0) = \beta_l(0) - \frac{1}{K} g(\beta_l(0), \alpha_l(T)).$$

Consecuentemente, de la continuidad de g y pasando al límite, obtenemos que

$$g\big(\rho(0), \gamma(T)\big) = 0 = g\big(\gamma(0), \rho(T)\big). \tag{4.76}$$

Además, de la expresión (4.48) se deduce que

$$\begin{aligned} \alpha_{l+1}(t) &= \alpha_{l+1}([t]) h(t - [t]) \\ &\quad + \int_{[t]}^{t} \big(f(s, \alpha_l(s), \alpha_l([t])) + m\alpha_l(s) + M\alpha_l([t])\big) e^{-m(t-s)} ds, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\beta_{l+1}(t) &= \beta_{l+1}([t])h(t-[t]) \\ &\quad + \int_{[t]}^{t} \big(f(s,\beta_l(s),\beta_l([t])) + m\beta_l(s) + M\beta_l([t])\big)e^{-m(t-s)}ds.\end{aligned}$$

De este modo, debido a la continuidad de f y pasando al límite, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \rho(k)h(t-k) + \int_k^t (f(s,\rho(s),\rho(k)) + m\rho(s) + M\rho(k))e^{-m(t-s)}ds, \\ \gamma(t) &= \gamma(k)h(t-k) + \int_k^t (f(s,\gamma(s),\gamma(k)) + m\gamma(s) + M\gamma(k))e^{-m(t-s)}ds,\end{aligned} \tag{4.77}$$

en cada intervalo I_k y para todo $k \in \{0,\ldots,N_T\}$.

Por consiguiente ρ, $\gamma \in \Omega$ y así, debido a (4.76) y (4.77), deducimos que ρ y γ son cuasisoluciones acopladas del problema (4.67).

Para finalizar la prueba de este resultado, mostraremos el carácter extremo de las cuasisoluciones acopladas ρ y γ. Para ello, supongamos que $\mu \leq \eta$ son cuasisoluciones acopladas del problema (4.67) en $[\alpha,\beta]$. Veamos, utilizando el principio de inducción, que necesariamente ha de verificarse que $\alpha_l \leq \mu \leq \eta \leq \beta_l$ para todo $l \in \mathbb{N}$.

Es evidente que esta propiedad es cierta para $l = 0$. Supongamos que se verifica para un determinado $l \in \mathbb{N}$. Tomemos $r = \alpha_{l+1} - \mu$ y $s = \eta - \beta_{l+1}$, entonces

$$\begin{aligned}r'(t) &= F\alpha_l(t) + m(\alpha_l(t) - \alpha_{l+1}(t)) + M(\alpha_l([t]) - \alpha_{l+1}([t])) - F\mu(t) \\ &\leq -mr(t) - Mr([t]), \\ r(0) &= \alpha_l(0) - \mu(0) + \frac{1}{K}\big(g\big(\mu(0),\eta(T)\big) - g\big(\alpha_l(0),\beta_l(T)\big)\big) \\ &\leq \alpha_l(0) - \mu(0) + \frac{1}{K}\big(g\big(\mu(0),\beta_l(T)\big) - g\big(\alpha_l(0),\beta_l(T)\big)\big) \leq 0, \\ s'(t) &= F\eta(t) - F\beta_l(t) + m\big(\beta_{l+1}(t) - \beta_l(t)\big) + M\big(\beta_{l+1}([t]) - \beta_l([t])\big) \\ &\leq -ms(t) - Ms([t]), \\ s(0) &= \eta(0) - \beta_l(0) + \frac{1}{K}\big(g\big(\beta_l(0),\alpha_l(T)\big) - g\big(\eta(0),\mu(T)\big)\big) \\ &\leq \eta(0) - \beta_l(0) + \frac{1}{K}\big(g\big(\beta_l(0),\mu(T)\big) - g\big(\eta(0),\mu(T)\big)\big) \leq 0.\end{aligned}$$

Como $M \leq b_T(m)$, solo queda utilizar el Lema 4.7 para comprobar que $\alpha_{l+1} \leq \mu \leq \eta \leq \beta_{l+1}$.

Tomando límites en la expresión previa deducimos que $\rho \le \mu \le \eta \le \gamma$. Por lo tanto, ρ y γ son cuasisoluciones acopladas extremas del problema (4.67) en $[\alpha, \beta]$. □

En el caso de que las sub y sobresolución débilmente acopladas coincidan en el origen del intervalo, es posible probar la existencia de soluciones extremas del problema de partida bajo condiciones más débiles en las condiciones de contorno. El resultado obtenido es el siguiente.

Teorema 4.5. *Sean α, $\beta \in \Omega$ un par de sub y sobresolución débilmente acopladas del problema* (4.67) *tales que $\alpha \le \beta$ y $\alpha(0) = \beta(0)$. Supongamos que se verifican las hipótesis (H_1) y (H_2).*

Entonces el problema (4.67) *tiene soluciones extremas en $[\alpha, \beta]$.*

Demostración. Como $\alpha(0) = \beta(0)$, es inmediato comprobar que se verifica también la hipótesis (H_3) para cualquier $K > 0$. Se cumplen, pues, todas las condiciones del Teorema 4.4 y, por lo tanto, existen cuasisoluciones acopladas extremas $\rho \le \gamma$ del problema (4.67) en $[\alpha, \beta]$.

Entonces $\alpha(0) = \rho(0) = \gamma(0) = \beta(0)$, de donde se deduce que

$$0 = g\big(\rho(0), \gamma(T)\big) = g\big(\gamma(0), \gamma(T)\big),$$

y

$$0 = g\big(\gamma(0), \rho(T)\big) = g\big(\rho(0), \rho(T)\big).$$

Por lo tanto ρ y γ son soluciones extremas del problema (4.67) en $[\alpha, \beta]$, con lo que el resultado queda probado. □

Ejemplo 4.1. El siguiente problema

$$x'(t) = e^{x([t])} - \frac{1}{t+1}\,x(t), \quad t \in I = [0, \tfrac{\pi}{2}], \quad 0 = x(\tfrac{\pi}{2}) \cos^2\big(\tfrac{\pi}{2} x(0)\big), \tag{4.78}$$

tiene soluciones extremas en el sector $[-t-1, \frac{3}{2}\,t - 1]$.

Demostración. Es evidente que este problema es un caso particular de (4.67) con

$$f(t, y, z) = e^z - \frac{1}{t+1} y \quad \text{y} \quad g(y, z) = z \cos^2\big(\tfrac{\pi}{2}\, y\big).$$

Tomemos $\alpha(t) = -t - 1$ y $\beta(t) = \frac{3}{2}\,t - 1$, entonces

$$\alpha'(t) = -1 \leq F\alpha(t) = \begin{cases} e^{-1} + 1, & \text{si } t \in [0,1), \\ e^{-2} + 1, & \text{si } t \in [1, \frac{\pi}{2}], \end{cases}$$

$$\beta'(t) = \frac{3}{2} \geq F\beta(t) = \begin{cases} e^{-1} - \frac{3\,t-2}{2(t+1)}, & \text{si } t \in [0,1), \\ e^{1/2} - \frac{3t-2}{2(t+1)}, & \text{si } t \in [1, \frac{\pi}{2}], \end{cases}$$

$$g\big(\alpha(0), \beta(\tfrac{\pi}{2})\big) = g\big(-1, \tfrac{3\,\pi}{4} - 1\big) = 0 \leq 0,$$

$$g\big(\beta(0), \alpha(\tfrac{\pi}{2})\big) = g\big(-1, -\tfrac{\pi}{2} - 1\big) = 0 \geq 0.$$

Por lo tanto, α y β son un par de sub y sobresolución débilmente acopladas del problema (4.78). Claramente se verifica la hipótesis (H_2) y, tomando $m = 1$ y $M = 0$, también se verifica la hipótesis (H_1).

Dado que $\alpha(0) = -1 = \beta(0)$, podemos aplicar el Teorema 4.5 para deducir que el problema (4.78) tiene soluciones extremas en $[\alpha, \beta]$. $\square$

Observación 4.9. De hecho, este problema tiene solución única en $[\alpha, \beta]$. Ello se debe a que al coincidir α y β en el origen del intervalo, las soluciones del problema considerado que se encuentren en $[\alpha, \beta]$ son soluciones del siguiente problema de valor inicial:

$$x'(t) + \frac{x(t)}{t+1} = e^{x([t])}, \quad t \in I = [0, \tfrac{\pi}{2}], \quad x(0) = -1. \tag{4.79}$$

Al igual que en la demostración del Teorema 4.2, podemos reescribir el problema (4.79) como una colección de dos problemas de valor inicial en los intervalos $[0,1)$ y $[1, \frac{\pi}{2}]$. En primer lugar resolveremos el problema

$$x'(t) + \frac{x(t)}{t+1} = e^{-1}, \quad t \in I_0 = [0,1), \quad x(0) = -1,$$

que tiene solución única dada por

$$x(t) = \frac{t^2 + 2t - 2e}{2e(t+1)}.$$

Teniendo en cuenta que $x(1) = \frac{3-2e}{4e}$ y que la solución del problema (4.79) ha de ser una función continua, resolvemos ahora el problema

$$x'(t) + \frac{x(t)}{t+1} = e^{\frac{3-2e}{4e}}, \quad t \in I_1 = [1, \tfrac{\pi}{2}], \quad x(1) = \frac{3-2e}{4e},$$

que también tiene solución única, en este caso dada por

$$x(t) = \frac{e^{\frac{2e+3}{4e}}\,(t^2 + 2t - 3) - 2e + 3}{2e(t+1)}.$$

Por lo tanto, la única solución del problema (4.79) viene dada por

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{t^2+2t-2e}{2e(t+1)}, & \text{si } 0\le t<1,\\[2ex] \dfrac{e^{\frac{2e+3}{4e}}\,(t^2+2t-3)-2e+3}{2e(t+1)}, & \text{si } 1\le t\le \frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

También es la solución única del problema (4.78), ya que

$$g\big(x(0),x(\tfrac{\pi}{2})\big)=g\big(-1,x(\tfrac{\pi}{2})\big)=x(\tfrac{\pi}{2})\cos^2\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)=0.$$

En la siguiente figura podemos ver representadas la solución única y las sub y sobresolución débilmente acopladas del problema (4.78).

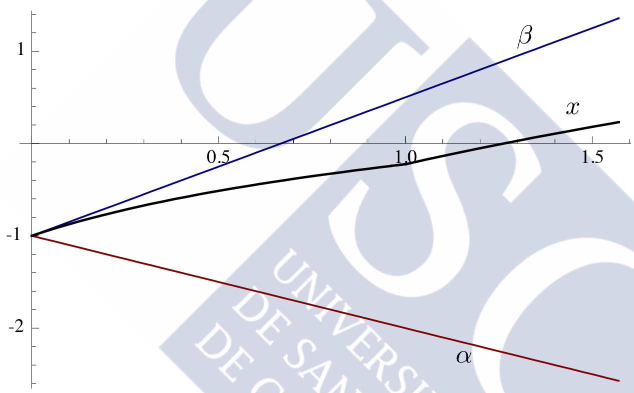

Figura 4.2: En rojo y en azul, respectivamente, α y β, sub y sobresolución débilmente acopladas del problema (4.78). En negro, la solución única de dicho problema.

Bajo ciertas condiciones adicionales podemos garantizar la unicidad de solución del problema (4.67). El resultado es el siguiente.

Teorema 4.6. *Sean α, $\beta\in\Omega$ sub y sobresolución débilmente acopladas del problema (4.67) tales que $\alpha\le\beta$. Supongamos que se verifican las hipótesis (H_1), (H_2) y (H_3). Supongamos que también se verifican las siguientes hipótesis:*

(H_4) *Existen dos números reales K_1 y K_2 tales que $K\ge K_1>0$ (en donde K es la constante que aparece en la hipótesis (H_3)), $K_2\ge 0$, y*

$$g(y,\bar z)-g(\bar y,z)\le -K_1(\bar y-y)+K_2(\bar z-z) \tag{4.80}$$

si $\alpha(0)\le y\le\bar y\le\beta(0)$ y $\alpha(T)\le z\le\bar z\le\beta(T)$.

(H_5) *Para todo* $t \in I$ *y para todo* $y \in [\alpha(t), \beta(t)]$, *la función* f *es decreciente en la tercera variable en el intervalo* $[\alpha([t]), \beta([t])]$. *Además, existe una constante real* p *tal que* $m + p \geq 0$ *y, para todo* $t \in I$ *y todo* $z \in [\alpha([t]), \beta([t])]$, *se verifica que*

$$f(t, y, z) - f(t, \bar{y}, z) \geq -p(\bar{y} - y) \quad si \quad \alpha(t) \leq y \leq \bar{y} \leq \beta(t). \tag{4.81}$$

(H_6) *Se verifica que*

$$K_2 e^{pT} < K_1. \tag{4.82}$$

Entonces el problema (4.67) *tiene una única solución en* $[\alpha, \beta]$.

Demostración. El Teorema 4.4 garantiza que existen $\rho \leq \gamma$ cuasisoluciones acopladas extremas del problema (4.67) en $[\alpha, \beta]$. Sea $q = \rho - \gamma$, utilizando (H_4) obtenemos que

$$0 = g\big(\rho(0), \gamma(T)\big) - g\big(\gamma(0), \rho(T)\big) \leq K_1 q(0) - K_2 q(T). \tag{4.83}$$

Por otra parte, para todo $t \in I$, (H_5) nos lleva a que

$$\begin{aligned} q'(t) &= f\left(t, \rho(t), \rho([t])\right) - f\left(t, \gamma(t), \gamma([t])\right) \\ &\geq f\big(t, \rho(t), \gamma([t])\big) - f\left(t, \gamma(t), \gamma([t])\right) \geq p\, q(t). \end{aligned}$$

Ahora bien, como $q' \in \Lambda$, podemos deducir que

$$q(t) \geq q(k)\, e^{p(t-k)}, \quad t \in I_k.$$

Dado que la función q es continua, por inducción en k, se llega a que

$$q(t) \geq q(0)\, e^{pt}, \quad t \in I, \tag{4.84}$$

y, en consecuencia, de (4.83) obtenemos

$$0 \leq q(0)(K_1 - K_2 e^{pT}).$$

Esta última desigualdad, junto con (4.82), implican que $q(0) \geq 0$, así que (4.84) conduce a que $\rho \geq \gamma$.

Por lo tanto, $\rho \equiv \gamma \in [\alpha, \beta]$ es una solución del problema (4.67). Debido a que ρ y γ son soluciones extremas en $[\alpha, \beta]$, esta solución tiene que ser única en este sector. $\square$

Observación 4.10. Hay que resaltar que las hipótesis (H_1) y (H_5) pueden cumplirse simultáneamente. Si analizamos el comportamiento de la función f respecto a la segunda y la tercera variables, dichas hipótesis nos llevan a

$$-m \leq \frac{f(t,\bar{y},z)-f(t,y,z)}{\bar{y}-y} \leq p, \text{ si } \alpha(t) \leq y < \bar{y} \leq \beta(t) \text{ y } \alpha([t]) \leq z \leq \beta([t]),$$
$$-M \leq \frac{f(t,y,\bar{z})-f(t,y,z)}{\bar{z}-z} \leq 0, \text{ si } \alpha(t) \leq y \leq \beta(t) \text{ y } \alpha([t]) \leq z < \bar{z} \leq \beta([t])\ .$$

En caso de que la función f sea diferenciable, estas condiciones se convierten en

$$-m \leq \frac{\partial f}{\partial y}(t,y,z) \leq p \quad \text{si } \alpha(t) \leq y \leq \beta(t) \text{ y } \alpha([t]) \leq z \leq \beta([t]),$$
$$-M \leq \frac{\partial f}{\partial z}(t,y,z) \leq 0 \quad \text{si } \alpha(t) \leq y \leq \beta(t) \text{ y } \alpha([t]) \leq z \leq \beta([t]).$$

También son compatibles las hipótesis (H_2), (H_3) y (H_4). Si analizamos ahora el comportamiento de la función g, a partir de dichas hipótesis obtenemos las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} &K_1 \leq \frac{g(\bar{y},z)-g(y,z)}{\bar{y}-y} \leq K \quad \text{si } \alpha(0) \leq y < \bar{y} \leq \beta(0) \text{ y } \alpha(T) \leq z \leq \beta(T),\\ &0 \leq \frac{g(y,\bar{z})-g(y,z)}{\bar{z}-z} \leq K_2 \quad \text{si } \alpha(0) \leq y \leq \beta(0) \text{ y } \alpha(T) \leq z < \bar{z} \leq \beta(T), \end{aligned} \tag{4.85}$$

las cuales, en caso de ser g diferenciable, pasan a ser

$$K_1 \leq \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) \leq K \quad \text{si } \alpha(0) \leq y \leq \beta(0) \text{ y } \alpha(T) \leq z \leq \beta(T),$$
$$0 \leq \frac{\partial g}{\partial z}(y,z) \leq K_2 \quad \text{si } \alpha(0) \leq y \leq \beta(0) \text{ y } \alpha(T) \leq z \leq \beta(T).$$

Ejemplo 4.2. El siguiente problema

$$x'(t) = \frac{1}{2}t\,x^2(t) - \frac{1}{3}x\big([t]\big), \quad t \in I = \left[0, \frac{3}{2}\right], \quad 0 = \frac{11}{2}\,x(0) + e^{x(3/2)}, \tag{4.86}$$

tiene una única solución en el sector $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{16}]$.

Demostración. El problema (4.86) es un caso particular del problema (4.67) con

$$f(t,y,z) = \frac{1}{2}\,t\,y^2 - \frac{1}{3}z \quad \text{y} \quad g(y,z) = \frac{11}{2}y + e^z.$$

Las funciones $\alpha(t) = -\frac{1}{4}$ y $\beta(t) = -\frac{1}{16}$ son un par de sub y sobresolución débilmente acopladas del problema (4.86). Si tomamos $m = 3/8$, $M = 1/3$, $K = K_1 = 11/2$, $K_2 = e^{1/16}$ y $p = 3/32$, entonces f y g verifican las hipótesis (H_1)-(H_5). Asimismo, se verifica la condición (4.82) del Teorema 4.6.

Por lo tanto, se verifican todas las hipótesis del Teorema 4.6 y el problema (4.86) tiene una única solución en el sector $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{16}]$. □

Teorema 4.7. *Sean α, $\beta \in \Omega$ sub y sobresolución débilmente acopladas del problema* (4.67) *tales que $\alpha \leq \beta$ en I. Supongamos que $\alpha(0) = \beta(0)$ y que se verifican las hipótesis (H_1), (H_2) y (H_5).*

Entonces el problema (4.67) *tiene una única solución en $[\alpha, \beta]$.*

Demostración. El Teorema 4.5 garantiza la existencia de soluciones extremas $\rho \leq \gamma$ en $[\alpha, \beta]$. Tomemos $q = \rho - \gamma$, utilizando (H_5) y razonando como en el Teorema 4.6, llegamos a la desigualdad (4.84).

Al ser $q(0) = \rho(0) - \gamma(0) = 0$ deducimos que $\rho \geq \gamma$ en I. Por lo tanto $\rho \equiv \gamma$ es la única solución buscada. □

4.5.2. Sub y sobresolución clásicas

A continuación utilizaremos el método de las sub y sobresoluciones para, suponiendo ahora que la función g que define las condiciones de frontera es decreciente en la segunda variable, deducir algunos resultados de existencia para el problema (4.67). Es el caso, por ejemplo, del problema periódico ($x(0) = x(T)$), en el que $g(y, z) = y - z$.

Definición 4.3. Diremos que $\alpha \in \Omega$ es una *subsolución* del problema (4.67) si verifica las siguientes desigualdades

$$\alpha'(t) \leq F\alpha(t), \quad t \in I, \quad g\big(\alpha(0), \alpha(T)\big) \leq 0. \tag{4.87}$$

Asimismo, diremos que $\beta \in \Omega$ es una *sobresolución* del problema (4.67) si verifica que

$$\beta'(t) \geq F\beta(t), \quad t \in I, \quad g\big(\beta(0), \beta(T)\big) \geq 0. \tag{4.88}$$

Teorema 4.8. *Sean α, $\beta \in \Omega$ sub y sobresolución, respectivamente, del problema (4.67) tales que $\alpha \leq \beta$. Supongamos que se verifican las hipótesis (H_1) y (H_3). Supongamos, además, que se verifica la siguiente condición:*

(H_2') *Para todo $y \in [\alpha(0), \beta(0)]$ la función $g(y, \cdot)$ es decreciente en el intervalo $[\alpha(T), \beta(T)]$, es decir,*

$$g(y, z) \geq g(y, \bar{z}) \quad \text{si } \alpha(T) \leq z \leq \bar{z} \leq \beta(T) \text{ y } \alpha(0) \leq y \leq \beta(0). \tag{4.89}$$

Entonces el problema (4.67) *tiene soluciones extremas en* $[\alpha, \beta]$.

Demostración. Dado $\xi \in [\alpha, \beta]$, consideremos siguiente el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} x'(t) + mx(t) + Mx([t]) &= F\xi(t) + m\xi(t) + M\xi([t]), \quad t \in I, \\ x(0) &= \xi(0) - \tfrac{1}{K} g\big(\xi(0), \xi(T)\big). \end{aligned} \tag{4.90}$$

El Corolario 4.1 nos permite definir el operador $L : [\alpha, \beta] \to \Omega$ como sigue:

$$L\xi := \text{única solución del problema (4.90)}.$$

Entonces, tomando $\alpha_0 = \alpha$ y $\beta_0 = \beta$, podemos definir dos sucesiones, $\{\alpha_l\}$ y $\{\beta_l\}$, como $\alpha_{l+1} = L\alpha_l$ y $\beta_{l+1} = L\beta_l$, para todo $l \in \mathbb{N}$.

Razonando de manera análoga a la utilizada en la demostración del Teorema 4.4, puede comprobarse que $\{\alpha_l\}$ y $\{\beta_l\}$ convergen uniformemente a las soluciones extremas del problema (4.67) en $[\alpha, \beta]$. $\square$

Corolario 4.3. *Sean* α, $\beta \in \Omega$ *sub y sobresolución, respectivamente, del problema* (4.67) *tales que* $\alpha \leq \beta$ *y* $\alpha(T) = \beta(T)$. *Supongamos que se verifican las hipótesis* (H_1) *y* (H_3).

Entonces, el problema (4.67) *tiene soluciones extremas en* $[\alpha, \beta]$.

Demostración. Como $\alpha(T) = \beta(T)$, es evidente que la hipótesis (H_2') se cumple. Por lo tanto, todas las hipótesis del Teorema 4.8 se verifican. $\square$

Observación 4.11. En el caso de que $\alpha(T) = \beta(T)$, la existencia de un par de sub y sobresolución débilmente acopladas del problema (4.67) es equivalente a la existencia de un par de sub y sobresolución del problema (4.67). Asimismo, x, $y \in [\alpha, \beta]$ son cuasisoluciones acopladas del problema (4.67) si y solo si x, $y \in [\alpha, \beta]$ son soluciones del problema (4.67).

Por otra parte, es obvio que, en ese caso, se verifican tanto la hipótesis (H_2) como la (H_2').

Debido a esto, siempre que α y β sean sub y sobresolución débilmente acopladas del problema (4.67) tales que $\alpha(T) = \beta(T)$, el Corolario 4.3 es también un corolario válido para el Teorema 4.4.

Corolario 4.4. *Sean* α, $\beta \in \Omega$ *sub y sobresolución, respectivamente, del problema* (4.67) *tales que* $\alpha \leq \beta$ *y* $\alpha(0) = \beta(0)$. *Supongamos que se verifican las hipótesis* (H_1) *y* (H_2').

Entonces, el problema (4.67) *tiene soluciones extremas en* $[\alpha, \beta]$.

Demostración. Como $\alpha(0) = \beta(0)$, es inmediato comprobar que (H_3) se verifica para todo $K > 0$. Entonces, se cumplen todas las hipótesis del Teorema 4.8. $\square$

Corolario 4.5. *Sean α, $\beta \in \Omega$ sub y sobresolución, respectivamente, del problema* (4.67) *tales que $\alpha \leq \beta$ y $\alpha(0) = \beta(0)$. Supongamos que se verifica la hipótesis (H_2'). Además, supongamos que $T < 1$ y existe un número real m tal que, para todo $t \in I$,*

$$f(t, y, z) - f(t, \bar{y}, z) \leq m(\bar{y} - y) \quad si\ \alpha(t) \leq y \leq \bar{y} \leq \beta(t). \tag{4.91}$$

Entonces, el problema (4.67) *tiene soluciones extremas en* $[\alpha, \beta]$.

Demostración. Como $T < 1$ y $\alpha(0) = \beta(0)$, de (4.91) se deduce fácilmente que la hipótesis (H_1) se cumple para cualquier constante real M tal que $M \leq b_T(m)$. Por lo tanto, podemos aplicar el Corolario 4.4. □

Corolario 4.6. *Sean α, $\beta \in \Omega$ sub y sobresolución, respectivamente, del problema* (4.67) *tales que $\alpha \leq \beta$, $\alpha(0) = \beta(0)$ y $\alpha(T) = \beta(T)$. Supongamos que la hipótesis (H_1) se verifica.*

Entonces, el problema (4.67) *tiene soluciones extremas en* $[\alpha, \beta]$.

Demostración. Como $\alpha(0) = \beta(0)$ y $\alpha(T) = \beta(T)$, es fácil comprobar que se cumplen tanto la hipótesis (H_2'), como la hipótesis (H_3) para cualquier $K > 0$. Debido a esto, el Teorema 4.8 garantiza la existencia de soluciones extremas del problema (4.67). □

Corolario 4.7. *Sean α, $\beta \in \Omega$ sub y sobresolución, respectivamente, del problema* (4.67) *tales que $\alpha \leq \beta$ y $\alpha(0) = \beta(0)$ y $\alpha(T) = \beta(T)$. Supongamos que $T < 1$ y se verifica la condición* (4.91).

Entonces, el problema (4.67) *tiene soluciones extremas en* $[\alpha, \beta]$.

Demostración. Debido a que $\alpha(T) = \beta(T)$, está claro que la hipótesis (H_2') se cumple, así que podemos aplicar el Corolario 4.5. □

Observación 4.12. Como $\alpha(T) = \beta(T)$ es una hipótesis tanto del Corolario 4.6 como del Corolario 4.7, sabemos —ver la Observación 4.11— que α y β también son un par de sub y sobresolución débilmente acopladas del problema (4.67). Por consiguiente, esos resultados siguen siendo válidos como corolarios del Teorema 4.5.

Si añadimos ciertas hipótesis adicionales al Teorema 4.8, estaremos en condiciones de garantizar, en presencia de un par de sub y sobresolución, la unicidad de solución del problema (4.67).

Teorema 4.9. *Sean α, $\beta \in \Omega$ sub y sobresolución, respectivamente, del problema* (4.67) *tales que $\alpha \leq \beta$. Supongamos que se verifican las hipótesis (H_1), (H_2'), (H_3), (H_5) y (H_6). Supongamos, además, que*

(H_4') *Existen constantes reales* K_1, K_2 *tales que* $K \geq K_1 > 0$ *(con* K *la constante que aparece en* (H_3)*),* $K_2 \geq 0$, *y*

$$g(y,z) - g(\bar{y},\bar{z}) \leq -K_1(\bar{y} - y) + K_2(\bar{z} - z) \tag{4.92}$$

si $\alpha(0) \leq y \leq \bar{y} \leq \beta(0)$ *y* $\alpha(T) \leq z \leq \bar{z} \leq \beta(T)$.

Entonces el problema (4.67) *tiene una única solución en* $[\alpha, \beta]$.

Demostración. La omitiremos por ser totalmente similar a la del Teorema 4.6. □

Observación 4.13. Queremos llamar la atención sobre el hecho de que las hipótesis (H_2'), (H_3) y (H_4') son congruentes. Aunque las hipótesis (H_2) y (H_4) han sido reemplazadas por, respectivamente, las hipótesis (H_2') y (H_4'), el análisis realizado en la Observación 4.10 acerca del comportamiento de la función g con respecto a la primera variable sigue siendo válido. Sin embargo, al estudiar ahora el comportamiento de g respecto a la segunda variable, obtenemos que

$$-K_2 \leq \frac{g(y,\bar{z}) - g(y,z)}{\bar{z} - z} \leq 0 \quad \text{si } \alpha(T) \leq z < \bar{z} \leq \beta(T) \text{ y } \alpha(0) \leq y \leq \beta(0), \tag{4.93}$$

que pasa a ser, cuando g es diferenciable,

$$-K_2 \leq \frac{\partial g}{\partial z}(y,z) \leq 0 \quad \text{si } \alpha(T) \leq z \leq \beta(T) \text{ y } \alpha(0) \leq y \leq \beta(0).$$

Por otra parte, siempre que $\alpha(T) = \beta(T)$, es obvio que se satisfacen las condiciones (4.93) y (4.85). Supongamos que, en este caso, se cumple también la siguiente hipótesis:

(H_4'') Existe una constante real K_1 tal que $K \geq K_1 > 0$ verificando que

$$g(y,z) - g(\bar{y},z) \leq -K_1(\bar{y} - y) \quad \text{si } \alpha(0) \leq y \leq \bar{y} \leq \beta(0). \tag{4.94}$$

Entonces también se cumplen tanto la hipótesis (H_4) como la (H_4').

Teorema 4.10. *Sean* α, $\beta \in \Omega$ *sub y sobresolución, respectivamente, del problema* (4.67) *tales que* $\alpha \leq \beta$ *y* $\alpha(T) = \beta(T)$. *Supongamos que las hipótesis* (H_1), (H_3), (H_4'') *y* (H_5) *se cumplen.*

Entonces, el problema (4.67) *tiene una única solución en* $[\alpha, \beta]$.

Demostración. El Corolario 4.3 garantiza la existencia de $\rho \leq \gamma$, soluciones extremas del problema (4.67) en $[\alpha, \beta]$.

Tomando $q = \rho - \gamma \leq 0$ y utilizando (H_5) como en el Teorema 4.6, obtenemos la desigualdad (4.84). Si suponemos ahora que $q(0) \neq 0$, necesariamente $q(0) < 0$ y, entonces, a partir de (H_4'') podemos deducir que

$$0 = g(\rho(0), \rho(T)) - g(\gamma(0), \rho(T)) \leq K_1 q(0) < 0,$$

que es una contradicción.

Por lo tanto $q(0) = 0$ y, entonces, $\rho \equiv \gamma$ es la única solución del problema (4.67) en $[\alpha, \beta]$. $\square$

Observación 4.14. Es fácil darse cuenta de que, cuando $\alpha(T) = \beta(T)$, la función g verifica la hipótesis (H_2). En tal caso, si se cumple la hipótesis (H_4''), también se verifica la hipótesis (H_4). Es más, como se ha explicado en la Observación 4.11, los conceptos de sub y sobresolución débilmente acopladas y de sub y sobresolución coinciden en este caso, como también los conceptos de cuasisolución y solución.

Debido a esto, el Teorema 4.10 mantiene su validez en caso de que α y β sean un par de sub y sobresolución débilmente acopladas del problema (4.67).

Ejemplo 4.3. El siguiente problema

$$x'(t) = -\cos(t\,x(t)) - x^3([t]), \quad t \in [0,1], \quad 0 = x^3(0) + x(0) - x(1), \quad (4.95)$$

tiene una única solución en el intervalo $[2t-2, -t^2+1]$.

Demostración. El problema (4.95) es un caso particular del problema (4.67) con $T = 1$,

$$f(t,y,z) = -\cos(t\,y) - z^3 \quad \text{y} \quad g(y,z) = y^3 + y - z.$$

Las funciones $\alpha(t) = 2t - 2$ y $\beta(t) = -t^2 + 1$ son, respectivamente, sub y sobresolución del problema (4.95) tales que $\alpha \leq \beta$ y $\alpha(1) = \beta(1) = 0$.

Tomando $m = 1$, $M = p = 1$, $K = 4$ y $K_1 = 1$, entonces f y g verifican las hipótesis (H_1), (H_3), (H_4'') y (H_5). Por lo tanto, se cumplen todas las hipótesis del Teorema 4.10. $\square$

Teorema 4.11. *Sean α, $\beta \in \Omega$ sub y sobresolución, respectivamente, del problema* (4.67) *tales que $\alpha \leq \beta$ y $\alpha(0) = \beta(0)$. Supongamos que las hipótesis (H_1), (H_2') and (H_5) se cumplen.*

Entonces, el problema (4.67) *tiene una única solución en* $[\alpha, \beta]$.

Demostración. La prueba de este resultado es similar a la del Teorema 4.7, en este caso para una subsolución y una sobresolución. $\square$

Corolario 4.8. *Sean* α, $\beta \in \Omega$ *sub y sobresolución, respectivamente, del problema* (4.67) *tales que* $\alpha \leq \beta$, $\alpha(0) = \beta(0)$ *y* $\alpha(T) = \beta(T)$. *Supongamos que las hipótesis* (H_1) *y* (H_5) *se cumplen.*

Entonces, el problema (4.67) *tiene una única solución en* $[\alpha, \beta]$.

Demostración. Como $\alpha(T) = \beta(T)$, es obvio que la hipótesis (H_2') se cumple. Debido a esto, estamos en condiciones de aplicar el Teorema 4.11. □

Corolario 4.9. *Sean* α, $\beta \in \Omega$ *sub y sobresolución, respectivamente, del problema* (4.67) *tales que* $\alpha \leq \beta$ *y* $\alpha(0) = \beta(0)$. *Supongamos que* $T < 1$ *y que la condición* (4.91) *se verifica. Supongamos, también, que se cumplen las hipótesis* (H_2') *y* (H_5).

Entonces, el problema (4.67) *tiene una única solución en* $[\alpha, \beta]$.

Demostración. Debido a que $\alpha(0) = \beta(0)$ y $T < 1$, de la condición (4.91) deducimos que la hipótesis (H_1) se verifica. Estamos, pues, en condiciones de aplicar el Teorema 4.11. □

Corolario 4.10. *Sean* α, $\beta \in \Omega$ *sub y sobresolución, respectivamente, del problema* (4.67) *tales que* $\alpha \leq \beta$, $\alpha(0) = \beta(0)$ *y* $\alpha(T) = \beta(T)$. *Supongamos que* $T < 1$ *y que se cumple la condición* (4.91). *Supongamos, también, que se cumple la hipótesis* (H_5).

Entonces, el problema (4.67) *tiene una única solución en* $[\alpha, \beta]$.

Demostración. Razonando como en la demostración anterior, sabemos que se cumple la hipótesis (H_1). De este modo, podemos aplicar el Corolario 4.8. □

Observación 4.15. En este caso, a partir de las Observaciones 4.10 y 4.13, sabemos que el problema periódico $x(0) = x(T)$ $(g(y, z) = y - z)$ cubre las hipótesis (H_2'), (H_3) y (H_4'), así que todos los resultados de existencia expuestos en esta subsección son válidos para el problema periódico siempre que $p \leq 0$. Lo mismo podemos decir, en este caso para todo $p \in \mathbb{R}$, para el problema de valor inicial $x(0) = x_0$ $(g(y, z) = y - x_0)$.

El problema terminal $x(T) = x_T$ $(g(y, z) = -z + x_T)$ cumple las hipótesis (H_2') y (H_3), no así la hipótesis (H_4'). Entonces, podremos aplicar el Teorema 4.8, pero solo podremos aplicar los Teoremas 4.9 y 4.10, que garantizan la unicidad de solución, si $\alpha(0) = \beta(0)$ y $\alpha(T) = \beta(T) = x_T$.

Al problema de condiciones de frontera antiperiódicas $x(0) = -x(T)$ $(g(y, z) = y + z)$ se le pueden aplicar nuestros resultados siempre y cuando $\alpha(0) = \beta(0) = -\beta(T) = -\alpha(T)$.

Bibliografía

[1] Agarwal, R. P., «On boundary value problems for second order discrete systems». *Applicable Analysis*, 1985, **20(1-2)**, pp. 1–17.

[2] Agarwal, R. P., *Difference equations and inequalities*. Volumen 155 de *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[3] Agarwal, R. P., *Focal boundary value problems for differential and difference equations*. Volumen 436 de *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[4] Agarwal, R. P., *Difference equations and inequalities: theory, methods, and applications*. Volumen 228 de *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.

[5] Agarwal, R. P., Cabada, A., Otero-Espinar, V. y Dontha, S., «Existence and uniqueness of solutions for anti-periodic difference equations». *Archives of Inequalities and Applications*, 2004, **2(4)**, pp. 397–411.

[6] Agarwal, R. P., Kim, Y.H. y Sen, S. K., «Advanced discrete Halanay-type inequalities: Stability of difference equations.» *Journal of Inequalities and Applications [electronic only]*, 2009, **2009**, p. 11.

[7] Agarwal, R. P. y Wong, F., «Upper and lower solutions method for higher-order discrete boundary value problems». *Mathematical Inequalities & Applications*, 1998, **1(4)**, pp. 551–557.

[8] Agarwal, R. P. y Wong, P. J. Y., *Advanced topics in difference equations*. Volumen 404 de *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.

[9] Atici, F. M., Cabada, A. y Ferreiro, J. B., «Existence and comparison results for first order periodic implicit difference equations with

maxima». *Journal of Difference Equations and Applications*, 2002, **8(4)**, pp. 357–369.

[10] Atici, F. M., Cabada, A. y Ferreiro, J. B., «First order difference equations with maxima and nonlinear functional boundary value conditions». *Journal of Difference Equations and Applications*, 2006, **12(6)**, pp. 565–576.

[11] Atici, F. M. y Guseinov, G. Sh., «Positive periodic solutions for nonlinear difference equations with periodic coefficients». *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1999, **232(1)**, pp. 166–182.

[12] Baker, C. T. H. y Tang, A., «Generalized Halanay inequalities for Volterra functional differential equations and discretized versions». En: C. Corduneanu y J. W. Sandberg (Ed.), *Volterra equations and applications (Papers from the Volterra Centennial Symposium, University of Texas, Arlington, TX, May 23-24, 1996)*, Volumen 10 de *Stability and Control: Theory, Methods and Applications*, pp. 39–55. Gordon and Breach, Amsterdam, 2000.

[13] Berezansky, L., Braverman, E. y Liz, E., «Sufficient conditions for the global stability of nonautonomous higher order difference equations». *Journal of Difference Equations and Applications*, 2005, **11(9)**, pp. 785–798.

[14] Bernfeld, S. R. y Lakshmikantham, V., *An introduction to nonlinear boundary value problems.* Volumen 109 de *Mathematics in Science and Engineering.* Academic Press, New York, 1974.

[15] Bôcher, M., «Green's functions in space of one dimension». *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1901, **7(7)**, pp. 297–299.

[16] Bôcher, M., «Boundary problems and Green's functions for linear differential and difference equations». *Annals of Mathematics. Second Series*, 1911/12, **13(1-4)**, pp. 71–88.

[17] Burkhardt, H., «Sur les fonctions de Green relatives à un domaine d'une dimension.» *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1894, **22**, pp. 71–75.

[18] Busenberg, S. y Cooke, K. L., «Models of vertically transmitted diseases with sequential-continuous dynamics». En: V. Lakshmikantham (Ed.), *Nonlinear phenomena in mathematical sciences*, pp. 179–187. Academic Press, New York, 1982.

[19] Busenberg, S. y Cooke, K. L., *Vertically transmitted diseases. Models and dynamics*. Volumen 23 de *Biomathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[20] Busenberg, S., Cooke, K. L. y Pozio, M. A., «Analysis of a model of vertically transmitted disease». *Journal of Mathematical Biology*, 1983, **17(3)**, pp. 305–329.

[21] Cabada, A., «The method of lower and upper solutions for second, third, fourth, and higher order boundary value problems». *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1994, **185(2)**, pp. 302–320.

[22] Cabada, A., «Extremal solutions for the difference ϕ-Laplacian problem with nonlinear functional boundary conditions». *Computers & Mathematics with Applications*, 2001, **42(3-5)**, pp. 593–601.

[23] Cabada, A., «The method of lower and upper solutions for periodic and anti-periodic difference equations». *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 2007, **27**, pp. 13–25.

[24] Cabada, A., «An overview of the lower and upper solutions method with nonlinear boundary value conditions». *Boundary Value Problems*, 2011, Art. ID 893753. 18 pp.

[25] Cabada, A., *Green's Functions in the Theory of Ordinary Differential Equations*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer, New York, 2014.

[26] Cabada, A. y Cid, J. A., «Existence of a non-zero fixed point for nondecreasing operators proved via Krasnoselskii's fixed point theorem». *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications*, 2009, **71(5-6)**, pp. 2114–2118.

[27] Cabada, A. y Ferreiro, J. B., «Existence of positive solutions for nth order periodic difference equations». *Journal of Difference Equations and Applications*, 2011, **17(6)**, pp. 935–954.

[28] Cabada, A. y Ferreiro, J. B., «First order differential equations with piecewise constant arguments and nonlinear boundary value conditions». *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2011, **380(1)**, pp. 124–136.

[29] Cabada, A., Ferreiro, J. B. y Liz, E., «Resultados de comparación para ecuaciones en diferencias de primer orden con máximo». En:

L. Ferragut y A. Santos (Eds.), *Actas del XVII Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones/VII Congreso de Matemática Aplicada [CD-ROM]*, Universidad de Salamanca, Salamanca, 2001.

[30] Cabada, A., Ferreiro, J. B. y Nieto, J. J., «Green's function and comparison principles for first order periodic differential equations with piecewise constant arguments». *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2004, **291(2)**, pp. 690–697.

[31] Cabada, A. y Otero-Espinar, V., «Optimal existence results for n-th order periodic boundary value difference equations». *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2000, **247**, pp. 67–86.

[32] Cabada, A. y Otero-Espinar, V., «Comparison results for n-th order periodic difference equations». *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications.*, 2001, **47(4)**, pp. 2395–2406.

[33] Cabada, A. y Otero-Espinar, V., «Fixed sign solutions of second-order difference equations with Neumann boundary conditions». *Computers & Mathematics with Applications*, 2003, **45(6-9)**, pp. 1125–1136.

[34] Cabada, A., Otero-Espinar, V. y Pouso, R. L., «Existence and approximation of solutions for first-order discontinuous difference equations with nonlinear global conditions in the presence of lower and upper solutions». *Computers & Mathematics with Applications*, 2000, **39(1-2)**, pp. 21–33.

[35] Cid, J. A., «On extremal fixed points in Schauder's theorem with applications to differential equations». *Bulletin of the Belgian Mathematical Society. Simon Stevin*, 2004, **11(1)**, pp. 15–20.

[36] Cid, J. A., Franco, D. y Minhós, F., «Positive fixed points and fourth-order equations». *Bulletin of the London Mathematical Society*, 2009, **41(1)**, pp. 72–78.

[37] Cid, José Ángel, Liz, Eduardo y Pouso, Rodrigo L., «Corrigendum to: "Existence theory for first order discontinuous functional differential equations" [Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 11, 3301–3311] by Liz and Pouso». *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2004, **132(10)**, pp. 3135–3136.

[38] Cooke, K. L. y Ivanov, A. F., «On the discretization of a delay differential equation». *Journal of Difference Equations and Applications*, 2000, **6(1)**, pp. 105–119.

[39] Cooke, K. L. y Wiener, J., «Retarded differential equations with piecewise constant delays». *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1984, **99(1)**, pp. 265–297.

[40] Cooke, K. L. y Wiener, J., «A survey of differential equations with piecewise continuous arguments». En: *Delay differential equations and dynamical systems (Claremont, CA, 1990)*, Volumen 1475 de *Lecture Notes in Mathemathics*, pp. 1–15. Springer, Berlin, 1990.

[41] Dai, L., *Nonlinear dynamics of piecewise constant systems and implementation of piecewise constant arguments.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2008.

[42] De Burgos, J., *Cálculo Infinitesimal de Varias Variables.* McGraw-Hill/Interamericana de Espana, S.A., 1995.

[43] De Coster, C. y Habets, P., «Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary value problems: classical and recent results». En: Zanolin, F. (Ed.), *Nonlinear Analysis and Boundary Balue Problems for Ordinary Differential Equations (Udine)*, Volumen 371 de *CISM Courses and Lectures*, pp. 1–78. Springer, Vienna, 1996.

[44] De Coster, C. y Habets, P., «An overview of the method of lower and upper solutions for ODEs». En: *Nonlinear analysis and its applications to differential equations (Lisbon, 1998)*, Volumen 43 de *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, pp. 3–22. Birkhäuser Boston, Boston, Mass, 2001.

[45] De Coster, C. y Habets, P., «The lower and upper solutions method for boundary value problems». En: Cañada, A. et al. (Ed.), *Handbook of differential equations: Ordinary differential equations. Vol. I.*, pp. 69–160. Elsevier/North Holland, Amsterdam, 2004.

[46] De Coster, C. y Habets, P., *Two-point boundary value problems: lower and upper solutions.* Volumen 205 de *Mathematics in Science and Engineering.* Elsevier B. V., Amsterdam, 2006.

[47] Elaydi, S. N., *An introduction to difference equations.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1999.

[48] Eloe, P. W., «Difference equations and multipoint boundary value problems». *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1982, **86(2)**, pp. 253–259.

[49] Eloe, P.W., «A boundary value problem for a system of difference equations». *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1983, **7(8)**, pp. 813 – 820.

[50] Erbe, L. H. y Wang, H., «On the existence of positive solutions of ordinary differential equations». *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1994, **120(3)**, pp. 743–748.

[51] Franco, D., O'Regan, D. y Perán, J., «Upper and lower solution theory for first and second order difference equations». *Dynamic Systems and Applications*, 2004, **13(2)**, pp. 273–282.

[52] Gopalsamy, K., *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics.* Volumen 74 de *Mathematics and its Applications.* Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992.

[53] Gourley, S. A., «Oscillations and convergence in a harvesting model with sawtooth delay». En: S. Ruan et al. (Ed.), *Dynamical systems and their applications in biology (Cape Breton Island, NS, 2001)*, Volumen 36 de *Fields Institute Communications*, pp. 137–145. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[54] Gouzé, J-L y Sari, T., «A class of piecewise linear differential equations arising in biological models». *Dynamical Systems. An International Journal*, 2002, **17(4)**, pp. 299–316.

[55] Green, G., «An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism.» *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1850, **39**, pp. 73–89.

[56] Grove, E. A., Kent, C., Ladas, G. y Radin, M. A., «On $x_{n+1} = \text{máx}\{1/x_n, A_n/x_{n-1}\}$ with a period 3 parameter». En: T. Faria y P. Freitas (Eds.), *Topics in functional differential and difference equations (Lisbon, 1999)*, Volumen 29 de *Fields Institute Communications*, pp. 161–180. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[57] Guo, Da Jun y Lakshmikantham, V., *Nonlinear problems in abstract cones.* Volumen 5 de *Notes and Reports in Mathematics in Science and Engineering.* Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.

[58] Győri, I. y Trofimchuk, S. I., «Global attractivity and persistence in a discrete population model». *Journal of Difference Equations and Applications*, 2000, **6(6)**, pp. 647–665.

[59] Halanay, A., *Differential equations: Stability, oscillations, time lags.* Academic Press, New York, 1966.

[60] Henderson, J. y Wang, H., «Positive solutions for nonlinear eigenvalue problems». *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1997, **208(1)**, pp. 252–259.

[61] Huang, C., He, Y. y Chen, P., «Dynamic analysis of stochastic recurrent neural networks». *Neural Processing Letters*, 2008, **27(3)**, pp. 267–276.

[62] Huang, J. y Liu, J., «Continuous and Discrete Halanay Delayed Inequalities and Their Applications in Stability of Neural Networks». En: W. Yu, H. He y N. Zhang (Eds.), *Proceedings of the 6th International Symposium on Neural Networks on Advances in Neural Networks*, Volumen 5551, pp. 262–271. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009.

[63] Ivanov, A., Liz, E. y Trofimchuk, S., «Halanay inequality, Yorke 3/2 stability criterion, and differential equations with maxima». *Tohoku Mathematical Journal*, 2002, **54(2)**, pp. 277–295.

[64] Jankowski, T., «On delay differential equations with nonlinear boundary conditions». *Boundary Value Problems*, 2005, **(2)**, pp. 201–214.

[65] Kocić, V. L. y Ladas, G., *Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications.* Volumen 256 de *Mathematics and its Applications.* Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[66] Krasnosel'skiĭ, M. A., «Fixed points of cone-compressing or cone-extending operators». *Soviet Mathematics. Doklady*, 1960, **1**, pp. 1285–1288.

[67] Krasnosel'skiĭ, M. A., *Positive solutions of operator equations.* P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1964.

[68] Kuang, Y., *Delay differential equations with applications in population dynamics.* Volumen 191 de *Mathematics in Science and Engineering.* Academic Press Inc., Boston, MA, 1993.

[69] Küpper, T. y Yuan, R., «On quasi-periodic solutions of differential equations with piecewise constant argument». *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2002, **267(1)**, pp. 173–193.

[70] LADDE, G. S., LAKSHMIKANTHAM, V. y VATSALA, A. S., *Monotone iterative techniques for nonlinear differential equations*. Volumen 27 de *Monographs, Advanced Texts and Surveys in Pure and Applied Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass, 1985.

[71] LAKSHMIKANTHAM, V. y TRIGIANTE, D., *Theory of difference equations*. Volumen 181 de *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[72] LIU, Z. R., XIE, H. M., ZHU, Z. X. y LU, Q. H., «The strange attractor of the Lozi mapping». *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 1992, **2(4)**, pp. 831–839.

[73] LIZ, E., *Problemas de frontera para nuevos tipos de ecuaciones diferenciales*. Tesis doctoral, Universidade de Vigo, 1994.

[74] LIZ, E., «Stability of non-autonomous difference equations: simple ideas leading to useful results». *Journal of Difference Equations and Applications*, 2011, **17(2)**, pp. 203–220.

[75] LIZ, E. y FERREIRO, J. B., «A note on the global stability of generalized difference equations». *Applied Mathematics Letters*, 2002, **15(6)**, pp. 655–659.

[76] LIZ, E., IVANOV, A. y FERREIRO, J. B., «Discrete Halanay-type inequalities and applications». *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications*, 2003, **55(6)**, pp. 669–678.

[77] LIZ, E. y POUSO, R. L., «Existence theory for first order discontinuous functional differential equations». *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2002, **130(11)**, pp. 3301–3311.

[78] LIZ, E. y TROFIMCHUK, S., «Existence and stability of almost periodic solutions for quasilinear delay systems and the Halanay inequality». *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2000, **248(2)**, pp. 625–644.

[79] MAWHIN, JEAN, «Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations: from successive approximations to topology». En: *Development of mathematics 1900–1950 (Luxembourg, 1992)*, pp. 443–477. Birkhäuser, Basel, 1994.

[80] Misiurewicz, M., «Strange attractors for the Lozi mappings». En: *Nonlinear dynamics (International Conference, New York, 1979)*, Volumen 357 de *Annals of the New York Academy of Sciences*, pp. 348–358. New York Academy of Sciences, New York, 1980.

[81] Mohamad, S. y Gopalsamy, K., «Continuous and discrete Halanay-type inequalities». *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 2000, **61**, pp. 371–385.

[82] Mohamad, S., Gopalsamy, K. y Akça, H., «Exponential stability of artificial neural networks with distributed delays and large impulses». *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2008, **9(3)**, pp. 872–888.

[83] Neumann, C., «Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential.» Leipzig. Teubner (1877)., 1877.

[84] Nieto, J. J., «A comparison result for a linear differential equation with piecewise constant delay». *Glasnik Matematički. Serija III*, 2004, **39(59)(1)**, pp. 73–76.

[85] Nieto, J. J., Cabada, A. y Liz, E., «Existencia y aproximación de solución para ciertas ecuaciones funcionales en ingeniería». En: F. Navarrina y M. Casteleiro (Eds.), *II Congreso de Métodos numéricos en Ingeniería*, Volumen 2, pp. 920–929. A Coruña, 1993.

[86] Nieto, J. J. y Rodríguez-López, R., «Green's function for second-order periodic boundary value problems with piecewise constant arguments». *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2005, **304(1)**, pp. 33–57.

[87] Perron, O., «Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$.» *Mathematische Annalen*, 1915, **76**, pp. 471–484.

[88] Persson, H., «A fixed point theorem for monotone functions». *Applied Mathematics Letters*, 2006, **19(11)**, pp. 1207–1209.

[89] Picard, É., «Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives». *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1890, **6**, pp. 145–210.

[90] Picard, É., «Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires». *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1893, **9**, pp. 217–271.

[91] PINTO, M. y TROFIMCHUK, S., «Stability and existence of multiple solutions for a quasilinear differential equation with maxima». *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 2000, **130A**, pp. 1103–1118.

[92] SAKATA, S. y HARA, T., «Dynamics of a linear differential system with piecewise constant argument». *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 2000, **7(4)**, pp. 585–594.

[93] SCHAEFER, M.B., «Some aspects of the dynamics of populations important to the managment of the commercial marine fisheries». *Bulletin of the Inter-American Tropical Tunna Commission*, 1954, **1(2)**, pp. 27–56.

[94] SCORZA DRAGONI, G., «II problema dei valori ai limiti studiato in grande per le equazioni differenziali del secondo ordine». *Mathematische Annalen*, 1931, **105(1)**, pp. 133–143.

[95] SEDAGHAT, H., *Nonlinear difference equations. Theory with applications to social science models.* Volumen 15 de *Mathematical Modelling: Theory and Applications.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[96] SHAH, S. M. y WIENER, J., «Advanced differential equations with piecewise constant argument deviations». *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 1983, **6(4)**, pp. 671–703.

[97] SOTO, F.G., GIL, J.S. y VEGA, L.A.T., *Guía práctica de cálculo infinitesimal en varias variables.* Ediciones Paraninfo, S.A., 2005.

[98] SUN, J.P. y LI, W. T., «Positive solutions to nonlinear first-order PBVPs with parameter on time scales». *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications*, 2009, **70(3)**, pp. 1133–1145.

[99] TORRES, P.J., «Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnosel'skiĭ fixed point theorem». *Journal of Differential Equations*, 2003, **190(2)**, pp. 643–662.

[100] VERHULST, P.F., «Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement». *Correspondance mathematique et physique*, 1838, **10**, pp. 113–121.

[101] WIENER, J., «Differential equations with piecewise constant delays». En: V. Lakshmikantham (Ed.), *Trends in theory and practice of nonlinear differential equations (Arlington, Tex., 1982)*, Volumen 90 de *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, pp. 547–552. Dekker, New York, 1984.

[102] WIENER, J., *Generalized solutions of functional-differential equations.* World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1993.

[103] WIENER, J. y LAKSHMIKANTHAM, V., «A damped oscillator with piecewise constant time delay». *Nonlinear Studies*, 2000, **7(1)**, pp. 78–84.

[104] WIENER, J. y LAKSHMIKANTHAM, V., «Differential equations with piecewise constant argument and impulsive equations». *Nonlinear Studies*, 2000, **7(1)**, pp. 60–69.

[105] XU, H. y LIZ, E., «Boundary value problems for differential equations with maxima». *Nonlinear Studies*, 1996, **3**, pp. 231–241.

[106] YANG, P., LIU, Y. y GE, W., «Green's function for second order differential equations with piecewise constant arguments». *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications*, 2006, **64(8)**, pp. 1812–1830.

[107] ZEIDLER, E., *Nonlinear functional analysis and its applications. Volume I: Fixed-point theorems.* Springer-Verlag, New York, 1986.

[108] ZHANG, F., ZHAO, A. y YAN, J., «Monotone iterative method for differential equations with piecewise constant arguments». *Portugaliae Mathematica*, 2000, **57(3)**, pp. 345–353.

[109] ZHUANG, W., CHEN, Y. y CHENG, S. S., «Monotone methods for a discrete boundary problem». *Computers & Mathematics with Applications. An International Journal*, 1996, **32(12)**, pp. 41–49.

USC

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC

UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA