FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

La ecuación diferencial de Riccati

Alba Cuiña Chaves

Julio, 2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

La ecuación diferencial de Riccati

Alba Cuiña Chaves

Julio, 2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento:Análisis Matemático
Título: La ecuación diferencial de Riccati
Breve descripción del contenido
A pesar de la sencillez de su expresión, la ecuación de Riccati no puede ser, salvo en algunos casos particulares especiales, resuelta analíticamente usando funciones elementales o cuadraturas, siendo el método de series de potencias el más comúnmente utilizado para su resolución. En este trabajo, se estudiarán algunos enfoques clásicos para un caso particular de la mencionada ecuación, la transformación del caso general en una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes variables, así como la posibilidad de su reducción, una vez conocida una de sus soluciones particulares, a una ecuación de Bernoulli (y, por tanto, a una ecuación lineal de primer orden). También se presentarán posibles aplicaciones de esta ecuación a diversos campos.

Índice

Resumen

A pesar de la sencillez de su expresión, la ecuación de Riccati no puede ser, salvo en algunos casos particulares especiales, resuelta analíticamente usando funciones elementales o cuadraturas, siendo el método de series de potencias el más comúnmente utilizado para su resolución. En este trabajo, se estudiarán algunos enfoques clásicos para un caso particular de la mencionada ecuación, la transformación del caso general en una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes variables, así como la posibilidad de su reducción, una vez conocida una de sus soluciones particulares, a una ecuación de Bernoulli (y, por tanto, a una ecuación lineal de primer orden). También se presentarán posibles aplicaciones de esta ecuación a diversos campos.

Abstract

Despite the simplicity of its expression, the Riccati equation cannot be analytically solved using elementary functions or quadratures, except in some special particular cases. The method of power series is the most commonly used approach for its resolution. In this work, we will study some classical approaches for a specific case of the mentioned equation: transforming the general case into a second-order linear homogeneous differential equation with variable coefficients, as well as the possibility of reducing it to a Bernoulli equation (and, therefore, a first-order linear equation) once one of its particular solutions is known. Possible applications of this equation in various fields will also be presented.

Introducción

La ecuación de Riccati recibe este nombre en honor a Jacopo Francesco Riccati (1676 - 1754). Riccati ingresó en la Universidad de Padua para estudiar Derecho, a pesar de que estaba interesado en las Ciencias. Asistió a un curso de Astronomía en el que hizo amistad con su profesor Stefano degli Angeli, quien lo introdujo en el mundo de las Matemáticas.
Fue autodidacta, estudiando las obras de los principales matemáticos de la época y sus estudios se centraron en hidráulica, lo cual fue de gran utilidad para la construcción de canales en Venecia, así como en la resolución de ecuaciones diferenciales. En cuanto a esto último, destacan sus métodos para reducir el orden de una ecuación y el de separación de variables, aunque es principalmente conocido por la ecuación que lleva su nombre.

Figura 1: Jacopo Francesco Riccati.

La ecuación de Riccati tiene la siguiente forma general:

$$x'(t) = p(t) + q(t)x + r(t)x^2. \tag{1}$$

Riccati estudió esta ecuación centrándose en la resolución de algunos casos específicos. Sin embargo, fue Euler el primer matemático que propuso una solución para la misma y D'Alembert quien le dio nombre. Bernoulli también estudió la ecuación en su obra *Exercitationes quaedam mathematicae*.
Estos datos biográficos han sido consultados en [7].

Al tratarse de una ecuación diferencial de primer orden no lineal su resolución no es sencilla, pues, generalmente, no es integrable de forma elemental. Por este motivo, el objetivo de este trabajo es estudiar algunos de los diferentes casos en los que se puede determinar su solución.
En el primer capítulo, se tratarán los casos particulares en los que la ecuación se reduce a una ecuación de variables separadas, a una ecuación lineal o a una ecuación de Bernoulli, que son ecuaciones cuya solución se puede calcular mediante procedimientos generales. Se explicarán los métodos para resolver estas ecuaciones.
En el siguiente capítulo, se abordará el empleo de una o dos soluciones particulares para hallar la solución general, así como el método de las series de potencias para la búsqueda de una solución particular.
En el tercer capítulo, se estudiará la resolución de la ecuación bajo ciertas hipótesis para los coeficientes y, finalmente, en el último capítulo, se ilustrarán algunas aplicaciones de la ecuación de Riccati, tanto en Matemáticas como en otros campos.

Capítulo 1

Consideraciones previas

Para comenzar con el estudio de la ecuación de Riccati, se presentarán definiciones y resultados teóricos relacionados con las ecuaciones diferenciales ordinarias, así como las propiedades de sus soluciones, que servirán de base para presentar esta ecuación en el marco teórico. Estos resultados han sido consultados en los libros [3] y [11] .

Definición 1.1. Se denomina ecuación diferencial ordinaria (EDO) a una ecuación que se escribe en términos de una función de una variable real y algunas de sus derivadas.

El orden de una EDO es el mayor orden de las derivadas involucradas en la ecuación. Una EDO de orden k puede representarse de la siguiente forma:

$$F\left(t, x, x', x'', \ldots, x^{k)}\right) = 0,$$

donde t es la variable independiente, x la variable independiente y $x', x'', \ldots, x^{k)}$ son las sucesivas derivadas de x con respecto a t. Se dice que esta EDO está dada en forma implícita.

Definición 1.2. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función, se llamará ecuacion diferencial ordinaria de primer orden en forma explícita relativa a la función f a

$$x' = f(t, x). \tag{1.1}$$

Definición 1.3. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sean $p, q, r : I \to \mathbb{R}$ funciones reales de una variable real. Se dice que la EDO de primer orden en forma explícita

$$x' = p(t) + q(t)x + r(t)x^2 \tag{1.2}$$

es una EDO de Riccati.

Observación 1.4. En el contexto de la Definición 1.1, la función $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asociada a la EDO de Riccati viene dada por $f(t,x) = p(t) + q(t)x + r(t)x^2$.

En relación a la clasificación de las ecuaciones diferenciales, también cabe mencionar la forma general de algunas ecuaciones de primer orden con las que se trabajará en los próximos capítulos.

Definición 1.5. Una ecuación $x' = f(t,x)$ se dice que es de variables separadas si $f(t,x)$ es el producto de una función de t por una función de x. En concreto, estas ecuaciones son de la forma

$$x' = g(x)h(t),$$

donde $h(t)$ y $g(x)$ se suponen continuas en ciertos intervalos abiertos (a,b) y (c,d), respectivamente.

Definición 1.6. Una ecuación diferencial lineal de primer orden tiene la siguiente forma general:

$$x'(t) = p(t)x + q(t),$$

donde p y q son funciones continuas en un intervalo $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$.

Definición 1.7. La ecuación diferencial de Bernoulli es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden de la forma:

$$x' + p(t)x + r(t)x^{\alpha} = 0,$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$, p y r son funciones continuas en un intervalo abierto (a,b), con $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$.

Definición 1.8. En el caso de una ecuación diferencial general, el problema del valor inicial (PVI), o problema de Cauchy, consiste en determinar una solución de una ecuación diferencial $x' = f(t,x)$ que satisfaga la condicion inicial $x(t_0) = x_0$, con $(t_0, x_0) \in \Omega$. Suele escribirse de la forma:

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Geométricamente, este problema consiste en encontrar una solución $x(t)$ de la ecuación de forma que su gráfica pase por el punto (t_0, x_0).

Definición 1.9. Dada una función $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, siendo I un intervalo de $\mathbb{R}$, se dirá que φ es una solución de la EDO (1.1) si cumple que:

1. $(t, \varphi(t)) \in A$, para todo $t \in I$,
2. φ es derivable en I,
3. $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, para todo $t \in I$.

Definición 1.10. Dada

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(t, x) \longmapsto f(t, x)$$

se dice que f es *Lipschitziana en* Ω *con respecto a la segunda variable* si existe $L \geq 0$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{para todo } (t, x), (t, y) \in \Omega.$$

Además, se dirá que f es *localmente lipschitziana en* Ω *con respecto a la segunda variable* si para cada $(t_0, x_0) \in \Omega$, existe un entorno, U_0 de (t_0, x_0) tal que $f_{|U_0}$ es localmente lipschitziana con respecto a la segunda variable.

Uno de los teoremas más importantes en el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias es el que establece las condiciones suficientes para asegurar la existencia y unicidad de la solución para el problema de valor inicial.

Teorema 1.11 (Teorema de Picard-Lipschitz)**.** *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *un abierto,* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *y* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una función continua y localmente Lipschitziana con respecto a la variable* x *en* Ω*. Entonces existe* $\alpha > 0$ *tal que el Problema de Cauchy* (1.3) *tiene solución única en un intervalo de la forma* $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$*, para un cierto* $\alpha > 0$*.*

Este resultado permite garantizar la existencia y unicidad de la solución, sin embargo, esto no quiere decir que, en la práctica, sea siempre posible obtenerla de forma elemental. Por ejemplo, la ecuación

$$x' = t + x^2$$

no es resoluble elementalmente a pesar de que sí cumple las hipótesis del teorema de existencia y unicidad.
Otro teorema de existencia y unicidad más restrictivo pero cuyas hipótesis son más sencillas de comprobar, es el que aparece en el libro [11].

Corolario 1.12. *Supongamos que* f *y* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *son funciones continuas en el rectángulo definido como* $R = \{(t, x) : -a < t < a, -b < x < b\}$*, entonces existe un intervalo* $(-h, h) \subseteq (-a, a)$ *en el cual está definida una única solución* $\varphi(t)$ *del problema de valor inicial.*

Traducido a la ecuación de Riccati, una condición suficiente para que exista solución y esta sea única es que las funciones $p(t)$, $q(t)$ y $r(t)$ sean continuas en un intervalo I y que la función $p(t) + q(t)x + r(t)x^2$ sea derivable con respecto a x y con derivada continua en dicho intervalo. Es importante destacar que la condición de que esta derivada sea continua se satisface siempre que p, q y r sean continuas. En efecto, la derivada parcial de f con respecto a x es $q(t) + 2r(t)$ y será continua siempre que las funciones q y r lo sean.

También son necesarias ciertas nociones básicas con respecto a las series de potencias para la comprensión del Capítulo 3, en el que se desarrolla el método de las series de potencias para la resolución de ecuaciones diferenciales. Estos resultados se han obtenido de los libros [1] y [9].

Teorema 1.13. *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* $R > 0$ *y denotemos la suma mediante* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$, *para* $x \in (c-R, c+R)$. *Entonces la función* f *es derivable y, para cada* $x \in (c-R, c+R)$, *se tiene:*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}. \tag{1.4}$$

Definición 1.14 (Producto de Cauchy)**.** Dadas dos series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, definimos

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad \text{para} n = 0, 1, 2, \ldots$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ se llama el producto de Cauchy de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Capítulo 2

Casos particulares en la resolución de la ecuación de Riccati

En este capítulo, se estudiarán las condiciones que deben cumplir las funciones continuas p, q y $r : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con I intervalo, para que la ecuación de Riccati $x' = p(t)+q(t)x+r(t)x^2$ adopte la forma general de una ecuación de variables separadas, una ecuación lineal o una ecuación de Bernoulli, respectivamente. También se explicarán los métodos de resolución de estas ecuaciones. Para la elaboración de este capítulo, se han utilizado los libros [11] y [3] y los artículos [8] y [5].

2.1. Ecuaciones de Variables Separadas

Existen numerosos casos para los cuales la ecuación afopta la forma $x' = g(x)h(t)$, siendo las funciones $h(t)$ y $g(x)$ continuas en los intervalos abiertos (a, b) y (c, d), respectivamente. Dicha ecuación se puede resolver mediante el método de variables separadas. Se enuncian dichos casos a continuación, ofreciendo la correspondiente solución.

1. Cuando $p(t) \equiv q(t) \equiv r(t) \not\equiv 0$, la ecuación se puede reescribir de la siguiente forma:

$$x' = p(t) + p(t)x + p(t)x^2 = p(t)\left(1 + x + x^2\right).$$

Separando las variables e integrando cada miembro de la igualdad, se obtiene

$$\int_{t_0}^{t} p(s)ds = \int \frac{1}{1 + x + x^2}\, dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + \hat{C},$$

donde $t_0 \in I$ está fijado e $\int_{t_0}^{t} p(s)ds$ es una primitiva de la función p, por lo que la solución general de la EDO será:

$$x(t) = \frac{\sqrt{3}\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{t_0}^{t} p(s)ds + C\right) - 1}{2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Cuando $p(t) \equiv q(t) \not\equiv 0$ y $r(t) \equiv 0$, la ecuación es de la forma

$$x' = p(t) + p(t)x = p(t)\,(1+x)\,.$$

Separando las variables e integrando cada miembro de la igualdad, se obtiene, fijando $t_0 \in I$,

$$\int_{t_0}^{t} p(s)ds = \int \frac{1}{1+x}\,dx = \ln|1+x| + C, \tag{2.1}$$

por lo que la solución general de la EDO será

$$x(t) = Ke^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds} - 1, \quad K \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Véase que, cuando la solución tome el valor -1, la división por $1+x$ en la ecuación (2.1) no tendría sentido, por lo que se añade la solución $x(t) \equiv -1$ en la expresión (2.2), considerando también $K = 0$.

3. Cuando $q(t) \equiv r(t) \not\equiv 0$ y $p(t) \not\equiv 0$, la ecuación es de la forma

$$x' = q(t)x + q(t)x^2 = q(t)\left(x + x^2\right).$$

Separando las variables e integrando cada miembro de la igualdad, se obtiene, para $t_0 \in I$ fijado,

$$\int_{t_0}^{t} q(s)ds = \int \frac{1}{x+x^2}\,dx = \ln|x| - \ln|1+x| + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

por lo que la solución general de la EDO será

$$x(t) = \frac{1}{Ke^{-\int q(t)dt} - 1}, \quad K \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

donde también se ha añadido la solución $x(t) \equiv 0$.

4. Cuando $p(t) \equiv r(t) \not\equiv 0$ y $q(t) =\equiv 0$, la ecuación es de la forma

$$x' = p(t) + p(t)x^2 = p(t)\left(1 + x^2\right).$$

Separando las variables e integrando cada miembro de la igualdad, se obtiene, para $t_0 \in I$ fijado,

$$\int_{t_0}^{t} p(s)ds = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C,$$

por lo que la solución general de la EDO será

$$x(t) = \tan\left(\int_{t_0}^{t} p(s)ds + C\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

5. Cuando $p(t) \equiv q(t) \equiv 0$ y $r(t) \not\equiv 0$, la ecuación es de la forma

$$x' = r(t)x^2.$$

Separando las variables e integrando cada miembro de la igualdad, se obtiene, para $t_0 \in I$ fijado,

$$\int_{t_0}^{t} r(s)ds = \int \frac{1}{x^2}\, dx = \quad -\frac{1}{x} + \hat{C}, \quad \hat{C} \in \mathbb{R},$$

por lo que la solución general de la EDO será

$$x(t) = -\frac{1}{\int_{t_0}^{t} r(s)ds + C}$$

añadiendo $x(t) \equiv 0$.

6. Cuando $p(t) \equiv r(t) \equiv 0$ y $q(t) \not\equiv 0$ la ecuación es de la forma

$$x' = q(t)x.$$

Separando las variables e integrando cada miembro de la igualdad, se obtiene, fijando $t_0 \in I$,

$$\int_{t_0}^{t} q(s)ds = \int \frac{1}{x}\, dx = \quad \ln|x| + \hat{C}, \quad \hat{C} \in \mathbb{R},$$

por lo que la solución general de la EDO será

$$x(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} q(s)ds}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

7. Cuando $q(t) \equiv r(t) \equiv 0$ y $p(t) \not\equiv 0$, la ecuación es de la forma

$$x' = p(t),$$

de integración inmediata, por lo que la solución general de la EDO será:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)ds + C, \quad C \in \mathbb{R}, \text{ donde se ha fijado} t_0 \in I,$$

8. Cuando $q(t)$ y $r(t)$ son funciones constantes, con $q(t) > 0$ y $r(t) < 0$ y $p(t) \equiv 0$, entonces la ecuación

$$x' = ax - bx^2$$

es la ecuación logística, que modela el crecimiento de la población de una especie. Es una ecuación de variables separadas, que se puede resolver de forma análoga a los apartados anteriores

$$\int \frac{dx}{bx\left(\frac{a}{b} - x\right)} = \int dt + \hat{C}, \quad \hat{C} \in \mathbb{R},$$

para $t_0 \in I$ fijado, obteniendo, como solución general

$$x(t) = \frac{a/b}{1 + Ce^{-at}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

9. Otro procedimiento a través del cual se podrá obtener una ecuación de variables separadas a partir de una ecuación de Riccati es realizando la transformación $x(t) = u(t)z(t)^{\frac{1}{2}}$, siendo $u(t)$ una función a encontrar. Si partimos de la ecuación de Riccati de forma general

$$x' = p(t) + q(t)x + r(t)x^2,$$

se tiene que

$$u'(t)z(t)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}u(t)z(t)^{-\frac{1}{2}}z' = r(t)u(t)^2z(t) + q(t)u(t)z(t)^{\frac{1}{2}} + p(t).$$

Despejando z', se llega a la expresión

$$z' = 2r(t)u(t)z(t)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{u}\left(q(t)u(t) - u(t)'\right)z(t) + \frac{2}{u}p(t)z(t)^{\frac{1}{2}}.$$

Al imponer la condición $q(t)u(t) - u(t)' = 0$, la cual es equivalente a que $u(t) = Ce^{\int q(t)dt}$, $C \in \mathbb{R}$, la ecuación a resolver pasa a ser la siguiente:

$$z' = 2r(t)u(t)z(t)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{u}p(t)z(t)^{\frac{1}{2}}.$$

Realizando, ahora, el cambio de variable $\beta = z(t)^{\frac{1}{2}}$ con $\beta' = \frac{1}{2}z(t)^{-\frac{1}{2}}z(t)'$, se obtiene

$$\beta' = r(t)u(t)\beta^2 - \frac{1}{u(t)}p(t).$$

Finalmente, si se cumple que $p(t) = r(t)u(t)^2$, la expresión se reduce a

$$\beta' - r(t)u(t)\beta^2 - r(t)u(t) = 0$$

o, equivalentemente ,

$$\beta' = r(t)u(t)(\beta^2 + 1),$$

ecuación diferencial de variables separadas cuya solución general es:

$$\beta(t) = \tan\left(\int u(t)r(t)dt + C\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 2.1. Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = 3t^2 + 3t^2x, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Se trata de una ecuación de variables separadas, pues la ecuación se puede escribir como:

$$\frac{dx}{1+x} = 3t^2dt.$$

Integrando, tenemos

$$\ln|1+x| = t^3 + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

y, despejando x,

$$x(t) = Ke^{t^3} - 1, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo la condición inicial $x(0) = 0$, se obtiene el valor de la constante K

$$Ke^0 - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad K = 1,$$

por lo que la solución del problema de valor inicial es $x(t) = e^{t^3} - 1$, $t \in \mathbb{R}$.

2.2. Ecuaciones Lineales

En los casos en los que $r(t) \equiv 0$, la ecuación de Riccati es la ecuación lineal de primer orden

$$x' = p(t) + q(t)x. \tag{2.4}$$

Su solución general viene dada por la expresión:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

donde $x_h(t)$ se corresponde con la solución general de la ecuación lineal homogénea y $x_p(t)$ con una solución particular de la ecuación lineal completa.
La solución de la ecuación lineal homogénea asociada, $x_h(t)$, tiene la forma $x_h(t) = Ke^{\int_{t_0}^t q(s)ds}$, $K \in \mathbb{R}$, donde $t_0 \in I$ está fijado, mientras que una solución particular, $x_p(t)$, puede ser determinada mediante el método de variación de constantes. Este método consiste en suponer que la constante K de la solución de la ecuación homogénea, $x(t) = Ke^{\int_{t_0}^t q(s)ds}$, es reemplazada por una función de t, $K(t)$, de modo que $x_p(t) = K(t)e^{\int_{t_0}^t q(s)ds}$.
Posteriormente, se impone la condición de que $x_p(t)$ es solución de la ecuación lineal completa, para ello, se calcula $x_p'(t)$,

$$x_p'(t) = K'(t)e^{\int_{t_0}^t q(s)ds} + K(t)q(t)e^{\int_{t_0}^t q(s)ds}$$

y se sustituye este valor y el de $x_p(t)$ en la expresión (2.4), obteniendo

$$K'(t)e^{\int_{t_0}^t q(s)ds} + K(t)q(t)e^{\int_{t_0}^t q(s)ds} = p(t) + q(t)K(t)e^{\int_{t_0}^t q(s)ds},$$

es decir,

$$K'(t)e^{\int_{t_0}^t q(s)ds} = p(t),$$

lo que equivale a

$$K'(t) = p(t)\left[e^{-\int_{t_0}^t q(s)ds}\right],$$

que es una ecuación diferencial que se puede resolver integrando a ambos lados de la expresión. De hecho, se puede elegir $K(t)$ como una primitiva de

$$\varphi(t) = p(t)e^{-\int_{t_0}^t q(s)ds}.$$

Una vez obtenida la expresión de $K(t)$, se sustituye en $x_p(t)$, para obtener

$$x_p(t) = K(t)e^{\int_{t_0}^{t} q(s)ds},$$

por lo que finalmente se llega a que la solución general de la ecuación lineal es

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = Ke^{\int_{t_0}^{t} q(s)ds} + K(t)e^{\int_{t_0}^{t} q(s)ds},\ t \in I.$$

Ejemplo 2.2. Hallar la solución del priblema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = t + 2tx, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Como se ha expuesto anteriormente, la solución general viene dada por $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, siendo la solución de la EDO lineal homogénea asociada $x_h(t) = Ke^{\int_0^t 2sds} = Ke^{t^2}$, $K \in \mathbb{R}$.
A continuación, se busca una solución particular de la forma

$$x_p(t) = K(t)e^{t^2},$$

Derivando $x_p(t)$ y sustituyendo dicho valor y el de $x_p(t)$ en la ecuación del enunciado, se obtiene

$$K'(t)e^{t^2} + 2te^{t^2}K(t) = t + 2tK(t)e^{t^2}$$

y, simplificando,

$$K'(t)e^{t^2} = t \ \Rightarrow \ K'(t) = te^{-t^2}.$$

Integrando, resulta

$$K(t) = -\frac{e^{-t^2}}{2}.$$

Por tanto, una solución particular de la ecuación completa es

$$x_p(t) = -\frac{1}{2},\ t \in \mathbb{R},$$

y la solución general será

$$x(t) = Ke^{t^2} - \frac{1}{2},\ t \in \mathbb{R}.$$

Por último, aplicando la condición inicial $x(0) = 1$, se calcula el valor de K correspondiente

$$x(0) = K - \frac{1}{2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{3}{2}$$

y la solución del problema de valor inicial es:

$$x(t) = \frac{3}{2}e^{t^2} - \frac{1}{2},\ t \in \mathbb{R}.$$

2.3. Ecuación de Bernoulli

En el caso en el que $p(t) \equiv 0$, la ecuación $x' = q(t)x + r(t)x^2$ se corresponde con una ecuación de Bernoulli con $\alpha = 2$, siendo las funciones $q(t)$ y $r(t)$ continuas en un intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Para resolverla, se comienza reescribiendo la expresión anterior dividiéndola por x^2, siempre que esto sea posible

$$\frac{x'}{x^2} = \frac{q(t)}{x} + r(t) \tag{2.5}$$

y se realiza el cambio de variable $u = \frac{1}{x} = x^{-1}$ $\left(u' = -x^{-2}x'\right)$, gracias al cual la ecuación (2.5) se reduce a la ecuación lineal

$$-u' = q(t)u + r(t), \tag{2.6}$$

es decir,

$$u' = -q(t)u - r(t).$$

Por último, se resuelve la ecuación lineal del mismo modo que en el apartado anterior y se deshace el cambio de variable $x(t) = [u(t)]^{-1}$ para obtener la solución de la ecuación de Bernoulli, que será la siguiente

$$x(t) = \left(Ke^{-\int_{t_0}^t q(s)ds} - K(t)\left(e^{-\int_{t_0}^t q(s)ds}\right)\right)^{-1},$$

donde $t_0 \in (a, b)$, $K \in \mathbb{R}$ y $K(t)$ es una primitiva de $\varphi(t) = p(t)e^{-\int_{t_0}^t q(s)ds}r(t)$. Se añade también la solución $x(t) \equiv 0$, que había sido descartada al dividir por x^2 y realizar el cambio de variable.

Ejemplo 2.3. Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = -2x + tx^2 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Se comienza dividiendo por x^2 de forma que la ecuación adopta la siguiente forma

$$\frac{x'}{x^2} = \frac{-2}{x} + t$$

para $x \neq 0$ y se realiza el cambio de variable

$$u = \frac{1}{x}, \qquad u' = -\frac{x'}{x^2},$$

obteniendo, así, la ecuación lineal

$$-u' = -2u + t$$

o, equivalentemente,

$$u' = 2u - t.$$

La solución de la EDO lineal homogénea asociada es $u_h(t) = Ke^{\int_0^t 2ds} = Ke^{2t}$, por lo que se busca una solución particular de la forma $u_p(t) = K(t)e^{2t}$.
Derivando $u_p(t)$ con respecto a t y sustituyendo este valor y el de $u_p(t)$ en la ecuación del enunciado, se obtiene:

$$K'(t)e^{2t} + 2K(t)e^{2t} = 2K(t)e^{2t} - t,$$

es decir,

$$K'(t)e^{2t} = -t \;\Rightarrow\; K'(t) = -te^{-2t}$$

y,calculando su primitiva,

$$K(t) = \frac{(2t+1)e^{-2t}}{4}.$$

Al sustituír el valor de $K(t)$ en la expresión de $u_p(t)$, se llega a que

$$u_p(t) = \frac{2t+1}{4},$$

por lo que la solución general de la ecuación es:

$$u(t) = Ke^{2t} + \frac{2t+1}{4} = \frac{4Ke^{2t} + 2t + 1}{4}.$$

Finalmente, deshaciendo el cambio de variable, se obtiene como resultado

$$x(t) = \frac{4}{4Ke^{2t} + 2t + 1}.$$

Para que se cumpla que $x(0) = 1$, tenemos

$$1 = x(0) = \frac{4}{4K+1} \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{3}{4},$$

por lo que la solución del problema de valor inicial es

$$x(t) = \frac{4}{3e^{2t} + 2t + 1}, \quad \text{definida en un intervalo que contiene a 0.}$$

Capítulo 3

Resolución mediante el empleo de soluciones particulares

En este capítulo, se calculará la solución de la ecuación de Riccati cuando son conocidas una o dos soluciones particulares. También se estudiarán métodos de aproximación de soluciones. Para la elaboración de este capítulo, se ha consultado el libro [4], en el que se menciona la posibilidad de obtener la solución general de la ecuación de Riccati a partir de una o dos soluciones particulares. De los libros [11, 3], se han extraído las ideas sobre el método de las series de potencias y de las aproximaciones sucesivas de Picard.

3.1. Una solución particular

Otro de los métodos que permite resolver la ecuación de Riccati (1.2) es realizar el cambio de variable $x(t) = y(t) + \varphi(t)$ tras haber encontrado una solución particular $\varphi(t)$.
Derivando $x(t)$ con respecto a t, se obtiene $x'(t) = y'(t) + \varphi'(t)$ y, sustituyendo en la forma general, se sigue

$$y'(t) + \varphi'(t) = p(t) + q(t)\left(y(t) + \varphi(t)\right) + r(t)(y(t) + \varphi(t))^2$$

o, equivalentemente,

$$y'(t) + \varphi'(t) = p(t) + q(t)y(t) + q(t)\varphi(t) + r(t)y^2(t) + r(t)\varphi^2(t) + 2r(t)y(t)\varphi(t). \tag{3.1}$$

Por ser $\varphi(t)$ solución particular de la ecuación, satisface que

$$\varphi'(t) = p(t) + q(t)\varphi(t) + r(t)\varphi^2(t)$$

y, sustituyendo esta igualdad en la expresión (3.1), se llega a

$$y'(t) = q(t)y(t) + 2r(t)\varphi(t)y(t) + r(t)y^2(t),$$

que es una ecuación diferencial de Bernoulli con $\alpha = 2$ y se puede resolver, de la misma forma que la Sección 2.3, realizando el cambio de variable $y(t) = [u(t)]^{-1}$. En la práctica, si se conoce una solución particular $\varphi(t)$ de la ecuación de Riccati, se utiliza directamente el cambio $x(t) = \varphi(t) + \frac{1}{u(t)}$.

Ejemplo 3.1. Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = x^2 - 2tx + t^2 + 1, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

siendo $\varphi(t) = t$ una solución particular.

En efecto, $\varphi'(t) = 1 = (\varphi(t))^2 - 2t\varphi(t) + t^2 + 1$.
Como se ha explicado anteriormente, para resolver la ecuación se puede realizar el cambio de variable $x(t) = \varphi(t) + \frac{1}{u(t)}$, que, en este caso, es $x(t) = t + \frac{1}{u(t)}$.
Como $x(t) = t + \frac{1}{u(t)}$, entonces $x'(t) = 1 - \frac{u'(t)}{u^2(t)}$ y, al sustituir estas dos expresiones en la ecuación inicial, se llega a la expresión

$$1 - \frac{u'(t)}{u^2(t)} = \left(t + \frac{1}{u(t)}\right)^2 - 2t\left(t + \frac{1}{u(t)}\right) + t^2 + 1$$

y, simplificando e integrando, tenemos

$$-u'(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad u(t) = -t + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Se deshace el cambio de variable para obtener las soluciones

$$x(t) = t + \frac{1}{C - t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

y por último, se aplica la condición inicial $x(0) = 1$,

$$x(0) = \frac{1}{C} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C = 1,$$

obteniendo como solución del problema de valor inicial:

$$x(t) = t + \frac{1}{1 - t}.$$

A continuación, se representarán seis soluciones particulares de la ecuación diferencial $x' = x^2 - 2tx + t^2 + 1$. Se denotarán por x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 para los valores de $C = 0$, $C = 1$ y $C = 2$.

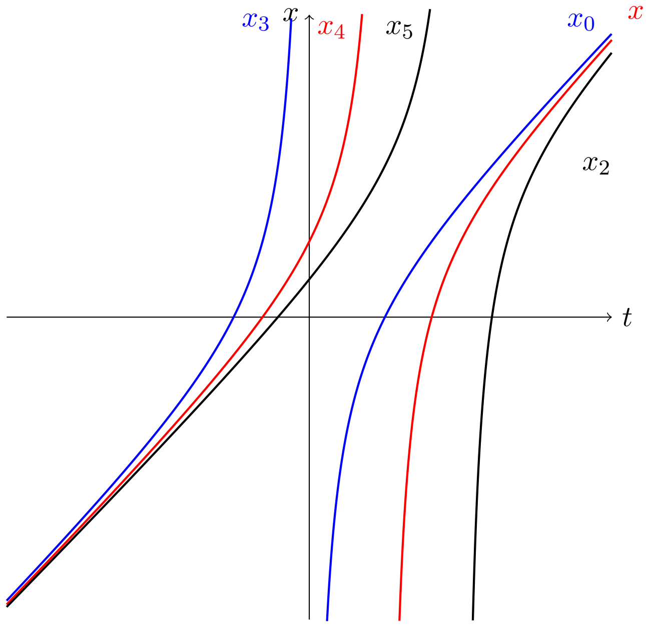

Figura 3.1: Representación de algunas soluciones particulares de $x' = x^2 - 2tx + t^2 + 1$.

3.2. Dos soluciones particulares

Si se conocen dos soluciones particulares $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de la ecuación de Riccati, es posible realizar un cambio de variable que permite determinar la solución de la ecuación (1.2).
Dada v una función a determinar, se considera el cambio de variable

$$x = \frac{x_1 - vx_2}{1 - v}$$

de forma que x' viene dada por

$$x' = \frac{(x_1 - vx_2)'(1 - v) - (x_1 - vx_2)(1 - v)'}{(1 - v)^2}. \tag{3.2}$$

Si se sustituye la expresión (3.2) en la ecuación de Riccati (1.2), se tiene la expresión:

$$\frac{(x_1' - v'x_2 - vx_2')(1 - v) - (x_1 - vx_2)(-v')}{(1 - v)^2} = p(t) + q(t)\frac{x_1 - vx_2}{1 - v} + r(t)\left(\frac{x_1 - vx_2}{1 - v}\right)^2. \tag{3.3}$$

Por ser x_1 y x_2 soluciones particulares de (1.2), cumplen las siguientes igualdades

$$x_1' = p(t) + q(t)x_1 + r(t)x_1^2,$$

$$x_2' = p(t) + q(t)x_2 + r(t)x_2^2.$$

Sustituyendo estas dos expresiones en (3.3), se llega a que el primer término de esta toma la forma

$$\frac{\left[p(t) + q(t)x_1 + r(t)x_1^2 - v'x_2 - v\left(p(t) + q(t)x_2 + r(t)x_2^2\right)\right](1 - v)}{(1 - v)^2} + \frac{x_1v' - vx_2v'}{(1 - v)^2}.$$

Multiplicando y agrupando términos en la expresión anterior, resulta

$$\frac{p(t)(1-v)^2 + q(t)(x_1 - vx_2)(1-v) + r(t)(x_1^2 - vx_2^2 - vx_1^2 + v^2x_2^2) - v'x_2 + vv'x_2 + x_1v' - vv'x_2}{(1-v)^2},$$

mientras que el segundo término de (3.3) es de la forma

$$\frac{p(t)(1-v)^2 + q(t)(x_1 - vx_2)(1-v) + r(t)(x_1^2 - 2vx_1x_2 + v^2x_2^2)}{(1-v)^2}.$$

Por tanto, al simplificar, se obtiene

$$v'(x_1 - x_2) = r(t)\,(x_1 - x_2)^2\, v,$$

equivalentemente,

$$v' = vr(t)\,(x_1 - x_2)\,.$$

Entonces, se llega a la expresión

$$v(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} r(s)(x_1(s) - x_2(s))ds}, \quad C \in \mathbb{R}, \text{ donde } t_0 \in I \text{ está fijado},$$

por lo que una solución de la ecuación es

$$x(t) = \frac{x_1(t) - v(t)x_2(t)}{1 - v(t)}, \qquad \text{siendo } v(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} r(s)(x_1(s) - x_2(s))ds}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Una vez vistos estos métodos de resolución de la ecuación de Riccati, surge la duda de cómo se puede calcular una solución particular, $\varphi(t)$, ya que en la mayoría de los casos, la búsqueda de una solución particular no resulta intuitiva. Para ello, pueden ser útiles el método de las series de potencias y el método de las aproximaciones sucesivas de Picard.

3.3. El método de las series de potencias

El método de las series de potencias tiene un gran interés teórico pues permite conocer una solución aproximada de una ecuación diferencial o, en ocasiones, soluciones exactas. Consiste en suponer que la solución del problema de valor inicial

$$x' = f(t, x) \tag{3.4}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{3.5}$$

admite un desarrollo en serie de potencias

$$x(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t - t_0)^k$$

e imponer las condiciones (3.4) y (3.5) para obtener los coeficientes de la serie de $x(t)$ para encontrar la solución exacta o aproximada del problema de valor inicial. El método de las series de potencias admite dos variantes: el método de coeficientes indeterminados y el método de la serie de Taylor, esencialmente equivalentes, pero distintos en cuanto a su desarrollo.

Método de coeficientes indeterminados

Como se ha explicado anteriormente, el método consiste en suponer que la solución del problema admite un desarrollo en serie de potencias, en este caso, con coeficientes desconocidos

$$x(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \cdots + a_n(t - t_0)^n + \cdots$$

A continuación, se deriva la serie de potencias, teniendo en cuenta que, por el Teorema 1.13, la derivada de la serie es la serie de las derivadas primeras de cada término.

$$x'(t) = a_1 + 2a_2(t - t_0) + 3a_3(t - t_0)^2 + \cdots + na_n(t - t_0)^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k (t - t_0)^{k-1}.$$

Teniendo en cuenta el producto de Cauchy, se calcula $x^2(t)$ como

$$\begin{aligned} x^2(t) &= [a_0 + a_1(t - t_0) + \cdots + a_n(t - t_0)^n + \cdots][a_0 + a_1(t - t_0) + \cdots + a_n(t - t_0)^n + \cdots] \\ &= a_0^2 + 2a_0a_1(t - t_0) + (a_1^2 + 2a_0a_2)(t - t_0)^2 + \cdots \\ &\quad + (a_0a_n + a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \cdots + a_{n-1}a_1 + a_na_0)(t - t_0)^n + \cdots \end{aligned}$$

De forma análoga, también supondremos que las funciones p, q y r se pueden desarrollar en serie de potencias como:

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t - t_0)^k,$$
$$q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(t - t_0)^k,$$
$$r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(t - t_0)^k,$$

respectivamente.

Sustituyendo las expresiones anteriores y las de $x(t)$, $x^2(t)$ y $x'(t)$ en la ecuación de Riccati $x' = p(t) + q(t)x + r(t)x^2$, se tiene la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} &a_1 + 2a_2(t - t_0) + \cdots + na_n(t - t_0)^n + \cdots = p_0 + p_1(t - t_0) + \cdots + p_n(t - t_0)^n + \cdots + [q_0 + \cdots + \\ &q_n(t - t_0)^n + \cdots][a_0 + a_1(t - t_0) + \cdots + a_n(t - t_0)^n + \cdots] + [r_0 + r_1(t - t_0) + \cdots + r_n(t - t_0)^n + \cdots] \\ &[a_0^2 + 2a_0a_1(t - t_0) + (a_1^2 + 2a_0a_2)(t - t_0)^2 + \cdots (a_0a_n + a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \cdots \\ &+a_{n-1}a_1 + a_na_0)(t - t_0)^n + \cdots] \end{aligned}$$

La única forma de que dos series de potencias sean iguales es que todos sus coeficientes sean iguales, por lo que se obtiene la cadena de igualdades:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = p_0 + q_0 a_0 + r_0 a_0^2,\\
&2a_2(t-t_0) = p_1(t-t_0) + [q_0 a_1 + q_1 a_0]\,(t-t_0) + \left[r_0 a_0 a_1 + r_1 a_0^2\right](t-t_0),\\
&3a_3(t-t_0)^2 = p_2(t-t_0)^2 + [q_0 a_2 + q_1 a_1 + q_2 a_0]\,(t-t_0)^2 + \left[r_0(a_1^2 + 2a_0 a_2) + r_1 a_0 a_1 + r_2 a_0^2\right](t-t_0)^2\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&na_n\,(t-t_0)^{n-1} = p_{n-1}(t-t_0)^{n-1} + [a_0 q_{n-1} + a_1 q_{n-2} + \cdots + a_{n-2} q_1 + a_{n-1} q_0]\,(t-t_0)^{n-1}\\
&\ + \left[r_0(a_0 a_{n-1} + \cdots + a_{n-1} a_0) + r_1(a_0 a_{n-2} + a_1 a_{n-3} + \cdots + a_{n-2} a_0) + \cdots + r_{n-1} a_0^2\right](t-t_0)^{n-1}\\
&\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}
$$

y, simplificando estas expresiones, se obtienen las expresiones de los coeficientes a_n

$$
\begin{aligned}
&a_1 = p_0 + q_0 a_0 + r_0 a_0^2,\\
&a_2 = \frac{1}{2}\left[p_1 + q_0 a_1 + q_1 a_0 + r_0 a_0 a_1 + r_1 a_0^2\right],\\
&a_3 = \frac{1}{3}\left[p_2 + q_0 a_2 + q_1 a_1 + q_2 a_0 + r_0(a_1^2 + 2a_0 a_2) + r_1 a_0 a_1 + r_2 a_0^2\right],\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&a_n = p_{n-1} + [a_0 q_{n-1} + a_1 q_{n-2} + \cdots + a_{n-2} q_1 + a_{n-1} q_0] + [r_0(a_0 a_{n-1} + \cdots + a_{n-1} a_0)\\
&\ + r_1(a_0 a_{n-2} + a_1 a_{n-3} + \cdots + a_{n-2} a_0) + \cdots + r_{n-1} a_0^2],\\
&\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}
$$

donde el valor a_0 se obtiene al imponer la condición inicial del problema de valor inicial.
Esto permite concluir que si tenemos garantizada la existencia de una solución y esta puede ser desarrollada en serie de potencias, entonces debe ser obtenida por este procedimiento.
El resultado que se muestra a continuación servirá para saber cuándo la solución puede desarrollarse en serie de potencias, se ha obtenido del libro [3].

Teorema 3.2 (Teorema de Cauchy)**.** *Si $f(t,x)$ admite un desarrollo en serie de potencias*

$$f(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}\,(t-t_0)^i\,(x-x_0)^j$$

convergente en un rectángulo

$$R = \{(t,x) : t_0 - a < t < t_0 + a, x_0 - b < x < x_0 + b\},$$

entonces el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución $x(t)$ y esta admite un desarollo en serie de potencias

$$x(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t - t_0)^k$$

convergente en un cierto intervalo $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Método de la serie de Taylor

Este método consiste en suponer que la solución $x(t)$ admite un desarrollo en serie de potencias, es decir,a través de su serie de Taylor:

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0)\,(t - t_0) + \frac{1}{2!}x''(t_0)\,(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^{n)}(t_0)\,(t - t_0)^n + \cdots$$

Aplicando las condiciones (3.4) y (3.5) se podrán calcular los términos de la serie anterior. Para obtener las n-ésimas derivadas, basta con derivar $x(t)$ sucesivamente y evaluar en el punto t_0:

$$\begin{aligned}
&x'(t_0) = f(t_0, x(t_0)) = f(t_0, x_0),\\
&x''(t_0) = f_t(t_0, x(t_0)) + f_x(t_0, x(t_0))x'(t_0) = f_t(t_0, x_0) + f_x(t_0, x_0)x'(t_0),\\
&x'''(t_0) = f_{tt}(t_0, x(t_0)) + 2f_{tx}(t_0, x(t_0))x'(t_0) + f_{xx}(t_0, x(t_0))x'(t_0)^2 + f_x(t_0, x(t_0))x''(t_0),
\end{aligned}$$

donde se ha supuesto que las parciales mixtas de f coinciden, y, así, sucesivamente hasta calcular $x^{n)}$. Los subíndices x y t denotan las derivadas parciales con respecto a las variables x y t. Entonces los términos de la serie serán:

$$a_n = \frac{1}{n!}x^{n)}(t_0).$$

Igual que en el caso anterior, esto permite concluir que si la solución $x(t)$ existe y admite un desarrollo en serie de Taylor convergente, será la calculada a través de este método. Para saber si la solución admite un desarrollo en serie de potencias se comprobarán las hipótesis del Teorema 3.2. Esto quiere decir que a $f$se le pide mucha regularidad.

Ejemplo 3.3. Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = rx, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Se calculará la solución por el método de coeficientes indeterminados y por el método de la serie de Taylor.

Primero, para hallar su solución por el método de coeficientes indeterminados, se observa que la solución existe y es única pues $f(t,x) = rx$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$ y su derivada parcial con respecto a x también lo es en dicho conjunto. Se supone entonces que la solución $x(t)$ admite desarrollo en serie de potencias

$$x(t) = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + \cdots + a_n(t-t_0)^n + \cdots = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$

asumiendo que se toma $t_0 = 0$. Entonces,

$$x'(t) = a_1 + 2a_2 t + \cdots + n a_n t^{n-1} + \cdots$$

y, sustituyendo estas expresiones en $x' = rx$, se deduce que

$$a_1 + 2a_2 t + \cdots + n a_n t^{n-1} + \cdots = r a_0 + r a_1 t + r a_2 t^2 + \cdots + r a_n t^n + \cdots$$

y se obtiene la cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} a_1 &= r a_0, \\ a_2 &= \frac{1}{2} r a_1 = \frac{1}{2} r^2 a_0, \\ a_3 &= \frac{1}{3} r a_2 = \frac{1}{6} r^3 a_0, \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{r^n}{n!} a_0, \qquad \text{para todo } n. \end{aligned}$$

Al tener en cuenta la condición inicial $x(0) = x_0$, se obtiene $a_0 = x_0$. Por lo tanto,

$$x(t) = x_0 + x_0 rt + x_0 \frac{1}{2!} r^2 t^2 + \cdots + x_0 \frac{1}{n!} r^n t^n + \cdots = x_0 \left(1 + rt + \frac{1}{2!} r^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{n!} r^n t^n + \cdots \right)$$

En este caso, la serie de potencias es fácilmente reconocible y representa a la función exponencial ya que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \tag{3.6}$$

por lo que la solución será

$$x(t) = x_0 e^{rt}. \tag{3.7}$$

Ahora, se calculará la solución por el método de la serie de Taylor. Se comienza suponiendo que la solución tiene serie de Taylor centrada en $t_0 = 0$:

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{1}{2!} x''(0) t^2 + \cdots + \frac{1}{n!} x^{n)}(0) t^n + \cdots$$

Por las hipótesis del problema, se tienen las igualdades:

$$\begin{aligned}
x'(0) &= rx(0) = rx_0,\\
x''(0) &= rx'(0) = r^2x_0,\\
x'''(0) &= rx''(0) = r^3x_0,\\
&\vdots\\
x^{n)}(0) &= r^nx_0,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

de donde se deduce que los términos de la sucesión son

$$a_n = x_0\frac{1}{n!}r^n, \qquad \text{para cada } n.$$

y, entonces, la solución es

$$x(t) = x_0e^{rt}. \tag{3.8}$$

Como se puede observar, el resultado coincide con el resultado obtenido por el método anterior y también con el esperado para una ecuación de variables separadas de primer orden.

3.4. El método de aproximaciones sucesivas de Picard

Otro de los métodos iterativos que permite obtener una solución de una ecuación diferencial es el método de aproximaciones sucesivas de Picard. Considérese el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = f(t,x),\\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Si la función $f(t,x)$ es continua, entonces la ecuación diferencial puede integrarse desde t_0 hasta t:

$$\int_{t_0}^{t} x'(s) = \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds,$$

equivalentemente,

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds$$

y, despejando $x(t)$:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds.$$

Gracias a esta igualdad, se puede construir la sucesión $x_n(t)$:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0, \\ x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))ds \\ x_2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))ds \\ &\vdots \\ x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))ds, \quad \text{para todo } n, \end{aligned}$$

donde las funciones $x_n(t)$ se llaman aproximaciones sucesivas o iterantes de Picard.
Este método permitirá concluir alguna expresión cuando la sucesión anterior sea convergente. Si la sucesión es convergente, entonces esta convergerá a la solución del problema de valor inicial.

Ejemplo 3.4. Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = 2t(1-x), \\ x(0) = 2, \end{cases} \tag{3.10}$$

con el método de las aproximaciones sucesivas de Picard Como, en este caso, $f(t, x) = 2t(1-x)$, se construirá la siguiente sucesión de forma iterativa:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= 2, \\ x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))ds = 2 + \int_0^t -2sds = 2 - t^2 \\ x_2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))ds = 2 + \int_0^t 2s(-1+s^2)ds = 2 - t^2 + \frac{t^4}{2} \\ x_3(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_2(s))ds = 2 + \int_0^t 2s\left(-1+s^2-\frac{s^4}{2}\right)ds = 2 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} \end{aligned}$$

y, en general, $x_n(t)$ se podrá expresar de la siguiente forma:

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))ds = 1 + \left(1 + \frac{-t^2}{1!} + \frac{(-t^2)^2}{2!} + \frac{(-t^2)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-t^2)^n}{n!}\right).$$

Las aproximaciones son las sumas parciales del desarrollo en serie de potencias de $1 + e^{-t^2}$, que será la solución del problema anterior. Su representación gráfica es

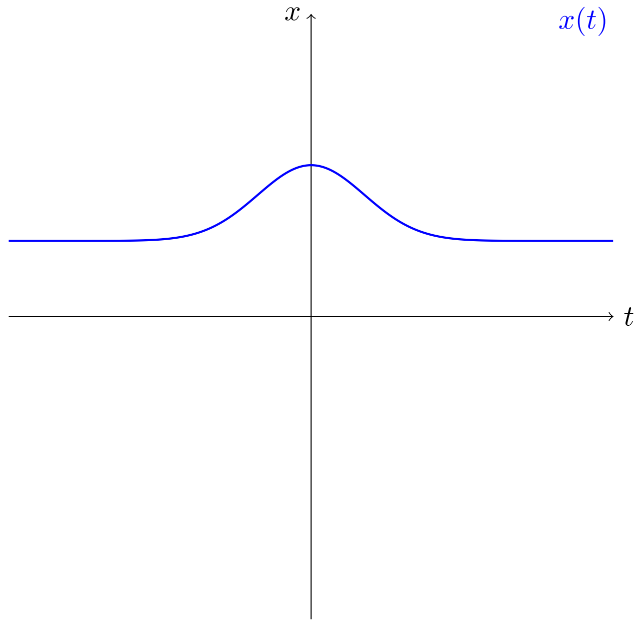

Figura 3.2: Representación de la solución del PVI (3.10), $x(t) = 1 + e^{-t^2}$

Capítulo 4

Coeficientes relacionados mediante fórmulas

En este capítulo, se tratará la resolución de la ecuación de Riccati suponiendo que se cumplen ciertas relaciones entre los coeficientes. Estas relaciones pueden ser de dos tipos: coeficientes relacionados mediante EDOs y coeficientes relacionados mediante otra expresión específica. Estos resultados se han consultado en los artículos [2] y [5].

4.1. Coeficientes relacionados mediante EDOs

Existen casos en los que los coeficientes de la ecuación están relacionados entre sí por medio de una ecuación diferencial ordinaria y esto permite que se pueda determinar la solución general de la ecuación no lineal. En concreto, en este apartado, se estudiarán cuatro casos en los que la ecuación se transforma en una ecuación de Bernoulli y, por tanto, se puede encontrar la solución general sin conocer una solución particular.

Teorema 4.1. *Si los coeficientes de la EDO*

$$x' = p(t) + q(t)x + r(t)x^2 \tag{4.1}$$

son continuos en I satisfacen la condición

$$p(t) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{q(t)}{r(t)}\right),$$

entonces la solución general de (4.1) *viene dada por:*

$$x(t) = -\frac{q(t)}{r(t)} + e^{-\int_{t_0}^{t} q(s)ds}\left[C - \int_{t_0}^{t} r(s)e^{-\int_{t_0}^{s} q(v)dv}ds\right]^{-1}, \quad C \in \mathbb{R}, \ \textit{para un cierto } t_0 \in I \textit{ fijado.}$$

Demostración. Si los coeficientes de la ecuación de Riccati cumplen la EDO $p(t) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{q(t)}{r(t)}\right)$, entonces dicha ecuación se puede reescribir de la siguiente forma

$$x' = -\frac{d}{dt}\left(\frac{q(t)}{r(t)}\right) + q(t)x + r(t)x^2,$$

es decir,

$$\frac{d}{dt}\left(x + \frac{q(t)}{r(t)}\right) = r(t)x\left(\frac{q(t)}{r(t)} + x\right).$$

Realizando el cambio de variable $y = x + \frac{q(t)}{r(t)}$ se llega a:

$$y' = r(t)y\left(y - \frac{q(t)}{r(t)}\right).$$

Se obtiene, por tanto, la EDO de Bernoulli

$$y' = r(t)y^2 - q(t)y$$

que se puede resolver dividiendo por y^2 y utilizando el cambio de variable

$$u = \frac{1}{y}, \qquad u' = -\frac{y'}{y^2}$$

gracias al cual la EDO pasa a ser $u' = q(t)u - r(t)$, una ecuación lineal que se puede resolver tomando $\mu(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} q(s)ds}$ como factor integrante, para todo $t_0 \in I$ fijado. . De este modo, la solución será

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^{t} q(s)ds}\left[-\int_{t_0}^{t} r(s)e^{-\int_{t_0}^{s} q(v)dv}ds + C\right], \quad C \in \mathbb{R}$$

y, deshaciendo los cambios,

$$x(t) = -\frac{q(t)}{r(t)} + e^{-\int_{t_0}^{t} q(s)ds}\left[C - \int_{t_0}^{t} r(s)e^{-\int_{t_0}^{s} q(v)dv}ds\right]^{-1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Ejemplo 4.2. Calculamos ahora la solución general de la ecuación

$$x' = t^2x^2 + t^3x - 1.$$

La EDO satisface la condición propuesta por el Teorema 4.1, pues $-1 = -\frac{d}{dt}\left(\frac{t^3}{t^2}\right)$, por lo que se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt}(x + t) = t^2x(x + t).$$

Haciendo el cambio de variable $y = x + t$, se llega a la ecuación de Bernoulli:

$$y' = t^2y(y - t) = t^2y^2 - t^3y$$

o, equivalentemente, para $y \neq 0$

$$\frac{y'}{y^2} = t^2 - \frac{t^3}{y}$$

Tomando $u = \frac{1}{y}$ y, por tanto, $u' = -\frac{y'}{y^2}$ la ecuación se transforma en la ecuación diferencial lineal

$$u' = -t^2 + t^3 u,$$

cuya solución general viene dada por

$$u(t) = e^{\frac{t^4}{4}} \left[\int_0^t -s^2 e^{-\frac{s^4}{4} ds} + C \right]$$

al tomar el factor integrante $\mu(t) = e^{-\frac{t^4}{4}}$.

Por lo tanto, la solución general de la ecuación de Riccati es

$$x(t) = e^{-\frac{t^4}{4}} \left[C - \int_0^t s^2 e^{-\frac{s^4}{4}} ds \right]^{-1} - t, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Teorema 4.3. *Si los coeficientes de la EDO*

$$x' = p(t) + q(t)x + r(t)x^2$$

son continuos en I y satisfacen la condición

$$r(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{q(t)}{p(t)} \right],$$

entonces el inverso de la solución general viene dado por

$$\frac{1}{x(t)} = e^{\int_{t_0}^t q(s) ds} \left[C + \int_{t_0}^t p(s) e^{\int_{t_0}^s q(u) du} ds \right]^{-1} - \frac{q(t)}{p(t)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Dividiendo la EDO (4.3) por x^2,siempre que sea posible, se obtiene

$$\frac{x'}{x^2} = \frac{p(t)}{x^2} + \frac{q(t)}{x} + r(t).$$

Ahora, se puede hacer el cambio de variable

$$u = \frac{1}{x}, \qquad u' = -\frac{x'}{x^2}$$

y la EDO se convierte en

$$-u' = p(t)u^2 + q(t)u + r(t).$$

Aplicando la condición que satisfacen los coeficientes, se tiene

$$-\frac{d}{dt} \left[u + \frac{q(t)}{p(t)} \right] = p(t)u \left[u + \frac{q(t)}{p(t)} \right].$$

De nuevo, se realiza un cambio de variable, tomando ahora $y = u + \frac{q(t)}{p(t)}$, por lo que

$$-y' = p(t)y\left(y - \frac{q(t)}{p(t)}\right) = p(t)y^2 - q(t)y.$$

Esta es una ecuación de Bernoulli, cuya solución se puede determinar dividiendo por y^2,siempre que sea posible,

$$-\frac{y'}{y^2} + \frac{q(t)}{y} = p(t)$$

y realizando el siguiente cambio de variable

$$v = \frac{1}{y}, \qquad v' = -\frac{y'}{y^2}$$

tras el cual la EDO pasa a ser

$$v' + q(t)v = p(t).$$

Tomando el factor integrante $\mu(t) = e^{\int_{t_0}^{t} q(s)ds}$, para $t_0 \in I$ fijado, se llega a la solución

$$v(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} q(s)ds}\left[\int_{t_0}^{t} p(s)e^{\int_{t_0}^{s} q(u)du} ds + C\right], \quad C \in \mathbb{R}.$$

Deshaciendo los cambios de variable realizados se llega a la solución general dada por

$$\frac{1}{x(t)} = e^{\int_{t_0}^{t} q(s)ds}\left[C + \int_{t_0}^{t} p(s)e^{\int_{t_0}^{s} q(u)du} ds\right]^{-1} - \frac{q(t)}{p(t)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

□

Ejemplo 4.4. Calculamos ahora la solución de la ecuación

$$x' = \frac{x^2}{t} + x\ln t + 1 \tag{4.3}$$

En este ejemplo se satisface la condición de la hipótesis del Teorema 4.3, pues se cumple que

$$\frac{1}{t} = \frac{d}{dt}(\ln t) \tag{4.4}$$

Dividiendo (4.3) por x^2, cuando sea posible, se obtiene

$$\frac{x'}{x^2} = \frac{1}{t} + \frac{\ln t}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Haciendo el cambio de variable $u = \frac{1}{x}$, $u' = -\frac{x'}{x^2}$, se llega a la ecuación

$$-u' = \frac{1}{t} + \ln(t)u + u^2.$$

Gracias a la igualdad (4.4), se puede reescribir como

$$-\frac{d}{dt}(u + \ln t) = \ln(t)u + u^2.$$

Tomando $y = u + \ln t$, se llega a

$$-y' = y^2 - y \ln t$$

o, equivalentemente,

$$-\frac{y'}{y^2} + \frac{\ln t}{y} = 1, \text{ cuando sea posible la división por } y^2.$$

Realizando el cambio $v = \frac{1}{y}$, $v' = -\frac{y'}{y^2}$, se llega a la ecuación

$$v' + v \ln t = 1,$$

que se puede resolver tomando el factor integrante $\mu(t) = e^{\int_{t_0}^t \ln(s)ds}$, para un $t_0 > 0$ fijado, siendo, por tanto, la solución

$$v(t) = e^{-\int_{t_0}^t \ln(s)\, ds} \left(\int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s \ln(u)du} ds + C \right), \quad C \in \mathbb{R}$$

y, deshaciendo las transformaciones realizadas la solución general será

$$\frac{1}{x(t)} = e^{\int_{t_0}^t \ln s ds} \left(C + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^t \ln s ds} ds \right)^{-1} - \ln t, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Teorema 4.5. *Si los coeficientes de la EDO $x' = p(t) + q(t)x + r(t)x^2$ son funciones continuas en el intervalo I y satisfacen la condición*

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{p(t)}{r(t)}} \right) = q(t)\sqrt{\frac{p(t)}{r(t)}} + 2p(t),$$

donde se asume que p y r son positivas en I, entonces la solución general viene dada por:

$$x(t) = \sqrt{\frac{p(t)}{r(t)}} + e^{\int_{t_0}^t q(s)ds + 2\int_{t_0}^t r(s)\sqrt{\frac{p(s)}{r(s)}}ds} \left[C - \int_{t_0}^t r(s) e^{\int_{t_0}^s q(w)dw + 2\int_{t_0}^s r(w)\sqrt{\frac{p(w)}{r(w)}}dw} ds \right]^{-1}, \ C \in \mathbb{R},$$

para $t_0 \in I$ fijado.

Demostración. El primer paso consiste en reescribir la ecuación del siguiente modo:

$$x' = r(t)\left(x^2 + \frac{p(t)}{r(t)} \right) + q(t)x = r(t)\left(x - \sqrt{\frac{p(t)}{r(t)}} \right)^2 + q(t)x + 2r(t)\sqrt{\frac{p(t)}{r(t)}}x.$$

Haciendo el cambio de variable

$$y = x - \sqrt{\frac{p(t)}{r(t)}}, \qquad y' = x' - \frac{d}{dt}\sqrt{\frac{p(t)}{r(t)}},$$

se obtiene la expresión

$$y' + \frac{d}{dt}\sqrt{\frac{p(t)}{r(t)}} = r(t)y^2 + q(t)\left(y + \sqrt{\frac{p(t)}{r(t)}} \right) + 2r(t)\sqrt{\frac{p(t)}{r(t)}}\left(y + \sqrt{\frac{p(t)}{r(t)}} \right)$$

y, tras simplificar, usando la hipótesis, se tiene la EDO de Bernoulli:

$$y' = r(t)y^2 + \left(q(t) + 2r(t)\sqrt{\frac{p(t)}{r(t)}} \right) y.$$

Dividiendo por y^2, se llega a:

$$\frac{y'}{y^2} - \left(q(t) + 2r(t)\sqrt{\frac{p(t)}{r(t)}} \right) \frac{1}{y} = r(t).$$

A través del cambio de variable

$$u = \frac{1}{y}, \qquad\qquad u' = -\frac{y'}{y^2},$$

se deduce la EDO lineal

$$u' + \left(q(t) + 2r(t)\sqrt{\frac{p(t)}{r(t)}} \right) u = -r(t).$$

Esta EDO lineal se puede resolver con el factor integrante $\mu(t) = e^{\int_{t_0}^t q(s)ds} e^{2\int_{t_0}^t r(s)\sqrt{\frac{p(s)}{r(s)}}ds}$, para un cierto $t_0 \in I$. Por tanto, la solución de la ecuación es:

$$u(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[-\int_{t_0}^t r(s)\mu(s)ds + C \right], \quad C \in \mathbb{R}$$

y, deshaciendo el cambio de variable,

$$x(t) = \sqrt{\frac{p(t)}{r(t)}} + \mu(t) \left[-\int_{t_0}^t r(s)\mu(s)ds + C \right]^{-1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

□

Teorema 4.6. *Si los coeficientes de la EDO $x' = p(t) + q(t)x + r(t)x^2$ son funciones continuas en el intervalo I y satisfacen la condición*

$$-\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{r(t)}{p(t)}} \right) = q(t)\sqrt{\frac{r(t)}{p(t)}} + 2r(t),$$

donde se asume que p y r son positivas en I, entonces la solución general cumple que

$$\frac{1}{x(t)} = \sqrt{\frac{r(t)}{p(t)}} + \ e^{-\int_{t_0}^t q(s)ds - 2\int_{t_0}^t p(s)\sqrt{\frac{r(s)}{p(s)}}ds} \left(\int_{t_0}^t p(s)e^{-\int_{t_0}^s q(w)dw - 2\int_{t_0}^s p(w)\sqrt{\frac{r(w)}{p(w)}}dw} ds + C \right)^{-1},$$

para $C \in \mathbb{R}$ y $t_0 \in I$ fijado.

Demostración. Al dividir la EDO por x^2, se llega a

$$\frac{x'}{x^2} = \frac{p(t)}{x^2} + \frac{q(t)}{x} + r(t).$$

Haciendo el cambio de variable

$$u = \frac{1}{x}, \qquad u' = \frac{-x'}{x^2},$$

la EDO se convierte en

$$-u' = p(t)\left[u^2 + \frac{r(t)}{p(t)}\right] + q(t)u = p(t)\left[u - \sqrt{\frac{r(t)}{p(t)}}\right]^2 + q(t)u + 2\sqrt{\frac{r(t)}{p(t)}}p(t)u.$$

Se realiza un nuevo cambio de variable, tomando ahora

$$y = u - \sqrt{\frac{r(t)}{p(t)}}, \qquad y' = u' - \frac{d}{dt}\sqrt{\frac{r(t)}{p(t)}}$$

y se obtiene lo siguiente

$$-\left[y' + \frac{d}{dt}\sqrt{\frac{r(t)}{p(t)}}\right] = p(t)y^2 + 2\sqrt{\frac{r(t)}{p(t)}}p(t)y + 2r(t) + q(t)y + q(t)\sqrt{\frac{r(t)}{p(t)}}.$$

Operando y simplificando usando la hipótesis, se tiene la siguiente ecuación de Bernoulli:

$$-y' = p(t)y^2 + \left[q(t) + 2p(t)\sqrt{\frac{r(t)}{p(t)}}\right]y$$

y, dividiendo por y^2,

$$-\frac{y'}{y^2} - \left[q(t) + 2p(t)\sqrt{\frac{r(t)}{p(t)}}\right]\frac{1}{y} = p(t). \tag{4.5}$$

Se realiza un tercer cambio de variable

$$v = \frac{1}{y}, \qquad v' = \frac{-y'}{y^2}, \tag{4.6}$$

obteniendo la siguiente expresión

$$v' - \left[q(t) + 2p(t)\sqrt{\frac{r(t)}{p(t)}}\right]v = p(t), \tag{4.7}$$

que se corresponde con una ecuación diferencial lineal que se puede resolver tomando como factor integrante

$$\mu(t) = e^{-\int_{t_0}^t q(s)ds - 2\int_{t_0}^t p(s)\sqrt{\frac{r(s)}{p(s)}}ds}, \tag{4.8}$$

para $t_0 \in I$ fijado. Por tanto, se obtiene la solución

$$v(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\int_{t_0}^t p(s)\mu(s)ds + C\right), \quad C \in \mathbb{R},$$

y, al deshacer el cambio de variable,

$$\frac{1}{x(t)} = \sqrt{\frac{r(t)}{p(t)}} + \frac{1}{v(t)} = \sqrt{\frac{r(t)}{p(t)}} + \mu(t)\left(\int_{t_0}^t p(s)\mu(s)ds + C\right)^{-1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$\square$

4.2. Coeficientes relacionados mediante fórmulas más generales

Teorema 4.7. *Dada la ecuación* $x' = p(t) + q(t)x + r(t)x^2$, *con* $r(t)$, $q(t)$ *y* $p(t) \in C(I)$, $r(t) \neq 0$ *para* $t \in I$. *Si, para un cierto* $t_0 \in I$, *se cumple que*

$$\begin{aligned} p(t) = {} & \frac{\varphi''(t)r(t) - r'(t)\varphi'(t)}{r^2(t)} \left(\psi(t) + m(t)e^{\int_{t_0}^t \psi(s)\varphi'(s)ds}\right) \\ & + \frac{\varphi'(t)}{r(t)} \left(\psi'(t) + m'(t)e^{\int_{t_0}^t \psi(s)\varphi'(s)ds} + m(t)e^{\int_{t_0}^t \psi(s)\varphi'(s)ds}\psi(t)\varphi'(t)\right) \\ & - \frac{(\varphi'(t))^2}{r(t)} \left[\psi(t) + m(t)e^{\int_{t_0}^t \psi(s)\varphi'(s)ds}\right]^2 - \frac{q(t)\varphi'(t)}{r(t)} \left[\psi(t) + m(t)e^{\int_{t_0}^t \psi(s)\varphi'(s)ds}\right], \end{aligned} \tag{4.9}$$

para $t \in I, m(t) \neq 0$ *y* $\varphi'(t) \neq 0$, *para todo* $t \in I$, *entonces una solución particular es la siguiente:*

$$x_p(t) = \frac{\varphi'(t)}{r(t)} \left[\psi(t) + m(t)e^{\int_{t_0}^t \psi(s)\varphi'(s)ds}\right] \tag{4.10}$$

y la solución general es:

$$x(t) = x_p(t) + \frac{e^{2\varphi'(t)\left(\psi(t)+m(t)e^{\int_{t_0}^t \psi(s)\varphi'(s)ds}\right)+q(t)}}{C - \int_{t_0}^t r(s)e^{2\varphi'(s)\left(\psi(s)+m(s)e^{\int_{t_0}^s \psi(w)\varphi'(w)dw}\right)+q(s)}ds}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Derivando $x_p(t)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} x_p'(t) = {} & \frac{\varphi''(t)r(t) - r'(t)\varphi'(t)}{r^2(t)} \left(\psi(t) + m(t)e^{\int_{t_0}^t \psi(s)\varphi'(s)ds}\right) \\ & + \frac{\varphi'(t)}{r(t)} \left(\psi'(t) + m'(t)e^{\int_{t_0}^t \psi(s)\varphi'(s)ds} + m(t)e^{\int_{t_0}^t \psi(s)\varphi'(s)ds}\psi(t)\varphi'(t)\right). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Al sustituir en la ecuación de Riccati las expresiones (4.10) y (4.11), se llega a que la expresión

$$x_p'(t) - r(t)x_p^2(t) - q(t)x_p(t)$$

es igual a

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi''(t)r(t) - r'(t)\varphi'(t)}{r^2(t)} \left(\psi(t) + m(t)e^{\int_{t_0}^t \psi(s)\varphi'(s)ds}\right) \\ & + \frac{\varphi'(t)}{r(t)} \left(\psi'(t) + m'(t)e^{\int_{t_0}^t \psi(s)\varphi'(s)ds} + m(t)e^{\int_{t_0}^t \psi(s)\varphi'(s)ds}\psi(t)\varphi'(t)\right) \\ & - \frac{(\varphi'(t))^2}{r(t)} \left[\psi(t) + m(t)e^{\int_{t_0}^t \psi(s)\varphi'(s)ds}\right]^2 - \frac{q(t)\varphi'(t)}{r(t)} \left[\psi(t) + m(t)e^{\int_{t_0}^t \psi(s)\varphi'(s)ds}\right], \end{aligned}$$

siendo esta última expresión igual a $p(t)$ en virtud de (4.9), por lo que $x_p(t)$ es una solución particular. Como se ha estudiado anteriormente, al conocer una solución particular, la solución general se puede escribir como

$$x(t) = x_p(t) + \frac{1}{u(t)}, \tag{4.12}$$

siendo $u(t)$ la solución de la ecuación diferencial lineal

$$u' = -\left[2r(t)x_p(t) + q(t)\right] u - r(t), \quad t \in I.$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtiene $u(t)$

$$u(t) = e^{-\gamma(t)} \left[C - \int_{t_0}^{t} e^{\gamma(s)} r(s) ds \right], \quad t \in I, \tag{4.13}$$

siendo

$$\gamma(t) = 2\varphi'(t) \left[\psi(t) + m(t) e^{\int_{t_0}^{t} \psi(s)\varphi'(s) ds} \right] + q(t). \tag{4.14}$$

Sustituyendo las expresiones (4.13) y (4.14) en (4.12) se llega a la expresión de $x(t)$ del enunciado, por lo que queda probado el teorema. □

Ejemplo 4.8. Se sabe que, para la ecuación $x' = x^2 + f(t)x - a_0^2 - a_0 f(t)$, $x(t) \equiv a_0$ es una solución particular. Por ello, a continuación, se probará haciendo uso del teorema anterior, para $a_0 \neq 0$, pues el caso $a_0 = 0$ es obvio y asumiendo f continua.

En efecto, la ecuación cumple las hipótesis del Teorema 4.7 para $r(t) = 1, q(t) = f(t), p(t) = -a_0^2 - a_0 f(t), \varphi(t) = t, \psi(t) = 0$ y $m(t) = a_0$, por lo que, al sustituir en (4.10), la solución será:

$$x_p(t) \equiv a_0.$$

La solución general viene dada por:

$$x(t) = a_0 + \frac{e^{2a_0 + f(t)}}{C - \int_{t_0}^{t} e^{2a_0 + f(s)} ds}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Capítulo 5

Aplicaciones de la ecuación de Riccati

La ecuación de Riccati tiene numerosas aplicaciones, tanto en Matemáticas como en otros campos, especialmente por la posibilidad de transformar ecuaciones de segundo orden en una ecuación de Riccati y viceversa. En este capítulo, se verán algunas de esas transformaciones aplicadas a problemas reales. Se han utilizado el artículo [6] y la monografía [10].

5.1. Aplicaciones en Física

Se estudiará un problema en el que es útil la ecuación de Riccati, el estudio del movimiento de una partícula bajo la influencia de un potencial central $V(r) = Kr^{\epsilon}$. Cuando la energía total es nula, la ecuación del movimiento se puede expresar en la forma de una ecuación de Riccati de la que se puede obtener una solución.

Después de aplicar el principio de conservación del momento angular, la ecuación de la conservación de la energía, en el caso del potencial central $V(r)$, viene dada por la expresión

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r), \tag{5.1}$$

donde el potencial viene dado por la expresión $V(r) = Kr^{\epsilon}$, siendo K la constante de acoplamiento que determina la fuerza de una interacción y el exponente ϵ una constante positiva o negativa.
Derivando (5.1) con respecto al tiempo, se tiene

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{dV(r)}{dr} = 0. \tag{5.2}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{dV(r)}{dr} = \epsilon K r^{\epsilon-1},$$

la expresión (5.2) es igual a

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \epsilon K r^{\epsilon-1} = 0,$$

que, en términos del potencial, se escribe como

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{\epsilon}{r}V(r) = 0,$$

por lo que se tiene

$$V(r) = -\frac{m\ddot{r}r}{\epsilon} + \frac{l^2}{\epsilon m r^2}. \tag{5.3}$$

Sustituyendo (5.3) en (5.1), se tiene

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\epsilon}\right)\frac{l^2}{mr^2} - \frac{m\ddot{r}r}{\epsilon} - E = 0. \tag{5.4}$$

Bajo la condición de que $E = 0$, esta expresión nos llevará a una ecuación de Riccati. Para ello, consideramos el ángulo θ, como se acostumbra a hacer en problemas con potenciales centrales. Concretamente, se tomarán

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2} \qquad , \qquad r' \equiv \frac{dr}{d\theta} \qquad \text{y} \qquad w = \frac{r'}{r}.$$

Además, de las igualdades anteriores se deduce que

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\theta}\frac{l}{mr^2} \tag{5.5}$$

$$w' = \frac{r''r - (r'^{\,2}}{)}r^2 \tag{5.6}$$

Para llegar a la ecuación de Riccati de (5.4), con $E = 0$, se comienza multiplicando dicha expresión por ϵ

$$\frac{\epsilon}{2}m\left(\frac{d}{dt}r\right)^2 + \left(\frac{\epsilon+2}{2}\right)\frac{l^2}{mr^2} - m\left(\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}r\right)r = 0.$$

Ahora, teniendo en cuenta la igualdad (5.5) y la notación de r', se tiene la expresión

$$\frac{\epsilon}{2}\frac{l^2}{m^2r^4}\frac{(r')^2}{r^2} + \left(\frac{\epsilon+2}{2}\right)\frac{l^2}{m^2r^4} - \frac{l^2}{m^2r^4}\frac{r''r}{r^2} = 0$$

simplificando, se tiene que,

$$\frac{\epsilon}{2}\frac{(r')^2}{r^2} + \frac{\epsilon+2}{2} - \frac{r''r}{r^2} = 0,$$

añadiendo términos convenientes, se deduce que

$$\frac{\epsilon}{2}\frac{(r')^2}{r^2} + \frac{(r')^2}{r^2} - \frac{(r')^2}{r^2} - \frac{r''r}{r^2} + \frac{\epsilon+2}{2} = 0$$

y, teniendo en cuenta la expresión de w y w', se obtiene

$$w' = \frac{\epsilon+2}{2}w^2 + \frac{\epsilon+2}{2}. \tag{5.7}$$

Esta es la ecuación de Riccati para el movimiento de una partícula con potencial central polinómico, asumiendo la hipóteis de que la energía es nula.
Cabe mencionar el caso particular en el que $\epsilon = -2$,donde la elección de $E = 0$ solo es posible cuando $\frac{l^2}{2m} + K < 0$. En este caso, se puede deducir directamente de (5.1) que $w = \frac{r'}{r}$ es una constante. Para el resto de valores de ϵ, la ecuación diferencial (5.7) se puede resolver a través del método de variables separadas de la siguiente forma

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{\epsilon + 2}{2}\left(w^2 + 1\right),$$

calculando primitivas en ambos lados de la igualdad se tiene

$$\int \frac{dw}{(w^2+1)} = \int \frac{\epsilon+2}{2} d\theta,$$

o, equivalentemente,

$$\arctan(w) = \frac{\epsilon+2}{2}\theta + C,$$

por lo que la solución de la ecuación diferencial de Riccati es

$$w = \tan\left(\frac{\epsilon+2}{2}\theta + C\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Entonces, la solución del problema inicial es

$$r(\theta) = \frac{R}{[1 + \cos((\epsilon+2)\theta + C]^{\frac{1}{\epsilon+2}}},$$

donde R es una constante que, en el caso $\epsilon = -2$, solo puede ser determinada insertando la ecuación (5.7) en la ecuación (5.1). El valor de R es

$$R = \left(\frac{l^2}{m|k|}\right)^{\frac{1}{\epsilon+2}}.$$

En resumen, la ecuación de Riccati nos ha permitido calcular una solución analítica del problema del movimiento de una partícula con potencial $V(r)$ para los casos en los que la energía total es nula. Sin embargo, este resultado puede ser generalizado para la resolución de otros problemas de mecánica clásica.

5.2. Aplicaciones en Análisis Matemático

En el libro [10] se deja como ejercicio probar que existe un cambio de variable que convierte la ecuación de Riccati en una ecuación diferencial de segundo orden, este cambio es útil pues existen casos en los que la ecuación de segundo orden sí que se puede resolver por medio del

método general.
El ejercicio consiste en probar que la ecuación

$$x' + q(t)x + r(t)x^2 = p(t) \tag{5.8}$$

se puede transformar en la ecuación de segundo orden

$$u'' + u'\left(q(t) - \frac{r'(t)}{r(t)}\right) - p(t)r(t)u = 0 \tag{5.9}$$

usando la transformación

$$u = e^{\int_{t_0}^{t} r(s)x(s)ds} \tag{5.10}$$

Teniendo en cuenta la expresión (5.10), se tiene que la solución de (5.8), $x(t)$, es de la siguiente forma

$$x = \frac{(\ln u)'}{r(t)} = \frac{1}{r(t)}\frac{u'}{u}.$$

Por ser solución de la ecuación diferencial (5.8), se verifica

$$\left(\frac{u'}{ur(t)}\right)' + \frac{q(t)}{r(t)}\frac{u'}{u} + r(t)\left(\frac{u'}{ur(t)}\right)^2 = p(t)$$

y, operando se llega a

$$\frac{u''ur(t) - (u')^2r(t) + uu'r'(t)}{u^2r^2(t)} + \frac{q(t)}{r(t)}\frac{u'}{u} + \frac{1}{r(t)}\left(\frac{u'}{u}\right)^2 = p(t).$$

Simplificando se obtiene la expresión

$$\frac{1}{r(t)}\frac{u''}{u} + \frac{q(t)}{r(t)}\frac{u'}{u} - \frac{r'(t)}{r^2(t)}\frac{u'}{u} = p(t),$$

o, equivalentemente,

$$u'' + u'\left(q(t) - \frac{r'(t)}{r(t)}\right) - p(t)r(t)u = 0.$$

Esta última ecuación diferencial se corresponde con la ecuación del enunciado (5.8), por lo que se ha probado que utilizando la transformación $u = e^{\int r(t)xdt}$ se puede transformar una ecuación de Riccati en una ecuación de segundo orden.

Ejemplo 5.1. Transformemos la siguiente ecuación de Riccati en una EDO de segundo orden y calcular su solución.

$$x' - x + e^t x^2 + 5e^{-t} = 0. \tag{5.11}$$

Apoyándonos en el resultado anterior, la ecuación de Riccati (5.11) se puede transformar en la siguiente ecuación de segundo orden

$$u'' + u'\left(-1 - \frac{e^t}{e^t}\right) + 5e^{-t}e^t u = 0,$$

aplicando el cambio (5.9). Por lo tanto, para hallar la solución de la ecuación de Riccati basta con calcular la solución de la ecuación de segundo orden

$$u'' - 2u' + 5u = 0. \tag{5.12}$$

Mediante el cambio de variables

$$\begin{cases} u = u_1, \\ u' = u_2, \end{cases}$$

se obtiene el sistema plano equivalente

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = 2u_2 - 5u_1, \end{cases}$$

o, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

Para resolver (5.13), hay que calcular los autovalores de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2, \end{pmatrix}$$

que son $\lambda_1 = 1 + 4i$ y $\lambda_2 = 1 - 4i$.
Como los autovalores son complejos conjugados, la solución general de (5.12) es

$$u(t) = K_1 e^t \cos(4t) + K_2 e^t \operatorname{sen}(4t), \qquad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

por lo que la solución general de (5.11) es

$$x(t) = \frac{1}{r(t)} \frac{u'}{u} = \frac{K_1 (\cos(4t) - 2\operatorname{sen}(4t)) + K_2 (\operatorname{sen}(4t) + 2\cos(4t))}{e^t (K_1 \cos(4t) + K_2 \operatorname{sen}(4t))}, \qquad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

La ecuación de Riccati también puede ser empleada en la resolución de otro tipo de ecuaciones diferenciales. Se verán algunos ejemplos a continuación

1. Para la ecuación de Sturm-Liouville

$$Lu = \big(pu'\big)' + qu = 0 \tag{5.14}$$

si u es una solución no nula de esta ecuación, se puede considerar la función

$$r(t) = \frac{p(t)u'}{u}$$

con derivada

$$r'(t) = \frac{(p'(t)u' + p(t)u'')\, u}{u^2} - \frac{(u')^2 p(t)}{u^2}$$

que satisface la ecuación

$$r' + \frac{r^2}{p(t)} + q(t) = 0, \tag{5.15}$$

pues es equivalente a (5.14).La ecuación (5.15) llama ecuación de Riccati de (5.14).

Por lo tanto, si $r(t)$ es una solución de la ecuación de Riccati (5.15), entonces la expresión $u(t) = e^{\int_{t_0}^{t} \frac{r(s)}{p(s)} ds}$ es una solución no nula de la ecuación de Sturn-Liouville del enunciado.

2. Para la ecuación

$$u'' + g(t)u' + q(t)u = 0 \tag{5.16}$$

la función

$$z(t) = \frac{u'}{u}$$

satisface la ecuación de Riccati

$$z' + z^2 + g(t)z + q(t) = 0.$$

Por lo tanto, si $z(t)$ es una solución de la ecuación de Riccati anterior, la expresión $u(t) = e^{\int_{t_0}^{t} z(t)ds}$ es una solución no nula de la ecuación (5.16).

Bibliografía

[1] Tom M. Apostol. *Análisis Matemático.* Reverté, 2020.

[2] Avyt Asanov, Elman Hazar, y Ruhidin Asanov. Formulas for solution of Riccati's equation. En *2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON)*, paginas 30–33. IEEE, 2017.

[3] Fernández Pérez,Carlos y Vázquez Hernández,Francisco José y Vegas Montaner, José. *Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias: Sistemas Dinámicos.* Ediciones Paraninfo, SA, 2003.

[4] Juan Luis Varona Malumbres. *Métodos Clásicos de Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* Universidad de la Rioja, 1996.

[5] Jiménez Moscoso, José Alfredo. La solución de algunas EDO de Riccati. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 15(2), 2015.

[6] Marek Nowakowski y Haret C. Rosu. Newton's laws of motion in the form of a Riccati equation. *Physical Review E*, 65(4):047602, 2002.

[7] O'Connor J J y Robertson F. Jacopo Francesco Riccati-biography. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Riccati/. 2023-0-3-18

[8] Salinas Hernández, López Carrera, y Sánchez Juárez. Metodología para hallar soluciones restringidas a la ecuación de Riccati.

[9] Walter Rudin, Miguel *Principios de análisis matemático*, volume 3. McGraw-Hill, 1980.

[10] Walter, Wolfgang. *Ordinary Differential Equations.* Springer, 1998.

[11] William E Boyce, Richard C DiPrima, y Douglas B Meade. *Elementary differential equations and boundary value problems.* John Wiley & Sons, 2021.