



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

La Transformada de Laplace y sus aplicaciones a la resolución de ecuaciones diferenciales

Alba Rey Santiago

2021/2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

La Transformada de Laplace y sus aplicaciones a la resolución de ecuaciones diferenciales

Alba Rey Santiago

2021/2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Análisis matemático.
Título: La Transformada de Laplace y sus aplicaciones a la resolución de ecuaciones diferenciales.
Breve descripción del contenido
Se trata de estudiar las propiedades más importantes de la transformada de Laplace así como sus aplicaciones a la resolución de ecuaciones diferenciales. En particular, se hará especial hincapié en el análisis matemático y resolución de ecuaciones en derivadas parciales relacionadas con problemas medioambientales.
Recomendaciones

Índice

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Definición y propiedades básicas.	1
1.1. Definición	1
1.2. Existencia y unicidad	3
1.3. Propiedades básicas	5
1.4. Transformada inversa	9
2. Aplicación a la resolución de EDOs	13
3. Aplicación a la resolución de EDPs	17
4. Aplicación a un problema de dispersión de un contaminante.	25
4.1. Modelo <i>Gaussian Plume</i>	26
4.2. Solución analítica del modelo <i>Gaussian Plume</i>	29
A. Códigos de Matlab desarrollados	33
Bibliografía	43

Resumen

En este trabajo nos centraremos en el estudio de la Transformada de Laplace. Presentaremos conceptos básicos, como su definición, teoremas de existencia y unicidad y las principales propiedades, viendo después como se aplican estas para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales parciales. Por último, veremos como se utiliza la Transformada de Laplace para resolver un problema realista como es la dispersión de un contaminante en la atmósfera.

Abstract

In this memory we will focus on the study of the Laplace Transform. We will present basic concepts, as its definition, existence and uniqueness theorems and the main properties, then we will see how these are applied to solve ordinary differential equations and partial differential equations. Finally, we will see how the Laplace Transform is used to solve a realistic problem such as the dispersion of a pollutant in the atmosphere.

Introducción

La Transformada de Laplace tiene muchas aplicaciones en la ciencia en general, y sobre todo en la ingeniería, ya que es una herramienta para resolver ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, es muy útil en el campo de los sistemas de control y en automatización de procesos, algo que hoy en día se utiliza en muchas empresas.

En este trabajo haremos un estudio sobre la Transformada de Laplace. En el primer capítulo nos centraremos en mencionar y demostrar los teoremas de existencia y unicidad, exponiendo seguidamente las principales propiedades. También nos será útil la Transformada inversa, para la que también definiremos y mencionaremos sus propiedades.

Una vez visto esto, en el segundo y tercer capítulo, podemos pasar a ver cómo se aplica la Transformada de Laplace para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) y ecuaciones derivadas parciales (EDPs), respectivamente. En el caso de las EDOs definiremos un problema de valor inicial para ver su resolución en un caso general, y después pondremos algún ejemplo con valores concretos. Para las EDPs tenemos varios casos, por lo que en primer lugar veremos su clasificación y después un ejemplo para cada uno de ellos. Para la ecuación de tipo parabólico elegimos la ecuación del calor; para la de tipo hiperbólico, la ecuación de ondas; y para la de tipo elíptico tenemos la ecuación de Laplace.

Por último, en el cuarto capítulo, veremos una aplicación real de la Transformada de Laplace, la dispersión de contaminantes en la atmósfera. Este problema nos interesa porque la concentración de un contaminante liberado en el aire puede describirse mediante la ecuación de advección-difusión, la cual es una ecuación diferencial parcial de segundo orden de tipo parabólico, como la ecuación de ondas que mencionamos. Para obtener una solución analítica debemos hacer una serie de hipótesis, tomar las condiciones de contorno apropiadas y luego aplicar la Transformada de Laplace y sus propiedades para llegar a la ecuación conocida como la solución de *Gaussian plume* para la ecuación de advección-difusión.

Capítulo 1

Definición y propiedades básicas.

En este capítulo veremos la definición de transformada de Laplace, transformada de Laplace inversa y sus propiedades más importantes, así como otras específicas que emplearemos en capítulos sucesivos. Para ello, hemos consultado las referencias bibliográficas [3], [4], [5] y [8].

1.1. Definición

Definición 1.1 (La transformada de Laplace). Dada una función arbitraria $f(t)$ definida en el intervalo $0 \leq t < \infty$, llamamos transformada de Laplace de la función $f(t)$ a

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

siempre que la integral exista, es decir, cuando exista el siguiente límite

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-pt} f(t) dt.$$

Ejemplo 1.2. En el Cuadro 1.1 tenemos algunos ejemplos básicos:

$f(t)$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}(p)$
1	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$\sin(at)$	$\frac{1}{p^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$

Cuadro 1.1: Algunos ejemplos.

Vamos a resolver alguno de ellos en detalle, el cálculo de las transformadas de Laplace que no veremos en este documento, como también algunos ejemplos concretos, pueden consultarse en [2], [5] y [8].

- Para la función $f(t) = t$ tenemos:

$$F(p) = \mathcal{L}\{t\}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t dt$$

Aplicando integración por partes llegamos a lo siguiente

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} t dt = \left[-t \frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{e^{-pt}}{p} dt = \left[-\frac{e^{-pt}}{p^2} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p^2}$$

- Para la función $f(t) = e^{at}$:

$$F(p) = \mathcal{L}\{e^{at}\}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} dt$$

Procedemos haciendo un cambio de variable, sustituyendo del siguiente modo $u = t(a-p)$ y $du = (a-p)dt$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{t(a-p)} dt \Rightarrow \frac{1}{a-p} \int e^u du = \frac{e^u}{a-p}$$

Y deshaciendo el cambio de variable y considerando el caso $p > a$, ya que si no la integral diverge, nos queda lo siguiente

$$\int_0^{\infty} e^{t(a-p)} dt = \left[\frac{e^{t(a-p)}}{a-p} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}.$$

- Para la función $f(t) = \cos(at)$:

$$F(p) = \mathcal{L}\{\cos(at)\}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos(at) dt$$

Aplicamos integración por partes dos veces

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos(at) dt &= \left[-\frac{e^{-pt}}{p} \cos(at) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{e^{-pt}}{p} a \sin(at) dt \\ &= \frac{1}{p} + \frac{a}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin(at) dt = \frac{1}{p} + \frac{a}{p} \left(\left[-\frac{e^{-pt}}{p} \sin(at) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{e^{-pt}}{p} a \cos(at) dt \right) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{a^2}{p^2} \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos(at) dt \end{aligned}$$

Y en este caso para obtener el resultado de nuestra integral vamos a despejar del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos(at) dt &= \frac{1}{p} + \frac{a^2}{p^2} \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos(at) dt \Rightarrow \left(1 - \frac{a^2}{p^2}\right) \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos(at) dt = \frac{1}{p} \\ &\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos(at) dt = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{p^2 - a^2}{p^2}} = \frac{p}{p^2 - a^2}. \end{aligned}$$

1.2. Existencia y unicidad

En esta sección nos vamos a centrar en enunciar y demostrar los resultados de existencia y unicidad de la transformada de Laplace.

Teorema 1.3 (Existencia). *Podemos afirmar que existe la transformada de Laplace de una función $f(t)$ cuando se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $f(t)$ es continua a trozos en $0 \leq t < \infty$, esto quiere decir que el siguiente límite $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+)$ existe y f es continua en cada intervalo finito $(0, b)$ excepto en un número finito de puntos,
2. $f(t)$ es de orden exponencial, es decir, existen constantes c y M tal que

$$|f(t)| \leq M e^{ct} \text{ si } p > c.$$

Demostración. Podemos escribir la transformada de Laplace del siguiente modo:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t) dt + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{t_0}^b e^{-pt} f(t) dt.$$

Por la hipótesis de continuidad a trozos de $f(t)$, tenemos que la primera integral del segundo miembro existe. Vamos a ver que existe la segunda:

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^b e^{-pt} f(t) dt \right| &\leq \int_{t_0}^b |e^{-pt} f(t)| dt \leq M \int_{t_0}^b e^{-pt} e^{ct} dt \\ &= M \int_{t_0}^b e^{(c-p)t} dt = -M \left[\frac{e^{(c-p)t}}{p-c} \right]_{t_0}^b \\ &= M \frac{e^{(c-p)b} - e^{(c-p)t_0}}{c-p}. \end{aligned}$$

Y aplicando ahora el límite tenemos

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{t_0}^b |e^{-pt} f(t)| dt \leq \lim_{b \rightarrow \infty} M \frac{e^{(c-p)b} - e^{(c-p)t_0}}{c-p} = M \frac{e^{-(p-c)t_0}}{p-c}$$

cuando $p > c$. Como la parte de la derecha de la desigualdad converge, la integral $\int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ converge por comparación. Por lo tanto, tenemos así que la transformada de Laplace existe cuando $p > c$, como queríamos demostrar.

Teorema 1.4 (Unicidad o teorema de Lerch). *Si*

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, p > \gamma, \quad (1.1)$$

se cumple para una función continua $f(t)$, donde γ es una constante, no existe otra función continua que satisfaga dicha ecuación.

Antes de proceder con la demostración del resultado, es conveniente enunciar el siguiente lema, cuya demostración se puede encontrar en [2, página 23]

Lema 1.5. *Sea $\psi(x)$ una función continua en $[0, 1]$ y*

$$\int_0^1 x^{n-1} \psi(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Entonces

$$\psi(x) = 0, \quad \text{en } 0 \leq x \leq 1.$$

Veamos entonces la demostración del Teorema 1.4

Demostración. Suponemos que $g(t)$ es otra función continua que satisface (1.1) y definimos $h(t) = f(t) - g(t)$, que por ser la diferencia de dos funciones continuas también es continua. Entonces

$$\int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt = 0, \quad s \geq \gamma. \quad (1.2)$$

Sea $s = \gamma + n$, donde n es cualquier número entero positivo. Luego

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-(\gamma+n)t} h(t) dt &= \int_0^{\infty} e^{-nt} (e^{-\gamma t} h(t)) dt \\ &= \left[e^{-nt} \int_0^t e^{-\gamma u} h(u) du \right]_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} e^{-nt} \left[\int_0^t e^{-\gamma u} h(u) du \right] dt \\ &= n \int_0^{\infty} e^{-nt} \left[\int_0^t e^{-\gamma u} h(u) du \right] dt, \end{aligned}$$

y de (1.2) se sigue que

$$\int_0^{\infty} e^{-nt} \phi(t) dt = 0, \quad (1.3)$$

donde:

$$\phi(t) = \int_0^t e^{-\gamma u} h(u) du. \quad (1.4)$$

Ahora, consideremos en (1.3) el cambio de variable $x = e^{-t}$ ($t = \ln(1/x)$, $dx = -e^{-t} dt \Rightarrow dt = -x^{-1} dx$):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-nt} \phi(t) dt &= \int_1^0 x^n \phi(\ln(1/x)) - x^{-1} dx \\ &= \int_0^1 x^{n-1} \phi(\ln(1/x)) dx, \end{aligned}$$

esto es:

$$\int_0^1 x^{n-1} \psi(x) dx = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde $\psi(x) = \phi[\ln(1/x)]$. Además, es claro que $\phi(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$, tomando:

$$\psi(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) \quad \text{y} \quad \psi(1) = \phi(0) = 0.$$

Se sigue entonces del lema 1.5 que $\psi(x) \equiv 0$ en $0 \leq x \leq 1$ y, por lo tanto,

$$\phi(t) = \int_0^t e^{-\gamma u} h(u) du = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Como $e^{-\gamma t} h(t)$ es continua cuando $t \geq 0$, se sigue de la igualdad anterior que $e^{-\gamma t} h(t) = 0$, $\forall t \geq 0$, es decir $h(t) = 0$, cuando $t \geq 0$. En consecuencia, $g(t) = f(t)$ cuando $t \geq 0$ como queríamos probar.

Observación 1.6. En nuestro caso será más conveniente hablar de inyectividad, en vez de unicidad, ya que no puede haber más de una función continua $f(t)$ que tenga la misma transformada, es decir, la Transformada de Laplace es inyectiva.

1.3. Propiedades básicas

Antes de enumerar las propiedades vamos a dar la siguiente definición, que será imprescindible para el segundo teorema de traslación:

Definición 1.7 (Función escalón unitario). La función $\mathcal{U}(t - a)$ se define como sigue:

$$\mathcal{U}(t - a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a, \\ 1, & t \geq a. \end{cases}$$

Proposición 1.8. *Las principales propiedades de la transformada de Laplace son las siguientes:*

I. *Linealidad:*

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(p) = \alpha F(p) + \beta G(p).$$

II. *Primer teorema de traslación:*

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(p) = F(p - a).$$

III. *Segundo teorema de traslación:*

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $a > 0$, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t - a)\mathcal{U}(t - a)\}(p) = e^{-ap} F(p).$$

IV. *Transformada de la derivada:*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(p) = pF(p) - f(0)$$

V. *Transformada de la derivada de orden n :*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(p) = p^n \mathcal{L}\{f(t)\} - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - p^{n-3} f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

VI. *Transformada de una integral:*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t) dt\right\}(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

VII. *Derivada de la transformada:*

$$\mathcal{L}\{(-1)^n t^n f(t)\}(p) = F^{(n)}(p).$$

VIII. *Integral de la transformada:*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(p) = \int_p^\infty F(p) dp.$$

IX. *Convolución:*

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(p) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau\right\}(p) = F(p)G(p).$$

Se define la convolución como la integral del producto de ambas funciones después de desplazar una de ellas una distancia t .

Demostración.

- I. Sean f y g dos funciones para las que existe la Transformada de Laplace y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(p) &= \int_0^{\infty} e^{-st}(\alpha f(t) + \beta g(t))dt \\ &= \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-st} g(t)dt \\ &= \alpha \mathcal{L}\{f(t)\}(p) + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}(p) \\ &= \alpha F(p) + \beta G(p).\end{aligned}$$

- II. La demostración es inmediata a partir de la definición:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} f(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{(a-p)t} f(t)dt \\ &= F(p-a).\end{aligned}$$

- III. Expresamos $\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-a)\mathcal{U}(t-a)dt$ como la suma de dos integrales y tenemos en cuenta la definición 1.6:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} &= \int_0^a e^{-pt} f(t-a)\mathcal{U}(t-a)dt + \int_a^{\infty} e^{-pt} f(t-a)\mathcal{U}(t-a)dt \\ &= \int_a^{\infty} e^{-pt} f(t-a)dt.\end{aligned}$$

Ahora hacemos el siguiente cambio de variable, $v=t-a$, $dv=dt$ y entonces

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = \int_0^{\infty} e^{-p(v+a)} f(v)dv = e^{-ap} \int_0^{\infty} e^{-pv} f(v)dv = e^{-ap} \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

- IV. Si aplicamos integración por partes a la definición:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\}(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t)dt \\ &= [e^{-pt} f(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(\frac{d}{dt} e^{-pt}\right) f(t)dt \\ &= -f(0) + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt \\ &= pF(p) - f(0).\end{aligned}$$

- v. Para esta demostración partimos de la propiedad anterior:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(p) = pF(p) - f(0)$$

y aplicando inducción llegamos al resultado que queríamos:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(p) = p^n \mathcal{L}\{f(t)\} - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - p^{n-3} f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

VI. Para esta demostración vamos a aplicar la propiedad III, la transformada de la derivada:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\}(p) &= \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\left(\int_0^t f(t)dt\right)\right\}(p) \\ &= p\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\}(p) - \int_0^0 f(t)dt \\ &= p\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\}(p). \end{aligned}$$

Despejando obtenemos:

$$\frac{\mathcal{L}\{f(t)\}(p)}{p} = \frac{F(p)}{p} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\}(p).$$

VII. Aplicando la definición e intercambiando el orden de integración obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_p^\infty F(p)dp &= \int_p^\infty \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt dp \\ &= \int_0^\infty \int_p^\infty e^{-pt} f(t) dp dt \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{-t} e^{-pt}\right]_p^\infty f(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(p). \end{aligned}$$

VIII. Procediendo del mismo modo que en el apartado anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right\} &= \int_0^\infty e^{-px} \left[\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right] dx \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^x e^{-px} f(x-t)g(t)dt\right] dx \\ &= \int_0^\infty \left[\int_t^\infty e^{-px} f(x-t)dx\right] g(t)dt. \end{aligned}$$

Ahora, realizando el cambio de variable $x = s + t$, se tendrá que:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left[\int_t^\infty e^{-px} f(x-t)dx\right] g(t)dt &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-p(s+t)} f(s)ds\right] g(t)dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p(s+t)} f(s)g(t)dsdt \\ &= \left[\int_0^\infty e^{-ps} f(s)ds\right] \left[\int_0^\infty e^{-pt} g(t)dt\right] \\ &= F(p)G(p). \end{aligned}$$

1.4. Transformada inversa

Definición 1.9 (Transformada inversa de Laplace). Llamamos transformada inversa de Laplace de $F(p)$ a la siguiente función:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}.$$

El siguiente resultado fue obtenido del artículo [1].

Teorema 1.10 (Existencia de la Transformada Inversa de Laplace). *Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, tal que $e^{-pt}f(t) \in L^1[0, \infty)$ para algún $p \in \mathbb{R}$ y existan las derivadas laterales de f y sean finitas en $[0, \infty)$, esto quiere decir que $\int_0^\infty |e^{-pt}f(t)|dt < \infty$ y que los siguientes límites, $f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ y $f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, existen y son finitos en $[0, \infty)$, entonces podemos afirmar que existe la Transformada inversa de Laplace de una función $f(t)$.*

Ejemplo 1.11. Veamos algunos ejemplos:

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+4}\right\} = \cos(2x)$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p^2+4}\right\} = \sin(2x)$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} = x$

Observación: En el caso de la transformada inversa de Laplace de una función $F(p)$ puede no haber unicidad, es posible que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$ y, sin embargo, $f \neq g$. Para nuestro propósito no nos va a preocupar esto, ya que si f y g son continuas a trozos y de orden exponencial en $[0, \infty)$, y si $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$, las funciones f y g son esencialmente iguales, esto quiere decir, que pueden diferir sólo en los puntos de discontinuidad.

Proposición 1.12. *Las principales propiedades de la transformada inversa de Laplace son las siguientes:*

I. *Linealidad:*

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(p) + \beta G(p)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(p)\} = \alpha f(t) + \beta g(t).$$

II. *Forma inversa del primer teorema de traslación:*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p - a)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(p) |_{p \rightarrow p-a}\} = e^{at}f(t).$$

donde $p \rightarrow p - a$ significa que se sustituye p por $p - a$ en $F(p)$.

III. *Forma inversa del teorema de convolución. Tiene sentido aplicarla cuando $f(t)$ y $g(t)$ son dos funciones continuas a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial:*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)G(p)\} = (f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

Demostración.

I. Sean F y G dos funciones para las que existe la transformada inversa de Laplace y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(p) + \beta G(p)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt\right\} \\ &= \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(p)\} \\ &= \alpha f(t) + \beta g(t). \end{aligned}$$

II. Simplemente aplicando la definición tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F(p - a)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\int_0^\infty e^{(a-p)t} f(t)dt\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\int_0^\infty e^{-pt} e^{at} f(t)dt\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}\} = e^{at} f(t). \end{aligned}$$

III. Sean

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$$

y

$$G(p) = \mathcal{L}\{g(\tau)\}(p) = \int_0^\infty e^{-p\tau} g(\tau)d\tau,$$

entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F(p)G(p)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt\right) \left(\int_0^\infty e^{-p\tau} g(\tau)d\tau\right)\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\int_0^\infty \int_0^x e^{-p(t+\tau)} f(t)g(\tau)dt d\tau\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\int_0^\infty g(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-p(t+\tau)} f(t)dt\right\}. \end{aligned}$$

Mantenemos fija la τ y realizamos el cambio de variable $x = \tau + t$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_0^\infty g(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-p(t+\tau)} f(t)dt\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\int_0^\infty g(\tau)d\tau \int_\tau^\infty e^{-px} f(x - \tau)dx\right\}$$

Puesto que f y g son continuas a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial podemos intercambiar el orden de integración:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_0^\infty g(\tau)d\tau \int_\tau^\infty e^{-px}f(x-\tau)dx\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\int_0^\infty e^{-px}dx \int_0^x g(\tau)f(x-\tau)d\tau\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\int_0^\infty e^{-px}\left[\int_0^x g(\tau)f(x-\tau)d\tau\right]\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{\int_0^x g(\tau)f(x-\tau)d\tau\right\}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}\} = (f * g)(t).\end{aligned}$$

Capítulo 2

Aplicación a la resolución de EDOs

Un área importante para la aplicación de la transformada de Laplace es la resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Este tipo de ecuación diferencial se puede reducir a una ecuación algebraica en la variable transformada. Para entenderlo, veamos el problema del valor inicial:

$$\begin{cases} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = g(t), \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ y y_0, y_1, \dots, y_{n-1} son constantes. Aplicando la transformada de Laplace a dicha ecuación diferencial y teniendo en cuenta la linealidad de la misma tenemos:

$$a_n \mathcal{L} \left\{ \frac{d^n y}{dt^n} \right\} + a_{n-1} \mathcal{L} \left\{ \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \right\} + \dots + a_1 \mathcal{L} \left\{ \frac{dy}{dt} \right\} + a_0 \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{g(t)\}. \quad (2.2)$$

Ahora, aplicando la propiedad IV de la transformada de Laplace vista en el capítulo anterior, la ecuación (2.2) equivale a:

$$\begin{aligned} a_n [p^n Y(p) - p^{(n-1)} y(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)] + a_{n-1} [p^{n-1} Y(p) - p^{(n-2)} y(0) \\ - \dots - y^{(n-2)}(0)] + \dots + a_0 Y(p) = G(p). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Despejando nos quedaría lo siguiente:

$$\begin{aligned} [a_n p^n - a_{n-1} p^{(n-1)} + \dots + a_0] Y(p) = a_n [p^{n-1} y(0) + \dots + y_{n-1}] \\ + a_{n-1} [p^{n-2} y_0 + \dots + y_{n-2}] + \dots + G(p), \end{aligned}$$

donde $Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ y $G(p) = \mathcal{L}\{g(t)\}$. Despejamos $Y(p)$ en (2.3) y ya podemos obtener $y(t)$ mediante la transformada inversa:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\}.$$

Como podemos observar, aplicando este método no hay necesidad de calcular las constantes en la solución general de la ecuación diferencial, ya que ya las incorporamos directamente en la solución.

Ejemplo 2.1. Resolución de una ecuación diferencial de primer grado:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} - 3y = e^{2t}, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Aplicando la transformada en cada lado de ecuación y teniendo en cuenta la linealidad de la misma tenemos:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - 3\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}.$$

Ahora resolvemos cada una de las transformadas que nos quedaban:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = pY(p) - y(0); \quad 3\mathcal{L}\{y\} = 3Y(p) \quad y \quad \mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{p-2}$$

y a continuación sustituimos:

$$pY(p) - 1 - 3Y(p) = \frac{1}{p-2}.$$

Despejamos Y(p) y descomponemos en fracciones parciales:

$$Y(p) = \frac{p-1}{(p-2)(p-3)} = \frac{-1}{p-2} + \frac{2}{p-3}.$$

Y por último utilizamos la transformada inversa para obtener $y(t)$:

$$y(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-2}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-3}\right\} = -e^{2t} + 2e^{3t}.$$

Ejemplo 2.2. Resolución de una ecuación diferencial de segundo grado:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 6. \end{cases} \quad (2.5)$$

Aplicando la transformada en ambos lados de la ecuación y teniendo en cuenta la linealidad:

$$\mathcal{L}\{y''\} - 6\mathcal{L}\{y'\} + 9\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t^2 e^{3t}\}.$$

Procedemos igual que en el caso anterior y resolvemos las transformadas:

$$\mathcal{L}\{y''\} = p^2 Y(p) - py(0) - y'(0); \quad -6\mathcal{L}\{y'\} = -6[pY(p) - y(0)];$$

$$9\mathcal{L}\{y\} = 9Y(p); \quad \mathcal{L}\{t^2 e^{3t}\} = \frac{2}{(p-3)^3}.$$

Sustituimos:

$$p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) - 6[pY(p) - y(0)] + 9Y(p) = \frac{2}{(p-3)^3}$$

y aplicamos las condiciones iniciales y simplificamos:

$$(p^2 - 6p + 9)Y(p) = 2p - 6 + \frac{2}{(p-3)^3} \Rightarrow (p-3)^2 Y(p) = 2(p-3) + \frac{2}{(p-3)^3} \Rightarrow$$

$$Y(p) = \frac{2}{p-3} + \frac{2}{(p-3)^5}.$$

Utilizando ahora la transformada inversa:

$$y(t) = 2\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p-3} \right\} + \frac{2}{4!} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4!}{(p-3)^5} \right\}.$$

Y a diferencia del ejemplo anterior, en este tenemos que aplicar la forma inversa del primer teorema de traslación para resolver lo siguiente:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4!}{p^5} \Big|_{p \rightarrow p-3} \right\} = t^4 e^{3t}.$$

Llegamos así a nuestro resultado:

$$y(t) = 2e^{3t} + \frac{1}{12} t^4 e^{3t}.$$

Se puede aplicar el mismo procedimiento para resolver ecuaciones no lineales, como vamos a ver a continuación.

Ejemplo 2.3. Vamos a resolver la siguiente ecuación no lineal:

$$\begin{cases} xy'' + (3x-1)y' - (4x+9)y = 0, \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Igual que hacíamos en los otros ejemplos, el primer paso es aplicar la transformada en ambos lados de la igualdad y tener en cuenta la linealidad de la misma:

$$\mathcal{L}\{xy''\} + 3\mathcal{L}\{xy'\} - \mathcal{L}\{y'\} - 4\mathcal{L}\{xy\} - 9\mathcal{L}\{y\} = 0. \quad (2.7)$$

Resolvemos cada una de las transformadas:

$$\mathcal{L}\{xy''\} = -\frac{d}{dp}\mathcal{L}\{y''\} = -\frac{d}{dp}[p^2Y(p) - py(0) - y'(0)];$$

$$3\mathcal{L}\{xy'\} - \mathcal{L}\{y'\} = 3 \left[-\frac{d}{dp}\mathcal{L}\{y'\} \right] - [pY(p) - y(0)] = 3 \left[-\frac{d}{dp}[pY(p) - y(0)] \right] - [pY(p) - y(0)];$$

$$4\mathcal{L}\{xy\} - 9\mathcal{L}\{y\} = 4 \left[-\frac{d}{dp}\mathcal{L}\{y\} \right] - 9Y(p) = -4\frac{d}{dp}Y(p) - 9Y(p).$$

Sustituyendo en (2.7) nos queda

$$-\frac{d}{dp}[p^2Y(p) - py(0) - y'(0)] + 3 \left[-\frac{d}{dp}[pY(p) - y(0)] \right] - [pY(p) - y(0)] + 4\frac{d}{dp}Y(p) - 9Y(p) = 0,$$

y aplicando las condiciones iniciales nos queda:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{d}{dp}p^2Y(p) - 3\frac{d}{dp}pY(p) - pY(p) + 4\frac{d}{dp}Y(p) - 9Y(p) = 0 \\
 \Rightarrow & -2pY(p) - p^2\frac{d}{dp}Y(p) - 3Y(p) - 3p\frac{d}{dp}Y(p) - pY(p) + 4\frac{d}{dp}Y(p) - 9Y(p) = 0 \\
 \Rightarrow & (-p^2 - 3p + 4)\frac{d}{dp}Y(p) - (2p + 3 + p + 9)Y(p) = 0 \\
 \Rightarrow & -(p^2 + 3p - 4)\frac{d}{dp}Y(p) = (3p + 12)Y(p) \\
 \Rightarrow & -(p + 4)(p - 1)\frac{d}{dp}Y(p) = 3(p + 4)Y(p) \\
 \Rightarrow & \frac{d}{dp}Y(p) = -\frac{3}{(p - 1)}Y(p).
 \end{aligned}$$

Resolviendo la EDO por variables separadas nos queda

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{Y(p)}dY(p) = -\frac{3}{(p - 1)}dp \\
 \Rightarrow & \int \frac{1}{Y(p)}dY(p) = -\int \frac{3}{(p - 1)}dp + C \\
 \Rightarrow & \log(Y(p)) = -3\log(p - 1) + C = \log((p - 1)^{-3}) + C \\
 \Rightarrow & Y(p) = \frac{1}{(p - 1)^3}e^C = c\frac{1}{(p - 1)^3}
 \end{aligned}$$

y por último, aplicando la transformada inversa

$$y(x) = c \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(p - 1)^3} \right\} = c \frac{e^x x^2}{2} = c x^2 e^x.$$

Capítulo 3

Aplicación a la resolución de EDPs

En este capítulo vamos a ver como aplicar el método de la transformada de Laplace para resolver EDPs, reduciendo el problema inicial a una EDO más simple. Para ello hemos consultado las referencias [4] y [5].

Para una función de dos variables $u = u(x, y)$, la EDP lineal de segundo orden tiene la siguiente forma

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g \quad (3.1)$$

donde a, b, c, d, e, f, g dependen solamente de x e y . La forma de la ecuación 3.1 es semejante a la de una cónica y da lugar a la siguiente clasificación:

- I. elípticas si $b^2 - ac < 0$,
- II. hiperbólicas si $b^2 - ac > 0$,
- III. parabólicas si $b^2 - ac = 0$.

Ejemplo 3.1. Vamos a ver un ejemplo de cada una de ellas:

- La ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.2)$$

donde c es una constante, llamada *difusividad*, y $u(x, t)$ es la temperatura en la posición x y tiempo t , es una ecuación parabólica.

- El movimiento ondulatorio de una cuerda estirada a lo largo del eje x con el extremo izquierdo en el origen puede ser descrito por la siguiente EDP

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad x > 0, t > 0. \quad (3.3)$$

Siendo $y(x, t)$ el desplazamiento transversal en la posición x y en el tiempo t , y la constante a viene dada por $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, donde T es la tensión de la cuerda y ρ su masa por unidad de longitud. Se tiene que la ecuación de ondas es una ecuación de tipo hiperbólico.

- La ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

es elíptica.

Al final del capítulo nos centraremos en la resolución de las dos primeras.

El **Método de la Transformada de Laplace** consiste en considerar la función $u = u(x, t)$ donde $t \geq 0$ es la variable del tiempo. Denotamos por $U(x, p)$ a la transformada de Laplace de u con respecto a t , es decir:

$$U(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t)) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(x, t) dt,$$

donde x es la “variable no transformada”.

Observación 3.2. En lo que sigue de capítulo vamos a dar por ciertas las siguientes hipótesis:

Hipótesis 1

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} e^{-pt} u(x, t) dt = \frac{\partial}{\partial x} U(x, p).$$

En otras palabras, “la transformada de la derivada es la derivada de la transformada”.

Hipótesis 2

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_0^{\infty} e^{-pt} u(x, t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(x_0, t) dt,$$

esto es,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} U(x, p) = U(x_0, p).$$

Además, notemos que en el siguiente contexto la propiedad de la transformada de la derivada vista en el primer capítulo tiene la siguiente forma

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = p\mathcal{L}(u(x, t)) - u(x, 0^+) = pU(x, p) - u(x, 0^+).$$

El método de la transformada de Laplace aplicado a la resolución de EDPs consiste en aplicar primero la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación, como hacíamos en la resolución de EDOs. Esto nos dará lugar a una EDO que involucra a U en función de la variable x . Por ejemplo, veamos como se haría de forma genérica, si tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.4)$$

entonces, aplicando la transformada en ambos lados de la igualdad nos queda

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}$$

y por lo tanto

$$\frac{d}{dx}U(x, p) = pU(x, p) - u(x, 0^+).$$

Y podemos resolver así la EDO obtenida. Si tuviéramos una condición inicial $u(x, 0^+) = x$ para la ecuación (3.2), la solución general vendría dada por

$$U(x, p) = ce^{px} + \frac{x}{p} + \frac{1}{p^2}. \quad (3.5)$$

Los problemas de EDP en entornos físicos suelen venir con una o más condiciones iniciales, supongamos que para (3.2) tenemos la siguiente condición inicial

$$u(0, t) = t.$$

Dado que las condiciones iniciales también expresan u en función de t , suena lógico tomar la transformada de Laplace de dichas condiciones, es decir, en nuestro caso

$$U(0, p) = \mathcal{L}\{u(0, t)\} = \frac{1}{p^2}.$$

Al introducir esto en (3.3) se obtiene $c = 0$, de modo que

$$U(x, p) = \frac{x}{p} + \frac{1}{p^2}.$$

Dado que esta es la transformada de la función que queremos obtener $u(x, t)$, invirtiendo tenemos la solución

$$u(x, t) = x + t.$$

Este simple ejemplo muestra las técnicas básicas involucradas en resolución de ecuaciones en derivadas parciales utilizando la transformada de Laplace.

Ejemplo 3.3. Vamos a ilustrar lo anterior con el siguiente problema:

$$\begin{cases} x \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} + ay = bx^2, & x > 0, t > 0, a, b \text{ constantes}, \\ y(0, t) = 0, \\ y(x, 0^+) = 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Sea $\mathcal{L}\{y(x, t)\} = Y(x, p)$ y tomando la transformada de Laplace en ambos lados de la igualdad tenemos

$$xY_x(x, p) + pY(x, p) - y(x, 0^+) + aY(x, p) = \frac{bx^2}{p},$$

y utilizando una de las condiciones iniciales nos queda

$$x \frac{dY}{dx} + (p + a)Y = \frac{bx^2}{p}$$

o de otro modo,

$$\frac{dY}{dx} + \frac{(p + a)}{x}Y = \frac{bx}{p} \quad (p > 0).$$

Resolvemos la EDO de primer orden utilizando factores de integración y tenemos

$$Y(x, p) = \frac{bx^2}{p(p + a + 2)} + cx^{-(p+a)} \quad (x > 0, p > -a).$$

Tomando ahora la transformada de la condición de frontera inicial nos queda

$$Y(0, p) = \mathcal{L}\{y(0, t)\} = 0,$$

llegando así a que $c = 0$. Por lo tanto,

$$Y(x, p) = \frac{bx^2}{p(p + a + 2)},$$

y por último, invirtiendo nos queda,

$$y(x, t) = \frac{bx^2}{a + 2}(1 - e^{-(a+2)t}).$$

En la figura 3.1 mostramos una representación gráfica de la solución tomando $a = 1$ y $b = 1$ en el rectángulo $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 10], t \in [0, 30]\}$.

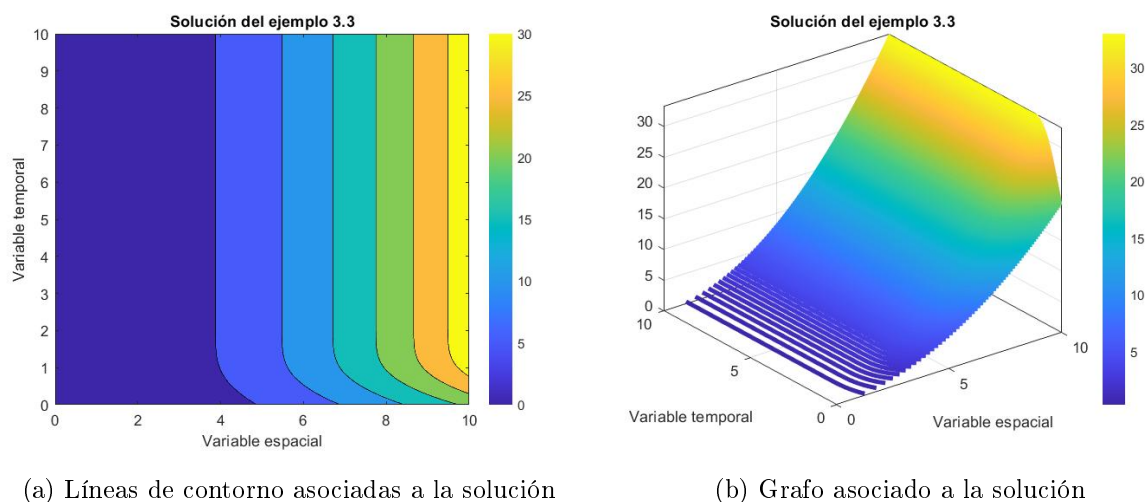


Figura 3.1: Representación gráfica de la solución obtenida $y(x, t) = \frac{bx^2}{a+2}(1 - e^{-(a+2)t})$ en el rectángulo $(x, t) \in [0, 10] \times [0, 30]$.

Ahora, como comentamos al principio del capítulo, nos vamos a centrar en la resolución de la ecuación del calor y la ecuación de ondas. En primer lugar vamos a mencionar el siguiente teorema, que nos será útil a continuación:

Teorema 3.4. *Se tendrá que:*

$$(i) \quad \mathcal{L}^{-1}\{e^{-a\sqrt{p}}\} = \frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t} \quad (a > 0).$$

$$(ii) \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t} \quad (a > 0).$$

Ejemplo 3.5. En este caso, vamos a resolver la ecuación del calor (3.2) para $c=1$, con unas condiciones iniciales dadas, es decir,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

para

$$(i) \quad u(x, 0^+) = 0,$$

$$(ii) \quad u(x, t) = f(t), \quad t > 0,$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0.$$

En primer lugar aplicamos la transformada en los dos lados de la igualdad

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}U(x, p) = pU(x, p) - u(x, 0^+).$$

Aplicando la condición inicial (i) y despejando nos queda una EDO homogénea

$$\frac{d^2}{dx^2}U(x, p) - pU(x, p) = 0$$

cuya solución viene dada por

$$U(x, p) = c_1 e^{\sqrt{p}x} + c_2 e^{-\sqrt{p}x}$$

y en vista de la condición (iii) nos queda

$$U(x, p) = c_2 e^{-\sqrt{p}x}.$$

Ahora, utilizando (ii) tenemos

$$U(0, p) = \mathcal{L}\{u(0, t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(p),$$

por lo que $c_2 = F(p)$ y

$$U(x, p) = F(p)e^{-\sqrt{p}x}.$$

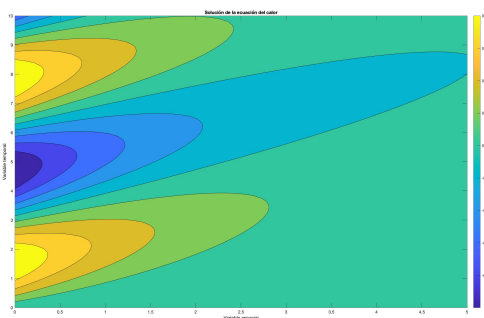
Haciendo uso del Teorema (3.3) que vimos anteriormente y de la convolución, nos queda

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{x}{2\sqrt{\pi\tau^3}} e^{-x^2/4\tau} f(t-\tau) d\tau,$$

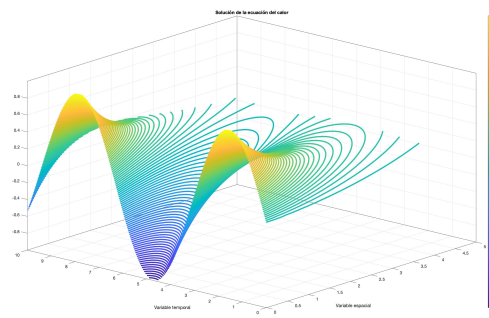
y por último, haciendo la substitución $\sigma^2 = x^2/4\tau$, llegamos a nuestra solución

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\sigma^2} f\left(t - \frac{x^2}{4\sigma^2}\right) d\sigma.$$

En la figura 3.2 mostramos una representación gráfica de la solución tomando $f(t) = \sin(t)$ en el rectángulo $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 10], t \in [0, 5]\}$.



(a) Líneas de contorno asociadas a la solución



(b) Grafo asociado a la solución

Figura 3.2: Representación gráfica de la solución obtenida $u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\sigma^2} \sin\left(t - \frac{x^2}{4\sigma^2}\right) d\sigma$ en el rectángulo $(x, t) \in [0, 10] \times [0, 5]$.

Ejemplo 3.6. Vamos a resolver la ecuación de ondas (3.3) con unas condiciones iniciales concretas.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

para

(i) $y(x, 0^+) = 0, x > 0,$

(ii) $y_t(x, 0^+) = 0, x > 0,$

(iii) $y(0, t) = f(t) (f(0) = 0),$

(iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x, t) = 0.$

Primero aplicamos la transformada en ambos lados de la igualdad

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right\} = \mathcal{L} \left\{ a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} \Rightarrow p^2 Y(x, p) - py(x, 0^+) - \frac{\partial}{\partial t} y(x, 0^+) = a^2 \frac{d^2 Y}{dx^2},$$

que aplicando la condición inicial (i) y despejando nos queda como

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} Y = 0.$$

Resolviendo la EDO homogénea tenemos

$$Y(x, p) = c_1 e^{(p/a)x} + c_2 e^{-(p/a)x}.$$

De la condición (iv) podemos obtener que $c_1 = 0$, por lo tanto

$$Y(x, p) = c_2 e^{-(p/a)x},$$

y por la condición (iii), $Y(0, p) = \mathcal{L}\{y(0, t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$, por lo que $c_2 = F(p)$, y entonces

$$Y(x, p) = F(p) e^{-(p/a)x}.$$

Y por último, invertimos haciendo uso del segundo teorema de traslación, y nos queda lo siguiente

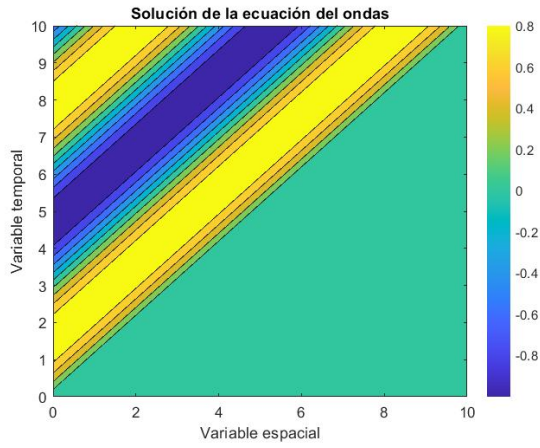
$$y(x, t) = u_{\frac{x}{a}}(t) f\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

o lo que es lo mismo,

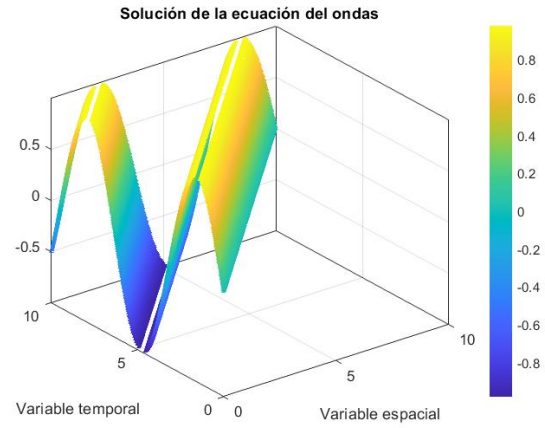
$$y(x, t) = \begin{cases} f\left(t - \frac{x}{a}\right), & t \geq \frac{x}{a}, \\ 0, & t < \frac{x}{a}. \end{cases}$$

Como podemos ver, la cuerda permanece en reposo hasta que el tiempo es $t = \frac{x}{a}$, y a partir de aquí realiza el mismo movimiento que el final en $x = 0$, con un retardo de tiempo de $\frac{x}{a}$.

En la figura 3.3 mostramos una representación gráfica de la solución tomando $f(t) = \sin(t)$ en el rectángulo $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 10], t \in [0, 10]\}$.



(a) Líneas de contorno asociadas a la solución



(b) Grafo asociado a la solución

Figura 3.3: Representación gráfica de la solución obtenida $y(x, t)$ en el rectángulo $(x, t) \in [0, 10] \times [0, 10]$.

Capítulo 4

Aplicación a un problema de dispersión de un contaminante.

En este capítulo abordaremos el estudio de un problema realista asociado a la dispersión de contaminantes en la atmósfera, y para ello nos centraremos en el artículo [7].

En primer lugar vamos a contextualizar un poco dicho problema. Nos vamos a centrar en el estudio de la descripción matemática del transporte de contaminantes en la atmósfera, lo cual recibe el nombre de modelado de dispersión atmosférica. El término dispersión en este contexto se utiliza para describir la combinación de difusión, por el movimiento turbulento de remolinos; y advección, por el efecto del viento; que se da en el aire que está cerca de la superficie de la Tierra. El motivo de que nos interese especialmente este problema es que la concentración de un contaminante liberado en el aire puede describirse mediante la ecuación de advección-difusión, que es una ecuación diferencial parcial de segundo orden de tipo parabólico, como la ecuación del calor 3.2 que veíamos en el capítulo anterior.

La solución exacta más simple para el problema de la dispersión atmosférica recibe el nombre de *Gaussian plume*, que corresponde a una fuente puntual continua que emite contaminantes en un viento unidireccional que sopla en un dominio infinito. Los modelos de *Gaussian plume* se han aplicado en el estudio de emisiones de grandes operaciones industriales, así como en la liberación de cenizas de erupciones volcánicas, dispersión de semillas, polen e insectos o en la propagación de olores de las instalaciones ganaderas. A parte de estos casos, también hay un gran interés en aplicaciones relacionadas con la liberación de contaminantes nucleares y biológicos.

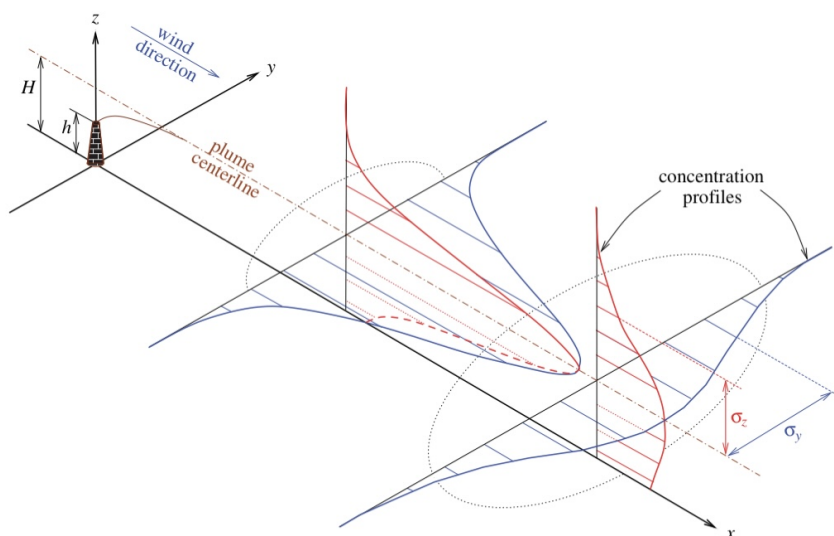


Figura 4.1: Representación gráfica del modelo *Gaussian plume* (Imagen obtenida del artículo [7])

Como podemos ver en la figura 4.2, una pluma contaminante es emitida desde una fuente puntual continua, con la dirección del viento alineada con el eje x . Los perfiles de concentración se dan en dos ubicaciones a favor del viento, en vertical en rojo, y en horizontal en azul, y la forma gaussiana de las secciones transversales de la pluma se muestran con respecto a la línea central, y es por esto que el modelo recibe el nombre de *Gaussian plume*.

4.1. Modelo *Gaussian Plume*

Ahora que ya estamos en contexto, comenzaremos derivando la solución de *Gaussian plume* para la ecuación de advección-difusión, estudiando sus propiedades matemáticas y sacando conclusiones sobre su utilidad y sus limitaciones. El modelo se ilustra utilizando una versión simplificada de un escenario de emisiones industriales real en el que los contaminantes transportados por el aire se liberan de una operación de fundición.

En nuestro caso nos centraremos en el transporte de un solo contaminante, cuya concentración de masa (o densidad) en el lugar $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ y tiempo $t \geq 0$ pueden describirse mediante una función uniforme $C(\vec{x}, t)$. La ley de conservación de la masa para C puede expresarse en forma diferencial como

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = S, \quad (4.1)$$

donde $S(\vec{x}, t)$ es un término fuente o sumidero y la función vectorial \vec{J} representa el flujo de masa de contaminante debido a los efectos combinados de difusión y advección. La difusión del flujo surge del movimiento de remolinos turbulentos en la atmósfera, y se puede suponer que la

difusión atmosférica sigue la ley de Fick, que establece que el flujo de difusión es proporcional al gradiente de concentración o $\vec{J}_D = -\mathbf{K}\nabla C$. El signo negativo nos dice que el contaminante fluye desde las regiones de alta concentración a regiones de baja concentración, y el coeficiente de difusión $\mathbf{K}(\vec{x}) = \text{diag}(K_x, K_y, K_z)$ es una matriz diagonal cuyas entradas son las difusividades de remolinos turbulentos que en general son funciones de posición. La segunda contribución al flujo se debe a la simple advección lineal del viento, que puede expresarse como $\vec{J}_A = C\vec{u}$, donde \vec{u} es la velocidad del viento. Juntando las dos, obtenemos el flujo total $\vec{J} = \vec{J}_D + \vec{J}_A = C\vec{u} - \mathbf{K}\nabla C$, y después de sustituir en la ecuación de la conservación de la masa (4.1) obtenemos la ecuación tridimensional de advección-difusión

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C\vec{u}) = \nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla C) + S. \quad (4.2)$$

El siguiente paso es hacer una serie de hipótesis que daremos por ciertas con el fin de obtener una solución analítica:

- H1. El contaminante se emite a un ritmo constante \mathcal{Q} desde un solo punto fuente $\vec{x} = (0, 0, H)$ situado a una altura H sobre la superficie del suelo. El término fuente puede escribirse de la siguiente manera

$$S(\vec{x}) = \mathcal{Q}\delta(x)\delta(y)\delta(z - H),$$

donde $\delta(\cdot)$ es la función delta de Dirac.

- H2. La velocidad del viento es constante y está alineada con el eje positivo x , de modo que $\vec{u} = (u, 0, 0)$ para alguna constante $u \geq 0$. Más adelante, tomaremos una hipótesis menos restrictiva que nos permita un campo de viento uniforme que varía en el tiempo $\vec{u} = \vec{u}(t)$, con $|\vec{u}| \geq 0$.
- H3. La solución es el estado estacionario, lo cual es razonable ya que la velocidad del viento y los demás parámetros son independientes del tiempo y la escala de tiempo que nos interesa no es suficiente amplia.
- H4. Las difusividades de los remolinos son funciones de la distancia x a favor del viento, y la difusión es isotrópica, por lo tanto, $K_x(x) = K_y(x) = K_z(x) =: K(x)$.
- H5. La velocidad del viento es lo suficientemente alta como para que la difusión en la dirección x sea mucho más pequeña que la advección, así el término $K_x \partial_x^2 C$ puede despreciarse.
- H6. Las variaciones en la topografía son insignificantes, por lo que tomaremos la superficie del suelo como el plano $z = 0$.
- H7. El contaminante no penetra en el suelo.

Una vez visto esto, haciendo uso de las hipótesis H1-H6, la ecuación 4.2 se reduce a

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = K \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + Q \delta(x) \delta(y) \delta(z - H), \quad (4.2a)$$

y solo nos preocupa la solución para los valores de $x, z \in [0, \infty)$ e $y \in (-\infty, \infty)$. Para obtener un problema bien planteado, necesitamos un conjunto apropiado de condiciones de contorno, que serán las siguientes:

$$C(0, y, z) = 0, \quad C(\infty, y, z) = 0, \quad C(x, \pm\infty, z) = 0, \quad C(x, y, \infty) = 0. \quad (4.2b)$$

La primera condición es una consecuencia del viento unidireccional y la hipótesis de que no hay fuentes contaminantes para $x < 0$. Las condiciones restantes en el infinito son consecuentes con el requisito de que la masa total de contaminante debe permanecer finita. De acuerdo con la hipótesis H7, el flujo vertical en el suelo debe desaparecer, lo que nos da la última condición de contorno

$$K \frac{\partial C}{\partial z}(x, y, 0) = 0. \quad (4.2c)$$

Con las condiciones 4.2a, 4.2b y 4.2c, tenemos un problema bien planteado para un estado estable de la concentración de contaminante $C(x, y, z)$.

Una formulación equivalente de este teorema podemos encontrarla eliminando el término fuente de la PDE e introduciendo en su lugar una función delta en las condiciones de contorno:

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = K \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + K \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}, \quad (4.3a)$$

$$C(0, y, z) = \frac{Q}{u} \delta(y) \delta(z - H), \quad (4.3b)$$

$$C(\infty, y, z) = 0, \quad C(x, \pm\infty, z) = 0, \quad C(x, y, \infty) = 0, \quad (4.3c)$$

$$K \frac{\partial C}{\partial z}(x, y, 0) = 0. \quad (4.3d)$$

La demostración de la equivalencia entre los problemas (4.2a)-(4.2c) y (4.3a)-(4.3d), para $x > 0$, la podemos encontrar en [6, p.59]. En nuestro caso utilizaremos esta segunda forma de las ecuaciones para derivar la solución analítica.

4.2. Solución analítica del modelo *Gaussian Plume*

En la mayoría de libros y artículos se presenta la solución de Gaussian plume omitiendo detalles importantes de la derivación y de las hipótesis consideradas. Por ello, en nuestro caso lo vamos a resolver con suficiente detalle para que el problema pueda resolverse generalizando a otras situaciones más complicadas.

Los coeficientes de difusión de remolinos en la capa límite de la atmósfera son funciones fuertes de la distancia a favor del viento, y varían con las condiciones climáticas y el tiempo, por lo que en la práctica son difíciles de determinar, y es por esto que suele reemplazarse x con la nueva variable independiente

$$r = \frac{1}{u} \int_0^x K(\xi) d\xi \quad (4.4)$$

cuyas unidades de medida son los $[m^2]$. Este cambio de variables elimina los coeficientes K que teníamos antes, lo que nos deja el siguiente problema de coeficientes constantes para $c(r, y, z) := C(x, y, z)$:

$$\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (4.5)$$

Las condiciones de contorno para c son idénticas a las de C de 4.3b, 4.3c y 4.3d, con la diferencia de que x se reemplaza por r .

Ahora aplicamos el método de separación de variables a 4.5, suponiendo que la dependencia de la solución de y y z se puede separar de la siguiente manera

$$c(r, y, z) = \frac{Q}{u} a(r, y) \cdot b(r, z). \quad (4.6)$$

Así obtenemos dos problemas de dimensión reducida que tienen forma de ecuaciones de difusión de dos dimensiones:

$$\frac{\partial a}{\partial r} = \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} \text{ para } 0 \leq r < \infty \text{ y } -\infty < y < \infty, \quad (4.7a)$$

$$a(0, y) = \delta(y), \quad a(\infty, y) = 0, \quad a(r, \pm\infty) = 0, \quad (4.7b)$$

$$\frac{\partial b}{\partial r} = \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} \text{ para } 0 \leq r < \infty \text{ y } -\infty < z < \infty, \quad (4.8a)$$

$$b(0, z) = \delta(z - H), \quad b(\infty, z) = 0, \quad b(r, \infty) = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial z}(r, 0) = 0. \quad (4.8b)$$

En ambos problemas, la variable r puede verse como una variable similar al tiempo y así, las condiciones de contorno en $r = 0$ actúan como condiciones iniciales para las respectivas ecuaciones de difusión.

Una vez visto todo esto, podemos pasar a resolver dichos problemas utilizando transformadas de Laplace. Empezamos con el problema para $a(r, y)$ y tomamos la transformada de Laplace de la EDP en r para obtener

$$\rho \hat{a} - a(0, y) = \frac{\partial^2 \hat{a}}{\partial y^2},$$

donde $\hat{a}(\rho, y) := \mathcal{L}_r\{a(r, y)\} = \int_0^\infty e^{-\rho r} a(r, y) dr$ y ρ es la variable transformada. Aplicando la condición de contorno 4.7b, obtenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria para \hat{a} :

$$\frac{\partial^2 \hat{a}}{\partial y^2} - \rho \hat{a} = -\delta(y),$$

y a continuación aplicamos la transformada de Laplace en y ,

$$\eta^2 \hat{\hat{a}} - \eta \hat{\hat{a}}(\rho, 0) - \frac{\partial \hat{\hat{a}}}{\partial y}(\rho, 0) - \rho \hat{\hat{a}} = -1,$$

donde $\hat{\hat{a}}(\rho, \eta) := \mathcal{L}_y\{\hat{a}(\rho, y)\} = \int_0^\infty e^{-\eta y} \hat{a}(\rho, y) dy$ y η es la variable transformada. Esta última ecuación puede resolverse para obtener

$$\hat{\hat{a}}(\rho, \eta) = \frac{\eta c_1 + c_2}{\eta^2 - \rho},$$

donde definimos $c_1 = \hat{a}(\rho, 0)$ y $c_2 = \partial_y \hat{a}(\rho, 0) - 1$. Ahora aplicaremos la transformada inversa en η

$$\begin{aligned} \hat{a}(\rho, y) &= \mathcal{L}_r^{-1} \left\{ \frac{\eta c_1 + c_2}{\eta^2 - \rho} \right\} = c_1 \mathcal{L}_r^{-1} \left\{ \frac{\eta}{\eta^2 - \rho} \right\} - c_2 \mathcal{L}_r^{-1} \left\{ \frac{1}{\eta^2 - \rho} \right\} \\ &= c_1 \mathcal{L}_r^{-1} \left\{ \frac{\eta}{\eta^2 - (\sqrt{\rho})^2} \right\} - c_2 \mathcal{L}_r^{-1} \left\{ \frac{1}{\eta^2 - (\sqrt{\rho})^2} \right\} \\ &= c_1 \cosh(\sqrt{\rho} y) - \frac{c_2}{\sqrt{\rho}} \sinh(\sqrt{\rho} y) \\ &= \frac{c_1}{2} \left[e^{\sqrt{\rho} y} + e^{-\sqrt{\rho} y} \right] - \frac{c_2}{2\sqrt{\rho}} \left[e^{\sqrt{\rho} y} - e^{-\sqrt{\rho} y} \right]. \end{aligned}$$

Para que $\hat{a} \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow \infty$, es necesario que $c_1 = c_2/\sqrt{\rho}$, y así la fórmula anterior para \hat{a} se reduce a

$$\hat{a}(\rho, y) = \frac{c_2}{\sqrt{\rho}} e^{-\sqrt{\rho} y}.$$

Suponiendo que c_2 es independiente de ρ , se puede aplicar la transformada inversa en ρ para obtener $a(r, y) = (c_2/\sqrt{\pi r}) \exp(-y^2/4r)$. Utilizando ahora la función identidad delta $\delta(y) = \lim_{r \rightarrow 0} \exp(-y^2/4r)/\sqrt{4\pi r}$, vemos que $c_2 = \frac{1}{2}$ es una constante y que

$$a(r, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi r}} e^{-y^2/4r}. \quad (4.9)$$

Hasta ahora nos restringimos a valores de $0 < y < \infty$ para aplicar las transformadas de Laplace. Sin embargo, el problema original 4.7a-4.7b claramente tiene simetría uniforme sobre $y = 0$, y dado que la solución 4.9 también es una función par, entonces podemos extender el dominio para $a(r, y)$ a $y \in (-\infty, \infty)$.

Pasamos ahora a la solución de 4.8a y 4.8b para $b(\rho, z)$ y aplicamos la transformada de Laplace en r de la PDE para obtener

$$\frac{\partial^2 \hat{b}}{\partial z^2} - \rho \hat{b} = -\delta(z - H),$$

donde $\hat{b}(\rho, z) := \mathcal{L}_r\{b(r, z)\} = \int_0^\infty e^{-\rho r} b(r, z) dr$. Tomando la transformada de Laplace en z y definiendo $\hat{\hat{b}}(\rho, \zeta) := \mathcal{L}_z\{\hat{b}(\rho, z)\}$, tenemos

$$\zeta^2 \hat{\hat{b}} - \zeta \hat{b}(\rho, 0) - \frac{\partial \hat{b}}{\partial z}(\rho, 0) - \rho \hat{\hat{b}} = -e^{-\zeta H}.$$

Después de aplicar la condición de frontera de tipo Neumann $\partial_z \hat{b}(\rho, 0) = 0$, podemos resolver

$$\hat{\hat{b}}(\rho, \zeta) = \frac{\zeta \hat{b}(\rho, 0) - e^{-\zeta H}}{\zeta^2 - \rho}$$

y aplicar la transformada inversa en ζ

$$\begin{aligned} \hat{b}(\rho, \zeta) &= \mathcal{L}_r^{-1} \left\{ \frac{\zeta \hat{b}(\rho, 0) - e^{-\zeta H}}{\zeta^2 - \rho} \right\} = \hat{b}(\rho, 0) \mathcal{L}_r^{-1} \left\{ \frac{\zeta}{\zeta^2 - \rho} \right\} - \mathcal{L}_r^{-1} \left\{ \frac{e^{-\zeta H}}{\zeta^2 - \rho} \right\} \\ &= \hat{b}(\rho, 0) \mathcal{L}_r^{-1} \left\{ \frac{\zeta}{\zeta^2 - (\sqrt{\rho})^2} \right\} - \mathcal{L}_r^{-1} \left\{ \frac{e^{-\zeta H}}{\zeta^2 - (\sqrt{\rho})^2} \right\} \\ &= \hat{b}(\rho, 0) \cosh(\sqrt{\rho} z) - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sinh(\sqrt{\rho}(z - H)). \end{aligned}$$

Ahora, imponemos la condición de que $\hat{b} \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$, lo que quiere decir que $\hat{b}(\rho, 0) = \exp(-\sqrt{\rho}H)/\sqrt{\rho}$, y por lo tanto

$$\hat{b}(\rho, z) = \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \left(e^{-\sqrt{\rho}(z-H)} + e^{-\sqrt{\rho}(z+H)} \right)$$

Y finalmente, aplicando la transformada inversa en ρ se obtiene

$$b(r, z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi r}} \left(e^{-(z-H)^2/4r} + e^{-(z+H)^2/4r} \right). \quad (4.10)$$

Sabiendo esto, ya podemos determinar la concentración del contaminante sustituyendo 4.9 y 4.10 en 4.6 :

$$c(r, y, z) = \frac{\Omega}{4\pi ur} \exp\left(-\frac{y^2}{4r}\right) \left[\exp\left(-\frac{(z-H)^2}{4r}\right) + \exp\left(-\frac{(z+H)^2}{4r}\right) \right]. \quad (4.11)$$

Esta ecuación se conoce comúnmente como la solución de *Gaussian plume* para la ecuación de advección-difusión, debido a que la dependencia exponencial de y y z es similar a la de una función de tipo gaussiano.

Ejemplo 4.1. En el caso de considerar $K(x) = K$ constante, se tiene que la expresión (4.4) se reduce a:

$$r = \frac{1}{u} \int_0^x K d\xi = \frac{Kx}{u}$$

por lo tanto, la solución del modelo Gaussiano (4.11) quedaría:

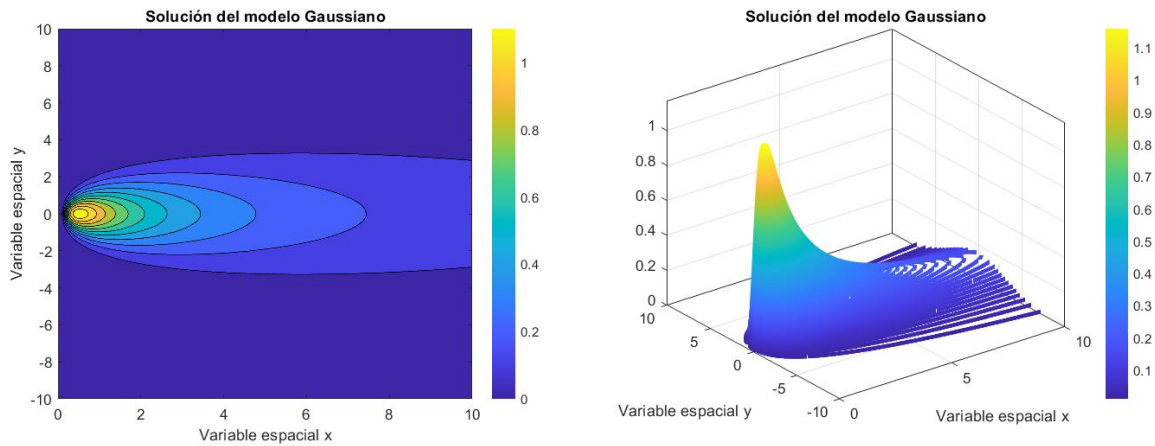
$$c(x, y, z) = \frac{\Omega}{4\pi Kx} \exp\left(-u \frac{y^2}{4Kx}\right) \left[\exp\left(-u \frac{(z-H)^2}{4Kx}\right) + \exp\left(-u \frac{(z+H)^2}{4Kx}\right) \right].$$

En particular, para $z = 0$, tenemos:

$$c(x, y, 0) = \frac{\Omega}{2\pi Kx} \exp\left(-u \frac{y^2 + H^2}{4Kx}\right).$$

A continuación mostramos algunas gráficas con el comportamiento de la solución considerando los siguientes datos:

$$\Omega = 10.0, K = 1.0, H = 1.0, u = 2.0.$$



(a) Líneas de contorno asociadas a la solución

(b) Grafo asociado a la solución

Figura 4.2: Representación gráfica de la solución obtenida $c(x, y, 0) = \frac{\Omega}{2\pi Kx} \exp\left(-u \frac{y^2 + H^2}{4Kx}\right)$ en el rectángulo $(x, y) \in [0, 10] \times [-10, 10]$.

Anexo A

Códigos de Matlab desarrollados

En este apéndice listamos los códigos desarrollados en Matlab que hemos empleado para la realización de las gráficas 3.1, 3.2, 3.3 y 4.2.

- Código para la gráfica 3.1.

```
% *****
% Script de Matlab para graficar la solución del
% ejemplo 5.4 del libro:
%
% Joel L. Schiff. The Laplace transform. Undergraduate
% Texts in Mathematics. Springer- Verlag, New York, 1999.
% Theory and applications
%
% Alba Rey Santiago, 17/06/2021
% *****

clear all
format long e

% Parte 1.- Parametros modificables por el usuario
% -----

% Definimos algunos parametros que emplearemos
Tmin=0; % Tiempo inicial
Tmax=10; % Tiempo final de la simulacion
```

```

Xmin=0; % x inicial
Xmax=10; % x final
ndivT=100; % Numero de divisiones de la unidad para el mallado temporal
ndivX=100; % Numero de divisiones de la unidad para el mallado espacial
a=1.0;
b=1.0;

% Declaramos la función asociada a las condiciones de frontera
%syms t;
f=@(x,t) (b*x.^2)./(a+2).*(1-exp(-(a+2).^t));

% Parte 2.- Codigo asociado a la representacion grafica
% -----

% Generamos el mallado para la representacion grafica
tt=linspace(Tmin,Tmax,ndivT*(Tmax-Tmin));
xx=linspace(Xmin,Xmax,ndivX*(Xmax-Xmin));
[TT,XX] = meshgrid(tt,xx);
nval=size(TT);
usol=zeros(nval);

% Evaluamos la funcion en los nodos del mallado
for i=1:nval(1) % Bucle en tiempo
    for j=1:nval(2) % Bucle en espacio
        % Comprobamos si TT(i,j)>=XX(i,j)/a
        % if(TT(i,j)>=XX(i,j)/a)
        %     usol(i,j)=f(TT(i,j)-XX(i,j)/a);
        % else
        usol(i,j)=f(XX(i,j),TT(i,j));
    end
end

% Realizamos la representacion grafica
figure
contourf(XX,TT,usol);
title('Solución del ejemplo 3.3')
xlabel('Variable espacial')
ylabel('Variable temporal')

```

```

colorbar
pause

figure
[M,c] = contour3(XX,TT,usol,100);
c.LineWidth = 3;
title('Solución del ejemplo 3.3')
xlabel('Variable espacial')
ylabel('Variable temporal')
colorbar

```

- Código para la gráfica 3.2.

```

% *****
% Script de Matlab para graficar la solución de la ecuación
% del calor del ejemplo 5.6 del libro:
%
% Joel L. Schiff. The Laplace transform. Undergraduate
% Texts in Mathematics. Springer- Verlag, New York, 1999.
% Theory and applications
%
% Alba Rey Santiago, 17/06/2021
% *****

clear all
format long e

% Parte 1.- Parametros modificables por el usuario
% -----

% Definimos algunos parametros que emplearemos
Tmin=0; % Tiempo inicial
Tmax=10; % Tiempo final de la simulacion
Xmin=0; % x inicial
Xmax=5; % x final
ndivT=10; % Numero de divisiones de la unidad para el mallado temporal
ndivX=10; % Numero de divisiones de la unidad para el mallado espacial

```

```

% Declaramos la función asociada a las condiciones de frontera
syms t;
f=@(t) cos(t).*sin(t);

% Parte 2.- Codigo asociado a la representacion grafica
% -----

% Declaramos la funcion que luego tenemos que integrar
syms x sigma;
fun=@(x,t,sigma) (2/sqrt(pi))*exp(-sigma.^2).*f(t-x^2./(4*sigma.^2));

% Generamos el mallado para la representacion grafica
tt=linspace(Tmin,Tmax,ndivT*(Tmax-Tmin));
xx=linspace(Xmin,Xmax,ndivX*(Xmax-Xmin));
[TT,XX] = meshgrid(tt,xx);
nval=size(TT);
usol=zeros(nval);

% Evaluamos la funcion en los nodos del mallado
for i=1:nval(1) % Bucle en tiempo
    for j=1:nval(2) % Bucle en espacio
        % Comprobamos si el tiempo es cero
        if(TT(i,j)==0)
            usol(i,j)=0.0;
        else
            % Calculamos el valor de la integral en el nodo
            usol(i,j)=integral(@(sigma) ...
                fun(XX(i,j),TT(i,j),sigma),XX(i,j)/(2*sqrt(TT(i,j))),1.e4);
        end
    end
end

% Realizamos la representacion grafica
figure
contourf(XX,TT,usol);
title('Solución de la ecuación del calor')
xlabel('Variable espacial')
ylabel('Variable temporal')

```

```

colorbar
pause

figure
[M,c] = contour3(XX,TT,usol,100);
c.LineWidth = 3;
title('Solución de la ecuación del calor')
xlabel('Variable espacial')
ylabel('Variable temporal')
colorbar

```

- Código para la gráfica 3.3.

```

% *****
% Script de Matlab para graficar la solución de la ecuación
% de ondas del ejemplo 5.9 del libro:
%
% Joel L. Schiff. The Laplace transform. Undergraduate
% Texts in Mathematics. Springer- Verlag, New York, 1999.
% Theory and applications
%
% Alba Rey Santiago, 17/06/2021
% *****

clear all
format long e

% Parte 1.- Parametros modificables por el usuario
% -----

% Definimos algunos parametros que emplearemos
Tmin=0; % Tiempo inicial
Tmax=10; % Tiempo final de la simulacion
Xmin=0; % x inicial
Xmax=10; % x final
ndivT=100; % Numero de divisiones de la unidad para el mallado temporal
ndivX=100; % Numero de divisiones de la unidad para el mallado espacial
a=1.0; % Termino asociado a la ecuacion de ondas

```

```

% Declaramos la función asociada a las condiciones de frontera
%syms t;
f=@(t) sin(t);

% Parte 2.- Código asociado a la representación gráfica
% -----

% Generamos el malla para la representación gráfica
tt=linspace(Tmin,Tmax,ndivT*(Tmax-Tmin));
xx=linspace(Xmin,Xmax,ndivX*(Xmax-Xmin));
[TT,XX] = meshgrid(tt,xx);
nval=size(TT);
usol=zeros(nval);

% Evaluamos la función en los nodos del malla
for i=1:nval(1) % Bucle en tiempo
    for j=1:nval(2) % Bucle en espacio
        % Comprobamos si  $TT(i,j) \geq XX(i,j)/a$ 
        if(TT(i,j) >= XX(i,j)/a)
            usol(i,j) = f(TT(i,j) - XX(i,j)/a);
        else
            usol(i,j) = 0.0;
        end
    end
end

% Realizamos la representación gráfica
figure
contourf(XX,TT,usol);
title('Solución de la ecuación del ondas')
xlabel('Variable espacial')
ylabel('Variable temporal')
colorbar
pause

figure
[M,c] = contour3(XX,TT,usol,100);

```

```
c.LineWidth = 3;
title('Solución de la ecuación del ondas')
xlabel('Variable espacial')
ylabel('Variable temporal')
colorbar
```

- Código para la gráfica 4.2.

```
% *****
% Script de Matlab para graficar la solucion en el plano
% z=0 del modelo Gaussian Plume deducido en
%
% J. Stockie. The mathematics of atmospheric dispersion
% modeling. SIAM Review, 53(2):349-372, 2011.
%
% Alba Rey Santiago, 29/06/2022
% *****

clear all
format long e

% Parte 1.- Parametros modificables por el usuario
% -----

% Definimos algunos parametros que emplearemos
Xmin=0.0; % x inicial
Xmax=10; % x final
Ymin=-10.0; % y inicial
Ymax=10; % y final

ndivX=100; % Numero de divisiones de la unidad para el mallado espacial
ndivY=100; % Numero de divisiones de la unidad para el mallado espacial

% Parametros necesarios
Q=10.0;
K=1.0;
H=1.0;
u=2.0;
```

```
% Declaramos la funcion asociada a la solucion
f=@(x,y) Q*exp(-u*(y.^2+H^2)./(4*K*x))./(2*pi*K*x);

% Parte 2.-Codigo asociado a la representacion grafica
% -----

% Generamos el mallado para la representacion grafica
xx=linspace(Xmin,Xmax,ndivX*(Xmax-Xmin));
yy=linspace(Ymin,Ymax,ndivY*(Ymax-Ymin));

[XX,YY] = meshgrid(xx,yy);
nval=size(XX);
usol=zeros(nval);

% Evaluamos la funcion en los nodos del mallado
for i=1:nval(1) % Bucle en tiempo
    for j=1:nval(2) % Bucle en espacio
        % Comprobamos si el tiempo es cero
        if(XX(i,j)==0)
            usol(i,j)=0.0;
        else
            % Calculamos el valor de la integral en el nodo
            usol(i,j)=f(XX(i,j),YY(i,j));
        end
    end
end

end

% Realizamos la representacion grafica
figure
contourf(XX,YY,usol);
title('Solución del modelo Gaussiano')
xlabel('Variable espacial x')
ylabel('Variable espacial y')
colorbar
pause

figure
```

```
[M,c] = contour3(XX,YY,usol,100);  
c.LineWidth = 3;  
title('Solución del modelo Gaussiano')  
xlabel('Variable espacial x')  
ylabel('Variable espacial y')  
colorbar
```


Bibliografía

- [1] Alberto Cabada. An alternative explicit expression of the kernel of the one dimensional heat equation with dirichlet conditions. *Applied Mathematics Letters*, 89(4):97–102, 2019.
- [2] A.M. Cohen. *Numerical Methods for Laplace Transform Inversion*. Numerical Methods and Algorithms. Springer US, 2007.
- [3] Brian Davies. *Integral Transforms and Their Applications*. Texts in Applied Mathematics 41. Springer-Verlag New York, 3 edition, 2002.
- [4] Joel L. Schiff. *The Laplace transform*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1999. Theory and applications.
- [5] G. F. Simmons. *Differential equations with applications and historical notes*. Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2017. Third edition.
- [6] Ivar Stakgold. *Boundary value problems of mathematical physics. Vol. II*. The Macmillan Company, New York; Collier-Macmillan Ltd., London, 1968.
- [7] J. Stockie. The mathematics of atmospheric dispersion modeling. *SIAM Review*, 53(2):349–372, 2011.
- [8] D.G. Zill and F.S. Fragoso. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Thomson, 2007.