



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

La ecuación del calor

Cecilia Villar Martínez

2018/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

La ecuación del calor

Cecilia Villar Martínez

Julio 2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área del Conocimiento: Análisis Matemático
Título: La ecuación del calor
Breve descripción del contenido
<p>Se trata de llevar a cabo un estudio sobre modelos matemáticos que emplean la ecuación del calor en distintas dimensiones espaciales, obteniendo las expresiones de las soluciones.</p> <p>El caso unidimensional tratado en el tercer curso del Grado en Matemáticas de la USC servirá como punto de partida y motivación para el análisis de los casos en dimensión superior. Entre las herramientas que se emplearán para llevar a cabo el estudio de la ecuación se incluyen las soluciones autosimilares y las series y la transformada de Fourier.</p> <p>Se empleará el ordenador para la realización de cálculos y representaciones gráficas, para el cual se usará el software que el alumno o alumna escoja.</p>

Índice general

Resumen	VII
Introducción	IX
1. La ecuación del calor en el caso unidimensional	1
1.1. Deducción de la ecuación del calor en una dimensión	2
1.2. Una solución del problema con condiciones de frontera de tipo Dirichlet . . .	5
1.3. Una solución del problema con condiciones de frontera de tipo Neumann . . .	8
1.4. El principio del máximo para la ecuación del calor unidimensional	9
1.5. Resolución de un problema bidimensional con series de Fourier dobles	10
2. La ecuación del calor en \mathbb{R}^N.	15
2.1. Núcleo de Gauss. Construcción de soluciones.	15
2.2. Principio del máximo en dominios acotados. Unicidad de solución	28
2.3. Problema no homogéneo.	32
3. Conclusiones	39
Bibliografía	41

Resumen

En este trabajo estudiamos el cálculo de soluciones de la ecuación del Calor, primero desde un punto de vista sencillo, el caso unidimensional y posteriormente el caso n -dimensional.

Para realizar el cálculo de soluciones en el contexto unidimensional empleamos series de Fourier, mientras que para el caso de dimensiones superiores utilizamos la transformada de Fourier. Una vez obtenida la solución, probamos la unicidad aplicando el principio del máximo. En el caso n -dimensional es necesario restringir el problema a funciones acotadas, de forma que sea posible aplicar el principio del máximo.

Por último, realizamos una representación gráfica de algunas soluciones con el software matemático Maple, con el objetivo de que el lector pueda visualizar cómo son las soluciones de los distintos problemas estudiados.

Abstract

In this work we will study how to solve the heat conduction problem, first from a simple approach, in the one-dimensional context. Afterwards, the n -dimensional case will be analyzed.

In order to obtain the corresponding solutions in the one-dimensional setting, Fourier series will be employed, whereas the Fourier Transform will be used for higher dimensions. Once a solution is obtained, we will prove its uniqueness by applying the maximum principle. In the n -dimensional context, it will be necessary to restrict the problem to bounded functions, so that it is possible to apply the maximum principle.

Lastly, we will show some of the solutions by graphically representing them with the mathematical software Maple, with the objective of providing a better visualization of the solutions for the different problems studied.

Introducción

Dentro del curso de series de Fourier y ecuaciones en derivadas parciales se profundiza en tres ejemplos fundamentales. Uno de ellos es la ecuación del calor ya que ésta permite ejemplificar los conceptos necesarios para un primer acercamiento a las ecuaciones diferenciales parciales. Jean Baptise Joseph Fourier (1768-1830) presentó los primeros resultados referentes a la ecuación del calor, inspirándose en los trabajos realizados por Daniel Bernoulli (1700-1782), para dar solución a la ecuación de ondas. El trabajo desarrollado por Fourier no quedó limitado solamente a la solución de la ecuación del calor, sino que también motivó el comienzo de una nueva rama matemática como es el análisis de Fourier (ver Ibarra, 2014).

El objetivo del presente trabajo es estudiar algunos modelos matemáticos que permiten obtener las expresiones de las soluciones de la ecuación del calor en distintas dimensiones espaciales y analizar algunas propiedades de las soluciones encontradas.

En el primer capítulo, partiendo de la consideración del fenómeno físico que pretende ser modelado con esta ecuación, haremos la deducción de la ecuación del calor unidimensional. Posteriormente, utilizaremos el método de separación de variables para encontrar una primera solución a la ecuación del calor, tanto para el caso en el que el problema tenga condiciones de frontera de tipo Dirichlet, como para el caso en el que el problema tenga condiciones de frontera de tipo Neumann. Por otra parte, mostraremos también un resultado referente a la regularidad de la solución encontrada. Para concluir este capítulo, resolveremos el caso particular de un problema bidimensional con series de Fourier dobles y representaremos gráficamente la solución obtenida.

En el segundo capítulo estudiaremos una solución del problema en dimensiones superiores haciendo uso de la transformada de Fourier. Para finalizar este capítulo estudiaremos la existencia y unicidad de las soluciones encontradas por este método. Obtendremos resultados que podrán ser aplicados a las soluciones encontradas en el primer capítulo, utilizando las hipótesis apropiadas.

Finalmente, en el tercer capítulo se presentarán las principales conclusiones del trabajo.

Capítulo 1

La ecuación del calor en el caso unidimensional

La ecuación del calor unidimensional es una ecuación en derivadas parciales que describe las variaciones de temperatura en una varilla a lo largo del tiempo.

Una ecuación en derivadas parciales es una relación expresada por una igualdad en la cual figuran una o varias derivadas parciales de una función desconocida con más de una variable independiente. Cuando la función incógnita depende sólo de dos variables independientes, ésta es de la forma

$$A(x, t)u_{xx} + B(x, t)u_{xt} + C(x, t)u_{tt} + D(x, t)u_x + E(x, t)u_t + F(x, t)u = G(x, t),$$

donde A , B , C y D son funciones de dos variables que dependen de x y de t , u_{xx} (resp. u_{tt}) es la derivada parcial segunda de la función incógnita $u = u(x, t)$ con respecto a x (resp. t) dos veces, u_x (resp. u_t) es la derivada parcial primera de la función incógnita $u = u(x, t)$ con respecto a x (resp. t) una vez y u_{xt} es la derivada parcial segunda de la función incógnita $u = u(x, t)$ con respecto a x y luego con respecto a t .

Si $G(x, t) = 0$, la ecuación se denomina homogénea. Estas ecuaciones se clasifican en varios tipos. En concreto, la ecuación que se estudia en este trabajo es de tipo parabólico. Se dice que una ecuación es de este tipo si es homogénea y además $B^2 - 4AC = 0$.

En la ecuación del calor se tiene

$$B(x, t) = C(x, t) = D(x, t) = F(x, t) = 0 \quad \forall x, t$$

y

$$A(x, t) = a \quad \forall x, t,$$

donde $a > 0$ es un dato. Por lo tanto la ecuación del calor es de la forma

$$u_t - au_{xx} = 0. \tag{1.1}$$

Esta ecuación es de orden uno en tiempo, por consiguiente, solo tendrá una condición inicial.

En la Sección 1.1 veremos cómo se obtiene la ecuación (1.1) teniendo en cuenta determinados principios físicos. Las ideas reflejadas en este capítulo estarán guiadas por Iorio y Magallaës (2001), Apostol (1976), Peral-Alonso (2014) y Mizohata (1973).

1.1. Deducción de la ecuación del calor en una dimensión

Consideramos un objeto en 3 dimensiones a través del cual puede fluir el calor. La temperatura u varía respecto al tiempo t y respecto a las coordenadas (x, y, z) en el espacio. Nuestro objetivo es describir de manera explícita la función u y para ello hacemos una reconstrucción del trabajo realizado por el físico-matemático Jean-Baptiste Fourier.

Fourier afirma que por medio del flujo de calor en un objeto y de la consideración de algunos principios físicos propios de la temperatura, es posible mostrar que la función u satisface la llamada ecuación del calor:

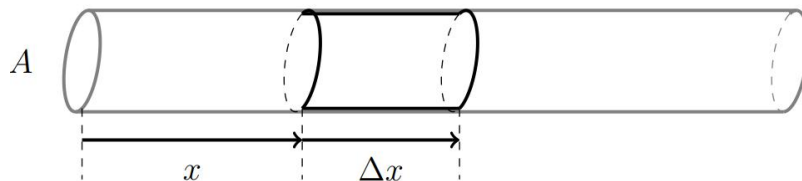
$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_t,$$

donde α depende de la conductividad térmica del objeto, de su densidad y el calor específico del material del que está hecho el objeto. Realizamos una reconstrucción para el caso unidimensional basándonos en el enfoque expuesto por Simmons (1991).

Tenemos en cuenta los siguientes principios físicos:

1. La cantidad de calor ganado o perdido por un objeto cuando su temperatura cambia, es decir, el cambio en la energía térmica, es proporcional a la masa del objeto y al cambio de temperatura (este factor de proporcionalidad se denota por c y es llamado calor específico de la sustancia).
2. La rapidez de cambio con la cual fluye el calor a través de un área es proporcional al área y a la rapidez de cambio de la temperatura con respecto a la distancia en dirección perpendicular al área. (este factor de proporcionalidad se denota por k y es llamado conductividad térmica de la sustancia.)
3. El flujo de calor va de una región caliente a una menos caliente.

Consideramos ahora el flujo de calor dentro de una barra cilíndrica delgada cuya sección transversal tiene área A , como se ve reflejado en la Figura 1.1

Figura 1.1: Barra cilíndrica con sección transversal de área A .

El flujo de calor no circula fuera de la barra si la superficie está completamente aislada, y por tanto, la temperatura sólo depende de la posición sobre el eje x y el tiempo t . Es decir, es de la forma $u = u(x, t)$.

Por otra parte, supongamos también que no se está generando calor dentro de la barra, así que la cantidad de calor ganada depende sólo del flujo de calor que pasa a través de las caras de la barra.

Estudiamos la rapidez de cambio de la cantidad de calor almacenada en el trozo de barra dado por las posiciones x y $x + \Delta x$. Si denotamos la densidad de este trozo de la barra por ρ , entonces la masa de dicho trozo viene dada por

$$\Delta m = \rho A \Delta x.$$

Además, si denotamos por Δu el cambio de temperatura en el punto x en un intervalo de tiempo pequeño Δt , entonces, aplicando el principio 3 tenemos que la cantidad de calor almacenada durante este periodo de tiempo está dada por

$$\Delta H = c \Delta m \Delta u = c \rho A \Delta x \Delta u.$$

A partir de lo anterior se tiene que la rapidez con la que el calor es almacenado es aproximadamente

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} = c \rho A \Delta x \frac{\Delta u}{\Delta t}. \quad (1.2)$$

Aplicamos ahora el principio 2 y tenemos que la rapidez con la que fluye el calor a través de la cara izquierda está dada por

$$k A u_x |_{x}.$$

Análogamente, para la cara derecha tenemos que

$$k A u_x |_{x+\Delta x}.$$

Por tanto, la variación total en el trozo de barra considerado es

$$k A u_x |_{x+\Delta x} - k A u_x |_{x}. \quad (1.3)$$

Si combinamos las ecuaciones (1.2) y (1.3) obtenemos

$$\frac{k}{c\rho} \left(\frac{u_x|_{x+\Delta x} - u_x|_x}{\Delta x} \right) = \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Haciendo $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$ tenemos

$$a^2 u_{xx} = u_t, \tag{1.4}$$

donde $\alpha^2 = \frac{k}{c\rho}$, y (1.4) es la ecuación del calor para el caso unidimensional. Así, denotando $\alpha^2 = a$ consideramos problemas de valores iniciales del siguiente tipo

$$u_t - au_{xx} = 0 \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \tag{1.5}$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in [0, L], \tag{1.6}$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0. \tag{1.7}$$

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0. \tag{1.8}$$

$$u(-L, t) = u(L, t) \quad \forall t \geq 0 \tag{1.9}$$

$$u_x(-L, t) = u_x(L, t) \quad \forall t \geq 0 \tag{1.10}$$

La solución $u(x, t)$ representa la temperatura de la varilla en el punto x y en el tiempo t . La función u debe satisfacer las tres condiciones (1.5), (1.6) y (1.7) o (1.8) o (1.9) y (1.10). La primera es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden. La segunda representa la distribución inicial de temperatura y la tercera significa que la temperatura en los extremos de la varilla considerada se mantiene en 0° .

Esta última condición también nos permite reconocer el tipo problema, siendo así un problema con condiciones de frontera tipo Dirichlet (véase (1.7)), condiciones tipo Neumann (véase (1.8)) o condiciones de frontera periódicas (véase (1.9) y (1.10)).

Se dice que una condición de frontera es de tipo Dirichlet cuando en una ecuación en derivadas parciales se especifican los valores de la solución que necesita la frontera del dominio. Por otra parte, se dice que una condición de frontera es de tipo Neuman cuando en una ecuación en derivadas parciales se especifican los valores de la derivada de una solución tomada sobre el contorno del dominio. Un tercer tipo de condición son las condiciones de frontera periódicas, que consisten en imponer que las funciones u y u_x tengan el mismo valor en los dos extremos del intervalo $[0, L]$. Por último, existen condiciones de frontera de tipo mixto, que consisten en considerar una condición de tipo Dirichlet en un extremo y una condición de tipo Neumann en el otro.

En este capítulo nos centramos en la resolución de problemas en el caso unidimensional con condiciones de frontera tipo Dirichlet y tipo Neumann, ya que en los siguientes capítulos

nos centramos en resolver estos problemas en dimensiones superiores. El caso en el que las condiciones de frontera sean de tipo periódico o de tipo mixto no resulta de gran interés puesto que solo se considera en el caso unidimensional.

1.2. Una solución del problema con condiciones de frontera de tipo Dirichlet

En esta sección consideramos el problema del tipo

$$\begin{aligned}u_t - au_{xx} &= 0 \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\u(x, 0) &= f(x) \quad \forall x \in [0, L], \\u(0, t) = u(L, t) &= 0 \quad \forall t \geq 0.\end{aligned}$$

y lo resolvemos por el Método de Fourier.

Método de Fourier para problemas de tipo Dirichlet.

En este apartado resolvemos el problema considerado en la sección 1.2 aplicando el método de Fourier. La resolución se lleva a cabo en tres etapas.

Etapa 1. Aplicamos el método de separación de variables a la parte homogénea del problema, esto es, el problema (1.5)-(1.7), que consiste en hallar soluciones no nulas y de la forma

$$u(x, t) = v(x)w(t). \quad (1.11)$$

Primero calculamos $u_t(x, t) = v(x)w'(t)$ y $u_{xx}(x, t) = v''(x)w(t)$. Sustituyendo estas ecuaciones en (1.5) obtenemos

$$v(x)w'(t) - av''(x)w(t) = 0 \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty),$$

de donde se sigue que

$$v(x)w'(t) = av''(x)w(t) \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times (0, \infty). \quad (1.12)$$

Por lo tanto, deben existir $x_0 \in [0, L]$, $t_0 \in (0, \infty)$ tales que $v(x_0) \neq 0$ y $w(t_0) \neq 0$. Consideramos $(x, t) = (x_0, t_0)$ en (1.12) obteniendo como resultado

$$v(x_0)w'(t_0) = av''(x_0)w(t_0).$$

Como $v(x_0) \neq 0 \neq w(t_0)$, podemos despejar obteniendo

$$\frac{w'(t_0)}{aw(t_0)} = \frac{v''(x_0)}{v(x_0)}.$$

Ahora denotamos

$$\frac{w'(t_0)}{aw(t_0)} = \frac{v''(x_0)}{w(t_0)} = \lambda_0.$$

Sustituyendo en (1.12) $t = t_0$ obtenemos una ecuación diferencial para v ,

$$v(x)w'(t_0) = av''(x)w(t_0) \quad \forall x \in [0, L].$$

Despejando $v''(x)$ tenemos

$$v''(x) = \frac{w'(t_0)}{aw(t_0)}v(x) = \lambda_0v(x) \quad \forall x \in [0, L].$$

Análogamente, sustituyendo en (1.12), $x = x_0$, deducimos

$$v(x_0)w'(t) = av''(x_0)w(t) \quad t > 0,$$

y despejando $w'(t)$ llegamos a

$$w'(t) = \frac{av''(x_0)w(t)}{v(x_0)} = a\lambda_0w(t) \quad \forall t > 0.$$

En conclusión, si $u(x, t) = v(x)w(t)$ es solución no nula de (1.5), entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que v y w son soluciones no nulas de

$$v''(x) = \lambda v(x) \tag{1.13}$$

$$w'(t) = a\lambda w(t) \tag{1.14}$$

Por otra parte si $u(x, t) = v(x)w(t)$ verifica (1.7) tenemos

$$0 = u(0, L) = v(0)w(t) \quad \forall t > 0, \tag{1.15}$$

y como w debe ser distinta de cero en algún punto, debe ser

$$v(0) = 0. \tag{1.16}$$

Además de (1.15), también tenemos que

$$0 = u(L, t) = v(L)w(t) \quad \forall t \geq 0, \tag{1.17}$$

y por un razonamiento análogo obtenemos la segunda condición

$$v(L) = 0. \tag{1.18}$$

Después de haber obtenido las condiciones (1.16) y (1.18), resolvemos el problema de autovalores y autofunciones, que consiste en hallar todos los $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que (1.14)

1.2. UNA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA CON CONDICIONES DE FRONTERA DE TIPO DIRICHLET7

y la ecuación (1.13), con las condiciones de frontera (1.16) y (1.18), tienen soluciones no triviales. Además, construimos una base del espacio de soluciones hallando para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ funciones v y w no nulas tales que definiendo la función producto nos da una solución del problema homogéneo. Como siempre, la búsqueda de autovectores comienza por la búsqueda de autovalores. Para calcular los valores de λ para que el problema de frontera (1.13) bajo las condiciones mencionadas en (1.16) y (1.18) tenga soluciones no nulas, fijamos un $\lambda \in \mathbb{R}$ y resolvemos con el proceso general calculando la ecuación característica. Sustituyendo $v''(x) = \mu^2$ y $v(x) = \mu$ en (1.13) y despejando μ obtenemos

$$\mu^2 - \lambda = 0.$$

Analizamos las posibilidades aceptables para la constante λ . Estudiamos con más detalle el caso $\lambda < 0$, ya que en los casos $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$, una vez aplicadas las condiciones de contorno, nos llevan a una solución idénticamente nula que no resulta de gran interés.

En el caso $\lambda < 0$ la ecuación característica asociada es

$$\mu^2 = \lambda, \lambda < 0 \Rightarrow \mu = \sqrt{-\lambda}i.$$

El sistema fundamental asociado a (1.13) es $\{\sin(\sqrt{-\lambda}x), \cos(\sqrt{-\lambda}x)\}$. Por tanto, la solución general de (1.13) es

$$v(x) = A \cos(\sqrt{-\lambda}x) + B \sin(\sqrt{-\lambda}x) \quad \forall A, B \in \mathbb{R}. \quad (1.19)$$

Finalmente, empleando las condiciones obtenidas en (1.16) y (1.18) a la ecuación (1.19), obtenemos los valores de A y B . Es fácil ver que aplicando (1.16) en (1.19) se tiene que $A = 0$. Por otra parte veamos que si aplicamos (1.18) a (1.19) obtenemos como resultado los valores de λ .

$$v(L) = 0 \Leftrightarrow B \sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0 \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \Rightarrow v(x) = 0 \text{ solución que no nos interesaría} \\ \sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-n^2\pi^2}{L^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si $\lambda = \lambda_n$ entonces las soluciones no nulas de (1.13) son

$$v(x) = B \sin(\sqrt{-\lambda_n}x) = B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (1.20)$$

En resumen, (1.13) tiene soluciones no nulas si y solo si $\lambda = \lambda_n = \frac{-n^2\pi^2}{L^2} \forall n \in \mathbb{N}$ y en tal caso una solución no nula de (1.13), tomando $B = 1$, es

$$v_n = \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, calculamos una solución no nula de (1.14), que viene dada por

$$w'(t) = a\lambda w(t) \Rightarrow w(t) = ke^{a\lambda_n t}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Tomando $w_n = e^{a\lambda_n t} = e^{-a\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$ se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ la función

$$u_n(x, t) = w_n v_n = e^{-a\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

es la solución del problema homogéneo, es decir, del problema (1.5)-(1.7).

Etapla 2. Construimos la solución del problema completo en forma de serie de autofunciones por superposición de soluciones del problema (1.5)-(1.7). Buscamos una solución de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-a\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

para ciertos α_n , $n \in \mathbb{N}$, que debemos determinar para que se cumpla la condición inicial (1.6). Por tanto se tiene que

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \forall x \in [0, L].$$

Consideramos los α'_n s como los coeficientes de la serie de senos de f , es decir

$$\alpha_n = b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times (0, \infty).$$

Etapla 3. Comprobación de que la función obtenida es solución. El resultado que enunciamos a continuación nos permite comprobarlo.

Teorema 1.1 (Existencia de solución para el problema Dirichlet). *Si $f \in H^1([0, L])^1$ y $f(0) = f(L) = 0$, entonces la función*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-a\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

con b_n siendo el n -ésimo coeficiente de la serie de senos de f , pertenece a $\mathcal{C}([0, L] \times [0, \infty)) \times \bigcap \mathcal{C}^\infty([0, L] \times (0, \infty))$ y resuelve el problema (1.5), (1.6) y (1.7).

1.3. Una solución del problema con condiciones de frontera de tipo Neumann

En esta sección consideramos el problema del tipo siguiente

$$u_t - au_{xx} = 0 \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \tag{1.21}$$

¹ $H^1(0, L) = \{g \in C([0, L]) \mid g' \in \mathcal{L}^2([0, L])\}$

1.4. EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO PARA LA ECUACIÓN DEL CALOR UNIDIMENSIONAL 9

$$u(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in [0, L], \quad (1.22)$$

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (1.23)$$

y lo resolvemos por el Método de Fourier. Mediante un procedimiento análogo al realizado en la Sección 1.2 llegamos a que la solución obtenida para el problema (1.21), (1.22) y (1.23) es de la forma

$$u(x, t) = \alpha_0 u_0(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(x, t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-a \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos \frac{n\pi x}{L},$$

para ciertos $\alpha_0, \alpha_n, n \in \mathbb{N}$, que debemos determinar para que se cumpla la condición inicial (1.6). Por tanto se tiene que

$$f(x) = u(x, 0) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \forall x \in [0, L],$$

es una serie de cosenos. Consideraremos α_0 y α_n como los coeficientes de la serie de cosenos de f , es decir,

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx,$$

$$\alpha_n = a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

1.4. El principio del máximo para la ecuación del calor unidimensional

La unicidad del problema Dirichlet, planteado en la Sección 1.2, y del problema Neumann, planteado en la Sección 1.3, será consecuencia del principio del máximo que enunciaremos a continuación.

Sean $L > 0, T > 0$ y $D_T = [0, L] \times [0, T]$. La frontera parabólica de D_T es el conjunto

$$\Gamma_T = ([0, L] \times \{0\}) \cup (\{0, L\} \times [0, T]).$$

Teorema 1.2 (Principio del máximo y del mínimo). *Si $u = u(x, t)$ es continua en D_T y, además, para algún $a > 0$ se verifica que*

$$u_t(x, t) - au_{xx}(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T),$$

entonces u alcanza su máximo y su mínimo en la frontera parabólica D_T , es decir,

$$\max_{D_T} u = \max_{\Gamma_T} u$$

$$\min_{D_T} u = \min_{\Gamma_T} u.$$

Interpretación física: La temperatura máxima (respectivamente mínima) se alcanza en algún punto de la frontera parabólica, es decir, o bien se alcanza en el instante inicial en algún punto $x \in [0, L]$ o bien en $t \in [0, L]$ en alguno de los extremos de $[0, L]$.

Observación 1.3. Si $u \in \mathcal{C}(D_T)$, $u_t - au_{xx} = 0$ en $(0, L) \times (0, T)$ y $u \equiv 0$ en Γ_p entonces $u(x, t) = 0 \forall (x, t) \in D_T$.

Finalmente enunciamos el teorema que prueba la unicidad de solución para los problemas de Dirichlet y de Neumann.

Teorema 1.4. Si $f \in H^1([0, L])$ y $f(0) = f(L) = 0$ entonces el problema

$$\begin{cases} u_t - au_{xx} = 0 \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in [0, L], \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0. \end{cases}$$

tiene a lo sumo una solución continua en $[0, L] \times [0, \infty)$.

Las demostraciones de (1.2) y (1.4) las dejaremos al interés del lector y podrán verse en Cañada (2002).

1.5. Resolución de un problema bidimensional con series de Fourier dobles

Consideremos una placa rectangular delgada, con longitud a y anchura b cuya temperatura viene dada por la función $u(x, y, t)$ que depende del tiempo $t \geq 0$ y de la posición (x, y) .

Las condiciones iniciales nos fijan la temperatura de la placa en el instante inicial $t = 0$ y las condiciones de contorno se dan sobre los puntos de la frontera.

Queremos determinar la solución $u(x, y, t)$ del problema inicial de frontera de la temperatura de la placa rectangular, que viene dado por el siguiente problema de la ecuación del calor

$$u_t = k\nabla^2 u, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0, \tag{1.24}$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y); \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b,$$

$$u_x(0, y, t) = 0, \quad u_x(a, y, t) = 0,$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, b, t) = 0.$$

1.5. RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA BIDIMENSIONAL CON SERIES DE FOURIER DOBLES 11

Buscamos soluciones no triviales de la parte homogénea del problema inicial y de la forma $U(x, y, t) = U(x, y)T(t)$ que vienen dadas por

$$u_t = k\nabla^2 u, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0, \quad (1.25)$$

$$u_x(0, y, t) = 0, \quad u_x(a, y, t) = 0;$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, b, t) = 0.$$

Sustituyendo en (1.25) vemos que existe algún $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $U(x, y)$ y $T(t)$ satisfacen

$$T' + \lambda kT = 0 \quad (1.26)$$

$$\begin{cases} \nabla^2 U + \lambda U = 0 \\ U_x(0, y) = U_x(a, y) = 0 \\ U(x, 0) = U(x, b) = 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

Análogamente a la Sección 1.2, buscamos los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que (1.27) tiene soluciones no nulas y del tipo $U(x, y) = X(x)Y(y)$. Las EDO que resultan son

$$X'' - \mu X = 0, \quad X'(0) = X'(a) = 0, \quad (1.28)$$

$$Y' + (\lambda + \mu)Y = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0. \quad (1.29)$$

Para resolverlas, buscamos primero los valores de $\mu \in \mathbb{R}$ para los que la ecuación (1.28) tiene soluciones no triviales.

- Si $\mu \geq 0$ entonces la única solución es trivial.
- Si $\mu < 0$, las raíces del polinomio característico son $\pm i\sqrt{-\mu}$, donde la solución general es

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{-\mu}x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{-\mu}x; \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Calculamos $X'(x)$:

$$X'(x) = -c_1 \sqrt{-\mu} \operatorname{sen} \sqrt{-\mu}x + c_2 \sqrt{-\mu} \cos \sqrt{-\mu}x$$

y aplicando las condiciones de frontera tenemos

$$X'(0) = 0 = c_2 \sqrt{-\mu}, \quad c_2 = 0,$$

$$X'(a) = 0 = -c_1 \sqrt{-\mu} \operatorname{sen} \sqrt{-\mu}a + c_2 \sqrt{-\mu} \cos \sqrt{-\mu}a,$$

$$\text{como } c_2 = 0, \quad -c_1 \sqrt{-\mu} \operatorname{sen} \sqrt{-\mu}a = 0.$$

Llegamos a que (1.28) tiene soluciones no nulas si $\mu = \mu_m = -m^2\pi^2/a^2$, en cuyo caso una solución no nula es

$$X_m(x) = \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right), \text{ con } m = 0, 1, 2, \dots$$

Ahora, con los valores de μ_m dados, queremos determinar todos los $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que (1.29) tiene soluciones no nulas.

- Si $(\lambda + \mu_m) \leq 0$, la única solución es la trivial.
- Si $(\lambda + \mu_m) > 0$, entonces $\gamma = -(\lambda + \mu) < 0$ y tiene soluciones no triviales si

$$\gamma = -\frac{n^2\pi^2}{b^2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Por ejemplo, una solución no nula es

$$Y_n(y) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, (1.27) tendrá soluciones no nulas y serán del tipo $U(x, y) = X(x)Y(y)$ para

$$\lambda = \lambda_{mn} = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \text{ con } m = 0, 1, 2, \dots \text{ y } n \in \mathbb{N},$$

siendo una solución no nula asociada a λ_{mn} la dada por

$$U_{mn} = X_m(x)Y_n(y) = \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

Ahora queda obtener una solución no nula de (1.26) para $\lambda = \lambda_{mn}$. Integrando la ecuación $T' + \lambda kT = 0$ obtenemos

$$T' = -\lambda kT, \quad \frac{T'}{T} = -\lambda k, \quad \int \frac{T'}{T} dt = \int -\lambda k dt, \\ \ln |t| = -\lambda kt$$

y una solución no nula es

$$T(t) = e^{-\lambda_{mn}kt}.$$

Por tanto, la solución del problema es de la forma

$$u(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} e^{-(m^2/a^2 + n^2/b^2)\pi^2 kt} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad (1.30)$$

donde las constantes b_{mn} deben escogerse para que se cumpla la condición inicial no homogénea, $u(x, y, 0) = f(x, y)$, es decir,

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

1.5. RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA BIDIMENSIONAL CON SERIES DE FOURIER DOBLES 13

En este caso los coeficientes de la serie de Fourier doble vienen determinados por

$$b_{0n} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y \right) dx dy, \quad \text{para } m = 0;$$

$$b_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y \right) dx dy, \quad \text{para } m \geq 1.$$

Y la solución al problema de la placa rectangular es (1.30)

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_{0n} e^{-(n^2/b^2)\pi^2 kt} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} e^{-(m^2/a^2 + n^2/b^2)\pi^2 kt} \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y \right), \quad (1.31)$$

con los coeficientes de Fourier b_{0n} y b_{mn} definidos anteriormente.

A modo de ejemplo consideraremos el siguiente problema cuya resolución se llevo a cabo mediante el software Maple. Tomamos la función $f(x, y) = y(\pi - y)$, $a = b = \pi$ y $k = 1$.

Una suma parcial de la solución (1.31) se representa en las Figuras 1.2 y 1.3 .

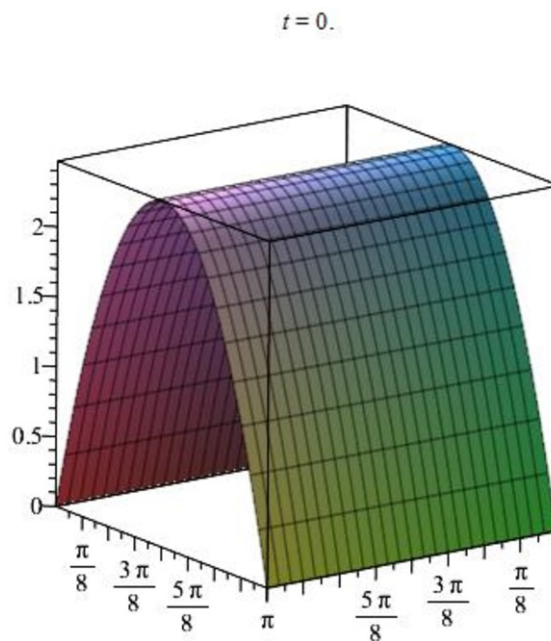


Figura 1.2: Representación gráfica de una suma parcial de la solución de la ecuación (1.31) del problema (1.24) en $t=0$.

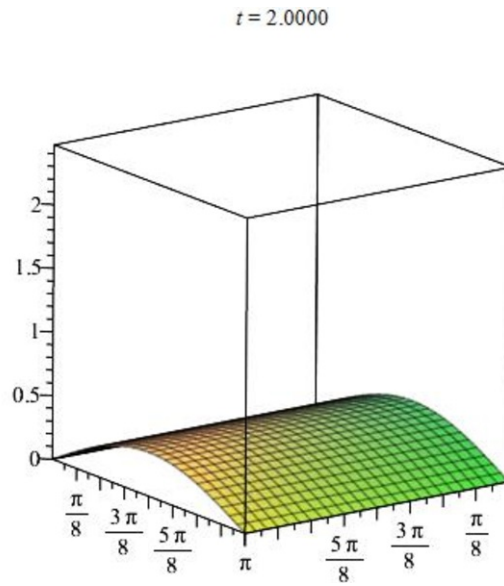


Figura 1.3: Representación gráfica de una suma parcial de la solución de la ecuación (1.31) del problema (1.24) en $t=2$.

Capítulo 2

La ecuación del calor en \mathbb{R}^N .

La ecuación del calor,

$$u_t - \Delta u = F(x, t), \quad (2.1)$$

es el modelo más sencillo de ecuación de difusión, y en el primer capítulo fue estudiada en detalle para el caso unidimensional. En este capítulo se proyecta estudiar el problema de Cauchy en \mathbb{R}^N comprobando que es compatible, si bien es necesaria una condición para obtener solución única. Con el fin de poder demostrar resultados de unicidad, se establecerá el principio del máximo para la ecuación del calor.

En la Subsección 2.1 obtendremos la solución fundamental. Con ella tendremos una solución del problema de Cauchy homogéneo. El objeto de estudio de la Subsección 2.2 serán los teoremas de unicidad más simples y el principio del máximo en dominios acotados. Por último, en la tercera sección, estudiaremos el problema no homogéneo.

La mayor parte de la teoría presentada en este capítulo es una reconstrucción de la teoría expuesta por Peral-Alonso (2014), aunque también se consultaron los trabajos de Mijailov (1978), Protter (1984), Treves (1975), Myint y Debnath (2006) y John (1981).

2.1. Núcleo de Gauss. Construcción de soluciones.

En esta Sección trataremos de obtener soluciones de la ecuación del calor que son singulares en el origen.

Una solución singular es una función que verifica la ecuación, pero que no se obtiene particularizando la solución general, es decir, es una solución de la ecuación que no consiste en una solución particular de la general.

Empezaremos por el caso de dimensión espacial uno que será más sencillo de escribir. En este caso usaremos un argumento de homogeneidad frente al cambio de escala, que reducirá

el problema a una ecuación ordinaria.

- A)** En el caso de dimensión $N = 1$ buscamos soluciones autosemejantes, es decir, soluciones que al cambiar de escala convenientemente permanecen invariantes. Observando que en la ecuación del calor hay una derivada en tiempo y dos en el espacio queda determinada la escala conveniente. Con esta observación hacemos el cambio de escala $x = \lambda^\alpha y$, $t = \lambda^\beta s$ y consideramos una solución u ,

$$v(y, s) = u(\lambda^\alpha y, \lambda^\beta s) = u(x, t).$$

Para que v sea solución se tiene que verificar,

$$v_s - v_{yy} = 0.$$

Sin embargo, si calculamos,

$$v_s - v_{yy} = \lambda^\beta u_t - \lambda^{2\alpha} u_{xx},$$

de forma que si $\beta = 2\alpha$, obtenemos

$$v_s - v_{yy} = \lambda^\beta (u_t - u_{xx}) = 0.$$

Como consecuencia, parece razonable buscar soluciones que cumplan la propiedad de que existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $u(\lambda^\alpha y, \lambda^\beta s) = \gamma u(y, s)$. Esta propiedad se tiene si $u(x, t)$ es del tipo

$$u(x, t) = t^\alpha f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \quad (2.2)$$

Si imponemos que u verifique la ecuación $u_t - u_{xx} = 0$, debemos tener

$$f''(\xi) + \frac{\xi}{2} f'(\xi) - \alpha f(\xi) = 0,$$

donde $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$. Desde el punto de vista físico tenemos que imponer la conservación de la cantidad de calor, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} t^\alpha f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx \text{ constante.}$$

Haciendo el cambio de variable $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$ tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^\alpha f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx = t^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx = t^\alpha \sqrt{t} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \frac{1}{\sqrt{t}} dx = t^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy,$$

que es constante si y solo si $\alpha = -\frac{1}{2}$. La ecuación ordinaria puede escribirse como

$$(2f' + \xi f)' = 0.$$

Tomamos en particular las soluciones de

$$2f' + \xi f = 0,$$

es decir,

$$f(\xi) = ce^{-\frac{\xi^2}{4}}. \quad (2.3)$$

En efecto, aplicando separación de variables tenemos

$$2f' = -\xi f(\xi) \Rightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{\xi}{2}.$$

Luego, integrando en los dos miembros de la igualdad

$$\int \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\int \frac{\xi}{2},$$

obtenemos que

$$\ln f(\xi) = -\frac{\xi^2}{4} + k.$$

Por último, aplicando exponenciales a ambos lados de la igualdad

$$f(\xi) = ce^{-\frac{\xi^2}{4}},$$

y tendríamos probada la igualdad (2.3). Para que (2.3) tenga integral uno, debemos tener

$$u(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad (2.4)$$

denominado núcleo de Gauss, que es la solución fundamental que buscábamos.

Incluiremos la representación gráfica de (2.4) que se ve en la Figura 2.1.

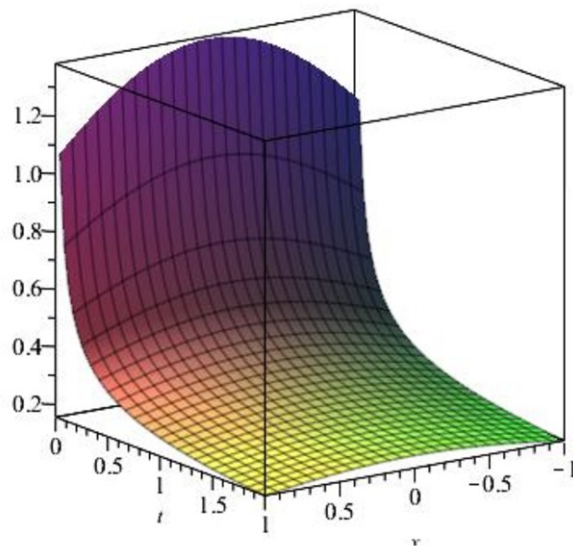


Figura 2.1: Representación gráfica de la solución (2.4)

El método puede extenderse a más dimensiones. Se omiten más detalles, pues tenemos un método alternativo que estudiamos a continuación.

B) Para obtener la solución fundamental en dimensiones mayores usaremos la transformada de Fourier, y para ello introduciremos algunos conceptos necesarios.

Definición 2.1. Se dice que una función pertenece a $S(\mathbb{R})$ si ella y cualquier derivada suya tiende a cero en el infinito más rápidamente que cualquier polinomio, es decir,

$$S(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty \mid \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m \frac{d^n f}{dx^n}(x)| \leq c_{n,m} \leq \infty, n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Definición 2.2. Sea f una función integrable en \mathbb{R} , es decir, medible y tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Se definirá la transformada de Fourier de f como la función

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i \langle t, \xi \rangle} f(t) dt.$$

Además, si $f \in S(\mathbb{R})$, tomando en la definición 2.1 $n = 0$ y $m = 2$, se tiene que

$$|(1 + |x|^2)f(x)| \leq |f(x)| + |x^2 f(x)| \leq M,$$

por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \leq M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} < \infty, \quad (2.5)$$

es decir, f es integrable.

La observación anterior implica que la transformada de Fourier de $f \in S(\mathbb{R})$ está bien definida pues

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i t \xi} f(t) dt, \quad (2.6)$$

y la integral es finita. En efecto,

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |e^{-2\pi i t \xi}| |f(t)| dt,$$

donde

$$|e^{-2\pi i t \xi}| \leq 1 \text{ y } f \in S(\mathbb{R}),$$

por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i \langle t, \xi \rangle} f(t) dt < \infty.$$

Observaremos que además de (2.5) se tiene (2.6) por lo que concluimos que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty. \quad (2.7)$$

A partir de las propiedades más elementales de la transformada de Fourier de funciones temperadas se deduce cómo serán las aplicaciones de ella a las ecuaciones en derivadas parciales.

Teorema 2.3. *Sea $f \in S(\mathbb{R})$, entonces*

a) $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ y además

$$\frac{d^k \widehat{f}}{d\xi^k}(\xi) = \widehat{g}(\xi), \quad \text{siendo } g(x) = (-2\pi i x)^k f(x). \quad (2.8)$$

b) $\frac{d^k f}{dx^k}(x) \in S(\mathbb{R})$, verificándose que

$$\widehat{\frac{d^k f}{dx^k}}(\xi) = (2\pi i \xi)^k \widehat{f}(\xi). \quad (2.9)$$

c) Si se supone también que g es una función integrable y se define

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = f * g(x), \quad (2.10)$$

integral de convolución de f y g , se tiene que h es integrable y que

$$\widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi). \quad (2.11)$$

d) $\widehat{f}(\xi) \in S(\mathbb{R})$.

Demostración.

a) Si se escribe la transformada de Fourier como sigue

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} f(t) dt,$$

y además, teniendo en cuenta que $\frac{d^k}{d\xi^k}(f(x)e^{-2\pi i t \xi})$ es integrable en valor absoluto, se puede derivar bajo el signo de la integral, obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{d^k \widehat{f}}{d\xi^k}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d^k}{d\xi^k}(e^{-2\pi i t \xi}) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-2\pi i t)^k e^{-2\pi i t \xi} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} g(t) dt = \widehat{g}(\xi), \end{aligned}$$

y llamando $g(x) = (-2\pi i x)^k f(x)$.

- b) Por la definición de $S(\mathbb{R})$ tenemos que $\frac{d^k f}{dx^k} \in S(\mathbb{R})$. Para establecer la fórmula (2.9) basta hacerlo para $k = 1$ y repetir la prueba. Pero, integrando por partes,

$$\widehat{\frac{df}{dx}}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} \frac{df}{dx}(t) dt = (-2\pi i \xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} f(t) dt = (-2\pi i \xi) \widehat{f}(\xi),$$

que es (2.9) con $k = 1$.

- c) Por el Teorema de Fubini-Tonelli sobre inversión del orden de integración tenemos que h es integrable. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |g(x-t)| dt \right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-t)| dx \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| du \right) dt = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| du \right). \end{aligned}$$

Para obtener (2.11) efectuamos el cálculo directamente

$$\begin{aligned} \widehat{h}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} h(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) dx \right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) e^{-2\pi i (t-x) \xi} dt \right) e^{-2\pi i x \xi} dx = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi), \end{aligned}$$

que es la identidad buscada.

- d) Establecemos que si $m \geq 0$ y $n \geq 0$ son números enteros, se verifica que

$$\left| \xi^m \frac{d^n \widehat{f}}{d\xi^n}(\xi) \right| \leq C,$$

que por los apartados a) y b) anteriores, es equivalente a

$$\begin{aligned} \xi^m \frac{d^n \widehat{f}}{d\xi^n}(\xi) &= \xi^m \widehat{(-2\pi i x)^n f(x)} = \xi^m \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} (-2\pi i t)^n f(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} (-2\pi i \xi)^m (-2\pi i)^{n-m} (t^n f(t)) dt = a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} \frac{d^m}{dt^m} (t^n f(t)) dt, \end{aligned}$$

siendo $a = (-2\pi i)^{n-m}$.

Por definición, la función $\frac{d^m}{dt^m} (x^n f(x)) \in S(\mathbb{R})$, por tanto (2.7) implica $|\widehat{g}(\xi)| < C$ como queríamos demostrar.

□

Observación 2.4. La transformada de Fourier se extiende a \mathbb{R}^N por la fórmula

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i \langle t, \xi \rangle} f(t) dt, \quad (2.12)$$

donde \langle, \rangle es el producto escalar en \mathbb{R}^N .

Observación 2.5. *La transformación de Fourier permite transformar un problema diferencial en un problema algebraico.*

Ejemplo 2.6. Ilustramos la transformación (2.5) con un ejemplo. Se quiere resolver el problema

$$\Delta u = f, \text{ en } \mathbb{R}^2, \quad (2.13)$$

que se transforma en

$$-4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi). \quad (2.14)$$

En efecto,

$$\widehat{\Delta u} = \widehat{u_{xx} + u_{yy}} = \widehat{u_{xx}} + \widehat{u_{yy}} = (2\pi i \xi)^2 \widehat{u}(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi). \quad (2.15)$$

Aplicando la condición (2.8) del teorema 2.3 en la tercera igualdad de (2.15), la igualdad (2.14) queda probada.

Para que la estrategia expuesta culmine con éxito el cálculo de una solución (2.13), es necesario saber si es posible recuperar una función a partir de su transformada de Fourier, es decir, necesitamos saber calcular la inversa de la transformada de Fourier.

Definición 2.7. Sea \widehat{f} transformada de Fourier de $f \in S(\mathbb{R})$,

$$(\widehat{f})^\vee(t) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i t \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Observación 2.8. Sean $f, g \in S(\mathbb{R})$. Entonces $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\widehat{g}(y) dy$

Observación 2.9. *La demostración de la igualdad $\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi}{a}\xi^2}$ siendo $g(x) = e^{-a\pi|x|^2}$ que utilizamos en el siguiente resultado puede verse en Peral-Alonso (2014) con detalle.*

Teorema 2.10 (La transformada inversa de Fourier).

Si $f \in S(\mathbb{R})$, entonces $(\widehat{f})^\vee(t) = f$.

Demostración.

Probemos que

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi. \quad (2.16)$$

Para $\epsilon > 0$ consideramos la gaussiana

$$g_\epsilon(\xi) = e^{-\pi^2 \epsilon^2 \xi^2}, \quad (2.17)$$

aplicando el resultando mencionado en la observación 2.8 resulta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t \xi} \widehat{f}(\xi) g_{\epsilon}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{2\pi i t \xi} \widehat{g_{\epsilon}}(\xi) d\xi. \quad (2.18)$$

Llamando $h_{\epsilon}(x) = e^{2\pi i t s} g_{\epsilon}(s)$ tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{h_{\epsilon}}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi s} h_{\epsilon}(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi s} e^{2\pi i t s} g_{\epsilon}(s) ds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_{\epsilon}(s) e^{-2\pi i s(\xi - t)} ds = \widehat{g_{\epsilon}}(\xi - t) = \frac{1}{\epsilon} e^{-\pi \frac{|\xi - t|^2}{\epsilon^2}}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.18) obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t \xi} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi \epsilon^2 \xi^2} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{1}{\epsilon} e^{-\pi \frac{|\xi - t|^2}{\epsilon^2}} d\xi =: f_{\epsilon}(t). \quad (2.19)$$

Llamando $\phi(x) = e^{-\pi x^2}$ se tiene que $\phi(x) > 0$ y $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = 1$. Para $\epsilon > 0$ definimos

$$\phi_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\epsilon} \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \quad (2.20)$$

y haciendo un cambio de variable en la integral obtenemos $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\epsilon}(x) dx = 1$.

Por tanto, podemos escribir la última igualdad de (2.19) como

$$f_{\epsilon}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \phi_{\epsilon}(\xi - t) d\xi.$$

Demostremos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_{\epsilon}(x) = f(x).$$

En efecto, haciendo el cambio de variable $\xi = \epsilon y$,

$$|f_{\epsilon}(x) - f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\epsilon}(\xi) |f(\xi - x) - f(x)| d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) |f(\epsilon y - x) - f(x)| dy.$$

Dado $\eta > 0$, elegimos $R > 0$ tal que

$$\int_{|y| > R} \phi(y) dy \leq \frac{\eta}{2},$$

entonces si $M = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(y)|$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) |f(\epsilon y - x) - f(x)| dy &\leq \int_{-R}^R \phi(y) |f(\epsilon y - x) - f(x)| dy + \\ &+ \int_{|y| \geq R} \phi(y) |f(\epsilon y - x) - f(x)| dy \leq \\ &\leq \int_{-R}^R \phi(y) |f(\epsilon y - x) - f(x)| dy + M\eta. \end{aligned}$$

Pero la continuidad uniforme de f sobre compactos implica que dado $\eta > 0$ podemos elegir $\delta > 0$ tal que si $|\epsilon y| < \delta$, se verifica que $|f(\epsilon y) - f(x)| \leq \eta$ para cualquiera que sea $|x| \leq R$; por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) |f(\xi y - x) - f(x)| dy \leq \eta \int_{-R}^R \phi(y) dy + M\eta \leq \eta(1 + M),$$

que es lo que queríamos demostrar. Para concluir la demostración, observamos que en el primer término de (2.19) podemos aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, obteniendo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i t \xi} e^{-\epsilon^2 \pi \xi^2} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi. \quad (2.21)$$

□

Después de esta breve introducción, consideramos el problema de Cauchy homogéneo y lo resolveremos. Sea

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^N, f \in S(\mathbb{R}^N) \end{cases} \quad (2.22)$$

el problema de Cauchy homogéneo considerado en \mathbb{R}^N . No imponemos condiciones de frontera porque, en realidad, no tenemos frontera. Sin embargo, para que tenga sentido calcular la transformada de Fourier respecto de la variable espacial x de la función u , suponemos implícitamente que dicha función tiende a cero rápidamente cuando $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$. Recordemos que S es el espacio de funciones temperadas definido anteriormente, en el cual la transformada de Fourier se conserva bien. Si calculamos la transformación de Fourier en las variables espaciales de la ecuación en derivadas parciales y de su condición inicial (2.22), es decir,

$$\widehat{u}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} u(x, t) dx,$$

tenemos,

$$\begin{cases} \widehat{u}_t(\xi, t) + 4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(\xi, t) = 0, & \xi \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ \widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi). \end{cases}$$

La igualdad $\widehat{\Delta u} = 4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(\xi, t)$ se obtiene en virtud de (2.14).

Si integramos la ecuación ordinaria en t y consideramos ξ como parámetro, obtenemos

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t}. \quad (2.23)$$

En efecto, sea $y(t) = \widehat{u}(\xi, t)$, con ξ fijado, entonces tenemos la siguiente ecuación diferencial

$$y'(t) = -4\pi^2|\xi|^2 y(t).$$

Si aplicamos separación de variables e integramos a ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -4\pi^2|\xi|^2 \Rightarrow \int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int -4\pi^2|\xi|^2 dt \Rightarrow \ln(y(t)) = -4\pi^2|\xi|^2 t + k.$$

Por último, aplicamos exponenciales a ambos lados

$$y(t) = \widehat{f}(\xi) e^{-4\pi^2|\xi|^2 t},$$

y tendremos probada la igualdad (2.23).

Sólo nos resta calcular la transformada inversa de Fourier de esta función y así obtenemos la solución del problema original. Como se trata de una función gaussiana podemos calcular su transformada de Fourier, resultando otra gaussiana a la que llamamos núcleo de Gauss.

Más precisamente

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} d\xi = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Por tanto, a partir de (2.10) tenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy, \quad (2.24)$$

que al ser $f \in S(\mathbb{R})$, está bien definida.

Denotamos

$$K(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4}},$$

y definimos

$$K_t(x) = \frac{1}{(t)^{\frac{N}{2}}} K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

es decir,

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}. \quad (2.25)$$

En virtud de (2.25), podemos escribir (2.24) de la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^N} K_t(x-y) f(y) dy.$$

Además, se verifica

- a) $K_t(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$,
- b) $\int_{\mathbb{R}^N} K_t(x) dx = 1$,
- c) $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{|x| > \delta > 0} K_t(x) dx = 0$.

Para interés del lector, la comprobación de estas tres propiedades puede verse en Peral-Alonso (2014).

A $K_t(x)$ la llamamos solución fundamental de la ecuación del calor. El siguiente resultado justifica esta denominación.

Observamos también que si suponemos que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ y está acotada, la fórmula (2.24) tiene sentido. Por eso formulamos el siguiente resultado en ese contexto.

Teorema 2.11.

Sea $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ tal que $|f(x)| < M$ si $x \in \mathbb{R}^N$. Entonces, $u(x, t)$ definida por (2.24) verifica

- (1) $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times (t, \infty))$,
- (2) $u_t - \Delta u = 0$ si $x \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$,
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} u(x_0, t) = f(x_0)$ siendo la convergencia uniforme,
- (4) $|u(x, t)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x)|$, $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$.

Demostración.

Para probar el apartado (1) tenemos en cuenta el hecho de que la función $e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ es \mathcal{C}^∞ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y $t > 0$, más la posibilidad de derivar respecto al signo de la integral. Estas dos propiedades nos permiten concluir que u es \mathcal{C}^∞ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y $t > 0$ que es lo que queríamos probar. Además,

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta_x)u(x, y, t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} K(x, y, t) f(y) dy = \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} (\partial_t - \Delta_x)K(x, y, t) f(y) dy = 0, \end{aligned}$$

así que $u_t = \Delta u$ para todo $t > 0$. De esta manera el apartado (2) quedaría probado. En cuanto al apartado (3) para $x_0 \in \mathbb{R}^N$, escribimos

$$|u(x_0, t) - f(x_0)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x_0 - y) f(y) dy - f(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x_0 - y) dy \right| = \quad (2.26)$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x_0 - y) (f(y) - f(x_0)) dy \right|. \quad (2.27)$$

Por la continuidad de f , dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|y - x_0| < \delta$, $|f(y) - f(x_0)| < \epsilon$; entonces en (2.26) tenemos que

$$\begin{aligned} |u(x_0, t) - f(x_0)| &\leq \int_{|x_0 - y| < \delta} K_t(x_0 - y) |f(y) - f(x_0)| dy + \\ &+ \int_{|x_0 - y| > \delta} K_t(x_0 - y) |f(y) - f(x_0)| dy = \epsilon \int_{|x_0 - y| < \delta} K_t(x_0 - y) dy + \\ &+ 2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} |f(\xi)| \int_{|x_0 - y| > \delta} K_t(x_0 - y) dy \leq 2\epsilon, \end{aligned}$$

en virtud de las propiedades del núcleo K .

La conclusión (4) se obtiene de la propiedad (2) para el núcleo de Gauss K_t . \square

Ejemplo 2.12 (Ejemplo de Tychonoff). Con este ejemplo ilustramos la no unicidad del Problema de Cauchy para la ecuación del calor.

El problema (2.22) es característico, por lo que sin condiciones adicionales no cabe esperar unicidad. Consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (2.28)$$

que tiene la solución cero. Para buscar soluciones de (2.28) usamos el problema no característico,

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t, & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0, t) = g(t), & t \in \mathbb{R} \\ u_x(0, t) = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Elegimos $g(t) = 0$ si $t \leq 0$ para conseguir $u(x, 0) = 0$ y buscamos

$$u(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(t) x^j, \quad (2.30)$$

para que sea solución. Suponiendo regularidad suficiente, podemos derivar término a término en (2.30) y sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} g_j'(t) x^j = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) g_j(t) x^{j-2}. \quad (2.31)$$

Para verificar las condiciones iniciales de (2.29) sustituimos en (2.30) dichas condiciones y tenemos

$$u(0, t) = g_0(t) = g(t), \quad (2.32)$$

$$u_x(0, t) = g_1(t) = 0. \quad (2.33)$$

De (2.31) resulta que para $j \geq 2$,

$$g'_j(t) = (j+1)(j+2)g_{j+2}(t),$$

que junto a (2.32) y (2.33) obtenemos

i) Si $j = 2k + 1$, $g_j = 0$.

ii) Si $j = 2k$,

$$g_{2k}(t) = \frac{1}{(2k)!} \frac{d^k g}{dt^k}(t).$$

Sustituyendo en (2.30) resulta

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \frac{d^k g}{dt^k}(t). \quad (2.34)$$

Después de este cálculo formal pasamos a elegir g de forma que tengamos la convergencia necesaria para que (2.34) defina una solución clásica de la ecuación del calor. Para $\alpha > 1$ tomamos la función

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t^{-\alpha}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

De este modo, $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $\frac{d^k g}{dt^k}(0) = 0$, con lo que se comprueba directamente que se verifica el dato inicial $u(x, 0) = 0$.

Para estudiar la convergencia de la serie (2.34) estimamos el comportamiento de $\frac{d^k g}{dt^k}(t)$ como funciones de variable compleja. Para ello utilizamos la fórmula integral de Cauchy sobre el contorno

$$\Gamma = \{z \in \mathcal{C} \mid |z - t| = \theta t\},$$

con θ a determinar.

Se dejan al interés del lector los detalles que se podrán ver en Peral-Alonso (2014). Como consecuencia, hemos calculado una solución no nula del problema (2.28), lo que implica que no se tiene unicidad.

En la sección siguiente estudiaremos resultados de unicidad poniendo la restricción de que la solución esté en una clase de funciones adecuada.

2.2. Principio del máximo en dominios acotados. Unicidad de solución

En esta sección estableceremos el principio del máximo débil para el problema de Dirichlet. Como consecuencia, tendremos la prueba de unicidad para el problema

$$\begin{cases} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = F(x, t) \text{ si } (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in \Omega \\ u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado con frontera regular $\partial\Omega$, y sea $0 < T < \infty$. Definiremos $D_T = \Omega \times (0, T)$ y la frontera parabólica de D_T (véase Figura 2.2),

$$\Gamma_p \equiv (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T]).$$

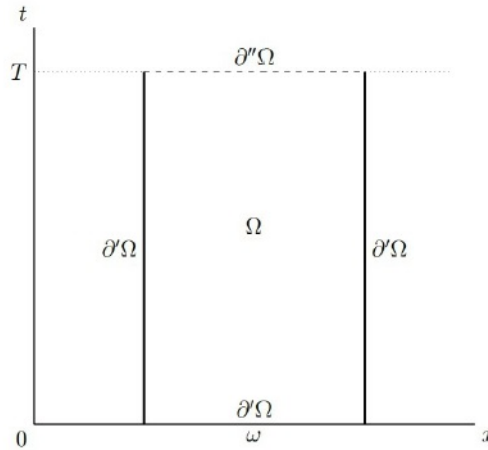


Figura 2.2: Representación de la frontera parabólica de D_T .

Teorema 2.13.

Supongamos $u \in \mathcal{C}(\bar{D}_T)$ y tanto u_t como $u_{x_i x_j}$ existen y son continuas sobre $(D_T \cup (\Omega \times T))$, $i, j = 1, 2, \dots, N$ y

$$u_t - \Delta u \leq 0 \quad \text{en} \quad D_T = \Omega \times (0, T).$$

Entonces

$$\max_{\Gamma_p} = \max_{D_T}.$$

Demostración.

Si añadimos la hipótesis adicional

$$u_t - \Delta u < 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times (0, T), \quad (2.35)$$

2.2. PRINCIPIO DEL MÁXIMO EN DOMINIOS ACOTADOS. UNICIDAD DE SOLUCIÓN 29

el resultado es inmediato. En efecto, si tenemos que el máximo se alcanza en un punto $(x_0, t_0) \in D_{T'} \equiv \Omega \times (0, T')$, $T' < T$, ha de verificarse que

$$u_t(x_0, t_0) = 0,$$

por el criterio de máximo, y

$$\Delta u(x_0, t_0) \leq 0,$$

con lo cual se contradice (2.35). En efecto,

$$u_t(x_0, t_0) = 0 \Rightarrow u_{tt}(x_0, t_0) \leq 0 \Rightarrow \Delta u \leq 0 \Rightarrow -\Delta u \geq 0.$$

Por consiguiente, en la hipótesis (2.35) el máximo no se puede alcanzar en $D_{T'}$ cualquiera que sea $T' < T$.

Por otra parte, si el máximo se alcanza en $(x_0, T) \in \Omega \times \{T\}$ tenemos

$$u_t(x_0, T) \geq 0,$$

$$\Delta u(x_0, T) \leq 0,$$

que contradice también (2.35). Por tanto, en la hipótesis (2.35), el máximo se alcanza en Γ_p . Quitamos ahora la hipótesis adicional. Para ello consideramos para cada $\epsilon > 0$ la función

$$v(x, t) = u(x, t) + \epsilon|x|^2.$$

La función v goza de la misma regularidad que u ya que u es regular y la función $\epsilon|x|^2 \in \mathcal{C}^\infty$. Además, la función v verifica

$$v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - 2N_\epsilon < 0,$$

de acuerdo con las hipótesis sobre u . Entonces, puesto que v verifica la hipótesis (2.35), concluimos que

$$\max_{\Gamma_p} v = \max_{D_T} v.$$

Pero entonces,

$$\max_{D_T} u \leq \max_{D_T} v = \max_{\Gamma_p} v \leq \max_{\Gamma_p} u + \epsilon \max_{\Omega} |x|^2.$$

Como es para $\epsilon > 0$ arbitrario, tenemos

$$\max_{D_T} u \leq \max_{\Gamma_p} u.$$

Por otra parte,

$$\max_{\Gamma_p} u \leq \max_{D_T} u,$$

ya que $T_p \subset D_T$. Por tanto el resultado quedaría probado. □

Observación 2.14. *El principio del máximo para la ecuación del calor excluye la frontera temporal en la dirección del tiempo creciente.*

Observación 2.15. *Este principio de máximo se llama débil porque no excluye que el máximo se tome en un punto interior.*

A continuación, aplicamos el principio del máximo débil a la obtención de algunos resultados de unicidad.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado con frontera regular $\partial\Omega$. Consideramos el problema

$$u_t - \Delta u = 0 \quad x \in \Omega \quad t > 0, \quad (2.36)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \quad t > 0, \quad (2.37)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad x \in \Omega. \quad (2.38)$$

Aplicando directamente el principio del máximo tenemos el siguiente corolario, el cual establece la unicidad del problema. En efecto, como consecuencia de (2.37) y (2.38) obtenemos que $u = 0$ en D_T . Por tanto se tiene que

$$\max_{D_T} u = 0.$$

Aplicando ahora el principio del máximo resulta

$$\max_{D_T} u = \max_{\Gamma_p} u = 0.$$

Finalmente, como consecuencia se tiene que $u = 0$ en todo el dominio.

Corolario 2.16. *Sea $u \in \mathcal{C}(\bar{D}_T)$ tal que $u_t, u_{x_i x_j} \in \mathcal{C}(D_T \cup (\Omega \times T))$, $i, j = 1, 2, \dots, N$ solución del problema (2.36), (2.37) y (2.38). Entonces $u \equiv 0$.*

Como hemos visto en el ejemplo 2.12, en general, el problema de Cauchy (2.22) puede tener más de una solución. No obstante, si nos restringimos a ciertas clases de funciones podremos demostrar la unicidad.

En esta sección nos limitamos al ejemplo de funciones acotadas. Demostraremos que dentro de esta clase de funciones, el problema (2.22) tiene una única solución. La prueba de este resultado es consecuencia del Principio del máximo; el inconveniente está en que en el Problema de Cauchy se tiene todo \mathbb{R}^N y no un dominio acotado. Es decir, sobre la frontera lateral de la frontera parabólica no tenemos condiciones. Esta dificultad queda solventada con el conocimiento de ciertas soluciones explícitas de la ecuación del calor, con las cuales haremos un proceso de comparación.

Es claro que cualquier función de la forma

$$w_\alpha(x, t) = \alpha \left(2t + \frac{|x|^2}{N} \right), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2.2. PRINCIPIO DEL MÁXIMO EN DOMINIOS ACOTADOS. UNICIDAD DE SOLUCIÓN 31

es una solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^N \times [0, \infty)$. Estas son las soluciones de la ecuación del calor que usaremos para comparar.

Después de esta consideración, podemos pasar a establecer el resultado de unicidad con precisión.

Teorema 2.17. *Sean u_1, u_2 soluciones acotadas del problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^N, f \text{ continua y acotada en } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Entonces $u_1 \equiv u_2$.

Demostración.

Si $|u_1(x, t)| \leq K_1$, $|u_2(x, t)| \leq K_2$, llamamos $K = \max\{K_1, K_2\}$. La función $v = u_1 - u_2$ verifica el problema

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ v(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Aplicamos a v el principio del máximo como en (2.16). Directamente esto no es posible dado que el dominio es todo \mathbb{R}^N ; para resolver esta dificultad, consideramos para $R > 0$ la bola $|x| < R$ y la función

$$w_R(x, t) = \frac{2NK}{R^2} \left(2t + \frac{|x|^2}{N} \right), \quad R \in \mathbb{R},$$

que como hemos visto verifica la ecuación del calor, en particular en $|x| < R$, $t < 0$. Además $w_R(x, 0) \geq 0 = |v(x, 0)|$ y $w_R(y, t) \geq 2K \geq |v(y, t)|$, si $|y| = R$, $t > 0$. Aplicando el principio del máximo en el cilindro $|y| \leq R$, $t \in [0, T]$ a $v - w_R$ y a $w_R - v$ resulta que

$$-w_R(x, t) \leq v(x, t) \leq w_R(x, t), \quad (2.39)$$

para cada (x, t) tal que $|x| \leq R$, $0 \leq t \leq T$. Si fijamos (x, t) , la desigualdad es válida si $R > |x|$. Entonces tomando límite para $R \rightarrow \infty$ tenemos

$$v(x, t) = 0.$$

Como (x, t) es arbitrario concluimos que

$$v \equiv 0,$$

como queríamos demostrar. □

2.3. Problema no homogéneo.

Pasaremos seguidamente a ocuparnos en esta Sección del análisis de la existencia y/o unicidad de solución del problema de Cauchy no homogéneo. Analizamos el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F(x, t), & x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (2.40)$$

donde suponemos la regularidad suficiente de los datos F y f para que sean ciertos los cálculos que realizamos. Más tarde estudiamos cuales son las condiciones de regularidad suficientes.

Escribimos ahora la solución fundamental con la singularidad desplazada, es decir, consideramos $v(x, t, y, s) \equiv K_{t-s}(x - y)$. Por tanto se tiene que

$$v(x, t, y, s) = \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}, t > s. \quad (2.41)$$

Mediante cálculo directo obtendremos el siguiente resultado.

Lema 2.18. *Sea v definida por (2.41), entonces,*

1. $v_t - \Delta_y v = 0$ si $t > s$.
2. $v_s + \Delta_y v = 0$ si $t > s$.

El primer apartado nos indica que fuera de la singularidad la solución fundamental verifica la ecuación del calor respecto a t y a y , mientras que en el segundo apartado establece que la función v verifica la ecuación del calor retrógrada como función de s , y lo cual se cumple porque tener s el signo contrario a t .

Por otra parte también observamos que si tomamos el laplaciano con respecto a x se sigue verificando el lema 2.18.

Lema 2.19. *Sea v definida por (2.41), entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^N} v(x, t, y, s), \text{ para cada } x \in \mathbb{R}^N \text{ y } t > s.$$

La importante propiedad anterior de la función v viene dada por un cambio de variable $z = \frac{x-y}{2\sqrt{t-s}}$ y lo visto en la Sección 2.1. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} v(x, t, y, s) dy &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{N}{2}}} e^{-\left(\frac{|x-y|}{2\sqrt{t-s}}\right)^2} dy = \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\left(\frac{|x-y|}{2\sqrt{t-s}}\right)^2} dy = \\ &= \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-z^2} (2\sqrt{t-s})^N dz = \frac{(2\sqrt{t-s})^N \pi^{\frac{N}{2}}}{2^N \pi^{\frac{N}{2}} (t-s)^{\frac{N}{2}}} = 1. \end{aligned}$$

Lema 2.20. *Sea v definida por (2.41) y $\Omega \in \mathbb{R}^N$ un dominio, entonces*

$$V(x, t - s) = \int_{\Omega} v(x, t, y, s) dy,$$

verifica

$$\lim_{t-s \rightarrow 0} V(x, t - s) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Para la comprobación de este resultado basta aplicar el teorema 2.11 a la función característica de Ω .

Suponemos ahora que u es solución regular del problema (2.40) y consideramos $B_R \in \mathbb{R}^N$ la bola de centro el origen y radio R .

Observemos que por el lema 2.18 denotando por (y, s) las variables espacio y tiempo respectivamente, tenemos

$$(uv)_s = u_s v + v_s u = v \Delta u - u \Delta v. \quad (2.42)$$

Teniendo en cuenta (2.42), utilizando la fórmula de Green¹ en la integral de espacio e integrando en $B_R \times (0, \infty)$, obtenemos la siguiente identidad

$$\int_0^t \int_{B_R} v F dy ds = \int_0^t \int_{B_R} (u(v_s + \Delta v) - v(\Delta u - u_s)) dy ds = \quad (2.43)$$

$$= \lim_{s \rightarrow t^-} \int_{B_R} u v dy - \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{B_R} u v dy + \int_0^t \int_{\partial B_R} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) d\sigma(y) ds, \quad (2.44)$$

donde n es la normal exterior a B_R y $d\sigma(y)$ el elemento de superficie sobre ∂B_R .

Si suponemos, por ejemplo, que u es acotada, como v y $\frac{\partial v}{\partial n}$ decaerán exponencialmente cuando $R \rightarrow \infty$. Pasando al límite en (2.43) obtenemos

$$\int_0^t \int_{B_R} v F dy ds = \lim_{s \rightarrow t^-} \int_{B_R} u v dy - \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{B_R} u v dy. \quad (2.45)$$

Según el teorema 2.11 observamos que

$$\lim_{s \rightarrow t^-} \int_{B_R} u(y, s) v(x, t, y, s) dy = u(x, t), \quad (2.46)$$

y también, por (2.11),

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{B_R} u(y, s) v(x, t, y, s) dy = \int_{B_R} u(y, 0) v(x, t, y, 0) dy = \int_{B_R} f(y) v(x, t, y, 0) dy, \quad (2.47)$$

¹ $\int_{\Omega} (v(x) \Delta u(x) - u(x) \Delta v(x)) dx = \int_{\partial \Omega} (v(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) - u(x) \frac{\partial v}{\partial n}(x)) d\sigma(x)$

sustituyendo (2.46), (2.47) en (2.45) y despejando obtenemos que si u es solución regular del problema (2.40), entonces

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{B_R} v(x, t, y, s) F(y, s) dy ds + \int_{B_R} f(y) v(x, t, y, 0) dy.$$

Por último, si sustituimos el valor de v tenemos,

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{B_R} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} F(y, s) dy ds + \int_{B_R} f(y) \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy. \quad (2.48)$$

Puesto que ya hemos conjeturado cómo podemos escribir la solución, sólo falta un resultado que nos asegure la regularidad en función de la regularidad de f y F que nos permita concluir que la función u definida por (2.48) es solución del problema (2.40). El siguiente resultado de regularidad de funciones definidas por una integral nos será de gran utilidad.

Lema 2.21. *Sea Ω_1 y Ω_2 abiertos de \mathbb{R}^N .*

1. *Sea $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ verificando:*

- a) *Para cada $x \in \Omega_1$, la función $y \rightarrow f(x, y)$ es integrable.*
- b) *Para cada $y \in \Omega_2$, la función $x \rightarrow f(x, y)$ es continua.*
- c) *Existirá una función no negativa g integrable en Ω_2 tal $|f(x, y)| < g(y)$ para cada $y \in \Omega_2$. Entonces*

$$h(x) = \int_{\Omega_2} f(x, y) dy$$

es continua.

2. *Si además f verifica,*

- d) *Para cada $y \in \Omega_2$, la función $x \rightarrow f(x, y)$ tiene derivadas primeras continuas respecto a $x_i, i = 1, \dots, N$,*
- e) *Existe una función no negativa g integrable en Ω_2 tal que $|\nabla f(x, y)| < g(y)$ para cada $y \in \Omega_2$. Entonces,*

$$h(x) = \int_{\Omega_2} f(x, y) dy$$

tiene derivadas primeras continuas que además se calculan por la fórmula

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega_2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy, \quad i = 1, \dots, N.$$

Demostración.

1. Sea $x_0 \in \Omega_1$ y $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$. Entonces consideremos

$$h(x_k) = \int_{\Omega_2} f(x_k, y) dy.$$

La sucesión de funciones $\{g_k(y) = f(x_k, y)\}_{k \in \mathbb{N}}$ verifica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(y) = f(x_0, y)$$

por la hipótesis de continuidad de f y por $c) |g_k(y)| \leq g(y)$, por consiguiente podemos aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue para concluir que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_2} f(x_k, y) dy = \int_{\Omega_2} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, y) = \int_{\Omega_2} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_0, y) = h(x_0),$$

y como se verifica para cualquier sucesión, quedará probada la continuidad de h .

2. Sea $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tendiendo a cero.
Sea $\{e_i \mid i = 1, \dots, N\}$ la base canónica de \mathbb{R}^N y consideremos

$$\frac{h(x + t_k e_i) - h(x)}{t_k} = \int_{\Omega_2} \frac{1}{t_k} (f(x + t_k e_i, y) - f(x, y)) dy.$$

Por el teorema del valor medio se tiene que

$$\frac{h(x + t_k e_i) - h(x)}{t_k} = \int_{\Omega_2} \frac{\partial f(x + \tau_k(y) e_i, y)}{\partial x_i} t_k dy = \int_{\Omega_2} \frac{\partial f(x + \tau_k(y) e_i, y)}{\partial x_i} dy,$$

donde $0 < \tau_k(y) < 1$. Por la condición $e)$ y la continuidad de las derivadas parciales, resulta

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(x + t_k e_i) - h(x)}{t_k} = \int_{\Omega_2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_i} dy,$$

cualquiera que sea la sucesión, es decir

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x_i} = \int_{\Omega_2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_i} dy,$$

como queríamos demostrar. Por la continuidad de las derivadas parciales se obtiene el apartado 1) de 2.21.

□

A continuación enunciamos un resultado que da condiciones suficientes para la existencia de solución del problema no homogéneo (2.40).

Teorema 2.22. Sea $f(x)$ la función continua y acotada en \mathbb{R}^N y sean $F(x, t)$ y $\frac{\partial F(x, t)}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, N$ funciones continuas y acotadas en $\mathbb{R}^N \times (0, T)$, para algún $T > 0$.

Entonces la función $u(x, t)$ definida para $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T)$ por

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} K_t(x - y)f(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} K_{t-s}(x - y)F(y, s)dyds,$$

verifica

1. $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times [0, T))$,
2. $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times [0, T))$, $\frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times [0, T))$, $i, j = 1, \dots, N$,
3. u es la única solución acotada del problema (2.40).

Demostración.

Denotamos

$$u_1(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} K_t(x - y)f(y)dy$$

y

$$u_2(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} K_{t-s}(x - y)F(y, s)dyds. \quad (2.49)$$

Por el teorema 2.11 la función u_1 verifica (1) y (2). Como consecuencia de (1) resulta que $u_1(x, 0) = f(x)$, y por tanto u_1 es solución del problema homogéneo,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Basta entonces con demostrar que u_2 verifica (1), (2) y es solución del problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F(x, t), & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variable $\frac{x-y}{\sqrt{t-s}} = z$ en la integral (2.49), obtenemos

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} K_{t-s}(x - y)F(y, s)dyds = \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{|x-y|}{\sqrt{t-s}}\right)^2} F(y, s)dyds = \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|z|^2}{4}} F(x - z\sqrt{t-s}, s)(t-s)^{\frac{N}{2}} dzds = \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} K_1(z)F(x - z\sqrt{t-s}, s)dzds. \end{aligned}$$

El integrando, $h(x, z, t, s) = K_1(z)F(x - z\sqrt{t-s}, s)$, es continuo en $x, z \in \mathbb{R}^N$ y $0 < s < t$ verificando además que $\nabla_x h(x, z, t, s)$ es continuo y que

$$|h(x, z, t, s)| = |K_1(z)F(x - z\sqrt{t-s}, s)| \leq \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \sup_{(y, \tau) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]} |F(y, \tau)|,$$

siendo también

$$|\nabla_x h(x, z, t, s)| = K_1(z)|\nabla_x F(x - z\sqrt{t-s}, s)| \leq K_1(z) \sup_{(y, \tau) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]} |\nabla_x F(y, \tau)|, \quad (2.50)$$

donde hemos sustituido el valor de $K_1(z)$. Es decir, tanto h como su gradiente respecto a x están mayorados por funciones integrables. Por consiguiente, si aplicamos (2.43) a la función

$$g(x, t, s) = \int_{\mathbb{R}^N} K_1(z)F(x - z\sqrt{t-s}, s)dz,$$

resultará que es continua y acotada en $\mathbb{R}^N \times [0, T)$, más concretamente,

$$|g(x, t, s)| \leq \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T)} |F(y, s)| \int_{\mathbb{R}^N} K_1(z)dz.$$

Si denotamos por $M = \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T)} |F(y, s)|$ obtenemos

$$|g(x, t, s)| \leq M.$$

Además por continuidad de F , para $s \rightarrow t$, resulta $g(x, t, t) = F(x, t)$. Por consiguiente, tenemos

1. $u_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times (0, \infty))$,
2. $u_2(x, 0) = 0$,
3. La función u_2 es acotada, siendo

$$\sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T)} |u_2(x, y)| \leq MT.$$

Aplicamos ahora la segunda parte del lema 2.43 y tenemos que la función u_2 tiene derivadas primeras continuas verificando

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_i}(x, t) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x - z\sqrt{t-s}, s) dz ds.$$

Integrando por partes resulta

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_i}(x, t) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \frac{z_i}{2} F(x - z\sqrt{t-s}, s) dz ds. \quad (2.51)$$

Por (2.50) podemos aplicar el lema 2.43 a (2.51) y obtenemos que u_2 tiene derivadas segundas respecto a x continuas en $\mathbb{R}^N \times (0, T)$ y en particular se tiene

$$\Delta u_2(x, t) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_0^t \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{t-s}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \frac{z_i}{2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x - z\sqrt{t-s}, s) dz ds. \quad (2.52)$$

Por otra parte, para calcular la derivada con respecto al tiempo t escribimos

$$\begin{aligned} \frac{u_2(x, t+k) - u_2(x, t)}{k} &= \frac{1}{k} \int_0^{t+k} g(x, t+k, s) ds - \frac{1}{k} \int_0^t g(x, t, s) ds = \\ &= \frac{1}{k} \int_t^{t+k} g(x, t+k, s) ds + \int_0^t \frac{g(x, t+k, s) - g(x, t, s)}{k} ds \equiv I_1(k) + I_2(k). \end{aligned}$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo tenemos,

$$\lim_{k \rightarrow 0} I_1(k) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \int_t^{t+k} g(x, t+k, s) ds = \quad (2.53)$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} g(x, t+k, t+k) + \int_t^{t+k} \frac{\partial}{\partial k} g(x, t+k, s) ds = F(x, t). \quad (2.54)$$

Puesto que F tiene derivadas parciales respecto a x , por el lema 2.43 la función $g(x, t, s)$ tiene derivada respecto a t ; además

$$g_t(x, t, s) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \frac{z_i}{2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x - z\sqrt{t-s}, s) dz ds$$

y, por tanto, por (2.50) concluimos que

$$\lim_{k \rightarrow 0} I_2(k) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \frac{z_i}{2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x - z\sqrt{t-s}, s) dz ds. \quad (2.55)$$

En virtud de las igualdades (2.52), (2.53) y (2.55), concluimos que u_2 verifica la ecuación del calor no homogénea, es decir,

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_2 + F,$$

como queríamos probar. □

Capítulo 3

Conclusiones

En el caso unidimensional será posible calcular una solución del problema de valores iniciales y de frontera considerando una función que sea acotada sobre un intervalo finito de \mathbb{R} .

Por otra parte, asumiento que el comportamiento en la variable espacial es periódico, la búsqueda de soluciones al problema lineal permite la implementación del análisis de Fourier para el problema con condiciones de Cauchy. Sin embargo, cuando no se supone la periodicidad de la variable espacial es necesario recurrir al análisis de Fourier no periódico. Por otra parte, el núcleo de Gauss permite demostrar propiedades de regularidad para las diferentes soluciones encontradas pasando así a jugar un papel muy importante en la definición de las soluciones de la ecuación.

Por último, el problema de Cauchy en R^N podrá tener más de una solución. Para la demostración de la unicidad de las soluciones encontradas necesitaremos una versión del principio del máximo para problemas parabólicos donde restringiendo el problema de Cauchy a dominios acotados se tendrá la unicidad buscada.

Bibliografía

- [1] Apostol, T.M. (1976). *Análisis Matemático* (2ª edición). Ed. Reverte.
- [2] Cañada-Villar, A. (2002). *Series de Fourier y Aplicaciones. Un tratado elemental con notas históricas y ejercicios resueltos*. Ed. Pirámide.
- [3] Ibarra, M.d.C. (2014). La ecuación del calor de fourier: Resolución mediante métodos de análisis en variable real y en variable compleja. *II Jornadas de Investigación en Ingeniería del NEA y Países Limítrofes*.
- [4] John, F. (1981). *Partial Differential Equations* (4ª edición). Ed. Springer Verlag.
- [5] Mijailov, V.P. (1978). *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*. Ed. MIR.
- [6] Mizohata S. (1973). *The Theory of Partial Differential Equations*. Ed. Cambridge University Press.
- [7] Myint-U, T. y Debnath, L. (2006). *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Ed. Birkhäuser.
- [8] Peral-Alonso I. (2014). *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Universidad Autónoma de Madrid.
- [9] Protter, M.H. y Weinberger, H.F. (1984). *Maximum Principles in Differential equations*. Ed. Springer Verlag.
- [10] Simmons, G.F. (1991). *Differential Equations with applications and historical notes*. Ed. McGraw-Hill, Inc.
- [11] Treves F. (1975). *Basic linear Partial Differential Equations*. Ed. Academic Press.