

materia
Hidráulica I

unidade didáctica 2

Hidrostática

Iván López Moreira, Rodrigo Carballo Sánchez,

Alberte Castro Ponte

Departamento de Enxeñaría Agroforestal
Escola Politécnica Superior

titulación

Grao en Enxeñaría Civil



VICERREITORÍA DE ESTUDANTES,
CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA



unidade didáctica 2

Hidrostática

**Iván López Moreira, Rodrigo Carballo Sánchez,
Alberte Castro Ponte**
Área de Hidráulica
Departamento de Enxeñaría Agroforestal
Escola Politécnica Superior



© Universidade de Santiago de Compostela, 2013



Esta obra atópase baixo unha licenza Creative Commons BY-NC-SA 3.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-SA 3.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/legalcode.g>

Deseño
Unidixital
Servizo de Edición Dixital
da Universidade de Santiago de Compostela

Edita
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

Imprime
Unidixital
Dep. Legal: C 268-2013
ISBN 978-84-9887-994-0

MATERIA: Hidráulica I

TITULACIÓN: Grao en Enxeñaría Civil

PROGRAMA XERAL DO CURSO

Localización da presente unidade didáctica

Unidade I. Introducción á mecánica de fluídos

Unidade II. Hidrostática

Introdución

Principio de Pascal

Ecuación fundamental da hidrostática

Instrumentación para a medida de presión

Forza hidrostática

Flotación e estabilidade

Unidade III. Cinemática de fluídos

Unidade IV. Dinámica de fluídos. Ecuacións fundamentais

Unidade V. Análise dimensional

ÍNDICE

Presentación	7
Os obxectivos	7
A metodoloxía	8
Os contidos básicos	8
1. Introducción.....	8
2. Principio de Pascal.....	9
3. Ecuación fundamental da hidrostática	10
3.1. Presións relativas e absolutas	11
4. Instrumentación para a medida de presión	12
4.1. Barómetro de mercurio.....	12
4.2. Piezómetro	13
4.3. Manómetro	13
5. Forza hidrostática	14
5.1. Forza hidrostática sobre superficies planas	14
5.1.1. Fluídos estratificados.....	17
5.2. Forza hidrostática sobre superficies curvas	18
6. Flotación e estabilidade	19
6.1. Flotación.....	19
6.2. Estabilidade.....	20
6.2.1. Estabilidade de corpos somerxidos	21
6.2.2. Estabilidade de corpos flotantes	21
Anexos	23
Anexo 1. Boletín de exercicios	23
Avaliación da UD	26
Bibliografía	27

PRESENTACIÓN

Esta unidade didáctica forma parte da materia *Hidráulica I* do segundo curso do *Grao en Enxeñaría Civil*, que se dedica a sentar as bases da enxeñaría hidráulica. Dita materia ten unha carga de 6 créditos ECTS e impártese no primeiro semestre. De entrada non existe ningún prerrequisito legal para poder cursar esta materia. Non obstante, considérase recomendable ter cursado previamente, e superado con éxito, *Matemáticas I, II e III e Física I e II*, por proporcionar unha base axeitada para a correcta comprensión da materia.

Na primeira unidade da materia (UD1), preséntanse os conceptos básicos relacionados coa mecánica de fluídos, desde o seu obxecto ata as súas aplicacións, para rematar co estudo das propiedades dos fluídos. A continuación, na presente unidade didáctica (UD2), estúdanse os conceptos fundamentais da hidrostática. Esta unidade céntrase no estudo da distribución de presións nun fluído estático e nos seus efectos sobre una superficie sólida, así como sobre corpos flotantes e somerxidos. Os seguintes dous temas dedícanse ao estudo dos fluídos en movemento. En primeiro lugar, preséntanse os aspectos relacionados co movemento dos fluídos desde un punto de vista descritivo (UD3), é dicir, sen atender as causas que o provocan. Na seguinte unidade (UD4) explícanse as causas que orixinan dito movemento, describindo as tres ecuacións fundamentais da mecánica de fluídos: a ecuación de continuidade, a ecuación da cantidade de movemento e a ecuación da conservación da enerxía. Finalmente, na derradeira unidade da materia (UD5), expóñense os conceptos básicos da análise dimensional, impartindo nocións básicas de modelización física.

A presente unidade didáctica ten asignadas seis horas de clase de carácter expositivo nas que se desenvolverán os seus contidos; e nove horas de seminario interactivo onde se realizarán exercicios.

OS OBXECTIVOS

A partir do desenvolvemento dos contidos que se expoñen nesta UD preténdese que o alumno domine con claridade os seguintes aspectos:

- coñecer e interpretar a ecuación fundamental da hidrostática;
- definir a relación entre presión absoluta, relativa e atmosférica;
- coñecer os distintos tipos de instrumentos para a medida da presión;
- calcular a forza hidrostática exercida sobre unha superficie somerxida, especificando a súa magnitude, dirección e punto de aplicación;
- definir o termo centro de presións;
- calcular a flotabilidade dun corpo nun fluído;
- coñecer as condicións de estabilidade para un corpo somerxido;
- coñecer as condicións de estabilidade para un corpo flotante;
- definir o termo metacentro e calcular a súa localización.

OS PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

Os principios teóricos e os contidos fundamentais desenvolveranse nas clases expositivas. Empregaranse os medios audiovisuais dispoñibles na aula para a realización de presentacións, axudándose do encerado tanto para as deducións matemáticas como para a realización de exemplos prácticos. Para o seguimento das clases, os alumnos disporán de material didáctico que poderán obter a través da USC virtual. Ademais estimularase aos alumnos para que participen activamente nas clases.

Os contidos desenvolto nas clases expositivas afianzaranse nos seminarios interactivos, nos cales os alumnos resolverán exercicios e problemas relacionados coa hidrostática, que lles permitan aplicar de forma práctica os coñecementos adquiridos. Para o seguimento das actividades os estudantes disporán dun boletín de exercicios (Anexo 1) que poderán obter a través da USC virtual. Durante os seminarios, os alumnos traballarán en grupos reducidos, baixo a supervisión do profesor, sendo fundamental unha participación activa por parte de tódolos membros do grupo. Ao remate da sesión, cada grupo exporá os seus exercicios resoltos para, entre todos, alumnos e profesor, proceder a súa corrección. Ademais, certos problemas e exercicios de interese terán que ser entregados á finalización das sesións de seminario, ou ben nos prazos que no seu momento se determinen no caso de ser preciso traballo autónomo por parte do alumno.

OS CONTIDOS BÁSICOS

1. Introducción

Moitos dos problemas de fluídos non implican movemento, refírense á distribución de presións nun fluído estático e no seu efecto sobre superficies sólidas, así como sobre corpos flotantes e somerxidos (Figura 1). A parte da mecánica de fluídos que se encarga do estudo deste tipo de fluídos en repouso é a estática de fluídos ou hidrostática.



Figura 1. Presa de Aldeadávila (Salamanca) . As presas son un claro exemplo dun problema de hidrostática

Un fluído en repouso é aquel no que a velocidade das partículas é cero,

$$\vec{V} = \vec{0} \quad (1)$$

Neste caso, non existirán tensións tanxenciais no fluído,

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = 0 \quad (2)$$

Polo tanto, nun fluído estático, as partículas só poderán estar sometidas a un estado de compresión pura onde unicamente actúen as tensión normais, que reciben o nome de presión (p).

2. Principio de Pascal

O principio de Pascal ou lei de Pascal, é unha lei enunciada polo físico e matemático francés Blaise Pascal (1623-1662) que se resume na frase: «a presión exercida por un fluído incompresible e en equilibrio, dentro dun recipiente indeformable, transmítese con igual intensidade en todas as direccións e en todos os puntos do fluído».

Para demostrar este principio imos analizar as forzas que actúan sobre a cuña de fluído en repouso da Figura 2, de dimensións dz por dx por ds , cunha profundidade dy cara ao papel.

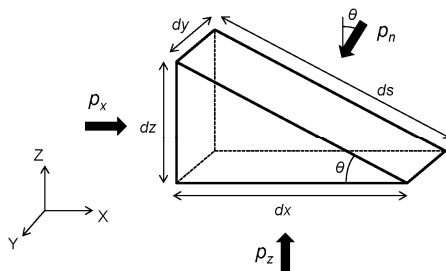


Figura 2. Equilibrio dunha pequena cuña de fluído en repouso

En primeiro lugar imos identificar ditas forzas, denominando o campo de forzas por unidade de masa como

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \quad (3)$$

e o campo de forzas por unidade de volume como

$$\rho \vec{b} = (\rho b_x, \rho b_y, \rho b_z) \quad (4)$$

Dado que o fluído está en repouso (non hai aceleración), a suma das forzas debe ser igual a cero nas direccións X e Z

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow p_x dz dy - p_n \sin(\theta) ds dy + \frac{1}{2} \rho b_x dx dy dz = 0 \quad (5)$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow p_z dx dy - p_n \cos(\theta) ds dy + \frac{1}{2} \rho b_z dx dy dz = 0$$

Tendo en conta a xeometría da cuña de fluído temos que

$$\begin{aligned} dz &= \text{sen}(\theta) ds \\ dx &= \text{cos}(\theta) ds \end{aligned} \quad (6)$$

polo que podemos reescribir a Ecuación (5) do seguinte xeito

$$\begin{aligned} p_x - p_n + \frac{1}{2} \rho b_x dx &= 0 \\ p_z - p_n + \frac{1}{2} \rho b_z dz &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

E finalmente, encollendo a cuña ata que quede reducida a un punto, obtense,

$$\begin{aligned} dx \rightarrow 0 &\Rightarrow p_x = p_n \\ dz \rightarrow 0 &\Rightarrow p_z = p_n \end{aligned} \quad (8)$$

Polo tanto

$$p_x = p_z = p_n = p \quad (9)$$

A tensión normal nun punto calquera dun fluído en repouso é igual a un valor único denominado presión (p). Ou noutras palabras, a presión en calquera punto dun fluído en repouso é independente da dirección. É dicir, se aplicamos presión a un líquido non comprimible nun recipiente pechado, esta transmítese con igual intensidade en todas as direccións e en todos os sentidos.

3. Ecuación fundamental da hidrostática

A continuación imos analizar o que ocorre nun volume diferencial dun fluído en repouso (Figura 3).

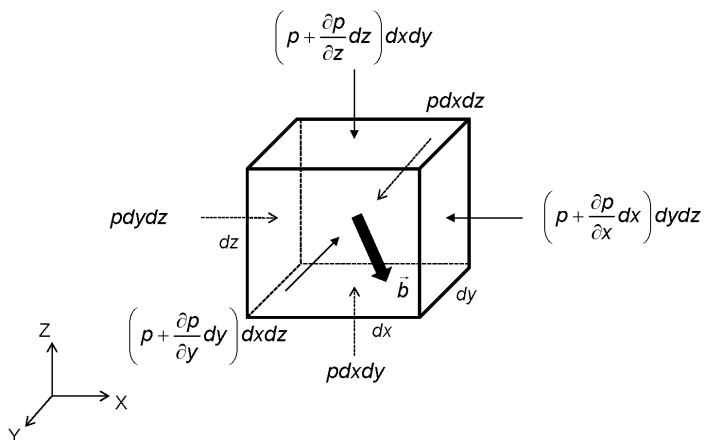


Figura 3. Forzas debidas á presión sobre un elemento de fluído

Formulando novamente un equilibrio de forzas, e reordenando as ecuacións,

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow p \, dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz + \rho b_x dx dy dz = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \rho b_x \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow p \, dx dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dx dz + \rho b_y dx dy dz = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = \rho b_y, \quad (10) \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow p \, dx dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx dy + \rho b_z dx dy dz = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = \rho b_z\end{aligned}$$

Débase resaltar que é o gradiente de presión, e non a presión, o que compensa as forzas por unidade de volume

$$\nabla p = \rho \vec{b} . \quad (11)$$

No caso do campo gravitacional terrestre, temos que

$$\vec{b} = (0, 0, -g) , \quad (12)$$

polo tanto

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g . \quad (13)$$

Desta forma, vemos que p é independente de x e de y , ou o que é o mesmo, só depende de z , polo que podemos escribir

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g . \quad (14)$$

Considerando o fluído incompresible (ρ constante) podemos integrar a expresión anterior entre dous puntos

$$\int_1^2 dp = -\rho g \int_1^2 dz \Rightarrow p_2 - p_1 = -\rho g (z_2 - z_1) , \quad (15)$$

e, finalmente, reordenando os termos e chamándolle h a diferenza de cotas ($z_1 - z_2$), obtemos a expresión da ecuación fundamental da hidrostática

$$p_2 = p_1 + \rho gh . \quad (16)$$

A partires da ecuación fundamental da hidrostática podemos extraer as seguintes conclusións:

- a presión só varía coa posición vertical (z);
- a presión é independente da forma do recipiente onde está confinado o fluído;
- a presión é constante en tódolos puntos dun plano horizontal;
- a presión nun fluído aumenta coa profundidade.

3.1. Presións relativas e absolutas

Para poder calcular a presión é necesario definir un valor de referencia. En enxeñaría a presión adóitase medir de dúas formas.

- Presión absoluta: a presión refírese a un nivel de presión nula (cero absoluto ou baleiro perfecto)

$$p_{ABS} = p_{atm} + \rho gh . \quad (17)$$

- Presión relativa ou manométrica[†]: a presión refírese ao valor da presión atmosférica ($p_{atm} = 101300 \text{ Pa}$)

$$p_{REL} = \rho gh . \quad (18)$$



Figura 4. Distribución de presións absolutas (esq.) e relativas (der.)

4. Instrumentación para a medida de presión

4.1. Barómetro de mercurio

O barómetro de mercurio é un instrumento empregado para medir a presión atmosférica. Está formado por un tubo de vidro pechado nun dos extremos. Dito tubo é enchese completamente de mercurio e invértese somerxendo o extremo aberto no mercurio contido nunha cubeta ou depósito (Figura 5).

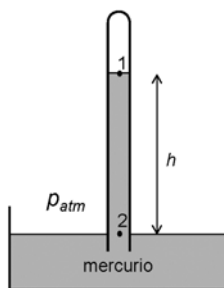


Figura 5. Esquema dun barómetro

O tubo baléirase en parte, producíndose un baleiro case perfecto na parte superior que contén vapor de mercurio —a presión de vapor do mercurio a temperatura ambiente ten un valor moi baixo (0,16 Pa a 20° C). Desta forma, no interior do tubo queda unha columna de mercurio cuxo peso é soportado pola presión que exerce a atmosfera sobre a superficie libre do

[†] De aquí en diante cando falemos de presión, se non se especifica o contrario, estarémonos referindo a presións relativas.

mercurio da cubeta. A diferenza de niveis (h) entre a superficie libre do mercurio no tubo e na cubeta permitiranos calcular a presión atmosférica (Ecuación 20).

$$\begin{cases} p_1 \approx 0 \\ p_2 = p_{atm} \end{cases} \quad (19)$$

$$p_2 = p_1 + \rho gh \Rightarrow p_{atm} = \rho_{Hg} gh . \quad (20)$$

4.2. Piezómetro

O piezómetro é un instrumento empregado para medir a presión no interior dun conduto. Consiste nun tubo de pequeno diámetro que se conecta ao punto onde se quere medir a presión, denominado orificio piezométrico (Figura 6).

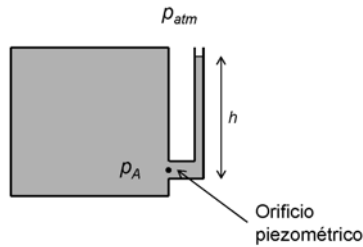


Figura 6. Esquema dun piezómetro

A medición realízase a partir da altura de ascensión do fluído no tubo piezométrico

$$p = p_{atm} + \rho gh . \quad (21)$$

4.3. Manómetro

Cando o fluído de traballo ten densidades altas e as presións a medir son tamén altas, o uso do piezómetro é dificultoso xa que a columna de fluído alcanza alturas moi grandes.

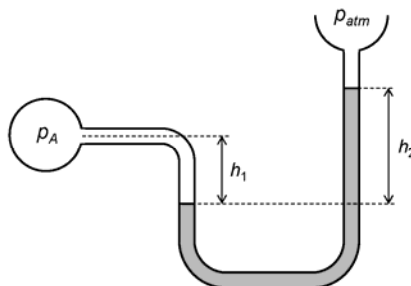


Figura 7. Esquema dun manómetro

Neste caso empregase o manómetro, que é un instrumento que mide a presión entre dous puntos utilizando un fluído auxiliar de maior densidade para así reducir a altura da columna (Figura 7).

Nun manómetro o valor da presión nun punto obtense a partir das alturas de ascensión da columna de cada un dos fluídos

$$p = p_{atm} + \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1 . \quad (22)$$

5. Forza hidrostática

Toda superficie somerxida nun fluído en repouso estará sometida a presións estáticas de compresión. Polo tanto, teremos unhas forzas actuando sobre estas superficies. Este tipo de forzas constitúen a principal solicitación no deseño de obras de contención de fluídos, tales como presas.

Como toda forza, a forza hidrostática é unha magnitude vectorial, polo tanto, para definila adecuadamente imos precisar coñecer o seu módulo, a súa dirección e o seu punto de aplicación.

Dado que, primeiro, a forza hidrostática é a forza provocada por la presión que exerce un fluído en repouso sobre una superficie; e segundo, nun fluído en repouso non pode haber tensións tanxenciais, conclúese que a dirección da forza hidrostática debe ser sempre perpendicular á superficie sobre a que actúa a presión do fluído.

Unha vez coñecida a dirección da forza, nos seguintes apartados determinaremos a súa magnitude e punto de aplicación, tanto para superficies planas como curvas.

5.1. Forza hidrostática sobre superficies planas

Imos considerar o caso máis xeral: unha placa plana somerxida, de forma arbitraria e cunha certa inclinación θ (Figura 8).

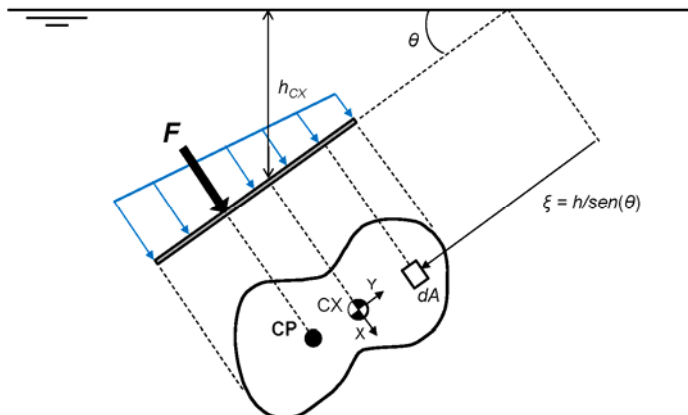


Figura 8. Forza hidrostática (F) e centro de presións (CP) nunha superficie plana somerxida, de xeometría arbitraria e inclinada un ángulo θ

Se h é a profundidade dun diferencial de área (dA) desta placa, a presión sobre este dA é

$$p(x, y) = \rho gh(x, y) . \quad (23)$$

Polo tanto, a forza hidrostática sobre a placa é

$$F = \int_A dF = \int_A p(h) dA = \int_A \rho gh dA = \rho g \int_A h dA . \quad (24)$$

Establecendo un eixe de coordenadas (x, y) con orixe no centro xeométrico da placa (CX), e definindo unha coordenada auxiliar ξ con orixe na superficie libre e dirección paralela á inclinación da placa, de forma que

$$h = \xi \text{ sen}(\theta) , \quad (25)$$

podemos integrar a expresión da forza do seguinte xeito

$$F = \rho g \int_A \xi \text{ sen}(\theta) dA = \rho g \text{ sen}(\theta) \int_A \xi dA . \quad (26)$$

E tendo en conta que, por definición, a distancia entre a superficie libre e o centro xeométrico da placa ao longo da dirección paralela á inclinación da mesma é

$$\xi_{CX} = \frac{1}{A} \int_A \xi dA , \quad (27)$$

obtemos que o valor da forza hidrostática é

$$F = \rho g \text{ sen}(\theta) \xi_{CX} A . \quad (28)$$

Combinando esta ecuación coa Ecuación (25) obtemos o valor da forza

$$F = \rho gh_{CX} A = p_{CX} A . \quad (29)$$

É dicir, o modulo da forza hidrostática que actúa sobre unha superficie plana somerxida é igual á presión no centro xeométrico da placa pola área da mesma, con independencia tanto da forma da placa como do ángulo θ co que estea inclinada.

Finalmente, para calcular a coordenada y_{CP} do punto de aplicación da forza hidrostática, chamado centro de presións (CP), tomamos momentos con respecto ao centro xeométrico

$$F y_{CP} = \int y p dA = \int y \rho g \xi \text{ sen}(\theta) dA = \rho g \text{ sen}(\theta) \int y \xi dA . \quad (30)$$

Neste punto facemos o seguinte cambio de variable

$$\xi = \xi_{CX} - y . \quad (31)$$

Operando

$$\begin{aligned} F y_{CP} &= \rho g \text{ sen}(\theta) \int y (\xi_{CX} - y) dA \\ &= \rho g \text{ sen}(\theta) \xi_{CX} \int y dA - \rho g \text{ sen}(\theta) \int y^2 dA \end{aligned} \quad (32)$$

e tendo en conta que da definición de eixes centroidais

$$\int y dA = 0 , \quad (33)$$

e que o momento de inercia de área respecto ao eixe X (I_{xx}) se define como

$$I_{xx} = \int y^2 dA , \quad (34)$$

a expresión da coordenada y_{CP} do centro de presións é

$$y_{CP} = - \frac{\rho g \operatorname{sen}(\theta) I_{xx}}{F} . \quad (35)$$

A segunda coordenada do centro de presións (x_{CP}) calcularémola seguindo o mesmo procedemento

$$\begin{aligned} F x_{CP} &= \int x p dA = \int x \rho g (\xi_{CX} - y) \operatorname{sen}(\theta) dA \\ &= \rho g \operatorname{sen}(\theta) \xi_{CX} \int x dA - \rho g \operatorname{sen}(\theta) \int xy dA \end{aligned} \quad (36)$$

Deste xeito, a expresión da coordenada x_{CP} do centro de presións é

$$x_{CP} = - \frac{\rho g \operatorname{sen}(\theta) I_{xy}}{F} , \quad (37)$$

sendo neste caso I_{xy} o produto de inercia da placa, definido como

$$I_{xy} = \int xy dA . \quad (38)$$

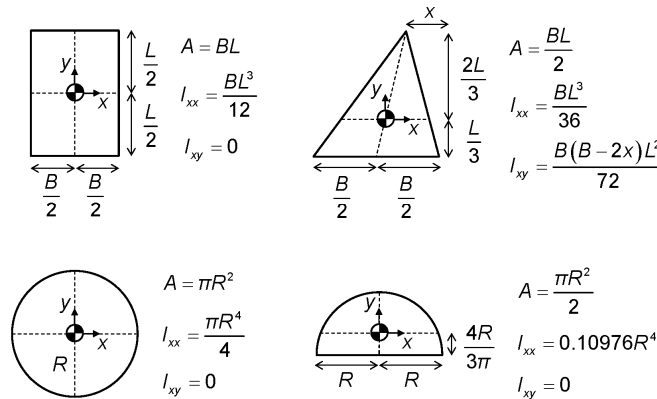


Figura 9. Momentos de inercia de área respecto do eixe X (I_{xx}) e produto de inercia (I_{xy}) para distintas superficies planas

Outro posible enfoque para a determinación da forza hidrostática vén dado polo concepto de prisma de presións. Denomínase deste xeito ao volume prismático cuxa base é a superficie sobre a cal se está a calcular a forza hidrostática, e cuxa altura nun punto calquera da base vén dada por $p = \rho gh$, sendo h a profundidade de cada punto. Aínda que utilizando o prisma de presións se pode resolver calquera caso, é nos máis sinxelos, como por exemplo no cálculo da forza hidrostática sobre unha superficie vertical (Figura 10), onde o prisma de presións pode ser o método máis conveniente pola súa simplicidade fronte as formulacións anteriores.

A primeira propiedade do prisma de presións é que o seu volume é igual á forza hidrostática. Para explicar esta afirmación imos aplicar a Ecuación (24) sobre a superficie vertical da Figura 10, pero esta vez

substituíndo nela a seguinte expresión, $dA = Bdh$, onde B é o ancho da placa segundo o eixe X ,

$$\begin{aligned}
 F &= \int_A dF = \int_A p(h) dA = \rho g \int_A h dA \\
 &= \rho g \int_0^L h B dh = \rho g B \int_0^L h dh = \frac{1}{2} \rho g B L^2 = V_P
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Demóstrase así que a forza hidrostática sobre unha superficie é igual ao volume do prisma de presións (V_P) sobre dita superficie.

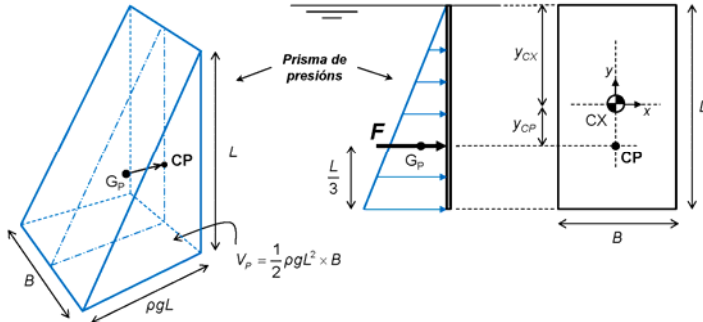


Figura 10. Prisma de presións nunha superficie vertical

A outra propiedade do prisma de presións é que a liña de acción da forza hidrostática pasa polo seu centro de gravidade (G_P), tal e como se demostra analizando a placa vertical da Figura 10,

$$L - (y_{CX} + |y_{CP}|) = L - \left(\frac{L}{2} + \frac{\rho g \operatorname{sen}(\theta) I_{xx}}{\rho g h_{CX} A} \right) = L - \frac{L}{2} - \frac{\rho g \frac{BL^3}{12}}{\rho g \frac{L}{2} BL} = \frac{L}{3} .$$

(40)

5.1.1. Flúidos estratificados

Se non estamos a traballar cun único flúido, senón que nos encontramos ante varios flúidos de diferentes densidades estratificados en capas (Figura 11), a pendente da distribución de presións cambiará entre as capas.

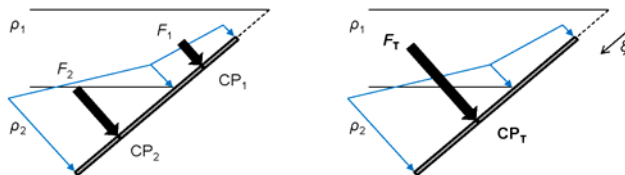


Figura 11. Forza hidrostática (F) e centro de presións (CP) nunha superficie plana somerxida no caso de haberen fluídos estratificados

Neste caso, é necesario calcular a forza hidrostática por separado, capa por capa

$$F_i = p_{cx_i} A_i . \quad (41)$$

Sendo entón a forza hidrostática total a suma das forzas de cada estrato

$$F_T = \sum F_i . \quad (42)$$

Para calcular o centro de presións séguese un procedemento similar. En primeiro lugar calcularanse as coordenadas dos centros de presión de cada un dos estratos

$$y_{CPI} = -\frac{\rho_i g \operatorname{sen}(\theta) I_{xxi}}{F_i} \quad x_{CPI} = -\frac{\rho_i g \operatorname{sen}(\theta) I_{xyi}}{F_i} . \quad (43)$$

A continuación, o centro de presións global acharase tomando momentos respecto dun punto (xeralmente a superficie libre)

$$F_T \xi_{CPT} = \sum F_i \xi_{CPI} , \quad (44)$$

sendo ξ a coordenada auxiliar definida anteriormente.

5.2. Forza hidrostática sobre superficies curvas

Imos considerar agora unha superficie curva somerxida de forma arbitraria. Neste caso, é preferible calcular a forza hidrostática a partir das súas compoñentes horizontal e vertical (Figura 12).

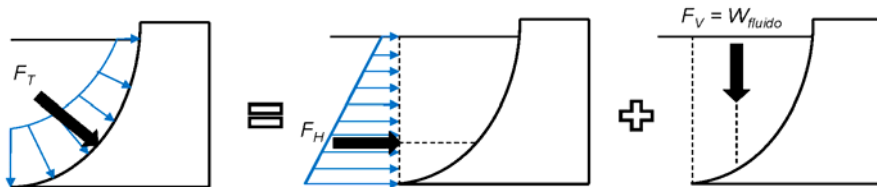


Figura 12. Cálculo da forza hidrostática sobre unha superficie curva

A compoñente horizontal (F_H) é igual a forza que exerce dito líquido sobre a proxección da superficie sobre un plano vertical normal a compoñente. Ademais, a liña de acción desta compoñente pasa polo centro de presións da proxección vertical.

$$F_H = \int_{A_v} dF_H = \int_{A_v} p dA_v = \rho g \int_{A_v} h dA_v = \rho g h_{cx} A_v . \quad (45)$$

Por outra banda, a compoñente vertical (F_V) é igual en magnitude e en dirección ao peso da columna de líquido (ou líquidos) que se encontra por riba da superficie curva.

$$F_V = \int_{A_H} dF_V = \int_{A_H} p dA_H = \rho g \int_V dV = \rho g V , \quad (46)$$

sendo V o volume da columna de líquido.

Finalmente, o módulo da forza hidrostática total será entón

$$F_T = \sqrt{(F_H)^2 + (F_V)^2} , \quad (47)$$

e o ángulo da liña de acción en relación coa horizontal,

$$\varphi = \arctan\left(\frac{F_V}{F_H}\right) . \quad (48)$$

6. Flotación e estabilidade

6.1. Flotación

Os mesmos principios utilizados para calcular as forzas hidrostáticas sobre superficies, pódense aplicar ao cálculo da forza neta sobre un corpo nun fluído, ben flotante ou ben completamente somerxido. Como resultado, obtéñense as dúas leis da flotabilidade descubertas por Arquímedes (214-212 a.C.). A primeira di que:

1. «Un corpo somerxido nun fluído experimenta unha forza vertical cara arriba (forza de flotación ou empuxe) igual ao peso do volume de fluído que despraza».

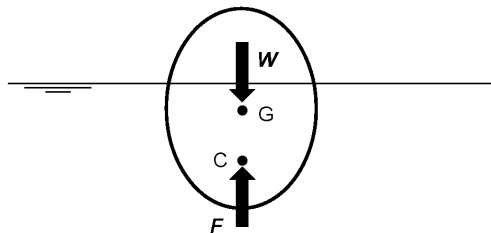


Figura 13. Corpo flotante

- **Plano de flotación:** superficie libre do fluído e a súa prolongación no corpo
- **Área de flotación:** intersección do plano de flotación co corpo
- **Volumen de carena (V_C):** volumen somerxido do corpo
- **Centro de carena (C):** centro de xeométrico do volumen de carena (punto de aplicación da forza de flotación)
- **Centro de gravidade do corpo (G)**
- **Eixe de flotación:** eixe perpendicular ao plano de flotación que pasa polo centro de carena
- **Metacentro (M):** intersección do eixe vertical dun corpo (que pasa polo centro de gravidade) co eixe de flotación dese corpo cando este xira levemente (ver Figura 15)

O principio de Arquímedes pódese demostrar facilmente analizando as forzas hidrostáticas que actúan sobre un corpo somerxido, por exemplo un cubo (Figura 14).

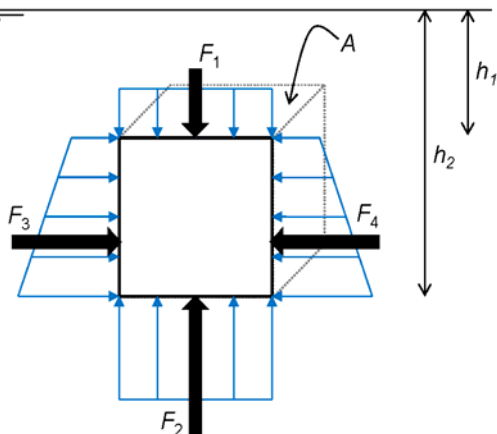


Figura 14. Forzas que actúan sobre un corpo somerxido

As forzas horizontais (F_3 e F_4) son iguais pero de signo oposto; polo tanto, anúlense. Considerando o valor das dúas forzas verticais restantes, pódese comprobar que a forza neta resultante (tomando como positivo o sentido cara á superficie libre) é igual ao peso do volume de fluído desprazado polo corpo,

$$\left. \begin{array}{l} F_1 = \rho g h_1 A \\ F_2 = \rho g h_2 A \end{array} \right\} F = \rho g (h_2 - h_1) A = \rho g V \quad . \quad (49)$$

Se o peso do corpo é superior á forza de flotación, o corpo fúndese indefinidamente ata tocar fondo. Por contra, cando o valor da forza de flotación é superior ao peso do corpo, este ascende cara á superficie ata se equilibraren ámbalas dúas forzas (ao ascender o corpo, o volume de carena redúcese e, polo tanto, tamén o fai a forza de flotación), momento no cal o corpo ficará flotando. De aquí xorde a segunda lei de Arquímedes da flotabilidade:

2. «Un corpo flotante despraza o seu propio peso no fluído no que flota».

Ocasionalmente, un corpo pode ter un peso exactamente igual o peso do volume de fluído que desaloxa. Neste caso o corpo terá unha flotabilidade neutra e ficará en repouso en calquera punto do fluído no que se somerxa.

6.2. Estabilidade

Un corpo, ben somerxido nun fluído ou ben flotante, considérase estable se volta á súa posición orixinal despois de darlle un pequeno xiro ao redor dun eixe horizontal.

6.2.1. Estabilidade de corpos somerxidos

Atendendo a súa estabilidade, un corpo somerxido (Figura 15) pódese encontrar en tres situacións:

- equilibrio estable: o centro de gravidade (G) atópase por debaixo do centro de carena (C). Entón, ao producirse unha perturbación no corpo, o peso (W) e a forza hidrostática (F) xeran un momento que tende a restablecer o equilibrio (Figura 15-A);
- equilibrio inestable: o centro de gravidade (G) atópase por riba do centro de carena (C). Neste caso, o producirse unha perturbación no corpo, o peso (W) e a forza hidrostática (F) xeran un momento que tende a aumentar aínda máis o desequilibrio (Figura 15-B);
- equilibrio indiferente: o centro de gravidade (G) e o centro de carena (C) coinciden no mesmo punto.

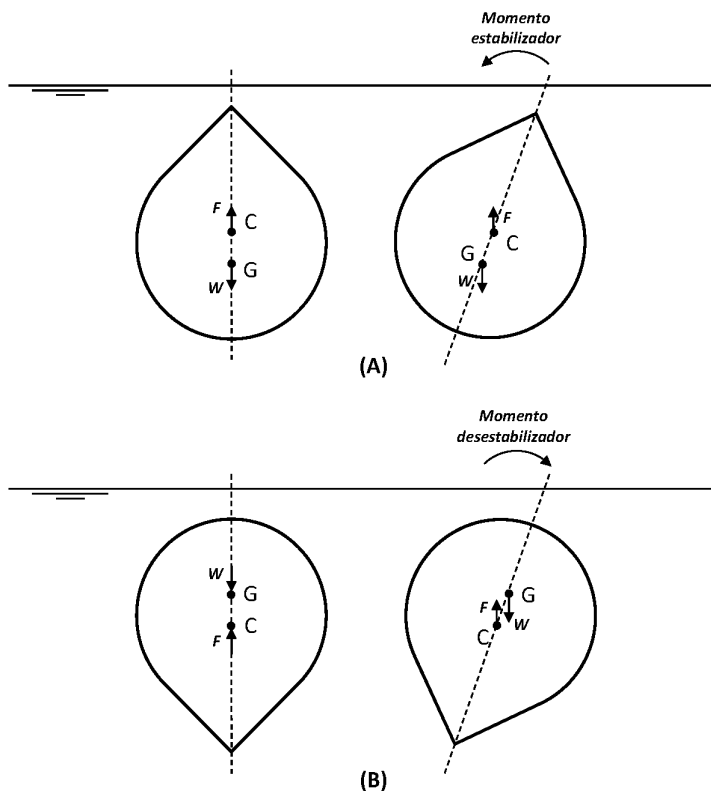


Figura 15. Corpo somerxido en equilibrio estable (A) e inestable (B)

6.2.2. Estabilidade de corpos flotantes

Ao igual que ocorre nos corpos somerxidos, un corpo flotante (Figura 16) pódese encontrar en tres situacións, aínda que neste caso as condicións de estabilidade mudan con respecto ao caso anterior:

- equilibrio estable: o metacentro (M) está por riba do centro de gravidade (G). Entón, ao producirse unha perturbación no corpo, o peso (W) e a forza hidrostática (F) xeran un momento que tende a restablecer o equilibrio (Figura 16-A);
- equilibrio inestable: o metacentro (M) está por debaixo do centro de gravidade (G). Neste caso, ao producirse unha perturbación no corpo, o peso (W) e a forza hidrostática (F) xeran un momento que tende a aumentar aínda máis o desequilibrio (Figura 16-B);
- equilibrio indiferente: o metacentro (M) coincide co centro de gravidade (G).

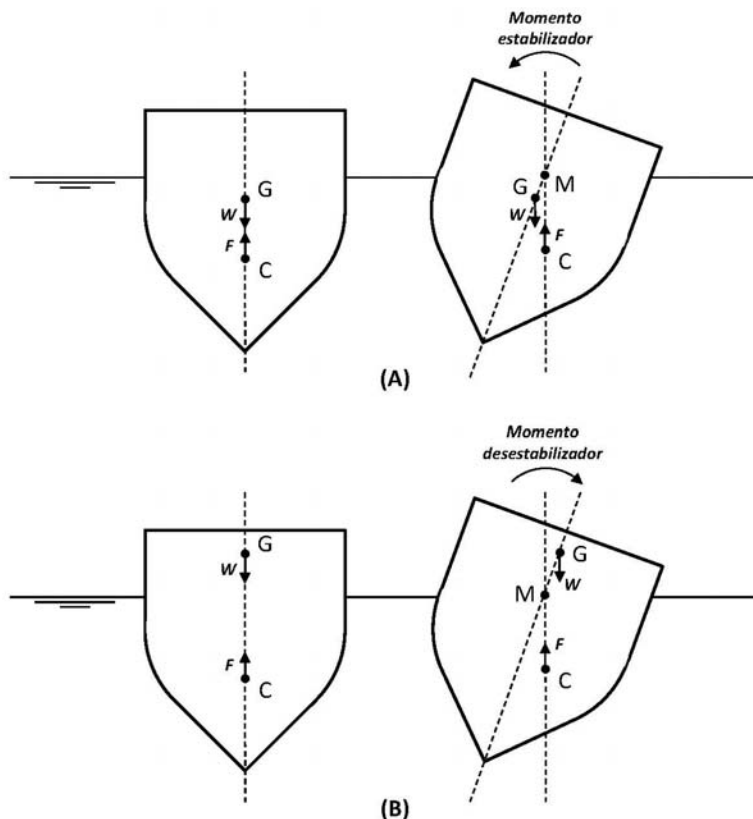


Figura 16. Corpo flotante en equilibrio estable (A) e inestable (B)

No caso dun corpo flotante é posible determinar de forma analítica se é ou non estable. Para isto é necesario calcular a distancia entre o metacentro e o centro de carena (MC)

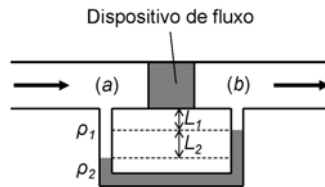
$$MC = \frac{I_0}{V_C}, \quad (50)$$

onde V_C é o volume de carena e I_0 é o segundo momento de inercia (ou momento de inercia de área) da área de flotación máis pequeno posible. Se a distancia MC sitúa o metacentro por riba do centro de gravidade, o corpo é estable.

ANEXOS

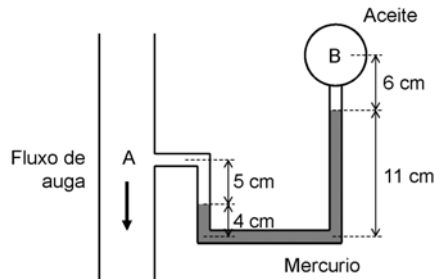
Anexo 1. Boletín de ejercicios

1. Unha aplicación típica dun manómetro é a medida dos cambios de presión producidos a través dun dispositivo de fluxo como o da figura. Obteña unha expresión para a diferenza de presións $p_a - p_b$ en función dos parámetros do sistema da figura.



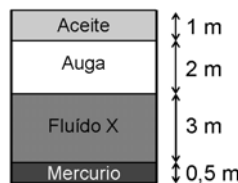
2. A lectura da presión manométrica en B utilízase para medir a presión no punto A dun fluxo de auga. Se a presión no punto B é de 87 kPa, estime a presión en A en kPa.

$$(\rho_{auga} = 1000 \text{ kg/m}^3, \rho_{mercurio} = 13600 \text{ kg/m}^3, \rho_{aceite} = 891 \text{ kg/m}^3)$$

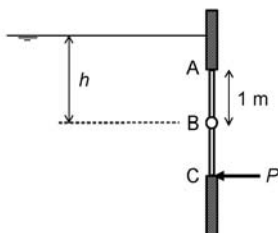


3. Sabendo que a presión atmosférica é de 101300 Pa e que a presión absoluta na parte inferior do depósito da figura é de 242 kPa, cál a densidade relativa do fluído X?

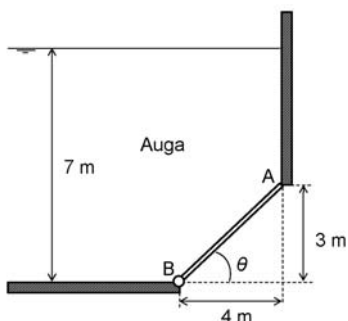
$$(\gamma_{auga} = 9810 \text{ N/m}^3, \gamma_{mercurio} = 133100 \text{ N/m}^3, \gamma_{aceite} = 8720 \text{ N/m}^3)$$



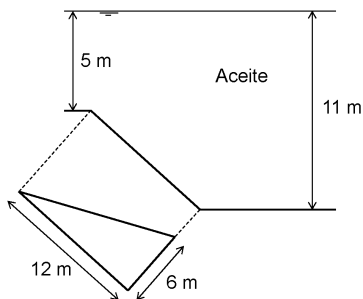
4. A comporta circular ABC ten un raio de 1 m e está articulada no punto B. O fluído é auga ($\rho_{auga} = 1000 \text{ kg/m}^3$) e pódese desprezar a presión atmosférica. (a) Calcule a forza P mínima necesaria para manter a comporta pechada cando $h = 8 \text{ m}$. (b) Repita o problema obtendo unha expresión analítica de P en función de h . Que se observa?



5. A comporta da figura ten 3 m de anchura, está articulada no punto B e descansa sobre unha parede lisa no punto A. Calcule (a) a forza sobre a comporta debida á presión da auga, (b) a forza horizontal que se exerce sobre a parede no punto A e (c) as reaccións na articulación B.
 $(\rho_{auga} = 1000 \text{ kg/m}^3)$



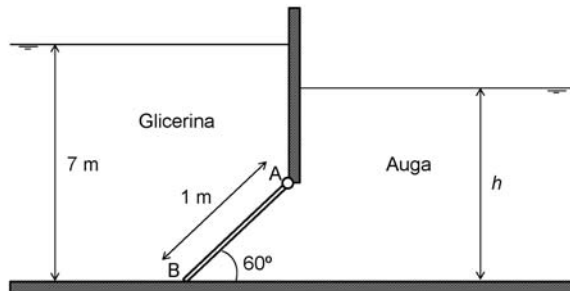
6. Un depósito de aceite $(\rho_{aceite} = 800 \text{ kg/m}^3)$ ten unha zona do seu fondo en forma de triángulo rectángulo, como se mostra na figura. Determine (a) a forza hidrostática sobre esta zona e (b) o centro de presións.



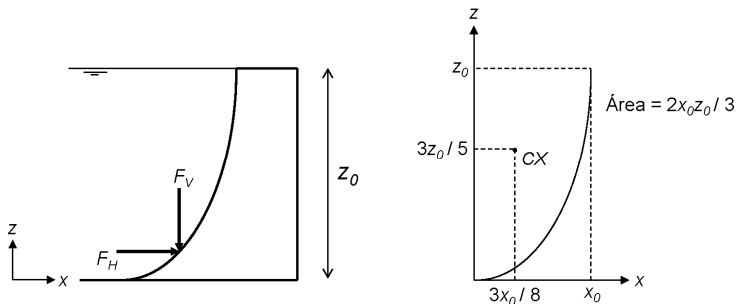
7. Un depósito de base cadrada de 3 m de lado e 6 m de profundidade contén 3 m de aceite, 2 m de auga e 1 m de mercurio. Calcule a forza hidrostática total e a posición do centro de presións sobre unha das paredes laterais. Supóñase desprezable o efecto da presión atmosférica.

$$(\rho_{auga} = 1000 \text{ kg/m}^3, \rho_{mercurio} = 13600 \text{ kg/m}^3, \rho_{aceite} = 891 \text{ kg/m}^3)$$

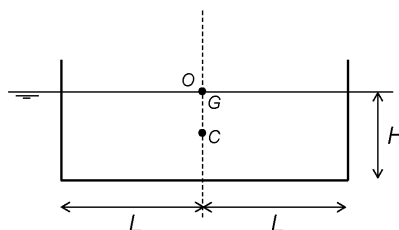
8. A comporta AB da figura é unha masa homoxénea de 180 kg, 1,2 m de anchura, e está articulada en A e apoiada en B. A que profundidade h de auga se anula a forza no punto B?
 ($\rho_{auga} = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{glicerina} = 1260 \text{ kg/m}^3$)



9. Unha presa de 15 m de anchura ten unha forma parabólica como se mostra na figura, con $x_0 = 3 \text{ m}$ e $z_0 = 7 \text{ m}$. O fluído é auga ($\rho_{auga} = 1000 \text{ kg/m}^3$) e pódese desprezar a presión atmosférica. Calcule a forza hidrostática resultante e o seu punto de aplicación sobre a presa. As propiedades da parábola móstranse na figura.



10. Unha barcaza ten unha sección transversal uniforme rectangular de anchura $2L$ e calado H , como se mostra na figura. Determine (a) a altura metacéntrica para un pequeno ángulo de balance e (b) o rango do cociente L/H para que a barcaza sexa estaticamente estable. Supóñase que o centro de gravidade está exactamente na liña de flotación, tal como se mostra na figura.



AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

A avaliación desta UD farase no conxunto da materia mediante un sistema de avaliación continua. Os diferentes aspectos que se avaliarán, os criterios e instrumentos que se empregarán, así como o seu valor na cualificación final do alumno recóllense na Táboa 1.

Táboa 1. Aspectos, criterios e instrumentos de avaliación

Aspectos	Criterio	Instrumento	Valor (%)
Clases expositivas	<ul style="list-style-type: none">- Asistencia- Coñecementos teóricos	<ul style="list-style-type: none">- Folla de sinaturas- Observacións e anotacións	20%
Seminarios interactivos	<ul style="list-style-type: none">- Asistencia- Participación- Capacidade de traballo en grupo- Resolución de exercicios e problemas	<ul style="list-style-type: none">- Folla de sinaturas- Observacións e anotacións- Entrega de problemas e exercicios	30%
Exame	<ul style="list-style-type: none">- Coñecementos teóricos- Resolución de exercicios e problemas	<ul style="list-style-type: none">- Proba escrita	50%

BIBLIOGRAFÍA

- MOTT, Robert L. (2006): *Mecánica de Fluidos*, Prentice Hall.
- WHITE, Frank (2003): *Mecánica de Fluidos*, McGraw Hill.
- SHAMES, Irving H. (1995): *Mecánica de Fluidos*, McGraw Hill.
- STREETER, Victore e Benjamin WYLIE (1988): *Fluid Mechanics*, Boston: WCB/McGraw Hill.
- FRANZINI, Joseph e Jhon FINNEMORE (1999): *Mecánica de Fluidos con aplicaciones en ingeniería*, McGraw Hill.
- GILES, Ranald V. (1979): *Mecánica de los fluidos e hidráulica*, McGraw Hill.



Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade



Impreso en papel 100% reciclado e libre de cloro



SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA



9 788498 879940