



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Los Espacios de Sobolev-Bochner

Manuel Modroño Beires-Dias

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Los Espacios de Sobolev-Bochner

Manuel Modroño Beires-Dias

Julio 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: Los Espacios de Sobolev-Bochner
Breve descripción do contido
En este trabajo se estudiarán los espacios de Sobolev-Bochner. Se empezará introduciendo brevemente contenidos fundamentales para su construcción y estudio, se definirán y caracterizarán dichos espacios y finalizaremos con una aplicación a la resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales.
Recomendacións
Outras observacións

Índice general

Resumen	VIII
Introducción	XI
1. Preliminares	1
1.1. Espacios de Banach	1
1.1.1. Otras propiedades	3
1.2. Espacios L^p	4
1.3. Tipos de convergencia	5
1.4. Teoría de distribuciones	7
1.4.1. Espacios de Sobolev	12
2. La integral de Bochner	15
2.1. Funciones medibles	15
2.2. La integral de Bochner	16
2.3. Propiedades de la integral de Bochner	18
2.4. Espacios L^p revisitados	21
3. Los espacios de Sobolev-Bochner	23
3.1. Derivadas débiles	23
3.2. Los espacios $W^{m,p}(\Omega; Y)$	24
3.3. Propiedades de los espacios $W^{m,p}(\Omega; Y)$ y $\mathcal{AC}(I; Y)$	25
3.4. Triples de evolución y compacidad	30
4. Aplicaciones a las EDP	37
4.1. La ecuación del calor. Motivación general de solución.	37
4.2. Existencia y unicidad de solución. Acotación con respecto a los datos.	41
4.3. Resolución numérica del problema (discretización espacial)	48
4.4. Simulación del problema con FreeFem++	52

4.4.1. Planteamiento de la aproximación	52
4.4.2. Test del error	55
A. Conceptos previos	59
A.1. Integración de Lebesgue	59
A.1.1. Espacios de medida	59
A.1.2. Concepto de medida	59
A.1.3. Funciones medibles	61
A.1.4. La integral de Lebesgue	61
B. Código programa principal	69
C. Código programa autofunciones	77
Bibliografía	81

Resumen

En este trabajo hablaremos sobre los espacios de Sobolev-Bochner $W^{m,p}(B)$. Estos espacios son una generalización de los espacios de Sobolev $W^{m,p}(I)$, cuya construcción se debe al matemático ruso Serguéi Sobolev. No obstante, para poder definir los espacios de Sobolev-Bochner a partir de estos últimos será necesario debilitar la noción clásica de derivada y definir un nuevo tipo de integral, además de dejar atrás el uso de funciones con valores en un espacio vectorial de dimensión finita para emplear funciones cuya imagen esté contenida en un espacio de Banach genérico. Además, los espacios de Sobolev-Bochner $W^{m,p}(B)$ tienen especial interés, sobre todo, en el estudio de la existencia de soluciones de ciertas ecuaciones en derivadas parciales como, por ejemplo, las ecuaciones de evolución parabólicas. Entre dichas ecuaciones se encuentra la ecuación del calor, cuyo análisis matemático está entre los objetivos de este trabajo.

Abstract

In this document we will talk about the Sobolev-Bochner spaces $W^{m,p}(B)$. These spaces are a generalisation of the Sobolev spaces $W^{m,p}(I)$, whose construction is due to the Russian mathematician Serguéi Sobolev. However, in order to define the Sobolev-Bochner spaces from the latter, it will be necessary to weaken the classical notion of derivative and to define a new type of integral, as well as to leave behind the use of functions with values in a finite-dimensional vector space in order to use functions whose image is contained in a generic Banach space. Furthermore, the Sobolev-Bochner spaces $W^{m,p}(B)$ are of special interest, above all, in the study of the existence of solutions of certain equations in partial derivatives such as, for example, the parabolic evolution equations. Among these equations is the heat equation, whose mathematical analysis is among the objectives of this work.

Introducción

Aunque los primeros conceptos matemáticos aparecieron muy temprano (sobre el 2000 a.C), los primeros desarrollos en el campo del análisis matemático no aparecen hasta mediados del siglo XVIII con la definición formal de límite. Aunque dicho campo fue avanzando dando pasos muy pequeños durante el siglo XIX, ya a principios del siglo XX, el cálculo se formaliza usando la teoría de conjuntos. En esta época, Lebesgue resuelve el problema de la medida y David Hilbert introduce los espacios de Hilbert para resolver ecuaciones integrales. Más adelante, la idea de espacios vectoriales normados estuvo en ciernes y en los años 1920 Banach crea el análisis funcional. Todos estos descubrimientos y algunos todavía más recientes son necesarios para poder llegar a conceptos más sutiles del análisis matemático, como pueden ser los espacios de Sobolev-Bochner, en los que nos vamos a centrar en este trabajo.

Sin embargo, aunque dichos espacios recogen los nombres de los matemáticos Serguéi Sobolev, quien definió y caracterizó los espacios de Sobolev $W^{m,1}(\Omega)$ y Salomon Bochner, quien construyó una integral que generaliza la de Lebesgue, también intervinieron prestigiosos matemáticos como Banach, en el sentido de que definiendo los espacios de Banach abrió las puertas a muchos matemáticos para que intentasen trasladar los resultados que ya existían en espacios más concretos, y Laurent Schwartz, a quien se le atribuye el desarrollo de la teoría de las distribuciones.

Dada la gran cantidad de conceptos que son necesarios para entender el tema central de este trabajo, en el primer capítulo deberemos empezar introduciendo los espacios de Banach y algunas de sus propiedades más importantes, así como un breve recordatorio de los espacios L^p , ya estudiados en el curso de Cálculo Vectorial e Integración de Lebesgue. Por otra parte, trataremos algunos conceptos topológicos como los distintos tipos de espacios según la convergencia de sus elementos, además de una introducción a la teoría de distribuciones. Por último, finalizaremos el primer capítulo con una breve definición de los espacios de Sobolev.

Una vez introducidos la mayor parte de los conceptos previos necesarios, en el segundo capítulo pasamos a generalizar la integral de Lebesgue. Para ello, definiremos un nuevo

tipo de integral, la integral de Bochner, la cual se define en espacios más genéricos que la integral de Lebesgue.

Ya adentrados en el capítulo tercero estudiaremos los espacios de Sobolev-Bochner, que no son más que los espacios de Sobolev ya definidos en el primer capítulo con la salvedad de que sus elementos toman valores en un espacio de Banach. También enunciaremos importantes resultados sobre ellos, que nos ayudarán a comprender un poco mejor sus propiedades más interesantes.

Para acabar con este trabajo, en el capítulo cuarto estudiaremos una de las aplicaciones que tienen los espacios que hemos presentado al análisis matemático de ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico. En él presentaremos una formulación de la ecuación del calor y, después, estudiaremos algunos resultados sobre la existencia y unicidad de solución de ella. Para terminar, expondremos un ejemplo de resolución de la ecuación del calor junto con una simulación numérica empleando el método de Elementos Finitos. Dicha simulación nos permitirá comprobar que las técnicas que hemos estudiado para analizar la existencia de solución desde un punto de vista matemático, proporcionan también un algoritmo numérico para aproximar la solución del problema continuo.

Capítulo 1

Preliminares

Para el desarrollo de esta sección nos hemos apoyado en fuentes bibliográficas como [Bartle, 1995], además de [Leoni, 2017] y [Brezis, 2011]. En esta primera sección empezaremos a tratar algunos temas fundamentales para poder definir los espacios de Sobolev, tales como los espacios de Banach, los espacios L^p , algunos conceptos topológicos, tipos de convergencia, y por último, una breve descripción de la teoría de distribuciones.

1.1. Espacios de Banach

Entenderemos que el cuerpo \mathbb{K} del que hablamos a partir de aquí es \mathbb{R} o \mathbb{C} . Consideremos un conjunto X .

Definición 1.1. Una **norma** es una aplicación $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:

(i)

$$\text{Si } x \in X \text{ es tal que } \|x\| = 0, \text{ entonces } x = 0. \quad (1.1)$$

(ii)

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}. \quad (1.2)$$

(iii)

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X. \quad (1.3)$$

En caso de que $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ verifique las anteriores condiciones se dice que $(X, \|\cdot\|)$ es un **espacio vectorial normado**. Si tenemos una aplicación $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ que sólo verifica 1.2 y 1.3 se dirá que es una **seminorma**.

Definición 1.2. Una **distancia** es una aplicación $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ verificando:

(i)

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y. \quad (1.4)$$

(ii)

$$d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X. \quad (1.5)$$

(iii)

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in X. \quad (1.6)$$

Al espacio (X, d) se le llamará **espacio métrico**.

Observación 1.3. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado, la aplicación $d(x, y) := \|y - x\|$ es una distancia, denominada la distancia inducida por la norma.

Definición 1.4. Un espacio métrico (X, d) se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

Observación 1.5. Esta definición también se cumple para todo espacio normado, pues todo espacio normado es métrico con tan sólo considerar $d(x, y) := \|y - x\|$ como métrica.

Definición 1.6. Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice un **espacio de Banach** si es un espacio métrico completo con la distancia inducida por la norma.

Ejemplos 1.7.

(i) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, con el valor absoluto y el módulo respectivamente, son espacios de Banach.

(ii) Si Y es un conjunto y $(Z, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, consideremos, para toda función $f : Y \rightarrow Z$,

$$\|f\|_\infty := \sup_{y \in Y} \|f(y)\| \in [0, \infty].$$

Sea entonces

$$\mathcal{B}(Y, Z) := \{f : Y \rightarrow Z / \|f\|_\infty < \infty\}.$$

El espacio de las funciones acotadas de Y a Z , $(\mathcal{B}(Y, Z), \|\cdot\|_\infty)$, es un espacio de Banach.

(iii) Sea $Y \subset \mathbb{R}^n$. Si consideramos el conjunto $\mathcal{BC}(Y, Z) := \{f \in \mathcal{B}(Y, Z) / f \text{ es continua}\}$, entonces el espacio de las funciones continuas acotadas de Y a Z , $(\mathcal{BC}(Y, Z), \|\cdot\|_\infty)$, es un espacio de Banach.

Definición 1.8. Si denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar, y $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial dotado de un producto interior. Entonces Y será un **espacio de Hilbert** si es un espacio vectorial métrico completo con la distancia inducida $d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$.

Se puede comprobar que \mathbb{K}^n es un espacio de Hilbert.

Definición 1.9. Un subconjunto **ortonormal** de un espacio de Hilbert H es un subconjunto E cumpliendo las propiedades:

- (a) para cada $e \in E$, $\|e\| = 1$,
- (b) si $e_1, e_2 \in E$ y $e_1 \neq e_2$, entonces $e_1 \perp e_2$.

Definición 1.10. Una **base de Hilbert** de H es un conjunto ortonormal maximal.

1.1.1. Otras propiedades

Definición 1.11. Si E es un espacio de Banach, definimos su **espacio dual** asociado como

$$E^* := \mathcal{LB}(E, \mathbb{K}),$$

es decir, el espacio de las funciones lineales acotadas de E a \mathbb{K} . La norma se define en E^* como

$$\|f\|_{E^*} := \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in E}} |f(x)|.$$

Debemos notar que, mientras que E puede ser un espacio cuyos elementos son vectores, los elementos de E^* pasan a ser operadores lineales acotados, con lo cual la notación comunmente usada para funciones aplicadas sobre un punto o vector $f(x)$ no sería tan adecuada en este caso, en el que nos referiremos a la aplicación de un operador $f \in E^*$ sobre un $x \in E$ como $\langle f, x \rangle$, el cual se conoce como el producto escalar en el par dualidad (E^*, E) .

Definición 1.12. Dado $x \in E$, la aplicación $f \mapsto \langle f, x \rangle$ es un operador funcional lineal continuo en E^* , luego es un elemento de E^{**} , que denotaremos por Jx . En ese caso se tiene:

$$\langle Jx, f \rangle_{E^{**}, E} = \langle f, x \rangle_{E^*, E}, \quad \forall x \in E, \quad \forall f \in E^*.$$

Dada la definición de J queda claro que es lineal y es una isometría, es decir, $\|Jx\|_{E^{**}} = \|x\|_E$.

Definición 1.13. Sea E un espacio de Banach y $J : E \rightarrow E^{**}$ la inyección canónica de E a E^{**} . El espacio E se dice **reflexivo** si J es sobreyectiva, es decir, $J(E) = E^{**}$. Si un espacio E es reflexivo, normalmente se identifica E^{**} con E .

Definición 1.14. Un espacio métrico M se dice **separable** si existe un subconjunto $N \subset M$ que es numerable y denso en M .

1.2. Espacios L^p

En primer lugar, es interesante recordar que una seminorma es una aplicación que sólo verifica las propiedades de linealidad de los elementos de \mathbb{K} 1.2 y la desigualdad triangular 1.3, permitiendo así, que la seminorma de elementos no nulos pueda ser nula.

Ahora definamos la seminorma $\|\cdot\|_p$ de una función $f : Y \rightarrow \mathbb{K}$ como

$$\|f\|_p := \left(\int_Y |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \in [0, \infty].$$

De esta forma podremos definir en un primer lugar los espacios \mathcal{L}^p . En efecto, si $p \in [1, \infty)$, Y es un conjunto, Σ una σ -álgebra (ver A.1) sobre Y y μ una medida (ver A.2) sobre Σ , definimos

$$\mathcal{L}^p(Y, \mu, \mathbb{K}) := \{f : Y \rightarrow \mathbb{K} / \|f\|_p < \infty\}.$$

El conjunto anterior debe entenderse como un subconjunto del conjunto de las funciones medibles de Y con valores en \mathbb{K} (ver A.6).

Sin embargo, observamos que $\mathcal{L}^p(Y, \mu, \mathbb{K})$ no puede ser un espacio normado, pues $\|\cdot\|_p$ no es una norma, ya que existen funciones no nulas con norma p nula, tales como

$$f(y) := \begin{cases} 1 & \text{si } y \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } y \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

la conocida función de Dirichlet. En efecto, es claro que la función es no nula, ya que si $y \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, $f(y) = 1 \neq 0$, y como $|f|^p = f$ para todo $p \in [1, \infty)$,

$$\|f\|_p^p := \int_{[0,1]} |f|^p d\mu = \int_{[0,1]} f d\mu = 0 \cdot \mu([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) + 1 \cdot \mu([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 0 \Rightarrow \|f\|_p = 0,$$

incumpliendo así la condición 1.1.

Para resolver este problema introducimos la siguiente relación de equivalencia

$$f \sim g \Leftrightarrow \mu(\{y \in Y / f(y) \neq g(y)\}) = 0,$$

y entonces podemos definir a partir de esta relación de equivalencia los espacios normados L^p , de la forma

$$L^p(Y, \mu, \mathbb{K}) := \mathcal{L}^p(Y, \mu, \mathbb{K})|_{\sim}.$$

Podemos definir también el espacio L^∞ como

$$L^\infty(Y, \mu, \mathbb{K}) = \{f : Y \rightarrow \mathbb{K} / \|f\|_\infty < \infty\},$$

donde $\|\cdot\|_\infty$ se define como

$$\|f\|_\infty := \inf \{S(N) : N \in \Sigma, \mu(N) = 0\},$$

siendo:

$$S(N) = \sup\{|f(x)| : x \notin N\}.$$

Donde, estamos considerando que $\inf \emptyset = \infty$.

Un resultado de suma importancia es que L^p es un espacio de Banach para todo $p \in [0, \infty]$. La demostración se puede encontrar en [Rudin, 1987, Theorem 3.11, pág 67].

A modo de ejemplo, si consideramos $L^2(\Omega)$ y $\langle f, g \rangle = \int f \bar{g} d\mu$, entonces la norma asociada es $\|f\| = [\int |f|^2 d\mu]^{1/2}$. Un resultado clásico de teoría de la medida es que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con la distancia inducida por la métrica anterior.

Otro resultado importante sobre los espacios L^p es la desigualdad de Holder.

Teorema 1.15. [Bartle, 1995, Theorem 6.9, pág 56] Sean $f \in L^p$ y $g \in L^q$ donde $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces $fg \in L^1$ y $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Sin embargo, para este estudio nos serán más útiles los espacios L^p con valores en un espacio de Banach, cuya definición cambia ligeramente con respecto a los espacios L^p usuales, y dado que aún no están definidos todos los conceptos necesarios para construirlos, se hablará sobre ellos en el capítulo de la integral de Bochner.

Por último, podemos dar una definición de los espacios L^p_{loc} :

Definición 1.16. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, $1 \leq p \leq \infty$. Diremos que una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ pertenece a L^p_{loc} si $f \chi_K \in L^p(\Omega)$ para todo conjunto compacto K contenido en Ω .

Un tema interesante en cuanto a estos espacios es su topología. Para saber un poco más en cuanto a ello, podemos referirnos al artículo [Horvath, 1987].

1.3. Tipos de convergencia

Para continuar con el desarrollo teórico es importante indagar sobre la noción de convergencia de una sucesión, así como su trasfondo topológico, del cual se profundizará un poco más en el la sección de las Distribuciones.

Definición 1.17. Un **espacio vectorial topológico** (EVT) es un espacio vectorial X junto con una topología τ tal que:

- (i) La aplicación $X \times X \rightarrow X$ definida por $(x, y) \mapsto x + y$ es continua.

(ii) La aplicación $\mathbb{K} \times X \rightarrow X$ definida por $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ es continua.

Definición 1.18. Un espacio es **localmente convexo** si su topología está generada por una familia de seminormas \mathcal{P} tal que

$$\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \{x / p(x) = 0\} = \{0\}.$$

Como forma de interpretar más fácilmente la noción de espacio localmente convexo podemos pensar que, o bien alguna de las seminormas $p_i \in \mathcal{P}$ es una norma, o bien los conjuntos $\{x \neq 0 / p_i(x) = 0\}_i$ son mutuamente disjuntos. Además, la topología inicial que generan es simplemente la más gruesa que hace todas las p_i continuas.

Dado un espacio vectorial topológico localmente convexo X , para cada $L \in X'$ la función $p_L : X \rightarrow [0, \infty)$ definida por

$$p_L(x) := |L(x)|, \quad x \in X,$$

es una seminorma. La familia $\{p_L\}_{L \in X'}$ de seminormas genera una topología localmente convexa $\sigma(X, X')$ sobre el espacio X , llamada la **topología débil**, tal que cada p_L es continua con respecto a $\sigma(X, X')$. En consecuencia, esto implica que cada $L \in X'$ es continua en $\sigma(X, X')$.

Observación 1.19. La topología débil $\sigma(X, X')$ sobre X es la topología inicial asociada a la colección $(p_L)_{L \in X'}$.

Definición 1.20. Si (x_n) es una sucesión en X es convergente a x en la topología débil $\sigma(X, X')$ escribiremos

$$x_n \rightharpoonup x.$$

Para evitar posibles confusiones haremos referencia a mayores de que la convergencia es en $\sigma(X, X')$.

Definición 1.21. La noción de convergencia habitual la denotaremos **convergencia fuerte**, es decir, $x_n \rightarrow x$ fuertemente sí y sólo si $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

Proposición 1.22. [Brezis, 2011, Proposition 3.5, pág 58] Sea (x_n) una sucesión en X . Entonces

(i) $[x_n \rightharpoonup x \text{ débilmente en } \sigma(X, X')] \Leftrightarrow [L(x_n) \rightarrow L(x), \forall L \in X']$.

(ii) Si $x_n \rightarrow x$ fuertemente, entonces $x_n \rightharpoonup x$ débilmente en $\sigma(X, X')$.

(iii) Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente en $\sigma(X, X')$, entonces $\{\|x_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada y $\|x\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|x_n\|$.

(iv) Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente en $\sigma(X, X')$ y $L_n \rightarrow L$ fuertemente en X' , entonces $L_n(x_n) \rightarrow L(x)$.

Proposición 1.23. [Brezis, 2011, Proposition 3.6, pág 58] Si X es de dimensión finita, la topología débil $\sigma(X, X')$ y la topología usual (la generada por bolas abiertas de \mathbb{K}^n con la distancia dada por la norma usual en \mathbb{K}^n) coinciden. En particular, una sucesión (x_n) converge débilmente si y sólo si converge fuertemente.

De forma análoga, en lugar de fijar $L \in X'$ y dejando libre $x \in X$, definamos una función $p_x : X' \rightarrow [0, \infty)$, para cada $x \in X$ por

$$p_x(L) := |L(x)|, \quad L \in X',$$

que también será una seminorma.

Proposición 1.24. La familia $\{p_x\}_{x \in X}$ de seminormas genera una topología localmente convexa $\sigma(X', X)$ sobre el espacio X' , llamada la **topología débil estrella**, tal que cada p_x es continua con respecto a $\sigma(X', X)$.

Definición 1.25. Sea X un ELC. Una sucesión $\{L_n\}_n$ en X' es **débilmente estrella convergente** a L en X' si converge a L con respecto a la topología débil estrella $\sigma(X', X)$. Escribiremos

$$L_n \xrightarrow{*} L.$$

Proposición 1.26. [Brezis, 2011, Proposition 3.13, pág 63] Sea (L_n) una sucesión en X' . Entonces

(i) $[L_n \rightharpoonup L \text{ débilmente estrella en } \sigma(X', X)] \Leftrightarrow [L_n(x) \rightarrow L(x), \forall x \in X]$.

(ii) Si $L_n \rightarrow L$ fuertemente, entonces $L_n \rightharpoonup L$ débilmente estrella en $\sigma(X', X)$. Además, si $L_n \rightarrow L$ en $\sigma(X', X'')$, entonces $L_n \rightarrow L$ en $\sigma(X', X)$.

(iii) Si $L_n \rightharpoonup L$ débilmente estrella en $\sigma(X', X)$, entonces $\{\|L_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada y $\|L\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|L_n\|$.

(iv) Si $L_n \rightharpoonup L$ débilmente estrella en $\sigma(X', X)$ y $x_n \rightarrow x$ fuertemente en X , entonces $L_n(x_n) \rightarrow L(x)$.

1.4. Teoría de distribuciones

En esta sección trabajaremos con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y con el espacio de medida de Lebesgue en \mathbb{R}^N . Entonces, dado un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, y dado el espacio de las funciones de

clase infinito con soporte compacto $K \subset \Omega$ de Ω a \mathbb{R} , $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, dotaremos a este último de una topología. Recordemos que el soporte de una función f se define como $\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^N / f(x) \neq 0\}}$. En este subespacio la topología debería consistir en la noción natural de convergencia, que es la convergencia uniforme de las funciones y todas sus derivadas parciales de cualquier orden.

Consideremos un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ y fijemos un conjunto compacto $K \subset \Omega$. Sea $\mathcal{D}_K(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones en $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ cuyo soporte está contenido en K , es decir,

$$\mathcal{D}_K(\Omega) := \{\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) / \text{supp}(\phi) \subseteq K\}.$$

Para cada $j \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos la norma $\|\cdot\|_{K,j}$ sobre $\mathcal{D}_K(\Omega)$ como

$$\|\phi\|_{K,j} := \sup\{|\partial^\alpha \phi(x)| : x \in K, \alpha \in \mathbb{N}_0^N, |\alpha| \leq j\}.$$

Definición 1.27. Una familia de conjuntos \mathcal{F} es **equilibrada** si

$$\forall X \in \mathcal{F}, \forall x \in X, \forall t \in [-1, 1], tx \in X.$$

Además, un conjunto E se dice equilibrado si

$$\forall x \in E, \forall t \in [-1, 1], tx \in E.$$

Teorema 1.28. Si \mathcal{F} es equilibrada, y también es una base local convexa de 0 para un espacio vectorial topológico X , entonces la familia $\{p_U : U \in \mathcal{F}\}$ es una familia de seminormas continuas. En consecuencia, dada una familia \mathcal{P} de seminormas en un espacio vectorial X , la colección de todas las intersecciones finitas de conjuntos de la forma

$$V(p, n) := \{x \in X / p(x) < 1/n\}, \quad p \in \mathcal{P}, \quad n \in \mathbb{N}$$

es equilibrada, base local convexa de 0 para una topología τ que convierte a X en un espacio vectorial topológico localmente convexo tal que cada p es continua con respecto de τ .

Sabemos, por el resultado anterior, que la familia de normas $\{\|\cdot\|_{K,j}\}_j$ convierte $\mathcal{D}_K(\Omega)$ en un espacio localmente convexo y la base para la topología τ_K está dada por todos los conjuntos de la forma

$$\left\{ \phi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : \|\phi\|_{K,j_1} < \frac{1}{l_1}, \dots, \|\phi\|_{K,j_k} < \frac{1}{l_k} \right\},$$

donde $j_1, \dots, j_k \in \mathbb{N}_0$ y $l_1, \dots, l_k \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$. Tomando $j := \max\{j_1, \dots, j_k\}$ y $l := \max\{l_1, \dots, l_k\}$, se sigue que

$$V_{K,j,l} := \left\{ \phi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : \|\phi\|_{K,j} < \frac{1}{l} \right\} \subseteq \left\{ \phi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : \|\phi\|_{K,j_1} < \frac{1}{l_1}, \dots, \|\phi\|_{K,j_k} < \frac{1}{l_k} \right\},$$

por lo que será suficiente considerar como base local para la topología τ_K la familia de conjuntos $V_{K,j,l}$, donde $j \in \mathbb{N}_0$ y $l \in \mathbb{N}$.

Ahora, para construir una topología en $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, sea \mathcal{B}_0 la colección de todos los conjuntos convexos y equilibrados $U \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tales que

$$U \cap \mathcal{D}_K(\Omega) \in \tau_K$$

para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$.

Teorema 1.29. [Leoni, 2017, Theorem 10.2, pág 282] Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. La familia

$$\mathcal{B} := \{\phi + V : \phi \in \mathcal{D}_K(\Omega), V \in \mathcal{B}_0\}$$

es una base de una topología Hausdorff localmente convexa τ en $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ que convierte $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ en un espacio vectorial topológico.

Este resultado nos permite denotar por $\mathcal{D}(\Omega)$ el espacio vectorial topológico $(\mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \tau)$, cuyos elementos se dicen funciones test. Notemos que para llegar a esta definición hemos dado más vueltas de la que a priori parecen necesarias, pero la razón de esta construcción de la topología τ es que, de esta forma, el espacio resultante es completo, a diferencia de otras posibles construcciones.

Teorema 1.30. [Leoni, 2017, Theorem 10.5, pág 285] Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Entonces para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$ la topología τ_K coincide con la topología relativa de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ como subconjunto de $\mathcal{D}(\Omega)$.

El siguiente resultado nos dice que $\mathcal{D}(\Omega)$ es completo.

Teorema 1.31. [Leoni, 2017, Theorem 10.8, pág 286] Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Entonces el espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ es completo. Además, la sucesión $\{\phi_n\}_n$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ converge a $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ con respecto de τ si y sólo si

- (i) existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que el soporte de cada ϕ_n está contenido en K ,
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \partial^\alpha \phi_n = \partial^\alpha \phi$ uniformemente en K para cada multiíndice α .

El dual de $\mathcal{D}(\Omega)$ se denota $\mathcal{D}'(\Omega)$ y sus elementos se llaman **distribuciones**. A menudo usaremos la notación dualidad $\langle T, \phi \rangle$ para denotar $T(\phi)$. El espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ tiene la topología débil estrella, entonces la sucesión $\{T_n\}_n$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si $T_n(\phi) \rightarrow T(\phi)$ para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En ese caso diremos que $\{T_n\}_n$ converge a T en el sentido de las distribuciones.

Es importante destacar que, como se expone en [Conway, 1990, Example 5.20 pág 121], cada función $f \in L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / f \in L^1_{loc}(K), \forall K \subset \Omega \text{ compacto}\}$ induce una distribución $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que:

$$T_f : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f\varphi \, d\mu.$$

Ahora que disponemos de los ingredientes necesarios pasemos a estudiar la derivada en el sentido de las distribuciones.

Definición 1.32. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dado un multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}_0^N \setminus \{0\}$, definimos la **derivada de orden α de T** como

$$\frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial x^\alpha}(\phi) := (-1)^{|\alpha|} T \left(\frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x^\alpha} \right), \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$ el símbolo $\nabla^j T$ denota la derivada distribucional de orden α de T con $|\alpha| = j$. Por simplicidad denotaremos por ∂^α a $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$ y por ∂_i^n a $\frac{\partial^n}{\partial x_i^n}$.

Observación 1.33. Se puede comprobar que $\partial^\alpha T$ es una distribución. De hecho, sea $K \subset \Omega$ un conjunto compacto. Como, por [Leoni, 2017, Theorem 10.10, pág 287], existe un entero $j \in \mathbb{N}_0$ y una constante $c_K > 0$ tal que

$$|T(\phi)| \leq c_K \|\phi\|_{K,j}$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Se sigue que

$$|\partial^\alpha T(\phi)| = |T(\partial^\alpha \phi)| \leq c_K \|\partial^\alpha \phi\|_{K,j} \leq c_K \|\phi\|_{K,j+|\alpha|}$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, lo cual prueba que $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, y que $\partial^\alpha : T \in \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es continua, de nuevo por el teorema que usamos antes.

En particular, sean $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ y α un multiíndice, entonces la derivada débil o distribucional de orden α de u es la distribución $\partial^\alpha T_u$. De una manera similar definimos las derivadas direccionales de una distribución.

Definición 1.34. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dado un vector unitario $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos la **n -ésima derivada direccional de T en la dirección de v** como

$$\frac{\partial^n T}{\partial v^n}(\phi) := (-1)^n T \left(\frac{\partial^n \phi}{\partial v^n} \right), \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En particular, si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces la derivada débil o distribucional direccional n -ésima de u en la dirección de v es la distribución $\frac{\partial^n T_u}{\partial v^n}$.

Definición 1.35. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, y sea $\alpha \in \mathbb{N}_0^N \setminus \{0\}$ un multiíndice. Si existe una función $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$T_{v_\alpha}(\phi) = \partial^\alpha T_u(\phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

entonces v_α se dirá la **derivada débil o distribucional de orden α de T_u** . En tal caso escribiremos $\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^\alpha} := v_\alpha$.

Entonces, una función $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ es la derivada débil de orden α de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ si

$$\int_{\Omega} \phi v_\alpha \, d\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u \partial^\alpha \phi \, d\mu$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Notemos que esto es consecuencia de la integración por partes.

En los siguientes teoremas caracterizaremos las distribuciones como derivadas débiles de funciones continuas.

Teorema 1.36. [Leoni, 2017, Theorem 10.22, pág 293] Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Entonces para todo compacto $K \subset \Omega$ existe una función continua $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y un multiíndice α (ambos dependiendo de K) tales que

$$T(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u \partial^\alpha \phi \, d\mu, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Para esquivar la dependencia de u y α de K definimos el soporte de una distribución, y así el resultado anterior es global.

Definición 1.37 (Soporte de una distribución). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si $U \subseteq \Omega$ es abierto, entonces escribiremos $T = 0$ en U si $T(\phi) = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{D}(U)$. El **soporte de T** es el complementario de V relativo a Ω , donde V es la unión de todos los subconjuntos abiertos $U \subseteq \Omega$ en donde $T = 0$.

La notación de soporte de una distribución coincide con la de soporte de una función, es decir, el soporte de T se denotará por $\text{supp}(T)$. A continuación enunciamos la versión global del anterior teorema.

Teorema 1.38. [Leoni, 2017, Theorem 10.25, pág 295] Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $\text{supp}(T)$ es un compacto en Ω . Entonces:

- (i) Existe un entero $j \in \mathbb{N}_0$ y una constante $c > 0$ tales que $|T(\phi)| \leq c \|\phi\|_j$ para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (en particular, T tiene orden finito $l \leq j$), donde $\|\cdot\|_j$ es la norma definida al principio de esta sección.

(ii) Si U es un conjunto abierto, con $\text{supp}(T) \subset U \subseteq \Omega$, entonces para cada multiíndice α , con $\alpha \leq \beta := (l+2, \dots, l+2)$, existe una función $v_\alpha \in \mathcal{C}(\Omega)$, con $\text{supp}(v_\alpha) \subset U$, tal que

$$T(\phi) = \sum_{\alpha \leq \beta} \partial^\alpha T_{v_\alpha}(\phi) = \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\alpha \partial^\alpha \phi \, d\mu, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Finalmente, usando particiones de la unidad, tenemos una representación similar para cada distribución.

Teorema 1.39. [Leoni, 2017, Theorem 10.26, pág 296] Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Entonces para cada multiíndice α existe una función $v_\alpha \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que:

- (i) Cada conjunto compacto $K \subset \Omega$ interseca el soporte de una cantidad finita de v_α
- (ii) Para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$T(\phi) = \sum_{\alpha} \partial^\alpha T_{v_\alpha}(\phi) = \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\alpha \partial^\alpha \phi \, d\mu.$$

Nótese que si T es de orden finito, sólo hará falta una cantidad finita de v_α no nulas.

1.4.1. Espacios de Sobolev

Ahora que hemos caracterizado brevemente el concepto de distribución y derivada distribucional, podremos presentar los espacios de Sobolev.

Definición 1.40. Dado un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, y $1 \leq p \leq \infty$, diremos que una función $u \in L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^M)$ admite derivada débil o distribucional de orden n en $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ si existe una función $v \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ tal que

$$\int_{\Omega} u \varphi^{(n)} \, d\mu = (-1)^n \int_{\Omega} v \varphi \, d\mu$$

para toda función test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. La función v se denota por $u^{(n)}$.

Definición 1.41 (Espacios de Sobolev). Dado un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$, y $1 \leq p \leq \infty$, el **espacio de Sobolev** $W^{m,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)$ es el espacio de todas las funciones $u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ que admiten derivadas débiles de orden n en $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ para cada $n = 1, \dots, m$.

El espacio $W^{m,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)$ tiene la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)} := \|u\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)} + \sum_{n=1}^m \|u^{(n)}\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)}.$$

El espacio $W_{loc}^{m,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)$ se define como el espacio de todas las funciones $u \in L_{loc}^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ que admiten derivadas débiles de orden n en $L_{loc}^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ para cada $n = 1, \dots, m$. Cuando $M = 1$ por simplicidad escribiremos $W^{m,p}(\Omega)$ y $W_{loc}^{m,p}(\Omega)$.

Se puede completar esta sección con la relación entre las funciones de $W^{m,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)$ y las funciones absolutamente continuas.

Teorema 1.42. [Leoni, 2017, Theorem 7.16, pág 189] *Sea un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces la función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ pertenece a $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)$ si y sólo si admite una representación absolutamente continua $\bar{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ tal que tanto \bar{u} como su derivada \bar{u}' pertenecen a $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$.*

Otro resultado de relevancia es que los espacios $W^{m,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)$ son de Banach, tal y como ocurría con los espacios L^p . A continuación, lo demostramos para el caso $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R})$, siendo la demostración para el caso general $W^{m,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)$ análoga.

Proposición 1.43. Dado $p \in [1, \infty]$, el espacio $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R})$ es de Banach.

Demostración 1.44. *Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R})$ una sucesión de Cauchy. En particular, las sucesiones $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ y $\{u'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ son de Cauchy. Como $L^p(\Omega)$ es un espacio completo, se tendrá que existen elementos $u, v \in L^p(\Omega)$ tales que $u_n \rightarrow u$ y $u'_n \rightarrow v$ en $L^p(\Omega)$. Si logramos demostrar que v es la derivada en el sentido de las distribuciones de u , habremos terminado, pues, entonces, $u_n \rightarrow u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Ahora bien, dado que $u_n \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$, se tendrá que $u_n \rightarrow u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, ya que $L^p(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ con la inyección continua. Por la continuidad de la derivada en el sentido de las distribuciones se tendrá que $u'_n \rightarrow u'$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Por otro lado, de la convergencia de $u'_n \rightarrow v$ en $L^p(\Omega)$, deducimos que $u'_n \rightarrow v$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Finalmente, por la unicidad del límite, $u' = v$ en casi todo punto, lo cual concluye la demostración.*

Capítulo 2

La integral de Bochner

En este capítulo vamos a introducir la integral de Bochner y los resultados más importantes sobre ella. A modo de resumen, la integral de Bochner es una generalización de la integral de Lebesgue para el caso de funciones con valores en un espacio de Banach. De nuevo, nuestra fuente principal para desarrollar este capítulo va a ser [Leoni, 2017].

2.1. Funciones medibles

Definición 2.1. Sea (X, \mathcal{X}, μ) un espacio de medida y sea $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Una **función simple** s es una función $s : X \rightarrow Y$ de la forma

$$s = \sum_{i=1}^l c_i \chi_{E_i},$$

donde $l \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_l \in Y$ son distintos y los conjuntos $E_i \subseteq X$ pertenecen a \mathcal{X} y son mutuamente disjuntos ($E_i \cap E_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$).

- (i) Una función $u : X \rightarrow Y$ se dice **fuertemente medible** si existe una sucesión $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones simples $s_n : X \rightarrow Y$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n(x) - u(x)\| = 0$$

para casi todo $x \in X$.

- (ii) Una función $u : X \rightarrow Y$ se dice **débilmente medible** si para todo $T \in Y'$ la función

$$x \in X \mapsto \langle T, u(x) \rangle_{Y', Y} = T(u(x))$$

es medible, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y', Y} : Y' \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ es el par dualidad definido por

$$\langle T, y \rangle_{Y', Y} := T(y),$$

para $T \in Y'$ e $y \in Y$.

(iii) Una función $u : X \rightarrow Y$ se dice **débilmente estrella medible** si para todo $y \in Y$ la función

$$x \in X \mapsto \langle u(x), y \rangle_{Y', Y} = u(x)(y)$$

es medible.

Lema 2.2. [Yosida, 1995, Theorem 1, pág 133] Sea (X, \mathcal{X}, μ) un espacio de medida y sea $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Si una función $u : X \rightarrow Y$ es débilmente medible, entonces la función $x \in X \mapsto \|u(x)\|$ es medible.

Teorema 2.3 (Pettis). [Leoni, 2017, Theorem 8.3, pág 206] Sea (X, \mathcal{X}, μ) un espacio de medida y sea $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Una función $u : X \rightarrow Y$ es fuertemente medible si y sólo si es débilmente medible y existe un $E \in \mathcal{X}$, con $\mu(E) = 0$, tal que el conjunto $u(X \setminus E)$ es un subconjunto separable de Y (como espacio métrico).

2.2. La integral de Bochner

Definamos ahora la integral de Bochner de funciones simples y de funciones fuertemente medibles.

Definición 2.4. Sea (X, \mathcal{X}, μ) un espacio de medida y sea $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. La función simple $s : X \rightarrow Y$ se dice **Bochner integrable** si tiene la forma

$$s = \sum_{i=1}^l c_i \chi_{E_i},$$

donde $l \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_l \in Y$ son distintos, los conjuntos $E_i \subseteq X$ pertenecen a \mathcal{X} y son mutuamente disjuntos, y $c_i = 0$ siempre que $\mu(E_i) = \infty$. Para cada $E \in \mathcal{X}$, la **integral de Bochner de s sobre E** se define por

$$\int_E s \, d\mu := \sum_{i=1}^l c_i \mu(E_i \cap E),$$

donde $c_i \mu(E_i \cap E)$ será cero siempre que $c_i = 0$ y $\mu(E_i \cap E) = \infty$.

Definición 2.5. Sea (X, \mathcal{X}, μ) un espacio de medida y sea $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Una función fuertemente medible $u : X \rightarrow Y$ es Bochner integrable si existe una sucesión $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones simples Bochner integrables tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n(x) - u(x)\| = 0$$

para casi todo $x \in X$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \|s_n - u\| d\mu = 0.$$

Para todo $E \in \mathcal{X}$ la **integral de Bochner de u sobre E** se define como

$$\int_E u d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E s_n d\mu.$$

Nota 2.6. Debe verificarse que este último límite existe y es independiente de la sucesión particular $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. En efecto, en primer lugar se tiene que $x \in X \mapsto \|s_n(x) - u(x)\|$ es medible gracias al lema 2.2. Por otro lado, como consecuencia de la definición de integral de una función simple medible,

$$\begin{aligned} \left\| \int s_n d\mu - \int s_m d\mu \right\|_Y &= \left\| \int (s_n - s_m) d\mu \right\|_Y \leq \int \|s_n - s_m\|_Y d\mu \leq \\ &\leq \int \|s_n - u\|_Y d\mu + \int \|u - s_m\|_Y d\mu. \end{aligned}$$

Por tanto, $\{\int s_n d\mu\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y , que al ser espacio de Banach, es completo, se tiene que dicha sucesión es convergente en Y . Por lo tanto, existirá el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n d\mu$ en Y . Veamos ahora que la definición es independiente de la sucesión considerada, esto es, supongamos que existe $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples Bochner integrables tales que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n(x) - u(x)\| = 0,$$

para casi todo $x \in X$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \|t_n(x) - u(x)\| d\mu = 0.$$

Veamos entonces que:

$$\int_E u d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E t_n d\mu,$$

donde,

$$\int_E u d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E s_n d\mu.$$

Ahora bien, para funciones simples Bochner integrables, resulta claro que:

$$\begin{aligned} \left\| \int_E s_n d\mu - \int_E t_n d\mu \right\| &\leq \int_E \|s_n - t_n\| d\mu \\ &\leq \int_E \|s_n - u\| d\mu + \int_E \|t_n - u\| d\mu \end{aligned}$$

Tomando límite cuando n tiende a infinito llegamos a que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E s_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E t_n d\mu,$$

tal y como queríamos demostrar.

Definición 2.7. Diremos que un espacio vectorial topológico (X, τ_X) está **embebido** en un espacio vectorial topológico (Y, τ_Y) y escribimos $X \hookrightarrow Y$ si X es un subespacio de Y y el **embebimiento** $i : X \rightarrow Y$, dado por $i(x) := x$, es continuo.

Observación 2.8. Sea (X, \mathcal{X}, μ) un espacio de medida, sea $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espacio de Banach, y sea $u : X \rightarrow Y$ una función Bochner integrable. Si $Y \hookrightarrow Z$, donde $(Z, \|\cdot\|_Z)$ es un espacio de Banach y $i : Y \rightarrow Z$ es un embebimiento, entonces la función $i \circ u : X \rightarrow Z$ es Bochner integrable y

$$\int_E i \circ u \, d\mu = i \left(\int_E u \, d\mu \right)$$

para todo $E \in \mathcal{X}$. Por tanto, podemos identificar sin pérdida de generalidad $\int_E i \circ u \, d\mu$ con $\int_E u \, d\mu$.

2.3. Propiedades de la integral de Bochner

Una vez definida la integral de Bochner estudiemos algunas de sus propiedades. En el siguiente resultado, cuya demostración se puede encontrar en [Leoni, 2017], se muestra una relación entre la integral de Lebesgue de una función y la integral de Bochner.

Teorema 2.9. [Leoni, 2017, Theorem 8.9, pág 209] Sea (X, \mathcal{X}, μ) un espacio de medida, sea $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Una función fuertemente medible $u : X \rightarrow Y$ es Bochner integrable si y sólo si $\|u\|$ es Lebesgue integrable sobre X . Además, si $u : X \rightarrow Y$ es Bochner integrable, entonces

$$\left\| \int_E u \, d\mu \right\| \leq \int_E \|u\| \, d\mu$$

para todo $E \in \mathcal{X}$.

A continuación enunciaremos tres teoremas que nos pueden ser bastante útiles para el desarrollo de la teoría de esta integral.

Teorema 2.10 (Lema de Fatou). Sea (X, \mathcal{X}, μ) un espacio de medida, sea $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Sea $u_n : X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$ y $u : X \rightarrow Y$ fuertemente medible y suponemos que $u_n(x) \rightarrow u(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$ y para casi todo $x \in X$. Si

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X \|u_n\| \, d\mu < \infty,$$

entonces u es Bochner integrable y

$$\int_X \|u\| \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X \|u_n\| \, d\mu.$$

Demostración 2.11. Definamos, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$v_k = \inf_{l \geq k} \|u_l\|.$$

Como $|v_k| \leq \|u_k\|$,

$$\int_X |v_k| d\mu \leq \int_X \|u_k\| d\mu.$$

Por lo tanto, como cada v_k es medible y $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots$, y $v_k \rightarrow \liminf_k \|u_k\|$, por el teorema de convergencia monótona, se tiene que

$$\int_X v_k d\mu \rightarrow \int_X \left(\liminf_k \|u_k\| \right),$$

de lo que se deduce que

$$\int_X \left(\liminf_k \|u_k\| \right) \leq \liminf_k \int_X \|u_k\| d\mu.$$

Teorema 2.12 (Teorema de convergencia dominada de Lebesgue). [Leoni, 2017, Theorem 8.10, pág 210] Sea (X, \mathcal{X}, μ) un espacio de medida, sea $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Sea $u_n : X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$ y $u : X \rightarrow Y$ fuertemente medible y suponemos que $\|u_n(x)\| \leq v(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y casi todo $x \in X$, para alguna función Lebesgue integrable $v : X \rightarrow [0, \infty)$, y que $u_n(x) \rightarrow u(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$ y para casi todo $x \in X$.

Entonces u es Bochner integrable y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \|u_n - u\| d\mu = 0.$$

En particular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X u_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X u d\mu.$$

La demostración de este último teorema puede verse en [Leoni, 2017].

Teorema 2.13 (de Egoroff). Sea (X, \mathcal{X}, μ) un espacio de medida con μ finita, sea $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y sean $u, u_n : X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$ funciones fuertemente medibles tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(x) - u(x)\| = 0$$

para casi todo $x \in X$.

Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto medible $E \in \mathcal{X}$, con $\mu(X \setminus E) \leq \varepsilon$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} \|u_n(x) - u(x)\| = 0.$$

Demostración 2.14. Sin pérdida de generalidad, supondremos que la convergencia se produce en todo el espacio. En caso contrario, redefinimos X como $X \setminus E$, siendo E el conjunto de medida nula en el cual no tenemos asegurada la convergencia.

Denotemos ahora por

$$B_n = \bigcap_{k=n+1}^{\infty} \{x \in X / \|u(x) - u_k(x)\| < \varepsilon\}, .$$

Se tendrá que los conjuntos B_n son medibles y, además, $B_n \subseteq B_k$ si $n < k$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x)$ en X , tendremos que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Por tanto, por la σ -aditividad de la medida μ , se tiene que

$$\begin{aligned} \mu(X) &= \mu(B_1 \cup (B_2 \setminus B_1) \cup (B_3 \setminus B_2) \cup \dots) \\ &= \mu(B_1) + \mu(B_2 \setminus B_1) + \mu(B_3 \setminus B_2) + \dots \\ &= \mu(B_1) + \mu(B_2) - \mu(B_1) + \mu(B_3) - \mu(B_2) + \dots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n), \end{aligned}$$

es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X - B_n) = 0,$$

y, por tanto, para un k_0 suficientemente grande, $\mu(X - B_k) < \eta$, $k \geq k_0$, siendo η cualquier número positivo dado con anterioridad.

Por tanto, existe, para cualquier número entero positivo k , un conjunto $C_k \subseteq X$ tal que $\mu(C_k) \leq \varepsilon/2^k$ y un índice N_k tales que

$$\|u(x) - u_n(x)\| < 1/2^k, \text{ para } n > N_k \text{ y para } x \in X \setminus C_k.$$

Fijemos $E = X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$. Entonces,

$$\mu(X \setminus E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^k = \varepsilon,$$

además la sucesión $u_n(x)$ converge uniformemente en E .

Finalmente, podemos enunciar un último teorema de este capítulo en el que ya se empieza a hablar de operadores lineales. El manejo de este tipo de operadores va a ser esencial en el siguiente capítulo, así como pudimos verles utilidad en el apartado de “Distribuciones”. En este resultado probaremos que la integral de Bochner conmuta con los elementos de Y' .

Teorema 2.15. [Leoni, 2017, Theorem 8.13, pág 211] Sea (X, \mathcal{X}, μ) un espacio de medida, sea $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Sea $u : X \rightarrow Y$ Bochner integrable. Entonces para todo $T \in Y'$,

$$T \left(\int_X u \, d\mu \right) = \int_X T(u) \, d\mu.$$

De nuevo, podemos encontrar la demostración de este resultado en [Leoni, 2017].

2.4. Espacios L^p revisitados

Como ya se explicó en la sección de espacios L^p , en este trabajo usaremos espacios L^p con valores en un espacio de Banach, los cuales se definen a continuación:

Definición 2.16. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y sea $1 \leq p < \infty$. Entonces

$$L^p(X; Y) := \{u : X \rightarrow Y / u \text{ es fuertemente medible (ver 2.1) y } \|u\|_{L^p(X; Y)} < \infty\},$$

donde

$$\|u\|_{L^p(X; Y)} := \left(\int_X \|u\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, entonces

$$L^\infty(X; Y) := \{u : X \rightarrow Y / u \text{ es fuertemente medible y } \|u\|_{L^\infty(X; Y)} < \infty\},$$

donde

$$\|u\|_{L^\infty(X; Y)} := \inf\{t \geq 0 / \|u(x)\| \leq t \text{ para casi todo } x \in X\},$$

que a menudo se denota por $\text{ess sup}_{x \in X} \|u\|$, que extrapola la noción de supremo para la teoría de la medida, pudiendo exceptuar de dicho supremo conjuntos de medida nula.

Teorema 2.17. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach.

- (i) $L^p(X; Y)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$;
- (ii) La familia de todas las funciones simples Bochner integrables (ver sección 2) es densa en $L^p(X; Y)$ para $1 \leq p < \infty$;
- (iii) Si X es un espacio métrico separable (ver definición 1.14), μ una medida de Radon ([Leoni, 2017, Definition B.106 y Definition B.107, pág 676]) σ -finita, e Y es separable, entonces $L^p(X; Y)$ es separable para $1 \leq p < \infty$.

Uno de los resultados más importantes de esta sección es el Teorema de representación de Riesz, pero para llegar hasta él todavía tenemos que definir un concepto a mayores.

Definición 2.18. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y sea $1 \leq p \leq \infty$. Entonces el espacio $L_w^p(X; Y')$ es el espacio de todas las clases de

equivalencia de funciones débil estrella medibles (ver proposición 1.24) $u : X \rightarrow Y'$ tales que $\|u\|_{Y'} \in L^p(X; \mathbb{R})$. El espacio $L_w^p(X; Y')$ está dotado de la norma

$$\|u\|_{L_w^p(X; Y')} := \left(\int_X \|u\|_{Y'}^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

para $1 \leq p < \infty$, y

$$\|u\|_{L_w^\infty(X; Y')} := \text{ess sup}_{x \in X} \|u\|_{Y'}, \text{ para } p = \infty.$$

Teorema 2.19 (Teorema de representación de Riesz en L^p). [*Leoni, 2017, Theorem 8.17, pág 213*]

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida con μ finita, Y un espacio de Banach, $1 \leq p < \infty$ y q su exponente conjugado ($q = \frac{p}{p-1}$).

(i) Supongamos que Y es separable. Si $T \in (L^p(X; Y))'$, entonces existe un único $v \in L_w^q(X; Y')$ tal que

$$T(u) = \int_X \langle v, u \rangle_{Y', Y} d\mu$$

para todo $u \in L_w^p(X; Y')$. Además, la norma de T coincide con $\|v\|_{L^q(X; Y')}$. Por otra parte, todo funcional de la forma anterior es lineal y acotado en $L^p(X; Y)$.

(ii) Supongamos que Y es reflexivo. Entonces para $T \in (L^p(X; Y))'$ existe un único $v \in L^q(X; Y')$ tal que

$$T(u) = \int_X \langle v, u \rangle_{Y', Y} d\mu$$

para todo $u \in L^p(X; Y)$. Además, la norma de T coincide con $\|v\|_{L^q(X; Y')}$. Por otra parte, todo funcional de la forma anterior es lineal y acotado en $L^p(X; Y)$.

Finalmente presentamos un resultado que caracteriza la reflexividad de los espacios L^p con valores en un Banach.

Corolario 2.20. [*Leoni, 2017, Corollary 8.18, pág 213*] Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida con μ finita, sea Y un espacio de Banach reflexivo (ver sección 1.1.1), y sea $1 < p < \infty$. Entonces $L^p(X; Y)$ es reflexivo.

Capítulo 3

Los espacios de Sobolev-Bochner

Ahora que ya tenemos definidos los espacios de Sobolev y la integral de Bochner, así como otros resultados previos y propiedades interesantes, tenemos todo lo necesario para definir los espacios de Sobolev-Bochner. La diferencia de estos espacios respecto a los de Sobolev es el hecho de considerar funciones con valores en un espacio de Banach, sobre el cual no podremos usar la integral de Lebesgue, mas precisamente por tal razón se definió y se usará la integral de Bochner. Tal y como ya hicimos con el capítulo de la integral de Bochner, en este capítulo también será el [Leoni, 2017] nuestra fuente principal.

3.1. Derivadas débiles

En esta sección consideraremos que estamos ante espacios de medida con medida de Lebesgue, la cual denotaremos por m .

Definición 3.1. Sea (X, Σ, m) un espacio de medida, con X un espacio vectorial topológico, $m : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ una medida, Y un espacio de Banach y $1 \leq p \leq \infty$. Una función medible $u : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ se dice que pertenece a $L^p_{loc}(X; Y)$ si $u \in L^p(K; Y)$ para todo compacto $K \subseteq X$. Una sucesión $\{u_n\}$ en $L^p_{loc}(X; Y)$ se dice convergente a $u \in L^p_{loc}(X; Y)$ si $u_n \rightarrow u$ en $L^p(K; Y)$ para todo compacto $K \subseteq X$.

Definición 3.2. Dado un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, un espacio de Banach Y , $n \in \mathbb{N}$, y $1 \leq p \leq \infty$, diremos que una función $u \in L^1_{loc}(\Omega; Y)$ admite una **derivada débil o distribucional de orden n en $L^p(\Omega; Y)$** si existe una función $v \in L^p(\Omega; Y)$ tal que

$$\int_{\Omega} u \varphi^{(n)} dm = (-1)^n \int_{\Omega} v \varphi dm$$

para toda función test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. La función v se denota $u^{(n)}$.

A pesar de que la anterior definición habla de derivadas en $L^p(\Omega; Y)$, se puede también extender a funciones de $L^p_{loc}(\Omega; Y)$.

Definición 3.3. Dado un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, un espacio de Banach Y , $n \in \mathbb{N}$, y $1 \leq p \leq \infty$, diremos que una función $u \in L^1_{loc}(\Omega; Y)$ admite una derivada débil o distribucional de orden n en $L^p_{loc}(\Omega; Y)$ si existe una función $v \in L^p_{loc}(\Omega; Y)$ tal que

$$\int_{\Omega} u \varphi^{(n)} dm = (-1)^n \int_{\Omega} v \varphi dm$$

para toda función test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. La función v se denota $u^{(n)}$.

Notemos que estas integrales están bien definidas. Para comprobarlo debemos verificar que los integrandos son fuertemente medibles y que en norma las funciones son integrables. En efecto, al ser u fuertemente medible y φ de clase infinito con soporte compacto, es claro que son fuertemente medibles. Por otra parte, si denotamos por K el soporte compacto de φ , se tendrá que $u \in L^1(K; B)$, en particular, la función $t \in K \rightarrow \|\varphi(t)u(t)\|_B$ es integrable al ser φ una función acotada en K .

Observación 3.4. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abierto, Y un espacio de Banach, y sea $u : \Omega \rightarrow Y$ una función localmente Bochner integrable. Si $Y \hookrightarrow Z$, donde Z es otro espacio de Banach, con embebimiento $i : Y \rightarrow Z$, y si la función $i \circ u : \Omega \rightarrow Z$ admite derivada débil de orden n en $L^p_{loc}(\Omega; Z)$, entonces, tal y como ocurría en la observación 2.8, tendremos que

$$i \left(\int_{\Omega} \varphi^{(n)} u dm \right) = \int_{\Omega} \varphi^{(n)} (i \circ u) dm = (-1)^n \int_{\Omega} \varphi (i \circ u)^{(n)} dm.$$

Además, como accedimos a identificar $\int_{\Omega} \varphi^{(n)} u dm$ con $i \left(\int_{\Omega} \varphi^{(n)} u dm \right)$, podremos escribir, abusando de la notación,

$$\int_{\Omega} \varphi^{(n)} u dm = (-1)^n \int_{\Omega} \varphi u^{(n)} dm.$$

Lema 3.5. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abierto, Y un espacio de Banach, $n \in \mathbb{N}$, y $u \in L^1_{loc}(\Omega; Y)$ tal que su derivada débil $u^{(n)}$ de orden n existe en $L^1_{loc}(\Omega; Y)$. Entonces la derivada $u^{(n)}$ es única.

3.2. Los espacios $W^{m,p}(\Omega; Y)$

Definimos ahora los espacios de Sobolev para funciones con valores en un espacio de Banach, a los cuales nos referiremos como **espacios de Sobolev-Bochner**.

Definición 3.6. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abierto, Y un espacio de Banach, $m \in \mathbb{N}$, y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega; Y)$ es el espacio de todas las funciones $u \in L^p(\Omega; Y)$ que admiten derivadas débiles de orden n en $L^p(\Omega; Y)$ para todo $n = 1, \dots, m$. El espacio $W^{m,p}(\Omega; Y)$ está dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega; Y)} := \|u\|_{L^p(\Omega; Y)} + \sum_{n=1}^m \|u^{(n)}\|_{L^p(\Omega; Y)}.$$

El espacio $W_{loc}^{m,p}(\Omega; Y)$ se define como el espacio de todas las funciones $u \in L_{loc}^p(\Omega; Y)$ que admiten derivadas débiles de orden n en $L_{loc}^p(\Omega; Y)$ para cada $n = 1, \dots, m$.

Como podemos observar, esta definición es idéntica a la de espacios de Sobolev que dábamos en la definición 1.41 con la salvedad de que, en lugar de considerar \mathbb{R}^M como espacio de valores de las funciones, esta vez usamos un espacio de Banach Y arbitrario.

3.3. Propiedades de los espacios $W^{m,p}(\Omega; Y)$ y $\mathcal{AC}(I; Y)$

Pasemos ahora a estudiar algunas de las propiedades más importantes de los espacios definidos anteriormente. También es interesante estudiar la relación entre las funciones de ambos espacios.

Lema 3.7. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abierto, Y un espacio de Banach, $m \in \mathbb{N}$, y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega; Y)$ es de Banach.

Demostración 3.8. Para probar que $W^{m,p}(\Omega; Y)$ es un espacio de Banach habrá que probar que es un espacio normado completo, es decir, que con la norma que tiene, toda sucesión de Cauchy en $W^{m,p}(\Omega; Y)$ tiene límite en $W^{m,p}(\Omega; Y)$.

Sea (u_n) una sucesión de Cauchy en $W^{m,p}$. Entonces $\{D^{(\alpha)}u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega; Y)$ para $0 \leq \alpha \leq m$. Ya que $L^p(\Omega; Y)$ es completo, existen funciones u y u_α , $0 \leq \alpha \leq m$ tales que $u_n \rightarrow u$ y $D^{(\alpha)}u_n \rightarrow u_\alpha$ en $L^p(\Omega; Y)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como $L^p(\Omega; Y) \subset L_{loc}^p(\Omega; Y)$, u_n determina una distribución $T_{u_n} \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$|T_{u_n}(\varphi) - T_u(\varphi)|^p \leq \int_{\Omega} [|u_n(x) - u(x)| |\varphi(x)|]^p d\mu \leq \|\varphi\|_p^p \|u_n - u\|_p^p$$

por la desigualdad de Hölder. Así, nos queda que $T_{u_n}(\varphi) \rightarrow T_u(\varphi)$ para cualquier $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ cuando $n \rightarrow \infty$. De forma análoga, $T_{D^{(\alpha)}u_n}(\varphi) \rightarrow T_{u_\alpha}(\varphi)$ para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Entonces se tiene:

$$T_{u_\alpha}(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{D^{(\alpha)}u_n}(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^\alpha T_{u_n}(D^{(\alpha)}(\varphi)) = (-1)^\alpha T_u(D^{(\alpha)}(\varphi))$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Así, se concluye que $u_\alpha = D^{(\alpha)}u$ en el sentido distribucional en Ω , para todo $0 \leq k \leq m$, de donde $u \in W^{m,p}(\Omega; Y)$. Finalmente, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{m,p} = 0$, el espacio $W^{m,p}(\Omega; Y)$ es completo.

Lema 3.9. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abierto, Y un espacio de Hilbert y $m \in \mathbb{N}$, $H^m(\Omega; Y) := W^{m,2}(\Omega; Y)$ es un espacio de Hilbert con el producto interior

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega; Y)} := \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega; Y)} + \sum_{n=1}^m \langle u^{(n)}, v^{(n)} \rangle_{L^2(\Omega; Y)}.$$

Definición 3.10. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo e (Y, d) un espacio métrico. Se dirá que una función $u : I \rightarrow Y$ es **absolutamente continua** sobre I si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^n d(u(b_i), u(a_i)) \leq \varepsilon$$

para cada colección finita de intervalos disjuntos (a_i, b_i) , $i = 1, \dots, n$, con $[a_i, b_i] \subseteq I$ y

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \leq \delta.$$

El espacio de todas las funciones absolutamente continuas $u : I \rightarrow Y$ se denota por $\mathcal{AC}(I; Y)$.

Aunque es posible identificar, por un resultado clásico, el espacio $W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ y el espacio de las funciones continuas $\mathcal{AC}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, en el caso de tener funciones con valores en un espacio de Banach sólo será posible realizar tal identificación si el espacio de Banach considerado es reflexivo, mientras que, de no serlo, solamente se tendría la inclusión $W^{1,1}(\Omega; B) \subset \mathcal{AC}(\Omega; B)$.

Definición 3.11. Si $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo e (Y, d) un espacio métrico, se dirá que una función $u : I \rightarrow Y$ es **localmente absolutamente continua** si es absolutamente continua para todo intervalo $[a, b] \subseteq I$.

Teorema 3.12. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y sea $u \in L^1_{loc}(I; Y)$. Entonces u tiene derivada débil $u' \in L^1_{loc}(I; Y)$ si y sólo si existe una representación \bar{u} de u y una función $v \in L^1_{loc}(I; Y)$ tal que

$$\bar{u}(x) = \bar{u}(x_0) + \int_{x_0}^x v(s) ds$$

para todos $x, x_0 \in I$. Además, \bar{u} es fuertemente diferenciable para casi todo $x \in I$, su derivada débil coincide con v , y \bar{u} es localmente absolutamente continua.

Para poder demostrar el teorema necesitamos los siguientes resultados:

Lema 3.13. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y sea $u : I \rightarrow Y$ una función localmente integrable cuya derivada débil es cero. Entonces u es equivalente a una función constante.

Demostración 3.14. *Podemos estructurar la demostración en dos pasos:*

1. *La demostración se simplifica en el caso de que $u \in L^1(I; Y)$ y $I = (a, b)$, por lo que empezamos con ese caso. Por hipótesis, se tiene que*

$$\int_a^b u \varphi' \, dm = 0$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b]; Y)$ con $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Por otra parte, tenemos:

$$\int_a^b uw \, dm = 0$$

para toda $w \in \mathcal{C}([a, b]; Y)$ con $\int_a^b w \, dm = 0$. Para comprobar esto último, fijemos cualquier w y definamos la función

$$\varphi(x) := \int_a^x w(t) \, dt, \quad x \in I.$$

Como $\varphi(a) = 0$ y $\varphi(b) = \int_a^b w(t) \, dt = 0$, φ puede ser una función test adecuada.

Ahora, sea $w \in \mathcal{C}([a, b]; Y)$. Tomando $w - \frac{1}{b-a} \int_a^b w \, dt$, se tiene que

$$\int_a^b u \left(w - \frac{1}{b-a} \int_a^b w \, dt \right) \, dm = 0,$$

y que podemos reescribir como

$$\int_a^b w \left(u - \frac{1}{b-a} \int_a^b u \, dt \right) \, dm = 0.$$

Como la afirmación es cierta para toda $w \in \mathcal{C}([a, b]; Y)$, tomando la función característica de un conjunto medible $E \subset I$ como w ,

$$\int_a^b \chi_E \left(u - \frac{1}{b-a} \int_a^b u \, dt \right) \, dm = 0.$$

Esto implica que

$$u(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b u \, dt = 0$$

para casi todo $x \in I$.

2. *En el caso general, sea (a_n, b_n) una sucesión creciente de intervalos abiertos tales que $[a_n, b_n] \subset (a_{n+1}, b_{n+1})$ y*

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n).$$

Entonces para cada n ,

$$\int_{(a_n, b_n)} u \varphi' \, dm = 0$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^1((a_n, b_n); Y)$. Por tanto por el paso anterior, existe un $c_n \in \mathbb{R}$ tal que $u(x) = c_n$ para casi todo $x \in (a_n, b_n)$. Pero, como $[a_n, b_n] \subset (a_{n+1}, b_{n+1})$, se sigue que $c_n = c_{n+1}$ para todo n .

Teorema 3.15. [Leoni, 2017, Theorem 8.19, pág 213]

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y sea $v \in L_{loc}^1(I; Y)$. Entonces para casi todo $x \in I$,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} \|v(t) - v(x)\| \, dt = 0.$$

Una vez vistos los resultados preliminares anteriores ya estamos en disposición de demostrar el teorema 3.12.

Demostración 3.16 (del Teorema 3.12). Supongamos que $\bar{u}(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x v(s) \, ds$, entonces

$$\frac{\bar{u}(x+h) - \bar{u}(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} v(s) \, ds \rightarrow v(x)$$

cuando $h \rightarrow 0$ c.p.t. $x \in I$ por el teorema anterior. Entonces se tiene que \bar{u} es fuertemente diferenciable para casi todo $x \in I$ con derivada fuerte v . Probemos que v es también derivada débil de \bar{u} . Dada $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$, sea $(a, b) \subset I$ tal que $\text{supp } \varphi \subset (a, b)$. Sea

$$w(x) := \begin{cases} v(x), & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

Entonces $w \in L^1(\mathbb{R}; Y)$. Por un razonamiento análogo,

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} w(s) \, ds \rightarrow w \in L^1(\mathbb{R}; Y)$$

cuando $h \rightarrow 0^+$.

Por otra parte, para $x \in \text{supp } \varphi$ y h pequeño,

$$\frac{\bar{u}(x+h) - \bar{u}(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} v(s) \, ds = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} w(s) \, ds.$$

Ahora, considerando $0 < h < \text{dist}(\text{supp } \varphi, I \setminus \{a, b\})$, tendremos que

$$\int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{h} u(x) \, dm = \frac{1}{h} \int_a^b \varphi(x) (\bar{u}(x) - \bar{u}(x+h)) \, dm.$$

Como

$$\left\| \int_a^b \varphi(x) \left(\frac{\bar{u}(x) - \bar{u}(x+h)}{h} - v(x) \right) dm \right\| =$$

$$\begin{aligned} &= \left\| \int_a^b \varphi(x) \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} w(s) ds - w(x) \right) dm \right\| \leq \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \int_a^b \left\| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} w(s) ds - w(x) \right\| dm \rightarrow 0 \end{aligned}$$

por una de las afirmaciones previas, se sigue que, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \int_I \varphi'(x) \bar{u}(x) dm &= \int_a^b \varphi'(x) \bar{u}(x) dm = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(x-y)}{h} \bar{u}(x) dm = \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_a^b \varphi(x) \frac{\bar{u}(x+h) - \bar{u}(x)}{h} dm = - \int_a^b \varphi(x) v(x) dm, \end{aligned}$$

lo cual prueba que v es la derivada débil de u .

Recíprocamente, supongamos que v es la derivada débil de u y definamos $w(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x v(s) ds$. Entonces por la primera parte de la demostración, v es la derivada débil de w . Por tanto, para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$,

$$\int_I \varphi'(x) u(x) dm = - \int_a^b \varphi(x) v(x) dm = - \int_a^b \varphi'(x) w(x) dm,$$

y, por tanto,

$$\int_I \varphi'(x) (u(x) - w(x)) dm = 0$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$. Se sigue del lema 3.13 que $u - w$ es constante. Como $u(x_0) - w(x_0) = 0$, se sigue que $u = w$.

Los siguientes teoremas nos ayudan a caracterizar los elementos de los espacios $W^{1,p}(\Omega; Y)$ y $W^{m,p}(\Omega; Y)$.

Teorema 3.17. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto acotado, Y un espacio de Banach reflexivo, y sea $1 \leq p \leq \infty$. Entonces, $u \in W^{1,p}(I; Y)$ si y sólo si admite un representante $\bar{u} \in \mathcal{AC}(\bar{I}; Y)$ que es diferenciable en casi todo $x \in I$ y tal que \bar{u} y su derivada clásica \bar{u}' pertenecen a $L^p(I; Y)$.*

Demostración 3.18. *Demostremos cada implicación por separado:*

\Rightarrow Puesto que I es acotado e Y es un espacio de Banach reflexivo, $W^{1,p}(I; Y) \subset W^{1,1}(I; Y) \equiv \mathcal{AC}(\bar{I}; Y)$. Por lo tanto, dado un elemento $u \in W^{1,p}(I; Y)$, se tendrá que admite un representante $\bar{u} \in \mathcal{AC}(\bar{I}; Y)$. En particular, \bar{u} será diferenciable en casi todo punto y su derivada coincidirá con la derivada en el sentido de las distribuciones de u que, recordemos que está en $L^p(I; Y)$. Por lo tanto, $\bar{u}' \in L^p(I; Y)$.

⇐ Por un lado, gracias a la acotación de I , $\mathcal{AC}(\bar{I}; Y) \subset L^p(I; Y)$, con lo cual, $\bar{u} \in L^p(I; Y)$. Además, como Y es un espacio de Banach reflexivo, la derivada de \bar{u} coincidirá con la derivada en el sentido de las distribuciones de \bar{u} en casi todo punto. Finalmente, como $\bar{u}' \in L^p(I; Y)$, se tiene que la derivada en el sentido de las distribuciones de \bar{u} está en $L^p(I; Y)$, de donde, $u \in W^{1,p}(I; Y)$.

Teorema 3.19. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto acotado, Y un espacio de Banach reflexivo, y sea $1 \leq p \leq \infty$. La función $u : I \rightarrow Y$ pertenece a $W^{m,p}(I; Y)$ si y sólo si admite una representación absolutamente continua $\bar{u} : I \rightarrow Y$ que es diferenciable en casi todo $x \in I$ y tal que \bar{u} y sus derivadas clásicas $\bar{u}^{(n)}$ pertenecen a $L^p(I; Y)$ para todo $n = 1, \dots, m$.

Demostración 3.20. Es esencialmente similar a la anterior. Demostremos cada implicación por separado:

⇒ Por una parte, es obvio que $W^{m,p}(I; Y) \subset W^{1,p}(I; Y)$, pues tanto u como sus derivadas distribucionales de orden $n = 1, \dots, m$ están en $L^p(I; Y)$. Por otra parte, puesto que I es acotado e Y es un espacio de Banach reflexivo, $W^{1,p}(I; Y) \subset W^{1,1}(I; Y) \equiv \mathcal{AC}(\bar{I}; Y)$, por lo que se deduce:

$$W^{m,p}(I; Y) \subset W^{1,p}(I; Y) \subset W^{1,1}(I; Y) \equiv \mathcal{AC}(\bar{I}; Y).$$

Por lo tanto, dado un elemento $u \in W^{m,p}(I; Y)$, se tendrá que admite un representante $\bar{u} \in \mathcal{AC}(\bar{I}; Y)$. En particular, \bar{u} será diferenciable en casi todo punto y sus derivadas coincidirá con las derivadas en el sentido de las distribuciones de u que, recordemos que están en $L^p(I; Y)$. Por lo tanto, $\bar{u}^{(n)} \in L^p(I; Y)$, $\forall n = 1, \dots, m$.

⇐ Por un lado, gracias a la acotación de I , $\mathcal{AC}(\bar{I}; Y) \subset L^p(I; Y)$, con lo cual, $\bar{u} \in L^p(I; Y)$. Además, como Y es un espacio de Banach reflexivo, las derivadas de \bar{u} coincidirán con las derivadas en el sentido de las distribuciones de \bar{u} en casi todo punto. Finalmente, como $\bar{u}^{(n)} \in L^p(I; Y)$, $\forall n = 1, \dots, m$, se tiene que las derivadas en el sentido de las distribuciones de \bar{u} están en $L^p(I; Y)$, de donde, $u \in W^{m,p}(I; Y)$.

3.4. Triples de evolución y compacidad

A continuación abordaremos los triples de evolución. Sea entonces $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espacio de Banach embebido en un espacio de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$. Supongamos que Y es denso en H . Podemos afirmar que

$$H' \hookrightarrow Y'.$$

Para probar esto, dado $h \in H$, consideremos el funcional lineal $T_h : Y \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $T_h(y) := \langle h, y \rangle_H$, $y \in Y$. Entonces

$$|T_h(y)| = |\langle h, y \rangle_H| \leq \|h\|_H \|y\|_H \leq c \|h\|_H \|y\|_Y.$$

Por tanto, $T_h \in Y'$, con $\|T_h\|_{Y'} \leq c \|h\|_H$. Nótese que $\langle h, y \rangle_H = \langle T_h, y \rangle_{Y', Y}$ para todo $y \in Y$. La aplicación $h \in H \mapsto T_h$ es lineal y continua. También es inyectiva, pues si $T_h = 0$, entonces $\langle h, y \rangle_H = 0$ para todo $y \in Y$ y por tanto, por la densidad de Y en H , se tiene que $h = 0$. La afirmación $H' \hookrightarrow Y'$ se sigue por identificar h con T_h . En particular, podemos reescribir $\langle h, y \rangle_H = \langle T_h, y \rangle_{Y', Y}$ como $\langle h, y \rangle_H = \langle h, y \rangle_{Y', Y}$ para todo $h \in H$ e $y \in Y$.

Definición 3.21. Decimos que un **triple de evolución** es una identificación de H con su dual tal que

$$Y \hookrightarrow H \cong H' \hookrightarrow Y'.$$

Observación 3.22. Si $h \in Y \hookrightarrow H$, entonces podemos identificar h con T_h y por tanto en Y' la norma de h es

$$\|T_h\|_{Y'} = \sup_{\substack{y \in Y \setminus \{0\} \\ \|y\|_Y \leq 1}} |\langle h, y \rangle_H| \leq c \|h\|_H \leq c' \|h\|_Y.$$

En particular, si $Y = H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$ y $H = L^2(\Omega)$, entonces dada $u \in H^1(\Omega)$, tendremos que u se puede identificar con $T_u \in (H^1(\Omega))'$, donde

$$\begin{aligned} \|T_u\|_{(H^1(\Omega))'} &= \sup \left\{ \left| \int_{\Omega} uv \, dm \right| : y \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}, \|y\|_{H^1(\Omega)} \leq 1 \right\} \\ &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

siempre que u no sea constante en cada componente conexa de Ω .

Lema 3.23. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, sea un espacio de Hilbert $(H, (\cdot, \cdot)_H)$, y sean $u, v \in C^1(I; H)$. Entonces la función

$$g(x) := (u(x), v(x))_H$$

es de clase $\mathcal{C}(I)$ y

$$g'(x) = (u'(x), v(x))_H + (u(x), v'(x))_H.$$

Demostración 3.24. Sea $x \in I$ y $h \neq 0$ pequeño. Entonces usando la bilinealidad del producto interior,

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{(u(x+h), v(x+h))_H - (u(x), v(x))_H}{h} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(u(x+h) - u(x) + u(x), v(x+h))_H - (u(x), v(x))_H}{h} = \\
&= \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h}, v(x+h) \right)_H + \left(u(x), \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right)_H.
\end{aligned}$$

Haciendo $h \rightarrow 0$ y usando la continuidad del producto interior se tiene el resultado deseado.

El siguiente teorema fortalece el 3.12.

Teorema 3.25. [Leoni, 2017, Theorem 8.60, pág 233] Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y acotado, sea $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espacio de Banach embebido en un espacio de Hilbert $(H, (\cdot, \cdot)_H)$, con Y denso en H , y sea $1 \leq p < \infty$. Si $u \in L^p(I; Y)$ tiene una derivada débil $u' \in L^p(I; Y')$, entonces u tiene una representación continua $\bar{u} \in C(\bar{I}; H)$ con

$$\|\bar{u}\|_{C(\bar{I}; H)} \leq c(\|u\|_{L^p(I; Y)} + \|u'\|_{L^p(I; Y)})$$

para alguna constante $c > 0$ independiente de u . Además, la función $x \in \bar{I} \mapsto \|u(x)\|_H^2$ es absolutamente continua, con

$$\frac{d}{dx} \|u(x)\|_H^2 = 2u'(x)(u(x)) = 2\langle u'(x), u(x) \rangle_{Y', Y}$$

para casi todo $x \in I$.

La demostración excede los límites de este trabajo, por lo que si es de interés para el lector se puede encontrar en [Leoni, 2017], en la página 234.

Concluimos esta sección con un teorema importante sobre compacidad, previos resultados que serán útiles para su demostración.

Corolario 3.26. [Leoni, 2017, Corollary 8.26, pág 217] Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y acotado, sean $(Y_0, \|\cdot\|_{Y_0})$, $(Y_1, \|\cdot\|_{Y_1})$ y $(Y_2, \|\cdot\|_{Y_2})$ espacios de Banach con $Y_0 \hookrightarrow Y_1 \hookrightarrow Y_2$. Supongamos que el embebimiento $Y_0 \hookrightarrow Y_1$ es compacto. Sea $1 \leq p < \infty$ y sea $\mathcal{U} \subseteq L^p(I; Y_0)$ un conjunto acotado tal que $\|\tau_h(u) - u\|_{L^p(I^h; Y_2)} \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0^+$ uniformemente para $u \in \mathcal{U}$, donde $\tau_h(u)(x) := u(x+h)$ e $I^h := \{x \in I / x+h \in I\}$. Entonces \mathcal{U} es relativamente compacto en $L^p(I; Y_1)$.

La demostración del corolario se puede encontrar en [Leoni, 2017], a continuación de su enunciado.

Definición 3.27. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ abierto e Y_1, Y_2 dos espacios de Banach. Se define como $W^{1, p_1, p_2}(\Omega; Y_1, Y_2)$ el espacio de todas las funciones $u \in L^{p_1}(\Omega; Y_1)$ cuya derivada distribucional u' pertenece a $L^{p_2}(\Omega; Y_2)$. Este espacio está dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{1, p_1, p_2}(\Omega; Y_1, Y_2)} := \|u\|_{L^{p_1}(\Omega; Y_1)} + \|u'\|_{L^{p_2}(\Omega; Y_2)}.$$

Proposición 3.28. *El espacio $(W^{1,p_1,p_2}(\Omega; Y_1, Y_2), \|\cdot\|_{W^{1,p_1,p_2}(\Omega; Y_1, Y_2)})$ es un espacio de Banach.*

Demostración 3.29. *En efecto, sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{1,p_1,p_2}(\Omega; Y_1, Y_2)$ una sucesión de Cauchy, en particular, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y la sucesión de derivadas en el sentido de las distribuciones $\{u'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ serán sucesiones de Cauchy en, respectivamente, $L^{p_1}(\Omega; Y_1)$ y $L^{p_2}(\Omega; Y_2)$. Por la completitud de dichos espacios se tendrá que*

$$u_n \rightarrow u \in L^{p_1}(\Omega; Y_1),$$

$$u'_n \rightarrow w \in L^{p_2}(\Omega; Y_2),$$

por lo tanto, si logramos demostrar que $u' = w$ habremos terminado. Ahora bien, puesto que en particular $u_n \rightarrow u$ en $\mathcal{D}'(\Omega; Y_1) \subset \mathcal{D}'(\Omega; Y_2)$, y la derivada es un operador continuo en las distribuciones, se tendrá que $u'_n \rightarrow u'$ en $\mathcal{D}'(\Omega; Y_2)$. Por último, puesto que $u'_n \rightarrow w$ en $\mathcal{D}'(\Omega; Y_2)$, se deduce gracias a la unicidad del límite que $w = u'$, tal y como queríamos demostrar.

Definición 3.30. Dadas dos funciones medibles $\phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ y $\psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$, la convolución de ϕ y ψ es la función $\phi * \psi$ dada por

$$(\phi * \psi)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x-y)\psi(y) dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ para el que el lado derecho de la igualdad está bien definido.

Tras los resultados previos podemos enunciar y demostrar el teorema más importante de esta sección.

Teorema 3.31 (Aubin-Lions-Simon). *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y acotado, sean $(Y_0, \|\cdot\|_{Y_0})$, $(Y_1, \|\cdot\|_{Y_1})$ e $(Y_2, \|\cdot\|_{Y_2})$ espacios de Banach con $Y_0 \hookrightarrow Y_1 \hookrightarrow Y_2$. Supongamos que el embebimiento $Y_0 \hookrightarrow Y_1$ es compacto. Sea $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, y sea $W^{1,p,q}(I; Y_0, Y_2)$ el espacio definido anteriormente. El embebimiento $W^{1,p,q}(I; Y_0, Y_2) \hookrightarrow L^p(I; Y_1)$ es compacto.*

Demostración 3.32. *Sea $\{u_n\}_n$ una sucesión acotada en $W^{1,p,q}(I; Y_0, Y_2)$. Usando los hechos de que $q \geq 1$, I es acotado, y*

$$\|u\|_{\mathcal{V}} := \|u\|_{L^p(I; Y_0)} + \|u'\|_{L^q(I; Y_2)},$$

por la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$\{u_n\}_n \text{ está acotada en } L^p(I; Y_0),$$

$$\{u'_n\}_n \text{ está acotada en } L^1(I; Y_2).$$

En virtud del corolario anterior será suficiente probar que $\|\tau_h(u_n) - u_n\|_{L^p(I^h; Y_2)} \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0^+$ uniformemente para $n \in \mathbb{N}$. Como $u_n \in W^{1,1}(I; Y_2)$, por el teorema 3.12, para cada $0 < h < l(I)$ y $x \in I^h$,

$$u_n(x+h) - u_n(x) = \int_x^{x+h} u'_n(s) ds.$$

Por tanto,

$$\|\tau_h(u_n)(x) - u(x)\|_{Y_2} \leq \int_x^{x+h} \|u'_n(s)\|_{Y_2} ds.$$

Si $q \geq p$, elevando ambos lados a p y usando la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\|\tau_h(u_n)(x) - u(x)\|_{Y_2}^p \leq h^{p-1} \int_x^{x+h} \|u'_n(s)\|_{Y_2}^p ds.$$

Ahora, integrando con respecto a x sobre I^h y usando el teorema de Fubini se sigue que

$$\int_{I^h} \|\tau_h(u_n)(x) - u(x)\|_{Y_2}^p dm \leq h^{p-1} \int_{I^h} \int_x^{x+h} \|u'_n(s)\|_{Y_2}^p ds dm \leq h^p \int_{\inf I+h}^{\sup I} \|u'_n(s)\|_{Y_2}^p ds,$$

y por tanto se tiene que

$$\int_{I^h} \|\tau_h(u_n)(x) - u(x)\|^p dm \leq Mh^p,$$

siendo $M := \sup_n \|u'_n\|_{L^p(I; Y_2)}$. Esto muestra que $\|\tau_h(u_n) - u_n\|_{L^p(I^h; Y_2)} \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0^+$ uniformemente para $n \in \mathbb{N}$ y completa la demostración del caso $q \geq p$.

Ahora supongamos que $q < p$. Se tendrá que:

$$\|u_n(t+h) - u_n(t)\|_{B_2} \leq \int_{[t, t+h]} \|u'_n(s)\|_{B_2} dm(s),$$

de donde:

$$\begin{aligned} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_{B_2} &\leq \int_{\mathbb{R}} \chi_{[t, t+h]}(s) \chi_{[a, b]}(s) \|u'_n(s)\|_{B_2} dm(s) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-h, 0]}(t-s) \chi_{[a, b]}(s) \|u'_n(s)\|_{B_2} dm(s). \end{aligned}$$

Esto es, por la definición de convolución de dos funciones,

$$\|u_n(t+h) - u_n(t)\|_{B_2} \leq (\varphi * \psi)(t),$$

donde:

$$\varphi(t) = \chi_{[-h, 0]}(t) \in L^p(\mathbb{R}),$$

$$\psi(t) = \chi_{[a,b]}(t) \|u'_n(t)\|_{B_2} \in L^1(\mathbb{R}).$$

Gracias al teorema de Tonelli y a [Leoni, 2017, Corollary B.83, pág 670] (Desigualdad de Minkowski para las integrales) se tiene que:

$$\begin{aligned} \|\varphi * \psi\|_{L^p(I^h)} &= \left\| \int_{\mathbb{R}} \varphi(\cdot - s) \psi(s) \, dm(s) \right\|_{L^p(I^h)} \leq \int_{\mathbb{R}} \|\varphi(\cdot - s) \psi(s)\|_{L^p(I^h)} \, dm(s) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(s) \|\varphi(\cdot - s)\|_{L^p(I^h)} \, dm(s) \leq h^{1/p} \int_{[a,b]} \|u'_n(s)\|_{B_2} \, dm(s), \end{aligned}$$

de donde se sigue que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h(u_n) - u_n\|_{L^p(I^h; B_2)} = 0,$$

uniformemente para todo $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 4

Aplicaciones a las EDP

En este capítulo describiremos brevemente una de las posibles aplicaciones que tienen los espacios ya estudiados. Abordaremos entonces el estudio de los problemas de evolución, es decir, donde interviene el tiempo. El objetivo de este capítulo es dar una formulación matemática precisa de problemas parabólicos del tipo de la ecuación de calor, introducir las nociones esenciales sobre su aproximación, y, por último, estudiar unas simulaciones para comprobar que la aproximación numérica de la solución del problema converge a la solución del problema continuo. En esta sección el libro [Raviart and Thomas, 1983] será nuestra fuente principal.

4.1. La ecuación del calor. Motivación general de solución.

Se introducirá en el ejemplo modelo de la ecuación de calor una formulación débil de los problemas parabólicos lineales.

Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n de frontera Γ suficientemente regular. Consideramos para $T > 0$

$$\Sigma_T = \Gamma \times (0, T),$$

y consideramos el siguiente problema: Dadas dos funciones $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, se trata de encontrar otra función $u : (x, t) \in \Omega \times (0, T) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$ que sea solución de las ecuaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, \text{ en } \Omega \times (0, T), \quad (4.1)$$

$$u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, T), \quad (4.2)$$

$$u(0) = u_0, \text{ en } \Omega, \quad (4.3)$$

donde 4.1 es la ecuación del calor, 4.2 son las condiciones sobre los límites, y 4.3 son las condiciones iniciales. Nótese que 4.1 y 4.3 describen la evolución a través del tiempo t de la temperatura u sobre un medio continuo $\bar{\Omega}$ homogéneo e isotrópico sometido a una fuente de calor f cuando las constantes físicas se toman iguales a 1, la temperatura se fija en cero en el tiempo en el límite Γ del medio continuo y la temperatura inicial es igual a u_0 .

Para profundizar sobre la solución recordemos que $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert y se denota por $H_0^1(\Omega)$ la adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ sobre $H^1(\Omega)$.

Intentemos ahora formular el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, \text{ en } \Omega \times (0, T), \quad (4.4)$$

$$u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, T), \quad (4.5)$$

$$u(0) = u_0, \text{ en } \Omega. \quad (4.6)$$

Supongamos que la solución u es suficientemente regular. Multipliquemos la ecuación 4.1 por una función test $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)v(x) - \Delta u(x, t)v(x) = f(x, t)v(x)$$

e integremos sobre Ω . Notemos que aunque escribamos dx por comodidad, estaríamos refiriéndonos a la integral de Lebesgue. Así obtenemos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)v(x) dx - \int_{\Omega} \Delta u(x, t)v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t)v(x) dx.$$

Usando la fórmula de Green

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u v dx &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot \nabla u) v dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla u v) dx - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{n} v d\gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde, si $v \in H_0^1(\Omega)$, entonces $v|_{\partial\Omega} = 0$, por ser $H_0^1(\Omega)$ es la adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$, y observando que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)v(x) dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u(x, t)v(x) dx,$$

se tiene para toda función $v \in H_0^1(\Omega)$ que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t)v(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t)v(x) dx.$$

Notemos que las variables x y t juegan papeles diferentes. Los separaremos de la siguiente manera: dada la función $u : (x, t) \in \Omega \times (0, T) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$, introducimos para

todo $t \in (0, T)$ la función $u(t) : x \in \Omega \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$ de manera que la función u se pueda identificar con la función $t \mapsto u(t)$ definida sobre $(0, T)$ con valores en un espacio de funciones de Ω en \mathbb{R} .

Denotemos entonces, para todas $\varphi, \psi \in L^2(\Omega)$,

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi(x)\psi(x) dx,$$

y para todas $\varphi, \psi \in H^1(\Omega)$,

$$a(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx.$$

De este modo, podemos enunciar a una nueva formulación del problema del calor: buscar una función $u : t \in [0, T] \mapsto u(t) \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v), \quad (4.8)$$

$$u(0) = u_0, \quad (4.9)$$

donde, en 4.8, la derivada $\frac{d}{dt}$ se toma en el sentido de las distribuciones sobre $(0, T)$.

La formulación 4.8-4.9 del problema del calor sigue siendo imprecisa, al menos con respecto a la dependencia en t de la función $t \mapsto u(t)$. En particular, conviene que esta función sea continua el sentido convencional con el fin de dar un sentido a la condición inicial 4.9 que precisaremos en el siguiente epígrafe. Destacamos que la condición en los límites 4.2 está incluida en el caso que $u(t) \in H_0^1(\Omega)$.

Hasta ahora no hemos impuesto condiciones sobre los datos ni estudiado a qué espacio pertenece la función solución. En efecto, la función u_0 se considera en $L^2(\Omega)$ y $f \in L^2([0, T]; L^2(\Omega))$. En consecuencia, se puede comprobar que la función solución u será un elemento de $\mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)) \cap W^{1,2,2}([0, T]; H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$, donde $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$.

Ahora que ya tenemos algunas condiciones sobre la regularidad de los datos podríamos plantearnos particularizar la solución de la ecuación del calor teniéndolas en cuenta. De esta manera, presentamos dos formas equivalentes de definirla.

Definición 4.1. Diremos que $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)) \cap W^{1,2,2}([0, T]; H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$, con $u(0) = u_0$ es una solución débil de la ecuación 4.1-4.2-4.3, si:

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{du}{dt}(t), v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v dx \\ & = \int_{\Omega} f(t)v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \text{ c.t.p } t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Definición 4.2. Diremos que $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)) \cap W^{1,2,2}([0, T]; H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$, con $u(0) = u_0$ es una solución débil de la ecuación 4.1-4.2-4.3, si:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(u(t), v)_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_{\Omega} f(t)v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \text{ en } \mathcal{D}'(0, T). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Esto es:

$$\begin{aligned} & - \int_{[0, T]} (u(s), v)_{L^2(\Omega)} \varphi'(s) \, ds + \int_{[0, T]} \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx \, \varphi(s) \, ds \\ &= \int_{[0, T]} \int_{\Omega} f(t)v \, dx \, \varphi(s) \, ds, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Proposición 4.3. Las formulaciones 4.10 y 4.11 son equivalentes.

Demostración 4.4. Veamos en primer lugar que si u cumple 4.10, también debe cumplir 4.11.

Consideremos dos elementos $v \in H_0^1(\Omega)$ y $\varphi \in \mathcal{D}'(I)$, se tendrá que $\psi = \varphi \otimes v$ ¹ es tal que $\psi \in W^{1,\infty,\infty}([0, T]; H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)) \subset W^{1,2,2}([0, T]; H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$. Por lo tanto, si multiplicamos 4.10 por φ e integramos en $[0, T]$:

$$\begin{aligned} & \int_{[0, T]} \left\langle \frac{du}{dt}(s), v \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} \varphi(s) \, ds + \int_{[0, T]} \langle a(s, u(s)), v \rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} \varphi(s) \, ds \\ &= \int_{[0, T]} \langle f(s), v \rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} \varphi(s) \, ds, \end{aligned} \quad (4.13)$$

de donde:

$$\begin{aligned} & \int_{[0, T]} \left\langle \frac{du}{dt}(s), \psi(s) \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} \, ds + \int_{[0, T]} \langle a(s, u(s)), \psi(s) \rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} \, ds \\ &= \int_{[0, T]} \langle f(s), \psi(s) \rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} \, ds. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Aplicando ahora la fórmula de integración por partes llegamos a que:

$$\begin{aligned} & \int_{[0, T]} \left\langle \frac{du}{dt}(s), \psi(s) \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} \, ds + \int_{[0, T]} \left\langle u(s), \frac{d\psi}{dt}(s) \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} \, ds \\ &= (u(T), \psi(T))_{\Omega} - (u(0), \psi(0))_{\Omega} = 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

con lo cual:

$$\begin{aligned} & - \int_{[0, T]} \left\langle u(s), \frac{d\psi}{dt}(s) \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} \, ds + \int_{[0, T]} \langle a(s, u(s)), \psi(s) \rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} \, ds \\ &= \int_{[0, T]} \langle f(s), \psi(s) \rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} \, ds. \end{aligned} \quad (4.16)$$

¹ $(\varphi \otimes v)(t) = \varphi(t)v$

Por la propia estructura de la función ψ , se tendrá que:

$$\left\langle u(s), \frac{d\psi}{dt}(s) \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} = (u(s), \psi'(s))_\Omega, \quad (4.17)$$

con lo cual:

$$\begin{aligned} & - \int_{[0, T]} (u(s), v)_\Omega \varphi'(s) \, ds + \int_{[0, T]} \langle a(s, u(s)), v \rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} \varphi(s) \, ds \\ & = \int_{[0, T]} \langle f(s), v \rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} \varphi(s) \, ds. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ahora, puesto que la elección de φ y v fue arbitraria, se sigue que:

$$\frac{d}{dt}(u(t), v)_\Omega + \langle a(t, u(t)), v \rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} = \langle f(t), v \rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (4.19)$$

Por otra parte, para ver la otra implicación basta con ver que:

$$- \int_{[0, T]} (u(s), v)_\Omega \varphi'(s) \, ds + \frac{du}{dt} = f - a(\cdot, u) \in L^2([0, T]; H^{-1}(\Omega)) \subset L^1([0, T]; H^{-1}(\Omega)), \quad (4.20)$$

por lo tanto, gracias al teorema 3.12, tenemos que $u \in \mathcal{AC}([0, T]; H^{-1}(\Omega))$ y, entonces, se tendrá que se cumple 4.10.

4.2. Existencia y unicidad de solución. Acotación con respecto a los datos.

Como en este momento hemos visto la motivación de la solución y algunas condiciones sobre las funciones de los datos a la hora de estudiar la regularidad de la solución podemos pasar a plantearnos condiciones de existencia, unicidad y acotación con respecto a los datos.

A continuación introduciremos una formulación más general del problema del calor. En la formulación 4.8-4.9 del problema intervienen los espacios $H_0^1(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$, así como la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ definida anteriormente. Denotaremos por (\cdot, \cdot) el producto escalar sobre $L^2(\Omega)$, $|\cdot|$ la norma correspondiente y $\|\cdot\|$ la norma sobre $H_0^1(\Omega)$. Aunque a continuación describiremos el problema general, más adelante estudiaremos la ecuación del calor, que es un caso particular de la formulación general. Por lo tanto, ahora podemos formular el problema general de una manera precisa: puesto que $u_0 \in L^2(\Omega)$ y $f \in L^2([0, T], L^2(\Omega))$, se trata de encontrar una función u tal que

$$u \in L^2([0, T], H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^2(\Omega)), \quad (4.21)$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v), \text{ en } \mathcal{D}'(0, T), \quad (4.22)$$

$$u(0) = u_0 \quad (4.23)$$

Notemos que esta formulación del problema tiene sentido. En primer lugar, como $u \in L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$, las funciones $t \mapsto (u(t), v)$ y $t \mapsto a(u(t), v)$ pertenecen al espacio $L^2([0, T])$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. De la misma manera, como f es una función de $L^2([0, T], L^2(\Omega))$, la función $t \mapsto (f(t), v)$ está en $L^2([0, T])$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Entonces resulta que la ecuación 4.22 tiene sentido en $\mathcal{D}'(0, T)$. Por otra parte, la condición inicial 4.23 tiene sentido en virtud de la continuidad de la función u de $[0, T]$ en $L^2(\Omega)$. Para concluir, la condición 4.21 de regularidad en t impuestas a la solución pueden parecer bastante arbitrarias, pero veremos en la demostración del teorema 4.7 que, de hecho, son naturales.

Para resolver el problema 4.21-4.22-4.23, con las últimas condiciones impuestas sobre la función u , imponemos la hipótesis de coercividad sobre a , es decir, $\exists \alpha > 0, \lambda \geq 0$ tales que

$$\forall v \in \Omega, a(v, v) + \lambda|v|^2 \geq \alpha\|v\|^2. \quad (4.24)$$

Por otra parte, supondremos que:

$$\text{La inyección canónica de } H_0^1(\Omega) \text{ en } L^2(\Omega) \text{ es compacta;} \quad (4.25)$$

$$\text{La forma bilineal } a(\cdot, \cdot) \text{ es simétrica.} \quad (4.26)$$

Con estas condiciones, empleando [Raviart and Thomas, 1983, Théorème 6.2.1, pág 137] y [Raviart and Thomas, 1983, Remarque 6.2.2, pág 138], existirá una sucesión creciente de autovalores $-\lambda < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots \rightarrow \infty$ y una base de Hilbert ortonormal sobre $L^2(\Omega)$ de autovectores (w_i) tales que

$$\forall v \in \Omega, a(w_i, v) = \lambda_i(w_i, v). \quad (4.27)$$

Además, la sucesión $(\lambda_i^{-1/2} w_i)$ forma una base de Hilbert ortonormal del espacio $H_0^1(\Omega)$.

Lema 4.5. [Raviart and Thomas, 1983, Lemme 7.2.1, pág 157] *De suponer que se verifican las hipótesis 4.24-4.25-4.26, si u es solución del problema 4.21-4.22-4.23, será posible descomponerla como serie de la forma que sigue:*

$$u(t) = \sum_{i \geq 1} \left\{ (u_0, w_i) e^{-\lambda_i t} + \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right\} w_i. \quad (4.28)$$

Demostración 4.6. *Sea u solución del problema 4.21-4.22-4.23. Puesto que u pertenece a $\mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$ y que (w_i) es una base de Hilbert ortonormal sobre $L^2(\Omega)$, tenemos para todo $t \in [0, T]$*

$$u(t) = \sum_{i \geq 1} (u(t), w_i) w_i.$$

Pero como $u(t) \in \Omega$ casi para todo t , tenemos que

$$a(u(t), w_i) = \lambda_i(u(t), w_i),$$

de lo que se deduce que, sustituyendo w_i por v en la expresión 4.22, y de 4.23, que $\alpha_i(t) = (u(t), w_i)$ es solución de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\alpha_i(t) + \lambda_i\alpha_i(t) = (f(t), w_i), \\ \alpha_i(0) = (u_0, w_i), \end{cases} \quad (4.29)$$

donde la solución está dada por

$$\alpha_i(t) = (u_0, w_i)e^{-\lambda_i t} + \int_{[0,t]} (f(s), w_i)e^{-\lambda_i(t-s)} dm(s). \quad (4.30)$$

Por tanto, se sigue que la función u es la suma de la serie 4.28.

Un resultado más que interesante para esta sección es el siguiente teorema.

Teorema 4.7. [Raviart and Thomas, 1983, Théorème 7.2.1, pág 158] De suponer que se verifican las hipótesis 4.24-4.25-4.26, si u es solución del problema 4.21-4.22-4.23, será única.

Previamente a la demostración conviene definir la elipticidad de una forma bilineal.

Definición 4.8. Una forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ se dice $H_0^1(\Omega)$ -elíptica si existe una constante $c > 0$ tal que para todo $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$a(v, v) \geq c\|v\|^2.$$

Demostración 4.9 (del teorema 4.7). Sólo queda mostrar la existencia, pues la unicidad viene de la mano al comprobar que la serie 4.28 converge para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$ y toda $f \in L^2([0, T], L^2(\Omega))$, y luego que su suma $u(t)$ es la solución del problema. La demostración se realiza en varias etapas:

1^a) Siempre podemos suponer que la hipótesis 4.24 tiene lugar con $\lambda = 0$, es decir, la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es $H_0^1(\Omega)$ -elíptica. De hecho, al hacer el cambio de función en $u = e^{\lambda t}w$ vemos que el problema 4.8-4.9 es equivalente a la búsqueda de una función $w \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$ solución de

$$\begin{cases} \forall v \in V, \frac{d}{dt}(w(t), v) + a(w(t), v) + \lambda(w(t), v) = (e^{-\lambda t}f(t), v), \\ w(0) = u_0. \end{cases} \quad (4.31)$$

Encontramos aquí un problema de la misma naturaleza que el problema planteado pero con $a(\cdot, \cdot)$ reemplazado por $a(\cdot, \cdot) + \lambda(\cdot, \cdot)$. De ahora en adelante supondremos que 4.24 se tiene con $\lambda = 0$.

2^a) Construimos una solución aproximada del problema. Introducimos el subespacio V_m de $H_0^1(\Omega)$ engendrado por los m primeros autovectores w_1, \dots, w_m y reemplazamos el problema dado por el problema aproximado siguiente: encontrar una función $u_m : t \in [0, T] \rightarrow u_m(t) \in V_m$ solución del sistema diferencial ordinario

$$\begin{cases} \forall v \in V_m, \frac{d}{dt}(u_m(t), v) + a(u_m(t), v) = (f(t), v), \\ u_m(0) = u_{0,m} = \sum_{i=1}^m (u_0, w_i) w_i. \end{cases} \quad (4.32)$$

Luego al plantear

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) w_i, \quad \alpha_i(t) = (u_m(t), w_i),$$

verificamos exactamente como en la prueba del lema 4.5 que la función α_i es la solución de la ecuación diferencial 4.29. De ello se deduce que la solución de 4.32 está dada por

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m \left\{ (u_0, w_i) e^{-\lambda_i t} + \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right\} w_i. \quad (4.33)$$

Dicho de otra forma, $u_m(t)$ no es otra si no la suma parcial de orden m de la serie 4.28.

3^a) Procedemos a demostrar que (u_m) es una sucesión de Cauchy sobre los espacios $\mathcal{C}([0, T], L^2(\Omega))$ y $L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$. Sean m y p dos enteros tales que $p > m \geq 1$. Como (w_i) es una base de Hilbert ortonormal sobre $L^2(\Omega)$, tenemos que

$$|u_p(t) - u_m(t)| = \left\{ \sum_{i=m+1}^p \left[(u_0, w_i) e^{-\lambda_i t} + \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right]^2 \right\}^{1/2},$$

de donde

$$|u_p(t) - u_m(t)| \leq \left\{ \sum_{i=m+1}^p (u_0, w_i)^2 e^{-2\lambda_i t} \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{i=m+1}^p \left(\int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, llegamos a que

$$\left(\int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right)^2 \leq \left(\int_0^t (f(s), w_i)^2 ds \right) \left(\int_0^t e^{-2\lambda_i(t-s)} ds \right),$$

entonces

$$\left(\int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right)^2 \leq \frac{1}{2\lambda_i} \int_0^t (f(s), w_i)^2 ds.$$

Por tanto, deducimos que

$$\sup_{t \in [0, T]} |u_p(t) - u_m(t)| \leq \left\{ \sum_{i=m+1}^p (u_0, w_i)^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \frac{1}{2\lambda_1} \sum_{i=m+1}^p \int_0^T (f(s), w_i)^2 ds \right\}^{1/2}. \quad (4.34)$$

Además, se tiene en virtud de 4.32 y 4.27 que

$$\begin{aligned} a(u_p(t) - u_m(t), u_p(t) - u_m(t)) &= \sum_{i=m+1}^p \lambda_i (u_p(t) - u_m(t), w_i)^2 \\ &= \sum_{i=m+1}^p \lambda_i \left((u_0, w_i) e^{-\lambda_i t} + \int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right)^2. \end{aligned}$$

Gracias a la $H_0^1(\Omega)$ -elipticidad de $a(\cdot, \cdot)$ y la desigualdad $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, se obtiene

$$\|u_p(t) - u_m(t)\|^2 \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{i=m+1}^p \lambda_i \left((u_0, w_i)^2 e^{-2\lambda_i t} + \left(\int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right)^2 \right).$$

Como

$$\lambda_i \int_0^T e^{-2\lambda_i t} dt = \frac{1}{2} (1 - e^{-2\lambda_i T}) < \frac{1}{2}$$

y

$$\lambda_i \int_0^T \left(\int_0^t (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right)^2 \leq \frac{T}{2} \int_0^T (f(t), w_i)^2 dt,$$

se deduce que

$$\int_0^T \|u_p(t) - u_m(t)\|^2 dt \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{i=m+1}^p \left\{ (u_0, w_i)^2 + T \int_0^T (f(t), w_i)^2 dt \right\}. \quad (4.35)$$

Ya que

$$|u_0|^2 = \sum_{i \geq 1} (u_0, w_i)^2 < +\infty,$$

$$\|f\|_{L^2([0,T],L^2(\Omega))}^2 = \sum_{i \geq 1} \int_0^T (f(t), w_i)^2 dt < +\infty,$$

tenemos que

$$\lim_{m,p \rightarrow \infty} \sum_{i=m+1}^p (u_0, w_i)^2 = 0$$

y

$$\lim_{m,p \rightarrow \infty} \sum_{i=m+1}^p \int_0^T (f(t), w_i)^2 dt = 0.$$

Luego deducimos de 4.34 y 4.35 que

$$\lim_{m,p \rightarrow \infty} \|u_p - u_m\|_{\mathcal{C}([0,T],L^2(\Omega))} = \lim_{m,p \rightarrow \infty} \|u_p - u_m\|_{L^2([0,T],H_0^1(\Omega))} = 0.$$

La sucesión (u_m) es, por tanto, una sucesión de Cauchy en $L^2([0,T],H_0^1(\Omega))$ y en $\mathcal{C}([0,T],L^2(\Omega))$.

4^o) Puesto que los espacios $L^2([0,T],H_0^1(\Omega))$ y $\mathcal{C}([0,T],L^2(\Omega))$ son completos, la sucesión (u_m) converge sobre cada uno de los espacios. Como las inyecciones canónicas de $L^2([0,T],H_0^1(\Omega))$ sobre $L^2([0,T],L^2(\Omega))$ y de $\mathcal{C}([0,T],L^2(\Omega))$ sobre $L^2([0,T],L^2(\Omega))$ son continuas, el límite de (u_m) es el mismo sobre ambos espacios. Entonces se tiene:

$$u_m \rightarrow u \text{ sobre } L^2([0,T],H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T],L^2(\Omega)) \text{ cuando } m \rightarrow \infty. \quad (4.36)$$

Sólo queda por comprobar que u es la solución del problema 4.21-4.22-4.23. Sea entonces $\psi \in \mathcal{D}((0,T))$ y sea $\mu \geq 1$ un entero arbitrario. Deducimos de 4.32 que para todo $m \geq \mu$, se tiene que

$$\forall v \in V_\mu, - \int_0^T (u_m(t), v) \frac{d\psi}{dt}(t) dt + \int_0^T a(u_m(t), v) \psi(t) dt = \int_0^T (f(t), v) \psi(t) dt,$$

y, por el argumento del paso a límite gracias a 4.36, obtenemos que

$$\forall v \in V_\mu, - \int_0^T (u(t), v) \frac{d\psi}{dt}(t) dt + \int_0^T a(u(t), v) \psi(t) dt = \int_0^T (f(t), v) \psi(t) dt.$$

Como $\cup_{\mu \geq 1} V_\mu$ es denso sobre $H_0^1(\Omega)$ puesto que (w_i) es una base de $H_0^1(\Omega)$, la relación anterior se tiene para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Esto significa exactamente que la función u verifica la ecuación 4.22 en el sentido de las distribuciones sobre $(0,T)$.

Finalmente, de acuerdo con 4.36, tenemos

$$u_m(0) \rightarrow u(0) \text{ sobre } L^2(\Omega).$$

4.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN. ACOTACIÓN CON RESPECTO A LOS DATOS.47

Por otra parte,

$$u_m(0) = \sum_{i=1}^m (u_0, w_i) w_i \rightarrow u_0 \text{ sobre } L^2(\Omega).$$

De esta manera, $u(0) = u_0$, lo cual termina la demostración del teorema.

Ahora podemos proceder a enunciar y demostrar un resultado sobre la continuidad con respecto a los datos.

Teorema 4.10. [Raviart and Thomas, 1983, Théorème 7.2-2, pág 161] Bajo las mismas hipótesis que el anterior teorema, la solución u del problema 4.21-4.22-4.23 verifican la desigualdad

$$|u(t)| \leq |u_0|e^{-\lambda_1 t} + \int_0^t |f(s)|e^{-\lambda_1(t-s)} ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.37)$$

donde λ_1 es el autovalor más pequeño de 4.27.

Demostración 4.11. Es una simple aplicación de la existencia de desarrollo en serie 4.28. Se deduce que

$$|u(t)| \leq \left| \sum_{i \geq 1} (u_0, w_i) e^{-\lambda_i t} w_i \right| + \int_0^t \left| \sum_{i \geq 1} (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} w_i \right| ds.$$

Ahora,

$$\left| \sum_{i \geq 1} (u_0, w_i) e^{-\lambda_i t} w_i \right| = \left\{ \sum_{i \geq 1} (u_0, w_i)^2 e^{-2\lambda_i t} \right\}^{1/2} \leq |u_0| e^{-\lambda_1 t},$$

y para $0 \leq s \leq t$

$$\left| \sum_{i \geq 1} (f(s), w_i) e^{-\lambda_i(t-s)} w_i \right| = \left\{ \sum_{i \geq 1} (f(s), w_i)^2 e^{-2\lambda_i(t-s)} \right\}^{1/2} \leq |f(s)| e^{-\lambda_1(t-s)},$$

de ahí el resultado.

Señalemos que la regularidad en t de la solución u del problema 4.21-4.22-4.23 sólo se obtiene bajo supuestos algo técnicos relacionados con las funciones u_0 y f . No detallaremos estas hipótesis en este trabajo.

Por otra parte, si consideramos el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sigma u = f, & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \nu \nabla u \cdot \vec{n} = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) = u_0, & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (4.38)$$

con $\sigma > 0$, sería suficiente $H^1(\Omega)$ en lugar de $H_0^1(\Omega)$. En cuanto a su formulación variacional no experimenta ningún cambio respecto al problema de partida. Además, la condición de frontera tipo Neumann homogénea no añade ningún término adicional.

Como observación se puede comprobar que al aplicar Green va a aparecer el término

$$\int_{\partial\Omega} \nu \nabla u \cdot \mathbf{n} v \, d\gamma, \quad v \in H^1(\Omega).$$

Por último, cuando antes tomábamos $v \in H_0^1(\Omega)$, el término anterior se anulaba ya que $v|_{\partial\Omega} = 0$. Ahora, la condición de frontera es que $\nu \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre $\partial\Omega$, con lo cual, la integral anterior se anula.

4.3. Resolución numérica del problema (discretización espacial)

Retomemos la situación general de la sección anterior con las correspondientes hipótesis y notaciones. Durante la demostración del teorema 4.7, elegimos un subespacio V_m de $H_0^1(\Omega)$ de dimensión finita y luego construimos una solución aproximada $u_m : t \in [0, T] \mapsto u_m(t) \in V_m$ del problema 4.1-4.2-4.3 solución de un sistema diferencial ordinario. Generalizaremos este método de aproximación.

Sea V_h un subespacio de $H_0^1(\Omega)$ de dimensión finita $I = I_h$; consideramos el siguiente problema aproximado: dado $u_{0,h} \in V_h$, se trata de encontrar una función $u_h : t \in [0, T] \mapsto u_h(t) \in V_h$ solución del sistema diferencial ordinario

$$\begin{cases} \forall v \in V_h, \quad \frac{d}{dt}(u_h(t), v_h) + a(u_h(t), v_h) = (f(t), v_h), \\ u_h(0) = u_{0,h}. \end{cases} \quad (4.39)$$

De acuerdo con el Teorema [Raviart and Thomas, 1983, Théorème 6.2.1] y la Observación [Raviart and Thomas, 1983, Remarque 6.2.2] que usamos anteriormente, existe una sucesión creciente de autovalores $-\lambda < \lambda_{1,h} \leq \lambda_{2,h} \leq \dots \leq \lambda_{I,h}$ y una base $(w_{i,h})$ de V_h ortonormal en $L^2(\Omega)$ formada por autovectores $w_{i,h}$ verificando

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(w_{i,h}, v_h) = \lambda_{i,h}(w_{i,h}, v_h).$$

Por tanto, se tiene lo siguiente:

Teorema 4.12. *El problema 4.39 admite una única solución u_h dada por*

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^I \left\{ (u_{0,h}, w_{i,h}) e^{-\lambda_{i,h} t} + \int_0^t (f(s), w_{i,h}) e^{-\lambda_{i,h}(t-s)} \, ds \right\} w_{i,h} \quad (4.40)$$

4.3. RESOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA (DISCRETIZACIÓN ESPACIAL) 49

La demostración es en todos los aspectos similar a la del lema 4.5. En la práctica, introducimos una base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq I}$ del espacio V_h y buscamos la función u_h de la forma

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^I \xi_j(t) \varphi_j.$$

Así, al plantear

$$u_{0,h} = \sum_{j=1}^I \xi_{0,j} \varphi_j,$$

el problema 4.39 se reescribe como

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^I (\varphi_j, \varphi_i) \frac{d\xi_j}{dt}(t) + \sum_{j=1}^I a(\varphi_j, \varphi_i) \xi_j(t) = (f(t), \varphi_i), & 1 \leq i \leq I, \\ \xi_i(0) = \xi_{0,i}, & 1 \leq i \leq I. \end{cases} \quad (4.41)$$

Introduciendo la matriz de rigidez $R = (a(\varphi_j, \varphi_i))_{1 \leq i, j \leq I}$ y la matriz de masa $M = ((\varphi_j, \varphi_i))_{1 \leq i, j \leq I}$, el problema de aproximación viene dado por

$$\begin{cases} M \frac{d\xi}{dt}(t) + R\xi(t) = \beta(t), \\ \xi(0) = \xi_0, \end{cases} \quad (4.42)$$

donde escribimos

$$\begin{aligned} \xi(t) &= (\xi_1(t), \dots, \xi_I(t))^T, \\ \beta(t) &= (\beta_1(t), \dots, \beta_I(t))^T, \quad \beta_i(t) = (f(t), \varphi_i) \quad 1 \leq i \leq I. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Se trata entonces de resolver numéricamente este sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de dimensión I . En primer lugar, examinaremos el error cometido cuando sustituimos el problema 4.214.22-4.23 por el problema aproximado 4.39. Para simplificar un poco la exposición de los resultados, supondremos que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es $H_0^1(\Omega)$ -elíptica. Podemos entonces introducir el operador de proyección elíptica $\Pi_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega); V_h)$ definido por:

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(\Pi_h u - u, v_h) = 0 \quad (4.44)$$

Bajo estas condiciones, tenemos el siguiente resultado de estimación de errores.

Teorema 4.13. *Hacemos las hipótesis 4.24 (con $\lambda = 0$)-4.25-4.26. Entonces, si la solución u del problema 4.214.22-4.23 pertenece a $C^1(0, T; H_0^1(\Omega))$, se tendrá*

$$\begin{aligned} |u_h(t) - u(t)| &\leq |u_{0,h} - \Pi_h u_0| e^{-\lambda_1 t} + |(I - \Pi_h)u(t)| + \\ &+ \int_0^t \left| (I - \Pi_h) \frac{du}{dt}(s) \right| e^{-\lambda_1(t-s)} ds, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Demostración 4.14. Deducimos de 4.25, 4.39 y 4.44 que para todo $v_h \in V_h$

$$\frac{d}{dt}(u_h(t) - \Pi_h u(t), v_h) + a(u_h(t) - \Pi_h u(t), v_h) = \frac{d}{dt}(u(t) - \Pi_h u(t), v_h).$$

Como, por hipótesis, la solución u de 4.21-4.23 pertenece a $C^1(0, T; H_0^1(\Omega))$, entonces $\Pi_h u$ es una función de $C^1(0, T; V_h)$ y tenemos

$$\frac{d}{dt}(\Pi_h u) = \Pi_h \frac{du}{dt},$$

de donde

$$\frac{d}{dt}(u_h(t) - \Pi_h u(t), v_h) = \left(\frac{du}{dt}(t) - \Pi_h \frac{du}{dt}(t), v_h \right).$$

Desarrollando sobre la base $(w_{i,h})$ de los autovectores, se tiene

$$\begin{aligned} u_h(t) - \Pi_h u(t) &= \sum_{i=1}^I \left\{ (u_{0,h} - \Pi_h u_0, w_{i,h}) e^{-\lambda_{i,h} t} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \left((I - \Pi_h) \frac{du}{dt}(s), w_{i,h} \right) e^{-\lambda_{i,h}(t-s)} ds \right\} w_{i,h}, \end{aligned}$$

y, razonando como en el teorema 4.10, obtenemos

$$|u_h(t) - \Pi_h u(t)| \leq |u_{0,h} - \Pi_h u_0| e^{-\lambda_{1,h} t} + \int_0^t \left| (I - \Pi_h) \frac{du}{dt}(s) \right| e^{-\lambda_{1,h}(t-s)} ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Deducimos de aquí la acotación buscada 4.45 ya que, como $\lambda_m \leq \lambda_{m,h}$, $1 \leq m \leq I$, obtenemos $\lambda_1 \leq \lambda_{1,h}$.

Ahora hagamos la hipótesis de aproximación

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\| = 0. \quad (4.46)$$

Corolario 4.15. [Raviart and Thomas, 1983, Corollaire 7.4-1., pág 168] Bajo las condiciones del teorema 4.13, con las hipótesis adicionales 4.46 y con

$$\lim_{h \rightarrow 0} |u_{0,h} - u_0| = 0, \quad (4.47)$$

se tiene

$$\forall t \in [0, T], \quad \lim_{h \rightarrow 0} |u_h(t) - u(t)| = 0. \quad (4.48)$$

Demostración 4.16. Si v es una función continua de $[0, T]$ sobre $H_0^1(\Omega)$, la familia de funciones $(I - \Pi_h)v$ es equicontinua² de $[0, T]$ sobre $H_0^1(\Omega)$ y sobre las hipótesis anteriores, tenemos

$$\forall t \in [0, T], \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|(I - \Pi_h)v(t)\| = 0.$$

²Una familia de funciones se dice equicontinua en un punto si cada una de las funciones es continua en dicho punto. También se dirá que una familia es equicontinua si lo es para todo punto.

Utilizando el teorema de Ascoli-Arzelá, deducimos

$$\forall v \in \mathcal{C}^0(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T} \|(I - \Pi_h)v(t)\| = 0. \quad (4.49)$$

Con estas condiciones, 4.48 es una consecuencia inmediata de 4.45, 4.47 y 4.49.

Observación 4.17. El aumento del error 4.45 pone de manifiesto una importante propiedad numérica: la contribución del error total al tiempo t de un error cometido en el tiempo $s < t$ disminuye exponencialmente con $t - s$. En otras palabras, se puede integrar el sistema diferencial 4.39 en intervalos de tiempo largos sin que la calidad de la aproximación obtenida empeore.

Observación 4.18. El resultado de convergencia 4.48 puede ser, en realidad, mejorado. De hecho, podemos utilizar métodos más sofisticados para mostrar el siguiente resultado más preciso:

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_h = u \text{ sobre } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ y sobre } \mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega)), \quad (4.50)$$

sin ninguna suposición de regularidad en u .

Ahora tenemos que resolver numéricamente el sistema diferencial 4.39. Un primer método consiste en utilizar la fórmula explícita 4.40 pero truncándola en los m primeros términos: entonces aproximamos la función u_h por

$$u_{h,m}(t) = \sum_{i=1}^m \left\{ (u_{0,h}, w_{i,h}) e^{-\lambda_{i,h} t} + \int_0^t (f(s), w_{i,h}) e^{-\lambda_{i,h}(t-s)} ds \right\} w_{i,h}. \quad (4.51)$$

Para determinar $u_{h,m}$, tenemos que calcular numéricamente los m primeros autovalores $\lambda_{i,h}$, $1 \leq i \leq m$, y los correspondientes $w_{i,h}$ autovectores, es decir, los m primeros autovalores y los autovalores asociados del problema espectral matricial

$$R\xi = \lambda M\xi,$$

cuya resolución numérica se puede obtener empleando métodos como los de Jacobi o Householder (ver [Ciarlet, 1982, Capítulo 6]).

En el siguiente apartado correspondiente de [Raviart and Thomas, 1983, 7.5, pág 169] sigue con una discretización total, es decir, aproximando numéricamente las ecuaciones diferenciales asociadas a cada autofunción, pero en este trabajo no nos hará falta, pues hemos elegido de forma apropiada el ejemplo para que las ecuaciones diferenciales asociadas a cada autofunción tengan solución explícita. Esto nos pasa porque estaríamos en las hipótesis del Teorema 4.13

4.4. Simulación del problema con FreeFem++

Realizaremos una simulación del problema del calor con FreeFem++ [Hecht, 2012]. Uno de los aspectos más interesantes de esta simulación será la comprobación de que la construcción de la solución aproximada del apartado anterior converge a la solución del problema continuo.

4.4.1. Planteamiento de la aproximación

Antes que nada, presentamos la ecuación que resolveremos numéricamente:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sigma u = f, & \Omega \times (0, T); f \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R})), \\ \nu \nabla u \cdot \vec{n} = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) = u_0, & \text{sobre } \Omega; u_0 \in L^2(\Omega), \end{cases} \quad (4.52)$$

siendo $\sigma > 0$ y $u \in \mathcal{C}(0, T; L^2(\Omega)) \cap W^{1,2,2}(0, T; H^1(\Omega), H^1(\Omega)')$ una función tal que:

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ \frac{d}{dt}(u(t), v)_{L^2(\Omega)} + \nu \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx + \sigma \int_{\Omega} u(t)v \, dx = \int_{\Omega} f(t)v \, dx \end{cases} \quad (4.53)$$

en $\mathcal{D}'(0, T)$, y $\forall v \in H^1(\Omega)$.

Por tanto, para la aproximación de este problema consideraremos $\{w_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}} \subset H^1(\Omega)$ una base de Hilbert ortonormal sobre $L^2(\Omega)$, y $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{cases} \nu \int_{\Omega} \nabla w_\alpha \cdot \nabla v \, dx + \sigma \int_{\Omega} w_\alpha v \, dx = \lambda_\alpha \int_{\Omega} w_\alpha v \, dx, & \forall v \in H^1(\Omega), \\ u(t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} u_\alpha(t) w_\alpha, & \text{donde:} \\ u_\alpha(t) = (u_0, w_\alpha) e^{-\lambda_\alpha t} + \int_0^t (f(s), w_\alpha) e^{-\lambda_\alpha(t-s)} \, ds \end{cases} \quad (4.54)$$

No obstante, como los espacios $H_0^1(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$ son espacios vectoriales de dimensión infinita, para realizar la aproximación numérica, debemos considerar subespacios vectoriales de dimensión finita. Para construir dichos subespacios vectoriales, supondremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio poligonal. Por lo tanto, podemos considerar una familia de mallados regulares formados por triángulos ³ $\{\tau_h\}_{h>0}$, donde, para cada $h > 0$, τ_h es un mallado triangular de $\bar{\Omega}$ de forma que $\text{diam}(T) \leq h$ para todo $T \in \tau_h$. Asociado a cada uno de los

³Un mallado por triángulos es regular si su unión forma el polígono original y cada triángulo comparte, como mucho, una arista con otro triángulo, incidiendo entonces sobre 2 vértices de cada uno.

mallados τ_h , podemos definir el siguiente espacio vectorial:

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : v|_T \in \mathbb{P}^1(T), \forall T \in \tau_h\}.$$

Se tiene que $V_h \subset H^1(\Omega)$ es un subespacio vectorial de dimensión igual al número de vértices del mallado τ_h . En efecto, se tiene la siguiente propiedad:

Teorema 4.19. V_h es un subespacio vectorial de $H^1(\Omega)$.

Demostración. Por un lado, resulta claro que V_h es un espacio vectorial con las operaciones básicas de suma y multiplicación por escalares. Veamos entonces que, dado un elemento $v_h \in V_h$, se tiene que $v \in H^1(\Omega)$. Por un lado, por ser $v_h \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, se tiene que $v_h \in L^2(\Omega)$. Por otro lado, dado un elemento $T \in \tau_h$, $v_h|_T \in \mathbb{P}^1(T)$, en particular, si denotamos por p_i tal que:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{T \in \tau_h} p_i|_T \chi_T(\mathbf{x}),$$

donde $p_i|_T := \frac{\partial v_h|_T}{\partial x_i} \in L^2(T)$, se tendrá que $p_i \in L^2(\Omega)$, para todo $i = 1, \dots, n$ (donde n es la dimensión del espacio). Veamos entonces que p_i es la derivada parcial con respecto a i de la función v_h en el sentido de las distribuciones. Dado un elemento $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p_i \varphi \, dx &= \sum_{T \in \tau_h} \int_T p_i|_T \varphi|_T \, dx \\ &= \sum_{T \in \tau_h} \int_T \frac{\partial v_h|_T}{\partial x_i} \varphi|_T \, dx. \end{aligned}$$

Ahora, gracias al teorema de Green:

$$\sum_{T \in \tau_h} \int_T \frac{\partial v_h|_T}{\partial x_i} \varphi|_T \, dx = - \sum_{T \in \tau_h} \int_T v_h|_T \frac{\partial \varphi|_T}{\partial x_i} \, dx + \sum_{T \in \tau_h} \int_{\partial T} v_h|_T \varphi|_T \mathbf{n}_T \cdot \mathbf{e}_i \, d\gamma.$$

Finalmente, gracias a la continuidad de la función v_h :

$$\sum_{T \in \tau_h} \int_{\partial T} v_h|_T \varphi|_T \mathbf{n}_T \cdot \mathbf{e}_i \, d\gamma = 0,$$

de donde se sigue que:

$$\int_{\Omega} p_i \varphi \, dx = - \sum_{T \in \tau_h} \int_T v_h|_T \frac{\partial \varphi|_T}{\partial x_i} \, dx = - \int_{\Omega} v_h \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

esto es, p_i es la derivada parcial con respecto a x_i en el sentido de las distribuciones de la función v_h . \square

Observación 4.20. El carácter finito de la dimensión del espacio V_h es consecuencia del hecho de que si denotamos por $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^N$ el número de vértices asociados al mallado τ_h , se tiene que el conjunto $\{q_i\}_{i=1}^N \subset V_h$ tal que $q_i(\mathbf{v}_j) = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, N$, es una base de V_h .

En el caso de considerar condiciones Dirichlet homogéneas,

$$V_{h,0} = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_T \in \mathbb{P}^1(T), \forall T \in \tau_h, v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

es un subespacio vectorial de $H_0^1(\Omega)$ de dimensión igual al número de vértices interiores del mallado. Denotemos por I_h al número de vértices del mallado τ_h y por $I_{h,0}$ al número de vértices interiores del mallado τ_h . Se tiene que por [Raviart and Thomas, 1983, Corollaire 7.4-1., pág 168], dado un elemento $v \in H^1(\Omega)$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

y, dado un elemento $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_{h,0}} \|v - v_h\|_{H_0^1(\Omega)} = 0.$$

Una vez definidos los subespacios vectoriales de dimensión finita de, respectivamente $H^1(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$, ya estamos en condiciones de obtener una aproximación numérica de la solución (4.54). En efecto, para cada uno de los mallados $\tau_h \in \{\tau_h\}_{h>0}$:

- Obtenemos una base espectral $\{w_{\alpha,h}\}_{\alpha=1}^{I_h}$ de V_h y la sucesión de autovalores $\{\lambda_{\alpha,h}\}_{\alpha=1}^{I_h}$ tales que:

$$\nu \int_{\Omega} \nabla w_{\alpha,h} \cdot \nabla v_h \, dx + \sigma \int_{\Omega} w_{\alpha,h} v_h \, dx = \lambda_{\alpha,h} \int_{\Omega} w_{\alpha,h} v_h \, dx, \quad \forall v_h \in V_h.$$

- Aproximamos u mediante u_h , donde:

$$u_h(t) = \sum_{\alpha=1}^{I_h} u_{\alpha,h}(t) w_{\alpha,h}, \quad \text{donde}$$

$$u_{\alpha,h}(t) = (u_0, w_{\alpha,h})_{L^2(\Omega)} e^{-\lambda_{\alpha,h} t} + \int_0^t (f(s), w_{\alpha,h})_{L^2(\Omega)} e^{-\lambda_{\alpha,h}(t-s)} \, ds.$$

Debemos observar que la aproximación obtenida converge a la solución (4.54) ya que, gracias al corolario [Raviart and Thomas, 1983, Corolario 7.4.1], obtenemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

4.4.2. Test del error

Aunque los cálculos se harán usando el programa FreeFem++ en esta parte se comentará cómo trabajamos con él y qué resultados nos devuelve.

Como ya se expuso anteriormente,

$$u(t) = \sum_{\alpha \geq 1} \left\{ (u_0, w_\alpha) e^{-\lambda_\alpha t} + \int_0^t (f(s), w_\alpha) e^{-\lambda_\alpha(t-s)} ds \right\} w_\alpha,$$

y

$$u_h(t) = \sum_{\alpha=1}^n \left\{ (u_0, w_\alpha) e^{-\lambda_\alpha t} + \int_0^t (f(s), w_\alpha) e^{-\lambda_\alpha(t-s)} ds \right\} w_\alpha \longrightarrow u(t).$$

Para realizar la comprobación numéricamente deberemos considerar una función \tilde{u} conocida y calcular:

$$\begin{cases} u_0 = \tilde{u}(0), \\ f = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \nu \Delta \tilde{u} + \sigma \tilde{u}, \\ g = \nu \nabla \tilde{u} \cdot \vec{n} \end{cases}$$

Observemos que el vector normal exterior \vec{n} depende de la geometría del dominio.

En el ejemplo que hemos resuelto, hemos tomado $\tilde{u} = t^2 + 2 \cos(xy^2)$. Por lo tanto:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \cos(xy^2), \\ f = 2t - \nu(-2 \cos(xy^2)y^4 - 8 \cos(xy^2)x^2y^2 - 4 \sin(xy^2)x) + \sigma(t^2 + 2 \cos(xy^2)), \\ g = \nu(-2 \sin(xy^2)y^2, -4 \sin(xy^2)xy) \cdot \vec{n}. \end{cases}$$

Suponiendo que estamos sobre el cuadrado unidad $\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$, se tendrá que:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y = 0\}, & \vec{n}_{|\Gamma_1} &= (0, -1), & g_{|\Gamma_1} &= 4 \sin(xy^2)xy \\ \Gamma_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y = 1\}, & \vec{n}_{|\Gamma_2} &= (0, 1), & g_{|\Gamma_2} &= -4 \sin(xy^2)xy \\ \Gamma_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], x = 0\}, & \vec{n}_{|\Gamma_3} &= (-1, 0), & g_{|\Gamma_3} &= 2 \sin(xy^2)y^2 \\ \Gamma_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], x = 1\}, & \vec{n}_{|\Gamma_4} &= (1, 0), & g_{|\Gamma_4} &= -2 \sin(xy^2)y^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución aproximada tendrá la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} u_h(t) &= \sum_{\alpha=1}^n \left\{ \int_{\Omega} u_0 w_\alpha dx e^{-\lambda_\alpha t} + \int_0^t \left(\int_{\Omega} f(s) w_\alpha dx \right) e^{-\lambda_\alpha(t-s)} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \left(\int_{\partial\Omega} g(s) w_\alpha d\gamma \right) e^{-\lambda_\alpha(t-s)} ds \right\} w_\alpha \end{aligned} \quad (4.55)$$

Para hacer dicha sustitución observamos que podemos escribir $f(t, x, y) = \hat{f}_1(t) + \hat{f}_2(x, y)$, lo cual simplificará los cálculos siguientes:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t e^{-\lambda_\alpha(t-s)} \left[\int_\Omega f(s) w_\alpha dx + \int_{\partial\Omega} g(s) w_\alpha d\gamma \right] ds \\
&= \int_0^t e^{-\lambda_\alpha(t-s)} \left[\hat{f}_1(s) \int_\Omega w_\alpha dx + \int_\Omega \hat{f}_2 w_\alpha dx + \int_{\partial\Omega} g(s) w_\alpha d\gamma \right] ds \\
&= \left[\int_\Omega \hat{f}_2 w_\alpha dx + \int_{\partial\Omega} g w_\alpha d\gamma \right] \int_0^t e^{-\lambda_\alpha(t-s)} ds + \int_\Omega w_\alpha dx \cdot \int_0^t \hat{f}_1(s) e^{-\lambda_\alpha(t-s)} ds \\
&= e^{-\lambda_\alpha t} \left\{ \left[\int_\Omega \hat{f}_2 w_\alpha dx + \int_{\partial\Omega} g w_\alpha d\gamma \right] \frac{(e^{\lambda_\alpha t} - 1)}{\lambda_\alpha} + \int_0^t (2s + \sigma s^2) e^{\lambda_\alpha s} ds \cdot \int_\Omega w_\alpha dx \right\}.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Llegados a este punto, como no conocemos explícitamente los w_α , el resto de la simulación la lleva a cabo el programa FreeFem++. Para simplificar la exposición de los máximos errores cometidos podemos exponer en forma de tabla algunos de ellos y después representar gráficamente todos ellos. Claro está, que depende de los parámetros que hayamos introducido previamente, los cuales son los siguientes:

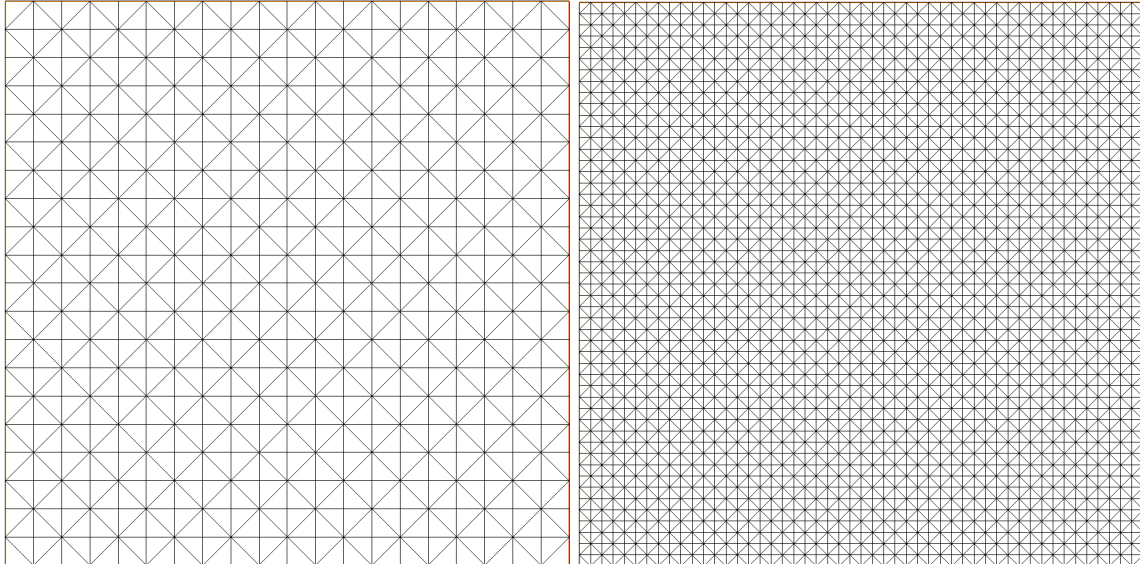
- Coeficiente de difusión: $\nu=1$,
- Coeficiente de reacción: $\sigma = 10^{-6}$,
- Tiempo final de la simulación: $T=1$,
- Pasos de tiempo que emplearemos para evaluar la solución: $\text{npasdt}=100$,
- Incremento temporal: $\text{deltat}=T/\text{npasdt}$,
- Mínimo de divisiones asociado al tamaño del triángulo ($h=1/\text{ndiv}$): $\text{ndivmin}=2$,
- Máximo de divisiones asociado al tamaño del triángulo ($h=1/\text{ndiv}$): $\text{ndivmax}=50$,
- Dimensión horizontal del rectángulo en donde resolveremos el problema: $l1=1$,
- Dimensión vertical del rectángulo en donde resolveremos el problema: $l2=1$,

De esta forma, esta tabla recoge los errores máximos cometidos para divisiones en 10, 20, 30, 40 y 50 triángulos:

ndiv	10	20	30	40	50
error	0,0023645	0,0007078	0,0003993	0,0003136	0,0003127

Es evidente que al hablar del número de triángulos nos estamos refiriendo a que, al contar los triángulos que se forman en cada arista, suman tal cifra.

A continuación mostramos los mallados triangulares utilizados, en este ejemplo, que estarían compuestos por 20 y 50 triángulos, respectivamente.



a Mallado para $ndiv = 20$ ($h = 0,05$).

b Mallado para $ndiv = 50$ ($h = 0,02$).

Fig. 4.1. Dos de los mallados empleados en el cálculo de error.

A continuación mostramos la gráfica de evolución de errores para todos los mallados considerados:

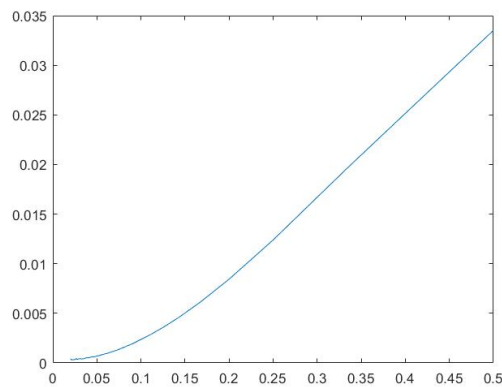


Fig. 4.2. Gráfica con la evolución de los errores para los mallados considerados.

Podemos observar también cómo, a medida que vamos disminuyendo el número máximo

de divisiones asociado al tamaño del triángulo, el error va aumentando, o, lo que es lo mismo, que al aumentar la cantidad de divisiones por triángulos del mallado, los errores se van haciendo cada vez más pequeños.

Por último, podemos representar gráficamente la solución obtenida a través del programa para un mallado de 50 triángulos:

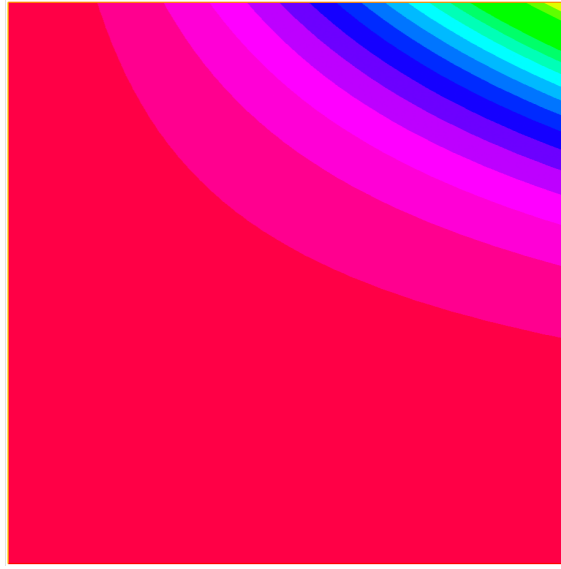


Fig. 4.3. Gráfica con la solución del problema considerado.

Apéndice A

Conceptos previos

A.1. Integración de Lebesgue

A.1.1. Espacios de medida

Definición A.1. Una familia \mathcal{X} de subconjuntos de un conjunto X se dice una σ -álgebra si es tal que:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{X}$
- (ii) Si $A \in \mathcal{X}$, entonces su complementario $X \setminus A \in \mathcal{X}$
- (iii) Si A_n es una sucesión de conjuntos de \mathcal{X} , entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$

Un par ordenado (X, \mathcal{X}) en el que X es un conjunto y \mathcal{X} es una σ -álgebra se dice un espacio medible. Cualquier conjunto en \mathcal{X} se dice un \mathcal{X} -conjunto medible, pero cuando fijamos la σ -álgebra \mathcal{X} diremos simplemente que es un conjunto medible.

Podemos observar que se cumplen las leyes de Morgan:

$$X \setminus \left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \right) = \bigcap_{\alpha} (X \setminus A_{\alpha}), \quad X \setminus \left(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha} (X \setminus A_{\alpha}),$$

de donde se sigue que la intersección de una colección de conjuntos de \mathcal{X} también pertenece a \mathcal{X} .

A.1.2. Concepto de medida

Definición A.2. Una **medida** es una función con valores reales μ definida en una σ -álgebra \mathcal{X} de subconjuntos de X tales que:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu(E) \geq 0, \forall E \in \mathcal{X}$

(iii) Si E_n es una colección de conjuntos disjuntos ($E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i \neq j$) de \mathcal{X} , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Como permitimos que μ tome cualquier valor en $[0, +\infty]$, en caso de ser $+\infty$ nos referimos a que, en el lado derecho de la ecuación de la condición (iii), o bien $\mu(E_n) = +\infty$ para algún $n \in \mathbb{N}$, ó que la serie de términos no negativos es divergente. Diremos que una medida es finita si no toma el valor $+\infty$. Diremos también que una medida μ es σ -finita si existe una colección (E_n) de conjuntos en \mathcal{X} con $X = \cup E_n$ y tales que $\mu(E_n) < +\infty$ para todo n . A continuación enunciaremos sin demostración dos lemas básicos en teoría de la medida. Las demostraciones se pueden encontrar en [Bartle, 1995, Lemma 3.3, Lemma 3.4, págs 21-22].

Lema A.3. *Sea μ una medida definida en una σ -álgebra \mathcal{X} . Si $E, F \in \mathcal{X}$ y $E \subseteq F$, entonces $\mu(E) \leq \mu(F)$. Si $\mu(E) < +\infty$, entonces $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.*

Lema A.4. *Sea μ una medida definida en una σ -álgebra \mathcal{X} .*

(a) *Si (E_n) es una sucesión creciente en \mathcal{X} , entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

(b) *Si (F_n) es una sucesión decreciente en \mathcal{X} y $\mu(F_1) < +\infty$, entonces*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n).$$

Definición A.5. Un **espacio de medida** es un tríada (X, \mathcal{X}, μ) formada por un conjunto X , una σ -álgebra \mathcal{X} y una medida μ definida sobre \mathcal{X} .

De aquí en adelante diremos que una condición P se cumple en **casi todo punto** de X (o μ -casi todo punto de X) si dicha condición P se cumple en $X \setminus E$, con $E \subset X$ y $\mu(E) = 0$. También se dirá que dos funciones f y g son iguales para casi todo punto de X (o μ -casi todo punto de X) si $f(x) = g(x)$ si $x \in X \setminus E$, con $E \subset X$ y $\mu(E) = 0$. En este caso podremos escribir $f = g$ c.p.t. $x \in X$.

A.1.3. Funciones medibles

Para el desarrollo de la teoría de la medida consideraremos un conjunto X sobre el cual se definirán funciones, en principio, de una variable real. Veremos que conforme vayamos avanzando estas funciones dejarán de considerarse reales para concentrarnos en un estudio más genérico de ellas sobre espacios de Banach.

De aquí en adelante vamos a considerar un espacio medible fijado (X, \mathcal{X}) .

Definición A.6. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **medible** si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a \mathcal{X} (es decir, que este último conjunto es medible).

En la práctica, a pesar de la dificultad de visualizar conjuntos no medibles, las funciones no medibles no tienen por qué suponer un mayor obstáculo para su representación. Recordamos que un ejemplo muy conocido de conjunto no medible es el conjunto de Vitali $\mathcal{V} \subset [0, 1]$, cuyos elementos son $[x]$, con $x \in X$, donde la relación de equivalencia considerada es: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$, es decir, las clases de los números reales con diferencia racional al representante de cada clase. La prueba de que efectivamente es no medible no es de interés en este trabajo (aunque se puede encontrar a continuación del Teorema 17.6, en [Bartle, 1995]), pero sí tiene relevancia pensar que partiendo del conjunto de Vitali se pueden construir una infinidad de funciones no medibles tales como

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{V}, \\ -1 & \text{si } x \in [0, 1] \setminus \mathcal{V}. \end{cases}$$

En efecto, el conjunto $\{x \in [0, 1] : f(x) > 0\}$ es exactamente \mathcal{V} , que habíamos supuesto demostrado que era un conjunto no medible.

A.1.4. La integral de Lebesgue

En esta sección introduciremos la integral en el sentido de Lebesgue para funciones simples medibles no negativas, y luego se extenderá a funciones medibles de variable real no negativas arbitrarias. El principal resultado de este capítulo es el Teorema de Convergencia Monótona.

A través de este epígrafe consideraremos un espacio de medida fijado (X, \mathcal{X}, μ) . Denotaremos la colección de todas las funciones \mathcal{X} -medibles de X a $[-\infty, +\infty]$ por $M = M(X, \mathcal{X})$, y la colección de todas las funciones \mathcal{X} -medibles no negativas de X a $[-\infty, +\infty]$ por $M^+ = M^+(X, \mathcal{X})$. A continuación definiremos la integral de cualquier función en M^+ con respecto a la medida μ , y para lograrlo es conveniente definir las funciones simples. Será también importante imponerles que tomen valores en $(-\infty, +\infty)$ en lugar de $[-\infty, +\infty]$.

Definición A.7. Una función de variable real es **simple** si toma solamente una cantidad finita de valores. Una función simple medible φ se puede representar de la forma

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i},$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ y χ_{E_i} es la función característica de un conjunto $E_i \in \mathcal{X}$, que se define como

$$\chi_{E_i}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E_i, \\ 0 & \text{si } x \notin E_i. \end{cases}$$

Además, la representación de cada función simple es única de suponer que los a_i son distintos y los χ_{E_i} son subconjuntos disjuntos no vacíos de X tales que $X = \bigcup_{i=1}^n E_i$. Obviamente, de no realizar estas suposiciones cada función puede admitir más representaciones.

Como forma de imaginarnos cómo es una función simple podemos pensar, por ejemplo, en una función escalonada.

Definición A.8. Si φ es una función simple en $M^+(X, \mathcal{X})$ con la representación de la definición anterior, definimos la integral de φ con respecto de μ como el número real extendido

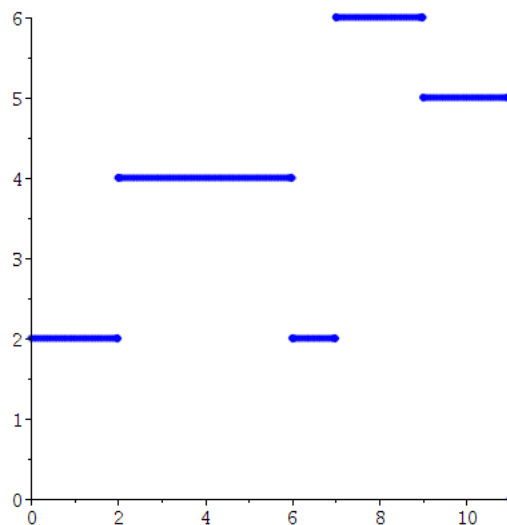
$$\int \varphi d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i).$$

En la anterior expresión empleamos el convenio de que $0 \times (+\infty) = 0$, de esta forma la integral de la función idénticamente nula es igual a 0 sin depender de si el espacio es de medida finita o infinita. Nótese que el valor de la integral de una función simple en M^+ está bien definido (incluyendo el caso en que sea $+\infty$), pues los a_i son no negativos, luego no podremos encontrarnos en ningún caso la situación $(+\infty) - (+\infty)$. Además, al decir número real extendido lo entenderemos como un elemento de $\mathbb{R}^* := [-\infty, +\infty]$, la recta real ampliada.

Ejemplo A.9. Consideremos la función a trozos siguiente:

$$f(x) := \begin{cases} 2 & \text{si } x \in [0, 2) \cup [6, 7), \\ 4 & \text{si } x \in [2, 6), \\ 6 & \text{si } x \in [7, 9), \\ 5 & \text{si } x \in [9, 11). \end{cases}$$

No es difícil ver que su gráfica es:



Es evidente que, al ser una función escalonada acotada en un intervalo acotado cumple los requisitos de ser función simple, y por lo tanto, su integral de Lebesgue será simplemente sumar cada producto de altura de cada “escalón” por la longitud del intervalo donde está definido, es decir,

$$\begin{aligned} \int f \, d\mu &= 2 \times [(2 - 0) + (7 - 6)] + 4 \times (6 - 2) + 6 \times (9 - 7) + 5 \times (11 - 9) = \\ &= 2 \times 3 + 4 \times 4 + 6 \times 2 + 5 \times 2 = 6 + 16 + 12 + 10 = 44. \end{aligned}$$

Pasemos a estudiar dos propiedades elementales de esta integral, cuyas demostraciones pueden ser encontradas en [Bartle, 1995, Lemma 4.3, pág 28].

Lema A.10. *Se tienen las siguientes propiedades:*

(a) *Si φ y ψ son funciones simples en $M^+(X, \mathcal{X})$ y $c \geq 0$, entonces*

$$\begin{aligned} \int c\varphi \, d\mu &= c \int \varphi \, d\mu, \\ \int \varphi + \psi \, d\mu &= \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu. \end{aligned}$$

(b) *Si λ se define para $E \in \mathcal{X}$ por*

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E \, d\mu,$$

entonces λ es una medida en \mathcal{X} .

Supuesto demostrado este lema, el cual deja claro el carácter lineal de esta integral (aunque de momento sólo para funciones simples), ya estaríamos en condiciones de definir el concepto de integral de una función arbitraria en M^+ . Observemos que no pedimos que el valor de la integral sea finito.

Definición A.11. Si $f \in M^+(X, \mathcal{X})$, definimos la integral de f con respecto a μ como el número real

$$\int f \, d\mu = \sup \int \varphi \, d\mu,$$

donde el supremo se extiende a través de todas las funciones simples $\varphi \in M^+(X, \mathcal{X})$ tales que $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$. Si $f \in M^+(X, \mathcal{X})$ y $E \in \mathcal{X}$, entonces $f_{\chi_E} \in M^+(X, \mathcal{X})$ y definimos la integral de f sobre E con respecto a μ como el número real extendido

$$\int_E f \, d\mu = \int f_{\chi_E} \, d\mu.$$

Otra propiedad interesante de esta integral es su carácter monótono con respecto tanto al integrando como al conjunto sobre el cual se define la integral.

Lema A.12. *Se tendrá que:*

(a) Si $f, g \in M^+(X, \mathcal{X})$ y $f \leq g$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

(b) Si $f \in M^+(X, \mathcal{X})$, y $E, F \in \mathcal{X}$ son tales que $E \subseteq F$, entonces

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_F f \, d\mu.$$

De nuevo, podemos encontrar su demostración en [Bartle, 1995, Lemma 4.5, pág 31].

Ahora ya estaríamos en condiciones de enunciar el teorema de convergencia monótona, que es clave para las propiedades fundamentales de la convergencia de la integral de Lebesgue.

Teorema A.13 (Teorema de convergencia monótona). *Si (f_n) es una sucesión monótona creciente de funciones de $M^+(X, \mathcal{X})$ que converge a f , entonces*

$$\int f \, d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Nótese que, bajo dichas hipótesis, se pueden intercambiar el límite y la integral, incluso sin importar que alguno de los dos sea infinito, por lo que es un resultado de suma importancia y utilidad en la teoría de integración de Lebesgue.

Como consecuencia de este teorema podemos extraer como corolario dos propiedades.

Corolario A.14. *Se tendrá que:*

(a) *Si f pertenece a M^+ y $c \geq 0$, entonces cf pertenece a M^+ y*

$$\int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu.$$

(b) *Si f y g pertenecen a M^+ , entonces $f + g$ pertenece a M^+ y*

$$\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Podemos referirnos a la misma fuente bibliográfica que en los resultados anteriores para encontrar la demostración de este teorema (Monotone Convergence Theorem 4.6, pág 31) y corolario (Corollary 4.7, pág 32). Estas dos propiedades ya las teníamos cuando las funciones consideradas eran simples, y ahora las hemos podido considerar medibles no negativas, es decir, más genéricas que las anteriores.

Continuando con el desarrollo de la integral de Lebesgue podemos enunciar el lema de Fatou:

Teorema A.15 (Lema de Fatou). [*Bartle, 1995, 4.8, pág 33*]

Si (f_n) pertenece a $M^+(X, \mathcal{X})$, entonces

$$\int \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

A pesar de lo intrascendente que parece este Lema, se pueden extraer multitud de corolarios que caracterizarán de una forma más intuitiva la integral que acabamos de definir. El primero de ellos es el siguiente, que da pie a definir un nuevo tipo de medida.

Corolario A.16. [*Bartle, 1995, Corollary 4.9, pág 34*] *Si f pertenece a M^+ y λ se define en \mathcal{X} por*

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu,$$

entonces λ es una medida.

Como consecuencia de este corolario, si consideramos $f \in M$ y λ en \mathcal{X} dada por

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu,$$

entonces λ es una medida con signo.

No cuesta darse cuenta de la diferencia que presentan las funciones consideradas ahora, es decir, ya no tienen por qué ser no negativas, por lo que se incumple, en este caso, una de las condiciones de ser medida, la de que siempre sea no negativa (la integral de una función no negativa es no negativa).

Un resultado interesante en cuanto a la relación entre la medida y la medida con signo es el siguiente:

Proposición A.17. Sean μ es una medida y λ es una medida con signo. Si existe una función medible $f \in M$ tal que

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu,$$

para todo $E \in \mathcal{X}$, entonces se dirá la derivada de Radon-Nykodym de λ con respecto a μ y suele representarse mediante $f = \frac{d\lambda}{d\mu}$.

Después de enunciar los siguientes corolarios del Lema de Fatou podríamos pasar a ver qué se entiende por función integrable.

Corolario A.18. [Bartle, 1995, Corollary 4.10, pág 34] Supongamos que f pertenece a M^+ . Entonces $f(x) = 0$ para casi todo $x \in X$ si y sólo si

$$\int f \, d\mu = 0.$$

Corolario A.19. [Bartle, 1995, Corollary 4.12, pág 35] Si (f_n) es una sucesión monótona creciente de funciones de $M^+(X, \mathcal{X})$ que converge a una función f en M^+ para casi todo $x \in X$, entonces

$$\int f \, d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Corolario A.20. [Bartle, 1995, Corollary 4.13, pág 36] Si (g_n) es una sucesión en M^+ , entonces

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int g_n \, d\mu \right).$$

En este momento estamos en condiciones de introducir el concepto de función integrable.

En las anteriores propiedades trabajábamos sobre el concepto de integrabilidad de una función en $M^+ = M^+(X, \mathcal{X})$ con respecto de una medida μ y permitíamos que pudiese ser no finita. A partir de ahora estudiaremos qué ocurre con la integración de funciones medibles que toman valores reales tanto positivos como negativos. Aquí será más conveniente imponer que los valores de las funciones y de la integral sean números reales finitos.

Definición A.21. Dada una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definimos la parte positiva de f como

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\},$$

para todo $x \in X$.

Análogamente, definimos la parte negativa de f como

$$f^-(x) := \max\{-f(x), 0\},$$

para todo $x \in X$.

Observación A.22. Con esta notación podemos descomponer toda función f como

$$f = f^+ - f^-.$$

Definición A.23. La colección $L = \mathcal{L}(X, \mathcal{X}, \mu)$ de funciones integrables (en el sentido de Lebesgue) está formada por todas las funciones medibles de variable real f definidas en X , tales que tanto las partes positiva y negativa f^+ y f^- de f tienen integrales finitas con respecto de μ . En tal caso definimos la integral de f con respecto de μ como

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Definimos también la integral de f con respecto de μ sobre un conjunto $E \in \mathcal{X}$ como

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu.$$

Observemos que, aunque la integral de f se define como la diferencia de las integrales de f^+ y f^- , es sencillo ver que si $f = f_1 - f_2$, donde f_1 y f_2 son dos funciones medibles no negativas con integrales finitas, entonces

$$\int f \, d\mu = \int f_1 \, d\mu - \int f_2 \, d\mu.$$

A estas alturas ya tenemos definida la integral de Lebesgue de funciones simples, de funciones no negativas, y de funciones que pueden tomar cualquier valor real.

A continuación se enuncia un resultado conocido como la propiedad de la integrabilidad absoluta de la integral de Lebesgue.

Teorema A.24. [Bartle, 1995, Theorem 5.3, pág 43] Una función medible f pertenece a L si y sólo si $|f|$ pertenece a L . En ese caso,

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$$

Corolario A.25. [Bartle, 1995, Corollary 5.4, pág 43] Si f es medible, g integrable y $|f| \leq |g|$, entonces f es integrable y, además,

$$\int |f| \, d\mu \leq \int |g| \, d\mu$$

Teorema A.26. [Bartle, 1995, Theorem 5.5, pág 43] Si $f, g \in L$ y α es una constante, entonces:

(a) $\alpha f \in L$ y

$$\int (\alpha f) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu.$$

(b) $(f + g) \in L$ y

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Finalizaremos con esta extensa sección con uno de los teoremas más importantes de convergencia de funciones integrables.

Teorema A.27 (Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue). [*Bartle, 1995, Theorem 5.6, pág 44*]

Sea (f_n) una sucesión de funciones integrables convergentes casi para todo X a una función medible de variable real f . Si existe una función integrable g tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es integrable y

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Apéndice B

Código programa principal

```
1 // *****
2 // Programa principal para la resolución de la ecuacion del calor en un
3 // rectangulo empleando una aproximación en serie.
4 // *****
5
6 verbosity=0;
7
8 // Parametros asociados a la discretizacion espacio temporal
9 real xnu=1.0; // Coeficiente de difusion
10 real sigma=1.e-6; // Coeficiente de reaccion
11 real Tfinal=1; // Tiempo final de la simulacion
12 int npasdt=100; // Pasos de tiempo que emplearemos para evaluar la
13 //solucion
14 real deltat=Tfinal/npasdt; // Incremento temporal
15 int ndivmin=2; // Mínimo de divisiones asociado al tamaño del
16 //triangulo (h=1/ndiv)
17 int ndivmax=50; // Máximo de divisiones asociado al tamaño del
18 //triangulo (h=1/ndiv)
19 real l1=1.0; // Dimension horizontal del rectangulo en donde
20 //resolveremos el problema
21 real l2=1.0; // Dimension vertical del rectangulo en donde
22 //resolveremos el problema
23 int nev; // Numero de autovalores que queremos calcular
24 int nevC; // Numero de autovalores finalmente calculados
25 int icreaeigenvf=1; // 0.- Se leen de un fichero, 1.- Se generan
```

```

26 int ipintaeigenvf=0; //1.- Se pintan por pantalla, 0.- no
27
28 // Abrimos un fichero para almacenar los errores
29 ofstream fichSalidaErrores="Errores.sal";
30 fichSalidaErrores.precision(16);
31
32 // Realizamos un bucle en las divisiones de la unidad
33 for (int ndiv=ndivmin;ndiv<=ndivmax;ndiv++)
34 {
35     // -----
36     // Generamos el mallado y el espacio de elementos finitos
37     // -----
38
39     // Construccion del mallado rectangular
40     mesh Th=square(ndiv,ndiv,[l1*x,l2*y],flags=1);
41     plot(Th,wait=0);
42
43     // Generamos el espacio de elementos finitos
44     fespace Vh(Th,P1); // Espacio de elementos finitos
45     int ndofVh=Vh.ndof; // Numero de grados de libertad
46     int ndovTh=Th.nv; // Numero de vertices del mallado
47     int ndoeVh=Th.nt; // Numero de elementos del mallado
48     cout<<"Numero de grados de libertad   "<<ndofVh<<endl;
49     cout<<"Numero de vertices del mallado   "<<ndovTh<<endl;
50     cout<<"Numero de triangulos del mallado "<<ndoeVh<<endl;
51
52     // Dimensionamos una serie de tableros que emplearemos
53     nev=Vh.ndof;
54     Vh[int] solEC(npasdt+1); // Variable en la que almacenaremos
55     //la solucion
56     Vh[int] eF(nev); // Vector de elementos finitos con las
57     //autofunciones
58     real[int] eV(nev); // Vector en el que almacenaremos los
59     //autovalores (eigen value)
60     real[int] eFvector(ndofVh*nev); // Vector en el que
61     //almacenaremos las autofunciones (eigen function)

```

```

62
63 // -----
64 // Funciones asociadas al test de error
65 // -----
66
67 // Funcion asociada a las condiciones iniciales
68 func real u0func(real & xc, real & yc)
69 {
70     return 2*cos(xc*yc^2);
71 }
72
73 // Declaramos las funciones asociads a la parte constante
74 //del segundo miembro
75 func f = sigma*2*cos(x*y^2)
76     + xnu*(2*y^4*cos(x*y^2)
77     + 4*x*sin(x*y^2)
78     + 8*x^2*y^2*cos(x*y^2));
79
80 // Declaramos las funciones asociadas a la parte constante
81 //de las condiciones de contorno
82 func g1=xnu*(4*x*y*sin(x*y^2));
83 func g2=xnu*(-2*y^2*sin(x*y^2));
84 func g3=xnu*(-4*x*y*sin(x*y^2));
85 func g4=xnu*(2*y^2*sin(x*y^2));
86
87 // -----
88 // Construccion de la condicion inicial
89 // -----
90
91 // Definimos la condicion inicial
92 Vh u0=u0func(x,y);
93 //plot(u0,wait=1,fill=1,value=true,cmm="u_{0,h}");
94
95 // -----
96 // Obtenemos los autovectores y autovalores asociados
97 // al pb espectral

```

```

98      // -----
99
100     // Declaramos las variables necesarias
101     Vh u,v;
102
103     // Definimos las formas bilineales asociadas al problema
104     //espectral (B) u=w_{k,h}, v=v_h
105     varf vP(u,v) = int2d(Th)(xnu*(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v))+
106     int2d(Th)(sigma*u*v);
107     varf vM(u,v) = int2d(Th)(u*v);
108
109     // Generamos las matrices asociadas a las formas bilineales
110     // anteriores
111     matrix A=vP(Vh,Vh,solver=UMFPACK);
112     matrix B=vM(Vh,Vh);
113
114     // Generamos las autofunciones
115     include "AUTOFUNCIONES.edp"; // Fichero en donde se generan las
116     //autofunciones
117     int isalautofunciones=AUTOFUNCIONES(nev,nevC,eV,eFvector);
118
119
120     // -----
121     // Resolvemos el problema aproximado
122     // -----
123
124     // Recuperamos el vector de elementos finitos con las autofunciones
125     for (int k=0; k<nevC; k++)
126         for (int i=0;i<ndofVh;i++)
127             eF[k] [] [i]=eFvector[k*ndofVh+i];
128
129     // Inicializamos a cero el vector de soluciones
130     for (int ndt=0; ndt<=npasdt; ndt++)
131         solec[ndt]=0.0;
132
133     // Realizamos un bucle en los autovalores

```

```

134     for (int k=0; k<nevC; k++)
135     {
136         // Extraemos el autovalor y la autofuncion
137         Vh wk=eF[k];
138         real lambdak=eV[k];
139
140         // Imprimimos la evolucion del problema
141         cout<<"Autovalor "<<k<<" lambdak "<<lambdak<<endl;
142
143         // Calculamos el producto escalar de la condicion inicial
144         // por la autofuncion
145         real u0wk=int2d(Th)(u0*wk);
146         //cout<<"u0wk "<<u0wk<<endl;
147
148         // Calculamos el producto escalar de la autofuncion con la
149         // parte constante
150         real smcte1 = int2d(Th)(f(x,y)*wk)
151                     + int1d(Th,1)(g1(x,y)*wk)
152                     + int1d(Th,2)(g2(x,y)*wk)
153                     + int1d(Th,3)(g3(x,y)*wk)
154                     + int1d(Th,4)(g4(x,y)*wk);
155
156         // Calculamos el producto escalar del autovalor con la
157         // funcion 1
158         real smcte2 = int2d(Th)(wk);
159
160         // Inicializamos el tiempo
161         real tiempo=0.0;
162
163         // Realizamos un bucle en pasos de tiempo
164         for (int ndt=0; ndt<=npasdt; ndt++)
165         {
166
167             // Calculamos la integral de la parte variable
168             // en el tiempo actual
169

```

```

170         real smcte3 = exp(-lambdak*tiempo)*2/lambdak^2
171         - sigma*(exp(-lambdak*tiempo)*2/lambdak^3
172         - ((lambdak^2*tiempo^2 -
173         2*lambdak*tiempo + 2))/lambdak^3)
174         + (2*(lambdak*tiempo - 1))/lambdak^2;
175
176         // Calculamos la integral de la funcion exponencial
177         // en el tiempo actual
178
179         real smcte4 = (1-exp(-lambdak*tiempo))/lambdak;
180
181         // Calculamos la solucion de la EDO en el
182         // tiempo actual
183
184         real uktemp=exp(-lambdak*tiempo)*u0wk+
185         smcte1*smcte4+smcte2*smcte3;
186
187
188         // Realizamos la agregacion en el vector solucion
189         solEC[ndt]=solEC[ndt]+uktemp*wk;
190
191         // Realizamos la representacion grafica
192         plot(solEC[ndt],wait=0,fill=1,value=1,
193         cmm="Tiempo "+tiempo);
194
195
196         // Actualizamos la variable temporal
197         tiempo=tiempo+deltat;
198
199     }
200 }
201
202 // -----
203 // Calculamos el error cometido en cada paso de tiempo
204 // -----
205

```

```

206 // Dimensionamos la variable en donde almacenaremos el error
207 real[int] error(npasdt+1);
208
209 // Calculamos el error en cada paso de tiempo
210 real tiempo=0;
211 for (int ndt=0; ndt<=npasdt; ndt++)
212 {
213     // Calculamos la solucion exacta
214     Vh uk = 2*cos(x*y^2)+tiempo*tiempo;
215
216     // Calculamos el error en el paso de tiempo actual
217     // Norma en L^2 de la diferencia
218     error[ndt]=int2d(Th)((solEC[ndt]-uk)*(solEC[ndt]-uk));
219     error[ndt]=sqrt(error[ndt]);
220
221     // Imprimimos el error en el paso de tiempo
222     //cout<<" "<<endl;
223     //cout<<error[ndt]<<endl;
224     //cout<<solEC[ndt][].max<<endl;
225     //cout<<uk[].max<<endl;
226
227     // Actualizamos la variable temporal
228     tiempo=tiempo+deltat;
229
230
231 }
232
233 // Mostramos informacion por pantalla
234 cout<<"Error maximo cometido para
235 (h="<<1.0/ndiv<<") "<<error.max<<endl;
236
237 // Almacenamos en el fichero el error
238 fichSalidaErrores<<1.0/ndiv<<" "<<error.max<<endl;
239 }

```


Apéndice C

Código programa autofunciones

```
1
2 // *****
3 // Fichero en donde se generan las autofunciones asociadas al problema
4 // *****
5
6 func int AUTOFUNCIONES(int & nev, int & nevC, real[int] & eV,
7   real[int] & eFvector)
8 {
9     // Declaramos la variable de salida
10    int IVALUE=1;
11    // Declaramos un vector de elementos finitos para hacer los calculos
12    Vh[int] eF(nev);
13    // Comprobamos si es necesario calcular las autofunciones
14    if(icreaeigenvf==1)
15    {
16        // Calculamos los autovectores y autofunciones (almacenaremos
17        // en nevC el numero de autovectores calculados finalmente)
18        nevC=EigenValue(A,B,sym=true,sigma=0,value=eV,vector=eF,
19        tol=1e-14,maxit=0,ncv=0);
20        cout<<nev<<" "<<nevC<<endl;
21        // Creamos un fichero con los autovalores
22        ofstream fichSalidaEigenValue="./1_DATOS/EigenValue.dat";
23        fichSalidaEigenValue.precision(16);
24        fichSalidaEigenValue.scientific<<nev<<endl;
25        // Realizamos un bucle en los elementos calculados
```

```

26     for (int i=0;i<nev;i++)
27     {
28         // Almacenamos el autovalor correspondiente en el fichero
29         fichSalidaEigenValue.scientific<<eV[i]<<endl;
30         // Creamos un fichero para cada uno de los autovectores
31         ofstream fichSalidaEigenVector=
32         "./1_DATOS/EigenVector_"+i+".dat";
33         fichSalidaEigenVector.precision(16);
34         fichSalidaEigenVector.scientific<<eF[i] []<<endl;
35         // Graficamos por pantalla las autofunciones
36         if(ipintaeigenvf==1)
37             plot(eF[i],dim=3,fill=1,wait=0,value=1,
38                 cmm="Auto Funcion "+i+",
39                 Valor del autovalor asociado = " + eV[i]);
40     }
41     // Comprobacion arbitraria de la ortonormalidad en L2
42     // y en H1(Th)
43     //cout<<"*****"<<endl;
44     //cout<<"Comprobaciones arbitrarias del
45     calculo de los autovalores"<<endl;
46     //cout<<" "<<endl;
47     //cout<<"Producto escalar en L2 de dos distintos "<<
48     int2d(Th)(eF[1]*eF[2])<<endl; // Ortonormalidad en L2
49     //cout<<"Producto escalar en L2 de dos iguales  "<<
50     int2d(Th)(eF[2]*eF[2])<<endl; // Modulo 1 con la norma de L2
51     //cout<<"Producto escalar en H1 de dos distintos "<<
52     int2d(Th)(xnu*(dx(eF[2])*dx(eF[3])
53     //+dy(eF[4])*dy(eF[6])))<<endl;
54     // Ortonormalidad en H1
55     //cout<<"Producto escalar en H1 de dos iguales  "<<
56     int2d(Th)(xnu*(dx(eF[4])*dx(eF[3])
57     //+dy(eF[4])*dy(eF[4])))<<endl;
58     // Modulo sqrt(lambda_k) con la norma de vP
59     //cout<<"Autovalor asociado          "<<eV[4]<<endl;
60     //cout<<" "<<endl;
61     //cout<<"*****"<<endl;

```

```

62     }
63     // En caso contrario las leemos por fichero
64     else
65     {
66         // Abrimos el fichero con los autovalores
67         ifstream fichEntradaEigenValue="./1_DATOS/EigenValue.dat";
68         // Leemos el numero de autovalores calculados
69         fichEntradaEigenValue>>nevC;
70         // Realizamos un bucle en los elementos calculados
71         for (int i=0;i<nev;i++)
72         {
73             // Recuperamos el autovalor correspondiente
74             fichEntradaEigenValue>>eV[i];
75             // Abrimos el fichero con el autovector
76             ifstream fichEntradaEigenVector=
77             "./1_DATOS/EigenVector_"+i+".dat";
78             // Recuperamos el autovector correspondiente
79             fichEntradaEigenVector>>eF[i] [];
80             // Graficamos por pantalla las autofunciones
81             if(ipintaeigenvf==1)
82                 plot(eF[i],dim=3,fill=1,cmm="Auto Funcion "+i+",
83                     Valor del autovalor asociado = " + eV[i] ,
84                     wait=0,value=1);
85         }
86     }
87     // Volcamos al vector eFvector los calculos realizados
88     for (int k=0; k<nev; k++)
89         for (int i=0;i<ndofVh;i++)
90             eFvector[k*ndofVh+i]=eF[k] [] [i];
91     // Finalizamos la funcion
92     return IVALUE;
93 }

```


Bibliografía

- [Bartle, 1995] Bartle, R. G. (1995). *The elements of integration and Lebesgue measure*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [Brezis, 2011] Brezis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York.
- [Ciarlet, 1982] Ciarlet, P. G. (1982). Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Paris etc.: Masson. XII, 279 p. FF 110.00 (1982).
- [Conway, 1990] Conway, J. B. (1990). *A course in functional analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition.
- [Hecht, 2012] Hecht, F. (2012). New development in FreeFem++. *J. Numer. Math.*, 20(3-4):251–265.
- [Horvath, 1987] Horvath, J. (1987). Espaces de fonctions localement intégrables et de fonctions intégrables à support compact. *Operations Research*, XXI:167–186.
- [Leoni, 2017] Leoni, G. (2017). *A first course in Sobolev spaces*, volume 181 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition.
- [Raviart and Thomas, 1983] Raviart, P.-A. and Thomas, J.-M. (1983). *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris.
- [Rudin, 1987] Rudin, W. (1987). *Real and Complex Analysis*. Mathematics series. McGraw-Hill.
- [Yosida, 1995] Yosida, K. (1995). *Functional analysis*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin. Reprint of the sixth (1980) edition.