ECUACIONES DE 3° Y 4° GRADO

EL

MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE LAGRANGE

POR

MARCIAL R. CANDIOTI

(Artículo publicado en los «Anales de la Sociedad Científica Argentina», tomo XLVI, páginas 223 y siguientes)

BUENOS AIRES

IMPRENTA DE PABLO E. CONI E HIJOS

680 — CALLE PERÚ — 680

1898

ECUACIONES DE 3º Y 4º GRADO

EL

MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE LAGRANGE

POR

MARCIAL R. CANDIOTI

(Artículo publicado en los «Anales de la Sociedad Científica Argentina», tomo XLVI, páginas 223 y siguientes)

BUENOS AIRES

IMPRENTA DE PABLO E. CONI E HIJOS

680 — CALLE PERÚ — 680

1898

ECUACIONES DE 3° Y 4° GRADO

EL MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE LAGRANGE (*)

El método debido á Lagrange, al menos en principio, y que vamos á exponer, se funda en relaciones sencillas entre las raíces y coeficientes de una ecuación, y es el que puede servir para deducir los otros procedimientos algebráicos que hoy se emplean.

I. *Ecuación de tercer grado.* — Sea la ecuación :

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0. \tag{1}$$

Si x', x'', x''' son las raíces, se tiene las relaciones conocidas :

$$\left.\begin{aligned} x' + x'' + x''' &= -p \\ x'x'' + x'x''' + x''x''' &= q \\ x'x''x''' &= -r \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Indicando con 1, α, α^2 las raíces cúbicas de la unidad, se puede escribir :

$$\left.\begin{aligned} (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''')^3 &= m_1 \\ (x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''')^3 &= m_2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

siendo m_1, m_2 valores que vamos á determinar.

(*) Conferencia dada en la Universidad de Buenos Aires.

Se tiene :

$$(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''') + (x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''') = 2x' + x''(\alpha + \alpha^2) + x'''(\alpha + \alpha^2).$$

Por otra parte :

$$\alpha + \alpha^2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} + \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = -1,$$

por lo tanto :

$$(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''') + (x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''') = 2x' - x'' - x''', \quad (4)$$

y análogamente :

$$(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''') + \alpha(x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''') = \alpha^2(2x''' - x' - x''), \quad (5)$$

$$(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''') + \alpha^2(x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''') = \alpha(2x'' - x''' - x'). \quad (6)$$

Multipliquemos miembro á miembro la (4) por la (5), y después por la (6), observemos que :

$$1 + \alpha + \alpha^2 = 0,$$
$$\alpha^3 = 1,$$

y tendremos después de toda reducción :

$$m_1 + m_2 = 2(x'^3 + x''^3 + x'''^3) - 3x'x''(x' + x'') - 3x'x'''(x' + x''') - 3x''x'''(x'' + x''') + 12x'x''x'''.$$

Por otra parte :

$$(x'^3 + x''^3 + x'''^3) = (x' + x'' + x''')^3 - 3x'x''(x' + x'') - 3x'x'''(x' + x''') - 3x''x'''(x'' + x''') - 6x'x''x''',$$

como es fácil verificar haciendo el desarrollo de :

$$(x' + x'' + x''')^3.$$

Tendremos, pues :

$$m_1 + m_2 = 2(x' + x'' + x''')^3 - 9x'x''(x' + x'') - 9x'x'''(x' + x''') - 9x''x'''(x'' + x''').$$

Agreguemos y restemos al segundo miembro una misma cantidad $27x'x''x'''$:

$$m_1 + m_2 = 2\,(x' + x'' + x''')^3 - \\ 9\,(x' + x'' + x''')(x'x'' + x'x''' + x''x''') + 27x'x''x'''.$$

ó bien, en virtud de las (2) :

$$m_1 + m_2 = -\,2p^3 + 9pq - 27r = \mathrm{S}. \qquad (7)$$

Conocemos así la suma $m_1 + m_2$; vamos á calcular $m_1 - m_2$.
Se tiene evidentemente :

$$(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''') - (x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''') = (\alpha - \alpha^2)\,(x'' - x''');$$

y análogamente :

$$(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''') - \alpha\,(x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''') = (1 - \alpha)\,(x' - x'');$$

$$(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''') - \alpha^2\,(x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''') = (\alpha^2 - 1)\,(x''' - x').$$

Multipliquemos miembro á miembro estas tres últimas igualdades, y observando que :

$$\alpha^3 = 1$$

$$1 + \alpha + \alpha^2 = 0;$$

tendremos que el primer miembro del resultado será $m_1 - m_2$; y el segundo de la raíz cuadrada de :

$$(\alpha - \alpha^2)^2\,(1 - \alpha)^2\,(\alpha^2 - 1)^2\,(x' - x'')^2\,(x' - x''')^2\,(x'' - x''')^2;$$

es decir : $\sqrt{-27\mathrm{A}}$;
en donde :

$$\mathrm{A} = -\,27r^2 + p^2q^2 - 4q^3 - 4p^3r + 18pqr.$$

Resultará así : $\quad m_1 - m_2 = 3\sqrt{-3\mathrm{A}}. \qquad (8)$

De las (7) y (8) se deduce :

$$m_1 = \frac{1}{2}(S + 3\sqrt{-3A}),$$

$$m_2 = \frac{1}{2}(S - 3\sqrt{-3A}).$$

Ahora bien, la primera de las (2), y las ecuaciones (3), nos dan el sistema :

$$x' + x'' + x''' = -p,$$

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = \sqrt[3]{m_1},$$

$$x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''' = \sqrt[3]{m_2}.$$

Aplicando determinantes á este sistema, se llega con facilidad á :

$$x = \frac{1}{3}(-p + \sqrt[3]{m_1} + \sqrt[3]{m_2}),$$

$$x'' = \frac{1}{3}(-p + \alpha^2 \sqrt[3]{m_1} + \alpha \sqrt[3]{m_2}),$$

$$x''' = \frac{1}{3}(-p + \alpha \sqrt[3]{m_1} + \alpha^2 \sqrt[3]{m_2});$$

que son las tres raíces de la ecuación propuesta (*).

II. *Ecuación de cuarto grado.* — Vamos á extender el método precedente á las ecuaciones de cuarto grado.

Sean $x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4,$

las raíces de la ecuación :

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0.$$

(*) Este método, que como hemos dicho, se atribuye en principio á Lagrange, ha sido desarrollado por Césaro, en su Análisis Algebráico por la teoría de las Discriminantes, pero como puede verse, se puede desarrollar muy bien por Al gebra Elemental.

Esas raíces están ligadas con los coeficientes por las relaciones conocidas :

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -p \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 &= q \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 &= -r \\ x_1x_2x_3x_4 &= s. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Formemos los productos binarios :

$$m' = x_2x_3 + x_1x_4,$$

$$m'' = x_3x_1 + x_2x_4,$$

$$m''' = x_1x_2 + x_3x_4.$$

Entonces, en virtud de aquellas relaciones, tendremos :

$$m' + m'' + m''' = q,$$

$$m''m''' + m'm''' + m'm'' = pr - 4s,$$

$$m'm''m''' = r^2 + p^2s - 4qs.$$

Consideremos ahora á m', m'', m''' como las raíces de una ecuación de tercer grado, y podremos escribir la ecuación en y :

$$y^3 - qy^2 + (pr - 4s)\,y - (r^2 + p^2s - 4qs) = 0. \qquad (5)$$

Esta es la ecuación *resolvente* de la propuesta.

Si consideramos una de las raíces de esta ecuación, por ejemplo la m', se tiene :

$$x_2x_3 + x_1x_4 = m'; \qquad (6)$$

y además : $x_2x_3 \,.\, x_1x_4 = s.$

Tendríamos, pues, la suma y el producto de x_2x_3 y x_1x_4, que no son otra cosa que las raíces de la ecuación :

$$u^2 - m'u^2 + s = 0.$$

De aquí sacamos las dos raíces :

$$\left.\begin{aligned} P &= x_2 x_3 \\ Q &= x_1 x_4. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Por otra parte se tiene :

$$-r = (x_2 + x_3)\, x_1 x_4 + (x_1 + x_4)\, x_2 x_3\,;$$

ó bien : $$-r = (x_2 + x_3)\, Q + (x_1 + x_4)\, P,$$

que con la relación :

$$(x_2 + x_3) + (x_1 + x_4) = -p,$$

forma un sistema del cual podemos deducir $(x_2 + x_3)$ y $(x_1 + x_4)$, que serán :

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= \frac{r - Pp}{P - Q}, \\ x_1 + x_4 &= \frac{Qp - r}{P - Q}. \end{aligned} \quad (8)$$

Finalmente, las relaciones (7) y (8), nos dan la suma y el producto respectivamente de las raíces x_2, x_3, y de x_1, x_4. Podemos, pues, formar estas dos ecuaciones de segundo grado, que resuelven la cuestión :

$$x^2 - \frac{r - Pp}{P - Q}\, x + P = 0,$$

$$x^2 - \frac{Qp - r}{P - Q}\, x + Q = 0.$$

La primera nos da las raíces x_2 y x_3, y la otra las x_1 y x_4.
Se tiene además :

$$x^2 - \frac{r - Pp}{P - Q}\, x + P = (x - x_2)(x - x_3),$$

$$x^2 - \frac{Qp - r}{P - Q}\, x + Q = (x - x_1)(x - x_4).$$

Por lo tanto .

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s =$$

$$\left(x^2 - \frac{r - \mathrm{P}p}{\mathrm{P} - \mathrm{Q}}\, x + \mathrm{P}\right)\left(x^2 - \frac{\mathrm{Q}p - r}{\mathrm{P} - \mathrm{Q}}\, x + \mathrm{Q}\right).$$

Si en vez de tomar la relación (6), conociéramos una de la forma :

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4, \tag{9}$$

sería fácil ver que esta relación tiene seis valores ó formas, para presentarse :

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= (x_1 + x_4) - (x_2 + x_3); \\ n_2 &= (x_2 + x_4) - (x_3 + x_1); \\ n_3 &= (x_3 + x_4) - (x_1 + x_2); \\ n_4 &= -(x_1 + x_4) + (x_2 + x_3); \\ n_5 &= -(x_2 + x_4) + (x_3 + x_1); \\ n_6 &= -(x_3 + x_4) + (x_1 + x_2); \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

de las que las tres primeras son iguales y de signos contrarios á las otras tres.

Como este procedimiento nos conduciría á una ecuación de sexto grado, podemos hacer de modo que la resolvente contenga sólo las potencias pares de la incógnita, y reducirla á una ecuación de tercer grado.

Cuadrando la primera de las (10), y añadiendo y quitando al segundo miembro la cantidad $(4m'' + 4m''')$, se tiene :

$$n_1^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 4\,(m'' + m''');$$

ó bien : $$n_1^2 = p^2 - 4\,(x_3x_1 + x_2x_4 + x_1x_2 + x_3x_4).$$

Añadamos y quitemos al segundo miembro la cantidad :

$$4m' = 4\,(x_2x_3 + x_1x_4),$$

y resultará : $$n_1^2 = p^2 - 4q + 4m',$$

$$z^2 = p^2 - 4q + 4y.$$

Adoptando como valor de la incógnita de la resolvente (5), su raíz m', y llamando z la nueva incógnita. De la última se deduce :

$$y = \frac{z^2 - p^2 + 4q}{4}.$$

cuyo valor sustituido en la (5), nos conduce á la nueva resolvente :

$$z^6 - (3p^2 - 8q)\, z^4 + (3p^4 - 16p^2q + 16q^2 + 16pr - 64s)\, z^2 - (4pq - p^3 - 8r)^2 = 0, \qquad (11)$$

la que podemos reducir al tercer grado haciendo :

$$z^2 = z_1;$$

$$z^4 = z_1^2;$$

$$z^6 = z_1^3;$$

La ecuacion de tercer grado que así resulta nos dará los valores de n_1, n_2, n_3.

Conociendo estos valores, formaremos con el valor de p y las tres primeras de la (9) :

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= n_1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= n_2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= n_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -p. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

La determinante de este sistema es :

$$\Delta = -16,$$

y las cuatro raíces serán :

$$x_1 = \frac{-n_1 - n_2 - n_3 - p}{4};$$

$$x_2 = \frac{-n_1 + n_2 - n_3 - p}{4};$$

$$x_3 = \frac{-n_1 - n_2 + n_3 - p}{4};$$

$$x_4 = \frac{n_1 + n_2 + n_3 - p}{4}.$$

El método de Lagrange, es el que conduce, mediante relaciones convenientes, entre las raíces y las funciones indeterminadas á los diferentes artificios que sirven de base á otros tantos métodos, tales como los de Descartes, Ferrari, Eulero, etc.

El método de Lagrange ha sido extendido á las ecuaciones de un grado cualquiera para hallar sus resolventes. Pero, para las ecuaciones de grado superior al cuarto, el procedimiento resulta ilusorio, pues, dicha ecuación nos conduce á su vez á ecuaciones de grados superiores al de las que se pretende resolver.

Este inconveniente debe atribuirse, no precisamente á la imperfección del método, sino á la insuficiencia de los medios de cálculo algebráico, para expresar las raíces de una ecuación en función de sus coeficientes.

Ya en 1813, Ruffini había establecido el siguiente teorema, que lleva su nombre : « *Es imposible la resolución algebráica de las ecuaciones de grado superior al cuarto* ».

Para ilustrarse más sobre este punto, que entra ya en los dominios del Algebra Superior, pueden consultarse las obras de Lagrange, como también una Memoria de Brioschi, en los *Annali de Matematica*, 2ª serie, tomo I ; y aún el curso de Algebra Superior de E. Césaro, catedrático, actualmente, en la Universidad de Nápoles.