materia

Espazos Vectoriais e Cálculo Matricial

unidade didáctica 3

# Espazos vectoriais

José Manuel Fernández Vilaboa
Celso Rodríguez Fernández
Departamento de Álxebra
Facultade de Matemáticas

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
VICERREITORÍA DE ESTUDANTES, CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA

titulación
Grao en Matemáticas

unidade **didáctica** 3

# Espazos vectoriais

**José Manuel Fernández Vilaboa**
**Celso Rodríguez Fernández**
Departamento de Álxebra
Facultade de Matemáticas

Deseño
Unidixital
Servizo de Edición Dixital
da Universidade de Santiago de Compostea

Edita
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

Imprime
Unidixital

Dep. Legal: C 58-2013
ISBN 978-84-9887-955-1

**MATERIA: Espazos Vectoriais e Cálculo Matricial**
**TITULACIÓN: Grao en Matemáticas**
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

**Unidade 1. Sistemas de ecuacións lineais**

- -Matrices. Operacións con matrices e propiedades. Matriz trasposta e matriz inversa. Operacións elementais dunha matriz. Matrices elementais.
- -Matrices equivalentes por filas e matrices equivalentes por columnas.
- -Sistemas de ecuacións lineais. Transformacións elementais dun sistema de ecuacións lineais.
- -Resolución de sistemas de ecuacións lineais: o método de Gauss.
- -Factorización LU dunha matriz.
- -Factorización dunha matriz invertible.

**Unidade 2. Determinantes e as súas aplicacións**

- -Determinantes de orde 2 e 3.
- -Definición xeral de determinante: propiedades.
- -Determinante dun produto de matrices.
- -Determinante da matriz trasposta.
- -Cálculo de determinantes de orde n.
- -Inversa dunha matriz, regra de Cramer.
- -Rango dunha matriz.

**Unidade 3. Espazos vectoriais**

- -Definición de espazo vectorial: exemplos.
- -Subespazos vectoriais. Intersección e suma de subespazos vectoriais.
- -Dependencia e independencia lineal. Sistemas de Xeradores.
- -Base e dimensión dun espazo vectorial. Coordenadas dun vector.
- -Subespazos vectoriais e solucións dun sistema homoxéneo.
- -Ecuacións dun subespazo vectorial.

**Unidade 4. Aplicacións Lineais**

- -Definición de aplicación lineal. Exemplos.
- -Núcleo e Imaxe dunha aplicación lineal. Aplicacións lineais inxectivas e sobrexectivas.
- -Matriz dunha aplicación lineal.
- -Cambio de base para aplicacións lineais.
- -Aplicacións Lineais e Sistemas de Ecuacións Lineais

**Unidade 5. Introdución ó espazo afín**

- -Variedades lineais.
- -Ecuacións lineais dunha variedade.
- -Posicións relativas de rectas no plano e de rectas e planos no espazo n-dimensional.

## ÍNDICE

## PRESENTACIÓN

Esta unidade didáctica enmárcase dentro dos contidos relativos á materia de Espazos Vectoriais e Cálculo Matricial, de 6 créditos ECTS impartida no segundo semestre do primeiro curso do Grao en Matemáticas e que pertence ó módulo de Álxebra e Xeometría.

Os contidos de Álxebra Lineal, nos que se inclúe esta materia, son unha parte fundamental das ferramentas matemáticas necesarias para o estudo en moitas áreas, como as ciencias do comportamento, da natureza, físicas ou sociais, economía, enxeñaría ou informática e por suposto nas matemáticas.

Esta materia é fundamental para una boa formación matemática. Está precedida da materia Linguaxe Matemática, Conxuntos e Números onde se introducen conceptos básicos das matemáticas, e resulta indispensable para poder abordar con éxito as materias Álxebra Lineal e Multilineal e Xeometría Lineal de segundo curso do grao en matemáticas.

A finalidade desta unidade é a de presentar de maneira gradual os conceptos fundamentais de Espazos Vectoriais e as técnicas básicas para o estudo da dependencia e independencia lineal, cálculo de bases e coordenadas e dos distintos tipos de ecuacións dun subespazo vectorial. Será a primeira vez que o estudantado se aproxima ó estudo de estruturas alxebraicas como modelos que engloban moitas situacións particulares e que serán fundamentais para a súa formación matemática xa que serán utilizadas no resto das disciplinas do Grao.

Á parte dos propios contidos matemáticos, esta unidade contribuirá ó desenvolvemento da capacidade de razoamento e da capacidade de formalización de demostracións matemáticas.

## OS OBXECTIVOS

Os obxectivos que se pretenden cubrir nesta unidade didáctica son:

- comprender a definición de espazo vectorial;
- establecer as diferenzas conceptuais entre dependencia e independencia lineal;
- comprender o significado de base dun espazo vectorial;
- recoñecer cando un conxunto de vectores constitúe unha base do espazo vectorial;
- ser capaces de completar bases a partir dun conxunto de vectores linealmente independentes;
- expresar e comprender a definición de dimensión dun espazo vectorial;
- aprender a operar con vectores, bases e subespazos;
- relacionar o concepto de subespazo coas solucións dun sistema de ecuacións lineais homoxéneo.

## A METODOLOXÍA

O desenvolvemento da unidade estruturarase en clases expositivas, de seminario e laboratorio.

As clases expositivas consistirán basicamente en docencia impartida polo profesor, dedicadas á exposición dos contidos teóricos e á resolución de problemas ou exercicios. Ás veces o modelo aproximarase á lección maxistral e noutras procurarase unha maior implicación do alumnado.

As clases de seminario e laboratorio dedicaranse á resolución de dúbidas formuladas polo alumnado, á discusión de cuestións teórico-prácticas e á resolución de exercicios propostos previamente. Tratarase de que o alumnado teña unha participación activa coa seguridade de que esta lle proporcionará as destrezas necesarias para o desenvolvemento da súa formación matemática.

Todas as tarefas do alumnado (estudo, traballos, programas de ordenador, lecturas, exposicións, exercicios, prácticas...) serán orientadas polo profesor.

Con respecto ás titorías individualizadas ou en grupo moi reducido, atenderase ó alumnado para discutir cuestións concretas en relación coas súas tarefas ou para tratar de resolver calquera outra dificultade relacionada coa materia.

## OS CONTIDOS BÁSICOS

### 1. Introdución

Esta unidade é unha das partes fundamentais da materia Espazos Vectoriais e Cálculo Matricial.

Para a introdución da estrutura de Espazos Vectorias, necesítanse os conceptos previos de Grupo e Corpo que, aínda que xa foron definidos nunha materia do primeiro cuadrimestre, serán aquí recordados de forma moi breve.

Se ben as definicións serán formuladas para espazos vectoriais sobre un corpo arbitrario, habitualmente os exercicios restrinxiranse ós corpos dos números reais, racionais ou complexos.

Trataremos, unicamente, o caso de espazos vectoriais de dimensión finita, aínda que, en xeral, os resultados son válidos para espazos vectoriais arbitrarios.

### 2. Definición de espazo vectorial. Exemplos

**Definición**

Un espazo vectorial é unha terna $((\mathbf{V}, +), (K, +, \bullet), \circ)$ tal que

$(\mathbf{V}, +)$ é un grupo conmutativo.

$(K +, \bullet)$ é un corpo.

$\circ$ representa unha lei de composición externa que cumpre as seguintes propiedades:

V.1. Distributiva respecto á suma de vectores:

$$\alpha \circ (v_1 + v_2) = \alpha \circ v_1 + \alpha \circ v_2,\ \forall \alpha \in K,\ \forall v_1, v_2 \in \mathbf{V}.$$

V.2. Distributiva respecto á suma de escalares:

$$(\alpha + \beta) \circ v = \alpha \circ v + \beta \circ v,\ \forall \alpha, \beta \in K,\ \forall v \in \mathbf{V}.$$

V.3. "Asociativa":

$$(\alpha \bullet \beta) \circ v = \alpha \circ (\beta \circ v),\ \forall \alpha, \beta \in K,\ \forall v \in \mathbf{V}.$$

V.4. "Neutro":

$$1_K \circ v = v,\ \forall v \in \mathbf{V}, \text{ onde } 1 \text{ é o neutro de } (K, \bullet).$$

**Nota**

No sucesivo diráse que V é un espazo vectorial sobre o corpo K, que V é un K-espazo vectorial ou simplemente que V é un espazo vectorial (cando xa se dá por suposto cal é o corpo).

Os elementos de V chamaranse vectores e os de K escalares.

O elemento neutro para a operación + denótase por 0 e chámase vector cero.

Dado un vector $v \in V$ o seu simétrico para + chámase oposto de v e denótase por $-v$.

**Exemplos**

$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \circ)$ sendo $\alpha \circ (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$. Analogamente

$(\mathbb{R}^2, \mathbb{Q}, \circ)$

($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$, $\circ$), sendo $n \in \mathbb{N}$.
($\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}$, $\circ$), sendo $n \in \mathbb{N}$.
($\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}$, $\circ$), sendo $n \in \mathbb{N}$.
($\mathbb{C}^n$, $\mathbb{Q}$, $\circ$), sendo $n \in \mathbb{N}$.
$V = M_{mxn}(\mathbb{R})$ é un $\mathbb{R}$-espazo vectorial.

**Exemplos**

1) Denotamos por $\mathbb{R}[x]$ o conxunto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$. É claro que ($\mathbb{R}[x]$, +) é un grupo conmutativo. Ademais $\mathbb{R}[x]$ é $\mathbb{R}$-espazo vectorial considerando a operación externa

$$\alpha \circ (a_0 + a_1x^1 + ... + a_nx^n) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x^1 + ... + \alpha a_n x^n$$

(Nótese que, á marxe desta estrutura de $\mathbb{R}$–espazo, en $\mathbb{R}[x]$ temos a operación produto que, xunto coa +, dálle estrutura de anel).

2) Se consideramos os polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grao menor ou igual a 2, $\mathbb{R}_2[x] = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \;/\; \partial f(x) \leq 2\}$, entón $\mathbb{R}_2[x]$ é $\mathbb{R}$-espazo vectorial coa operación externa do exemplo anterior.

3) Analogamente se $n \in \mathbb{N}$, entón $\mathbb{R}_n[x] = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \;/\; \partial f(x) \leq n\}$ é $\mathbb{R}$-espazo vectorial.

4) Se consideramos o conxunto das matrices de orde nxm con coeficientes en $\mathbb{R}$, coa suma ordinaria como operación interna e a multiplicación por un escalar como operación externa, é un $\mathbb{R}$-espazo vectorial.

**Nota**

($\mathbb{Q}^2$, $\mathbb{R}$, $\circ$) sendo $\alpha \circ (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$, non é espazo vectorial, pois $\circ$ non é unha operación externa.

**Exemplo**

1) $V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 /$ (a, b) é solución da ecuación $3x + 2y = 0\}$ coa suma de vectores usual en $\mathbb{R}^2$ e o produto dun escalar por un vector é un $\mathbb{R}$–espazo vectorial.

2) $V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 /$ (a, b, c) é solución da ecuación $3x + 4y + 5z = 0\}$ coa suma de vectores usual en $\mathbb{R}^3$ e o produto dun escalar por un vector é un $\mathbb{R}$–espazo vectorial.

3) $V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 /$ (a, b, c) é solución do sistema de ecuacións lineais, $3x + 4y + 5z = 0$, $2x + y - z = 0\}$, coa suma de vectores en $\mathbb{R}^3$ e o produto dun escalar por un vector usuais, é un $\mathbb{R}$–espazo vectorial.

**Proposición**

Se V é un K-espazo vectorial, entón:

$\alpha \circ v = 0_V \Leftrightarrow \alpha = 0_K$ ou $v = 0_V$.

$(-\alpha) \circ v = \alpha \circ (-v) = -(\alpha \circ v)$

## 3. Subespazos vectoriais

**Definición**

Un subconxunto non baleiro U dun K-espazo vectorial V é un subespazo de V se:

1. $u_1 + u_2 \in U$ para todo $u_1, u_2 \in U$.
2. $\alpha u \in U$ para todo $u \in U$ e todo $\alpha \in K$.

Equivalentemente,

$\alpha u + \beta u' \in U$ para todo $u, u' \in U$ e todo $\alpha, \beta \in K$.

Nótese que o vector cero de V está en U xa que como $U \neq \phi$ existe $u \in U$ e $0u = 0 \in U$.

Ademais, U é un espazo vectorial coas mesmas operacións que V e tamén co mesmo neutro para a operación +.

**Exemplo**

1.- Os seguintes conxuntos son subespazos de $\mathbb{R}^4$.

$U = \{(x, y, z, t) \in R^4 / x + y = 0, z – t = 0\}$

$W = \{(x, y, z, t) \in R^4 / x - 3y = z + 2t\}$

2.- Os seguintes conxuntos son subespazos de $\mathbb{R}^3$.

$U = \{(x, y, z) \in R^3 / x + 3y = z\}$

$V = \{(x, y, z) \in R^3 / 2x + 3y - z = 0\}$

**Exemplo**

1) $\{0\}$ e V son subespazos de V e dirase que son os subespazos triviais.

2) $\{(x, 0, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$ é un subespazo de $\mathbb{R}^3$.

3) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0, x + 2y + z = 0\}$ é un subespazo de $\mathbb{R}^3$.

4) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) / A$ é diagonal$\}$ é un subespazo de $M_n(\mathbb{R})$.

5) $\{f(x) \in \mathbb{R}[x] / \partial f(x) \leq 3\}$ é un subespazo do $\mathbb{R}$-espazo $\mathbb{R}[x]$.

6) O conxunto das solucións dun sistema homoxéneo de m ecuacións con n incógnitas con coeficientes en K é un subespazo de $K^n$.

**Exercicio**

1.- Estudar se os seguintes subconxuntos de $\mathbb{R}^4$ son subespazos vectoriais:

$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 0, z – t = 1\}$

$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x^3 = y^3\}$

$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - 3y = z + 2t\}$

2.- Estudar se os seguintes subconxuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespazos vectoriais:

$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 3y = z\}$

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 1\}$

$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^3 = y^3\}$

**Proposición**

Se $V_1$ e $V_2$ son subespazos de V, entón $V_1 \cap V_2$ é un subespazo de V.

En xeral, se $\{V_i\}_{i\in I}$ é unha familia de subespazos dun espazo vectorial **V**, entón $\bigcap_{i\in I} V_i = \{v \in \mathbf{V} \;/\; \mathbf{v} \in V_i,\ \forall\, i \in I\}$ é un subespazo de **V** e ademais é o maior subespazo de **V** contido en todos os $V_i$, $i\in I$.

**Exemplos**

1) Dados $\mathbf{V_1} = \{(x, y, 0)\in \mathbb{R}^3\}$ e $\mathbf{V_2} = \{(x, 0, z)\in \mathbb{R}^3\}$, subespazos de $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{V_1} \cap \mathbf{V_2} = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ é subespazo de $\mathbb{R}^3$.

2) Dados os subespazos de $\mathbb{R}^3$,

$V_1 = \{(a, b, c)\in \mathbb{R}^3 / (a, b, c)$ é solución da ecuación $3x + 4y + 5z = 0\}$

$V_2 = \{(a, b, c)\in \mathbb{R}^3 / (a, b, c)$ é solución da ecuación $2x + y - z = 0\}$

Entón $\mathbf{V_1} \cap \mathbf{V_2}$ é o subespazo de $\mathbb{R}^3$:

$\{(a, b, c)\in \mathbb{R}^3 / (a, b, c)$ é solución de $3x + 4y + 5z = 0,\ 2x + y - z = 0\}$ .

**Nota**

Obsérvese que a unión de subespazos vectoriais non é subespazo vectorial. Por exemplo a unión das dúas rectas de $\mathbb{R}^2$, $x = 0$ e $y = 0$ non é subespazo vectorial de $\mathbb{R}^2$.

**Definición**

Se $V_1$ e $V_2$ son subespazos dun espazo vectorial V, defínese o subespazo suma de $V_1$ e $V_2$ como o subespazo

$$V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \;/\; \mathbf{v_1} \in V_1,\ \mathbf{v_2} \in V_2\}.$$

É fácil ver que $V_1+V_2$ é o menor subespazo de V que contén a $V_1$ e a $V_2$.

## 4. Dependencia e independencia lineal. Sistemas de xeradores

**Definición**

Se S é un conxunto de vectores dun espazo vectorial (**V**, K , $\circ$), dise que un vector $v\in\mathbf{V}$ é **combinación lineal** dos vectores do conxunto S, se existen $v_1, ..., v_n\in S$, $\alpha_1, ..., \alpha_n\in K$ tal que $v = \alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + .... + \alpha_n \circ v_n$.

**Exemplo**

1) No espazo vectorial $\mathbb{R}^2$ o vector (2, 2) é combinación lineal dos vectores (1, 1) e (3, 1) pois (2, 2) = 2(1, 1) + 0(3, 1).

2) No espazo vectorial $\mathbb{R}^3$ o vector (1, 1, 1) é combinación lineal dos vectores (1, 1, 0) e (3, 3, 1) pois (1, 1, 1) = 1(3, 3, 1) - 2(1, 1, 0).

3) No espazo vectorial $\mathbb{R}^4$ o vector (3, 3, 0, 17) é combinación lineal dos vectores {(1, 1, 0, 3), (3, 3, 0, 1), (2, 2, 0, -2)} pois

(3, 3, 0, 17) = 2(1, 1, 0, 3) + 3(3, 3, 0, 1) - 4(2, 2, 0, -2).

Pode verse que esta non é a única combinación lineal posible deses tres vectores que dá o mesmo vector (3, 3, 0, 17), pois por exemplo

(3, 3, 0, 17) = 6(1, 1, 0, 3) - 1(3, 3, 0, 1) + 0(2, 2, 0, -2).

**Proposición**

Sexa (**V**, K, $\circ$) un espazo vectorial e S un subconxunto de **V**.

O conxunto de combinacións lineais formadas cos vectores de S, que denotaremos por <S>, é o menor subespazo de (**V**, K, $\circ$) que contén o conxunto S. É dicir, o conxunto

$<S> = \{\alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + .... + \alpha_n \circ v_n \ / \ \alpha_i \in K, v_i \in S, i = 1, \dots, n\}$ verifica que

- é un subespazo de (**V**, K, $\circ$),
- contén o conxunto S
- está contido en todos aqueles subespazos de (**V**, K, $\circ$) que conteñen o conxunto S.

**Exemplo**

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y\} = \{x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1) \ / \ x; z \in \mathbb{R}\} =$
$= <\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}>$.

**Proposición**

Se $V_1$ e $V_2$ son subespazos dun espazo vectorial V, entón

$V_1 + V_2 = <V_1 \cup V_2>$

**Corolario**

Se S e S' son subconxuntos dun espazo vectorial **V**, entón:

$S \subset S' \Rightarrow <S> \subset <S'>$ e $<<S>> = <S>$

**Nota**

Se S e S' son subconxuntos de V

$$<S> = <S'> \Leftrightarrow \begin{cases} < S > \subset < S' > \\ < S' > \subset < S > \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S \subset < S' > \\ S' \subset < S > \end{cases}$$

En particular se $S \subset V$ e $v \in V$ temos que

$<S> = <S \cup \{v\}> \Leftrightarrow v \in <S>$

Como consecuencia temos que nun conxunto de xeradores S pódese eliminar un vector v se, e só se, v é combinación lineal dos demais elementos de S. É dicir, se $v \in S$

$<S> = <S - \{v\}> \Leftrightarrow v \in < S - \{v\}>$

**Exemplo**

No espazo vectorial ($\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}$, $\circ$) temos que

$<\{ (1, 0, 0), (0, 1, 0) \}> = \{ (x, y, 0) \ / \ x, y \in \mathbb{R} \}$.
$<\{ (1, 1, 0), (0, 1, 0) \}> = \{ (x, y, 0) \ / \ x, y \in \mathbb{R} \}$.
$<\{ (1, 1, 0), (0, 1, 1) \}> = \{ (x, x+z, z) \ / \ x, z \in \mathbb{R} \}$.

**Definición**

Sexa (**V**, K, $\circ$) un espazo vectorial. Un conxunto de vectores S de **V** dise que é **libre** ou **linealmente independente** se para $\alpha_i \in K$, $v_i \in S$, $i = 1, \dots, n$, con todos os $v_i$ distintos, a igualdade $\alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + .... + \alpha_n \circ v_n = 0$, só se verifica para $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

É dicir:

$\alpha_i \in K, v_i \in S, i = 1, \dots, n, \ \alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + .... + \alpha_n \circ v_n = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \ \forall i.$

**Exercicio**

Probar que:

1) $\{(1, 0, 1, 0, 3), (0, 2, 1, 1, 2), (1, 2, 2, 1, 0)\}$ é un conxunto de vectores de $\mathbb{R}^5$ linealmente independentes.

2) $\{1 + 2x + x^3, 2x - 3x^2, 1 + x, x + x^2\}$ é un conxunto de vectores do $\mathbb{R}$-espazo vectorial $\mathbb{R}[x]$, linealmente independentes.

3) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right\}$ é un conxunto de vectores do $\mathbb{R}$-espazo vectorial $Mat_{2x3}(\mathbb{R})$, linealmente independentes.

**Definición**

Sexa (**V**, K, $\circ$) un espazo vectorial. Un conxunto de vectores S de **V** dise **ligado** ou **linealmente dependente** se non é libre. É dicir: existen

$\alpha_i \in K$, $v_i \in S$, $i = 1, \ldots, n$, con todos os $v_i$ distintos e algún $\alpha_i \neq 0$ e

$\alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + \ldots + \alpha_n \circ v_n = 0$.

**Nota**

Sexa (**V**, K, $\circ$) un espazo vectorial. Entón:

$S = \{0\}$ é un conxunto linealmente dependente

Se $v \in$ **V**, $v \neq 0$, entón $S = \{v\}$ é un conxunto linealmente independente.

**Nota**

Sexa (**V**, K, $\circ$) un espazo vectorial e S un conxunto de vectores de **V**. Entón:

Se S é un conxunto linealmente independente e $S' \subset S$, entón S' é un conxunto linealmente independente.

Se S é un conxunto linealmente dependente e $S \subset S'$, entón S' es un conxunto linealmente dependente.

**Nota**

Calquera conxunto de vectores que conteña o vector 0 é linealmente dependente.

**Proposición**

Se S é un conxunto de vectores dun espazo vectorial (**V**, K, $\circ$), entón:

S é linealmente dependente se, e só se, existe $v \in S$ tal que $v \in \langle S - \{v\} \rangle$.

Ademais nesta situación temos que $\langle S \rangle = \langle S - \{v\} \rangle$.

**Proposición**

Se (**V**, K, $\circ$) é un espazo vectorial, S é un conxunto de vectores linealmente independente e $v \notin \langle S \rangle$, entón $S \cup \{v\}$ é un conxunto linealmente independente.

**Definición**

Sexa **V** un espazo vectorial sobre K e S un conxunto de vectores de **V**. Dise que S é un **sistema de xeradores** de **V** se $\langle S \rangle =$ **V**. É dicir, S é un sistema de xeradores de **V** se calquera vector de **V** é combinación lineal dos vectores de S.

**Exemplos**

- $\{(1, 1), (1, 2)\}$ é un conxunto de xeradores de $\mathbb{R}^2$.
- $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 2, 1)\}$ é un conxunto de xeradores de $\mathbb{R}^3$.
- $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (-1, -2, 1)\}$ non é un conxunto de xeradores de $\mathbb{R}^3$.

**Exercicio**

Proba que:

1) $S = \{(1, 1, 1), (5, 0, 3)\}$ é un conxunto de xeradores do subespazo vectorial de $\mathbb{R}^3$, $V = \{(x, y, z) / 3x + 2y -5z = 0\}$.

2) $S = \{(6, 3, -2), (-5, 4, 6)\}$ é un conxunto de xeradores do subespazo vectorial de $\mathbb{R}^3$, $V = \{(x, y, z) / 2x - 2y + 3z = 0\}$.

3) $S = \{1 + 2x + x^3 , 2x - 3x^2, 1 + x, x + x^2 \}$ é un conxunto de vectores xeradores do $\mathbb{R}$-espazo vectorial $\mathbb{R}_3[x]$, dos polinomios con coeficientes reais de grao menor ou igual que 3.

4) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \right\}$ é un conxunto de vectores xeradores do $\mathbb{R}$-espazo vectorial $Mat_{2x2}(\mathbb{R})$ ¿É un conxunto linealmente independente?.

**Proposición**

Sexa $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ un conxunto de vectores dun espazo vectorial V.

1) Se intercambiamos dous vectores, entón

$<\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, ..., v_n\}> = <\{v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, ..., v_n\}>$.

2) Se multiplicamos un vector, por un escalar $\lambda \neq 0$, entón

$<\{v_1, \dots, v_i, ..., v_n\}> = <\{v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n\}>$.

3) Se substituímos un vector polo resultado de sumarlle outro vector multiplicado por un escalar $\lambda$, por exemplo substituímos $v_i$ por $v_i + \lambda v_j$ , entón

$<\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, ..., v_n\}> = <\{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j \dots, v_j, ..., v_n\}>$.

**Nota-Corolario**

Sexan $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ un conxunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ e A a matriz que ten eses vectores como filas. Como consecuencia da proposición anterior, se B é unha matriz equivalente por filas a A, os vectores fila desta matriz B xeran o mesmo subespazo vectorial que os vectores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

**Exemplo**

1) Os conxuntos $S = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ e $S' = \{(3, 2, 1), (0, 1, -1)\}$ xeran o mesmo subespazo vectorial de $\mathbb{R}^3$.

2) Os conxuntos $S = \{(1, 1, 0), (2, 0, 2)\}$ e $S' = \{(3, 2, 3), (0, 1, 0)\}$ non xeran o mesmo subespazo vectorial de $\mathbb{R}^3$.

## 5. Base e dimensión dun espazo vectorial. Coordenadas dun vector

**Definición**

Un conxunto de vectores de **V**, B = { $E_1$ , ..., $E_n$ }, é unha **base** de **V** se:

1. B é un conxunto linealmente independente
2. B é un conxunto de xeradores de V.

**Exercicio**

Obtén:

- Bases dos $\mathbb{R}$-espazos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ...,
- Bases dos $\mathbb{Q}$-espazos $\mathbb{Q}$ ,$\mathbb{Q}^2$, $\mathbb{Q}^3$, ......,
- Bases dos $\mathbb{C}$-espazos $\mathbb{C}$ ,$\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}^3$, ......,
- ¿Coñeces algunha base do $\mathbb{R}$-espazo vectorial $\mathbb{R}[x]$?

**Proposición**

Se **V** é un espazo vectorial, L = { $E_1$ , ..., $E_r$ } é un conxunto de vectores linealmente independentes e v = $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \circ E_i$, entón os escalares $\alpha_1$, $\alpha_2$, …, $\alpha_r$, son únicos.

**Corolario**

Se **V** é un espazo vectorial e B = { $E_1$ , ..., $E_n$ } é unha base de **V**, entón cada vector v$\in$**V** pode expresarse de forma única como combinación lineal dos elementos de B.

**Definición**

Se B = { $E_1$ , ..., $E_n$ } é unha base dun espazo vectorial **V** e v = $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i$ , entón os escalares ($\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_n$), que están univocamente determinados, denomínanse **coordenadas do vector** v respecto da base B.

Obsérvese que fixada a base B, entón coñécese v$\in$**V** se, e só se, se coñecen as súas coordenadas respecto de B.

**Exemplos**

1) Sexa B = {(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)} unha base de $\mathbb{R}^3$. Calcular o vector v$\in\mathbb{R}^3$, tal que as súas coordenadas respecto de B son (1, 8, 7), é dicir v = $(1, 8, 7)_B$.

2) Se n é un enteiro positivo, entón $\mathbb{R}^n$ é un $\mathbb{R}$-espazo vectorial e o conxunto B = { $e_1$ , ..., $e_n$ }, con $e_i = (0,..., 0, \overset{i)}{1}, 0, ..., 0)$, é unha $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{R}^n$ que denominaremos **base canónica**.

**Teorema (de existencia de base)**

Sexa V $\neq$ {0} un espazo vectorial cun conxunto finito de xeradores S. Entón, existe un subconxunto B de S que é unha base de V.

**Proposición**

Sexa **V** un K-espazo vectorial. Se $B = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ é unha base de **V** con n vectores, entón un conxunto $S=\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ con $m > n$ non pode ser linealmente independente.

**Corolario**

Sexa **V** un K -espazo vectorial. Se $B = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ é unha base de **V** con n vectores, entón calquera outra base ten que ter necesariamente n vectores.

**Definición**

Chámase **dimensión dun K-espazo vectorial V** ao número de vectores dunha base (como acabamos de ver todas as bases teñen o mesmo número de vectores). Denótase $\dim_{\mathbf{K}}(\mathbf{V})$.

**Proposición**

Se **V** é un espazo vectorial de dimensión n e $L = \{E_1, E_2, \ldots, E_r\}$ é un conxunto de vectores linealmente independentes, entón pódese construír unha base de **V** que conteña a L (engadir $n - r$ vectores para completar unha base de **V**).

**Proposición**

Se $V_1$ e $V_2$ son subespazos dun espazo vectorial V, entón

$$\dim_{\mathbf{K}}(V_1+V_2) = \dim_{\mathbf{K}}(V_1) + \dim_{\mathbf{K}}(V_2) - \dim_{\mathbf{K}}(V_1 \cap V_2)$$

**Definición**

Se $V_1$ e $V_2$ son subespazos dun espazo vectorial V e $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, dirase que $V_1+V_2$ é a suma directa de $V_1$ e $V_2$ e denotarase por $V_1 \oplus V_2$.

**Proposición**

Se $V_1$ e $V_2$ son subespazos dun espazo vectorial V, entón $V_1 + V_2$ é a suma directa $\Leftrightarrow$ Cada vector de $V_1 + V_2$ pode expresarse de forma única como a suma dun vector de $V_1$ e outro de $V_2$.

**Corolario**

Sexa **V** un K -espazo vectorial de dimensión n.

As seguintes afirmacións son equivalentes:

1) $B = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ é unha base de **V.**

2) $B = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ é un conxunto de vectores de **V** linealmente independentes.

3) $B = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ é un conxunto de xeradores de **V**.

**Exemplos**

$\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R} = 1$

$\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2 = 2$

…..

$\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n = n.$

**Proposición**

Se a matriz $A \in M_{nxm}(\mathbb{R})$ é equivalente por filas a unha matriz cunha fila de ceros, entón os vectores fila de A son vectores de $\mathbb{R}^m$ linealmente dependentes.

**Proposición**

Se $A \in M_{nxm}(\mathbb{R})$ é unha matriz en escaleira sen ningunha fila nula, entón os vectores fila de A son vectores de $\mathbb{R}^m$ linealmente independentes e polo tanto xeran un subespazo de $\mathbb{R}^m$ de dimensión n.

**Nota-Corolario**

Sexa $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ unha matriz cadrada e B unha matriz en escaleira equivalente por filas á matriz A. Sabemos que os vectores fila de A e B xeran o mesmo subespazo e a súa dimensión coincide co número de vectores fila de A (ou de B) linealmente independentes e polo tanto os vectores fila de A son linealmente independentes se, e só se, o son os de B.

Como consecuencia temos que:

$\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ os vectores fila de A son linealmente dependentes.

**Corolario**

1) Se $B \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ é unha matriz en escaleira, as filas non nulas de B son linealmente independentes e polo tanto a dimensión do subespazo vectorial de $\mathbb{R}^n$ que xeran coincide co número de pivotes de B.

2) Se $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ é unha matriz cadrada e B unha matriz en escaleira equivalente por filas á A, o subespazo vectorial de $\mathbb{R}^n$ xerado polas filas de A coincide co subespazo vectorial xerado polas filas de B e polo tanto a dimensión do subespazo vectorial de $\mathbb{R}^n$ xerado polas filas de A coincide co número de pivotes da matriz en escaleira B.

3) Se $B \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ é unha matriz en escaleira sen ningunha fila nula, entón se ás filas de B lle engadimos as filas que proporcionan os vectores da base canónica de $R^n$, $e_i$, que corresponden ás columnas sen pivote, obtemos unha matriz cadrada de orde n coas filas linealmente independentes (base de $\mathbb{R}^n$).

4) Se $B \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ é equivalente por filas a unha matriz en escaleira C, sen ningunha fila nula, entón se ás filas de B lles engadimos as filas que proporcionan os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^n$, $e_i$, que corresponden ás columnas de C sen pivote, obtemos unha matriz cadrada de orde n coas filas linealmente independentes (base de $\mathbb{R}^n$).

**Exemplos**

1) Se B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4x6}(\mathbb{R})$, entón as filas de B xeran un subespazo de $R^6$ de dimensión 3.

2) A matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\in M_{4x6}(\mathbb{R})$ é equivalente por filas á matriz B do apartado 1) e polo tanto as filas de A xeran un subespazo de $R^6$ de dimensión 3.

3) A matriz B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\in M_{3x6}(\mathbb{R})$ ten pivotes nas columnas 1, 3 e 5, entón as filas da matriz C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ forman unha base de $R^6$.

4) A matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\in M_{3x6}(\mathbb{R})$ é equivalente por filas á matriz B do apartado 3) e polo tanto as filas da matriz cadrada

C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ forman unha base de $\mathbb{R}^6$.

.

## 6. Subespazos vectoriais e solucións dun sistema homoxéneo. Ecuacións dun subespazo vectorial

Se **V** é un espazo vectorial sobre K de dimensión n, e **U** un subespazo vectorial de **V** xerado polos vectores $u_1$, ... $u_s$, linealmente independentes, existe un sistema de n – s ecuacións lineais (independentes) do cal **U** é a solución.

Ditas ecuacións chámanse ecuacións lineais do subespazo. (Nota: o sistema non é único).

As ecuacións paramétricas de **U** veñen dadas por:

$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_s u_s.$

As ecuacións lineais obteñense do feito de que v $\in$<{ $u_1$, ... $u_s$ }> se é un vector linealmente dependente deses vectores. Se consideramos a matriz A que ten por filas as coordenadas dos vectores $u_1$, ... $u_s$, entón dicir que v$\in$<{$u_1$, ... $u_s$ }> é equivalente a que o vector de $\mathbf{K}^n$ que ten por coordenadas as de v é un linealmente dependente dos vectores fila dunha matriz en escaleira equivalente por filas á matriz A.

Cálculo das ecuacións lineais dun subespazo de $\mathbb{R}^n$, do que coñecemos un conxunto de xeradores:

**Exemplo 1**

Calcular as ecuacións lineais do subespazo de $\mathbb{R}^4$ xerado polos vectores $\mathbf{u_1}$ = (1, 1, 0,0) e $\mathbf{u_2}$= (1, 0, 1, 0).

**Exemplo 2**

Calcular as ecuacións lineais do subespazo de $\mathbb{R}^5$ xerado polos vectores $\mathbf{u_1}$ = (1, 1, 0, 0, 1), $\mathbf{u_2}$= (1, 0, 1, 0, 2).

**Exemplo 3**

Calcular as ecuacións lineais do subespazo de $\mathbb{R}^7$ xerado polos vectores
$\mathbf{u_1}$ = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 0), $\mathbf{u_2}$= (1, 0, 1, 1, 0, 0, 0),
$\mathbf{u_3}$ = (2, 0, 3, 5, 2, 2, 0), $\mathbf{u_4}$ = (3, 0, 2, 0, 0, 0, 0).

**Exemplo 4**

Calcular as ecuacións lineais do subespazo de $\mathbb{R}^7$ xerado polos vectores
$\mathbf{u_1}$ = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 0), $\mathbf{u_2}$= (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0), $\mathbf{u_3}$ = (2, 0, 5, 5, 2, 2, 0)

## ACTIVIDADES PROPOSTAS

- Comprobación dos exemplos e realización dos exercicios propostos ó longo da Unidade.
- Tamén se deberán resolver os exercicios propostos nun boletín con cuestións teóricas e prácticas.
- Os alumnos poden resolver os exercicios de forma individual ou en grupos pero deben comprender os fundamentos e desenvolver as capacidades que lles permitan enfrontarse a exercicios de dificultade análoga.
- Adicionalmente poderase realizar algunha proba curta.

## AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

Esta Unidade Didáctica forma parte da materia Espazos Vectoriais e Cálculo Matricial e a súa avaliación enmárcase no contexto global desa materia.

Ó longo do curso requirirase do alumnado a resolución de exercicios correspondentes a cada unha das unidades e a participación activa nas clases de laboratorio e seminario. Ademais poderanse realizar probas escritas teórico-prácticas ó longo do cuadrimestre. A puntuación conxunta destas actividades (C) representará o 25% da nota final.

O 75 % restante sairá do exame final (E). Este exame será escrito e conterá preguntas de teoría, cuestións teórico-prácticas e exercicios. Para superar a materia os estudantes deberán obter cando menos o 40% da nota do exame.

Para o cómputo da cualificación final (F) terase en conta a avaliación continua (C) e a cualificación do exame final (E) e aplicarase a seguinte fórmula:

$$F = \max(E,\ 0{,}25 \cdot C + 0{,}75 \cdot E)$$

## BIBLIOGRAFÍA


BURGOS, J. (2006): *Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana*. Madrid: McGraw Hill.

CASTELLET, M.; LLERENA, I. (1991): *Álgebra Lineal y Geometría*. Barcelona: Reverté/UAB.

HERNÁNDEZ, E., VÁZQUEZ, M.J., ZURRO, M.A. (2012): *Álgebra lineal y Geometría*. Madrid: Pearson.

MERINO, L., SANTOS, E. *Álgebra Lineal con métodos elementales*. Madrid: Thomson.

VILLA, A. (1994): *Problemas de Álgebra*. Madrid: CLAGSA-I.C.A.I.

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

Impreso en papel 100% reciclado e libre de cloro

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

SERVIZO DE NORMALIZACIÓN
LINGÜÍSTICA

9 788498 879551