UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

SUPERFICIES HOMOGÉNEAS

Marta Sanabria Gago

Julio 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

SUPERFICIES HOMOGÉNEAS

Marta Sanabria Gago

Julio 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Geometría y Topología
Título: Superficies homogéneas
Breve descrición do contido
El objetivo del trabajo es determinar las superficies del espacio con curvaturas principales constantes y comprobar que estas son subconjuntos abiertos de superficies homogéneas. También se puede considerar la posibilidad de extender estos resultados a dimensiones superiores o a otros espacios ambiente.
Recomendacións
Outras observacións

Índice

Resumen

El objetivo fundamental de este trabajo es demostrar que las superficies con curvaturas principales constantes son localmente isométricas a superficies homogéneas y viceversa. Para ello, haremos una breve introducción a la teoría de superficies y presentaremos diferentes objetos geométricos que nos permitirán abordar dichas demostraciones.

Abstract

The main aim of this work is to prove that surfaces with constant principal curvatures are locally isometric to homogeneous hypersurfaces and conversely. We provide an introduction to the theory of surfaces and introduce several geometric objects that allow us to carry out that proof.

Introducción

El término simetría se entiende, generalmente, como aquellas propiedades de un objeto, ya sea concreto o abstracto, que permanecen estáticas con respecto de ciertas transformaciones espaciales o temporales. De esta manera, un objeto se suele calificar como simétrico cuando presenta ciertos patrones de autosimilitud o repetición. El concepto de simetría es pues ubicuo en el pensamiento humano, y abarca áreas tan distantes entre sí como son el arte —donde una pieza musical puede presentar ciertos patrones de repetición temporales— la ingeniería y la ciencia donde juega un papel fundamental, por ejemplo, en la física. Desde el punto de vista matemático, la idea intuitiva de simetría se traduce en la existencia de un grupo de transformaciones actuando sobre algún tipo de estructura matemática. De esta manera, se podría decir que un objeto presenta algún tipo de simetría cuando su aspecto es el mismo después de transformarlo de alguna forma. Por ejemplo, un rombo presenta un cierto tipo de simetría ya que, al reflejarlo sobre cualquiera de sus ejes, la figura resultante es esencialmente la misma.

Las superficies homogéneas son, en cierto modo, aquellas con una mayor cantidad de simetría. Formalmente, una superficie se dice homogénea cuando se puede obtener como una órbita de una acción isométrica de $\mathbb{R}^3$, es decir, cuando sus puntos son indistinguibles unos de otros bajo dicha acción. Esta condición impone unas fuertes restricciones sobre la forma que una superficie homogénea puede tomar. En particular debido a esta rigidez, las superficies homogéneas tienen muy buenas propiedades que facilitan trabajar con ellas, por lo que constituyen una familia de superficies de especial importancia en el espacio euclídeo tridimensional. El problema de clasificación de las superficies homogéneas fue abordado de manera independiente por Carlo Somigliana [9] y Tullio Levi-Civita [6] a principios del siglo XX, llegándose a que una superficie homogénea tiene que ser un subconjunto abierto de una esfera, un cilindro, o un plano. Si bien la motivación de Levi-Civita era puramente geométrica, Somigliana estaba, por su parte, interesado en un problema de óptica geométrica: determinar los frentes de onda que permanecen estacionarios con el paso del tiempo. Esta cuestión resulta ser equivalente al estudio de las llamadas funciones isoparamétricas, cuyos conjuntos de nivel en el espacio euclídeo coinciden con las superficies con curvaturas principales constantes.

En esta memoria se pretende introducir el concepto de superficie regular homogénea y explicar cómo se procede a su clasificación, presentando esta desde un punto de vista adaptado a los conocimientos de superficies regulares explicados a lo largo del Grado en Matemáticas. Para esto, se divide el trabajo en cuatro capítulos.

En el primer capítulo se presentan algunas nociones básicas sobre el concepto de superficie regular: el espacio tangente a una superficie, los campos de vectores sobre esta y la primera forma fundamental.

En el segundo capítulo comenzamos tratando el concepto de curvatura mediante la introducción de la derivada covariante y la segunda forma fundamental en términos de la derivada usual de $\mathbb{R}^3$. Posteriormente, se introduce el *tensor curvatura de Riemann*, que nos servirá para demostrar el Teorema Egregium de Gauss sin tener que utilizar parametrizaciones, obteniendo la conocida como *ecuación de Gauss*, que relaciona la curvatura de Gauss con el tensor curvatura a través de la primeira forma fundamental.

$$R(V, W, W, V) = K(\langle V, V\rangle\langle W, W\rangle - \langle V, W\rangle^2).$$

En este capítulo se explora también la relación entre la derivada covariante y el operador forma de una superficie. Se prueba, además, la fórmula de Codazzi que será fundamental en la desmostración del resultado principal de este trabajo.

En el tercer capítulo se introduce el concepto de superficie extrínsecamente homogénea. Para esto, se recuerda de manera breve lo que son las acciones de grupos sobre un conjunto. Se estudia el grupo de isometrías del espacio euclídeo, y se introducen el plano, el cilindro y la esfera como órbitas de los grupos $\mathbb{R}^2$, $SO(2) \times \mathbb{R}$ y $SO(3)$, respectivamente, lo que demuestra que son superficies homogéneas.

Finalmente, en el capítulo cuarto se procede a la clasificación de las superficies regulares homogéneas. Para esto primeramente se prueba que la existencia de una acción isométrica sobre una superficie dada implica que los operadores forma en puntos de la misma órbita son conjugados, y por lo tanto una superficie homogénea ha de tener curvaturas principales constantes. Gracias a las ecuaciones de Gauss y Codazzi, se demuestra que el operador forma de una superficie con curvaturas principales constantes tiene o bien un único autoespacio (es decir, las curvaturas principales son iguales) o bien núcleo unidimensional. Mediante la introducción del concepto de desplazamiento normal de una superficie, se llega a la siguiente conclusión sobre superficies con curvaturas principales constantes:

- Si las dos curvaturas principales son cero, la superficie es un plano.
- Si las dos curvaturas principales son iguales y distintas de cero, la superficie está contenida en una esfera de radio $\frac{1}{\lambda}$, donde $\lambda \neq 0$ es el valor de la única curvatura principal.

- Si una curvatura principal es cero y la otra $\lambda \neq 0$, la superficie está contenida en un cilindro de radio $\frac{1}{\lambda}$.

Por lo tanto, se concluye que, en el espacio euclídeo, toda superficie regular conexa con curvaturas principales constantes es locamente isométrica a una superficie homogénea.

A lo largo de este trabajo se utilizaron como referencia los libros [5] y [3]. Otras referencias que también permiten realizar una introducción al estudio de la geometría diferencial de curvas y superficies son [1], [2], [7] y [8].

Capítulo 1

Superficies regulares en $\mathbb{R}^3$

En este capítulo hacemos una introducción a la teoría de superficies regulares en $\mathbb{R}^3$. Para ello necesitaremos algunas nociones de cálculo diferencial de varias variables; concretamente, será necesario conocer algunos hechos sobre continuidad y diferenciablidad de aplicaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, que podremos encontrar en cualquier texto estándar de cálculo diferencial avanzado como puede ser [4].

1.1. ¿Qué es una superficie?

Definición 1.1. Una superficie regular es un subconjunto no vacío $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que para cada punto $p \in S$ existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, un entorno V de p en S (con la topología relativa) y una aplicación

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{X}\colon & U \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & V \subset \mathbb{R}^3, \\ & (u,v) & \longmapsto & \mathbb{X}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{array}$$

tales que

- $\mathbb{X}(U) = V$ y $\mathbb{X}$ es diferenciable en el sentido ordinario.
- $\mathbb{X}$ es un homeomorfismo.
- Para todo $(u,v) = q \in U$, $d\mathbb{X}_q\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

La aplicación $\mathbb{X}$ se llama *carta, parametrización* o *sistema de coordenadas*. El par $(U, \mathbb{X})$ se dice una *parametrización local* de la superficie, y el entorno V se denomina *entorno coordenado*.

1.2. Aplicaciones diferenciables entre superficies. Diferencial de una aplicación

Con vistas a efectuar cálculos en superficies necesitamos definir lo que se entiende como función diferenciable en una superficie. Para ello, tendremos que llevar los objetos al plano de coordenadas mediante una parametrización cualquiera y aplicar lo que sí conocemos de cálculo elemental en varias variables.

Definición 1.2. Una aplicación $F\colon S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dice *diferenciable* en un punto $p \in S$ si para toda parametrización $(U, \mathbb{X})$ de S en p, la *lectura en coordenadas*

$$\begin{array}{rcl} \tilde{F}\colon U & \to & \mathbb{R}^n \\ (u,v) & \mapsto & F \circ \mathbb{X}(u,v), \end{array}$$

es diferenciable en $\mathbb{X}^{-1}(p)$ en el sentido ordinario.

Para ver que una aplicación entre dos superficies es diferenciable, procedemos de manera análoga al caso de una función diferenciable de S en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.3. Una aplicación $F\colon S_1 \longrightarrow S_2$ entre superficies se dice *diferenciable* en un punto $p \in S_1$ si para cualesquiera parametrizaciones $(U, \mathbb{X})$ de S_1 en p y $(V, \mathbb{Y})$ de S_2 en $F(p)$, la *expresión en coordenadas de F*,

$$\begin{array}{rcl} \tilde{F}\colon U & \to & V \\ (u,v) & \mapsto & \mathbb{Y}^{-1} \circ F \circ \mathbb{X}(u,v), \end{array}$$

es diferenciable en $\mathbb{X}^{-1}(p)$ en el sentido ordinario.

Definición 1.4. Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares. Sea $F\colon S_1 \longrightarrow S_2$ una aplicación diferenciable en $p \in S_1$. Se denomina *diferencial de F en p* a la siguiente aplicación lineal:

$$\begin{array}{rcl} dF_p\colon T_pS_1 & \to & T_{F(p)}S_2 \\ \mathbf{v} & \mapsto & dF_p\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t}(F \circ \alpha)(t)_{|t=0} = \beta'(0) \end{array}$$

donde $\alpha\colon I \longrightarrow S_1$ es una curva en S_1 con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.

1.3. El espacio tangente

Una superficie S, en cada uno de sus puntos, admite un plano tangente. En esta sección veremos que dado un punto de la superficie, el plano tangente en ese punto se construye a partir de todos los vectores velocidad de todas las curvas contenidas en la superficie que pasan en tiempo cero por dicho punto. Finalmente veremos que dicho plano tiene estructura de subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensión dos.

Definición 1.5. Una *curva diferenciable* en una superficie regular S es una aplicación diferenciable $\alpha\colon I \longrightarrow S$ donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto.

Observación 1.6. De la definición 1.1 deducimos que la aplicación $\mathbb{X}$ es un difeomorfismo de U en $\mathbb{X}(U)$, por lo que toda curva en este entorno de la superficie tiene que ser imagen de una curva en U. En otras palabras, dada $\alpha(t) \in \mathbb{X}(U)$, se tiene que existe una curva

$$\begin{array}{rcl} \hat{\alpha}\colon I & \longrightarrow & U \subset \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \hat{\alpha}(t) = (u(t), v(t)) \end{array}$$

verificando que $\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$.
La curva $\hat{\alpha}$ se denomina *expresión en coordenadas de la curva* α.

Definición 1.7. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y sea $p \in S$. Se dice que $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ es un *vector tangente a* S *en* p si existe una curva $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow S$ diferenciable tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.

Definición 1.8. Llamamos *plano tangente a la superficie* S *en un punto* $p \in S$ al conjunto de todos los vectores tangentes a S en p. Así,

$$T_pS = \{v \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} = \alpha'(0) \text{ para alguna curva } \alpha(s) \subseteq S \text{ con } \alpha(0) = p\}.$$

El plano tangente a una superficie en un punto dado es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. De hecho, dada una parametrización local $(U, \mathbb{X})$ de S y un punto $p \in \mathbb{X}(U)$ se tiene que

$$T_pS = d\mathbb{X}_{\mathbb{X}^{-1}(p)}\mathbb{R}^2. \tag{1.1}$$

Dada una parametrización $\mathbb{X}\colon U \longrightarrow V$ y un punto $(u, v) \in U$, se denominan *campos coordenados* a los siguientes campos de vectores:

$$\mathbb{X}_1(u,v) = \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial u}(u,v) = d\mathbb{X}_{(u,v)}(\mathbf{e_1}), \qquad \mathbb{X}_2(u,v) \ = \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial v}(u,v) = d\mathbb{X}_{(u,v)}(\mathbf{e_2}).$$

Por la definición de superficie, se tiene que $d\mathbb{X}_{(u,v)}$ es inyectiva, es decir, la matriz jacobiana $d\mathbb{X}(q)$ tiene rango máximo 2, lo que equivale a decir que $Im(d\mathbb{X}_q)$ es un espacio vectorial de dimensión 2 y que los vectores $\{\mathbb{X}_1(u,v), \mathbb{X}_2(u,v)\}$ son linealmente independientes. Por tanto, de (1.1) deducimos que:

$$T_pS = \langle \mathbb{X}_1(u,v), \mathbb{X}_2(u,v)\rangle.$$

Así, para cada $(u,v) \in U$, se tiene que $\{\mathbb{X}_1(u,v), X_2(u,v)\}$ es una base del espacio tangente $T_{\mathbb{X}(u,v)}S$.

1.4. Campos de vectores

Esta sección es de gran importancia ya que en ella introduciremos las nociones básicas de campos de vectores y sus derivadas, que nos permitirán realizar todas las demostraciones relevantes de este proyecto.

Definición 1.9. Un *campo de vectores diferenciable W en un abierto $U \subset S$* es una aplicación diferenciable $W: U \to \mathbb{R}^3$ tal que para todo $p \in U$, se tiene que $W(p) \equiv W_p$ es un vector de $\mathbb{R}^3$.

- W se dice un *campo de vectores tangente a S* si $W_p \in T_pS$ para todo $p \in U$.
- W se dice un *campo de vectores normal a S* si $W_p \perp T_pS$ para todo $p \in U$.

Definición 1.10. Un campo de vectores *tangente a S a lo largo de una curva $\alpha: I \to S$* es una aplicación $W: I \to \mathbb{R}^3$ tal que $W(t) \in T_{\alpha(t)}S$ para todo $s \in I$.

Definición 1.11. Sea S una superficie regular y V un campo de vectores tangente a S. Una curva $\alpha: I \to S$ se dice *curva integral de V* si para todo $t \in I$ se verifica:

$$\alpha'(t) = V_{\alpha(t)}.$$

Teorema 1.12 (Teorema de existencia de curvas integrales de un campo de vectores)**.** *Dada una superficie S y un campo de vectores V tangente a S, existe una curva $\alpha: I \to S$ tal que para todo $t \in I$, $\alpha'(t) = V_{\alpha(t)}$.*

Demostración. Sea $\mathbb{X}: U \subset S \to \mathbb{R}^2$ una parametrización de S y sea V un campo de vectores tangente a S. Como $\{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2\}$ es una base del tangente en cada punto, podemos escribir:

$$V_p = \sum_{i=1}^{2} V_i(\mathbb{X}^{-1}(p))\mathbb{X}_i(\mathbb{X}^{-1}(p)). \tag{1.2}$$

Por otro lado, por la observación 1.6, podemos escribir

$$\alpha(t) = \mathbb{X}(u_1(t), u_2(t)).$$

Así, derivando esta expresión, obtenemos

$$\alpha'(t) = \mathbb{X}_1(u_1(t), u_2(t))u_1'(t) + \mathbb{X}_2(u_1(t), u_2(t))u_2'(t). \tag{1.3}$$

Queremos demostrar que para todo $t \in I$, se verifica $\alpha'(t) = V_{\alpha(t)}$. Es decir, juntando (1.2) y (1.3), queremos demostrar que el siguiente sistema tiene solución:

$$\begin{cases} u_1'(t) = V_1(u_1(t), u_2(t)), \\ u_2'(t) = V_2(u_1(t), u_2(t)). \end{cases}$$

Aplicando el *Teorema de existencia y unicidad de soluciones del problema de valor inicial*, se deduce que el sistema anterior tiene solución única $(u_1(t), u_2(t))$. Así, para todo $p \in S$ tal que $p = \alpha(t) = \mathbb{X}(u_1(t), u_2(t))$, de la igualdad (1.3), se tiene que $V_p = V_{\alpha(t)} = \alpha'(t)$, tal y como queríamos probar. □

Definición 1.13. Una superficie S se dice *orientable* si existe un campo de vectores diferenciable, normal y unitario, N, definido globalmente en toda la superficie. Si S es una superficie orientable, la elección de un campo de vectores normal, unitario y diferenciable se denomina una *orientación* para S.

1.5. La primera forma fundamental

En esta sección nos introduciremos ya en el mundo de la *Geometría de Superficies*, es decir, veremos cómo podemos hacer mediciones sobre una superficie tal y como pueden ser medidas las longitudes de curvas, los ángulos entre dos curvas o las áreas. Ahora bien, ¿cómo se hace esto? La respuesta a esta cuestión se resuelve fácilmente si observamos que toda superficie está a su vez dentro del espacio euclídeo tridimensional, que induce de manera natural una forma de medir vectores dentro de cada plano tangente.

Dada una superficie regular S y $p \in S$, consideramos el plano tangente T_pS como un subespacio del espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$. Así, dados dos vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pS$, denotamos por $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{T_pS}$ a la restricción del producto escalar de $\mathbb{R}^3$ al espacio tangente T_pS. La forma cuadrática asociada a la forma bilineal simétrica y definida positiva $\langle \cdot, \cdot \rangle_{T_pS}$ se denomina *primera forma fundamental*, y viene dada por

$$\begin{aligned} I_p \colon T_pS &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\longmapsto I_p(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Dada una parametrización $(U, \mathbb{X})$ funciones diferenciables $g_{ij}(u,v) = \langle \mathbb{X}_i(u,v), \mathbb{X}_j(u,v) \rangle$ se denominan los *coeficientes de la primera forma fundamental* con respecto de la parametrización. Esto es debido a que con respecto de la base $\{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2\}$ de $T_{\mathbb{X}(u,v)}S$, el producto interior viene dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} g_{11}(u,v) & g_{12}(u,v) \\ g_{12}(u,v) & g_{22}(u,v) \end{pmatrix}.$$

1.6. Isometrías

Dadas dos superficies regulares, una pregunta básica es averigüar cuándo tienen la *misma geometría intrínseca*, esto es, si las medidas, relaciones y propiedades que se dan en una de las superficies, se presentan de forma idéntica en la otra. En otras palabras, queremos averiguar si existe una aplicación entre las dos superficies que conserve las propiedades métricas de ambas. Este tipo de aplicación es lo que denominaremos *isometría* y será la aplicación que dará vida a la noción de equivalencia geométrica entre dos superficies regulares.

En el capítulo uno vimos que la primera forma fundamental es la herramienta que nos permite hacer mediciones sobre una superficie y, por tanto, hablar de *geometría* en una superficie. Así, una *isometría* será una aplicación entre superficies que conserve la primera forma fundamental.

Ahora bien, esta equivalencia puede darse únicamente de *forma local*, ya que hay superficies que no llegan a ser idénticas geométricamente por no ser homeomorfas, es decir, por no tener la misma topología, lo cual hace que no sean equivalentes en propiedades muy concretas. Así, para poder encontrar una identificación total entre dos superficies es necesario que ambas sean idénticas desde el punto de vista métrico. Haremos pues una distinción entre lo *local* y lo *global*:

Definición 1.14. Una aplicación diferenciable $F\colon S_1 \longrightarrow S_2$ entre superficies se dice que es una *isometría local* si su diferencial $dF_p\colon T_pS_1 \longrightarrow T_{\phi(p)}S_2$ es una isometría lineal para todo $p \in S_1$. Es decir, F es una isometría local si para cualesquiera $p \in S_1$ y $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pS_1$,

$$\langle dF_p(\mathbf{v}), dF_p(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle.$$

Las isometrías locales conservan ángulos y longitudes en cada espacio tangente.

Definición 1.15. Una isometría local $F\colon S_1 \longrightarrow S_2$ se denomina *isometría (global)* si tiene inversa diferenciable, y necesariamente, F^-1 es una isometría. Dos superficies se dicen isométricas si existe una isometría entre ellas.

Por tanto, dos superficies regulares que son *(globalmente) isométricas* serán iguales desde el punto de vista topólogico, diferenciable y métrico. Desde luego, existen superficies localmente isométricas que no lo son globalmente. Por ejemplo, el cilindro menos una recta es homeomorfo al plano, pero siguen siendo geométricamente diferentes.

Capítulo 2

Curvatura

En este capítulo trataremos el concepto de curvatura de una superficie. Para ello, comenzamos introduciendo el concepto de *derivada covariante*, que nos permitirá hablar de derivación intríseca en la superficie, es decir, cómo varía un campo de vectores desde el punto de vista de los habitantes de la superficie, desconocedores del espacio $\mathbb{R}^3$. La derivada covariante nos permitirá caracterizar las llamadas *curvas geodésicas*, importantes para la determinación de ciertas superficies homogéneas y nos permitirá introducir el concepto de *segunda forma fundamental*, que es el objeto que nos va a permitir estudiar la relación que existe entre una superficie y el espacio en el que está contenida. Veremos que se trata una forma bilineal simétrica cuyo operador autoadjunto asociado, el *operador forma*, será el que nos permitirá hablar de las curvaturas principales de una superficie, que determinarán finalmente su *curvatura de Gauss* y su *curvatura media*. Por otro lado, definiremos el concepto de *tensor de curvatura de Riemann*, a través del cual enunciaremos la llamada *ecuación de Gauss*, que junto con la *Ecuación de Codazzi*, constituyen las dos ecuaciones más importantes de este trabajo.

2.1. Derivada covariante y segunda forma fundamental

Sea S una superficie regular y W un campo de vectores tangentes sobre S. Sea $p \in S$ y $v \in T_pS$. En general, si calculamos la derivada direccional en p del campo W en la dirección de v, el resultado no tiene por que ser un vector tangente a S en p, si no que en general $(D_vW)_p$ pertenece a $\mathbb{R}^3$. Así, para cada $p \in S$, podemos descomponer el vector D_vW en su parte tangente a S y su parte normal,

$$D_vW = [D_vW]^\top + [D_vW]^\perp .$$

Siguiendo la notación anterior, podemos introducir las siguientes definiciones:

Definición 2.1. Se define la *derivada covariante de W en $p \in S$ con respecto de v*, ∇_vW, como el vector proyección de D_vW en T_pS:

$$\nabla_v W := [D_v W]^{\top}.$$

Más específicamente,

Proposición 2.2. *Sea S una superficie, p un punto de S y $v \in T_pS$. Sea W un campo de vectores tangentes a S. Entonces, para cualquier curva $\alpha\colon I \to S$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$*

$$\nabla_v W := \left(\frac{\partial}{\partial t} W \circ \alpha(t)_{|t=0}\right)^{\top}.$$

Por lo tanto, la derivada covariante es un operador local *(es decir, sólo depende del valor de W en un entorno de p).*

Definición 2.3. Dados V y W campos de vectores tangentes sobre S, se define la *derivada covariante de W con respecto de V*, $\nabla_V W$, como el campo de vectores (diferenciable) dado por

$$(\nabla_V W)_p = \nabla_{V_p} W.$$

para cualquier $p \in S$.

Definición 2.4. Se define la *segunda forma fundamental de V y W en un punto $p \in S$*, $\mathbb{II}(V, W)_p$, como la parte normal del vector $D_{V_p}W$:

$$\mathbb{II}(V, W)_p = \left[D_{V_p} W\right]^{\perp}.$$

Definición 2.5. Dada una función diferenciable $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}$ y un campo de vectores V en S, se define la *derivada direccional de f en la dirección de V en un punto $p \in S$* como

$$(Vf)(p) \equiv V_p f = D_V f(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)_{|t=0},$$

donde α es una curva en S con condiciones iniciales p y $\mathbf{v}$.

Definición 2.6. Sea $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, sean V y W dos campos de vectores tangentes sobre S y sea $p \in S$. Se define el *corchete de Lie* como el único campo de vectores que verifica:

$$[V, W]_p f = V_p(Wf) - W_p(Vf).$$

Observación 2.7. Dados dos campos de vectores tangentes a la superficie V y W con coordenadas en el espacio tangente, $V = \sum_{i=1}^{n} V_i \mathbb{X}_i$, $W = \sum_{i=1}^{n} W_i \mathbb{X}_i$ y, su corchete de Lie es

$$[V, W] = \sum_{k,i} \left(V_i \frac{\partial W_k}{\partial u_i} - W_i \frac{\partial V_k}{\partial u_i}\right) \mathbb{X}_k.$$

Definición 2.8. El *símbolo de Christoffel* Γ_{ij}^k, es la componentes k-ésima de la derivada covariante del campo coordenado $\mathbb{X}_j$ con respecto de $\mathbb{X}_i$, esto es,

$$\nabla_{\mathbb{X}_i}\mathbb{X}_j = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \mathbb{X}_k. \tag{2.1}$$

Observación 2.9. De $\nabla_{\mathbb{X}_i}\mathbb{X}_j = \nabla_{\mathbb{X}_j}\mathbb{X}_i$, se sigue lo siguiente:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \tag{2.2}$$

Proposición 2.10 (**Propiedades de la derivada covariante**)**.** *Sean U, V, W campos de vectores tangentes a una superficie S. Sean $f, g\colon S \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables y sean $a, b \in \mathbb{R}$. La derivada covariante de S verifica*

1. $\nabla_{fU+gV}W = f\,\nabla_U W + g\,\nabla_V W.$

2. $\nabla_U(aV + bW) = a\,\nabla_U V + b\,\nabla_U W.$

3. $\nabla_V(fW) = (Vf)W + f\,\nabla_V W.$

4. $U\langle V, W\rangle = \langle \nabla_U V, W\rangle + \langle V, \nabla_U W\rangle.$

5. $\nabla_V W - \nabla_W V = [V, W].$

Demostración. Las propiedades 1, 2 y 3 se deben a la linealidad del operador derivada y a la Regla de Leibniz. La propiedad 4 se sigue de que $U\langle V, W\rangle = D_U\langle V, W\rangle = \langle D_U V, W\rangle + \langle V, D_U W\rangle = \langle \nabla_U V, W\rangle + \langle V, \nabla_U W\rangle$ ya que V y W son tangentes a la superficie. Por último,

$$\begin{aligned}
\nabla_V W - \nabla_W V &= \nabla_{\sum V_i \mathbb{X}_i} \sum W_j \mathbb{X}_j - \nabla_{\sum W_j \mathbb{X}_j} \sum V_i \mathbb{X}_i \\
&= \sum V_i \left[\nabla_{\mathbb{X}_i}\left(\sum W_j \mathbb{X}_j\right)\right] - \sum W_j \left[\nabla_{\mathbb{X}_j}\left(\sum V_i \mathbb{X}_i\right)\right] \\
&= \sum_{i,j} V_i \left[\left(\mathbb{X}_i W_j\right)\mathbb{X}_j + W_j \nabla_{\mathbb{X}_i}\mathbb{X}_j\right] - \sum_{i,j} W_j \left[\left(\mathbb{X}_j V_i\right)\mathbb{X}_i + V_i \nabla_{\mathbb{X}_j}\mathbb{X}_i\right] \\
&\underset{(2.1)}{\underset{\uparrow}{=}} \sum_{i,j} V_i \left(\frac{\partial W_j}{\partial u_i}\mathbb{X}_j\right) + \sum_{i,j,k} V_i W_j \Gamma_{ij}^k \mathbb{X}_k - \sum_{i,j} W_j \left(\frac{\partial V_i}{\partial u_j}\mathbb{X}_i\right) - \sum_{i,j,k} W_j V_i \Gamma_{ji}^k \mathbb{X}_k \\
&= \sum_{i,k} V_i \left(\frac{\partial W_k}{\partial u_i}\mathbb{X}_k\right) + \sum_{i,j,k} V_i W_j \Gamma_{ij}^k \mathbb{X}_k - \sum_{j,k} W_j \left(\frac{\partial V_k}{\partial u_j}\mathbb{X}_k\right) - \sum_{i,j,k} W_j V_i \Gamma_{ji}^k \mathbb{X}_k \\
&\underset{(2.2)}{\underset{\uparrow}{=}} \sum_k \left(\sum_i V_i \frac{\partial W_k}{\partial u_i} - \sum_j W_j \frac{\partial V_k}{\partial u_j}\right)\mathbb{X}_k = \sum_{k,i}\left(V_i \frac{\partial W_k}{\partial u_i} - W_i \frac{\partial V_k}{\partial u_i}\right)\mathbb{X}_k = [V, W],
\end{aligned}$$

de donde se sigue 5. $\square$

2.2. Transporte paralelo y curvas geodésicas

Definición 2.11. Sea S una superficie orientada y sea V un campo de vectores tangente a S a lo largo de una curva $\alpha(s)$. Se define la *derivada covariante de V a lo largo de la curva α* como el campo de vectores tangentes a S a lo largo de α dado por

$$\nabla_{\alpha'(t)}V = [\frac{\partial}{\partial s}V \circ \alpha(s)]^{\top}.$$

Se dice que V es un *campo de vectores paralelo* a lo largo de α si $\nabla_{\alpha'(t)}V$=0.

En el siguiente teorema veremos que todo campo paralelo queda totalmente determinado por su valor en un punto arbitrario de la curva sobre la que está definido. Su demostración podemos consultarla en [5, teorema 5.1.6].

Teorema 2.12 (Existencia y unicidad de campos paralelos). *Sea $\alpha\colon I \longrightarrow S$ una curva parametrizada en una superficie regular S, y sea $V_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$ para un cierto $t_0 \in I$. Entonces, existe un único campo de vectores paralelo V a lo largo de α tal que $V(t_0) = V_0$.*

Siguiendo la notación anterior, si α es una curva en S y V_0 un vector tangente a S en $\alpha(t_0)$, se define el *transporte paralelo de V_0 a lo largo de α en el punto $\alpha(t_1)$* como el vector $V(\alpha(t_1)) \in T_{\alpha(t_1)}S$, donde V es el único campo de vectores paralelo a lo largo de α con $V(0) = V_0$. Denotamos la aplicación *transporte paralelo* de $p = \alpha(t_0)$ a $q = \alpha(t_1)$ a lo largo de α como

$$\begin{aligned} P_{t_0}^{t_1}(\alpha)\colon T_pS &\longrightarrow T_qS \\ V_0 &\longmapsto P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(V_0) = V_1. \end{aligned}$$

La aplicación transporte paralelo $P_{t_0}^{t_1}(\alpha)\colon T_pS \longrightarrow T_qS$ definida de esta manera resulta ser una isometría lineal.

Para finalizar con esta sección, introduciremos un tipo de curvas muy importantes en superficies, que jugarán el papel de las rectas en el plano.

Definición 2.13. Sea $\gamma\colon I \longrightarrow S$ una curva parametrizada en una superficie regular S. Se dice que γ es una *geodésica (parametrizada)* de S si su campo de vectores velocidad es paralelo, es decir, $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma = \mathbf{0}$.

Si tenemos un sistema de coordenadas $\mathbb{X}\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ y escribimos $\gamma(t) = \mathbb{X}(u_1(t), u_2(t))$, entonces

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \sum_k \left(u_k'' + \sum_{i,j} u_i' u_j' \Gamma_{ij}^k \right) \mathbb{X}_k.$$

En consecuencia, γ es una geodésica si y solo si, localmente, satisface la ecuación diferencial $u_k'' + \sum_{i,j} u_i' u_j' \Gamma_{ij}^k = 0$, $k = 1, 2$. El teorema de existencia y unicidad de solución para problemas de valor inicial asegura la existencia y unicidad de una geodésica fijado el punto y la velocidad inicial.

Observación 2.14. Las geodésicas se conservan por isometrías locales ya que solo dependen de la derivada covariante y, por tanto, de los símbolos de Christoffel (véase el teorema 2.31 y la observación 2.32). El concepto de geodésica es un concepto intrínseco a la superficie.

2.3. El tensor curvatura de Riemann

Definición 2.15. Sean X, Y, V y W campos de vectores tangentes a la superficie. Se define el *tensor de curvatura de Riemann* como la aplicación

$$R(X,Y,V,W) = \langle \nabla_X \nabla_Y V - \nabla_Y \nabla_X V - \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X} V,\, W\rangle.$$

Proposición 2.16 (Simetrías del tensor curvatura). *El tensor de curvatura de Riemann verifica*

1. R *es* $\mathbb{R}$*-multilineal.*
2. $R(fX,Y,V,W) = R(X,fY,V,W) = R(X,Y,fV,W) = R(X,Y,V,fW) = fR(X,Y,V,W)$.
3. $R(Y,X,V,W) = R(X,Y,W,V) = -R(X,Y,V,W)$.
4. $R(V,W,X,Y) = R(X,Y,V,W)$.
5. $R(X,Y,V,W) + R(Y,V,X,W) + R(V,X,Y,W) = 0$ *(Primera identidad de Bianchi).*

Demostración.

1. Es consecuencia de la linealidad de ∇.
2. Utilizando las propiedades de la derivada covariante presentadas en la Proposición 2.10,

$$\begin{aligned} R(fX,Y,V,W) &= \langle \nabla_{fX}\nabla_Y V - \nabla_Y \nabla_{fX} V - \nabla_{\nabla_{fX}Y - \nabla_Y fX} V,\, W\rangle \\ &= \langle f\nabla_X\nabla_Y V - \nabla_Y(f\nabla_X V) - \nabla_{f\nabla_X Y - (Yf)X - f\nabla_Y X} V,\, W\rangle \\ &= \langle f\nabla_X\nabla_Y V - (Yf)\nabla_X V - f\nabla_Y\nabla_X V - f\nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X} V + (Yf)\nabla_X V,\, W\rangle \\ &= f\langle \nabla_X\nabla_Y V - \nabla_Y\nabla_X V - \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X} V,\, W\rangle = fR(X,Y,V,W). \end{aligned}$$

   El resto de las igualdades se siguen de manera similar.
3. La primera igualdad es consecuencia de la definición 2.15 y la segunda igualdad se debe a la propiedad 4 del teorema 2.10.
4. Se sigue de (3) y (5).
5. Se puede probar en coordenadas y empleando $\nabla_{\mathbb{X}_i}\mathbb{X}_j = \nabla_{\mathbb{X}_j}\mathbb{X}_i$. $\square$

2.4. El operador forma

Recordemos que la segunda forma fundamental de una superficie S viene dada por

$$\mathbb{II}_p(V,W) = \left[D_{V_p}W\right]^{\perp}.$$

para dos campos de vectores tangentes V, W sobre S.

Supongamos ahora que S es una superficie regular orientada por un campo normal unitario $N\colon S \longrightarrow \mathbb{R}^3$. En cada punto $p \in S$, podemos escribir

$$\mathbb{II}_p(V,W) = h_p(V,W)N_p,$$

siendo $h_p\colon T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ una aplicación bilinear, como veremos en la Proposión 2.19.

La aplicación anterior se denomina *segunda forma fundamental de* S. Como $N_p = N(p)$ es un vector normal unitario en cada punto, dicha aplicación vendrá definida como:

$$h_p(V,W) = \langle \mathbb{II}_p(V,W), N_p\rangle.$$

Sea $(U,\mathbb{X})$ una parametrización local de S. Se denotan por L_{ij} a los *coeficientes de la segunda forma fundamental* con respecto de la parametrización $(U,\mathbb{X})$ a las siguientes funciones diferenciables:

$$L_{ij}(u,v) = h_p(\mathbb{X}_i(u,v), \mathbb{X}_j(u,v)).$$

Proposición 2.17. *Para todo $p \in S$, la segunda forma fundamental h_p es una forma bilineal simétrica.*

Demostración. Veamos que la aplicación es simétrica. Para V y W dos campos de vectores tangentes a S, se tiene:

$$h_p(V,W) = \langle \mathbb{II}_p(V,W), N_p\rangle = \langle \left[D_{V_p}W\right]^{\perp}, N_p\rangle = \langle D_{V_p}W, N_p\rangle \tag{2.3}$$

Ahora, sabiendo que

$$[V,W]_p = D_{W_p}V - D_{V_p}W,$$

y que el corchete de Lie es un vector tangente a S por la observación 2.7, se sigue de (2.3):

$$\begin{aligned}\langle D_{V_p}W, N_p\rangle &= \langle D_{W_p}V - [V,W]_p, N_p\rangle = \langle D_{W_p}V, N_p\rangle \\ &= \langle \left[D_{W_p}V\right]^{\perp}, N_p\rangle = \langle \mathbb{II}_p(W,V), N_p\rangle = h_p(W,V).\end{aligned}$$

Como V y W fueron escogidos arbitrariamente, se sigue que para todo $p \in S$, la aplicación h_p es simétrica.

Veamos ahora que la aplicación es bilineal. Demostraremos que es lineal en la primera componente ya que la demostración para la segunda componente se sigue de la simetría. Sean así $f, g\colon S \to \mathbb{R}$ aplicaciones diferenciables y sean U, V y W campos de vectores tangentes a S. Veamos que $h_p(fU + gV, W) = f(p)h_p(U, W) + g(p)h_p(V, W)$ utilizando que la derivada de un campo de vectores tangente en la dirección de un vector es lineal:

$$\begin{aligned}
h_p(fU + gV, W) &= \langle \mathbb{II}_p(fU + gV, W), N_p\rangle = \left\langle \left[D_{f(p)U_p+g(p)V_p}W\right]^{\perp}, N_p\right\rangle = \langle D_{f(p)U_p+g(p)V_p}W, N_p\rangle \\
&= \langle f(p)D_{U_p}W + g(p)D_{V_p}W, N_p\rangle = f(p)\langle D_{U_p}W, N_p\rangle + g(p)\langle D_{V_p}W, N_p\rangle \\
&= f(p)\left\langle \left[D_{U_p}W\right]^{\perp}, N_p\right\rangle + g(p)\left\langle \left[D_{V_p}W\right]^{\perp}, N_p\right\rangle \\
&= f(p)\langle \mathbb{II}_p(U, W), N_p\rangle + g(p)\langle \mathbb{II}_p(V, W), N_p\rangle \\
&= f(p)h_p(U, W) + g(p)h_p(V, W),
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

Definición 2.18. El operador autoadjunto asociado a la segunda forma fundamental h_p se denomina *operador forma* o *operador configuración* de S en p con respecto de N, se denota por $A_p\colon T_pS \to T_pS$ y viene definido por

$$\langle A_pV_p, W_p\rangle = h_p(V, W),$$

siendo V, W campos tangentes a S.

Se sigue de la proposición anterior que A_p es un operador autoadjunto para todo $p \in S$, por lo que diagonaliza con autovalores reales en una base ortonormal de T_pS.

Definición 2.19. Cada uno de los autovalores de A se denomina una *curvatura principal* de S, y las denotaremos por $\kappa_1(p)$ y $\kappa_2(p)$. Los autovectores corresponcientes se llaman *direcciones principales* de S en p.

Una *línea de curvatura* es una curva $\alpha(t) \subset S$ tal que para cada s, $\alpha'(t)$ es una dirección principal.

Como N es un campo de vectores unitario, podemos verlo como una aplicación diferenciable de S que toma valores en la esfera unidad:

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Definición 2.20. La aplicación $N\colon S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ se denomina *aplicación de Gauss de S*. Su imagen, $Im(N) = N(S) \subset \mathbb{S}^2$ es la *imagen esférica de S*, esto es, el conjunto de direcciones que son normales a la superficie S.

Más que la propia aplicación N, nos interesa ver cómo varía esta conforme nos movemos por S, ya que esto nos va a decir cómo se "dobla" la superficie en todas las direcciones. Esto lo podemos hacer a través del estudio de la *diferencial de la aplicación de Gauss*:

$$\begin{aligned} dN_p \colon T_pS &\longrightarrow T_{N(p)}\mathbb{S}^2 \\ \mathbf{v} &\longmapsto dN_p(\mathbf{v}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (N \circ \alpha)(t) \end{aligned}$$

siendo α una curva con condiciones iniciales p y $\mathbf{v}$.

Observación 2.21. Para cualquier $p' \in \mathbb{S}^2$, se tiene que $N(p') = \pm p'$, por lo que $T_{p'}\mathbb{S}^2 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \langle p', \mathbf{v}\rangle = 0\}$. Por tanto:

$$T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \langle N(p), \mathbf{v}\rangle = 0\} = T_pS$$

Por tanto, podemos ver la diferencial de la aplicación de Gauss como el endomorfismo del plano tangente $dN_p \colon T_pS \longrightarrow T_pS$.

Proposición 2.22. *Sea S una superficie regular orientada por la aplicación de Gauss N. Entonces, se verifica:*

$$A_p = -dN_p.$$

Demostración. Sean $p \in S$ y V, W campos de vectores tangentes a S. Entonces,

$$\langle A_pV, W_p\rangle = h_p(V, W) = \langle \mathbb{II}_p(V, W), N_p\rangle = \langle [D_{V_p}W]^\perp, N_p\rangle = \langle D_{V_p}W, N_p\rangle$$

Como $\langle W, N\rangle = 0$, se tiene $0 = V\langle W, N\rangle = \langle D_VW, N\rangle + \langle W, D_VN\rangle$. Por tanto,

$$\langle D_{V_p}W, N_p\rangle = -\langle W_p, D_{V_p}N\rangle = -\langle dN_p(V), W_p\rangle.$$

Como W es arbitrario, se deduce el resultado. □

Sea $p \in S$ y consideremos el operador forma en p: $A_p = -dN_p \colon T_pS \longrightarrow T_pS$. Dado X un campo tangente a S, denotamos por:

$$(AX)(p) := A_pX_p = -dN_p(X_p) = -D_{X_p}N.$$

Recordemos que el operador forma es lineal y autoadjunto. Así, dados dos campos tangentes a la superficie V y W, se tiene:

$$\langle AV, W\rangle = \langle AW, V\rangle.$$

Se verifica:

$$\langle A\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j\rangle = -\langle dN(\mathbb{X}_i), \mathbb{X}_j\rangle = -\langle \frac{\partial N}{\partial U_i}, \mathbb{X}_j\rangle = \langle N, \mathbb{X}_{ij}\rangle = L_{ij}.$$

Definición 2.23. Sea A el operador forma y sean V, W campos tangentes a S. Definimos la *derivada covariante del operador forma A con respecto de V* como:

$$(\nabla_V A)W := \nabla_V(AW) - A(\nabla_V W). \tag{2.4}$$

Proposición 2.24. *Sea S una superficie regular, U, V, W campos tangentes a S y $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Se verifica:*

1. $(\nabla_{aU+bV} A)W = a(\nabla_U A)W + b(\nabla_V A)W$.
2. $(\nabla_U A)(aV + bW) = a(\nabla_U A)V + b(\nabla_U A)W$.
3. $(\nabla_{fV} A)(W) = \nabla_V(A)(fW) = f(\nabla_V A)W$.

Demostración. Las propiedades 1 y 2 se deducen fácilmente de las propiedades de ∇ y de A. Veamos la última propiedad:

Por un lado, aplicando la propiedad 1, se tiene:

$$(\nabla_{fV} A)(W) = \nabla_{fV}(AW) - A(\nabla_{fV} W) = f\nabla_V(AW) - fA(\nabla_V W) = f(\nabla_V A)W.$$

Por otro lado, aplicando la propiedad 2, se tiene:

$$\begin{aligned}(\nabla_V A)(fW) &= \nabla_V(A(fW)) - A(\nabla_V(fW)) = \nabla_V(fAW) - A((Vf)W + f\nabla_V W) \\ &= (Vf)AW + f\nabla_V(AW) - (Vf)AW - fA\nabla_V W \underset{(2.4)}{=} f(\nabla_V A)W,\end{aligned}$$

como queríamos probar. □

Corolario 2.25. *Sea $(U, \mathbb{X})$ una parametrización de S. Sean $V = \sum V_i \mathbb{X}_i$ y $W = \sum W_j \mathbb{X}_j$. Entonces:*

$$(\nabla_V A)(W) = \sum_{i,j} V_i W_j (\nabla_{\mathbb{X}_i} A)\mathbb{X}_j.$$

Demostración. Se sigue de la proposición 2.24. □

2.5. Curvatura de Gauss y curvatura media

Definición 2.26. Sea S una superficie regular orientada, la *curvatura media* de S en p es el valor

$$H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A_p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}.$$

La *curvatura de Gauss* de S en p es el valor

$$K(p) = \det(A_p) = k_1(p)k_2(p).$$

Observación 2.27. La curvatura de Gauss no depende de la orientación escogida para la superficie. La curvatura media cambia de signo al cambiar la orientación.

2.6. Las ecuaciones de Gauss y Codazzi

En esta sección demostraremos dos ecuaciones muy importantes que utilizaremos en el último capítulo para demostrar los resultados principales del proyecto. En la primera parte de la sección veremos que la curvatura de Gauss es un concepto intrínseco a la superficie, es decir, que depende única y exclusivamente de la primera forma fundamental. Para ello veremos primero que los símbolos de Christoffel solo dependen de los coeficientes de la primera forma fundamental y sus derivadas y que, por tanto, la derivada covariante también. Con todo esto llegaremos a la *ecuación de Gauss*, que nos proporciona una expresión de la curvatura de Gauss que depende solo de la primera forma fundamental. Por último, enunciaremos un resultado fundamental de la geometría de superficies en el espacio, el *Teorema Egregium de Gauss*, que afirma que si dos superficies son localmente isométricas, entonces presentan la misma curvatura de Gauss en puntos correspondientes. En la la segunda parte de la sección demostraremos la *ecuación de Codazzi*, que como hemos dicho, será de gran relevancia en el último capítulo.

2.6.1. Ecuación de Gauss

Teorema 2.28. *Los símbolos de Christoffel solo dependen de los coeficientes de la primera forma fundamental y de sus derivadas.*

Demostración. Sea S una superficie regular orientada por N y sea $(U, \mathbb{X})$ una parametrización de S tal que la base $\{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, N\}$ es una base positivamente orientada de $\mathbb{R}^3$. En primer lugar, expresemos las derivadas de los elementos de la base en función de la propia base.
Expresando los vectores $\mathbb{X}_{11}, \mathbb{X}_{12}, \mathbb{X}_{21}, \mathbb{X}_{22}$ en función de la base $\{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, N\}$, obtenemos:

$$\begin{cases} \mathbb{X}_{11} = \Gamma_{11}^1 \mathbb{X}_1 + \Gamma_{11}^2 \mathbb{X}_2 + L_1 N, \\ \mathbb{X}_{12} = \Gamma_{12}^1 \mathbb{X}_1 + \Gamma_{12}^2 \mathbb{X}_2 + L_2 N, \\ \mathbb{X}_{21} = \Gamma_{21}^1 \mathbb{X}_1 + \Gamma_{21}^2 \mathbb{X}_2 + L_3 N, \\ \mathbb{X}_{22} = \Gamma_{22}^1 \mathbb{X}_1 + \Gamma_{22}^2 \mathbb{X}_2 + L_4 N. \end{cases}$$

donde los coeficientes Γ_{ij}^k con $i, j, k \in \{1, 2\}$ son los símbolos de Christoffel, que variarán según la parametrización dada. Aplicando que $L_i = L_i \langle N, N \rangle$ para $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, hacemos el producto escalar $\langle \mathbb{X}_{ij}, N \rangle$. Utilizando que

$$L_{ij} = \langle \mathbb{X}_{ij}, N \rangle = -\langle N_i, \mathbb{X}_j \rangle,$$

siendo L_{ij} los coeficientes de la segunda forma fundamental, obtenemos las siguientes relaciones, denominadas *fórmulas de Gauss*:

$$\begin{cases} \mathbb{X}_{11} = \Gamma_{11}^1 \mathbb{X}_1 + \Gamma_{11}^2 \mathbb{X}_2 + L_{11}N, \\ \mathbb{X}_{12} = \Gamma_{12}^1 \mathbb{X}_1 + \Gamma_{12}^2 \mathbb{X}_2 + L_{12}N, \\ \mathbb{X}_{21} = \Gamma_{21}^1 \mathbb{X}_1 + \Gamma_{21}^2 \mathbb{X}_2 + L_{12}N, \\ \mathbb{X}_{22} = \Gamma_{22}^1 \mathbb{X}_1 + \Gamma_{22}^2 \mathbb{X}_2 + L_{22}N. \end{cases}$$

De manera más sintética, podemos escribir

$$D_{\mathbb{X}_j} \mathbb{X}_i = \mathbb{X}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbb{X}_k + L_{ij}N.$$

Veamos pues que los símbolos de Christoffel dependen exclusivamente de la primera forma fundamental:

Por un lado, derivando los coeficientes de la primera forma fundamental g_{11}, g_{12}, g_{22} respecto de u y v obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{11}}{\partial u} = 2\langle \mathbb{X}_{11}, \mathbb{X}_1 \rangle &\Longrightarrow \langle \mathbb{X}_{11}, \mathbb{X}_1 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u}, \\ \frac{\partial g_{12}}{\partial u} = \langle \mathbb{X}_{11}, \mathbb{X}_2 \rangle + \langle \mathbb{X}_1, \mathbb{X}_{21} \rangle &\Longrightarrow \langle \mathbb{X}_{11}, \mathbb{X}_2 \rangle = \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial v}, \\ \frac{\partial g_{11}}{\partial v} = 2\langle \mathbb{X}_{12}, \mathbb{X}_1 \rangle &\Longrightarrow \langle \mathbb{X}_{12}, \mathbb{X}_1 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial v}, \\ \frac{\partial g_{22}}{\partial u} = 2\langle \mathbb{X}_{21}, \mathbb{X}_2 \rangle = 2\langle \mathbb{X}_{12}, \mathbb{X}_2 \rangle &\Longrightarrow \langle \mathbb{X}_{12}, \mathbb{X}_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u}, \\ \frac{\partial g_{12}}{\partial v} = \langle \mathbb{X}_{12}, \mathbb{X}_2 \rangle + \langle \mathbb{X}_1, \mathbb{X}_{22} \rangle &\Longrightarrow \langle \mathbb{X}_{22}, \mathbb{X}_1 \rangle = \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u}, \\ \frac{\partial g_{22}}{\partial v} = 2\langle \mathbb{X}_{22}, \mathbb{X}_2 \rangle &\Longrightarrow \langle \mathbb{X}_{22}, \mathbb{X}_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial v}. \end{aligned}$$

Por otro lado, multiplicando escalarmente las expresiones

$$\nabla_{\mathbb{X}_i} \mathbb{X}_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbb{X}_K$$

por $\mathbb{X}_1$ y $\mathbb{X}_2$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{X}_{11}, \mathbb{X}_1 \rangle &= \Gamma_{11}^1 g_{11} + \Gamma_{11}^2 g_{12}, \\ \langle \mathbb{X}_{11}, \mathbb{X}_2 \rangle &= \Gamma_{11}^1 g_{12} + \Gamma_{11}^2 g_{22}, \\ \langle \mathbb{X}_{12}, \mathbb{X}_1 \rangle &= \Gamma_{12}^1 g_{11} + \Gamma_{12}^2 g_{12}, \\ \langle \mathbb{X}_{12}, \mathbb{X}_2 \rangle &= \Gamma_{12}^1 g_{12} + \Gamma_{22}^2 g_{12}, \\ \langle \mathbb{X}_{22}, \mathbb{X}_1 \rangle &= \Gamma_{22}^1 g_{11} + \Gamma_{22}^2 g_{12}, \\ \langle \mathbb{X}_{22}, \mathbb{X}_2 \rangle &= \Gamma_{22}^1 g_{12} + \Gamma_{22}^2 g_{22}. \end{aligned}$$

Así, los símbolos de Christoffel son solución de un sistema lineal de seis ecuaciones con seis incógnitas que dependen exclusivamente de la primera forma fundamental:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 g_{11} + \Gamma_{11}^2 g_{12} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u}, \\[2ex] \Gamma_{11}^1 g_{12} + \Gamma_{11}^2 g_{22} = \dfrac{\partial g_{12}}{\partial u} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial v}, \\[2ex] \Gamma_{12}^1 g_{11} + \Gamma_{12}^2 g_{12} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial v}, \\[2ex] \Gamma_{12}^1 g_{12} + \Gamma_{22}^2 g_{12} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u}, \\[2ex] \Gamma_{22}^1 g_{11} + \Gamma_{22}^2 g_{12} = \dfrac{\partial g_{12}}{\partial v} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u}, \\[2ex] \Gamma_{22}^1 g_{12} + \Gamma_{22}^2 g_{22} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{22}}{\partial v}. \end{cases}$$

Podemos escribir la solución a este sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u} & \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial v} & \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u} \\ \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial v} & \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u} & \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Esto prueba que los símbolos de Christoffel dependen solamente de la primeira forma fundamental y de sus derivadas. □

Observación 2.29. De una manera más compacta, podemos escribir:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l}\right).$$

Proposición 2.30. *La derivada covariante ∇ solo depende de la primera forma fundamental.*

Demostración. Se sigue del teorema 2.28 y de la definición 2.1. □

Teorema 2.31 (Ecuación de Gauss). *Sea S una superficie regular orientada y sea $p \in S$. Sea $K(p)$ la curvatura de Gauss de S en p. Se verifica:*

$$K = \frac{R(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_1)}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Demostración. Comencemos aplicando la definición de tensor de curvatura de Riemann evaluado en los campos coordenados $\mathbb{X}_i$ y utilizando la definición de derivada covariante. Recordemos que

$\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$ son tangentes a la superficie y que $L_{ij} = \langle \mathbb{X}_{ij}, N\rangle$. También utilizaremos el *Lema de Schwarz*, que afirma que $\mathbb{X}_{ij} = \mathbb{X}_{ji}$, y el hecho de que N es ortogonal a $\mathbb{X}_1$, de lo que se deduce:

$$\langle N, \mathbb{X}_1\rangle = 0 \Rightarrow D_{\mathbb{X}_i}\langle N, \mathbb{X}_1\rangle = 0 \Rightarrow \langle D_{\mathbb{X}_i}N, \mathbb{X}_1\rangle + \langle N, D_{\mathbb{X}_i}\mathbb{X}_1\rangle = 0,$$

para $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned}
R(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_1) &= \langle \nabla_{\mathbb{X}_1}\nabla_{\mathbb{X}_2}\mathbb{X}_2 - \nabla_{\mathbb{X}_2}\nabla_{\mathbb{X}_1}\mathbb{X}_2,\ \mathbb{X}_1\rangle \\
&= \langle D_{\mathbb{X}_1}\nabla_{\mathbb{X}_2}\mathbb{X}_2 - D_{\mathbb{X}_2}\nabla_{\mathbb{X}_1}\mathbb{X}_2,\ \mathbb{X}_1\rangle \\
&= \langle D_{\mathbb{X}_1}(D_{\mathbb{X}_2}\mathbb{X}_2 - \langle D_{\mathbb{X}_2}\mathbb{X}_2, N\rangle N) - D_{\mathbb{X}_2}(D_{\mathbb{X}_1}\mathbb{X}_2 - \langle D_{\mathbb{X}_1}\mathbb{X}_2, N\rangle N),\ \mathbb{X}_1\rangle \\
&= \langle \mathbb{X}_{221} - D_{\mathbb{X}_1}(L_{22}N) - \mathbb{X}_{212} + D_{\mathbb{X}_2}(L_{12}N),\ \mathbb{X}_1\rangle \\
&= \langle -D_{\mathbb{X}_1}(L_{22})N - L_{22}D_{\mathbb{X}_1}N + D_{\mathbb{X}_2}(L_{12})N + L_{12}D_{\mathbb{X}_2}N,\ \mathbb{X}_1\rangle \\
&= -L_{22}\langle D_{\mathbb{X}_1}N, \mathbb{X}_1\rangle + L_{12}\langle D_{\mathbb{X}_2}N, \mathbb{X}_1\rangle \\
&= L_{22}\langle N, D_{\mathbb{X}_1}\mathbb{X}_1\rangle - L_{12}\langle N, D_{\mathbb{X}_2}\mathbb{X}_1\rangle \\
&= L_{22}\langle N, \mathbb{X}_{11}\rangle - L_{12}\langle N, \mathbb{X}_{12}\rangle \\
&= L_{11}L_{22} - L_{12}^2 = K(g_{11}g_{22} - g_{12}^2).
\end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que

$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

En efecto, recordemos que la diferencial de la aplicación de Gauss es un endomorfismo del espacio tangente $dN_p\colon T_pS \to T_pS$. Así, la matriz asociada a la diferencial respecto de la base $\{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2\}$ es:

$$dN_p \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Se puede comprobar [5], que:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{L_{12}g_{12} - L_{11}g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, & a_{12} &= \frac{L_{22}g_{12} - L_{12}g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \\
a_{21} &= \frac{L_{11}g_{12} - L_{12}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, & a_{22} &= \frac{L_{12}g_{12} - L_{22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.
\end{aligned}$$

Como por definición de curvatura de Gauss, $K = det(-dN_p) = det(dN_p)$, se tiene que:

$$K(p) = \frac{1}{(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)^2}[(L_{12}g_{12} - L_{11}g_{22})(L_{12}g_{12} - L_{22}g_{11}) - (L_{22}g_{12} - L_{12}g_{22})(L_{11}g_{12} - L_{12}g_{11})].$$

Simplificando esta expresión se llega a que la curvatura de Gauss viene dada por

$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

□

Corolario 2.32. *Sea S un superficie regular y sea $p \in S$. Se tiene que la curvatura de Gauss K en p verifica:*

$$K = \frac{R(V,W,W,V)}{\langle V,V\rangle\langle W,W\rangle - \langle V,W\rangle^2}.$$

siendo V, W campos tangentes a la superficie.

Demostración. Tomando

$$\frac{R(V,W,W,V)}{\langle V,V\rangle\langle W,W\rangle - \langle V,W\rangle^2}$$

con $V = \sum_{i=1}^{2} V_i \mathbb{X}_i$ y $W = \sum_{i=1}^{2} W_i \mathbb{X}_i$ y aplicando sucesivamente las propiedades del tensor de curvatura de Riemann, se llega al resultado. □

Corolario 2.33. *Sea S un superfie regular y sea $p \in S$. Se tiene que la curvatura de Gauss de S en p, K, solo depende de la primera forma fundamental y de sus derivadas en p.*

Demostración. Por la proposición 2.30, se tiene que ∇ solo depende de la primera forma fundamental. Por la definición de tensor de curvatura de Riemann 2.15, se tiene que este solo depende de ∇. Se sigue de la ecuación de Gauss 2.31 que K solo depende de la primera forma fundamental. □

Teorema 2.34 (Teorema Egregium de Gauss). *Sea $\phi\colon S \to \bar{S}$ una isometría local entre dos superficies regulares. Entonces $K(p) = \bar{K}(\phi(p))$ para todo $p \in S$, siendo K y $\bar{K}$ las curvaturas de Gauss de las superficies S y $\bar{S}$, respectivamente. En otras palabras, la curvatura de Gauss de una superficie regular queda invariante por isometrías locales.*

Demostración. Ya hemos visto que las isometrías llevan la primera forma fundamental de S en la primera forma fundamental de $\bar{S}$. Entonces, por el corolario 2.33, se obtiene de manera inmediata el resultado. □

2.6.2. Ecuación de Codazzi

A continuación probamos la segunda ecuación que será importante en este trabajo.

Teorema 2.35 (Ecuación de Codazzi). *Sea A el operador forma y sean V, W campos tangentes a S. Entonces, se verifica:*

$$(\nabla_V A)W = (\nabla_W A)V.$$

Demostración. Debido al colorario 2.25, basta ver que para una parametrización arbitraria,

$$\langle(\nabla_{\mathbb{X}_i}A)\mathbb{X}_j,\mathbb{X}_k\rangle=\langle(\nabla_{\mathbb{X}_j}A)\mathbb{X}_i,\mathbb{X}_k\rangle.$$

En primer lugar, hacemos:

$$\langle\mathbb{X}_{ij},N_k\rangle=\langle\Gamma^l_{ij}\mathbb{X}_l+L_{ij}N,N_K\rangle=\Gamma^l_{ij}\langle\mathbb{X}_l,N_k\rangle=-\Gamma^l_{ij}\langle\mathbb{X}_{lk},N\rangle=-\Gamma^l_{ij}L_{lk},\tag{2.5}$$

donde la segunda igualdad se debe a

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\langle N,N\rangle=2\langle N_k,N\rangle,$$

y la tercera igualdad se debe a

$$\langle\mathbb{X}_l,N\rangle=0\Longrightarrow 0=\frac{\partial}{\partial u_k}\langle\mathbb{X}_l,N\rangle=\langle\mathbb{X}_{lk},N\rangle+\langle\mathbb{X}_l,N_k\rangle.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\langle(\nabla_{\mathbb{X}_i}A)\mathbb{X}_j,\mathbb{X}_k\rangle&=\langle\nabla_{\mathbb{X}_i}(A\mathbb{X}_j),\mathbb{X}_k\rangle-\langle A\nabla_{\mathbb{X}_i}\mathbb{X}_j,\mathbb{X}_k\rangle\\&=\mathbb{X}_i\langle A\mathbb{X}_j,\mathbb{X}_k\rangle-\langle A\mathbb{X}_j,\nabla_{\mathbb{X}_i}\mathbb{X}_k\rangle-\langle\nabla_{\mathbb{X}_i}\mathbb{X}_j,A\mathbb{X}_k\rangle\\&\underset{(2.5)}{=}\mathbb{X}_i\langle\mathbb{X}_{jk},N\rangle-\Gamma^l_{ik}\langle A\mathbb{X}_j,\mathbb{X}_l\rangle-\langle\Gamma^l_{ij}\mathbb{X}_l,A\mathbb{X}_k\rangle\\&\underset{(2.5)}{=}\langle\mathbb{X}_{jki},N\rangle+\langle\mathbb{X}_{jk},N_i\rangle-\Gamma^l_{ik}L_{jl}-\Gamma^l_{ij}L_{lk}\\&=\langle\mathbb{X}_{ijk},N\rangle-\Gamma^l_{jk}L_{li}-\Gamma^l_{ik}L_{jl}-\Gamma^l_{ij}L_{lk}.\end{aligned}$$

Ahora, intercambiando i y j y restando, obtenemos:

$$\begin{aligned}\langle(\nabla_{\mathbb{X}_i}A),\mathbb{X}_j-(\nabla_{\mathbb{X}_j}A),\mathbb{X}_i\mathbb{X}_k\rangle=&\langle\mathbb{X}_{ijk},N\rangle-\Gamma^l_{jk}L_{li}-\Gamma^l_{ik}L_{jl}-\Gamma^l_{ij}L_{lk}\\&-\langle\mathbb{X}_{jik},N\rangle-\Gamma^l_{ik}L_{lj}+\Gamma^l_{jk}L_{il}+\Gamma^l_{ji}L_{lk}=0.\end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que L_{ij} es simétrica y a la observación 2.2. □

Observación 2.36. Aplicando la definición 2.4 a la ecuación de Codazzi, se verifica lo siguiente para cualquier campo U tangente a la superficie:

$$\langle\nabla_V(AW)-A\nabla_VW-\nabla_W(AV)+A\nabla_WV,U\rangle=0.$$

Capítulo 3

Superficies homogéneas

En este capítulo introduciremos la definición del concepto principal de este proyecto, el de *superficie homogénea* y presentaremos los tres casos de este tipo de superficie que son la esfera, el cilindro y el plano. Para ello, necesitaremos definir el grupo de isometrías de $\mathbb{R}^3$, por lo que tras hacer una breve introducción de acciones de grupos, nos centraremos en definir el concepto de *isometría* de $\mathbb{R}^3$ y citaremos los ejemplos más importantes para este proyecto.

3.1. Acciones de grupos

Definición 3.1. Un grupo G es un conjunto dotado de una operación interna

$$\begin{array}{rcl} \cdot : G \times G & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (Asociatividad).

2. Existe un único $e \in G$ tal que $e \cdot x = x \cdot e = x$ para todo $x \in G$. (Existencia de elemento neutro).

3. Para cada $x \in G$, existe un único $x' \in G$ tal que $x \cdot x' = x' \cdot x = e$. Decimos que x' es el *inverso de* x, y lo denotamos $x^{-1} := x'$ (Existencia de inverso).

Definición 3.2. Una *acción por la izquierda* de un grupo G sobre un conjunto E es una aplicación

$$\begin{aligned} *\colon G \times E &\longrightarrow E \\ (\sigma, \alpha) &\longmapsto *(\sigma, \alpha) = \sigma * \alpha \end{aligned}$$

verificando:

1. $e * \alpha = \alpha$ para todo $\alpha \in E$, donde e es el elemento neutro de G.

2. $(\sigma \cdot \sigma') * \alpha = \sigma * (\sigma' * \alpha)$, para todo $\sigma, \sigma' \in G$ y todo $\alpha \in E$.

Una acción $*\colon G \times E \longrightarrow E$ define una relación de equivalencia en E: dados $\alpha, \alpha' \in E$, diremos que $\alpha \sim \alpha'$ si, y solamente si, existe un $\sigma \in G$ tal que $\sigma * \alpha = \alpha'$.

Con esta relación de equivalencia podemos introducir dos definiciones:

Definición 3.3. El subconjunto de E,

$$G\alpha := \{\sigma * \alpha : \sigma \in G\} \subset E,$$

es la clase de equivalencia del elemento α y se denomina *órbita del elemento* α (respecto a la acción de G).

El subgrupo de G,

$$G_\alpha = \{\sigma \in G : \sigma * \alpha = \alpha\},$$

se denomina *subgrupo de isotropía de* α.

3.2. El grupo de isometrías de $\mathbb{R}^3$

Definición 3.4. Una aplicación $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dice una *isometría* o *movimiento rígido* de $\mathbb{R}^3$ si

$$d(F(x), F(y)) = d(x, y),$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Algunos ejemplos de movimientos rígidos son:

1. Las traslaciones por un vector:
   Dado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, se define *la traslación por* $\mathbf{v}$ como la aplicación

   $$\begin{array}{rccl} T_{\mathbf{v}}\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & T_{\mathbf{v}}(x) = x + \mathbf{v}. \end{array}$$

   Comprobemos que $T_{\mathbf{v}}$ es un movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$:

   $$d(T_{\mathbf{v}}(x), T_{\mathbf{v}}(y)) = ||(x + \mathbf{v}) - (y + \mathbf{v})|| = ||x - y|| = d(x, y).$$

2. Las rotaciones en $\mathbb{R}^2$:
   Dado $\theta \in \mathbb{R}$, definimos:

$$\begin{aligned} R_\theta \colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   La composición de rotaciones da como resultado otra rotación, cuyo ángulo de rotación es la suma de los ángulos respectivos. Cada rotación tiene una rotación inversa única, que coincide con su matriz traspuesta y la función identidad satisface la definición de una rotación, por lo que el conjunto de todas las rotaciones es un grupo con la operación composición. Se sigue además de las identidades trigonométricas que toda rotación es un isometría.
   Comprobemos que R_θ es un movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} d(R_\theta(x,y).R_\theta(u,v))^2 &= ||(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \\ &\quad - (u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta)||^2 \\ &= ((x-u)\cos\theta + (v-y)\sin\theta)^2 + ((x-u)\sin\theta + (y-v)\cos\theta)^2 \\ &= (x-u)^2\cos^2\theta + (v-y)^2\sin^2\theta + 2(x-u)(v-y)\sin\theta\cos\theta \\ &\quad + (x-u)^2\sin^2\theta + (y-v)^2\cos^2\theta + 2(x-u)(y-v)\sin\theta\cos\theta \\ &= (x-u)^2 + (y-v)^2 = ||(x,y)-(u,v)||^2 = d((x,y),(u,v))^2. \end{aligned}$$

Definición 3.5. Sea $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal. Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle$ el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ con $x, y \in \mathbb{R}^n$. Se dice que F es una *transformación ortogonal* si

$$\langle F(\mathbf{x}), F(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \qquad \text{para todo} \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Si tomamos ahora $\{\mathbf{e}_1, ...\mathbf{e}_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, es decir, $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle = \delta_{ij}$ para cualquier $i, j \in \mathbb{R}^n$, a cada aplicación lineal $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ le corresponde una matriz cuadrada A tal que $F(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\mathbf{e}_j$, se tiene que F es transformación ortogonal si, y solamente si, $A^tA = I$. En efecto:

$$\delta_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle = \langle F(\mathbf{e}_i), F(\mathbf{e}_j)\rangle = \left\langle \sum_{k=1} \mathbf{e}_k A_{ik}, \sum_{l} \mathbf{e}_l A_{jl} \right\rangle = \sum_{k,l} A_{ik}A_{jl}\delta_{kl} = \sum_{k} A_{ik}A_{jk} = (A^tA)_{ij}.$$

El recíproco se prueba por linealidad.

Definición 3.6. El grupo $O(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A^tA = I\}$ recibe el nombre de *grupo ortogonal*.

Observación 3.7. Nótese que si $A \in O(n)$, entonces $\det(A)^2 = \det(A^t A) = \det(I) = 1$, por lo que $\det(A) = \pm 1$.

Definición 3.8. El grupo $SO(n) = \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}$ recibe el nombre de *grupo espacial ortogonal.*

Tomando $n = 3$ en la definición 3.8, obtenemos $SO(3)$, que junto con la operación composición, es el grupo de todas las rotaciones sobre el origen de coordenadas en el espacio euclídeo tridimensional $\mathbb{R}^3$. De la misma manera, tomando $n = 2$ en la definición 3.8, obtenemos $SO(2)$, que junto con la operación composición, es el grupo de todas las rotaciones del plano.

Teorema 3.9. *Si $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una isometría, entonces existe una única matriz $A \in O(n)$ y un único $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene:*

$$F(x) = Ax + \mathbf{v}.$$

Definición 3.10. El conjunto

$$I(\mathbb{R}^3) = \{(A, \mathbf{v}) : A \in O(3), \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3\},$$

junto con la operación producto semidirecto

$$(A, \mathbf{v})(B, \mathbf{w}) = (AB, \mathbf{v} + A\mathbf{w})$$

tiene estructura de grupo y se denomina *grupo de isometrías o movimientos rígidos de* $\mathbb{R}^3$.
El grupo $I(\mathbb{R}^3)$ actúa en $\mathbb{R}^3$ como

$$(A, \mathbf{v})x = Ax + \mathbf{v},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

Observación 3.11. Veamos la justificación para la acción anterior. Dado $x \in \mathbb{R}^3$, se tiene:

$$(A, \mathbf{v})(B, \mathbf{w})x = (A, \mathbf{v})(Bx + \mathbf{w}) = A(Bx + \mathbf{w}) + \mathbf{v} = ABx + (A\mathbf{w} + \mathbf{v}).$$

3.3. Superficies homogéneas

Definición 3.12. Sea S una superficie regular. Se dice que S es *(extrínsecamente) homogénea* si para todo $p, q \in S$ existe una isometría $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F(S) = S$, $F(p) = q$.

Observación 3.13. Dado que la composición de isometrías de $\mathbb{R}^3$ que dejan invariante la superficie S sigue siendo una isometría que deja invariante S, se sigue que una superficie es extrínsecamente homogénea si y solo si es la órbita de un subgrupo del grupo de isometrías de $\mathbb{R}^3$. Dicho subgrupo sería

$$\{F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : F \text{ isometría}, F(S) = S\}.$$

Definición 3.14. Se dice que dos superficies S_1 y S_2 son *congruentes* si existe $F \in I(\mathbb{R}^3)$ tal que $F(S_1) = F(S_2)$.

Observación 3.15. Se sigue por definición que dos superficies congruentes tienen la misma geometría intrínseca y extrínseca.

Es interesante enfatizar el hecho de que la isometría anterior es del espacio ambiente $\mathbb{R}^3$. Recordemos de la sección 1.6 el concepto de isometría global entre superficies, el cual daría un concepto similar, aunque no equivalente, de homogeneidad:

Definición 3.16. Sea S una superficie regular. Se dice que S es *intrínsecamente homogénea* si para todo $p, q \in S$ existe una isometría $f : S \to S$ tal que $f(p) = q$.

Observación 3.17. Nótese que *extrínsecamente homogénea* implica *intrínsecamente homogénea*: toda isometría de $\mathbb{R}^3$ restringida a una superficie $S \in \mathbb{R}^3$ es una isometría de S.

Observación 3.18. En el capítulo anterior vimos que el *Teorema Egregium de Gauss* 2.34 permite afirmar que las isometrías locales entre dos superficies mantienen invariante la curvatura de Gauss. Por ello, se deduce de la definición anterior que las superficies homogéneas tienen curvatura de Gauss constante.

3.4. Ejemplos de superficies homogéneas

3.4.1. El plano

Sea $p \in \mathbb{R}^3$ y sea V un subespacio vectorial de dimensión 2. Consideremos el plano Π dado por el conjunto de puntos de la forma $p + V$. Tomando ξ el vector normal unitario al plano, podemos definir el plano como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^3$ que verifican la ecuación normal del plano

$$\langle x - p, \xi \rangle = 0. \tag{3.1}$$

Consideremos ahora el plano canónico de $\mathbb{R}^3$, cuya expresión viene dada por:

$$\Pi_{\mathscr{C}} \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}.$$

Veamos que el plano canónico $\Pi_{\mathscr{C}}$ es congruente al plano Π. Para ello, veremos que existe una isometría $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F(\Pi_{\mathscr{C}}) = \Pi$.
Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ una base ortonormal de V. Definimos $F(x) = Ax + p$, siendo A la siguiente matriz dada por columnas:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \xi \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $A \in O(3)$. En efecto, veamos que $A^tA = I$:

$$A^tA = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^t \\ \mathbf{v}_2^t \\ \xi^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^t\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^t\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1^t\xi \\ \mathbf{v}_2^t\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2^t\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2^t\xi \\ \xi^t\mathbf{v}_1 & \xi^t\mathbf{v}_2 & \xi^t\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle & \langle \mathbf{v}_1, \xi\rangle \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1\rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2\rangle & \langle \mathbf{v}_2, \xi\rangle \\ \langle \xi, \mathbf{v}_1\rangle & \langle \xi, \mathbf{v}_2\rangle & \langle \xi, \xi\rangle \end{pmatrix} = I.$$

En la última igualdad hemos aplicado que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base ortonormal de V y que ξ es un vector unitario normal a los elementos de dicha base.
Veamos ahora que $F(\Pi_{\mathscr{C}}) = \Pi$:
Sea $(x, y, 0) \in \Pi_{\mathscr{C}}$ y veamos que $F(x, y, 0) \in \Pi$, es decir, veamos que $F(x, y, 0)$ verifica 3.1:

$$\langle F(x, y, 0) - p, \xi\rangle = \langle A(x, y, 0)^t + p - p, \xi\rangle = \langle x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2, \xi\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{v}_i \perp \xi}}{=} 0.$$

Se deduce fácilmente que $F(\Pi_{\mathscr{C}}) = \Pi$. Como el plano Π fue escogido arbitrariamente, concluimos que cualquier plano afín de $\mathbb{R}^3$ es congruente al plano canónico $\Pi_{\mathscr{C}}$. Así, si comprobamos que el plano canónico es extrínsecamente homogéneo, podremos afirmar que cualquier plano de $\mathbb{R}^3$ lo es. Para ver que $\Pi_{\mathscr{C}}$ es extrínsecamente homogéneo, veamos que es la órbita de un subgrupo del grupo de isotropías de $\mathbb{R}^3$.
Consideremos la acción por la izquierda del grupo $\mathbb{R}^2$ en el conjunto $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{rcl} \phi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ ((x, y), p) & \mapsto & p + (x, y, 0), \end{array}$$

donde (x, y) es un vector de $\mathbb{R}^2$ y p es un punto de $\mathbb{R}^3$. Fijemos el punto $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ y veamos que el plano canónico es la órbita del grupo de traslaciones $\mathbb{R}^2$ por el punto $(0, 0, 0)$

$$\phi((x, y), (0, 0, 0)) = (x, y, 0).$$

Concluímos que todo punto del plano canónico $(x, y, 0)$ se puede obtener al aplicar el vector (x, y) al punto $(0, 0, 0)$ y, por tanto, es extrínsecamente homogéneo. Así, podemos afirmar que cualquier plano de $\mathbb{R}^3$ es extrínsecamente homogéneo.

3.4.2. El cilindro

Sea $r \in \mathbb{R}^+$. Sea $\mathbf{w}$ un vector unitario de $\mathbb{R}^3$ y sea $p \in \mathbb{R}^3$ un punto. Sea el cilindro C de radio r alrededor de la recta $p + \mathbf{w}$ que tiene por ecuación

$$||(x - p) \times \mathbf{w}||^2 = r^2. \tag{3.2}$$

Consideremos ahora el cilindro canónico de radio r de $\mathbb{R}^3$, cuya expresión viene dada por:

$$C_{\mathscr{C}} \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}.$$

Veamos que el cilindro canónico es congruente al cilindro C. Para ello veamos que existe una isometría $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F(C_{\mathscr{C}}) = C$.
Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ una base ortonormal de $\langle \mathbf{w} \rangle^{\perp}$. Definimos $F(x) = Ax + p$, siendo A la siguiente matriz dada por columnas:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{w} \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $A \in SO(3)$. La demostración es análoga al caso del plano. Veamos ahora que $F(C_{\mathscr{C}}) = C$:
Sea $(x, y, z) \in C_{\mathscr{C}}$ y veamos que $F(x, y, z) \in C$, es decir, veamos que $F(x, y, z)$ verifica 3.2:

$$\begin{aligned} ||(F(x,y,z) - p) \times \mathbf{w}||^2 &= ||(Ax + p - p) \times \mathbf{w}||^2 = ||Ax \times \mathbf{w}||^2 = ||(x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{w}) \times \mathbf{w}||^2 \\ &= ||(x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2) \times \mathbf{w}||^2 = ||x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2||^2 ||\mathbf{w}||^2 |\sin(\frac{\pi}{2})| \\ &= ||x + y||^2 = x^2 + y^2 = r^2. \end{aligned}$$

Se deduce fácilmente que $F(C_{\mathscr{C}}) = C$. Como el cilindro C fue escogido arbitrariamente, concluimos que cualquier cilindro de $\mathbb{R}^3$ es congruente al cilindro canónico $C_{\mathscr{C}}$. Así, si comprobamos que el cilindro canónico es extrínsecamente homogéneo, podremos afirmar que cualquier cilindro de $\mathbb{R}^3$ lo es. Para ver que $C_{\mathscr{C}}$ es extrínsecamente homogéneo, veamos que es la órbita de un subgrupo del grupo de isometrías de $\mathbb{R}^3$.
Consideremos la acción por la izquierda del grupo $SO(2) \times \mathbb{R}$ actuando sobre el conjunto $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \phi\colon (SO(2) \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \left((R_\theta,\, h)\,, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) &\mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Fijemos el punto $(r, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ y veamos que el cilindro canónico es la órbita de $SO(2) \times \mathbb{R}$ por $(r, 0, 0)$. Veamos que cualquier punto $(x, y, z) \in C_{\mathscr{C}}$ se obtiene aplicando un (h, R_θ) a $(r, 0, 0)$. Basta tomar $h = z$ y θ el ángulo tal que $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$. Así:

$$\phi((R_\theta, z), (r, 0, 0)) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z).$$

Concluímos que el cilindro canónico es extrínsdecamente homogéneo y, por tanto, cualquier cilindro de $\mathbb{R}^3$ lo es.

3.4.3. La esfera

Sea $r \in \mathbb{R}^+$ y sea $p \in \mathbb{R}^3$. Sea la esfera de radio r centrada en p, que será el conjunto de puntos

$$S^2(r, p) = \{(x, y, z) : ||(x, y, z) - p||^2 = r^2\}.$$

Consideremos ahora la esfera canónica de $\mathbb{R}^3$ de radio r, que será el conjunto de puntos:

$$S^2_{\mathscr{C}}(r) = \{(x, y, z) : ||(x, y, z)||^2 = r^2\}.$$

Veamos que la esfera canónica es congruente a la esfera $S^2(r, p)$. Para ello veamos que existe una isometría $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F(S^2_{\mathscr{C}}(r)) = S^2(r, p)$.
Definimos $F(x) = x + p$. Dado $(x, y, z) \in S^2_{\mathscr{C}}(r)$, se tiene que $F(x, y, z) \in S^2(r, p)$:

$$||F(x, y, z) - p||^2 = ||(x, y, z) + p - p||^2 = ||(x, y, z)||^2 = r^2.$$

Se deduce fácilmente que $F(S^2_{\mathscr{C}}(r)) = S^2(r, p)$. Como la esfera $S^2(r, p)$ fue escogida arbitrariamente, concluímos que cualquier esfera de $\mathbb{R}^3$ es congruente a la esfera canónica $S^2_{\mathscr{C}}(r)$. Así, si comprobamos que la esfera canónica es extrínsecamente homogénea, podremos afirmar que cualquier esfera de $\mathbb{R}^3$ lo es. Veamos entonces que $S^2_{\mathscr{C}}(r)$ es la órbita de un subgrupo del grupo de isometrías de $\mathbb{R}^3$.
Consideramos la acción por la izquierda del grupo $SO(3)$ actuando sobre $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \phi\colon SO(3) \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (A, p) &\mapsto Ap. \end{aligned}$$

Fijemos el punto $(r, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ y veamos que la esfera canónica es órbita de $SO(3)$ por el punto $(r, 0, 0)$, es decir, veamos que cualquier punto (x, y, z) de la esfera canónica se puede obtener aplicándole una matriz $A \in O(3)$ al punto $(r, 0, 0)$.
Sea $(x, y, z) \in S^2_{\mathscr{C}}(1)$ y consideramos el vector $\mathbf{w}$, que será el vector de posición de ese punto. Completamos dicho vector a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, $\{\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. La matriz que buscamos será

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{w} & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}.$$

Se demuestra de manera análoga a los ejemplos anteriores que $A \in O(3)$. Así,

$$\phi(A, (r, 0, 0)) = r(x, y, z).$$

Como $(x, y, z) \in S^2_{\mathscr{C}}(1)$, se tiene que $r(x, y, z) \in S^2_{\mathscr{C}}(r)$, tal y como queríamos probar. Concluímos que la esfera canónica es extrínsecamente homogénea y, por tanto, cualquier esfera de $\mathbb{R}^3$ lo es.

Capítulo 4

Clasificación de superficies homogéneas

En este capítulo trataremos las dos demostraciones más relevantes de este trabajo. En la primera parte, veremos que toda superficie extrínsecamente homogénea tiene curvaturas principales constantes. En la segunda parte del capítulo comenzaremos determinando las curvaturas principales de una superficie S en el caso de que estas se consideren constantes. A continuación, veremos que cada uno de los tres casos obtenidos se corresponde con uno de los ejemplos de superficies extrínsecamente homogéneas vistas en la sección 3.4. Para cerrar el capítulo, concluiremos con un corolario que afirma la doble implicación: una superficie es extrínsecamente homogénea si, y solamente si, presenta curvaturas principales constantes.

4.1. Caracterización de superficies homogéneas

Sea S una superficie conexa extrínsecamente homogénea. Sean $p, q \in S$ arbitrarios. Veamos que las matrices asociadas a los operadores forma A_p y A_q son conjugadas, es decir, que existe una matriz cuadrada P invertible tal que $A_q = PA_pP^{-1}$.
Por la definición de superficie extrínsecamente homogénea 3.12, existe una isometría $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F(S) = S$ y $F(p) = q$. Consideremos la diferencial de la isometría $DF_p\colon T_pS \to T_qS$. Sea W un campo de vectores tangente a S tal que $W_q \in T_qS$. Se tiene:

$$A_q(W) = A_q(DF_p \circ DF_p^{-1}(W)) = (A_q \circ DF_p)(DF_p^{-1}(W)).$$

Ahora bien, $DF_p^{-1}(W) \in T_pS$. Sea V el campo de vectores tangente a S tal que $DF_p^{-1}(W) = V_p \in T_pS$. Se tiene lo siguiente:

$$A_q \circ DF_p(V) = -DN_{F(p)}(DF_p(V)).$$

Ahora tomamos una curva α con condiciones iniciales $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = V_p$.. Así, se sigue de lo anterior que:

$$-DN_{F(p)}(DF_p(V)) = -DN_{F(p)} \left(\frac{d}{dt}(F \circ \alpha)(t)_{|t=0} \right) = -\frac{d}{dt}(N \circ F \circ \alpha)(t)_{|t=0}.$$

Para seguir con la demostración, veamos que $N \circ F = DF \circ N$. Para ello, tomamos una curva α y $\mathbf{v} \in T_pS$ tal que $\mathbf{v} = \alpha'(0)$ y $\alpha(0) = p$:

$$DF_p(\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(F \circ \alpha)(t)_{|t=0} \underset{\substack{\uparrow \\ F(S)=S}}{=} \frac{d}{dt}F(\alpha(t))_{|t=0} \in T_qS.$$

Por tanto, se tiene que $DF_p(T_pS) \subset T_{F(p)}S$. Como DF es un isomorfismo y ambos subespacios tienen la misma dimensión, se tendrá que son iguales. Así, concluímos que $N_{F(p)} = DF_p(N_p)$ ya que S es conexa, de lo que se deduce que $N \circ F = DF \circ N$. Ahora, siguiendo con la demostración, se tiene que:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}(N \circ F \circ \alpha)(t)_{|t=0} &= -\frac{d}{dt}(DF \circ N \circ \alpha)(t)_{|t=0} = -\frac{d}{dt}(DF(N_{\alpha(t)}))_{|t=0} \\ &= -DF_p \left(\frac{d}{dt} N_{\alpha(t)} \right)_{|t=0} = -DF_p \left(DN_{\alpha(0)}(\alpha'(0)) \right) = DF_p(A_p(V)). \end{aligned}$$

Recapitulando, hemos llegado a que

$$A_q \circ DF_p = DF_p \circ A_p,$$

lo cual implica que

$$A_q = DF_p \circ A_p \circ (DF_p)^{-1}.$$

Así, hemos demostrado que A_q y A_p son conjugadas y, por ello, tienen los mismos autovalores. Como p y q han sido escogidos arbitrariamente, se deduce que A_q y A_p tienen las mismas curvaturas principales, es decir, que S tiene curvaturas principales constantes.

4.2. Determinando las curvaturas principales

Sea S una superficie regular y sea A el operador forma. Denotemos por λ y μ las curvaturas principales, que supondremos constantes, y sean V y W los correspondientes campos de vectores principales, de manera que V_p, W_p son una base ortonormal de T_pS en cada punto $p \in S$. Veamos entonces que la superficie S, con curvaturas principales constantes, es localmente isométrica a una esfera, un cilindro o un plano:

Sea U otro campo vectorial tangente a S. Aplicando la *Ecuación de Codazzi* a los campos V, W y U tenemos:

$$\langle \nabla_V(AW) - A\nabla_V W - \nabla_W(AV) + A\nabla_W V, U \rangle = 0.$$

Ahora, aplicando la definición de autovalor ($AV = \lambda V, AW = \mu W$), obtenemos:

$$\langle \nabla_V(\mu W) - A\nabla_V W - \nabla_W(\lambda V) + A\nabla_W V, U\rangle = 0.$$

Aplicando la linealidad del producto escalar:

$$\langle \nabla_V(\mu W), U\rangle - \langle A\nabla_V W, U\rangle - \langle \nabla_W(\lambda V), U\rangle + \langle A\nabla_W V, U\rangle = 0.$$

Ahora, aplicando las propiedades de la derivada covariante y que el operador A es autoadjunto, obtenemos:

$$\mu\langle \nabla_V W, U\rangle - \langle \nabla_V W, AU\rangle - \lambda\langle \nabla_W V, U\rangle + \langle \nabla_W V, AU\rangle = 0. \tag{4.1}$$

Tomando $U = V$ en (4.1):

$$\mu\langle \nabla_V W, V\rangle - \langle \nabla_V W, AV\rangle - \lambda\langle \nabla_W V, V\rangle + \langle \nabla_W V, AV\rangle = 0.$$

Aplicando la definición de autovalor:

$$\mu\langle \nabla_V W, V\rangle - \lambda\langle \nabla_V W, V\rangle - \lambda\langle \nabla_W V, V\rangle + \lambda\langle \nabla_W V, V\rangle = 0.$$

Finalmente nos queda:

$$(\mu - \lambda)\langle \nabla_V W, V\rangle = 0. \tag{4.2}$$

Tomando $U = W$ en (4.1):

$$\mu\langle \nabla_V W, W\rangle - \langle \nabla_V W, AW\rangle - \lambda\langle \nabla_W V, W\rangle + \langle \nabla_W V, AW\rangle = 0.$$

Aplicando la definición de autovalor:

$$\mu\langle \nabla_V W, W\rangle - \mu\langle \nabla_V W, W\rangle - \lambda\langle \nabla_W V, W\rangle + \mu\langle \nabla_W V, W\rangle = 0.$$

Finalmente nos queda:

$$(\mu - \lambda)\langle \nabla_W V, W\rangle = 0. \tag{4.3}$$

De las ecuaciones (4.2) y (4.3) podemos distinguir dos casos:

- $\lambda = \mu \Rightarrow \begin{cases} \textbf{Caso 1:} \\ \lambda = \mu \neq 0, \\ \textbf{Caso 2:} \\ \lambda = \mu = 0. \end{cases}$

- $\lambda \neq \mu \Rightarrow \begin{cases} \langle \nabla_V W, V\rangle = 0, & (*) \\ \langle \nabla_W V, W\rangle = 0. & (**) \end{cases}$

Veamos que estas dos últimas igualdades hacen que: $\nabla_V V = \nabla_V W = \nabla_W V = \nabla_W W = 0$.

- $\nabla_V V = 0$:
  Por un lado, $\langle \nabla_V V, V \rangle = 0$:

$$\langle V, V \rangle = 1 \Rightarrow V\langle V, V \rangle = 0 \Rightarrow 2\langle \nabla_V V, V \rangle = 0.$$

  Por otro lado, $\langle \nabla_V V, W \rangle = 0$:

$$\begin{aligned} \langle V, W \rangle = 0 \Rightarrow V\langle V, W \rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla_V V, W \rangle + \langle V, \nabla_V W \rangle = 0 \\ \Rightarrow \langle \nabla_V V, W \rangle = -\langle \nabla_V W, V \rangle \underset{(*)}{=} 0. \end{aligned}$$

- $\nabla_W W = 0$:
  Por un lado, $\langle \nabla_W W, V \rangle = 0$:

$$\begin{aligned} \langle V, W \rangle = 0 \Rightarrow W\langle V, W \rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla_W V, W \rangle + \langle V, \nabla_W W \rangle = 0 \\ \Rightarrow \langle \nabla_W W, V \rangle = -\langle \nabla_W V, W \rangle = 0. \end{aligned}$$

  Por otro lado, $\langle \nabla_W W, W \rangle = 0$:

$$\langle W, W \rangle = 1 \Rightarrow W\langle W, W \rangle = 0 \Rightarrow 2\langle \nabla_W W, W \rangle = 0.$$

- $\nabla_V W = 0$:
  Por un lado, por $(*)$, se tiene que $\langle \nabla_V W, V \rangle = 0$.
  Por otro lado, $\langle \nabla_V W, W \rangle = 0$:

$$\langle W, W \rangle = 1 \Rightarrow V\langle W, W \rangle = 0 \Rightarrow 2\langle \nabla_V W, W \rangle = 0.$$

- $\nabla_W V = 0$:
  Por un lado, $\langle \nabla_W V, V \rangle = 0$:

$$\langle V, V \rangle = 1 \Rightarrow W\langle V, V \rangle = 0 \Rightarrow 2\langle \nabla_W V, V \rangle = 0.$$

  Por otro lado, por $(**)$, se tiene que $\langle \nabla_W V, W \rangle = 0$.

Ahora bien, por el corolario de la *Ecuación de Gauss* 2.32, se tiene que:

$$K = \frac{R(V, W, W, V)}{\langle V, V \rangle \langle W, W \rangle - \langle V, W \rangle^2}.$$

Aplicando que la base $\{V, W\}$ es ortonormal, y que la curvatura de Gauss es el producto de las curvaturas principales, se tiene:

$$\mu\lambda = K = R(V, W, W, V) = \langle \nabla_V \nabla_W W - \nabla_W \nabla_V W - \nabla_{\nabla_V W - \nabla_W V} V, V \rangle.$$

Así, aplicando que $\nabla_V V = \nabla_V W = \nabla_W V = \nabla_W W = 0$, concluimos que:
Caso 3: $\mu\lambda = 0$.

Para seguir la demostración, definimos una aplicación que desplaza S una distancia r en la dirección dada por el vector normal N.

Definición 4.1. Sea $r \in \mathbb{R}^+$. Sea S superficie regular orientada por un campo de vectores normal unitario N. La aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Phi_r\colon & S & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & p & \longmapsto & p + rN_p. \end{array}$$

se denomina *aplicación desplazamiento normal de S a distancia r.*

A continuación enunciaremos una proposición que nos dice cómo es la expresión de la diferencial de la aplicación anterior.

Proposición 4.2. *Sea V un campo tangente a una superficie S. Entonces, la diferencial de la aplicación desplazamiento normal cumple:*

$$DV_{\Phi_r} = V + rD_V N = V - rAV.$$

Demostración. Sea $\alpha\colon I \longrightarrow S$. Sea $p \in S$ y sea $\mathbf{v} \in T_pS$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. Entonces:

$$DV_{\Phi_r} = \left[\frac{d}{dt}\Phi_r(\alpha(t))\right]_{|t=0} = \left[\frac{d}{dt}(\alpha(t) + rN\alpha(t))\right]_{|t=0} = \alpha'(0) - rA\alpha'(0) = \mathbf{v} - rA\mathbf{v}. \qquad \square$$

4.3. Superficies con curvaturas principales constantes

Abordemos cada uno de los casos obtenidos para las curvaturas principales constantes en la sección anterior.

4.3.1. Caso 1: $\lambda = \mu \neq 0$

Recordemos que, en este caso, $AV = \lambda V$ y $AW = \lambda W$. Consideremos la aplicación desplazamiento normal con $r := \frac{1}{\lambda}$ de tal manera que para cada $p \in S$, se tiene:

$$\Phi_{\frac{1}{\lambda}}(p) = p + \frac{1}{\lambda}N_p.$$

Así, por la proposición 4.2, se tiene:

$$DV_{\Phi_r} = V - \frac{1}{\lambda}\lambda V = 0.$$

de lo que se deduce que existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $\Phi_r(p) = p + rN_p = c$ para todo $p \in S$. Entonces, para todo $p \in S$ se tiene:

$$d(p, c) = ||p - c|| = || - rN_p|| = | - r| = r.$$

Así, todos los puntos de S distan de c una distancia r, es decir, S es un abierto de una esfera de centro c y radio r.

4.3.2. Caso 2: $\lambda = \mu = 0$

Sea $\gamma\colon I \longrightarrow S$ una geodésica de S, es decir, $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma' = 0$. Así, calculando la aceleración de la curva, se tiene:

$$\gamma'' = (\gamma'')^{\top} + (\gamma'')^{\perp} = \nabla_{\gamma'(t)}\gamma' + \langle \gamma'', N\rangle N.$$

Como γ es geodésica, se tiene que $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma' = \mathbf{0}$. Por tanto,

$$\gamma'' = \langle \gamma'', N\rangle N.$$

Ahora bien, como γ' es tangente a la superficie, se tiene que $\langle \gamma', N\rangle = 0$. Así, se tiene que:

$$0 = \gamma'\langle \gamma', N\rangle = \langle D_{\gamma'}\gamma', N\rangle + \langle \gamma', D_{\gamma'}N\rangle = \langle D_{\gamma'}\gamma', N\rangle + \langle \gamma', -A\gamma'\rangle.$$

Puesto que en este caso A diagonaliza con autovalores nulos, se tiene que $A = 0$. Por tanto, se deduce de las anteriores igualdades que $\langle D_{\gamma'}\gamma', N\rangle = 0$. Por definición de derivada a lo largo de una curva, se tiene que

$$D_{\gamma'}\gamma' = \frac{d}{dt}\gamma' = \gamma''.$$

Así, concluímos que $\gamma'' = \langle \gamma'', N\rangle N = \langle D_{\gamma'}\gamma', N\rangle = \mathbf{0}$. Por tanto, como γ ha sido escogida arbitrariamente, podemos afirmar que la aceleración de toda geodésica de S es 0, o lo que es lo mismo, que toda geodésica de S es una recta de $\mathbb{R}^3$. Esto implica que S está contenida en un plano.

4.3.3. Caso 3: $\lambda\mu = 0$

La situación ahora es que tenemos una superficie S con dos curvaturas principales constantes $\lambda \neq \mu$ tales que su producto es nulo. Tomamos $\lambda \neq 0$ y $\mu = 0$ con sus correspondientes campos de vectores unitarios principales V y W que ya vimos que satisfacen $\nabla_V V = \nabla_V W = \nabla_W V = \nabla_W W = 0$. Consideremos la aplicación desplazamiento normal:

$$\begin{array}{rccl} \Phi_r\colon & S & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & p & \longmapsto & p + rN_p. \end{array}$$

Tomando $r = \dfrac{1}{\lambda} > 0$, por la proposición 4.2, se tiene:

$$DV_{\Phi_r} = V - rAV = V - \frac{1}{\lambda}\lambda V = 0.$$

$$DW_{\Phi_r} = W - rAW = W.$$

Tomamos ahora $\alpha\colon I \to S$ una curva integral del campo W, es decir, $\alpha'(t) = W_{\alpha(t)}$. Entonces:

$$\alpha''(t) = (\alpha''(t))^{\top} + (\alpha''(t))^{\perp} = \nabla_{\alpha'}\alpha' + \langle \alpha'', N\rangle N = \nabla_W W + \langle \alpha', A\alpha'\rangle N,$$

donde la última igualdad se debe a que $0 = \alpha'\langle\alpha', N\rangle = \langle D_{\alpha'}\alpha', N\rangle + \langle\alpha', D_{\alpha'}N\rangle$ y a que $A\alpha' = -D_{\alpha'}N$. Ahora, usando que $\nabla_W W = 0$, que α es curva integral de W y que $AW = \mu W = 0$. se tiene:

$$\nabla_W W + \langle\alpha', A\alpha'\rangle N = \nabla_W W - \langle\alpha', AW\rangle N = 0.$$

Por tanto, como α fue escogida arbitrariamente, se concluye que cualquier curva integral de W es un recta de $\mathbb{R}^3$.
Si ahora tomamos $\beta\colon I \to S$ una curva integral de V, es decir, $\beta'(t) = V_{\beta(t)}$, se tiene que:

$$(\Phi_r \circ \beta)' = D\beta'_{\Phi_r} = DV_{\Phi_r} = 0,$$

por lo que ϕ_r es constante a lo largo de todas las curvas integrales de V.
Ahora, procediendo de la misma manera que con la curva α,

$$\beta'' = (\beta''(t))^\top + (\beta''(t))^\perp = \nabla_{\beta'}\beta' + \langle\beta'', N\rangle N = \nabla_V V + \langle\beta', A\beta'\rangle N,$$

donde la última igualdad se debe a que $0 = \beta'\langle\beta', N\rangle = \langle D_{\beta'}\beta', N\rangle + \langle\beta', D_{\beta'}N\rangle$ y a que $A\beta' = -D_{\beta'}N$. Ahora, usando que $\nabla_V V = 0$ y que $AV = \lambda V$, se tiene:

$$\nabla_V V + \langle\beta', A\beta'\rangle N = \nabla_V V + \langle V, \lambda V\rangle N = \nabla_V V + \lambda\langle V, V\rangle N = \lambda N.$$

Por tanto, se tiene que $\beta'' = \lambda N$.
En [5] podemos consultar la definición de la curvatura y la torsión de una curva parametrizada por el parámetro longitud de arco, así como la definición de los vectores tangente $\mathbf{t}$, normal $\mathbf{n}$ y binormal $\mathbf{b}$ a la curva.
Puesto que $||\beta'|| = ||V|| = 1$, se tiene que β está parametrizada por el parámetro longitud de arco. Así, la curvatura de β será $\mathbf{k}_\beta = ||\beta''|| = \lambda$. Dado que β está parametrizada por arco, tenemos:

$$\mathbf{n}_\beta(t) = \frac{\beta''(t)}{\|\beta''(t)\|} = \frac{\lambda N_{\beta(t)}}{\|\lambda N_{\beta(t)}\|} = N_{\beta(t)}.$$

Por otro lado, la torsión de de β será la siguiente:

$$\tau_\beta = \langle\mathbf{n}'_\beta, \mathbf{b}_\beta\rangle = \langle -A\beta', \beta' \times N\rangle = -\lambda\langle\beta', \beta' \times N\rangle = 0.$$

En consecuencia, acabamos de probar que S contiene una curva β que es una circunferencia de $\mathbb{R}^3$ y perpendicularmente a ella está constituída por rectas (las curvas integrales de W). Por tanto, se concluye que S es localmente un cilindro de radio r a lo largo de una recta paralela a $V_{\beta(t)}$ para cualquier $t \in I$.

Tal y como hemos mencionado al principio del capítulo, vamos a concluír con un colorario que recapitule estos teoremas:

Corolario 4.3. *Sea S una superficie regular conexa. Equivalen:*

1. S es localmente isométrica a una superficie homogénea.

2. S tiene curvaturas principales constantes.

3. S es un abierto de un cilindro, una esfera, o un plano.

Bibliografía

[1] Araújo, P. V. (1998). *Geometría Diferencial*, Coleçao Matemática Universitaria. IMPA. Río de Janeiro.

[2] Abbena, E., Gray, A. y Salomon S. (2006). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, Third Edition.* Taylor and Francis Group .

[3] Carmo do, M. (1990). *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies.* Ed. Alianza Madrid.

[4] Creighton Buk, R. (2003). *Advanced Calculus, Third Edition.* Ed. Brand: Waveland Pr Inc.

[5] Hernández Cifre, M. de los A. y Pastor, J. (2019). *Un curso de geometría diferencial*, CSIC. Madrid.

[6] Levi-Civita, T. (1937). Famiglie di superficie isoparametriche nell'ordinario spazio euclideo. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (6) 26, 355–362.

[7] López de la Rica, A. y de la Villa Cuenca, A. (1997). *Geometría diferencial.* Ed. Clagsa. Madrid.

[8] Rodríguez-Sanjurjo, J. M. y Ruíz, J. M. (2019). *Introducción a la Geometría Diferencial II: Superficies.* Ed. Sanz y Torres.

[9] Somigliana, C. (1919). Sulle relazioni fra il principio di Huygens e l'ottica geometrica. *Atti. Acc. Sci. Torino* 54, 974–979.