

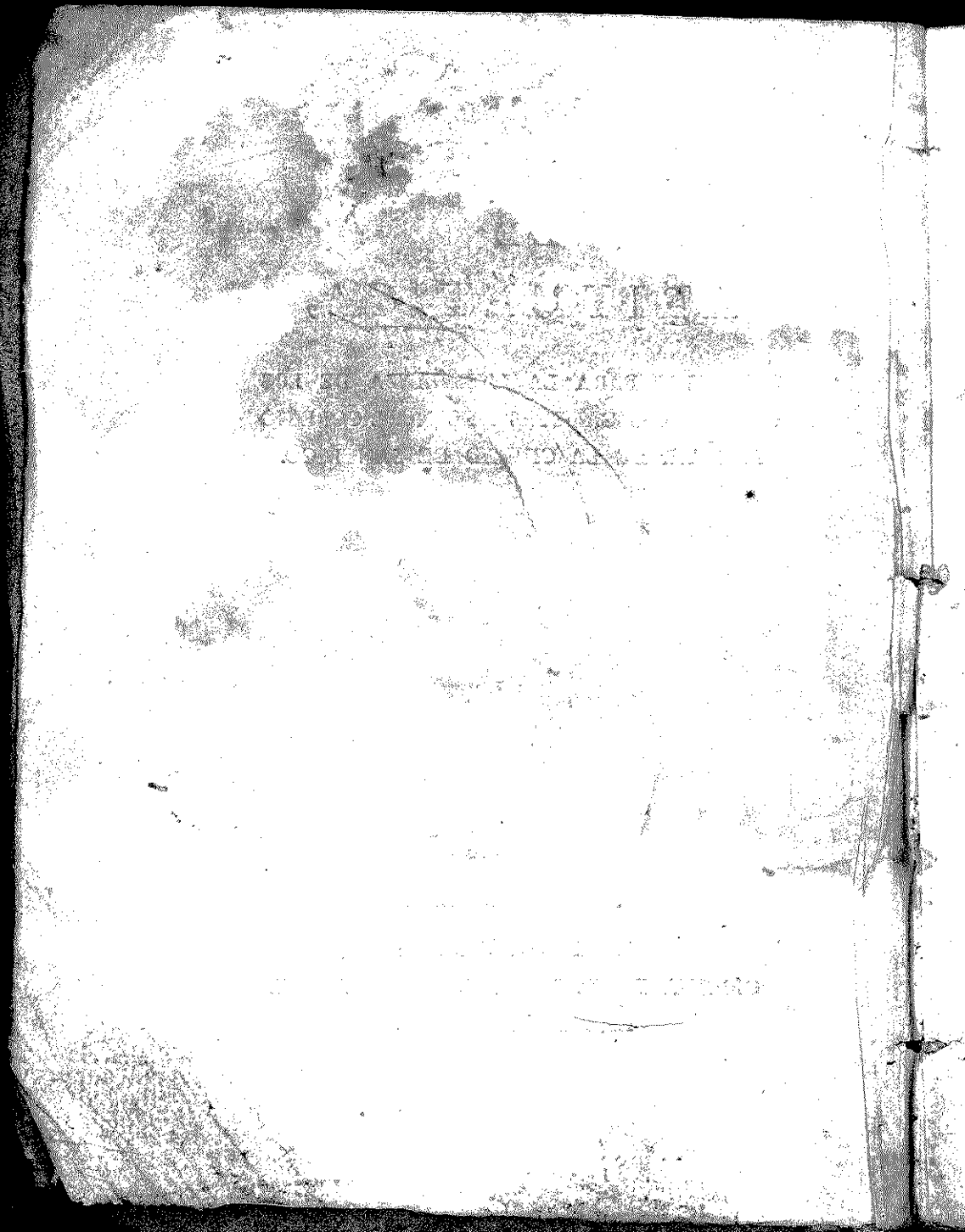
# TRATADO DE ARITMÉTICA

DISPUESTO PARA LA ENSEÑANZA DE LOS  
CABALLEROS CADETES DEL REAL COLEGIO  
MILITAR DE LA CIUDAD DE SANTIAGO.



---

EN DICHA CIUDAD:  
OFICINA DE D. MANUEL ANTONIO REY.  
AÑO DE MDCCC.XI.



## NOTA.

Nada es mas difícil que el escribir (mayormente lo que debe imprimirse), quando la brevedad del tiempo obliga al encargado de la obra á precipitar su formación. En este caso se halla la presente, que se ha arreglado en poco mas de un mes, para facilitar á los alumnos de el Real Colegio militar establecido en esta ciudad de Santiago un pequeño tratado de Aritmética, que conteniendo las bases fundamentales de dicha ciencia, lograrse la posible concision, sin falta de nada esencial para su objeto. La impresion de él ha sido precisa, para obviar á los alumnos la pérdida del tiempo en escribirle, pues aun para estudiarle y poseerle con la profundidad que requiere un tratado tan fundamental de las demas ciencias, deberá faltarles tiempo á tenor de lo apurado de las circunstancias.

La ciencia Aritmética es profunda, á nadie se oculta: subsisten impresos muchos volúmenes abultados, que contienen quanto se pueda desear en la materia, como que son producciones de talentos sublimes; pero tanto por su complicacion como por no haberse formado con el objeto que el presente, no han parecido adaptables en esta época, en que la mas inmediata aplicacion debe de ser al ramo militar, y con este objeto se ha realizado en los términos que han parecido á propósito, esperando que la indulgencia de los sabios le pondrá á cubierto de las faltas que en él se noten, convencidos por las causas enunciadas, de la necesidad de imprimirle y brevedad del tiempo en recopilarle.

## DEFINICIONES

de algunas voces matemáticas, cuya inteligencia es necesaria para la de este tratado, y demas que deben formar el plan de estudios.

*Definición nominal*, es la que manifiesta el significado de una voz.

*Definición real*, es la manifestacion de solo lo preciso para distinguir la cosa definida de las demas que existen, ó pueden existir.

*Hipótesis*, es una suposicion que se hace.

*Axioma*, es una verdad tan evidente por sí misma que no necesita de prueba, por exemplo, *la parte es menor que el todo: el todo es igual al conjunto de todas sus partes*: estos son unos axiomas.

*Postulado*, es un axioma que recae sobre la posibilidad de executar alguna cosa.

*Teorema*, es una verdad que no nos convence si no se demuestra, y se deduce de las definiciones, axiomas, ó de otras verdades demostradas. El *teorema* consta de dos partes, es á saber: de la proposicion en que se enuncia la verdad, y de la demostracion en que se manifiesta su certeza.

*Problema*, es la propuesta de una cosa que se ha de executar: consta de tres partes; es á saber: la *proposicion*, en la que se manifiesta lo que se pretende descubrir ó executar: la *resolucion*, en que se expresa el modo de executar: la *demostración*, en la que se prueba que executado lo que se previene en la resolucion se obtiene lo que se pretendia.

*Corolario*, es una consecuencia de una definicion dada, de un teorema demostrado, ó de un problema resuelto.

*Lema*, es un teorema, ó un problema que no se demuestra, ó no se resuelve, sino para servir de preparacion á otro teorema ó problema.

*Escolio*, es una recapitulacion racionada de varias proposiciones que tienen un mismo objeto.

# PRINCÍPIOS DE ARITMÉTICA.

## PRIMERA LECCION.

### *Definiciones preliminares.*

ARTÍCULO I. Se comprehende baxo el nombre de Matemáticas todas las ciencias que tienen por objeto la cantidad.

II. Se entiende por *cantidad* todo lo que es capaz de aumento, ó de disminucion.

III. La Aritmética es la ciencia que trata de la cantidad expresada en números.

IV. Unidad es la cantidad que se toma por término de comparacion para dar idea de las demas cantidades de su especie.

V. Número es un conjunto de unidades.

VI. El número se llama *concreto* ó *denominado* quando se expresa la especie de unidad, y *abstracto* quando no se expresa la especie de la unidad: por exemplo, quatro varas es un número concreto ó denominado; pero quando solo dice siete, quatro &c., es un número abstracto.

### *De la numeracion.*

VII. Se ha encontrado el medio de escribir todos los números posibles, empleando solo diez caractéres siguientes, que llaman *cifras*, de los quales véase la forma y el valor.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9  
cero, ó nada. uno. dos. tres. quatro. cinco. seis. siete. ocho. nueve.

El cero quando está solo no significa nada.

VIII. Para contar mas allá de nueve se ha convenido:  
1.º Que de diez unidades se haria una decena, y de diez decenas una centena ó ciento.

2.º Que toda cifra colocada á la izquierda de otra representará decenas, y la de la derecha unidades: segun lo dicho, en el número 78 el 7 expresará 7 decenas, y el 8 indicará 8 unidades, y se pronunciará setenta y ocho: el número 50 manifiesta 5 decenas, y el cero que está á su dere-

cha indica que no hay ninguna unidad á mas de dichas cinco decenas: de aquí deducimos que aunque el cero no equivale á nada, sirve para manifestar que la cifra que le sigue es la segunda contando de derecha á izquierda, y que por lo tanto representa decenas, y no unidades simples.

3.º Que toda cifra colocada en tercer lugar hácia la izquierda represente centenas: un 4, un 2 y un 3, colocados como se ve, 423, expresan quatro centenas, dos decenas, y tres unidades, que se pronuncia quatrocientos veinte y tres. Las tres cifras siguientes, 900 indican solo nueve centenas, y se pronuncia nuevecientos.

IX. A tres cifras así colocadas llamaremos *la seccion de las unidades*. Tres cifras puestas á la izquierda de esta seccion tomará el nombre de *seccion de los miles, ó millares*. Para formar esta seccion se ha convenido, que de diez centenas se haría una unidad de millar, de diez unidades de millar una decena de millar, de diez decenas de millar una centena de millar.

X. Por un raciocinio semejante se forma la seccion de millones ó cuento, y de millares de millon; asimismo la de billones ó bicientos, y de millares de billon, y progresivamente la de trillones ó tricuento, y la de millar de trillon &c.; y en cada seccion, de las tres cifras la de la derecha expresa unidades, la del medio decenas, y la mas hácia la izquierda centenas de la misma denominacion que la seccion á que corresponden.

XI. Para pronunciar un número escrito, atiéndase á la siguiente regla: 1.º Empezando por la última cifra de la derecha, divídase el número en secciones de tres en tres cifras hácia la izquierda, sin reparar que en la última porcion de la izquierda queden dos cifras ó una sola, y entre seccion y seccion se pondrá una coma.

2.º Sobre la segunda coma póngase un punto, sobre la quarta dos puntos, sobre la sexta tres puntos &c.

3.º Léanse cada tres cifras como si estuviesen solas (artículo 5.), con la única adición de decir *mil* al llegar á cada coma sola, *millon* ó *cuento* al llegar á la coma que tiene encima un punto, *billon* ó *bicuento* al llegar á la coma que tiene encima dos puntos, *trillon* ó *tricuento* al llegar á la que tiene tres puntos, &c.; añadiendo al llegar á la última cifra de la derecha la expresion de la clase de unidades de que consta el número propuesto, sean reales, pesos, hombres &c.;

ó solamente diciendo unidades ó enteros, si no se expresa la clase de unidades. 7

Si entre coma y coma no hay cifra alguna significativa, no se dice *mil*; y si en las dos divisiones comprendidas entre puntos no hay cifra significativa, no se dice *billon*, *trillon* &c. Por exemplo el número

87,424;371,497.

Se pronunciará ochenta y siete mil quatrocientos veinte y quatro millones, trescientos setenta y un mil quatrocientos noventa y siete unidades: el número siguiente

400,000;000,045;000,000;000,007.

Se enunciará así, quatrocientos mil trillones, quarenta y cinco billones, y siete unidades.

XII. Para escribir un número propuesto, por exemplo, ochocientos treinta y siete millones, quatrocientos y tres mil y veinte y tres unidades, se reparará: 1.º que se necesitan tres secciones: 2.º que en la de los miles no hay ninguna decena, y ninguna centena en la de las unidades: escribiré pues, 837;403,023.

XIII. Los números de que hasta ahora hemos hablado son números *enteros*. Se llaman así aquellos que contienen la unidad sin resto, por exemplo dos, setecientos, &c.

XIV. Las operaciones de la Aritmética se reducen á dos fundamentales, que son el *sumar*, y el *restar*.

#### Problemas.

- 1.º Enunciar 407,370;200,001;101,010.
- 2.º Enunciar 7,007;400,400;024,007.
- 3.º Expresar con cifras quarenta y siete millones, siete mil y una unidad.
- 4.º Siete trillones, setecientos mil y siete billones, setenta mil setecientos millones, siete mil y setenta unidades.

## SEGUNDA LECCION.

*Del Sumar.*

XV. El *sumar* es una operacion, cuyo objeto es representar en una sola cantidad, llamada *suma*, el valor de dos ó mas cantidades de igual especie, llamadas *partidas*.

XVI. Si los números son *simples*, es decir, mas pequeños que diez, no se necesita regla para sumarlos. Todo el mundo sabe que 4 añadido á 5 hacen 9, lo que se indica así:  $4+5=9$ , y se pronuncia quatro mas cinco igual á nueve; ó simplemente quatro y cinco hacen nueve.

XVII. Si los números son compuestos, por exemplo 4024 y 5103, es necesario escribir estos números de modo que las unidades estén colocadas baxo de las unidades, las decenas baxo las decenas, las centenas debaxo de las centenas, &c., y escribirlas debaxo de la raya baxo la columna correspondiente.

primera partida.....	4024.
segunda partida.....	5103.
	<hr style="width: 100%;"/>
suma, ó total.....	9127.
	<hr style="width: 100%;"/>

Daré pues, 4 y 3 son 7, que escribo debaxo de la columna de las unidades. Paso á las decenas y digo: 2 y 0 son 2, que escribo debaxo de la columna de las decenas. Paso despues á la columna de las centenas y digo: 0 y 1 son 1, que escribo debaxo de dicha columna.

En fin, llegado á la columna de los miles diré: 4 y 5 son 9, que escribiré debaxo de ella. Así la suma, ó el total es 9127.

XVIII. Quando la suma de una columna sobrepuja á 9, es necesario escribir solamente debaxo de dicha columna la cifra de las unidades, y retener las decenas para añadirlas á las cifras de la columna inmediata de la izquierda, que son de la misma especie.

Trátase de añadir juntos los tres números 499, 2532 y 9844. Los escribo segun la regla:

499
2532
9844
-----

total..... 12875

---

Y digo: 9 y 2 son 11, y 4 son 15, ó una decena y cinco unidades: escribo 5 debaxo de la columna de las unidades, y retengo una decena que añado á la columna de las decenas que sigue inmediatamente, diciendo: 1 retenido y 9 son 10, y 3 son 13, y 4 son 17: por la misma razon no escribo sino 7 debaxo de la columna de las decenas, y retengo una decena de decenas, es decir, una centena, para añadirla á la columna siguiente, que lo es la de las centenas á la qual paso.

Digo pues: 1 retenido y 4 son 5, y 5 son 10, y 8 son 18: escribo el 8 debaxo de la columna de las centenas, y retengo una decena de centenas, ó un mil, para añadirlo á la siguiente columna, que es la de los miles y la última.

En fin diré: 1 retenido y 2 son 3, y 9 son 12, que escribo en seguida. Asi la suma buscada será 12875.

XIX. Es evidente que añadiendo sucesivamente las unidades, las decenas &c., que son las partes de los números dados, se hallará la suma entera que es la reunion de todas estas diferentes partes.

XX. Para conocer si se ha padecido equivocacion en el sumar, se empezará la operacion contando desde abajo para arriba cada columna: es evidente que la suma debe ser la misma que la que se ha encontrado de arriba para abaxo.

*Problema.*

Supóngase que en la gloriosa batalla de Baylén se rindieron á nuestras armas el General Dupont y su estado mayor compuesto de 87 oficiales incluso dicho General: igualmente rindieron las armas 9473 infantes, 3538 de caballería, y 426 de artillería: además murieron 2786 en la accion, y en el campo de batalla quedaron 2875 heridos; dicho ejército enemigo habia anteriormente padecido una pérdida de 1825 hombres en acciones particulares: preguntase ¿qué número de combatientes tenia Dupont quando entró en Andalucía?

B

## TERCERA LECCION.

*Del Restar.*

XXI. El restar sirve para hallar la diferencia entre dos números.

XXII. Para conocer la diferencia de dos números, es necesario restar el mas pequeño del mas grande; lo que queda es la diferencia buscada. No se necesita ninguna regla para hallarla quando los números son simples: en efecto, nadie ignora que restando 3 de 5 quedan 2 por resta. Se escribe  $5 - 3 = 2$ , y se dice: 5 menos 3 = 2; ó 3 de 5 quedan 2.

XXIII. Si se trata de hallar la diferencia que hay entre dos números compuestos, tales como 948 y 623, es necesario escribir el mas pequeño, que llamaremos subtraendo, debaxo del mayor, al que se da el nombre de minuendo, de modo que las unidades del uno se hallen colocadas debaxo de las unidades del otro, las decenas debaxo de las decenas, las centenas debaxo de las centenas &c., y tirar una raya por debaxo. Luego se tomará sucesivamente el exceso de las unidades, de las decenas, de las centenas &c. del subtraendo sobre las unidades, decenas, centenas &c. del minuendo, y escribir los restos debaxo de la raya, y debaxo de su correspondiente columna; á este conjunto de restos, ó diferencias parciales, se le da el nombre de residuo ó resta,

948..... minuendo  
623..... subtraendo

---

residuo..... 325.

---

Digo pues: 3 de 8 quedan 5, que pongo debaxo de la columna de las unidades: paso á la columna de las decenas diciendo: 2 de 4 quedan 2, que escribo debaxo de esta misma columna: en fin, pasando á la de las centenas, diré: 6 de 9 quedan 3, que escribo inferior á las centenas. Segun lo qual 325 es el residuo que buscábamos.

XXIV. Si el minuendo contuviere alguna cifra menor que la que corresponde en el subtraendo, para que la resta pueda verificarse atiéndase á la regla siguiente: *llegado el caso de concurrir una cifra del minuendo menor que su correspondiente*

del *subtraendo*, añádanse diez unidades (esto es, una unidad de la clase siguiente hacia la izquierda) á dicha cifra menor, y verifíquese la resta, que sin este artificio no se hubiera podido verificar, y escríbese la diferencia debaxo de la raya; claro está que la cifra siguiente del *minuendo* valdrá una unidad menos, supuesto que se la quitamos para aumentar con ella en diez la cifra anterior, lo que se deberá tener presente quando se pase á buscar la diferencia de esta cifra disminuida con su correspondiente cifra del *subtraendo*.

Para mayor aclaracion de la regla anterior, propongamos el restar 274 de 846.

846..... minuendo.  
274..... subtraendo.

---

residuo..... 572.

---

Escribo estos dos números segun lo establecido, y digo: 4 quitado de 6 quedan 2: paso á la columna de las decenas, y diré: 7 de 4 no se puede; pero para que pueda verificarse apelo al arbitrio de quitar una unidad á la cifra siguiente 8, pero esta unidad que le quito es una centena, y es evidente que esta centena vale 10 decenas, razon por la qual digo: 10 decenas que he tomado y 4 que hay en el *minuendo* son 14, y de estas quitando las 7 que hay en el *subtraendo* quedan 7, que escribo debaxo de las decenas en el residuo: paso luego á la columna de las centenas, y recuerdo que de la cifra 8 del *minuendo* quitamos anteriormente una unidad, de consiguiente solo valdrá 7 en la actualidad, por lo que diré: 2 quitado de 7 (y no de 8) quedan 5; y así 572 será el residuo.

Para mayor facilidad de los principiantes, y evitar equivocaciones, parece conveniente que quando se tome una unidad de la cifra siguiente del *minuendo* se coloque un punto encima de dicha cifra, el que les recordará al llegar á ella que vale una unidad menos de la que representa.

XXV. Es evidente que siguiendo las reglas dadas se toma la diferencia de todas las partes de los dos números, y que de consiguiente se debe hallar la diferencia entera de estos dos números.

XXVI. Para comprobar si la resta ha sido bien hecha,

*añádase el residuo al subtraendo, y la suma deberá ser igual al minuendo si la resta ha sido bien hecha: esto se funda en que el subtraendo representa el número menor, el residuo la diferencia que hay entre este número menor y el mayor, ó el minuendo, y es claro que la diferencia es precisamente la cantidad con que el mayor número sobrepaja al mas pequeño.*

*Problema.*

Supóngase que el Mariscal Moncey entró en el reyno de Valencia á la cabeza de 14759 combatientes, y que quando fué repelido por el valor de aquellos naturales solo se retiró con 7932. Se desea saber ¿qué pérdida de gente sufrió este cuerpo de ejército en dicho reyno?

QUARTA LECCION.

*De la Multiplicacion.*

XXVII. La *multiplicacion* no es otra cosa que un modo de sumar abreviado, por la qual se añade un número tantas veces asimismo quantas unidades hay en otro número. Así, para añadir 5 quatro veces así mismo, en lugar de escribir  $5 + 5 + 5 + 5 = 20$ , se dice: 4 veces 5 hacen 20, lo que se escribe de este modo  $5 \times 4 = 20$ : se pronuncia, 5 *multiplicado* por 4 igual á 20. El número 5 se llama *multiplicando*, el número 4 *multiplicador*, y el 20 *producto*.

XXVIII. El producto contiene al multiplicando tantas veces quantas el multiplicador contiene á la unidad, y tambien el producto contiene al multiplicador tantas veces quantas el multiplicando contiene á la unidad; y el multiplicando y el multiplicador se nombran las *raices*, ó *factores* del producto.

En general es indiferente tomar qualquiera de los dos factores como multiplicando para obtener el valor numérico del producto, pues  $6 \times 4$  y  $4 \times 6$  dan el mismo producto 24.

XXIX. De lo dicho se sigue: 1.º que si el multiplicando se hace duplo, triplo &c., debe resultar el producto duplo, triplo &c. del anterior: que si se toma la mitad, el tercio &c. del multiplicando, el producto resultará la mitad, el tercio &c. del anterior. Asimismo, si un número dado se multiplica por un número de veces duplo, triplo &c., el resultado será duplo, triplo &c. Si el mismo número se mul-

tiplica por la mitad, el tercio &c. del número por quien se habia multiplicado antes, el resultado será la mitad, el tercio &c. anterior.

2.º Luego lo mismo será duplicar, triplicar &c., ó tomar la mitad, el tercio &c. del producto, que executar dichas operaciones con el multiplicando ó con el multiplicador.

3.º En general, el producto aumentará ó disminuirá al paso que aumente ó disminuya uno de sus dos factores.

XXX. Para multiplicar un número simple por un número simple, es preciso aprender de memoria los productos de los números simples que se hallan en la Tabla siguiente.

1 vez 1 es 1	2 veces 1 son 2	3 veces 1 son 3
1 ..... 2 son 2	2..... 2..... 4	3..... 2..... 6
1..... 3..... 3	2..... 3..... 6	3..... 3..... 9
1..... 4..... 4	2..... 4..... 8	3..... 4..... 12
1..... 5..... 5	2..... 5..... 10	3..... 5..... 15
1..... 6..... 6	2..... 6..... 12	3..... 6..... 18
1..... 7..... 7	2..... 7..... 14	3..... 7..... 21
1..... 8..... 8	2..... 8..... 16	3..... 8..... 24
1..... 9..... 9	2..... 9..... 18	3..... 9..... 27
4 veces 1 son 4	5 veces 1 son 5	6 veces 1 son 6
4..... 2..... 8	5..... 2..... 10	6..... 2..... 12
4..... 3..... 12	5..... 3..... 15	6..... 3..... 18
4..... 4..... 16	5..... 4..... 20	6..... 4..... 24
4..... 5..... 20	5..... 5..... 25	6..... 5..... 30
4..... 6..... 24	5..... 6..... 30	6..... 6..... 36
4..... 7..... 28	5..... 7..... 35	6..... 7..... 42
4..... 8..... 32	5..... 8..... 40	6..... 8..... 48
4..... 9..... 36	5..... 9..... 45	6..... 9..... 54
7 veces 1 son 7	8 veces 1 son 8	9 veces 1 son 9
7..... 2..... 14	8..... 2..... 16	9..... 2..... 18
7..... 3..... 21	8..... 3..... 24	9..... 3..... 27
7..... 4..... 28	8..... 4..... 32	9..... 4..... 36
7..... 5..... 35	8..... 5..... 40	9..... 5..... 45
7..... 6..... 42	8..... 6..... 48	9..... 6..... 54
7..... 7..... 49	8..... 7..... 56	9..... 7..... 63
7..... 8..... 56	8..... 8..... 64	9..... 8..... 72
7..... 9..... 63	8..... 9..... 72	9..... 9..... 81

XXXI. Para multiplicar un número compuesto por un número simple, por exemplo 309 por 9, es necesario escribir el multiplicador debaxo del multiplicando, tirar una raya por debaxo, y multiplicar sucesivamente las unidades, las decenas, las centenas &c. del multiplicando por el multiplicador.

multiplicando..... 309  
multiplicador..... 9

---

2781

---

Digo pues: 9 veces 9 són 81: escribo 1 debaxo de la columna de las unidades, y retengo 8 decenas para añadirlas al producto siguiente: 9 veces 0 decenas son 0: escribo debaxo de la columna de las decenas las 8 decenas que habia retenido: en fin continúo diciendo: 9 veces 3 centenas son 27 centenas, que escribo en seguida, porque en este exemplo 3 es la última columna. El producto será 2781.

XXXII. Para multiplicar un número compuesto por número compuesto, por exemplo 987 por 658, es preciso escribir los dos factores uno debaxo del otro, como se verá en seguida; multiplicar sucesivamente todo el multiplicando por las unidades, las decenas, las centenas &c. del multiplicador; escribir los productos parciales los unos debaxo de los otros, de modo que la primera cifra de la derecha del segundo producto quede colocada debaxo de las decenas, que la primera cifra de la derecha del tercer producto quede debaxo de las centenas, &c., y sumando todos estos productos parciales se tendrá el producto total.

multiplicando..... 987  
multiplicador..... 658

---

7896

4935

5922

---

producto..... 649446

Digo: 8 veces siete hacen 56: escribo 6 y retengo 5: 8 veces 8 hacen 64 y 5 retenidos hacen 69: escribo 9 y retengo 6: 8 veces 9 son 72 y 6 retenidos hacen 78, que escribo seguidamente.

Paso a las 5 decenas del multiplicador y digo: 5 veces 7 son 35: se concibe claramente que son 35 decenas, escribo pues 5 debaxo de las decenas, y retengo 3: 5 veces 8 son 40, y 3 retenido son 43: escribo 3 y retengo 4: 5 veces 9 son 45, y 4 que he retenido son 49, que escribo en seguida.

En fin, pasando á las centenas del multiplicador digo: 6 veces 7 son 42: es evidente que este producto expresa centenas, y retengo 4: 6 veces 8 son 48 y 4 retenido son 52: escribo 2 y retengo 5: 6 veces 9 son 54 y 5 retenidos hacen 59, que escribo á continuacion. Añado los productos parciales y hallo 649446 por producto total.

XXXIII. La regla prescripta es infalible; porque multiplicar un número por otro es repetir el primero tantas veces quantas unidades haiga en la totalidad del segundo. Luego, siguiendo la regla prescripta, se repite el multiplicando tantas veces quantas señala cada cifra del multiplicador: de lo que deduciremos, que siguiendo la regla se repite el multiplicando tantas veces quantas unidades hay en la totalidad de cifras del multiplicador, y de que conseqüentemente se halla el verdadero producto operando como se ha executado.

XXXIV. Quando se hallan ceros á la derecha de uno de los factores ó de los dos, se verifica la multiplicacion sin atender á dichos ceros, se multiplican las cifras que estan á su izquierda; y quando esta primera operacion está acabada se ponen en seguida y á la derecha del producto tantos ceros quantos hay en seguida de los dos factores dados. Así, para multiplicar 400 por 12, tomo el producto de 4 por 12, que es 48, y en seguida escribo los dos ceros del multiplicando, lo que da 4800 por producto propuesto.

Para multiplicar 120 por 120 escribo al principio 144 producto de 12 por 12, y á continuacion pongo dos ceros, uno del multiplicando y otro que corresponde al multiplicador, el producto será pues 14400. En efecto, decenas multiplicadas por decenas dan centenas al producto; luego 12 decenas multiplicadas por 12 decenas deben dar 144 centenas, ó 14400.

Si el multiplicador fuese la unidad seguida de ceros, lo único que habrá que hacer es escribir el multiplicando, y á su continuacion poner los ceros del multiplicador. Asi para multiplicar 4 por 100 escribo 400.

*Problemas, cuya resolucion pende de la multiplicacion.*

1.º Un regimiento provee 4 destacamentos de á 173 hombres cada uno. Se pregunta ¿quanta gente tiene destacada dicho regimiento?

Es claro se presentan dos modos de operar para indagar este número: 1.º tomando 4 veces el número 173 por partida de una suina (art. 27), ó bien 2.º multiplicando por 4 el número 173, que es el mas breve de los dos, y el verdadero objeto de la multiplicacion.

Diré pues:  $173 \times 4 = 692$ , que será el número de individuos destacados.

2.º *Problema.* Han llegado al Parque de artillería 168 carros que conducian 166 balas de cañon cada carro. Se quiere saber ¿quantas balas han traído los 168 carros?

La operacion se reduce á multiplicar segun las reglas dadas el número 168, que expresa el de carros, por 166 que expresa las balas que ha transportado cada carro; el producto que se halle indicará el número de balas que entre todos han transportado.

Diré pues:  $168 \times 166 = 27888$ , que son las balas que han conducido.

XXXV. El modo de comprobar si la multiplicacion ha sido bien hecha, se verá quando se trate del Partir.

Resta solo el exercitar á los alumnos en el uso de las operaciones anteriores con los dos Problemas siguientes, que ademas de esta ventaja presenta la de darles una justa idea de la fuerza de un regimiento de infantería de línea, y de otro de caballería, segun el último reglamento.

*Problema 1.º*

Un regimiento de infantería de línea al pie de guerra debe componerse de tres batallones. Cada batallon de seis compañías, de las cuales una de granaderos otra de cazadores, y las quatro restantes de fusileros: la compañía de granaderos se compone de 1 capitán, 2 tenientes, 1 subteniente, 1 sargento primero, 3 sargentos segundos, 2 tambores, 2 pífanos, 5 cabos primeros, 5 cabos segundos, 92 granaderos

incluidos los gastadores. La compañía de cazadores se compone de 1 capitán, 2 tenientes, 1 subteniente, 1 sargento primero, 3 sargentos segundos, 5 cabos primeros, 5 cabos segundos, 2 tambores y 85 cazadores. Cada compañía de fusileros se compone de 1 capitán, 2 tenientes, 2 subtenientes, 1 sargento primero, 4 sargentos segundos, 8 cabos primeros, 8 cabos segundos, 3 tambores, 136 fusileros. La plana mayor del regimiento se compone de 1 coronel, 1 teniente coronel, 1 comandante, 1 sargento mayor, 3 ayudantes, 3 abanderados, 3 capellanes, 3 cirujanos, 1 tambor mayor y 3 armeros.

Se quiere saber el número de individuos de que consta una compañía de granaderos, una de cazadores, y una de fusileros, y con estos datos hallar el número de individuos de que consta un batallón, y con este último resultado y el total de los individuos de plana mayor hallar el número total de individuos de un regimiento.

*Problema 2.º*

Un regimiento de caballería consta de 4 esquadrones: un esquadron de 3 compañías, y cada compañía de 1 capitán, 1 teniente, 1 alférez ó subteniente, 3 sargentos primeros, 2 sargentos segundos, 4 cabos primeros, 4 cabos segundos, 48 soldados carabineros ó granaderos montados, con 10 mas desmontados, y un trompeta montado.

La plana mayor se compone de 1 coronel, 1 teniente coronel, 2 comandantes de esquadron, 1 sargento mayor, 4 ayudantes, 4 porta-estandartes, 1 capellan, 1 cirujano, 1 mariscal-mayor, 1 picador, 1 trompeta de orden, 1 timbalero, 1 sillero y 1 armero.

Siendo de advertir que á los oficiales, mariscal-mayor, sillero y armero no les da el Rey caballo.

Se pregunta ¿de qué número de hombres, incluso los oficiales, y de qué número de caballos de S. M. se compone una compañía, de quantos un esquadron, de quantos la plana mayor, y finalmente de quantos el todo del regimiento?

XXXVI. Tambien se usa de la multiplicacion para reducir las especies mayores á otras mas pequeñas, por exemplo: se sabe que la estancia diaria de un soldado en el hospital es de 6 reales vellon: se desea saber quantos maravedices

compone esta estancia: sabemos que el real de vellon vale 34 maravedices; luego lo único que habrá que hacer es multiplicar 6 por 34, ó lo que es lo mismo (art. 28) 34 por 6: el producto 204 nos hará ver los maravedices que valen los seis reales correspondientes á la estancia diaria. El peso del fusil de ordenanza sin incluir la bayoneta ni portafusil es proximamente de 9 libras castellanas: se desea saber quantas onzas pesa, sabiendo de antemano que la libra castellana se divide en 16 onzas.



## QUINTA LECCION.

### *Del Partir.*

XXXVII. La partición es una resta abreviada, que sirve para hallar de un modo expedito quantas veces un número puede quitarse ó restarse de otro; pero un número, por exemplo 4, no puede quitarse de otro número 8 sino tantas veces como esté contenido en él. Diciendo pues: en 8 ¿quantas veces 4? 2 veces: sabré sobre la marcha que el número 4

puede quitarse dos veces de 8: se escribe  $\frac{8}{4}$  ó  $8 : 4 = 2$ ,

y se pronuncia 8 dividido, ó partido por 4 iguala á 2; ó en 8 ¿quantas veces 4? 2 veces. El número 8 que se ha de partir se nombra *dividendo*, el número 4 por quien se ha de partir se nombra *divisor*, y al número 2 que resulta de la partición se le da el nombre de *quociente*.

XXXVIII. El dividendo contiene al divisor tantas veces quantas unidades tiene el quociente. Luego, *multiplicando el divisor por el quociente se tiene por producto el dividendo*. Consecuente á lo dicho, el dividendo puede mirarse siempre como un producto cuyos dos factores son siempre el divisor y el quociente. Así quando se conozca un producto y uno de los factores de este producto, será facil hallar el otro factor; porque *dividiendo ó partiendo el producto conocido considerado como un dividendo por el factor conocido considerado como divisor, se tendrá el otro factor por quociente*.

Este es el modo de comprobar una multiplicacion que habíamos ofrecido (art. 35): en efecto, es evidente *que si se parte el producto de una multiplicacion qualquiera por el multiplicador de ella, si la multiplicacion ha sido bien hecha deberá resultar por quociente de esta particion el multiplicando de la multiplicacion; y que si se parte el producto por el multiplicando deberá resultar el multiplicador al quociente.*

XXXIX. De lo dicho se infiere *que el partir es operacion inversa del multiplicar; de suerte que el multiplicar y partir una cantidad por un mismo número es dexar la cantidad como estaba.*

Por exemplo, si despues de multiplicado 4 por 3 se parte el producto 12 por 3, resultará otra vez el 4.

XL. Del principio sentado (art. 38) de poderse considerar el dividendo como el producto del divisor por el quociente, y tener demostrado (art. 29 núm. 2.º) que la operacion de multiplicar un producto por qualquiera número equivale á hacer la misma operacion con uno de sus dos factores, resulta con evidencia *que si dexando el mismo divisor se multiplica el dividendo por qualquiera número, resultará el quociente primitivo multiplicado por dicho número.*

Por exemplo, el quociente de 8 partido por 2 es 4; y si se multiplica el dividendo primitivo 8 por el número 5, resultará por nuevo dividendo 40, que partido por el mismo divisor 2 da el nuevo quociente 20, igual al primitivo quociente 4 multiplicado por 5.

XLI. De este principio resulta, que en vez de multiplicar un quociente por qualquiera número se puede multiplicar el dividendo por el mismo número, y dexar el mismo divisor.

XLII. Hemos visto (art. 38) que el dividendo contiene al divisor tantas veces quantas unidades tiene el quociente. Luego si dexando el mismo dividendo se dupla, tripla &c. el divisor, es claro no lo podrá contener el dividendo tantas veces, pues este nuevo divisor es dos, tres &c. veces mayor que el divisor primitivo, y es igualmente evidente que solo lo podrá contener un número de veces mitad, tercio &c. que antes; esto es, que el quociente que resultará será la mitad, el tercio &c. del anterior. Luego podremos concluir *que la operacion de multiplicar el divisor por qualquiera número, equivale á la de partir el quociente por el mismo número.*

Por exemplo, 40 partido por 4 da por quociente 10; y multiplicando el divisor 4 por 5 resulta el nuevo divisor 20,

por el qual partiendo el 40 resulta el nuevo quociente 2, que es igual al quociente primitivo 10 partido por 5.

XLIII. Teniendo demostrado (art. 40) que multiplicar un dividendo por qualquiera número equivale á multiplicar el quociente por dicho número; y acabando de ver (núm. 42) que multiplicar el divisor por un número qualquiera equivale á partir el quociente por dicho número, de ambos principios concluiremos con evidencia *que multiplicando por el mismo número el dividendo y divisor no variará el quociente*, supuesto que la primera operacion se reduce á multiplicar el quociente por un número, y la segunda á partir dicho quociente por el mismo número; cuyas dos operaciones no deben variar el valor del expresado quociente (art. 39).

Por exemplo, 12 partido por 3 da por quociente 4; y si se multiplica el 12 y el 3 por 5 resultará 60 partido por 15, cuyo quociente es tambien 4.

XLIV. Siguese de esto y de lo dicho (art. 39) *que partiendo el dividendo y divisor por un mismo número, tampoco varía el quociente*.

Por exemplo, 48 partido por 8 da por quociente 6; y si se parte el 48 y el 8 por 2 resultará 24 partido por 4, cuyo quociente es tambien 6.

XLV. Para dividir un número simple, ó un número compuesto de dos cifras por un número simple, no hay mas regla que prescribir. Se ve desde luego que  $9 : 3 = 3$ ; que  $72 : 9 = 8$ ; y que  $89 : 9 = 9$  y queda un resto de 8. En efecto, 9 veces 9 no son mas que 81. Se escribe el resto á continuacion del quociente encima de una raya, y debaxo de dicha raya se pondrá el divisor por quien se ha partido, en

esta forma  $89 : 9 = 9 \frac{8}{9}$ .

Quando un número es partible exáctamente por otro número, el primero se llama *múltiplo* del segundo, y el segundo *parte aliquota* del primero. Asi el número 8 es múltiplo de 4 y de 2; 4 y 2 son las partes aliquotas de 8. Se llama número primo ó primero todo entero que no es múltiplo de ningun entero mayor que la unidad: 1, 2, 3, 5, 7, 11 &c., son números primeros.

XLVI. Quando se trata de partir un número compuesto de mas de dos cifras por un número simple, es necesario escribir el divisor á la derecha del dividendo, separando estos dos

números con una raya vertical, y luego tirar otra raya debaxo del divisor, y escribir debaxo de esta raya las cifras del quociente á medida que se vayan hallando. Para hallarlas es preciso dividir sucesivamente por el mismo divisor todas las partes del dividendo, yendo de la izquierda á la derecha hasta agotar ó concluir el dividendo.

Para partir 7328 por 8, escribo estos dos números como se verá á continuacion:

$$\begin{array}{r|l}
 \text{dividendo..... } 7328 & 8 \text{ divisor} \\
 \hline
 72 & 916, \text{ quociente} \\
 \hline
 & 12 \\
 & 8 \\
 \hline
 & 48 \\
 & 48 \\
 \hline
 & 00
 \end{array}$$

Quando la primera cifra del dividendo total contiene al divisor, solo se toma esta primera cifra para dividendo parcial; pero como en el caso de este exemplo la primera cifra 7 del dividendo no contiene al divisor 8, tengo que tomar 73, esto es, dicha primera cifra 7 y la segunda 3, cuyas dos cifras forman la reunion de 73 centenas pertenecientes al dividendo, y digo: en 73 ¿quantas veces 8? 9 veces; y escribo 9 debaxo de la raya, y se deduce que este 9 debe expresar centenas, pues aunque es cierto que el número 73 considerado solo no contiene á 8 sino 9 veces con 1 de resto, es igualmente cierto que considerándolo formando parte del número 7328 vale realmente 73 centenas, y de consiguiente contiene 8, 9 centenas de veces, y queda 1 centena de resto. En seguida digo:  $8 \times 9 = 72$ , que resto del dividendo parcial 73 despues de haberlo escrito debaxo; y al residuo me queda 1 centena que asimismo escribo, y al lado de esta baxo las 2 decenas del dividendo, y para evitar equivocaciones pongo un punto encima de la cifra 2 del dividendo que he baxado, hecho lo qual tendremos 12 por segundo dividendo parcial. Digo pues: en 12 ¿quantas veces 8? 1 vez; escribo en el quociente este 1, que expresa 1 decena,

y digo:  $8 \times 1 = 8$ , que resto del dividendo parcial 12: el resto es 4 decenas: baxo las 8 unidades, y las señalo con un punto en el dividendo, y escribiéndolas junto al resto 4, y tengo 48 unidades por último dividendo parcial. Digo: en 48 unidades ¿quantas veces 8? 6 veces: escribo al quociente esta cifra 8 que expresa unidades, y digo:  $8 \times 6 = 48$ , que quito del dividendo parcial 48, y el resto es 0. Asi, el número 7328 contiene á 8, 916 veces exáctamente.

XLVII. Para partir un número compuesto por un número compuesto, por exemplo 151982 por 495, dispongo el dividendo y el divisor como en el exemplo anterior:

$$\begin{array}{r|l}
 \text{dividendo.....} & 151982 \\
 \hline
 & 1485 \\
 \hline
 & 3482 \\
 & 3465 \\
 \hline
 & 17 \text{ residuo}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 495 \text{ divisor} \\
 \hline
 307 \frac{17}{495} \text{ quociente}
 \end{array}$$

Luégo tomo por primer dividendo parcial las quatro cifras 1519 del dividendo total, porque las tres primeras no pueden contener al divisor: busco quantas veces el número 1519 contiene á 495, y para mayor facilidad busco solamente quantas veces las 15 centenas del dividendo parcial 1519 contiene á las 4 centenas del divisor 495, diciendo: en 15 ¿quantas veces 4? 3 veces: multiplico 495 por 3, el producto 1485 que resulta puede restarse de 1519, y de consiguiente el divisor está contenido 3 veces en el dividendo parcial: escribo pues al quociente esta cifra 3, que expresará centenas, pues que el dividendo parcial 1519 expresa 1519 centenas, y resto 1485 de 1519: el resto es 34.

Al lado de 34 baxo al momento la cifra 8 del dividendo, y tengo 348 decenas por segundo dividendo parcial; pero este número 348 no contiene á 495, es pues preciso que ponga 0 al quociente, para señalar que este quociente no contiene decena.

Al lado de 348 baxo inmediatamente la cifra 2, que es la última del dividendo, lo que nos da 3482 unidades por último dividendo parcial. En lugar de decir en 3482 quantas veces 495, digo por la misma razon que anteriormente hemos

expresado, en 34 ¿quantas veces 4? 8 veces: antes de escribir 8 al quociente multiplico 495 por 8: el producto 3960 que me resulta es mayor que el dividendo parcial 3482: este dividendo no contiene pues 8 veces al divisor: pruebo con 7 del mismo modo, y veo que el producto 3465 puede restarse de 3482: escribo pues. al quociente esta cifra 7, que evidentemente expresa unidades, y resto 3465 de 3482: el resto 17 que tambien se llama *residuo* lo escribo tambien en el quociente encima de una raya, poniendo debaxo de esta el divisor de la particion en esta forma  $\frac{17}{495}$ : mas adelante ve-

remos la razon en que se funda el escribir asi el residuo en el quociente. Asi, diremos que 151982 contiene al número 495, 307 veces con un resto de 17.

XLVIII. La regla que acabamos de ver es infalible. Porque partir un número por otro, es buscar quantas veces el primero contiene al segundo. Luego siguiendo la regla prescripta se halla quantas veces cada parte del dividendo contiene al divisor; y por cosequencia, quantas veces todo el dividendo contiene al divisor: luego la regla es cierta.

XLIX. Para conocer si se ha padecido equivocacion al operar, es necesario multiplicar el divisor por el quociente: si la particion que se quiere comprobar ha sido bien hecha, el producto deberá dar el dividendo (art. 37). Quando hay un residuo, es preciso añadir al producto del divisor por el quociente el residuo que habia quedado de dicha particion. Porque, si es verdad, por exemplo, que el número 151982 contiene al número 495, 307 veces con un resto de 17, es evidente que es forzoso para volver á producir 151982 añadir 17 al producto 151965 de 495 por 307.

L. No hay precision de escribir debaxo de cada dividendo parcial el producto del divisor por cada cifra que se pone al quociente. Se abrevia la particion haciendo la resta a medida que se multiplica cada cifra del divisor por la cifra que expresa quantas veces el divisor está contenido en el dividendo parcial sobre el qual se opera.

Sea, por exemplo, 11879 á partir por 29.

$$\begin{array}{r|l}
 11879 & 29 \\
 279 & 409 \frac{18}{29} \\
 \hline
 18 &
 \end{array}$$

Tomo 118 por primer dividendo parcial, y digo: en 11 ¿quantas veces 2? 5 veces: pruebo con 5 y encuentro que es demasiado grande, y que el dividendo parcial 118 no contiene á 29 sino 4 veces: escribo pues 4 al quociente, y multiplico el divisor diciendo:  $9 \times 4 = 36$ ; 36 no puede restarse de 8: para poder practicar esta resta añado 30 á 8, resulta 38, y digo: 36 de 38 quedan 2, que escribo debaxo de la última cifra de la derecha de 118, y retengo estas 3 decenas para añadir las por compensacion al producto de las decenas que me resultarán multiplicando las dos decenas del divisor por 4. Digo pues:  $2 \times 4 = 8$ , y 3 retenidos  $= 11$ ; 11 de 11 queda 0.

Al lado del residuo 2 baxo la cifra 7 del dividendo, como que el dividendo parcial 27 no contiene á 29, escribo 0 al quociente, y en seguida al lado de 27 baxo el 9, lo que me da 279 por último dividendo parcial. Despues de haber reconocido que este dividendo parcial no contiene al divisor 29 mas de 9 veces, escribo 9 al quociente, y multiplico al divisor diciendo:  $9 \times 9 = 81$ ; 81 de 9 no se puede: añado 80 á 9 y tengo 89: digo pues: 81 de 89 quedan 8, que escribo debaxo de la primera cifra de la derecha del dividendo parcial 279, y retengo 8 decenas: multiplico las dos decenas del divisor por 9 diciendo:  $2 \times 9 = 18$ , y 8 retenidos  $= 26$ ; 26 de 27 queda 1, que escribo. Asi, tengo por quociente 409, con el residuo 18.

LI. Adviértase que en cada particion parcial jamas puede ponerse mas de 9 al quociente, porque nuestra Aritmética es denaria. Asi, en el exemplo anterior, aunque las dos primeras cifras 27 del dividendo parcial 279 contienen 13 veces la primera cifra 2 del divisor 29, no hemos puesto mas que 9 al quociente; y el resto 18 mas pequeño que el divisor 29 prueba claramente que el dividendo parcial 279 no contiene al divisor 29 mas que 9 veces.

Si en el curso de una particion se hallase un residuo que sea mayor que el divisor, ó que solamente le iguale, será esta una prueba que nos manifestará que el divisor está aun contenido en el dividendo alguna vez mas, y de que por consiguiente la cifra puesta al quociente es demasiado pequeña. Es pues necesario en este caso aumentar esta cifra de una, dos &c. unidades.

LII. Si el dividendo y el divisor estubiesen terminados por ceros, se puede suprimir tanto al uno como al otro nú-

mero tantos ceros como haiga en seguida de aquel que menos tenga, y se partirá la parte que queda del dividendo por la parte que quede del divisor. Por exemplo: si tubiese 1440000 que partir por 1200, quitaría dos ceros al dividendo y dos ceros al divisor: despues dividire 14400 parte que queda del dividendo, por 12 parte que queda del divisor. Se ve muy bien que 14400 centenas contienen á 12 centenas precisamente tantas veces como el número 14400 contiene al número 12.

Si el divisor fuese la unidad seguida de ceros, bastaria para tener el quociente borrar en el dividendo de derecha á izquierda tantos ceros como haiga á continuacion del divisor. Pero si no hubiese ceros á continuacion del dividendo, entónces, para obtener al momento el quociente, se separarian sobre la derecha del dividendo tantas cifras quantos ceros haiga despues de la unidad del divisor, y se indicará que estas cifras deben dividirse por el divisor. Asi, si se tiene 43649 y que se quiera parir por 1000, el quociente sera

$$43 \frac{649}{1000}$$

Sirve el partir para repartir un número en partes iguales; por exemplo, para partir 8 en 4 partes iguales parto 8 por 4; el quociente 2 es el valor de cada parte.

Sirve igualmente para reducir las especies menores á especies mayores: por exemplo, para saber quantos pesos fuertes importan 1580 reales vellón, sabiendo de antemano que el peso fuerte vale veinte reales vellón; por lo que partiré 1580 por 20, y el quociente 79 manifiesta el número de pesos fuertes que se deseaba saber.

#### Problema.

Un General despues de haber premiado con las mas apreciables recompensas que puedan lisonjear á los verdaderos militares, esto es con las honorificas, el mérito que en una accion habia contraido un destacamento compuesto de 8 sargentos, 16 cabos, 135 granaderos y 256 fusileros, entrega por via de gratificacion al benemérito oficial que los mandaba 2616 reales vellón para que los distribuya á sus súbditos en esta forma: al granadero gratificacion doble de la del fusilero, al cabo doble de la del granadero, y finalmente á un sargento doble de la de un cabo. Preguntase: ¿quanto le tocará á cada granadero, cabo y sargento?

D

## SEXTA LECCION.

*De los Quebrados, ó Fracciones en general.*

LIII. Se llaman *fracciones*, *expresiones fraccionarias*, ó *quebrados* las cantidades menores que la unidad. Una mitad, dos tercios, tres cuartas &c., son unos quebrados.

Para representar un quebrado se usa de dos números que se separan con una raya. El número superior se llama *numerador*, porque manifiesta el número de partes que se toman, y el número inferior se llama *denominador*, y manifiesta en cuántas partes iguales se considera dividida la unidad. Al todo de la expresión se le da el nombre general de *quebrado*, *fracción* ó *expresión fraccionaria*; y el numerador y denominador se llaman *términos del quebrado* ó *fracción*. El quebrado se suele llamar particularmente *fracción propia*, ó *quebrado propio*, quando representa una cantidad menor que la unidad, esto es, quando se toma un número de partes menor que aquel en que se considera dividida la unidad, lo qual se conoce en que el numerador es menor que el denominador; y se llama *fracción impropia*, ó *quebrado impropio* quando representa una cantidad igual, ó mayor que la unidad, esto es, quando se toma un número de partes igual ó mayor que aquel en que se considera dividida la unidad, lo qual se conoce en que el numerador es igual ó mayor que el denominador. Según lo dicho se infiere, que  $\frac{2}{3}$  es un quebrado propio, y que  $\frac{3}{3}$  y  $\frac{4}{3}$  son quebrados impropios.

Para enunciar los quebrados se expresa primero el valor de su numerador, y despues el de su denominador. Si dicho denominador es 2, las partes se llaman *medios*, ó *mitades*. Si es 3, se llaman *tercios*, ó *terceras partes*; por exemplo  $\frac{1}{2}$  un medio;  $\frac{1}{3}$  un tercio. Si el denominador es mayor que 3 y menor que 11, se lee como sigue: v. gr.  $\frac{1}{4}$  un cuarto,  $\frac{2}{5}$  dos quintos,  $\frac{1}{6}$  un sexto,  $\frac{4}{7}$  quatro septimos,  $\frac{5}{8}$  cinco octavos,  $\frac{2}{9}$  dos novenos,  $\frac{7}{10}$  siete décimos. En adelante, siempre que el denominador no sea la unidad seguida de dos ó mas ceros, se enunciará simplemente el denominador, añadiendo la termina-

cion avos; por exemplo,  $\frac{8}{11}$  ocho onceavos,  $\frac{9}{16}$  nueve diez <sup>27</sup> y seisavos; pero decimos tres centésimos para enunciar  $\frac{3}{100}$ .

Llámase *fraccion simple* quando es la unidad la que se supone dividida en partes, como quando decimos los  $\frac{3}{5}$  de una legua; y *fraccion compuesta* quando la cantidad que se considera dividida en partes no es la unidad fundamental; y en tal caso se escribe dicha cantidad á la derecha del quebrado, interponiendo entre el quebrado y la cantidad que se ha de dividir en partes la palabra *de*, que se omite en las fracciones simples; por exemplo  $\frac{7}{12}$  de 5 libras es un quebrado compuesto, y tambien lo es el siguiente  $\frac{3}{8}$  de  $\frac{1}{2}$  legua.

Adviértase, que quando los dos términos de un quebrado son iguales, el quebrado vale la unidad. Así,  $\frac{2}{2} = 1$ ,  $\frac{4}{4} = 1$ ,  $\frac{19}{19} = 1$ .

LIV. Adviértase, que en general en toda particion puede considerarse el dividendo de ella como el numerador de un quebrado, el divisor como denominador de dicho quebrado; y el todo de este quebrado como el quociente de la particion; y concluir por contraposicion que puede considerarse el numerador de todo quebrado, como un dividendo de una particion, el denominador como un divisor, y el total del quebrado como el quociente de dicha particion. En efecto, tratase de repartir entre 5 individuos 4 varas de paño á partes iguales; arreglándonos á lo que acabamos de enunciar diremos, sean las 4 varas que se han de repartir el numerador del quebrado, y el número 5 de individuos entre quienes se han de repartir el denominador, el quebrado resultante  $\frac{4}{5}$  de una vara será el quociente, ó la parte que á cada uno toca. Para convenirse de que realmente  $\frac{4}{5}$  de una vara es lo que á cada uno pertenece, basta atender á que si las 4 varas que hemos tomado por dividendo se repartiesen una por una á cada uno de los 5 individuos, les tocaría  $\frac{1}{5}$  de la primera vara, otro quinto de

la segunda, otro de la tercera, y finalmente otro de la quarta vara, lo que en suma será los  $\frac{4}{5}$  de una vara para cada uno.

LV. De la definición del quebrado impropio (art. 53) se infiere, que el valor de estos quebrados es igual ó mayor que la unidad: igual á la unidad quando el numerador del quebrado es igual al denominador, segun tenemos visto en el mismo (art. 53), y mayor que la unidad quando el numerador es mayor que el denominador; de lo que se infiere, que todo quebrado impropio encierra en sí un cierto número de enteros que es conducente saber hallar: para ello executese lo siguiente: *pártase el numerador por el denominador, el quociente manifestará el número de enteros que encerraba en sí el quebrado; y si resultase un residuo en esta particion, claro está que este residuo se compondrá de partes fraccionarias de la misma especie que el quebrado propuesto.* Sea por exemplo el quebrado  $\frac{20}{5}$ ; reflexiónese que se necesitan 5 puntos para formar un entero; luego en el quebrado  $\frac{20}{5}$  habrá tantos enteros quantas veces 20 quintos contengan á 5, quintos: para indagarlo tendré que partir á 20 por 5, y encuéntro 4 por quociente; de consiguiente concluiré que  $\frac{20}{5} = 4$  enteros, y de que el proceder que hemos empleado para hallar este resultado es conforme á la regla que acabamos de prescribir. Si el quebrado fuese  $\frac{17}{5}$ , partiendo el numerador 17 por el denominador 5 tendré 3 al quociente con un resto de 2, que claro está que serán 2 quintos: luego  $\frac{17}{5} = 3$  enteros  $\frac{2}{5}$ .

Obsérvese que el residuo de toda particion es un quebrado propio que puede escribirse á continuacion del quociente, poniendo dicho residuo por numerador del quebrado, y el divisor de la particion por denominador de dicho quebrado. Segun esto, en los exemplos puestos (en los artículos 47 y 50), los quocientes serán  $307\frac{1}{495}$ , y  $409\frac{1}{29}$ . Para convencerse de que es así, manifestemos estas dos particiones baxo la forma fraccionaria, como sigue  $\frac{151682}{495}$  la primera, y  $\frac{11879}{29}$  la segunda: estos dos quebrados manifiestan los dos quocientes de las dos particiones,

y ambos son improprios; y empleando el modo de operar que hemos indicado, para averiguar el número de enteros que contienen partiremos el numerador de cada uno por su correspondiente denominador, el primer quebrado nos dará un cociente de 307 enteros y un residuo de 17, que claro está que serán 17 quatrocientos noventa y cincoavos; esto es, que  $\frac{151,8}{495} = 307 \frac{17}{495}$ ; por la misma razón  $\frac{18,6}{29} = 409 \frac{18}{29}$ .

### Del modo de operar con los Quebrados.

LVI. Tenemos demostrado (art. 54) que todo quebrado se puede considerar como el cociente de la división del numerador por el denominador, y por lo tanto, las consecuencias (artíc. 40, 41, 42, 43) se aplicarán también á los quebrados; esto es, que

1.º La operación de multiplicar executada con el numerador equivale á executar la misma con el quebrado (art. 41).  
2.º La operación de multiplicar el denominador por qualquiera número, equivaldrá á partir el quebrado por dicho número (art. 42).

3.º Las operaciones de multiplicar por un mismo número executadas con los dos términos del quebrado no alteran su valor; y lo mismo sucede con las de partir (art. 43 y 44).

LVII. Quando un quebrado está expresado por términos grandes, es preciso, para hacerse bien cargo de su valor, reducirlo á expresion mas sencilla, esto es á términos menores, cuya operación se llama *simplificar los quebrados*; y si este proceder se repite hasta donde pueda alcanzar, esto es que el quebrado no pueda simplificarse mas, se dice que el quebrado se ha reducido á su *minima expresion*. Para lograrlo, se partirán los dos términos del quebrado por 2, 3, 5 &c., todo lo que sea dable; y como que esta operacion se reduce á partir el numerador y denominador del quebrado por el mismo número; es evidente (art. 56 núm. 3) que el quebrado simplificado será igual al primitivo.

Se partirá por 2 quando los dos términos del quebrado sean pares, porque todo número par estando multiplicado por 2 es divisible por 2. Así,  $\frac{8}{32}$  es partible por 2, y desde luego se reduce á  $\frac{4}{16}$ , luego á  $\frac{2}{8}$ , y finalmente á  $\frac{1}{4}$ .

Se partirá por 3 cuando la suma de las cifras del numerador y las cifras del denominador hagan cada una 3, ó un múltiplo de 3; porque todo número cuya suma de cifras valga 3 ó un número múltiplo de 3, es partible por 3. Por exemplo, los dos términos del quebrado  $\frac{15}{423}$  son partibles por 3, porque la suma 6 de las cifras del numerador es un múltiplo de 3, así como 9 suma de las cifras del denominador. Así, el quebrado  $\frac{15}{423}$  se reduce á  $\frac{5}{141}$ .

Se partirá por 5 quando los dos términos estén terminados á la derecha por 5, ó el uno por 5 y el otro por 0. Porque todo número que termina por 5 ó por 0 es múltiplo de 5, y por consiguiente partible por 5. Según esto, los dos términos del quebrado  $\frac{15}{25}$  son partibles por 5, y el quebrado reducido  $\frac{3}{5}$ . Por la misma razón  $\frac{10}{15}$  se reduce á  $\frac{2}{3}$ . Si los dos términos acabasen por 0, sería preciso partirlos por 10. Así,  $\frac{40}{50}$  se reducen á  $\frac{4}{5}$ .

**LVIII. Problema.** Reducir los enteros baxo forma fraccionaria.

Para executar esta operación se presentan dos métodos:  
 1.º Poner el entero por numerador de un quebrado, y por denominador la unidad: por exemplo, sea el número 4, diré  $4 = \frac{4}{1}$ ; es evidente que el valor del entero no ha variado, pues que qualquiera cantidad partida por la unidad da un quociente igual á dicha cantidad.

2.º Poniendo por denominador el del quebrado á cuya denominación se quiere reducir el entero, y por numerador el producto de dicho denominador por el entero: por exemplo, se quieren reducir á quintos 4 varas, diré  $\frac{4 \times 5}{5} = \frac{20}{5}$ . Es claro que esta operación se reduce siempre á multiplicar y partir el entero por el denominador; lo que (art. 39) no debe alterar su valor. Concluiremos pues con evidencia, que el valor del entero no se altera reduciéndolo así á forma fraccionaria.

**LIX. Problema.** Reducir dos ó mas quebrados á comun ó igual denominador.

31

Si son dos quebrados se multiplicarán los dos términos del primer quebrado por el denominador del segundo, y los dos términos del segundo por el denominador del primero.

Si son mas de dos los quebrados propuestos, se multiplicarán los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demas quebrados.

*Exemplo 1.* ° Se quieren reducir á comun denominador los dos quebrados  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{3}{5}$ .

Multiplicaré por 5 los dos términos del quebrado  $\frac{1}{2}$ , y tendré  $\frac{5}{10}$ ; luego multiplicaré por 2 los dos términos del quebrado  $\frac{3}{5}$  y tendré  $\frac{6}{10}$ . Los quebrados reducidos serán  $\frac{5}{10}$  y  $\frac{6}{10}$ .

*Exemplo 2.* ° Sean  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{3}{7}$  los tres quebrados que se quieren reducir á comun denominador.

Multiplicaré los dos términos del quebrado  $\frac{1}{2}$  por el producto de 5 por 7, que son los denominadores del segundo y tercer quebrado, y tendré  $\frac{1 \times 5 \times 7}{2 \times 5 \times 7} = \frac{1 \times 35}{2 \times 35} = \frac{35}{70}$ .

Despues multiplicaré los dos términos del segundo quebrado  $\frac{4}{5}$  por el producto de 2 por 7, que son los denominadores del primer y tercer quebrado, y tendré  $\frac{4 \times 2 \times 7}{5 \times 2 \times 7} = \frac{4 \times 14}{5 \times 14} = \frac{56}{70}$ .

En seguida multiplico los dos términos del último y tercer quebrado  $\frac{3}{7}$  por el producto de 2 por 5, que son los denominadores del primer y segundo quebrado, y tendré  $\frac{3 \times 2 \times 5}{7 \times 2 \times 5} = \frac{3 \times 10}{7 \times 10} = \frac{30}{70}$ .

Los quebrados reducidos son pues  $\frac{35}{70}$ ,  $\frac{56}{70}$ ,  $\frac{30}{70}$ .

*Demostracion.* Es evidente que los quebrados reducidos tienen el mismo valor que los quebrados propuestos, pues lo único que se ha hecho para reducirlos á comun denominador

ha sido multiplicar los dos términos de cada quebrado por un mismo número ó por un mismo producto, lo que no altera el valor del quebrado segun hemos visto (art. 56 núm. 3).

No es menos evidente que por este método los quebrados reducidos tendrán el mismo denominador, puesto que el denominador de cada quebrado reducido es el producto de todos los denominadores de los quebrados propuestos.

**LX. Problema.** Sumar quebrados, y enteros y quebrados.

El sumar dos ó mas quebrados que tengan el mismo denominador, no presenta dificultad, pues es evidente que  $\frac{1}{4}$  añadido á  $\frac{2}{4}$  son  $\frac{3}{4}$ ; así mismo  $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{3}{9} = \frac{6}{9}$ ; luego podremos decir que para sumar dos ó mas quebrados que tengan el mismo denominador, se reduce la operación á sumar todos los numeradores de los quebrados, y esta suma será el numerador de la suma que se busca, al que se le pondrá el mismo denominador de los quebrados.

Pero sería un absurdo aplicar esta regla al caso de ser distintos los denominadores de los quebrados: en efecto, si se ha de sumar  $\frac{1}{2}$  con  $\frac{1}{3}$ , si se dixerá que á 2, suma de los numeradores de los quebrados, se le habia de poner el denominador 2 del primer quebrado, ó bien 3 denominador del segundo, resultaría en el primer caso  $\frac{2}{2} = 1$  por suma, y en el segundo  $\frac{2}{3}$ ; y es igualmente absurdo decir, que  $\frac{1}{2}$  vara y  $\frac{1}{3}$  de vara compongan juntas una vara, como que solo compongan  $\frac{2}{3}$  de vara, puesto que  $\frac{1}{2}$  vara es una parte distinta de  $\frac{1}{3}$  de vara. Esta aparente imposibilidad de sumar estos quebrados se desvanece con reducirlos á comun denominador (art. 59). En efecto, los dos quebrados  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{2}{3}$  reducidos á comun denominador, son  $\frac{3}{6}$  y  $\frac{4}{6}$ ; y segun lo que acabamos de prescribir para sumar los quebrados que tienen el mismo denominador; será la suma  $\frac{7}{6}$ ; luego  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$ , de donde deducimos la siguiente regla.

Que para sumar dos ó mas quebrados que no tengan el mismo denominador, 1.º se han de reducir antes de todas cosas á comun denominador todos los quebrados: 2.º se sumarán todos los numeradores de los quebrados así reducidos, y este resultado será el numerador de la suma que se busca, al que se le pondrá por denominador el denominador comun.

Si en esta operacion entran enteros se suman aparte, á menos que estos con los quebrados no haigan de formar el factor de una multiplicacion ó de una particion; en cuyo caso se reducen á forma fraccionaria (art. 58) de la misma denominacion que los quebrados, y se suman sus numeradores con los del quebrado.

*Exemplo.* Se quiere sumar  $4\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + 5\frac{1}{1} + \frac{1}{5}$ , cuya expresion simplificaré ante todas cosas sumando 4 enteros con 5 enteros, y me resultará la mas sencilla  $9\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5}$ : reduciré á comun denominador los dos quebrados, y me resultarán los reducidos  $\frac{5}{15}$  y  $\frac{3}{15}$ ; en seguida reduzco á dicha denominacion los 9 enteros, y tendré  $9 = \frac{9 \times 15}{15} = \frac{135}{15}$ ; luego  $9\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} = \frac{135}{15} + \frac{5}{15} + \frac{1}{15} + \frac{3}{15} = \frac{143}{15}$  sumando los numeradores y poniendo á la suma el denominador comun, segun acabamos de ver debe practicarse.

**LXI. Problema.** Restar quebrados.

1.º El restar un quebrado de otro de igual denominacion no puede presentar dificultad: claro está que si de  $\frac{4}{5}$  se resta

$\frac{1}{5}$  que quedan  $\frac{3}{5}$  al residuo; pero si los denominadores son distintos es forzoso (por las razones expresadas en el artículo anterior) reducirlos á comun denominador, y de verificado se restará el numerador menor del mayor, poniendo á la diferencia el denominador comun.

*Exemplo.* Se quiere restar  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{4}{5}$ , reduciéndolos á comun denominador, tendré  $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ , y  $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$ ; luego  $\frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}$  será el residuo.

2.º Si hay enteros se suelen restar aparte; y si en dicho caso resultase mayor el numerador del quebrado del sustraendo que el numerador del quebrado del minuendo, se quitará una unidad á los enteros de dicho minuendo, y al numerador de su quebrado se le agrega el denominador del quebrado.

*Exemplo.* Se quiere restar 3 y  $\frac{3}{4}$  de 9 y  $\frac{1}{3}$ .

Empiezo reduciendo los dos quebrados á comun denominador, y tendré  $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ , y  $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ ; y como que no puedo restar el numerador del primero del numerador del segundo, para poder practicar la resta tengo que tomar una unidad de los enteros del minuendo (art. 27), para agregarla al quebrado  $\frac{4}{12}$ ; y para poder verificar esta suma reduzco esta unidad á forma fraccionaria del mismo denominador 12 (art. 58 núm. 2), y tendré  $1 = \frac{12}{12}$ ; diré pues  $\frac{4}{12} + \frac{12}{12} = \frac{16}{12}$ ; pero esta última operación se ha reducido á agregar el denominador 12 al numerador 4 del quebrado  $\frac{4}{12}$  del minuendo. Paso ahora á restar de  $\frac{16}{12}$  el quebrado del sustraendo  $\frac{9}{12}$ , y el residuo será  $\frac{7}{12}$ ; en seguida paso á los enteros y digo: 9 enteros, de los cuales he quitado 1, quedan en 8, de cuyo número resto 3 del sustraendo, quedan 5; luego el residuo total será  $5\frac{7}{12}$ .

*Demostracion.* Siendo principios generales todos los que han servido de fundamento á las operaciones anteriores, parece escusado advertir son de una aplicacion general á todos los problemas de esta especie.

**LXII. Problema.** Multiplicar un quebrado por un entero, ó lo que es lo mismo (art. 28 último párrafo) un entero por un quebrado.

*Multipíquese el numerador del quebrado por el entero, y el resultado será el numerador del producto, al que se le pondrá por denominador el denominador del quebrado.*

*Exemplo.* Se quiere multiplicar  $\frac{2}{3}$  por 9 enteros: el producto será  $\frac{2 \times 9}{3} = \frac{18}{3}$ , y reduciendo esta expresion á enteros y quebrados (art. 55), tendremos  $\frac{18}{3} = 6$  exáctamente.

*Demostracion.* Fúndase esta regla en lo establecido (art. 56 núm. 1.º).

**LXIII. Problema.** Partir un quebrado por un entero.

Sin alterar en nada el valor del numerador del quebrado, póngase este por numerador del quociente; multiplíquese luego el denominador del quebrado por el entero, y póngase el producto por denominador del quociente.

*Exemplo.* Se quiere partir el quebrado  $\frac{3}{7}$  por 4; será el quociente  $\frac{3}{7 \times 4} = \frac{3}{28}$ .

*Demostracion.* Fúndase esta regla en lo establecido (art. 56 núm. 2.º).

**LXIV. Problema.** Multiplicar un quebrado por otro.

Para multiplicar un quebrado por un quebrado, es necesario, 1.º multiplicar el numerador del primer quebrado por el numerador del segundo, lo que dará el numerador del producto; 2.º multiplicar el denominador del primero por el denominador del segundo, lo que dará el denominador del producto.

*Exemplo.* Para multiplicar  $\frac{2}{3}$  por  $\frac{4}{5}$  digo; 4 veces 2 son 8: este resultado es el numerador del producto; y después digo, 5 veces 3 son 15, y este resultado es el denominador del producto: el producto será pues  $\frac{8}{15}$ .

*Demostracion.* Véase aquí la razon en que se funda la regla anterior. Si se multiplicase  $\frac{2}{3}$  por el entero 4, tendria por producto  $\frac{8}{3}$  (art. 62); pero este producto es 5 veces demasiado grande, pues el multiplicador que debo emplear no es 4 enteros, sino el quinto de 4, siendo evidente que el quinto de quatro es lo mismo que los quatro quintos de uno. Luego para reducir el producto  $\frac{8}{3}$  á su justo valor, es preciso tomar su quinta parte, es decir, partirlo por 5, lo que se executará multiplicando el denominador por 5 (art. 63); luego  $\frac{8}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$ , resultado conforme al que se deduce de la regla: luego es exácta la expresada regla.

Si fuesen mas de dos los quebrados que se han de multiplicar, la regla se reducirá á multiplicar entre sí todos los

numeradores de los quebrados propuestos, y el resultado será el numerador del producto: luego se multiplicarán entre sí todos los denominadores de los quebrados propuestos, y el producto será el denominador del producto.

*Exemplo.* Se quieren multiplicar  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$ , el producto será  $\frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4} = \frac{6}{24}$ .

*Demostracion.* Si solo se hubiesen de multiplicar el primer y segundo quebrado  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{2}{3}$ , el producto sería  $\frac{1 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{6}$ : por este primer producto quedan los dos primeros quebrados reducidos á uno solo: luego la multiplicacion por el tercero no puede sufrir dificultad, segun acabamos de ver, en el caso de tener que multiplicar un quebrado por otro: en efecto, esta última multiplicacion se reducirá á  $\frac{2 \times 3}{6 \times 4} = \frac{6}{24}$ , resultado conforme al que se logra por el proceder que prescribe la regla anterior.

LXV. Partir un quebrado por otro.

Para partir un quebrado por otro practíquese lo siguiente: 1.º multiplíquese el numerador del quebrado dividendo por el denominador del quebrado divisor, el producto será el numerador del quociente. 2.º Multiplíquese el denominador del quebrado dividendo por el numerador del quebrado divisor, el producto será el denominador del quociente.

*Exemplo.* Se quiere partir  $\frac{2}{3}$  por  $\frac{4}{5}$ : para ello multiplico el numerador 2 del dividendo por el denominador 5 del divisor, el producto 10 será el numerador del quociente: en seguida multiplíquese el número 4 numerador del divisor por 3 denominador del dividendo, el producto 12 será el denominador del quociente: luego el quociente será  $\frac{10}{12}$ , ó bien  $\frac{5}{6}$  simplificando el quebrado.

*Demostracion.* Para convencerse de que la regla prescrita es exácta, atiéndase á lo que á continuacion se expresa: si el quebrado dividendo  $\frac{2}{3}$  se hubiese de partir por 4 numerador del divisor, considerados como enteros y sin atender á su denominador, claro está (art. 63) que la operacion se reduciría á multiplicar el denominador 3 del quebrado divi-

dendo por 4, y tendríamos  $\frac{2}{3 \times 4} = \frac{2}{12}$  por cociente: es evidente que este cociente es cinco veces menor que el que buscamos, supuesto que el divisor 4 que hemos empleado es cinco veces mayor que el divisor propuesto  $\frac{4}{5}$ ; luego para restablecer el cociente hallado  $\frac{2}{12}$  á su verdadero valor, será preciso hacerlo cinco veces mayor, esto es, multiplicarlo por 5, lo que (art. 62) se reduce á multiplicar su numerador por 5; luego el cociente que nos proponíamos hallar será  $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ , que es el mismo que resulta siguiendo el proceder de la regla: luego es exácto dicho proceder.

**LXVI. Problema.** Partir un número entero por un quebrado.

Para partir un número entero por un quebrado, ejecútese lo siguiente: *múltipíquese el número entero por el denominador del quebrado, y el producto será el numerador del cociente, al que se le pondrá por denominador el numerador del quebrado.*

*Exempla.* Se quiere partir el número 6 por  $\frac{5}{7}$ , el cociente será  $\frac{6 \times 7}{5} = \frac{42}{5} = 8 \frac{2}{5}$ .

*Demostracion.* Hemos visto (art. 58 núm. 1.º) que los 6 enteros se podian poner baxo forma fraccionaria de este modo  $\frac{6}{1}$ , puestos así claro está que la operacion se reducirá á partir un quebrado por otro (art. 65), y la operacion á la siguiente  $\frac{6 \times 7}{1 \times 5}$  que será el cociente que se busca; pero como multiplicar un número qualquiera por la unidad no altera su valor, dicha expresion será igual á esta  $\frac{6 \times 7}{5}$ ; en la que claramente se ve que la operacion se reduce á multiplicar el número 6 por 7 denominador del quebrado divisor, y ponerle por numerador el numerador del quebrado.

**LXVII. Escoteo 1.º** Establecido y demostrado quanto conda al modo de operar con los quebrados, resta solo llamar la atencion sobre los resultados de dichas operaciones. Puede causar admiracion á los principiantes el resultado del exemplo del artículo 64, en el que se nota que de la multiplicacion de los dos quebrados propios  $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$  resulta al pro-

ducto un tercer quebrado  $\frac{8}{15}$ , producto menor que qualquiera de sus factores. Pero si se atiende á la definicion del multiplicar (art. 27) debe cesar la sorpresa, pues en efecto multiplicar es tomar tantas veces un factor quantas unidades haiga en el otro factor; conque si el multiplicador es la unidad, claro está que se tomará una vez el multiplicando, y que si el multiplicador es menor que la unidad, esto es, si es un quebrado propio, se tomará el multiplicando menos de una vez, resultará pues el producto menor que dicho multiplicando.

De lo dicho se infiere, que multiplicando un número entero por un quebrado propio, debe resultar un producto menor que el multiplicando. Y como tenemos demostrado que para obtener el valor numérico de un producto es indiferente invertir el orden de los factores (art. 28), concluiremos tambien, que multiplicando un quebrado propio por un entero, debe resultar el producto menor que el divisor; esto es, lo que se nota en el exemplo del artículo 62.

*Escolio* 2.º Si se atiende á la definicion del partir (art. 37), se infiere que el quociente manifiesta el número de veces que el dividendo contiene al divisor: luego si el divisor es la unidad, claro está que el quociente resultará igual al dividendo, pero si el divisor es menor que la unidad, esto es, si es un quebrado propio es evidente que en este caso el dividendo contendrá al divisor un número de veces mayor que á la unidad, esto es, que resultará un quociente mayor que el dividendo; ésta es la razon por que partiendo un quebrado propio, ó un entero por un quebrado propio (art. 65 y 66), resulta en ambos problemas un quociente mayor que el dividendo.

LXVIII. Para conocer si se ha padecido equivocacion en el cálculo de los quebrados, se recurre á medios semejantes á los que nos han servido de norma para reconocer si hay algun yerro en el cálculo de los números enteros.

LXIX. *Problema*. Reducir los quebrados compuestos á simples.

Para executar esta operacion se han de multiplicar entre sí todas las cantidades separadas con la palabra *de*, y quedará reducido el quebrado compuesto á simple.

*Exemplo*. Es facil ver que tomar los  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{3}{4}$  se reduce



Es fácil determinar el valor de las cifras puestas á continuación del signo decimal. La primera cifra á la derecha de dicho signo vale décimos, el segundo centésimos, el tercero milésimos, el quarto diez milésimos &c. Así, para enunciar el número 36'457 se observará, que la cifra 4 expresa  $\frac{4}{10}$  ó  $\frac{400}{1000}$ , (art. 56 núm. 3.º); que la cifra 5 expresa  $\frac{5}{100}$  ó  $\frac{50}{1000}$ , y que la cifra 7 expresa  $\frac{7}{1000}$ ; se pronuncia pues, treinta y seis enteros, quatrocientos cinquenta y siete milésimos.

Para escribir un número como quatro enteros y cinco milésimos, repárese que no hay ni décimos ni centésimos en el número propuesto: se escribirá pues 4'005.

LXXI. El poner ceros á continuación de la última cifra de la derecha de un quebrado decimal, no altera el valor de este quebrado, porque el numerador y denominador se hallan entonces multiplicados por el mismo número; así  $0'1 = 0'10 = 0'100$ , porque en efecto estas expresiones equivalen á  $\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{100}{1000}$ , &c. Pero es claro que la mutacion de lugar del signo decimal cambia el valor del quebrado decimal: si se lleva el signo decimal un lugar mas hácia la izquierda, dos, tres &c., se hará el número 10, 100, 1000 &c. veces mas pequeño. Por exemplo, el número 94'58 es diez veces mas pequeño que 9'458; el número 9'458 es 100 veces mas pequeño que 945'8, &c. Al contrario, si se adelanta el signo decimal un, dos, tres &c. lugares hácia la derecha, se hará el número 10, 100, 1000 &c. veces mayor. Así, el número 54'271 es diez veces mayor que 5'4271; el número 542'71 es cien veces mayor que 5'4271, &c. La razon de todo esto es fácil de comprehender. En efecto, basta cotejar los dos números 54'271 y 5'4271, y atender que la cifra 5 que en el primero manifiesta decenas, solo indica unidades en el segundo: la cifra 4 representa unidades en el primero, y décimos en el segundo: la cifra 2 señala décimos en el primero, y centésimos en el segundo; y finalmente el 7 y 1 son centésimos y milésimos en el primer número, y en el segundo el 7 representa milésimos, y el 1 diez milésimos: este cotejo nos convence sin dificultad, que todas las cifras en el primer número son diez veces mayores que sus correspondientes en el segundo: luego con evidencia podremos concluir, que todo el primer número es diez veces mayor que el segundo.

LXXII. Para reducir á quebrado decimal otro qualquier quebrado, como  $\frac{3}{4}$ , póngase un cero á continuación del numerador 3, lo que dará 30, y pártase por 4 este numerador 30 que hemos hecho diez veces mayor que 3; y se tendrá 7 por quociente, con un residuo de 2. Es claro que el quociente 7 es diez veces mayor; de consiguiente, es preciso hacerlo diez veces mas pequeño; debemos pues para reducirlo á su verdadero valor, escribirlo con el signo decimal en esta forma 0'7. Hecho esto, póngase un cero á continuación del residuo 2, y tendremos 20 que partir por 4. El quociente es 5 sin residuo: escríbase 5 á la derecha de 7, y tendremos 0'75 por valor exácto de  $\frac{3}{4}$ .

Se opera del mismo modo para reducir á decimales los residuos de las particiones, pues estos restos son unos verdaderos quebrados propios (art. 55). Es tambien por este medio que se va acercando continuamente del verdadero valor del quociente de dos números que no son paribles exáctamente el uno por el otro. Se tendrá el quociente con la aproximacion de un décimo, contentándose con una sola cifra decimal: se tendrá con la de un centésimo, parándose á la segunda cifra decimal: se tendrá con la de un milésimo, llevándola hasta la tercera cifra decimal, &c. Basta emplear uno ó dos decimales, lo mas tres en los casos ordinarios; y solo en los de necesitarse una mayor aproximacion será quando se empleen mayor número de cifras decimales.

Hay quebrados que es imposible reducir exáctamente á quebrado decimal. Por exemplo, si se quisieran reducir  $\frac{5}{12}$  á quebrados decimales se hallaria 0'416666, &c. Si se quisieran reducir  $\frac{2}{3}$  á quebrado decimal, se tendria perpetuamente 0'66666, &c.; y se conoce que un quebrado no puede reducirse exáctamente á quebrado decimal, quando se ven volver las mismas cifras en el mismo orden. En este caso, nos contentaremos con tomar las dos ó tres primeras cifras: asi tomaríamos por el valor de  $\frac{5}{12}$  las tres primeras cifras de 0'416666, &c.; pero despues de haber despreciado las demas cifras, añadiré una unidad á la última cifra de la derecha de la parte restante, esto es, que en lugar de 0'416 tomaremos 0'417, porque 0'417, ó 0'417000 se aproxima mas á 0'416666 que 0'416 ó 416000. Se debe añadir una

unidad á la última cifra de la derecha de la parte restante del quebrado decimal, todas las veces que la primera cifra de la izquierda de las que se desprecian sobrepaje á 5.

LXXIII. Las operaciones de la Aritmética con los quebrados decimales son las mismas que se hacen con los números enteros. Es preciso unicamente tener cuidado de colocar los signos decimales que distinguen los enteros de los decimales en su correspondiente lugar.

Para sumar los números 34'09, 0'93, 5'009, ó bien 34'090, 0'930, 5'009, escribanse los unos debaxo de los otros, de modo que quadren en columna los signos decimales, los milésimos quadren debaxo de los milésimos, los centésimos debaxo de los centésimos, los décimos debaxo de los décimos, las unidades debaxo de las unidades &c. Despues de lo qual buscaremos la suma segun las reglas del sumar enteros.

$$\begin{array}{r}
 34'090 \\
 0'930 \\
 5'009 \\
 \hline
 \text{suma.....} 40'029 \\
 \hline
 \end{array}$$

Para restar 49'294 de 50'39 = 50'390, escribo estos dos números como si tratase de sumarlos, observando el poner el mas pequeño debaxo del mayor, y opero segun la regla del restar los enteros.

$$\begin{array}{r}
 \text{minuendo.....} 50'390 \\
 \text{subtraendo....} 49'294 \\
 \hline
 \text{residuo.....} 1'096 \\
 \hline
 \end{array}$$

Para multiplicar cantidades decimales es preciso no reparar en ningun signo decimal, y operar precisamente como si se tratase de multiplicar números enteros; pero luego se separarán con el signo decimal en el producto total, desde la derecha hácia la izquierda, un número suficiente de cifras para que se hallen tantas decimales en este producto como hay en el multiplicando y en el multiplicador; y si todas las cifras del producto no bastasen para igualar al número

de cifras que haiga en el multiplicando mas las que haiga en el multiplicador, será necesario interponer un número suficiente de ceros entre el signo decimal y la primera cifra de la izquierda del producto. Así, para multiplicar 4'42 por 9'8, opero como si tubiera que multiplicar

$$\begin{array}{r}
 \text{por.....} 98 \\
 \hline
 442 \\
 3536 \\
 3978 \\
 \hline
 43'316
 \end{array}$$

Despues separo con el signo decimal tres cifras de derecha á izquierda del producto total, porque hay dos cifras decimales en el multiplicando, y una en el multiplicador. El producto es pues 43 enteros 316 milésimos.

En efecto,  $4'42 \times 9'8 = \frac{442}{100} \times \frac{98}{10} = \frac{43316}{1000} = 43'316$ ; y á mas es evidente que multiplicando centésimos por décimos, deben resultar milésimos al producto.

Sca el otro exemplo 0'017 x 0'04; multiplicaré 17 por 4, y al producto 68 le interpondré tres ceros entre el signo decimal y la cifra 6, en esta forma 0'00068 que será el verdadero producto, porque en efecto así constará de cinco cifras decimales, pues en el multiplicando hay tres y en el multiplicador hay dos.

Si hubiese que multiplicar un número como 5'2439 por 10, ó por 100, ó por 1000 &c.; para tener el producto bastará llevar el signo decimal uno, ó dos &c. lugares hácia la derecha en el multiplicando. Así,  $5'2493 \times 10 = 52'439$ ,  $5'2439 \times 100 = 524'39$ , &c.

Porque multiplicar por 10 ó por 100 es hacer el multiplicando 10 veces ó 100 veces mayor. Pero adelantando el signo decimal uno ó dos lugares hácia la derecha del multiplicando, se hace este número 10 ó 100 veces mayor (art. 71); luego por este medio se obtiene el verdadero producto.

La particion de las cantidades decimales se hace precisamente como la de los enteros; pero antes de empezar la operacion, es preciso hacer de modo que haiga el mismo número de decimales en el dividendo y en el divisor.

Por ejemplo, para partir 44'09 por 9'5, pongo un cero á continuacion del divisor, para que así haiga tantas cifras decimales en este como en el dividendo, y parto como si tubiera que partir 4409 por 950.

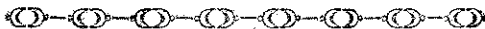
$$\begin{array}{r|l} 4409 & 950 \\ 609 & 4 \frac{09}{950} \text{ ó } 4'64 \end{array}$$

El quociente que hallo es el mismo que el de 44'09 partido por 9'5. Porque  $44'09 = \frac{4409}{100}$ , y  $9'5 = \frac{95}{10} = \frac{950}{100}$ . Luego

$$\frac{4409}{100} : \frac{950}{100} = \frac{4409}{950} \quad (\text{art. 65}); \text{ conluiremos pues, que el quo-}$$

ciente de 44'09 por 9'5 es el mismo que el de 4409 por 950. Si se tubiese un número tal como 983'7 que partir por 10, ó por 100, ó por 1000 &c., bastaría para hallar el quociente llevar el signo decimal un lugar, ó dos, ó tres &c. hácia la derecha del dividendo. Por ejemplo,  $983'7 : 10 = 98'37$ ;  $983'7 : 100 = 9'837$ , &c.

En efecto, partir por 10 ó por 100, es hacer el dividendo diez veces ó cien veces mas pequeño. Pero llevando el signo decimal uno ó dos lugares hácia la derecha del dividendo, se hace este número diez ó cien veces mas pequeño; luego se obtiene por este medio el verdadero quociente.



## OCTAVA LECCION.

*De los números denominados, y de los complexós.*

LXXIV. Se llaman *números complexós* aquellos que contienen diferentes unidades ó denominaciones, que pueden reducirse á la misma especie ó denominacion. Por exemplo, si se dice que una distancia es de 8 varas, 2 pies, 7 pulgadas y 4 líneas, este será un número denominado (art. 6) y además *complexó*; y es claro que este número puede reducirse todo á líneas; ó bien los 2 pies, 7 pulgadas y 4 líneas

46

a quebrado decimal de vara; pero antes de entrar en este por menor de reducciones es conveniente tomar una idea de los números complexos que están en mas frecuente uso en el arte militar.

#### *Distancias.*

Quando las distancias son crecidas se toma por unidad la *legua*, que consta de 8000 varas de Burgos.

La *legua marina*, comunmente llamada de veinte en grado, consta de unas 6648 varas de Burgos, aunque en los cálculos aproximados puede suponerse de 6660 varas.

La *legua marina* se divide en tres *millas*. Por consiguiente la milla marina constará de 2216 varas, que en los cálculos aproximados puede suponerse valer 2220 varas.

Para la medicion de extensiones menores se toma por unidad la *vara* de Burgos.

La vara se considera dividida en 3 *pies* de Burgos: el pie en 12 *pulgadas*: la pulgada en 12 *linzas*: la línea en 12 *puntos*.

La *toesa* se considera dividida en 6 pies de *París* ó de *Rey*, cuya relacion con el pie de Burgos veremos mas adelante (a).

#### *Monedas.*

El peso se distingue con los nombres de *duro* ó *fuerte*, y el de *sencillo*: el peso fuerte vale 20 *reales vellon*, y el sencillo solo 15: el real vale 34 maravedices.

#### *Pesos.*

El *quintal* consta de 100 *libras*, y se divide en 4 *arrobas*: la arroba consta de 25 *libras*: la libra de 16 *onzas*: la onza de 16 *adarmes*; y el adarme de 36 *gramos*. Tambien se suele dividir la libra en 2 *marcos*, el marco en 8 *onzas*, y la onza en 8 *ochavas* (b).

---

(a) *Dexamos para el tratado de Geometria el hacer mencion de las medidas naturales, determinadas por la Comision de sabios congregados á este fin en París.*

(b) *Sirva de prevencion, que las divisiones y los valores absolutos de las unidades no solo difieren de nacion á nacion, sino*

*Líquidos.*

Para la medida de los líquidos se suele usar de la *cántara* ó *arroba*: la arroba se divide en 8 *azumbres*: el azumbre en 4 *quartillos*; y el quartillo en 4 *copas*.

*Granos.*

Para la medida de los granos se emplea la *fanega*, que consta de 12 *celemines*: el celemín se subdivide en 4 *quartillas*, y la quartilla en 5 *quintillos*.

*Tiempo.*

El día consta de 24 *horas*: la hora de 60 *minutos*: el minuto de 60 *segundos*: el segundo en 60 *terceros*, &c.

*Partes de la circunferencia.*

Para medir la circunferencia, que es una vuelta redonda (que con mas propiedad definiremos en la Geometría), se divide esta en 360 partes iguales, que llaman *grados*. El grado se divide en 60 *minutos*: el minuto en 60 *segundos*; y el segundo en 60 *terceros* &c.

LXXV. Es evidente que los pies son quebrados de la vara, y que tienen 3 por denominador: que las pulgadas son quebrados del pie, las líneas de la pulgada, y los puntos de la línea; y que todas estas dimensiones tienen á 12 por denominador. Igualmente el real es quebrado del peso, y tiene por denominador á 15 si se trata de peso sencillo, ó á 20 si se trata de peso fuerte: el maravedí es una fracción del real, que tiene á 34 por denominador.

LXXVI. Enterados de la subdivision de una unidad en otras de menor denominacion, será fácil deducir las reglas de reducir número de mayor á menor denominacion, y de menor denominacion á otro de mayor, lo que aclararemos con los dos problemas siguientes.

que tambien difieren las de nuestras provincias. La vara de Valencia, por exemplo, difiere de la de Burgos: la libra gallega consta de 20 onzas, &c. Al fin del tratado de Geometría se hallarán Tablas que expresan los valores de estas unidades, y las relaciones de unas con otras.

**Problema 1.º** Reducir un número á otro de menor denominacion.

Para reducir un número á otro de menor denominacion, *múltipíquese el número propuesto por el número de unidades menores que contiene cada unidad suya, y el producto será el número reducido á menor denominacion.*

*Exemplo.* Para reducir 17 varas á pie, multiplico á 17 por 3, y el producto 51 será el número de pies que componen 17 varas: si los 51 pies se quisieran reducir á pulgadas, multiplicaríamos 51 por 12, y hallaríamos que componen 612 pulgadas.

Quando hay varias denominaciones intermedias y dos extremas, que llamaremos *máxima* y *mínima*, como en el número 2 arrobas 6 libras y 4 onzas, se executará la reduccion del modo siguiente: *se reducirá la máxima denominacion á la intermedia mas próxima, y se le agrega al resultado el número de unidades de dicha denominacion inmediata: luego se reduce este conjunto á la denominacion que sigue, y así sucesivamente hasta llegar á la mínima denominacion.* Baxo este principio reduzco las 2 arrobas á libras, multiplicando á 2 por 25, que son el número de libras que contiene una arroba, y me resulta 50 al producto: á este producto le añado las 6 libras que hay en el número propuesto, y la suma 56 libras corresponden á 2 arrobas mas 6 libras: las 56 libras las multiplicaré por 16, porque la libra consta de 16 onzas, y el producto 896 serán las onzas que componen las 56 libras; y finalmente al producto 896 le añado las 4 onzas que hay en el número propuesto, y la suma 900 nos manifestará el número propuesto reducido á onzas.

**Problema 2.º** Reducir un número á otro de mayor denominacion.

Como que el partir es operacion contraria de la de multiplicar, deduciremos esta otra regla: *que para reducir un número á otro de mayor denominacion, se partirá el número propuesto por el número de unidades menores que contiene cada unidad mayor, y el quociente será el número reducido á mayor denominacion.*

Siempre se podrá poner en práctica esta regla, ya sea expresando la particion en forma de quebrado (art. 54), ya efectuándola por decimales (art. 72) con la aproximacion necesaria.

*Exemplo.* Para reducir 72 pulgadas á pies, partiré 72

por 12, y el quociente 6 serán los pies: por igual razón 5 pulgadas serán  $\frac{5}{12}$  de pie, ó bien 0'4166, &c. pies.

Quando el número propuesto conste de varias denominaciones, lo mas breve será reducirlo á la mínima denominacion, segun tenemos enseñado, y se tendrá el numerador de un quebrado cuyo denominador será el número de unidades mínimas que contiene cada unidad máxima del número propuesto.

*Exemplo.* Para reducir 2 varas  $\frac{1}{4}$  2 pies  $\frac{1}{4}$  5 pulgadas á una sola fraccion de vara, se reducirá el todo á pulgadas, que serán 101 pulgadas; y como que la vara consta de 36 pulgadas, tendremos  $2 \text{ varas } \frac{1}{4} 2 \text{ pies } \frac{1}{4} 5 \text{ pulg.} = \frac{101}{36}$  de vara. Si se trata de reducir este quebrado á entero y quebrado, ó á decimales de la máxima denominacion, tendremos en el primer caso  $2 \frac{28}{36}$  varas  $= \frac{1}{36}$  de vara; y en el segundo caso partiendo 101 por 36, tendremos  $\frac{101}{36} = 2'806$  de vara.

LXXVII. Las operaciones á las quales se sujetan los números complexós se deducen facilmente de las reglas que hemos dado.

*Problema.* Sumar números complexós.

Para sumar los números complexós execútense lo siguiente:

1.º Escríbanse estos números el uno debaxo del otro, de modo que las unidades de la misma especie se hallen en la misma columna.

2.º Empiérese á sumar la columna de la mínima denominacion como si fuesen números simples, y solo se pondrá debaxo el exceso de dicha suma á un número exácto de unidades inmediatas, y reténgase en la memoria dicho número exácto de unidades para agregarlo luego á la denominacion que sigue.

3.º Se sumarán por el mismo estilo los números de la segunda denominacion de la derecha, agregando ante todas cosas las unidades que se llevaban de la denominacion anterior, y contiúese por el mismo estilo.

4.º Quando las sumas son algo crecidas, para evitar equivocaciones será mejor escribir en un papel suelto, ó aparte en el mismo papel, la suma de las unidades de la especie inferior, y hallar por la regla dada (art. 76 probl. 2.º) el número de unidades de la especie inmediata superior, y las unidades sobrantes

de especie inferior, que son las que se han de escribir en la columna de la mínima denominacion; y lo mismo se va executando con las siguientes.

Exemplo. Se quieren sumar los dos números 12 varas 2 pies 11 pulg., y 15 varas 1 pie 8 pulg., que escribo así:

Varas.	Pies.	Pulg.
12.....	2.....	11.
15.....	1.....	08.

suma..... 28..... 1..... 07.

Tomo la suma de estos dos números, empezando por la columna de las pulgadas: sumo dicha columna, pero sin escribir la suma, que se irá conservando en la memoria, y veo que dicha suma 19, por constar el pie de 12 pulgadas, vale un pie, que retengo, y á mas 7 pulgadas, que son las que escribo debaxo de la columna de las pulgadas.

Paso á la columna de los pies, y digo: 1 pie retenido y 2=3 y 1=4; conservo 4 en la memoria, y reflexiono que la vara consta de 3 pies, luego los 4 pies importarán 1 vara y 1 pie; escribo 1 pie debaxo de la columna de los pies, y retengo la vara para llevarla á la columna de las varas, cuya suma hallaré como hemos visto para los números compuestos.

Exemplo 2.º Se quieren sumar los quatro números siguientes:

Ps.	Rs.	Mrs.
3.....	17.....	15.
7.....	11.....	28.
6.....	15.....	31.
5.....	06.....	27.

28..... 11..... 33.

Empiezo sumando los maravedices, cuyo total es de 101; escribo á parte este número y lo parto por 34, porque se necesitan 34 maravedices para componer un real, y me resultan 2 reales al quociente con un resto de 33 maravedices: escribo los 33 baxo la columna de los maravedices, y llevo los 2 reales á la columna de los reales, y añadiéndolos á ellos suman 51, que componen 2 pesos fuertes con un resto

50  
 de 11 reales: escribo 11 baxo la columna de reales, y llevo los 2 pesos á la de los pesos; y efectuando la suma tendré por suma total 28 Ps..... 11 Rs..... 33. Mts.

LXXVIII. Problema. Restar un número complexó de otro.

1.º *Escríbese el subtraendo debaxo del minuendo, de modo que los números de cada denominacion queden debaxo de su correspondiente, y se executará la resta como hemos enseñado debe executarse con los números simples (art. 23).*

2.º *Si en el discurso de la operacion se encuentra algun número del subtraendo que exceda al del minuendo de su denominacion, por un proceder semejante al indicado (art. 24), se le agrega á este número del minuendo el número de unidades de su denominacion, que componen una unidad de la inmediata superior.*

3.º *Efectuada la resta de los números de dicha denominacion, quítese una unidad á la denominacion siguiente del minuendo (art. 24), y continúese la operacion.*

*Exemplo.* De 156 fanegas, 10 celemines, 3 quartillas y 2 quintillos de cebada que habia en un almacén, se han extraído 88 fanegas, 9 celemines, 3 quartillas y 3 quintillos; y se quiere saber quanta cebada quedó en dicho almacén.

Claro está, que para averiguarlo se necesita restar el segundo número del primero: escribiré estos dos números como sigue:

Fan.	Celem.	Quart.	Quint.
156.....	10.....	3.....	2.
88.....	09.....	3.....	3.
68.....	00.....	3.....	4.

Digo: 3 de 2 no puede restarse: tomo una unidad del minuendo en la columna inmediata, que es la de las quartillas, y como que una quartilla consta de 5 quintillos diré: 5 quintillos que tomo y 2 que hay en el minuendo son 7, de los que resto 3, y el residuo 4 lo escribo. Paso á la columna de las quartillas, y el punto puesto sobre el 3 del minuendo me recuerda que este 3 ya no vale mas que 2, y digo: 3 de 2 no se puede, por lo que tomo una unidad en la columna de los celemines, cuya unidad vale 4 quartillas, por lo que digo: 4 y 2 son 6, y quien de 6 resta 3 quedan 3, que escribo en la columna de las quartillas. Despues paso á la columna de los celemines, y reparo que el punto

sobre el 10 del minuendo lo reduce á 9; digo pues: 9 de 9 queda nada, ó cero, que escribo debaxo de dicha columna de celemines. Finalmente verifico la resta en la columna de las fanegas, segun las reglas que hemos dado para la de los números compuestos, y vendré en conocimiento de que quedaron en el almacén 68 fanegas, 3 quartillas y 4 quintillos.

Procediendo por un método semejante, hallaríamos que la diferencia entre

Quintal.	Arroba.	Lib.	Onz.
12.....	1.....	20.....	08.
Y.....	9.....	2.....	23.....
<hr/>			
es.....	2.....	1.....	21.....
<hr/>			
			15.

### Problema.

Supóngase ser el valor aproximado del fusil de 114 reales con 29 maravedices: el de la bayoneta incluso su baina, boton y contera, de 12 reales y 25 maravedices: el de la cartuchera incluso su correaje y el del porta-sable 32 reales y 12 mrs.: el del porta-fusil de 1 real; y el del sable incluso baina, boton y contera, de 18 reales y 24 mrs.: se quiere saber el importe de todo este armamento.

### Otro.

Un Cadete sentó plaza en el año de 1809 el día 4 de Junio á las 8 de la mañana, y fué ascendido á Subteniente el 19 de Noviembre de 1811 á las 10 de la mañana. Pregúntase ¿qué tiempo sirvió de Cadete?

## NONA LECCION.

Continuacion de los números denominados y de los complejos.

LXXIX. Problema 1.º Multiplicar un número complejo por un número simple.

1.º Multiplíquese el número de la menor denominación por el multiplicador aparte, ó en un papel suelto; y si dicho producto contiene una ó mas unidades de la especie mayor inmediata, se halla el número de unidades justas de dicha especie mayor, y las sobrantes (art. 76 Probl. 2.º). Estas se escriben en su columna, y las otras se agregan á las de la especie próxima mayor, como en el sumar (art. 77 núm. 2.º).

2.º Multiplíquese luego el número de la denominación siguiente por el mismo multiplicador, agregando al producto las unidades que se llevaban de la anterior, operando con este resultado como con el primero; y se continúa así la operación hasta acabar.

Exemplo. Se han comprado 29 varas de paño á 7 pesos fuertes, 12 reales y 5 mrs. cada vara: se quiere saber el importe del paño que se ha comprado. El Problema se reduce á multiplicar por 29 el precio de una vara: luego

	Ps.	Rs.	Mrs.
29 varas	203	16	09
producto.....	220	16	09

Multiplíquese aparte los 5 mrs. por 29, y el producto 145 lo parto por 34, número de mrs. que contiene el real; de dicha particion me resultan 4 reales al quociente, con un resto de 9 mrs. que escribo debaxo de la columna de los mrs.: seguidamente multiplico aparte los 12 reales por 29, y al producto 352 le agrego los 4 reales que ha importado el producto parcial de los mrs., y el resultado 356 lo parto por 20, de dicha particion resultan 17 pesos fuertes al quociente, con un resto de 16 reales que escribo al producto debaxo de su correspondiente: finalmente multiplico los 7 pesos por 29, y al producto 203 le agrego los 17 pesos que ha importado el resultado de reales, y la suma 220 la escribo en el producto, con lo que queda concluida la operación.

LXXX. Problema 2.º Multiplicar un número complejo por otro complejo.

1.º Escribo el multiplicador debaxo del multiplicando, empujando multiplicando toda el multiplicando por el número de la denominación máxima del multiplicador, cuya operación es eui-

dente se reduce á multiplicar un número complexó por un número simple, y que por lo tanto (ari. 31 y 32) no puede ofrecer dificultad.

2.º Hecha esta primera multiplicacion, es igualmente evidente que solo resta que multiplicar el multiplicando por las denominaciones segunda, tercera &c. del multiplicador: para efectuarlo, se verá si la segunda denominacion es una parte alícuota de una unidad de la máxima denominacion, y si no lo es se descompona en dos, tres &c. que lo sean: en el primer caso es claro que si es la mitad, el tércio, el quarto &c. de una unidad máxima, debe reducirse la operacion á tomar la mitad, el tércio, la quarta parte &c. del multiplicando: si en el segundo caso se ha descompuesto el número de la segunda denominacion en dos partes que sean, por exemplo, una mitad y la otra un octavo de una unidad máxima, en este caso se tomará por la una la mitad del multiplicando, y por la otra la octava parte, ó el quarto del producto parcial que resultó por la mitad.

3.º En fin, pasando á multiplicar por la tercera denominacion del producto, se buscarán sus partes alíquotas, bien sean de una unidad de la segunda ó de la máxima denominacion, ó bien de alguno de los productos parciales anteriores.

Esta regla se hará mas inteligible con los exemplos siguientes.

Exemplo 1.º Se quiere saber el coste de 46 y  $\frac{3}{4}$  de vara de paño á 66 reales y 24 mrs. vellon. la vara.

Claramente se ve que la operacion se reduce á repetir el precio de la vara tantas veces como 1 vara está contenida en 46 varas y  $\frac{3}{4}$ , es decir, quarema y seis y tres quartas de veces.

Rs.	Mrs.
66.....	24.
46 $\frac{3}{4}$ varas	

primer producto.....	3068.....	16.
por $\frac{1}{2}$ .....	33.....	12.
por $\frac{1}{4}$ .....	16.....	23.

producto total..... 3113..... 17.

Para efectuar esta multiplicacion empezaremos la operacion como si el multiplicador fuese un número compuesto solo de

enteros, esto es, como si únicamente fuese 46; y hasta que no se halle el resultado de la multiplicacion de todo el multiplicando por dicho número, no nos ocuparemos de las tres cuartas del multiplicador. Establecido esto se hallará este primer producto parcial por la regla del problema anterior, y por ella hallaremos que el coste de las 46 varas á razon de 66 reales y 24 mrs. asciende á 3068 reales y 16 mrs.

Hallado este primer producto parcial, tratemos de indagar el coste de las  $\frac{3}{4}$  de vara de que hasta ahora no nos hemos ocupado: claro está que si una vara cuesta 66 reales y 24 maravedices, las  $\frac{3}{4}$  de vara valdrán los  $\frac{3}{4}$  de 66 reales y 22 mrs. Para mayor facilidad descompongo  $\frac{3}{4}$  en  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{1}{4}$ : por  $\frac{1}{2}$  tomo la mitad del precio de una vara, es decir, la mitad de 66 reales y 24 mrs., lo que me dará 33 reales y 12 mrs., cuyas partidas escribo debaxo de sus correspondientes columnas. En fin, por  $\frac{1}{4}$  que es la mitad de la mitad, tomo la mitad del último resultado 33 reales y 12 mrs., lo que me dará 16 reales y 23 mrs., que igualmente escribo en sus correspondientes columnas. Despues sumo estos tres productos parciales, segun queda enseñado debe executarse con los números complexôs; con lo que hallo que las 46  $\frac{3}{4}$  varas de paño á 66 reales y 24 mrs. vara, cuestan 3118 reales y 17 mrs.

Exemplo 2.º Se han comprado 23 fanegas, 4 celemines y 2 quartillos de cebada á 4 pesos sencillos, 5 reales y 5 mrs. vellón la fanega: se quiere saber á quanto asciende el coste de esta partida de cebada: veo que repitiendo 4 pesos, 5 reales y 5 mrs. tantas veces quantas una fanega está contenida en 23 fanegas, 4 celemines y 2 quartillas, hallaré el producto como sigue:

	Ps.	Rs.	Mrs.
4.....	05.....	05.....	
23 faneg. 4 celem. 2 quarti.	99.....	13.....	13.
primer producto.....	99.....	13.....	13.
por 4 celemines $\frac{1}{3}$ ...	1.....	06.....	24 $\frac{1}{3}$
por 2 quartillos $\frac{1}{8}$ ...	0.....	02.....	24 $\frac{2}{8}$
producto total.....	101.....	07.....	27 $\frac{5}{8}$

Operando por un proceder semejante al que hemos empleado en la operacion anterior. Empezaré multiplicando todo

el multiplicando por la mayor denominacion del multiplicador, esto es por las 23 fanegas, y para ello empezaré multiplicando por 23 la mínima denominacion del multiplicando, que son los 5 mrs., y el producto 115 lo escribo en un papel suelto, y seguidamente lo parto por 34, y tendré 115 mrs. = 3 reales  $\frac{1}{3}$  13 mrs.: escribo los 13 mrs. en su correspondiente columna, reteniendo en la memoria los 3 reales. Paso á la columna de lés reales y multiplico los 5 reales del multiplicando por 23, y al producto 115 le sumo los 3 reales que he retenido de la de los mrs., y la suma 118 la parto por 15, por constar el peso sencillo de 15 reales, y encuentro 7 al quociente con un residuo de 13, lo que me manifiesta que 118 reales = 7 pesos  $\frac{1}{3}$  13 reales: escribo pues los 13 reales en su correspondiente columna, y retengo los 7 pesos en la memoria. Finalmente paso á la columna de los pesos, y multiplicando tambien en papel suelto los 4 pesos por 23, al producto 92 le añadiré los 7 pesos retenidos de la columna de los reales, y la suma 99 la escribiré en la columna de los pesos: tendremos pues que el coste de 23 fanegas á 4 pesos, 5 reales y 5 mrs. importan 99 pesos, 13 reales y 13 mrs.

Tratemos ahora de averiguar el importe de los 4 celemines. Es evidente que si una fanega cuesta 4 pesos, 5 reales y 5 mrs., 4 celemines que son el tercio de la fanega costarán  $\frac{1}{3}$  de 4 pesos, 5 reales y 5 mrs.: luego por 4 celemines tomaré el tércio del multiplicando, que será 1 peso, 6 reales, y 24  $\frac{1}{3}$  mrs., que escribo como segundo producto parcial.

Solo falta saber el importe de las 2 quartillas: para ello no se necesita mas que recapacitar que 2 quartillas es lo mismo que  $\frac{1}{2}$  celemin, y que  $\frac{1}{2}$  celemin es  $\frac{1}{8}$  de 4 celemines: luego si tomamos la octava parte de un peso 6 reales y 24  $\frac{1}{3}$  mrs. que es el importe que hemos hallado corresponde á los 4 celemines, tendremos el de las 2 quartillas: esta octava parte es 2 reales y 24  $\frac{7}{24}$  mrs., que escribo como tercer producto parcial. Hallados todos los productos parciales los sumo segun las reglas dadas, y tendré por pro-

ducto total 101 pesos, 7 reales y  $27 \frac{5}{8}$  mrs., importe de las 23 fanegas, 4 celemines y 2 quartillas de cebada.

Solo añadiremos para mayor facilidad de los principiantes la trivial advertencia de que los  $\frac{5}{8}$  del producto total resultan

$$\text{de la suma de } \frac{1}{3} + \frac{2}{24} = \frac{8}{24} + \frac{2}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}.$$

LXXXI. Es evidente que el arte de la multiplicacion de los números complexós consiste en descomponer las diferentes denominaciones en partes aliquotas de la especie ó denominacion inmediata superior.



## DÉCIMA LECCION.

*Continuacion de los números denominados y de los complexós.*

LXXXII. Vamos á tratar de la particion ó division de un número complexó, ya sea que el divisor sea un divisor simple, ya sea que el divisor sea otro número complexó; y para proceder con método principiaremos por el primer caso.

*Problema.* Partir un número complexó por un número simple.

1.º *Se parte por el divisor simple el número de la mayor denominacion, y este primer quociente es de dicha denominacion mayor.*

2.º *El residuo se reduce á la denominacion segunda, y despues de agregarle las unidades que hubiese de dicha denominacion segunda en el dividendo, se parte el conjunto por el mismo divisor, y este segundo quociente será de dicha denominacion segunda.*

3.º *El residuo se reduce á la denominacion tercera, y se continúa partiendo por el mismo estilo hasta acabar.*

*Ejemplo.* Trátase de repartir 138 pesos sencillos, 12 reales y 16 mrs. entre 25 hombres: claro está que esta operacion se reduce á partir por 25 la cantidad propuesta.

Ps.	Rs.	Mrs.	25
183.....	12.....	16	Ps.    Rs.    Mrs.
13.....	195.....	238	
	207	254	5..... 8..... 10 $\frac{4}{25}$
	7	4	

Digo: 25 en 138? 5 veces: escribo el 5 en el quociente, y serán pesos, y el residuo 13 lo voy escribiendo conforme vaya resultando debaxo de los pesos del dividendo: este residuo de 13 pesos los reduzco á reales en un papel suelto multiplicándolos por 15; y los 195 que me dan de resultado los escribo debaxo de los reales del dividendo; y paso á sumar 12 con 195, y el conjunto 207 de estas dos cantidades lo parto por el divisor 25 diciendo: 25 en 207, ó bien 2 en 20 ¿quantas veces? 8 veces: escribo el 8 al quociente, que serán reales, y el residuo 7 reales lo reduzco á mrs. tambien en papel suelto, multiplicándolos por 34, y el resultado 238 lo escribo debaxo de los mrs. del dividendo: sumo 238 con 16, y la suma 254 la parto por 25: el quociente 10 que me resulta lo escribo en el quociente como mrs.: tambien escribo el residuo en el quociente como numerador de un quebrado, cuyo denominador debe ser el divisor (art. 55). Luego á cada uno le tocarán 5 pesos, 8 reales, 10  $\frac{4}{25}$  mrs.

LXXXIII. Pasemos al segundo caso de tener que partir un número complexó por otro: la operacion se reduce á plantearla de modo que quede convertido el divisor en un número simple, conseguido lo qual se operará como acabamos de enseñar en la regla anterior: el modo de reducir á este estado la operacion es el siguiente.

*Problema.* Partir un número complexó por otro complexó.

1.º Redúzcase el divisor á quebrado de su mínima denominacion (art. 76).

2.º Redúzcase tambien el dividendo al mismo denominador que el divisor, lo que se hará multiplicando el dividendo por el denominador del divisor (art. 58 núm. 2.º); y tanto este como el dividendo quedarán reducidos á quebrados de comun denominador.

3.º Suprimanse los denominadores de ambos quebrados; lo que no debe variar el valor del quociente, puesto que suprimir dichos denominadores equivale á multiplicar estos dos quebrados por

el expresado denominador, lo que (art. 43) no debe alterar el valor del quociente: luego se formará un nuevo quebrado, poniendo por numerador el correspondiente al quebrado dividendo, y por denominador el numerador del quebrado divisor.

4.º Resultará pues un quebrado impropio, cuyo numerador será un número complexó, y el denominador será un número simple, cuya reduccion (art. 55.) se reducirá á partir un número complexó por un número simple, y de consiguiente entra esta operacion en la regla dada para la resolucion del primer caso (art. 82).

*Exemplo.* 46 varas y  $\frac{3}{4}$  de paño costaron 3118 reales y 17 mrs.: se quiere saber el precio de una vara.

La operacion se reduce á partir 3118 reales y 17 mrs. por  $46\frac{3}{4}$  varas: reduciré las  $46\frac{3}{4}$  varas á quartas, son  $\frac{187}{4}$ ; reduzco á quebrado de esta denominacion el dividendo 3118 reales y 17 mrs., multiplicándolo por 4 y poniéndole á 4 por denominador, esto es  $\frac{(3118 \text{ rs.} \dots 17 \text{ mrs.}) \times 4}{4} = \frac{12474}{4}$  rs.; formo con los dos numeradores del dividendo y divisor el quebrado  $\frac{12474}{187}$  reales: resta solo ahora partir 12474 reales por 187, que verificado dará al quociente 66 reales y 24 mrs. por el precio de una vara. Pondremos aqui abreviadamente esta última operacion.

12474 rs.	187
1254	
132	Rs.      Mrs.
34 mrs.	66..... 24
528	
396	
4488 mrs.	
748	
000	

LXXXIV. Asimismo, para saber el precio de una fanega de cebada, suponiendo que 23 fanegas, 4 celemines y 2 quartillas costaron 101 pesos, 7 reales y  $27\frac{5}{8}$  mrs., reparo

que el precio de una fanega estará tantas veces contenido en 101 pesos, 7 reales y  $27 \frac{5}{8}$  mrs., quantas una fanega está contenida en 23 fanegas, 4 celemines y 2 quartillas; luego despues de partir 101 pesos, 7 reales y  $27 \frac{5}{8}$  mrs. por 23 fanegas, 4 celemines y 2 quartillas, el quociente manifestará el precio de la fanega.

Para hacerlo, reduzco 23 fanegas, 4 celemines y 2 quartillas á su mínima expresion, esto es á quartillas; el resultado será 23 fanegas, 4 celemines 2 quartillas = 1122 quartillas; y como que la fanega consta de 48 quartillas, tendremos  $1122 \text{ quartillas} = \frac{1122}{48}$  de fanega. Luego multiplico el dividendo por 48, cuya operacion bastará indicar.

Ps.	Rs.	Mrs.
101.....	07.....	$27 \frac{5}{8}$
		48

producto..... 4072..... 12..... 02

Concluiremos pues que  $101 \frac{\text{Ps.}}{\dots\dots\dots} 07 \frac{\text{Rs.}}{\dots\dots\dots} 27 \frac{5}{8} \frac{\text{Mrs.}}{\dots\dots\dots} =$   
 $(101 \text{ Ps.} \dots 07 \text{ Rs.} \dots 27 \frac{5}{8} \text{ Mrs.}) \times 48 = \frac{4072 \text{ Ps.} \dots 12 \text{ Rs.} 02 \text{ mrs.}}{48}$

hecha esta reduccion á comun denominador resultará el quebrado  $\frac{4872 \text{ Ps.} \dots 07 \text{ Rs.} \dots 02 \text{ Mrs.}}{1122}$ ; cuya operacion tampoco haremos

mas que indicar.

Pesos.	Rs.	Mr.	1122
4872.....	12.....	02	Ps. Rs. Mrs.
384 Ps. =	5760 Rs.		4..... 5..... 5.
	5772		
	162Rs. =	5508 Mrs.	
	5510		
	0000		

Luego una fanega costará 4 pesos, 5 reales y 5 mrs.

LXXXV. Se ve que para la particion de los números complexos por otro complexo, se ha de reducir el divisor á su mínima denominacion, luego multiplicar el dividendo por el número que exprese quantas unidades mínimas del divisor se necesitan para componer una máxima de este mismo divisor, y hacer la particion segun las reglas dadas.

*Problema.*

425 Varas..... 2 pie..... 11 pulg. de mampostería han costado 1326 pesos 13 reales 14 mrs. : se pregunta ¿quanto ha costado cada vara?

DE LAS POTESTADES Y RAÍCES EN GENERAL.

LXXXVI. Se llaman *potestades* ó *potencias* de un número los productos que resultan multiplicando este número por la unidad, ó por sí mismo. Multiplicando un número por 1 se tiene la primera potestad de este número,  $4 \times 1$ , ó 4 es la primera potestad de 4. Así, la primera potestad de un número es este mismo número.

Multiplicando un número una vez por sí mismo, el producto que resulta es la segunda potestad, ó el *quadrado* de este número: por exemplo,  $3 \times 3$ , ó 9 es el *quadrado* de 3. Si se multiplica dos veces seguidas un número por sí mismo, esto es que se tome tres veces por factor, ó lo que es lo mismo si se multiplica el *quadrado* de un número por este número, se tiene por producto la tercera potestad, ó el *cubo* de este número: así  $4 \times 4 \times 4 = 16 \times 4$  ó 64 es el *cubo* de 4, &c.

LXXXVII. Al operar con dicho número para formar qualquiera de las potestades expresadas, se llama *elevanto* á dichas potestades.

LXXXVIII. Repárese que todas las potestades de 1 son 1; porque 1 multiplicado por sí mismo tantas veces como se quiera, no puede dar sino 1 por producto. La unidad sola tiene esta propiedad.

LXXXIX. Se llama *raíz* de una potestad el número que multiplicado por 1 ó por sí mismo ha producido esta potestad: la raíz primera y la potestad primera son la misma cosa.

En quanto á la segunda potestad, el número que la ha producido se llama *raíz segunda*, ó *raíz quadrada*. En quanto

á la tercera potestad, el número que la ha producido se llama *raíz tercera*, ó *raíz cúbica*, &c.

Para indicar que una cantidad está elevada á una potestad, supongo 4 á la segunda, se escribe así  $4^2$ ; la cifra pequeña 2 puesta mas arriba y á la derecha de 4 se llama *exponente de la potestad*; así,  $5^3$  indica que 5 se considera elevado al cubo, y dicha expresion = 125;  $8^6$  equivale á 8 elevado á la sexta potestad.

Para indicar la raíz de qualquiera potestad sirve este signo  $\sqrt{\quad}$ , colocando entre sus piernas el exponente de la potestad que se omite en la quadrada. Así,  $\sqrt{25}$  expresa la raíz quadrada de 25; de modo que  $\sqrt{25} = 5$ , y  $\sqrt[3]{8}$  la raíz cúbica de 8, de modo que  $\sqrt[3]{8} = 2$ .

XCV. El operar para hallar el número ó la raíz quando se conoce la potestad, se llama *extraer la raíz*.

XCI. El elevar un número á una potestad no puede presentar ninguna dificultad: bastará multiplicar el número que se quiere elevar á la potencia, una vez por sí mismo para el quadrado, dos veces por sí mismo para el cubo, &c. Así, multiplicando 12 una vez por 12, el producto 144 da el quadrado de 12. El número que se quadra es pacs dos veces factor del producto que expresa la segunda potestad, pues es al mismo tiempo multiplicando y multiplicador. Multiplicando por 12 el producto de 12 por 12, el producto 1724 da el cubo de 12. El número que se eleva al cubo es pues tres veces factor del producto que expresa la tercera potestad.

Se hallará asimismo, 1.º que el quadrado de  $\frac{2}{3}$  es  $\frac{4}{9}$ , por

que  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ . 2.º que el cubo del mismo quebrado  $\frac{2}{3}$

es  $\frac{8}{27}$ ; porque  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$ . 3.º que el quadrado de 0'4 es 0'16, porque  $0'4 \times 0'4 = 0'16$ , &c.

XCII. Se ve que para formar las diferentes potestades de los quebrados, es preciso elevar el numerador y el denominador á la potencia propuesta; de donde se sigue que el valor de un quebrado disminuye á medida que se eleva este quebrado á mas alta potestad. La disminucion es tanto mas rápida quanto el denominador es mayor que el numerador.

XCIII. La extraccion de las raíces está sujeta á reglas particulares, cuyos detalles nos alexaría del fin que nos pro-

ponemos, que es de no hacer demasiado dilatado este Tratado, sobre todo quando en seguida veremos un método de verificar estas operaciones con mucha mas facilidad: basta por ahora saber que los números siguientes

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

son respectivamente las raices quadradas de

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81.

y las raices cúbicas de

1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. 512. 729.

Son pocos los números que tienen raíz quadrada, ó raíz cúbica exácta; y los mas no las tienen ni en enteros ni en expresion fraccionaria.  $\sqrt{7}$ , y  $\sqrt[3]{9}$  se hallan en este caso, porque no hay número que multiplicado por sí dé exáctamente el 7; ni tampoco existe número que tomado tres veces por factor dé exáctamente el 9. Llámense estas cantidades *incomensurables*, ó *sordas*.

XCIV. Para extraer la raíz quadrada y la raíz cúbica de los quebrados, es preciso sacar la raíz propuesta del numerador y del denominador. Se hallará de este modo, que la raíz quadrada de  $\frac{4}{9}$  es  $\frac{2}{3}$ ; que la raíz cúbica de  $\frac{125}{512}$  es  $\frac{5}{8}$ , &c. La regla es la misma para los quebrados decimales; pero la operacion es mas facil y mas pronta. Por exemplo, se ve en el momento que la raíz de 0'49 es 0'7.



## UNDÉCIMA LECCION.

*De las Razones, Proporciones y Progresiones.*

XCV. Se llama *razon* en la Matemática á la comparacion de dos cantidades, y se da el nombre de *exponente* al resultado que se halla comparando dos cantidades de la misma especie.

**XCVI.** Se pueden comparar dos cantidades para saber de quanto la una sobrepuja á la otra, ó quantas veces la una contiene á la otra: así, se puede comparar 4 con 8 para saber de quanto 8 sobrepuja á 4, ó quantas veces contiene á 4. Se llaman *términos de la razon* las dos cantidades que se comparan: de estos dos términos, el que se escribe el primero se llama *antecedente*, y el otro se llama *consequente*.

**XCVII.** Quando se comparan dos cantidades, para indagar de quanto la una sobrepuja á la otra, la razon se llama *aritmética*: consiste el exponente en la *diferencia absoluta que hay entre el antecedente y el consequente*: así, se hallará que en la razon aritmética de 6 á 2 el exponente es 4: esta razon se escribe así 6. 2.

Quando se comparan dos cantidades con el fin de averiguar quantas veces la una contiene á la otra, la razon se llama *geométrica*, y el exponente de la razon consiste en el *quociente que se halla partiendo el antecedente por el consequente*: así, en la razon geométrica 4 es á 8, que se escribe de este modo 4:8; el exponente es  $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ; y en la de 15 á

5, ó 15:5 será  $\frac{15}{5} = 3$  el exponente de dicha razon.

**XCVIII.** La comparacion de dos razones iguales se llama *proporcion*. La proporcion es aritmética quando las dos razones que se comparan son aritméticas: la proporcion es geométrica quando las razones que se comparan son geométricas.

Por exemplo, la razon aritmética de 6 á 4 es igual á la de 10 á 8, ó lo que es lo mismo  $6-4=10-8$ ; puedo pues decir 6 es á 4 aritmeticamente, como 10 es á 8, lo que se escribe del modo siguiente 6.4:10.8; el punto puesto entre el 6 y el 4 y el 10 y el 8, se pronuncia *es á*; los dos puntos puestos entre las dos razones se pronuncia *aritmeticamente como*. La razon geométrica 6 á 12 es igual á la de 8 á 16, es decir, que se tiene  $\frac{6}{12} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ ; diré pues, 6 es á 12 como 8 es á 16, lo que se escribe como sigue 6:12::8:16; en esta clase de proporciones los dos puntos entre el 6 y el 12 y entre el 8 y el 16 se pronuncia *es á*, y los quatro puntos que se hallan entre las dos razones se pronuncian *como*.

Pues que toda razon se compone de dos términos, es cla-

ro que constando una proporcion de dos razones, constará tambien de quatro términos: el primero y el tercero son los antecedentes, el segundo y el quarto son los conseqüentes: Se llaman extremos el primer y último término de la proporcion; el segundo y tercero se llaman *medios*.

XCIX. Si el segundo término de la proporcion, que es el conseqüente de la primera razon, es al mismo tiempo antecedente de la segunda razon, la proporcion se llama *continua*. Segun lo qual 3. 5 : 5 . 7 es una proporcion aritmética continua, que se escribe así  $\div 3 . 5 . 7$ .

La proporcion 2 : 4 :: 4 : 8 es una proporcion geométrica continua, y se escribe de este modo  $\ddot{=} 2 : 4 : 8$ .

La señal  $\div$  escrita delante de la proporcion aritmética continua, asi como la señal  $\ddot{=}$  escrita delante de la proporcion geométrica continua, indica que es necesario al enunciar la proporcion repetir dos veces el término *medio*.

Llámanse proporcion *discreta* quando los términos medios son desiguales.

La razón se llama *de mayor desigualdad* quando el antecedente es mayor que el conseqüente; *de igualdad*, quando los dos términos son iguales; y *de menor desigualdad*, quando es menor el antecedente que el conseqüente.

C. Se llama *progesion aritmética* una série de términos, que tomados consecutivamente, tienen entre ellos la misma diferencia; y se llama *progesion geométrica* una série de términos, que divididos consecutivamente el uno por el otro, dan el mismo quociente.

La série  $\div 3 . 6 . 9 . 12 . 15$  &c. es una progresion aritmética. La diferencia que se halle entre los términos consecutivos se llama el *exponente de la progresion*.

La série  $\ddot{=} 2 : 4 : 8 : 16 : 32$  &c. es una progresion geométrica. El quociente  $\frac{1}{2}$  que se halla partiendo los términos consecutivos el uno por el otro, se llama *exponente de la progresion*.

El signo  $\div$  que precede la progresion aritmética, y el signo  $\ddot{=}$  que se ve al principio de la progresion geométrica, significan que enunciando la progresion, se debe repetir dos veces cada término, excepto el primero y el último.

CL Las progresiones pueden ser *ascendentes* ó *descendentes*.

Una progresion es ascendente, quando los términos van aumentando; la progresion aritmética y la progresion geométrica que acabamos de poner por exemplo son ascendentes.

Una progresion es descendente, quando los términos van

en disminucion: por exemplo  $\div 19 \cdot 15 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 3$  es una progresion aritmética descendente;  $\div 64 : 32 : 16 : 8 : 4 : 2 : 1$  es una progresion geométrica descendente



## PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES Y PROGRESIONES ARITMÉTICAS.

**CII.** *En toda proporcion aritmética, la suma de los extremos es igual á la suma de los medios.*

Por exemplo, en la proporcion aritmética  $4 \cdot 6 : 7 \cdot 9$ ;  
 $4 \uparrow 9$  ó  $13$  suma de los extremos  $= 6 \uparrow 7$  ó  $13$  suma de los medios.

En esta otra  $3 \cdot 7 : 7 \cdot 5$ ;  $3 \uparrow 5$  ó  $8$  suma de los extremos  $= 1 \uparrow 7$  ó  $8$  suma de los medios.

Lo mismo sucede en qualquiera otra proporcion aritmética; porque en toda proporcion aritmética, cada conseqüente es igual á su antecedente, aumentado ó disminuido del valor del exponente comun, segun que la razon sea de mayor ó menor desigualdad; luego, poniendo en lugar de cada conseqüente su antecedente aumentado ó disminuido del valor del exponente comun, la suma de los extremos y la de los medios se hallan compuestas de cantidades idénticas, y por conseqüencia estas dos sumas son iguales; en efecto, tomemos por exemplo la proporcion aritmética  $4 \cdot 6 : 7 \cdot 9$ ; descompongo el conseqüente  $6$  en  $4 \uparrow 2$ , esto es, el antecedente  $4$  mas el exponente  $2$ ; y el conseqüente  $9$  lo descompongo en  $7 \uparrow 2$ , esto es, el antecedente  $7$  mas el exponente  $2$ , luego la proporcion anterior se reducirá á la siguiente  $4 \cdot 4 \uparrow 2 : 7 \cdot 7 \uparrow 2$ , poniendo en lugar de  $6$  á  $4 \uparrow 2$ , y en lugar de  $9$  á  $7 \uparrow 2$ . En esta última proporcion tenemos por suma de los extremos  $4 \uparrow 7 \uparrow 2$ , y por suma de los medios  $4 \uparrow 2 \uparrow 7$ , cuyas dos sumas son iguales por constar de cantidades iguales. Sea para mayor comprobacion esta otra proporcion  $3 \cdot 1 : 7 \cdot 5$ ; segun lo que hemos dicho tocante al modo de descomponer los conseqüentes en dos cantidades, una de ellas igual á su antecedente, y la otra igual á mas ó menos el exponente, tendremos  $1=3-2$ , y  $5=7-2$ , la proporcion propuesta se transformará en la siguiente  $3 \cdot 3-2 : 7 \cdot 7-2$ ; la suma de los extremos es  $= 3 \uparrow 7-2$ , y la de

los medios  $3-2+7$  tambien igual á la de los extremos; y como lo que acabamos de practicar puede verificarse con toda proporcion aritmética, concluiremos que es general la demostracion, de que en toda proporcion aritmética la suma de los medios es igual á la suma de los extremos.

CIII. Luego 1.º En toda proporcion aritmética continua, la suma de los extremos es igual al duplo del término medio. Porque, por exemplo, la proporcion aritmética continua  $\div 3. 7: 11$  siendo la misma que  $3. 7: 7. 3$ , se tendrá por suma de los extremos  $11+3$ , ó  $14=7+7$ , ó el doble de 7.

CIV. Luego 2.º Si se suman los dos términos medios de una proporcion aritmética, y de la suma se resta uno de los extremos, el residuo será el otro extremo. En efecto, si de la suma de los dos extremos se resta un extremo, el otro extremo debe resultar al residuo. Pero la suma de los medios es igual á la suma de los extremos; luego si de la suma de los medios se resta un extremo, resultará el otro extremo al residuo. Atendiendo tambien á que, si de la suma de los medios restamos un medio, debe resultar el otro medio al residuo, ya que la suma de los medios es precisamente igual á la de los extremos, podremos concluir, que si de la suma de los extremos se resta un medio, resultará el otro medio al residuo. 1.er Exemplo, si conociendo los tres términos 5, 7, 9 de una proporcion aritmética, y siendo 5 uno de los extremos, busco el otro extremo; sumaré 7 con 9, y de la suma 16 resto 5, el residuo 11 será el extremo que busco; de modo que la proporcion completa será 5. 7: 9. 11 ó bien 11. 7: 9. 5; 2.º Exemplo, sean los tres términos 3, 7, 9 de una proporcion aritmética, y sea 7 el término medio conocido; si se quiere conocer el otro medio, sumaré 3 con 9, de la suma 12 resto 7, y el residuo 5 será el otro medio que se queria saber; de modo que la proporcion completa será 3. 5: 7. 9, ó bien 3. 7: 5. 9.

CV. Si se trata del término medio de una proporcion aritmética continua, es claro que se hallará tomando la mitad de la suma de los extremos. Así para hallar el término medio de una proporcion aritmética continua, de la qual 4 y 8 sean los extremos, añado estos dos números, y de esta suma 12 tomo su mitad 6, que será el término medio buscado. La proporcion completa será pues  $\div 4. 6. 8$ , ó bien 4. 6: 6. 8.

CVI. Siempre que quatro números, como 6, 5, 4, 3, sean tales que la suma de los extremos sea igual á la de los medios;

estos quatro números estarán en proporcion aritmética.

En efecto, pues que  $6 \div 3 = 5 \div 4$ , se tendrá restando 3 de un lado y otro,  $6 - 3 = 5 - 4 = 3$ . Si en este resultado se resta 5 de un lado y otro, se tendrá  $6 - 5 = 4 - 3$ . Luego estas son dos razones aritméticas iguales (art.  $^{\circ}$  98), supuesto que la diferencia ó el exponente es 1 en cada lado; luego formarán proporcion diciendo  $6 : 5 = 4 : 3$ .

**CVII.** En toda progresion aritmética un término qualquiera es igual al primero mas ó menos el exponente repetido tantas veces como términos haiga antes del propuesto.

Porque una progresion aritmética es una serie de términos, que tomados consecutivamente tienen entre sí la misma diferencia (art.  $^{\circ}$  100), luego el segundo término de la progresion es igual al primero aumentado, ó disminuido del valor del exponente, segun que la progresion sea ascendente ó descendente.

El tercer término de la progresion es igual al segundo aumentado ó disminuido del valor del exponente: luego este tercer término es igual al primero mas ó menos dos veces el valor del exponente.

El quarto término de la progresion es igual al tercero aumentado ó disminuido del valor del exponente: luego este quarto término es igual al primero mas ó menos tres veces el valor del exponente, y así de los demás: en efecto, en la progresion aritmética ascendente  $\div 18. 21. 24. 27. 30$  &c., se tiene 1.  $^{\circ}$   $21 = 18 + 3$ ; 2.  $^{\circ}$   $24 = 21 + 3 = 18 + 3 + 3 = 18 + 3 \times 2$ , &c. En la progresion aritmética descendente  $\div 18. 15. 12. 9. 6$  &c., se tiene 1.  $^{\circ}$   $15 = 18 - 3$ ; 2.  $^{\circ}$   $12 = 15 - 3 = 18 - 3 - 3 = 18 - 3 \times 2$  &c.; de lo que concluiremos, que es evidente que en toda progresion aritmética, un término qualquiera es igual al primero mas ó menos el valor del exponente repetido tantas veces como términos haiga delante del propuesto.

**CVIII.** Luego en toda progresion aritmética que tiene cero por primer término, un término qualquiera es igual al valor del exponente repetido tantas veces como términos haiga delante del propuesto.

**CIX.** Este principio sirve para interponer entre dos términos dados un número qualquiera de términos medios aritméticos.

Si se trata, por exemplo; de interponer entre 11 y 19 tres números que estén en progresion aritmética con 11 y 19, vea que esta progresion habrá de componerse de 5 términos,

y que conociendo el primero no me queda otra cosa que hacer para formar los demas sino averiguar el valor del exponente. Pero sabemos que el quinto y último término se compone del primer término 11 mas 4 veces el valor del exponente (art. 107): conseqüente á esto, si de 19 resto 11 el residuo 8 que resulta se compondrá del valor del exponente repetido 4 veces. Luego si parto este residuo por 4, el quociente 2 que tengo será el exponente de la progresion. Actualmente determinaré en seguida los tres términos medios que se buscaban: el primero  $\equiv 11 \div 2 \equiv 13$ ; el segundo  $\equiv 11 \div 2 \times 2 \equiv 15$ ; y el tercero  $\equiv 11 \div 2 \times 3 \equiv 17$ . La progresion que estos tres medios forman con 11 y 16 es pues  $\div 11. 13. 15. 17. 19$ .



## DUODÉCIMA LECCION.

### *Propiedades de las Proporciones y Progresiones geométricas.*

**CX.** *En toda proporcion geométrica, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.*

Por exemplo, en la proporcion  $8 : 16 :: 6 : 12$ ,  $8 \times 12$  ó  $96$  producto de los extremos  $\equiv 16 \times 6$  ó  $96$  producto de los medios.

Esta propiedad se verifica en general en toda proporcion geométrica; porque en toda proporcion geométrica (art. 97) todo antecedente es igual al producto de su conseqüente por el exponente; luego poniendo en lugar de cada antecedente su conseqüente multiplicado por el exponente comun, el producto de los extremos y el de los medios se compondrán de los mismos factores, y de consiguiente serán iguales.

En efecto, sea la proporcion geométrica  $24 : 8 :: 15 : 5$ , en la qual será el exponente  $\frac{24}{8}$  ó bien  $\frac{15}{5}$  (art. 97), que ambas expresiones son  $\equiv 3$ , á mas será  $24 \equiv 8 \times 3$  y  $15 \equiv 5 \times 3$ , esta proporcion se transforma en la siguiente  $8 \times 3 : 8 :: 5 \times 3 : 5$ . Luego el producto  $8 \times 3 \times 5$  de los extremos, se compone de los mismos factores que  $8 \times 5 \times 3$  producto de los medios; luego serán iguales.

Si tomásemos por exemplo la primera proporcion propuesta  $8 : 16 :: 6 : 12$ , el exponente  $\frac{8}{16}$  ó  $\frac{6}{12} \equiv \frac{1}{2}$ , en esta tendremos

$8 = 16 \times \frac{1}{2}$  y  $6 = 12 \times \frac{1}{2}$ ; luego se transformará en esta  $16 \times \frac{1}{2} : 16 :: 12 \times \frac{1}{2} : 12$ ; en la qual  $16 \times \frac{1}{2} \times 12$  producto de los extremos  $= 16 \times 12 \times \frac{1}{2}$  producto de los medios.

CXI. Luego, 1.º en toda proporcion geométrica continua, el producto de los extremos es igual al quadrado del término medio. Porque, por exemplo, la proporcion geométrica continua  $4 : 6 : 9$ , ó lo que es lo mismo  $4 : 6 :: 6 : 9$ , y se tiene  $4 \times 9$  ó  $36$ , producto de los extremos  $= 6 \times 6$  ó  $36$ , quadrado del término medio.

CXII. Luego, 2.º es facil de hallar el quarto término de una proporcion geométrica, de la que se conocen los otros términos; para lo qual, si el término que se busca es un extremo, se multiplicarán los medios uno por otro, y el producto se partirá por el extremo conocido, debiendo resultar al quociente el extremo que se busca. Si fuese un medio el término desconocido, se hallará este partiendo por el medio conocido el producto de los extremos. Esto se funda, en que si se parte el producto de los extremos por un extremo, se tiene al quociente el otro extremo. Pero el producto de los medios es igual al producto de los extremos; luego partiendo el producto de los medios por el extremo conocido resultará al quociente el extremo que se busca. Asimismo se ve claramente, que si se parte el producto de los medios por un medio, resulta el otro medio al quociente. Pero el producto de los extremos es igual al de los medios; luego partiendo el producto de los extremos por el término medio conocido, resultará al quociente el medio que se busca. Por exemplo, dados los tres términos 4, 8, 12 de una proporcion geométrica, y siendo 4 uno de los extremos, si se pide el otro extremo multiplicaré los medios 8 por 12, y partiré por 4 su producto 96, el quociente 24 será el extremo pedido; de modo que la proporcion completa será  $4 : 8 :: 12 : 24$  ó  $24 : 8 :: 12 : 4$ . Si conociendo tres terminos 5, 15, 21, de una proporcion geométrica, y siendo 15 uno de los medios, busco el otro medio multiplicando los extremos 5 y 21, el uno por el otro, y partiendo por 15 su producto 105, el quociente será el medio que se busca; de modo que la proporcion completa es  $5 : 7 :: 15 : 21$  ó  $5 : 15 :: 7 : 21$ .

CXIII. Si se trata del término medio de una proporcion geométrica continua, se hallará este tomando la raíz quadrada del producto de los extremos.

Así, para hallar el término medio de una proporcion geo-



La tercera se llama *alternar*, se reduce á cambiar el lugar de los medios.

La quarta se llama *comparar componiendo*, y es comparar la suma de cada antecedente y conseqüente, con el mismo antecedente y conseqüente.

La quinta se reduce á comparar la diferencia entre el antecedente y conseqüente de cada una de las razones con sus mismos antecedentes ó conseqüentes.

Es fácil convencerse, de que en todas las proporciones anteriores el producto de los medios es igual al de los extremos.

**CXVII.** En una *série qualquiera de razones geométricas iguales*, la suma de todos los antecedentes es á la suma de todos los conseqüentes, como un antecedente es á su conseqüente, ó como la suma de un número qualquiera de antecedentes es á la suma de igual número de conseqüentes correspondientes.

Sea, por exemplo, la *série* de razones geométricas iguales  $2 : 4 :: 3 : 6 :: 5 : 10$ , &c. se tendrá primero  $2 - | - 3 - | - 5 : 4 - | - 6 - | - 10 :: 3 : 6$ , ó en fin  $5 : 10$ .

Se tendrá en segundo lugar  $2 - | - 3 - | - 5 : 4 - | - 6 - | - 10 :: 2 - | - 3 : 4 - | - 6$ , porque en cada una de estas dos proporciones, el producto de los extremos es igual al de los medios.

Por la misma razón se evidencia, que en una *série qualquiera de razones geométricas iguales*, la suma de un número qualquiera de antecedentes es á la suma de igual número de conseqüentes correspondientes, como un antecedente es á su conseqüente, ó como la suma de otro número qualquiera de antecedentes es á la suma de igual número de conseqüentes correspondientes.

**CXVIII.** Si se multiplican ó si se parten los quatro términos de una proporción geométrica por los quatro términos de una ó de varias proporciones geométricas, antecedente por antecedente, conseqüente por conseqüente, los productos ó los quocientes que resulten estarán en proporción.

Las proporciones que resultan de dos, ó de mayor número de proporciones, multiplicadas antecedente por antecedente, y conseqüente por conseqüente, se llaman *proporciones compuestas*.

Llámanse *proporciones subcompuestas* las que resultan de la partición de dos, ó de mayor número de proporciones partidas en los términos anteriormente expresados.

*Exemplo 1.º* Sean las dos proporciones  $2 : 4 :: 3 : 6$ , y  $5 : 15 :: 7 : 21$ ; los productos correspondientes son 10, 60, 21, 126; cuyos quatro términos estan en proporción mediante

á que  $10 \times 126 = 60 \times 21 = 1260$ ; luego los productos expresados formarán una proporción, es decir, que se tiene  $10 : 60 :: 21 : 126$ .

*Demostracion.* Para convencerse de que esta propiedad se verificará en toda proporción compuesta, bastará recordar (art. 97) que todo antecedente representa el numerador del exponente de la razón á que pertenece, y todo conseqüente su denominador; es pues claro, que de multiplicar una razón por otra debe resultar una tercera, cuyo exponente tendrá por numerador el producto de los dos antecedentes, ó de los dos numeradores de los exponentes de las dos razones que la componen, y por denominador el producto de los dos conseqüentes ó de los denominadores de los dos exponentes correspondientes; lo que equivale á decir, que el exponente de la razón compuesta debe ser un quebrado igual al producto de los quebrados de los exponentes de las razones que la componen: pero como el exponente de la segunda razón de toda proporción geométrica es igual al exponente de la primera (art. 98), es evidente, que el exponente de la segunda razón de toda proporción compuesta, será igual al de la primera por ser producto producido por iguales factores; luego los quatro términos deberán estar en proporción.

*Exemplo 2.º* Sean las dos mismas proporciones  $2 : 4 :: 3 : 6$ , y  $5 : 15 :: 7 : 21$ , y pártanse por orden los términos de la primera por los términos de la segunda; los quatro cocientes que resulten formarán la siguiente proporción subcompuesta.  $\frac{2}{5} : \frac{4}{15} :: \frac{3}{7} : \frac{6}{21}$ .

*Demostracion.* De lo dicho y de la demostración anterior se infiere, que el exponente de toda razón subcompuesta es el cociente de los exponentes de las razones que la componen, y como estos factores de la partición son iguales en la segunda razón (art. 98), es claro que el exponente de la segunda razón de la proporción subcompuesta resultará igual al de la primera, luego sus quatro términos estarán en proporción.

**CXIX.** Luego los cuadrados, los cubos &c. de los términos en proporción geométrica estan tambien en proporción geométrica; porque estas diferentes potestades no son sino los productos de los términos de la misma proporción multiplicados por orden un cierto número de veces por sí mismos: así de ser  $2 : 4 :: 3 : 6$ , concluirémos,

1.º que  $4 : 16 :: 9 : 36$ .

2.º que  $8 : 64 :: 27 : 216$ .

CXX. Recíprocamente las raíces cuadradas, cúbicas, &c. de los términos en proporcion geométrica, estan tambien en proporcion geométrica: porque si las raíces no formasen una proporcion, mientras que sus potestades la forman, sería preciso deducir, que dos razones desiguales, multiplicadas por orden un cierto número de veces podrán dar por productos razones iguales, lo que es un absurdo.

Así, de tenerse  $4:6::9:36$ , y  $8:64::27:216$ , se concluirá que  $2:4::3:6$ .

CXXI. En toda progresion geométrica, un término qualquiera es igual al primero partido por el valor del exponente elevado á una potestad indicada por el número de términos que preceden al propuesto.

Porque una progresion geométrica es una série de términos, que partidos consecutivamente el uno por el otro dan el mismo quociente (art. 100). Luego el segundo término de la progresion es igual al primero partido por el exponente de la progresion.

El tercer término de la progresion es igual al segundo partido por el exponente. Luego este tercer término es igual al primero partido por la segunda potestad del exponente.

El quarto término de la progresion es igual al tercero partido por el exponente. Luego este quarto término es igual al primero partido por el exponente elevado á la tercera potestad, y así de los demas.

Igualmente podemos decir, que un término qualquiera de una progresion geométrica es igual al primero multiplicado por el exponente inverso de la progresion, elevado á una potestad indicada por el número de términos que preceden al propuesto. Porque partir por el exponente, es decir, por un quebrado, cuyo numerador es el antecedente, y el conseqüente su denominador, se reduce (art. 65 y 66) á multiplicar por el quebrado invertido, es decir, por un quebrado que tenga por numerador el conseqüente, y por denominador el antecedente.

Por exemplo, sea la progresion descendente  $729:243:81:27:9:3$ , cuya razon  $\frac{729}{81}$  vale 3. El quarto término 27 es igual al quociente del primero 729 partido por 27 cubo del exponente, ó al producto del primero 729 multiplicado por  $\frac{1}{27}$  cubo inverso del exponente.

En la progresion ascendente  $\therefore 2 : 8 : 32 : 128 : 512 : 2048$ , en la qual  $\frac{2}{8}$  es el exponente, ó  $\frac{1}{4}$ : el quarto término 128 es igual al quociente del primero 2 partido por el cubo de  $\frac{1}{64}$  del exponente; ó al producto del primero 2 multiplicado por  $\frac{64}{1}$  cubo inverso de la razon.

CXXII. Luego en toda progresion geométrica, cuyo primer término es 1, un término qualquiera es igual al valor del exponente invertido, elevado á una potestad indicada por el número de términos que preceden á aquel de que se trata. Por exemplo, en la progresion  $\therefore 1 : 3, \&c.$  cuyo exponente es  $\frac{1}{3}$ , el sexto término será  $= \left(\frac{3}{1}\right)^5 = 243$ .

CXXIII. Sirve este principio para hallar entre dos términos dados un número qualquiera de medios geométricos.

Si se quiere, por exemplo, interponer entre 972 y 4, quatro medios proporcionales geométricos; es claro que la operacion se reduce á formar una progresion geométrica compuesta de seis términos, de los quales 972 es el primero, y 4 el sexto.

Hemos visto (art. 121) que este sexto término debe ser igual al primero partido por el exponente elevado á la quinta potencia; es claro que partiendo el primero 972 por el último 4, el quociente  $\frac{972}{4} = 243$  será la quinta potestad del exponente de la progresion, cuya raíz quinta es 3, que será el exponente de la progresion. Determino ahora los medios

buscados. El primero será  $\frac{972}{3} = 324$ ; el segundo  $= \frac{972}{3^2} =$

$\frac{972}{9} = 108$ ; el tercero  $= \frac{972}{3^3} = \frac{972}{27} = 36$ ; el quarto  $=$

$\frac{972}{3^4} = \frac{972}{81} = 12$ . La progresion que estos quatro medios

forman es  $\therefore 972 : 324 : 108 : 36 : 12 : 4$ .

## DECIMATERCIA LECCION.

## De la Regla de Tres.

CXXIV. El principio establecido (art. 110) encierra una regla, cuya utilidad le ha hecho dar por algunos el nombre de *regla de oro*, pero que con mas generalidad se llama *regla de tres*. La regla de tres se reduce á hallar un término de una proporcion, de la qual se conocen los otros tres términos.

Se distinguen dos reglas de tres, la regla de tres *directa*, y la regla de tres *inversa*.

La regla de tres es *directa*, quando los términos correspondientes van de *mayor á mayor*, ó de *menor á menor*. Es *inversa* quando los términos correspondientes van de *mayor á menor*, ó de *menor á mayor*.

Esto se entenderá mejor con exemplos.

*Exemplo 1.º* Seis jornaleros han hecho una obra de 8 pies en un cierto número de dias: se quiere saber, 18 jornaleros quanta obra harán en el mismo tiempo.

En primer lugar, advierto que los 8 pies de obra es el término correspondiente á 6 jornaleros, supuesto que es la obra que estos hicieron; así como 18 jornaleros es el dato correspondiente á la obra que se pretende averiguar harian en el mismo tiempo: esta obra debe aumentar en la misma razon que aumenta el número de jornaleros; luego los términos correspondientes van de mayor á mayor, luego la regla es directa, y se reduce á hallar el quarto término de esta proporcion 6 jorn. : 18 jorn. :: 8 pies : x pies, representando por la letra x el quarto término, mientras que no se halle su valor, que segun lo visto (art. 112) será  $x = \frac{18 \times 8}{6} =$

24 pies.

En efecto, si 6 jornaleros hacen 8 pies de obra, 18 jornaleros en el mismo tiempo harán tres veces 8 pies, esto es 24.

Para mayor facilidad se llamarán datos los dos términos *homólogos*, ó *semejantes conocidos*, y *resultados* los otros dos. Se llamará *primer dato* al correspondiente al resultado conocido, y *segundo dato* al correspondiente al resultado que se

va á buscar. Así, en el exemplo anterior, 6 hombres y 18 hombres son los datos, por ser semejantes y conocidos: 8 pies de obra y  $x$  ó 24 pies de obra son los resultados, por ser homólogos y tratarse de hallar el valor de uno de ellos: el término  $x$  ó 24 pies de obra que se busca es el 2.º resultado; luego los 18 jornaleros que la han hecho será el 2.º dato: por un raciocinio igual 6 jornaleros será el primer dato, por corresponder al primer resultado 8 pies de obra: veremos á continuación la utilidad que tiene saber distinguir la denominacion de cada término de la proporción, pues vamos á estrivir en esta distinción un método breve y clarísimo de plantear todo problema que recaiga en el caso de una regla de tres.

Para ello considérese que todas las resoluciones de problemas de reglas de tres directas, han de seguir la misma ley ó método que la del exemplo anterior; de que resulta que atendiendo á la colocación que á datos y resultados hemos dado en la proporción 6 hombres : 8 pies :: 18 homb. :  $x$  pies, podrá concluirse, que en toda regla de tres directa deberá decirse, que el primer dato es al primer resultado, como el segundo dato es al segundo resultado que se busca.

Exemplo 2.º Se quiere saber quantos pies de Burgos componen 360 pies de Paris ó de Rey, sabiendo que 6 pies de Paris componen 7 de Burgos.

La propuesta es una regla de tres directa; porque en efecto, así como una distancia de 6 pies de Paris aumenta hasta 7 medida en pies de Burgos, así deberá aumentar la distancia de 360 pies de Paris medida en pies de Burgos.

En segundo lugar, véase que el cuarto término ó segundo resultado que se busca han de ser pies de Burgos; luego el término 7 pies de Burgos es el primer resultado, como que 6 pies de Paris corresponden á 7 pies de Burgos, 6 pies de Paris será el primer dato; luego 360 pies de Paris será el segundo dato: hecha mentalmente esta distinción, apelemos á la regla anterior diciendo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{1.º dato} & \text{1.º resultado} & \text{2.º dato} & \text{2.º resultado} & & & \\
 \text{P. de Paris} & \text{P. de Burgos} & \text{P. de Paris} & \text{P. de Burgos} & & & \\
 6 & 7 & 360 & x & = & & \\
 \frac{7 \times 360}{6} = \frac{2520}{6} = 420 & \text{pies de Burgos, esto es, que 360 pies} & & & & & \\
 \text{de Paris corresponden á 420 pies de Burgos.} & & & & & & 
 \end{array}$$

CXXV. Pasemos á la regla de tres *inversa*:

*Exemplo 3.º* Si 20 hombres han consumido un repuesto de víveres en 16 dias, en quantos dias lo consumirían 40 hombres?

Mientras mayor sea el número de hombres, menor será el número de dias que durarán los víveres: basta este racionamiento para venir en conocimiento (art. 124) de que la regla de tres es *inversa*, pues que los términos correspondientes van de mayor á menor: igualmente se conocerá que el quarto término, ó segundo resultado que se busca, son los dias que durará el repuesto con 40 consumidores: luego el término homólogo 16 dias será el primer resultado; y como estos 16 dias corresponden á 20 consumidores, será primer dato los 20 hombres; luego 40 hombres será el segundo dato.

Paso á plantear la proporcion, y digo, 20 *homb.*: 40 *homb.* por primera razon de ella: paso á entablar la segunda razon con los dos términos restantes 16 dias y *x* dias; que para que sea igual á la primera, y sin cuya circunstancia no habría proporcion, se necesita que sus dos términos guarden el mismo orden que los dos términos de la primera razon, esto es, que se ponga el menor de ellos por antecedente, y el mayor por conseqüente; luego diremos :: *x* dias : 16 dias, y la proporcion será 20 *homb.* : 40 *homb.* :: *x* dias : 16 dias, y cambiando los medios con los extremos, para que resulte *x* al quarto término, lo que (art. 116) no destruye la proporcion, tendremos

$$40 \text{ homb.} : 20 \text{ homb.} :: 16 \text{ dias} : x \text{ dias} = \frac{20 \times 16}{40} = \frac{320}{40} = 8 \text{ dias.}$$

2.º dato    1.º dato    1.º result.    2.º result.

En efecto, doble número de consumidores emplearán la mitad del tiempo en consumir los mismos víveres.

De la colocacion que hemos dado á los términos de la proporcion, deduciremos por regla general, que para plantear la proporcion de una regla de tres *inversa*, se ha de decir, el segundo dato es al primer dato, como el primer resultado es al segundo resultado que se busca.

*Exemplo 4.º* Hallándose un Oficial con su destacamento asediado en un Fuerte, solo tenia víveres para 15 dias dando racion entera; pero esperando ser socorrido dentro de 25 dias, quiere disminuir la racion de modo que le lleguen hasta aquella época. Se pregunta ¿á quanto debe reducirse la racion diaria?

Es evidente, que supuesto que con el mismo repuesto de víveres se han de mantener el mismo número de individuos, ha de ser preciso disminuir la suministracion diaria, y que esta disminuirá en la misma razon que aumente el número de dias que con aquel repuesto se han de mantener; luego la regla de tres es inversa; queda solo que indagar la denominacion de cada termino de la propuesta, y de averiguado establecer la proporcion segun la regla que acabamos de asentar.

Representemos por la unidad la totalidad de víveres que se consumirian diariamente si se diese la racion entera: es evidente que  $x$  quarto término, ó segundo resultado que se busca, será menor que 1, supuesto que ha de disminuir la racion en razon del aumento de dias; ademas 1 será el primer resultado, y su término correspondiente 15 dias será el primer dato; luego 25 dias será el segundo dato: la proporcion será  $25 \text{ dias} : 15 \text{ dias} :: 1 \text{ racion} : x \text{ racion} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ .

Luego en lugar de dar racion entera, deberá solo dar  $\frac{3}{5}$  de racion.

CXXXVI. La regla de tres, sea directa sea inversa, puede ser *simple* ó *compuesta*: es simple quando como en los exemplos anteriores no hay sino tres términos conocidos: se llama compuesta quando hay mas de tres. El siguiente exemplo es una regla de tres *compuesta*.

*Exemplo 5.º* 5 hombres trabajando durante 8 dias han hecho 42 varas de obra; quanta obra harán 10 hombres trabajando durante 16 dias?

Esta regla de tres compuesta la reduzco á una regla de tres *simple*, diciendo, 5 hombres que trabajen durante 8 dias, hacen la misma obra que 8 veces 5 hombres, ó 40 hombres que trabajen durante un dia: así mismo 10 hombres que trabajen durante 16 dias, hacen la misma obra que 16 veces 10 hombres, ó 160 hombres que trabajen un dia. La operacion se reduce á esta; 40 hombres han hecho 42 varas de cierta obra; quantas harán 160 hombres en el mismo tiempo?

Es evidente que la regla es directa, y diré  $40 : 160, \text{ ó } 1 : 4 :: 42 \text{ v.} : x = \frac{42 \times 4}{1} = 168 \text{ v.}$

Se pueden disponer los números como sigue:

h. <sup>s</sup>	h. <sup>s</sup>
5	10
8	16

h.<sup>s</sup>                      h.<sup>s</sup>  
 producto 40                      : 160

6 ..... 40                      : 160 :: 42 v. : x = 168 v.

y se verá que la regla de tres es directa, diciendo: mientras mas obreros haiga, y mientras mas días trabajen estos obreros, mas obra harán; porque doble número de obreros en doble tiempo deben hacer quadrupla obra; así es, que 168 varas es quadruplo de 42 varas.

*Exemplo 6.º* Si 12 operarios en 10 días trabajando 7 horas diarias han hecho cierta obra; quantos operarios se necesitarán para hacer la misma obra en 14 días, trabajando estos 10 horas diarias?

Un trabajo de 10 días y de 7 horas diarias, es la misma cosa que un trabajo de 7 veces 10 días, ó de 70 días y de una hora cada día. Asimismo un trabajo de 14 días y de 10 horas diarias, es la misma cosa que un trabajo de 10 veces 14 días, ó de 140 días y de una hora cada día. Segun lo qual la propuesta se reduce á la siguiente:

Si 12 operarios trabajando 70 días han hecho cierta obra; quantos operarios serán necesarios para executar la misma obra en 140 días?

Es evidente que esta última propuesta es una regla de tres simple é inversa, porque aumentando el número de días debe disminuir el número de operarios: tambien es claro que por ser x quarto término ó segundo resultado que se busca, un número de operarios, el que 12 operarios es el primer resultado, y de esto se sigue que 70 días será el primer dato, y 140 días el segundo dato: luego la proporcion se planteará segun la regla prescrita ( art. 125 ), esto es

$$\begin{array}{r} \text{Días} \quad \text{Días} \quad \text{Opers.} \\ 140 : 70 :: 12 : x = \frac{70 \times 12}{140} = \frac{840}{140} = 6. \end{array}$$

Es decir, que con 6 operarios se podrá hacer la misma obra en 14 días, trabajando 10 horas cada día.

De lo dicho en este exemplo y en el anterior se deduce, que en la resolución de los problemas sugetos á la regla de tres compuesta, el artificio consiste en saberla reducir á simple, tino que con una poca de meditacion y práctica se adquiere fácilmente.

—●—●—●—●—●—●—●—●—

## DE LA REGLA DE COMPAÑÍA.

**CXXVII.** La regla de Compañía es una operación, por la qual se parte un número en partes proporcionales á números dados: sirve para repartir una pérdida ó una ganancia, proporcionalmente á lo que cada uno ha puesto.

*Exemplo 1.º* Dos comerciantes han formado una compañía; el uno ha puesto 100 pesos, y el otro 200 pesos: han ganado 1200 pesos. ¿Quanto le tocará á cada uno?

Pues que es evidente que cada ganancia particular debe ser proporcional á cada puesta particular, se tendrá esta proporción.

La primera puesta: la primera ganancia :: la segunda puesta: la segunda ganancia.

Luego (art. 117) la suma de las puestas: la suma de las ganancias ::

{ La primera puesta: la primera ganancia.  
La segunda puesta: la segunda ganancia.

Luego la regla de Compañía se reduce á una regla de tres, cuyo primer término es la suma de las puestas.

El segundo, la suma de las ganancias.

El tercero, cada puesta particular.

Se tendrá al quarto término la parte de cada uno de los socios. Será pues

$$\begin{array}{r}
 \text{Pesos} \qquad \qquad \text{Ps.} \qquad \qquad \text{Ps.} \\
 100 \qquad : x = \frac{100 \times 1200}{300} = 400 \\
 \text{Ps.} \quad \text{Ps.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ps.} \qquad \qquad \text{Ps.} \qquad \text{Ps.} \\ 300 : 1200 :: 200 \qquad : y = \frac{200 \times 1200}{300} = 800 \end{array} \right.
 \end{array}$$

*Exemplo 2.º* Tres Comerciantes han puesto en giro un fondo de 724 pesos: el uno puso 412 pesos, el otro 208 pesos, y el último 104 pesos: han perdido 1472 pesos: ¿quanto ha perdido cada uno?

Hago esta regla de tres.

$$\begin{array}{r}
 \text{Ps.} \qquad \text{Ps.} \qquad \text{Ps.} \qquad \text{Rs.} \qquad \text{Mrs.} \\
 412 : x = \frac{412 \times 1472}{724} = 837 \dots\dots 09 \dots\dots 29 \frac{220}{724} \\
 724 : 1472 :: \left\{ \begin{array}{l} 208 : y = \frac{208 \times 1472}{724} = 422 \dots\dots 13 \dots\dots 14 \frac{336}{724} \\ 104 : z = \frac{104 \times 1472}{724} = 211 \dots\dots 06 \dots\dots 24 \frac{168}{724} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Sé hace la prueba de esta especie de regla, tomando la suma de las ganancias particulares, ó de las pérdidas particulares: esta suma debe igualar la ganancia ó pérdida total.

CXXVIII. Para resolver las operaciones anteriores se han empleado reglas de tres simples; hay casos en los quales es forzoso recurrir á la regla de tres compuesta.

*Exemplo.* Tres sugetos han hecho una compañía; el primero ha puesto 100 pesos durante dos meses; el segundo 200 pesos durante 4 meses; el tercero 300 pesos durante 6 meses. Estos fondos han producido una ganancia de 8400 pesos, quanto le toca á cada uno?

Digo, 100 pesos durante 2 meses, deben producir la misma ganancia que 2 veces 100 pesos, ó 200 pesos durante un mes.

200 pesos durante 4 meses deben producir la misma ganancia que 4 veces 200 pesos, ó 800 pesos durante un mes.

300 pesos durante 6 meses deben producir la misma ganancia que 6 veces 300 pesos, ó 1800 pesos durante un mes.

Para la resolución de la operación propuesta, ejecútese como si la primera puesta fuese de 200 pesos, la segunda de 800 pesos, la tercera de 1800 pesos, y que las tres puestas haigan estado el mismo tiempo en giro.

Resta solo sumar 200 pesos, 800 pesos, 1800 pesos: la suma es de 2800 pesos, y se tendrá

Pesos.

$$\text{Ps. Ps.} \left\{ \begin{array}{l} 200 : x = \frac{8400 \times 2}{28} = 600 \text{ pesos.} \\ 800 : y = \frac{8400 \times 8}{28} = 2400 \text{ pesos.} \\ 1800 : z = \frac{8400 \times 18}{28} = 5400 \text{ pesos.} \end{array} \right.$$

8400 suma.

## DE LA REGLA DE FALSA POSICION.

CXXIX. La regla de falsa posicion sirve á hallar un número pedido por medio de un número supuesto, que se sujeta al orden de la operación propuesta.

*Exemplo* 1.º Qual es el número cuya mitad, tercia parte y quarta parte hacen 26?

L

Supóngase que este número sea el 12. La mitad de 12 es 6, el tercio de 12 es 4, la cuarta parte de 12 es 3. Luego  $6 + 4 + 3 = 12$ : la suposición es falsa, pero servirá á hacer hallar el verdadero número que se busca; porque el número 13 se compone de las partes de 12, como 26 se compone de las partes del número buscado: luego el número supuesto es al número buscado como 13 es á 26; ó bien

$$13 : 26 :: 12 : x = \frac{26 \times 12}{13} = \frac{312}{13} = 24.$$

En efecto, la mitad, el tercio y el cuarto de 24 = 26.

*Ejemplo 2.º* Tres amigos se han reunido para echar á la lotería: han ganado 20000 reales, que se tratan de repartir proporcionalmente á lo que cada uno ha puesto: el segundo ha puesto una cantidad doble de la que puso el primero, y la que puso el tercero es doble de la suma que han puesto los otros dos. ¿Qual será la parte de cada uno?

Supóngase que el primero haya puesto 2 reales: la puesta del segundo será 4 reales, y la del tercero 12 reales. Tendré pues (art. 127)

	Rs.		Rs.
		2 : x =	$\frac{40000}{18} = 2222 \frac{2}{9}$
Rs.	{	4 : y =	$\frac{80000}{18} = 4444 \frac{4}{9}$
18 : 20000 ::		12 : z =	$\frac{240000}{18} = 13333 \frac{3}{9}$

20000 suma.

## DECIMAQUARTA LECCION.

### De los Logarítmos.

**CXXX.** Los Logarítmos son unos números que están en progresion aritmética, y corresponden á otros números que entre sí están en progresion geométrica; es decir, que se disponen dos progresiones, la una geométrica y la otra arit-

métrica, sea qual fuese el exponente de ellas, de modo que los términos de la una correspondan á los términos de la otra; cada término de la progresion aritmética es el logaríto del término de la progresion geométrica que le corresponde. Así, en las dos progresiones siguientes

$$\begin{array}{l} \div 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : \&c. \\ \div 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . \&c. \end{array}$$

2 es el logaríto de 1, 5 es el logaríto de 3, 8 es el logaríto de 9, &c.

CXXXI. Se ve claramente, que un número qualquiera puede tener una infinidad de logarítos diferentes, pues que á los términos de una progresion geométrica se puede hacer corresponder los términos de una infinidad de progresiones aritméticas diferentes. Como que los que han calculado las Tablas de logarítos han tenido una plena libertad de tomar las progresiones que les pareciese, eligieron la progresion geométrica décupla  $\div 1 : 10 : 100 : \&c.$ , y la progresion aritmética de los números naturales poniendo o por primer término de ella, en esta forma

$$\begin{array}{l} \text{números} \div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : \&c. \\ \text{logarítos} \div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . \&c. \end{array}$$

de modo que o es el logaríto de la unidad, 1 el logaríto de 10, 2 el logaríto de 100, y que en general el logaríto de un número qualquiera expresado por 1 y seguido de qualquiera número de ceros, será de tantas unidades quantos ceros haiga en dicho número despues del 1. Así, el logaríto de 100000 es 5, el de 1000000 es 6, &c.

En las Tablas de logarítos, los logarítos de 1, 10, 100, 1000 &c., es decir 1, 2, 3 &c., estan seguidos de seis ó siete ceros escritos en forma decimal, de este modo 0'000000, 1'000000, 2'000000, 3'000000; pero esta forma no cambia el valor de estos logarítos.

CXXXII. No basta tener los logarítos de los números 1, 10, 100, 1000, 10000 &c.; es preciso á mas tener los de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; 11..... 99, 101 &c.; de otro modo las ventajas que se sacarían se reducirían á bien poca cosa. Trátase pues de determinar los logarítos de los números intermedios de la progresion geométrica décupla.

**CXXXIII.** Para hallar estos logaritmos, supóngase que se inserten diez millones de medios geométricos entre todos los términos consecutivos de la progresion geométrica décupla, y que se inserten tambien diez millones de medios ariméticos entre todos los términos consecutivos de la progresion aritmética de los números naturales, de modo que los términos de cada una correspondan á los términos de la otra, cada uno con su correspondiente. Es evidente que los diez millones de medios ariméticos son los logarismos de los diez millones de medios geométricos correspondientes. Pero, pues que los diez millones de medios geométricos por los cuales se asciende de 1 á 10 forma una graduacion de términos extremadamente próximos los unos á los otros, es pues preciso que se hallen algunos de estos medios que sean iguales á 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, comprehendidos entre 1 y 10, ó que difieran tan poco que puedan tomarse por dichos números. Luego se tendrán los logaritmos de estos mismos números, tomando los medios ariméticos que en la progresion aritmética ocupan el mismo lugar que los medios geométricos tomados por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ocupan en la progresion geométrica.

Con un procedimianto semejante se determinan los logaritmos de los números comprehendidos entre 10 y 100, entre 100 y 1000 &c.

**CXXXIV.** Es evidente que los logaritmos de los números comprehendidos entre 1 y 10 en la progresion geométrica décupla deben ser mayores que 0, que es el logaritmo de la unidad, y menores que 1, que es el logarismo de 10. Los logaritmos de estos números serán pues unas fracciones. Se han expresado estas fracciones por fracciones decimales.

**CXXXV.** No es menos evidente que los logaritmos de los números comprehendidos entre 10 y 100 se hallarán expresados por 1 y una fraccion decimal: que los logaritmos de los números comprehendidos entre 100 y 1000, se expresarán por 2 y un quebrado decimal, y así de los demas.

**CXXXVI.** La cifra que se halla antes del punto que separa los enteros de los decimales se llama la *característica* del logaritmo, y la fraccion decimal se llama *mantisa*. Así, la característica de los logaritmos de los números comprehendidos entre 1 y 10 es 0; la de los logaritmos de los números comprehendidos entre 10 y 100 es 1, &c., como se ve en la Tabla siguiente.

Núm.	Logaritmos.	Núm.	Logaritmos.	Núm.	Logaritmos.
1	0. 000000	37	1. 568202	73	1. 863323
2	0. 301030	38	1. 579784	74	1. 869232
3	0. 477121	39	1. 591065	75	1. 875061
4	0. 602020	40	1. 602060	76	1. 880814
5	0. 698970	41	1. 612784	77	1. 886491
6	0. 778151	42	1. 623249	78	1. 892095
7	0. 845096	43	1. 633463	79	1. 897627
8	0. 903090	44	1. 643453	80	1. 903090
9	0. 954243	45	1. 653213	81	1. 908485
10	1. 000000	46	1. 662758	82	1. 913814
11	1. 041393	47	1. 672098	83	1. 919078
12	1. 079181	48	1. 681241	84	1. 924279
13	1. 113943	49	1. 690196	85	1. 929419
14	1. 146120	50	1. 698970	86	1. 934498
15	1. 176091	51	1. 705770	87	1. 939519
16	1. 204120	52	1. 716003	88	1. 944483
17	1. 230449	53	1. 724276	89	1. 949390
18	1. 255273	54	1. 732394	90	1. 954243
19	1. 278754	55	1. 740363	91	1. 959041
20	1. 301030	56	1. 748188	92	1. 963788
21	1. 322219	57	1. 755875	93	1. 968483
22	1. 342423	58	1. 763428	94	1. 973128
23	1. 361728	59	1. 770852	95	1. 977724
24	1. 380211	60	1. 778151	96	1. 982271
25	1. 397940	61	1. 785330	97	1. 986772
26	1. 414973	62	1. 792392	98	1. 991226
27	1. 431364	63	1. 799341	99	1. 995635
28	1. 447158	64	1. 806180	100	2. 000000
29	1. 462398	65	1. 812913	101	2. 004321
30	1. 477121	66	1. 819544	102	2. 008600
31	1. 491362	67	1. 826075	103	2. 012837
32	1. 505150	68	1. 832509	104	2. 017033
33	1. 518514	69	1. 838849	105	2. 021189
34	1. 531479	70	1. 845098	106	2. 025306
35	1. 544068	71	1. 851258	107	2. 029384
36	1. 556303	72	1. 857332	108	2. 033424

Núm.	Logaritmos.	Núm.	Logaritmos.	Núm.	Logaritmos.
109	2. 037426	145	2. 161368	181	2. 257679
100	2. 041393	146	2. 164353	182	2. 260071
111	2. 045323	147	2. 167317	183	2. 262451
112	2. 049218	148	2. 170262	184	2. 264818
113	2. 053078	149	2. 173186	185	2. 267172
114	2. 056905	150	2. 176091	186	2. 269513
115	2. 060698	151	2. 178977	187	2. 271842
116	2. 064458	152	2. 181844	188	2. 274158
117	2. 068186	153	2. 184691	189	2. 276462
118	2. 071882	154	2. 187521	190	2. 278754
119	2. 075547	155	2. 190332	191	2. 281033
120	2. 079181	156	2. 193125	192	2. 283301
121	2. 082785	157	2. 195900	193	2. 285557
122	2. 086360	158	2. 198657	194	2. 287802
123	2. 089905	159	2. 201397	195	2. 290035
124	2. 093422	160	2. 204120	196	2. 292256
125	2. 096910	161	2. 206826	197	2. 294466
126	2. 100371	162	2. 209515	198	2. 296665
127	2. 103804	163	2. 212188	199	2. 298853
128	2. 107210	164	2. 214844	200	2. 301030
129	2. 110590	165	2. 217484	201	2. 303196
130	2. 113943	166	2. 220108	202	2. 305351
131	2. 117271	167	2. 222716	203	2. 307496
132	2. 120574	168	2. 225309	204	2. 309630
133	2. 123852	169	2. 227887	205	2. 311754
134	2. 127105	170	2. 230449	206	2. 313867
135	2. 130334	171	2. 232996	207	2. 315970
136	2. 133539	172	2. 235528	208	2. 318063
137	2. 136721	173	2. 238046	209	2. 320146
138	2. 139879	174	2. 240549	210	2. 322219
139	2. 143015	175	2. 243038	211	2. 324282
140	2. 146128	176	2. 245513	212	2. 326336
141	2. 149219	177	2. 247973	213	2. 328380
142	2. 152288	178	2. 250420	214	2. 320414
143	2. 155336	179	2. 252853	215	2. 322438
144	2. 158362	180	2. 255273	216	2. 324454

En las Tablas solo se encuentran los números enteros, y sus logaritmos: hubiera sido inútil insertar en ellas los otros medios geométricos, y los medios aritméticos correspondientes.

CXXXVII. El uso de los logaritmos se funda sobre las propiedades y la correspondencia de la progresion aritmética, y de la progresion geométrica. En efecto, 1.º En toda progresion aritmética que tiene á 0 por primer término, y de consiguiente en la progresion aritmética (A)  $\div$  0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. un término qualquiera es igual al valor del exponente repetido tantas veces quantos términos haiga delante de él (art. 108). 2.º En toda progresion geométrica, cuyo primer término es la unidad, y de consiguiente en la progresion geométrica (G)  $\div$  1: 10: 100: 1000: 10000: 100000: &c. un término qualquiera es igual al valor del exponente elevado á una potestad indicada por el número de términos que le preceden (art. 122).

Luego las dos progresiones A y G, hallándose dispuestas de modo que los términos de la una correspondan á los términos de la otra, cada uno á cada uno; el exponente de la progresion aritmética se hallará repetido en un término qualquiera de esta progresion, precisamente el mismo número de veces que el valor del exponente de la progresion geométrica será factor en el término correspondiente de esta última progresion.

CXXXVIII. Se sigue de lo dicho, que, *si se suman dos términos qualquiera de la progresion aritmética, y que al mismo tiempo se multiplican los dos términos correspondientes de la progresion geométrica, la suma de los dos términos aritméticos, y el producto de los dos geométricos serán dos términos que se corresponderán en las dos progresiones.*

Porque la suma es formada del valor del exponente tomado tantas veces quantas está tomado en uno y otro término de los que hemos sumado, y el producto es formado por el valor del exponente tomado tantas veces, quantas los están en uno y otro término de los dos que hemos multiplicado; luego, pues que los dos términos sumados corresponden á los dos términos multiplicados, cada uno á su correspondiente, la suma de aquellos y el producto de estos serán dos términos que se corresponderán en las dos progresiones.

CXXXIX. *Luego la suma de los logaritmos de dos números corresponde al producto de estos números.*

Recíprocamente, la diferencia entre los logaritmos de dos números corresponde al quociente de estos números. En efecto, el dividendo siendo igual al producto del divisor por el quociente, el logaritmo del dividendo será igual á la suma de los logaritmos del divisor y del quociente: luego el logaritmo del quociente es igual al exceso del logaritmo del dividendo sobre el logaritmo del divisor.

Véanse pues las multiplicaciones reducidas á sumas por medio de los logaritmos, y las particiones á restas.

CXL. Establecido lo dicho anteriormente, para elevar un número al cuadrado ó á la segunda potencia, se multiplica este número por sí mismo; luego, añadiendo consigo mismo el logaritmo de un número, ó lo que es lo mismo, *multiplicando por 2 el logaritmo de un número, se tendrá el logaritmo del cuadrado de este número.*

Para elevar un número al cubo ó á la tercera potestad, se multiplica este número dos veces seguidas por sí mismo. Luego, añadiendo dos veces consigo mismo el logaritmo de un número, ó lo que es lo mismo, *multiplicando por 3 el logaritmo de un número, se tendrá el logaritmo del cubo de este número.*

Por un raciocinio semejante hallaremos, que multiplicando por 4, 5, 6, &c. el logaritmo de un número, se tendrá el logaritmo de dicho número elevado á la quarta, quinta, sexta, &c. potencia; pero nótese que en todos los casos, la operacion se reduce á multiplicar el logaritmo del número por el exponente de la potestad. Luego por regla general diremos, *que multiplicando el logaritmo de un número por el exponente de una potestad qualquiera, se tendrá el logaritmo de este número elevado á dicha potestad.*

Recíprocamente, partiendo por dos, ó tomando la mitad del logaritmo de un número, se tiene el logaritmo de la raíz cuadrada de este número; y tomando el tercio del logaritmo del número, se tiene el logaritmo de la raíz cúbica de este número; y con mas generalidad diremos, *que partiendo el logaritmo de un número por el exponente de la potestad, cuya raíz se ha de extraer, se tiene el logaritmo de la raíz pedida de este número.*

Véanse pues las extracciones reducidas á particiones por medio de los logaritmos. Este es el método que anteriormente (art. 93) indicamos como el mas fácil, y breve de executar estas operaciones.

**CXLI. Problema.** *Multiplicar un número entero por otro, por medio de los logaritmos.*

*Exemplo.* Para multiplicar 24 por 8, tomo el logaritmo de 24, que es.....1.380211  
á este logaritmo le añado el de 8, que es.....0.903090

La suma es.....2.282301  
busco este logaritmo en las Tablas, y hallo que corresponde al número 192, que es efectivamente el producto de 24 por 8.

*Otro.* *Multiplicar un número por 10, 100, 1000, &c. por medio de los logaritmos.*

Si el número, por el qual se ha de multiplicar, fuese 10, 100, 1000 &c., bastaría para hallar el producto añadir 1, 2, 3, &c. unidades á la característica del logaritmo del multiplicando. Por exemplo, para multiplicar 49 por 10, añado 1 á la característica del logaritmo de 49, que es 1.690196, y la suma 2.690196 es el logaritmo del producto de 49 por 10, es decir de 490. Añadiendo 2 á la característica de 1.690196, se tendrá por suma 3.690196, y este logaritmo es el del número 4900, que es el producto de 49 por 100.

Es evidente que multiplicar 49 por 10 ó por 100, es hacer este número diez ó cien veces mayor. Luego según que se añade 1 ó 2 unidades á la característica del logaritmo de 49, se hace corresponder este logaritmo á un número diez veces ó cien veces mayor; luego por este medio se tiene el logaritmo del verdadero producto.

**CXLII. Problema.** *Partir un número entero por otro empleando los logaritmos.*

*Exemplo.* Para partir 174 por 29 del logaritmo de 174, que es.....2.240549  
resto el de 29, que es.....1.462398

la diferencia es.....0.778151  
busco este logaritmo en las Tablas, y hallo que corresponde al número 6, que es en efecto el quociente de 174 partido por 29.

*Otro.* *Partir un número por 10, 100, &c. empleando los logaritmos.*

Pues que añadiendo 1, 2, 3, &c. unidades á la característica del logaritmo de un número, se tiene el logaritmo del producto de este número por 10, 100, 1000 &c., es claro que restando 1, 2, 3, &c. unidades á la característica

del logarítmo de un número, se tendrá el logarítmo del quociente de este número partido por 10, 100, 1000, &c.

**CXLIII. Problema.** *Elevar un número á la segunda potencia, ó quadrarlo por logarítmos.*

Si se trata de elevar un número como 13 al quadrado, buseo en las Tablas el logarítmo de este número, que hallo ser 1.113943, que multiplico por 2, y tengo 2.227886, que en las Tablas corresponde al número 169, quadrado de 13.

Aunque en las Tablas el logarítmo de 169 es 2.227887, y no 2.227886 como hemos hallado al resultado, la diferencia de un millonésimo es tan despreciable, que en este y otro qualquier caso semejante se debe mirar como nula.

Otro. *Elevar un número al cubo ó á la tercera potencia empleando los logarítmos.*

Del mismo modo, trátese ahora de elevar 5 al cubo; multiplico por 3 su logarítmo 0.698970: este producto es 2.096910, al qual en las Tablas corresponde el número 125, cubo de 5.

**CXLIV. Problema.** *Sacar ó extraer la raíz quadrada de un número por logarítmos.*

Para hallar la raíz quadrada de 144, busco en las Tablas el logarítmo de 144, que hallo ser 2.158362; tomo la mitad de este logarítmo y tengo el logarítmo 1.079181, al qual corresponde el número 12, raíz quadrada de 144.

Otro. *Extraer la raíz cúbica de un número operando con los logarítmos.*

Asimismo, para extraer la raíz cúbica de 27, tomo el tercio de su logarítmo 1.431364. Este tercio es 0.477121, al qual corresponde el número 3, que es en efecto la raíz cúbica de 27.

**CXLV.** Se deduce de todo lo que antecede, que para la resolucion de una regla de tres por logarítmos es preciso si se busca un extremo, tomar la suma de los medios, y restar de ella el logarítmo del extremo conocido: el residuo será el logarítmo del extremo que se busca. Si se busca un medio, es preciso al contrario sumar los logarítmos de los extremos, y restar de esta suma el logarítmo del medio conocido: el residuo será el logarítmo del medio que se busca.

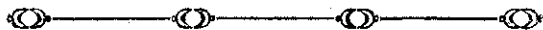
*Exemplo.* Trátese de resolver por logarítmos la regla de tres propuesta (art. 124 exemp. 1.º), cuya proporcion es

6 jorns. : 18 jorns. :: 8 pies : x.

Logarítmo de 18..... 1, 255273  
 Logarítmo de 8..... 0, 903090

Suma..... 2, 158363  
 Logarítmo de 6..... 0, 778151

Diferencia es el logarítmo del  
 cuarto término x..... 1, 380212 = 24, re-  
 sultado idéntico al hallado anteriormente.



## DECIMAQUINTA LECCION.

### *Continuacion de los Logarítmos.*

CXLVI. Algunas veces los números correspondientes á los logarítmos que quieren emplearse no se hallan en las Tablas (a). Es pues importante saber lo que debe hacerse en los diferentes casos para determinar los logarítmos de estos números.

Problema. *Buscar el logarítmo de un número que sobrepuje á los comprendidos en los límites de las Tablas.*

Propóngase, por exemplo, de determinar el logarítmo de 627849. Este número sobrepuja los límites de las Tablas mas extensas. Separo con el signo decimal las dos últimas cifras de la derecha, en esta forma. 6278'49. El logarítmo de la parte de la izquierda 6278 se hallará en las Tablas ser 3, 7978213. Tomo la diferencia que hay entre 3.7978213 logarítmo de 6278, y 3.7978905 logarítmo de 6279; esta diferencia es 0,0000692; luego digo, si por una unidad de diferencia entre los números 6279 y 6278 tengo 0.0000692 de diferencia entre sus logarítmos, por 0'49 de diferencia entre los números 6278'49 y 6278 ¿quanto me resultará de diferencia entre sus logarítmos?

---

(a) *Se usará de las Tablas portátiles de Callet; y como la coordinacion de ellas necesita una explicacion particular, que en este lugar nos distraeria de la ilacion del raciocinio, quedará pues á cargo del Profesor enterar á los alumnos en el uso de ellas.*

Esta diferencia será pues el cuarto término de la regla de tres siguiente:

$1 : 0'49 :: 0.0000692 : x = 0.0000339'08$ , ó bien (despreciando las dos últimas cifras)  $= 0.0000339$ . Si se añade este cuarto término á  $3.7978213$  logaritmo de  $6278$ , la suma  $3.7978552$  será el logaritmo de  $6278'49$ . Luego añadiendo  $2$  á la característica, el logaritmo  $5.7978552$  que resulta será el logaritmo de  $627849$ , que es 100 veces mayor que  $6278'49$ .

Es evidente que si las cifras separadas á la derecha del número fuesen ceros, bastaría añadir á la característica del logaritmo de la parte de hácia la izquierda tantas unidades quantos ceros se hubiesen separado.

CXLVII. Problema 1.º *Hallar un logaritmo correspondiente á un número entero seguido de un quebrado.*

Si se trata de un número entero unido á un quebrado tal como  $9\frac{3}{4}$ , reduzco el entero al denominador  $4$ , lo que me dará  $\frac{36}{4}$ : este número añadido á  $\frac{3}{4}$  hacen  $\frac{39}{4}$ . Así,  $9\frac{3}{4}$  no es otra cosa sino el quociente de  $39$  partido por  $4$ : luego el logaritmo de  $9\frac{3}{4}$  es igual á la diferencia del logaritmo de  $39$ , y del logaritmo de  $4$ .

El logaritmo de  $39$ ..... =  $1,591065$   
 El logaritmo de  $4$ ..... =  $0,602060$

Su diferencia..... =  $0,989005$

Es el logaritmo de  $9\frac{3}{4}$ .

Si los términos del quebrado resultante no se hallasen comprendidos en los límites de las Tablas, se empezaría por determinar sus logaritmos, como acabamos de enseñar, despues de lo qual se hallará la diferencia de estos logaritmos, como acabamos de decir.

Problema 2.º *Hallar el logaritmo de un número entero seguido de un quebrado decimal.*

Puede acaecer que el entero esté unido á un quebrado decimal: en este caso se toma el logaritmo de este número como si no existiese el signo decimal. Despues de haberlo hallado en las Tablas, ó del modo que hemos prescripto para quando pasen los límites de éstos, se le quitarán tantas unidades á la característica quantas cifras decimales habia en el número propuesto.

Exemplo. Se pide el logarítmico de 67'48?

Busco en las Tablas el logarítmico correspondiente á 6748, que hallo ser 3.8289176; y porque el número propuesto tiene dos cifras decimales, resto dos unidades á la característica del logarítmico hallado, y tendré 1.8289176 por logarítmico de 67'48.

Es evidente que 67'48 es un número 100 veces menor que 6748; y tambien que 1.8289176 es un logarítmico que corresponde á un número 100 veces menor que 6748 (art. 142 probl. 2.º), esto es, correspondiente á 67'48.

CXLVIII. Problema 1.º Hallar el logarítmico de un quebrado propio.

Exemplo. Trátese de hallar el logarítmico de un quebrado como  $\frac{4}{5}$ .

Reparo que el valor del quebrado es igual al quociente del numerador partido por el denominador: debiera pues para obtener el quociente restar el logarítmico del denominador del logarítmico del numerador. Pero como en los quebrados propios el denominador es mayor que el numerador, y que de consiguiente el logarítmico del denominador es mayor que el logarítmico del numerador, no se puede restar el primero del segundo; entonces se resta el logarítmico del numerador del logarítmico del denominador, y al residuo se le antepone el signo —;

así, el logarítmico de 5 siendo..... 0. 698970  
el de 4 siendo..... 0. 602060

el residuo es..... 0. 096910

y este resto 0.096910 precedido por el signo — será el logarítmico buscado: el logarítmico de  $\frac{4}{5}$  es pues — 0.096910.

De donde se deduce que el logarítmico de  $\frac{4}{5}$  y el de  $\frac{5}{4}$  no difieren sino por el signo —.

Este signo — denota, que el logarítmico que le sigue á continuacion debe emplearse de un modo contrario al que hemos indicado para los logarítmicos de los enteros, y del de los enteros unidos á quebrados.

Problema 2.º Multiplicar un número por un quebrado propio empleando los logarítmicos.

Para multiplicar un número por un quebrado propio, se restará el logaritmo del quebrado del logaritmo del multiplicando.

Porque, para multiplicar por un quebrado se necesitaría sumar el logaritmo del numerador, y restar el logaritmo del denominador; lo que es lo mismo que restar el exceso del logaritmo del denominador sobre el logaritmo del numerador. Pero este exceso ó diferencia es precisamente el logaritmo del quebrado propio: luego, *para multiplicar un número por un quebrado propio, es preciso restar su logaritmo del logaritmo del multiplicando.*

*Exemplo.* Se quiere multiplicar el número 25 por  $\frac{4}{5}$ , empleando los logaritmos.

Hallo en las Tablas que el logaritmo de 25 es 1.397940, y acabamos de ver en el problema anterior que el logaritmo de  $\frac{4}{5}$  es — 0.096910; luego lo único que resta que hacer será restar este último logaritmo del primero, y la diferencia 1.301030 que buscada en las Tablas como logaritmo corresponde al número 20, es el resultado de la multiplicacion de 25 por  $\frac{4}{5}$ .

*Problema 3.º Partir un número por un quebrado propio operando con los logaritmos.*

Para partir un número por un quebrado propio, se sumará el logaritmo del quebrado con el logaritmo del dividendo.

Porque para partir por un quebrado es preciso sumar el logaritmo del denominador, y restar el del numerador; lo que precisamente es la misma cosa que sumar el exceso del logaritmo del denominador sobre el logaritmo del numerador. Pero este exceso ó diferencia es el logaritmo del quebrado propio: *Luego, para partir un número por un quebrado propio, es preciso sumar su logaritmo con el logaritmo del dividendo.*

*Exemplo.* Se quiere partir el número 12 por  $\frac{4}{5}$ .

Sumo el logaritmo de 12 que hallo ser 1.079181 con el logaritmo de  $\frac{4}{5}$  que hemos visto era — 0.096910, y la suma 1.176091 la busco en las Tablas, y hallo corresponde al número 15, que es el resultado de la particion de 12 por  $\frac{4}{5}$ .

CXLIX. Problema. *Hallar el logaritmo correspondiente á un quebrado decimal.*

Para hallar el logaritmo de un quebrado decimal, se buscará su logaritmo como si fuese un entero: despues de haberlo hallado se restará de un número de unidades igual al número de cifras decimales que hay en el quebrado, y el residuo, antepuesto el signo —, será el logaritmo del quebrado decimal.

Por exemplo, para tener el logaritmo de 0'009, tomo el de 9 que es 0.954243; lo resto de 3.000000, que es el logaritmo de 1000, y antepongo el signo — á la diferencia 2.045757. Así, el logaritmo de 0'009 es — 2.045757. En efecto,  $0'009 = \frac{9}{1000}$ ; pero para hallar el logaritmo de  $\frac{9}{1000}$  se necesita restar el logaritmo de 9 del de 1000, y dar al residuo el signo — (art. 148); luego el logaritmo de 0'009 es — 2.045757.

CL. Problema. *Buscar á qué número pertenece un logaritmo que sobrepuje á los comprendidos en los límites de las Tablas.*

Exâminemos ahora que método debemos seguir para determinar á que número pertenece un logaritmo que no se encuentra en las Tablas, ya sea porque sobrepuja los límites de las Tablas, sea porque quadre entre dos logaritmos de las Tablas.

Desde luego, si se tiene un logaritmo que sobrepuje los límites de las Tablas, se disminuirá su característica de tantas unidades, cuántas sea necesario para que este logaritmo así disminuido no sobrepuje los límites de las Tablas.

Entónces de dos cosas la una; ó se hallarán en las Tablas todas las cifras de este logaritmo, ó no se hallarán sino las primeras cifras de este mismo logaritmo.

Si todas las cifras del logaritmo se hallan en las Tablas, el número buscado será aquel que en las Tablas se halle al lado del logaritmo propuesto; pero habrá que añadir á continuacion de este número tantos ceros, quantas unidades se restaron á la característica del logaritmo propuesto.

Por exemplo, restando 4 unidades de la característica del logaritmo 6.225309, veo que el logaritmo restante 2.225309 se halla por entero en las Tablas, y que el número que le corresponde es 168. Tendré pues el número buscado, añadiendo quatro ceros á continuacion de 168; así 6.225309 es el logaritmo del número 1680000.

**CLL.** Si no se encuentran en las tablas sino las primeras cifras del logaritmo, se procederá como en el exemplo que á continuacion vamos á poner. Se trata de hallar á que número pertenece el logaritmo 5.8604125.

Despues de haber quitado dos unidades á la característica, hallo que el logaritmo restante 3.8604125 quadra entre 7251 y 7252. Será pues el número buscado mayor que 7251 y menor que 7252. Luego será igual á 7251, mas una fraccion que es necesario determinar.

Para hallar esta fraccion, averiguo la diferencia de 3.8604125 logaritmo restante, y de 3.8603979 logaritmo de 7251, que hallaré ser 0.000146.

Asimismo busco la diferencia de los logaritmos de los números 7252 y 7251. Esta diferencia es 0,000599.

En fin hago esta proporcion; 0,000599:0.000146::1:x ó 599:146::1:x =  $\frac{146}{599}$ . Así el quebrado  $\frac{146}{599}$  es lo que debemos

añadir al número 7251 para tener el número correspondiente al logaritmo 3.8604125. Este número es pues 7251  $\frac{146}{599}$ ; y

como el logaritmo propuesto 5.8604125 pertenece á un número 100 veces mayor, el número buscado será el número

7251  $\frac{146}{599}$  hecho 100 veces mayor, esto es, 725100  $\frac{14600}{59}$ , y verificando la particion de 14600 por 59 tendré por quociente

24  $\frac{224}{599}$ ; luego el número propuesto será 725124  $\frac{224}{599}$  = 72514.37 reduciendo el quebrado á decimales.

Quando el logaritmo propuesto quadra entre dos de las Tablas, este caso se reduce al anterior, de consiguiente se executará la misma operacion, con solo la diferencia de que no habrá que añadir ceros á continuacion del número hallado, pues que no ha habido que restar unidades á la característica del logaritmo propuesto.

**CLLII.** Problema. *Hallar á que número corresponde un logaritmo, que sin exceder los límites de las Tablas no se halla exactamente en ellas.*

Si el logaritmo, cuyo número se quiere determinar, cayese entre dos logaritmos correspondientes á números muy pequeños, convendría aumentar su característica, de una, de dos, ó tres unidades, si la extension de la Tabla lo permite: se tomaría el número mas próximo correspondiente á dicho

logaritmo, y se separarán con el signo decimal tantas cifras en dicho número, quantas unidades se aumentaron á la característica del logaritmo.

Por exemplo, si tenemos el logaritmo 0.9038543 que quadra entre el de 8 y el de 9, añado tres unidades á su característica, busco á que número corresponde en las Tablas el logaritmo resultante 3.9038543. Quadra entre 8014 y 8015: Tomo 8014 que es el número, cuyo logaritmo se aproxima mas á corresponder al logaritmo 3,9038543. El número buscado es pues 8014, aproximado hasta un milésimo de diferencia.

Si se requiriese una mayor aproximacion. se recurrirá al método indicado (núm. 151).

CLIII. Problema. Hallar á que número corresponde un logaritmo negativo.

En fin, para saber á que fraccion corresponde un logaritmo negativo, tal como —1.255273, se puede buscar á que número corresponde el logaritmo positivo 1.255273. Este número es 18: de consiguiente —1.255273 corresponde al quebrado  $\frac{1}{18}$ .

Pero como no acaece siempre que el logaritmo se halle por entero en las Tablas; para conseguir en decimales el valor muy aproximado del quebrado que corresponde á un logaritmo negativo, es preciso restar este logaritmo de 1, 2, 3, 4, &c. unidades, buscar á que número pertenece el logaritmo resultante, y separar con el signo decimal sobre la derecha del número hallado tantas cifras, quantas unidades hay en el número, del qual se ha restado el logaritmo propuesto.

Quiérese por exemplo saber á que fraccion corresponde el logaritmo negativo —1.390883, resto este logaritmo de 5 de este modo:

$$\begin{array}{r}
 5.000000 \\
 1.390883 \\
 \hline
 3.609117
 \end{array}$$

El logaritmo restante cae entre los de 4065 y 4066. El quebrado buscado es pues 0,04066.

Se deduce facilmente, porque en este exemplo se han separado cinco decimales. La razon es, porque restando de 5 el logaritmo propuesto, hemos multiplicado 100000, cuyo lo-

garitmo es 5, por el quebrado al qual pertenece el logaritmo propuesto; ó lo que se reduce á lo mismo, hemos multiplicado el quebrado por 100000. Luego el logaritmo resultante pertenece á un número 100000 veces demasiado grande; luego para reducir á su verdadero valor el número hallado 4066, es preciso reducirlo á cien milésimos; es pues forzoso escribir 0'04066.

CLIV. Para abreviar los cálculos en ciertos casos, se cambian las restas de los logaritmos en sumas, lo que se hace por medio de los complementos aritméticos. Llámense complementos aritméticos la diferencia que se halla entre un número y la unidad seguida de tantos ceros, quantas cifras hay en dicho número.

Problema. Hallar el complemento aritmético de un número.

Se halla facilmente el complemento aritmético de un número, por exemplo, de 3728 reparando las cifras que hay que sumar desde la izquierda hácia la derecha del número 3728, para que cada suma sea de 9, excepto la última de la derecha que debe importar 10. Así el complemento aritmético de 3728 es 6272.

Es fácil convencerse que por este método se hallará la misma diferencia que por el dado (art. 24).

Problema. Restar un logaritmo de otro empleando el complemento aritmético del logaritmo sustraendo.

Si se trata en una operacion de restar un logaritmo, en lugar de restarlo se sumará su complemento aritmético, y se restará una decena á la característica de la suma resultante.

Es fácil comprehender la razon de este procedimiento, observando que si, por exemplo, en lugar de restar del logaritmo 1.176091 el logaritmo 0.845098, se añade el complemento aritmético de 0.845098, es la misma cosa que si se añadiese 10.000000 — 0.845098; luego en este caso se hace al mismo tiempo la resta propuesta, y se aumenta la característica del resultado en una decena; luego se debe restar una decena de 10.330993, que es la suma del logaritmo de 1.176091, añadido con 9,154902, complemento aritmético de 0.845098. El resultado 0.330993 es el mismo que el que se tendría tomando el exceso del logaritmo

	1.176091
sobre el logaritmo.....	0.845098
	<hr style="width: 100px; margin: 0 auto;"/>
como se ve aquí.....	0.330993

CLV. Problema. Hallar el cuarto término de una proporción geométrica, empleando los logaritmos, y complemento aritmético de él del primer término.

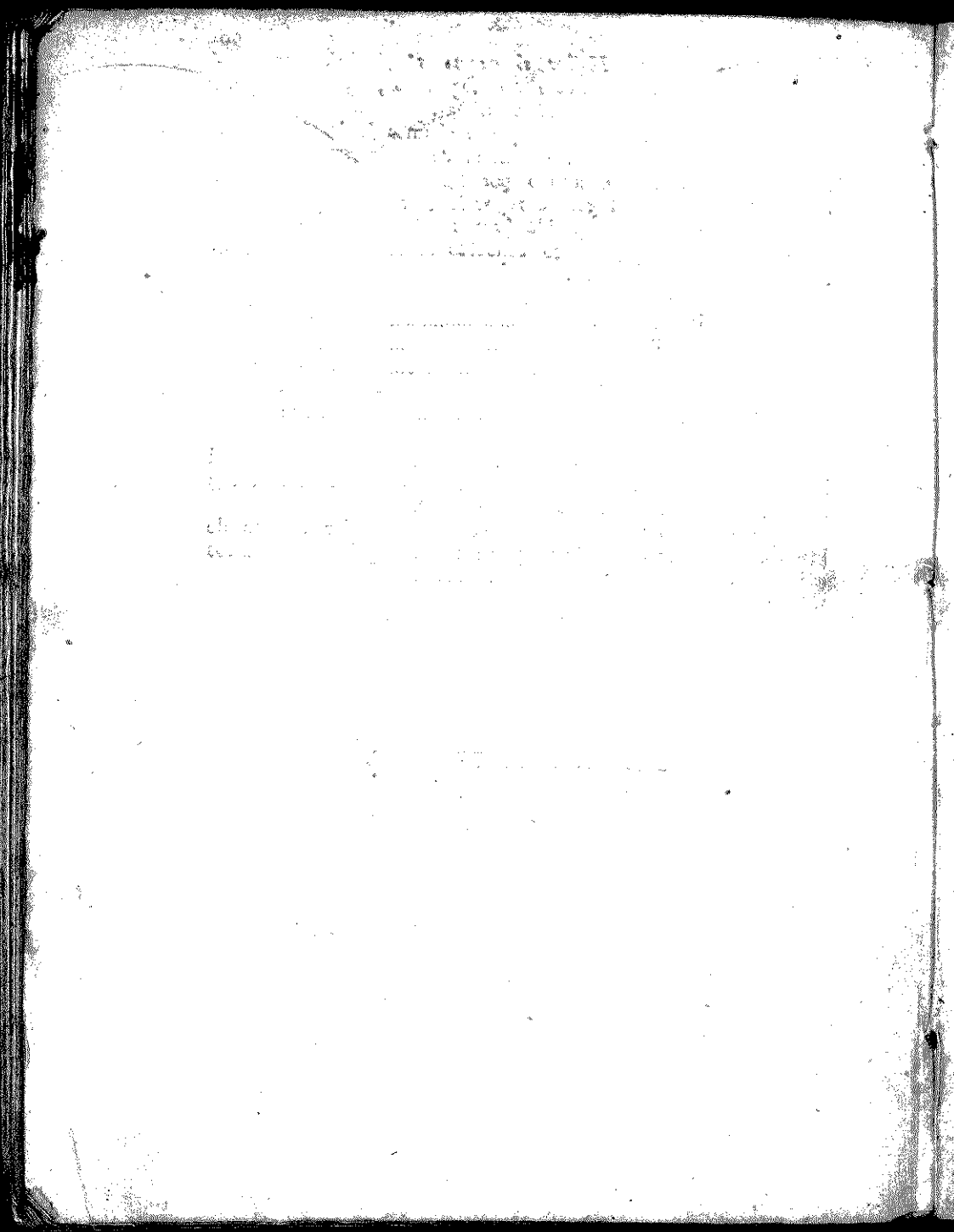
Apliquemos á un ejemplo lo que acabamos de decir. Supongamos que se pide el cuarto término de la proporción  $6 : 18 :: 8 : x$  (art. 145); operando por logaritmos, hay que sacar la suma de los logaritmos medios, y de ella restar el logaritmo del extremo conocido (art 145). En lugar de restar el logaritmo del extremo conocido sumaré su complemento aritmético como sigue:

Log de 18.....	1, 255273
Log. de 8.....	0, 903090
Complemento aritmét. del logarit. de 6...	9, 221849
Suma.....	11, 380212

Borro una decena á la característica, y hallo que el logaritmo 1.380212 corresponde en las Tablas al número 24; resultado idéntico al hallado (art. 145).

Este ejemplo basta para hacer comprender el uso de los complementos aritméticos, y su utilidad para abreviar los cálculos cambiando las restas en sumas.

FIN DE ESTE TRATADO.



# ÍNDICE

de las Lecciones contenidas en este Tratado.

	Páginas.
I. Leccion	Definiciones preliminares..... 5.
	De la numeracion..... ibid.
II. Leccion.	Del Sumar números enteros..... 8.
III. Leccion.	Del Restar números enteros..... 10.
IV. Leccion.	De la Multiplicacion de números enteros.. 12.
V. Leccion.	Del Partir enteros..... 18.
VI. Leccion.	De los Quebrados ó Fracciones en general, y modo de operar con ellos. 26.
VII. Leccion.	De los Quebrados Decimales, y modo de operar con ellos..... 39.
VIII. Leccion.	De los números Denominados y de los Complexós, y modo de sumarlos y el de restarlos..... 44.
IX. Leccion.	De la Multiplicacion de los números Denominados y Complexós..... 51.
X. Leccion.	De la Particion de los números Com- plexós..... 56.
	De las Potestades y sus Raíces..... 60.
XI. Leccion.	De las Razones, Proporciones y Pro- gresiones en general..... 62.
	Propiedades de las Proporciones y Pro- gresiones aritméticas..... 65.
XII. Leccion.	Propiedades de las Proporciones y Pro- gresiones geométricas..... 68.
XIII. Leccion.	De la Regla de Tres..... 75.
	De la Regla de Compañía..... 80.
	De la Regla de Falsa Posicion..... 81.
XIV. Leccion.	De los Logarítmicos, y modo de operar con ellos..... 82.
XV. Leccion.	Continuacion de la Leccion anterior..... 91.

The first part of the book is devoted to a general history of the world, from the beginning of time to the present. The author discusses the various races and nations, and their progress in civilization. He also touches upon the history of the arts and sciences, and the influence of religion upon the human mind.

The second part of the book is a history of the British Empire, from the reign of Henry II to the present. The author details the various wars and conquests of the British monarchs, and the expansion of the empire to its present boundaries. He also discusses the internal politics of the country, and the progress of the arts and sciences during this period.

The third part of the book is a history of the American Republic, from the time of its independence to the present. The author describes the various struggles and wars of the American people, and the progress of their civilization. He also touches upon the influence of the American Republic upon the world, and the progress of the arts and sciences in this country.

The fourth part of the book is a history of the world from the year 1700 to the present. The author discusses the various revolutions and wars of this period, and the progress of the human race. He also touches upon the influence of the French Revolution upon the world, and the progress of the arts and sciences during this time.

The fifth part of the book is a history of the world from the year 1800 to the present. The author discusses the various wars and revolutions of this period, and the progress of the human race. He also touches upon the influence of the Napoleonic Wars upon the world, and the progress of the arts and sciences during this time.

The sixth part of the book is a history of the world from the year 1850 to the present. The author discusses the various wars and revolutions of this period, and the progress of the human race. He also touches upon the influence of the Crimean War upon the world, and the progress of the arts and sciences during this time.

The seventh part of the book is a history of the world from the year 1900 to the present. The author discusses the various wars and revolutions of this period, and the progress of the human race. He also touches upon the influence of the First World War upon the world, and the progress of the arts and sciences during this time.

The eighth part of the book is a history of the world from the year 1950 to the present. The author discusses the various wars and revolutions of this period, and the progress of the human race. He also touches upon the influence of the Second World War upon the world, and the progress of the arts and sciences during this time.

The ninth part of the book is a history of the world from the year 2000 to the present. The author discusses the various wars and revolutions of this period, and the progress of the human race. He also touches upon the influence of the September 11 attacks upon the world, and the progress of the arts and sciences during this time.

111  
 112  
 113  
 114  
 115  
 116  
 117  
 118  
 119  
 120  
 121  
 122  
 123  
 124  
 125  
 126  
 127  
 128  
 129  
 130  
 131  
 132  
 133  
 134  
 135  
 136  
 137  
 138  
 139  
 140  
 141  
 142  
 143  
 144  
 145  
 146  
 147  
 148  
 149  
 150  
 151  
 152  
 153  
 154  
 155  
 156  
 157  
 158  
 159  
 160  
 161  
 162  
 163  
 164  
 165  
 166  
 167  
 168  
 169  
 170  
 171  
 172  
 173  
 174  
 175  
 176  
 177  
 178  
 179  
 180  
 181  
 182  
 183  
 184  
 185  
 186  
 187  
 188  
 189  
 190  
 191  
 192  
 193  
 194  
 195  
 196  
 197  
 198  
 199  
 200