



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Análisis de series financieras de retornos con la metodología GARCH

Varela Trillo, Manuel

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# **Análisis de series financieras de retornos con la metodología GARCH**

Varela Trillo, Manuel

Julio 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Trabajo propuesto

<b>Área de Conocimiento:</b> Estadística e Investigación Operativa
<b>Título:</b> Análisis de series financieras de retornos con la metodología GARCH
<b>Breve descripción del contenido</b>
El objetivo de este trabajo es presentar y revisar los métodos habituales de análisis de las series de retornos de valores bursátiles y hacer modelizaciones aplicadas a los valores del IBEX35. Las series de retornos se caracterizan por la escasa o nula deriva temporal en la media estacional pero por contra presentan mucha diversidad en la modelización de la varianza condicional que suele presentar alta heterocedasticidad. El objetivo del trabajo es presentar de un modo ordenado las herramientas que se necesitan para una modelización exitosa de esta heterocedasticidad y aplicar estas herramientas a algunas series reales relevantes.
<b>Recomendaciones</b>
Soltura con el paquete estadístico R
<b>Otras observaciones</b>



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>VIII</b>
<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. Retornos</b>	<b>1</b>
1.1. Tipos de retornos . . . . .	1
1.2. Distribución de los retornos . . . . .	2
1.3. Volatilidad . . . . .	4
<b>2. Conceptos fundamentales</b>	<b>5</b>
2.1. Series de tiempo . . . . .	5
2.2. Propiedades principales . . . . .	6
2.2.1. Media, covarianzas y correlación . . . . .	6
2.2.2. Asunciones en series de tiempo . . . . .	7
2.2.3. Función de autocorrelación (ACF) . . . . .	8
<b>3. Modelos para series de tiempo estacionarias</b>	<b>11</b>
3.1. Series de tiempo lineales . . . . .	11
3.2. Modelo de medias móviles . . . . .	12
3.2.1. Estacionariedad e invertibilidad . . . . .	13
3.2.2. Orden del modelo . . . . .	14
3.3. Modelo autorregresivo . . . . .	15
3.3.1. Estacionariedad e invertibilidad . . . . .	16
3.3.2. Orden del modelo . . . . .	16
3.4. Modelo ARMA . . . . .	17
3.4.1. Estacionariedad e invertibilidad . . . . .	18
3.4.2. Orden del modelo . . . . .	19
3.4.3. Estimación . . . . .	19

3.4.4. Validación . . . . .	19
3.4.5. Predicción . . . . .	20
3.5. Modelo ARIMA . . . . .	21
3.6. Aplicación práctica I . . . . .	23
3.6.1. Período anterior al COVID-19 . . . . .	23
3.6.2. Período coetáneo al COVID-19 . . . . .	26
<b>4. Modelos de heterocedasticidad condicional</b>	<b>31</b>
4.1. Estructura del modelo . . . . .	32
4.2. Construcción del modelo . . . . .	33
4.2.1. Test del efecto ARCH . . . . .	33
4.3. Modelo ARCH . . . . .	34
4.3.1. Modelo ARCH general . . . . .	34
4.3.2. Orden del modelo . . . . .	36
4.4. Modelo GARCH . . . . .	36
4.4.1. Modelo GARCH(m,s) . . . . .	37
4.4.2. Orden del modelo . . . . .	38
4.4.3. Estimación . . . . .	38
4.4.4. Validación . . . . .	39
4.4.5. Predicción . . . . .	39
4.5. Variantes del modelo GARCH . . . . .	40
4.5.1. Modelo EGARCH . . . . .	40
4.5.2. Modelo GARCH Integrado . . . . .	41
4.6. Aplicación práctica II . . . . .	42
4.6.1. Período anterior al COVID-19 . . . . .	42
4.6.2. Período coetáneo al COVID-19 . . . . .	47
<b>Bibliografía</b>	<b>53</b>



## Resumen

El eje principal del trabajo es el análisis de las series financieras de retornos, presentando primero de forma teórica las herramientas necesarias y luego poniendo éstas en práctica con datos reales del IBEX35. Las series de retornos no presentan dependencia en su media y su modelización se centra casi exclusivamente en la alta heterocedasticidad condicional. A pesar de ello, también se incluyen los modelos ARMA orientados a la media de las series, ya que serán de ayuda a la hora de presentar los demás modelos.

En el primer capítulo se presentan los retornos, las distribuciones más habituales que siguen y se desarrolla su principal característica, la volatilidad. En el segundo capítulo se tratan los conceptos fundamentales como la definición de serie de tiempo, la necesidad de imponer estacionariedad o la función de autocorrelación. En el tercer capítulo se estudian los modelo Box-Jenkins confeccionados para modelar la media y se pondrán en práctica con datos reales del IBEX35. Para terminar, en el cuarto capítulo se presentarán los modelos de heterocedasticidad condicional, destacando el modelo GARCH. También se incluirán dos variantes de éste y se aplicarán los conceptos a los anteriores datos para completar el análisis.

## Abstract

The main axis of the work is the analysis of the financial series of returns, first introducing the theory of the necessary tools and then putting it into practice with real data from the IBEX35. The return series do not show dependence on their mean and their modeling focuses almost exclusively on high conditional heteroscedasticity. Despite this, the ARMA models geared to the mean of the series will also be included, as they will be helpful when presenting the other models.

The first chapter presents the returns, the most common distributions that follow and its main characteristic, volatility, will be developed. The second chapter deals with fundamental concepts such as the definition of a time series, the need to impose stationarity or the autocorrelation function. In the third chapter, the Box-Jenkins models proposed to model the mean are studied and will be put into practice with real data from the IBEX35. Finally, in the fourth chapter the conditional heteroscedasticity models will be presented, highlighting the GARCH model. Two variants of this will also be included and all the concepts will be applied to the previous data to complete the analysis.

# Introducción

En el contexto actual los datos están cobrando cada vez una mayor importancia. Son muchas las empresas que comienzan a trabajar con ellos para aumentar sus ganancias, en medicina se usan, por ejemplo, para buscar cuál puede ser la causa de una enfermedad e incluso en el deporte está en crecimiento su uso para mejorar el rendimiento de los profesionales que lo practican. En numerosas ocasiones los datos se obtienen de forma ordenada en el tiempo dando lugar a lo que se conoce como series de tiempo. Su estudio presenta una importancia mayúscula, ya que permite obtener información sobre las relaciones subyacentes que existen entre los datos, que sería imposible extraer a simple vista, y además se pueden realizar pronósticos de futuras observaciones mediante técnicas de inferencia.

En este trabajo se pretende estudiar la teoría sobre el análisis de las series de tiempo, iniciada por G.E.P Box y G.M. Jenkins en 1970, pero desde el punto de vista del campo de las finanzas, con la motivación de conocer la estructura de los activos financieros y aplicar lo estudiado sobre datos reales para extraer relaciones y dependencias entre ellos que puedan aportar información relevante a un inversor, en un área como el mercado de valores bursátiles que, a simple vista, destaca por su aleatoriedad.

El análisis de las series en este trabajo va encaminado a las series de retornos de los valores bursátiles, que se caracterizan por presentar escasa o nula dependencia en cuanto a la media pero sí se caracterizan por la fuerte dependencia en la varianza condicional, lo que se denomina heterocedasticidad condicional. No por este motivo tiene menos interés el estudio de la metodología Box-Jenkins, realizada por los dos autores citados anteriormente, orientada a modelar la media, ya que ésta facilitará el estudio de los modelos de heterocedasticidad condicional, los principales en este trabajo, entre los que destaca el modelo GARCH.

Además de estudiar la teoría para el análisis de las series financieras, el gran aliciente de este trabajo es aplicarla sobre datos reales del IBEX35. El análisis se realiza sobre la serie de retornos de la compañía eléctrica Iberdrola S.A. con el fin de conocer su estructura y, al mismo tiempo, será de ayuda para comprobar de qué manera ha repercutido la pandemia provocada por el COVID-19 en la empresa. Para ello es muy importante la estimación de

la varianza condicional, denominada en finanzas como volatilidad, que realiza el modelo GARCH o alguna de sus alternativas, ya que simboliza el riesgo de inversión.

El trabajo comienza en el Capítulo 1 explicando los retornos, define los diferentes tipos que existen, desarrolla de manera breve cuál es la distribución más habitual que se considera que siguen y termina haciendo hincapié en qué es la volatilidad y su importancia en el estudio de series financieras.

En el Capítulo 2 se revisan los conceptos más importantes relacionados con las series de tiempo. Se define el concepto de proceso estocástico que facilitará comprender qué es una serie de tiempo, se estudia la estacionariedad y el motivo por el cual es necesario imponer esta condición sobre las series y se termina explicando la función de autocorrelación y el proceso denominado ruido blanco.

En el Capítulo 3 se presentan los modelos ARMA, orientados al modelaje de la media. Se comienza explicando los modelos de medias móviles (MA) y autorregresivo (AR) y al pasar al modelo ARMA se incluye la metodología Box-Jenkins, que es la utilizada para encontrar el ajuste más preciso. También se estudia de forma breve el modelo ARIMA. Para terminar el capítulo, se aplica la teoría estudiada sobre la serie de retornos de Iberdrola S.A. diferenciando la etapa anterior a la llegada del COVID-19 a España y la etapa coetánea al virus.

En el Capítulo 4 se estudia todo lo relacionado con los modelos de heterocedasticidad condicional, los más importantes para el análisis de las series financieras. En primer lugar, se explica la estructura de estos modelos y el test para verificar la existencia de heterocedasticidad condicional en la serie. Luego se presenta el modelo ARCH y éste se generaliza con el modelo GARCH, para el que se estudia la estimación, validación y predicción. Antes de terminar con la teoría, se incluye de manera breve dos variantes del modelo GARCH como son el EGARCH y el IGARCH. Para finalizar, se aplica lo estudiado en el capítulo sobre las series de retornos de Iberdrola S.A. para finalizar con su análisis.

# Capítulo 1

## Retornos

El propósito general de este trabajo es estudiar las series de tiempo financieras e introducir herramientas estadísticas para su análisis y predicción, centrándose especialmente en su heterocedasticidad condicional. Dado que las series de tiempo financieras más utilizadas son las de los retornos de activos bursátiles, lo primero es presentar brevemente los retornos y conocer sus principales características.

### 1.1. Tipos de retornos

Los activos financieros se caracterizan por tener un precio que está en constante oscilación a lo largo del tiempo. Sin embargo, al realizar los estudios sobre los activos lo más habitual es utilizar los retornos en lugar de su precio. Esto se debe a que los retornos representan las fluctuaciones del activo sin escala y son mucho más manejables. Se considera  $P_t$  el precio del activo en el instante  $t$  y a continuación se irán presentando las diferentes definiciones de retorno.

#### Retorno simple de un período

**Definición 1.1.** El retorno simple bruto obtenido de poseer el activo desde el instante  $t - 1$  hasta  $t$  se define como:

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad \text{es decir,} \quad P_t = P_{t-1}(1 + R_t)$$

Entonces, el retorno neto sería:  $R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$

### Retorno simple multiperíodo

**Definición 1.2.** Si se posee un activo durante  $k$  períodos entre los instantes  $t - k$  y  $t$  el retorno bruto simple se define como:

$$1 + R_t[k] = \frac{P_t}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdots \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} = (1 + R_t) \cdot (1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-k+1}) = \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j})$$

Al desarrollar la expresión anterior, se puede representar el retorno simple multiperíodo como el producto de los  $k$  retornos simples de los instantes involucrados. Los períodos se corresponden a intervalos en el tiempo igualmente espaciados (diarios, mensuales, etc).

### Retorno compuesto continuo

Al igual que para el retorno simple, existe el retorno compuesto continuo de una etapa y multietápico. El primero de ellos es el más importante a la hora de hacer los estudios estadísticos de las series financieras, mientras que el multietápico no presenta interés práctico para el objetivo de este trabajo, por lo que no se incluirá su definición.

**Definición 1.3.** El retorno compuesto continuo de una etapa,  $r_t$ , se corresponde con el logaritmo neperiano del retorno simple bruto:

$$r_t = \log(1 + R_t) = \log \frac{P_t}{P_{t-1}} = p_t - p_{t-1} \quad \text{donde} \quad p_t = \log P_t$$

Por lo tanto, las relaciones entre los retornos simples y los compuestos continuos son:

$$r_t = \ln(1 + R_t) \quad R_t = e^{r_t} - 1$$

## 1.2. Distribución de los retornos

Para estudiar el comportamiento de los retornos se analizarán brevemente las propiedades distribucionales de estos. Sea  $\{r_{i,t} : i = 1, \dots, N, t = 1, \dots, T\}$  un conjunto de retornos compuestos continuos (también llamados retornos logarítmicos) de  $N$  activos que se mantienen durante  $T$  períodos de tiempo. La función de distribución conjunta de los retornos logarítmicos es de la forma

$$F(r_{1,1}, \dots, r_{N,1}; r_{1,2}, \dots, r_{N,2}; \dots; r_{1,T}, \dots, r_{N,T}; Y; \theta) \quad (1.1)$$

donde  $Y$  representa las variables del entorno en el que se encuentran los activos y  $\theta$  es el vector de parámetros que determinan la función de distribución. Generalmente, en los análisis financieros se trata de estimar  $\theta$  en función de las demás variables, que son conocidas, y utilizar técnicas de inferencia para estudiar el comportamiento de los retornos.

La expresión 1.1 es demasiado general. Además, en este trabajo se estudiarán solamente los modelos univariantes. Por lo tanto, se toma el conjunto de retornos logarítmicos de un activo  $i$ ,  $\{r_{i,t}\}$ , cuya distribución conjunta es:

$$F(r_{i,1}, \dots, r_{i,T}; \theta) = F(r_{i,1})F(r_{i,2}|r_{i,1}) \cdots F(r_{i,T}|r_{i,T-1}, \dots, r_{i,1}) = F(r_{i,1}) \prod_{t=2}^T F(r_{i,t}|r_{i,t-1}, \dots, r_{i,1})$$

donde se omite  $\theta$  por simplicidad.  $F(r_{i,t})$  es la distribución marginal del retorno  $i$  en el instante  $t$  y  $F(r_{i,t}|r_{i,t-1}, \dots, r_{i,1})$  se corresponde con la distribución condicional del retorno en el instante  $t$  con respecto a todos los anteriores. Esta expresión pone en evidencia la dependencia temporal existente en los retornos. De este modo, el problema principal es precisar su distribución condicional y su evolución a lo largo del tiempo. Para facilitar el tratamiento de los retornos, se suelen asumir que siguen una distribución conocida. A continuación se presentan las distribuciones más utilizadas con sus ventajas y desventajas.

### Distribución normal

Una de las asunciones más empleadas es la de considerar los retornos simples  $\{R_{i,t} : t = 1, \dots, T\}$  independientes y siguiendo una distribución normal. Con esta consideración los retornos son tratables con facilidad, pero presenta una serie de problemas. Por ejemplo, el límite inferior de los retornos es -1, sin embargo, la distribución normal puede tomar cualquier valor real, es decir, no presenta ningún límite inferior. Además, los retornos multiperiodo están definidos como productos de retornos simples, por lo que su distribución no se correspondería necesariamente con una normal.

### Distribución log-normal

Otra asunción es la de considerar los retornos  $r_t$  independientes y siguiendo una distribución normal de media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . De este modo, los retornos simples pasan a tener una distribución log-normal. Esta asunción presenta mejores propiedades que la anterior, ya que, en el caso del multiperiodo,  $R_t[k]$ , al ser la suma de los retornos de cada periodo se sigue conservando la distribución normal, además de conservar el límite inferior de los  $R_t$ . En Tsay (2010) se explican con más detalles las propiedades de los retornos siguiendo esta distribución y se aportan sus inconvenientes.

### Mezcla a escala de distribuciones normales

En los últimos años se ha empezado a asumir que los retornos logarítmicos,  $r_t$ , siguen una distribución resultado de la mezcla de distribuciones normales. Un ejemplo de este

tipo de distribución sería el siguiente:

$$r_t \sim (1 - X)N(\mu, \sigma_1^2) + XN(\mu, \sigma_2^2)$$

donde  $X$  se corresponde con una variable aleatoria con distribución de Bernoulli de parámetro  $\alpha$ . Entonces, se dice que el  $(1-\alpha)\%$  del retorno sigue la distribución  $N(\mu, \sigma_1^2)$  y el  $\alpha\%$  del retorno sigue la  $N(\mu, \sigma_2^2)$ . Con este método, se conserva el fácil tratamiento de los datos que se obtiene con una distribución normal. El único problema es la dificultad de estimar los parámetros de las variables Bernoulli.

### 1.3. Volatilidad

Este trabajo se centra en estudiar los métodos de modelaje y análisis de las series de tiempo financieras, concretamente las series de retornos por ser las más utilizadas. La media en este tipo de series es prácticamente nula y en condiciones ideales no presenta dependencia de los valores pasados. Sin embargo, la volatilidad es diferente y esto la convierte en una propiedad imprescindible a la hora de construir un buen modelo.

La volatilidad es la medida de la variabilidad de las trayectorias o fluctuaciones de los retornos o de cualquier activo financiero. En estadística, la volatilidad se define como la varianza condicional, por tanto, una volatilidad alta se traduce en grandes fluctuaciones de los valores respecto a la media, mientras que con una volatilidad baja los valores se mantendrían en todo momento estables y cercanos a la media.

En resumidas cuentas, la volatilidad de los retornos mide la frecuencia e intensidad de los cambios en el precio de un activo, mostrando así la estabilidad o inestabilidad del mismo. Si un activo presenta periodos con grandes variaciones en el precio, la volatilidad será alta y si el precio se mantiene estable, por consiguiente, la volatilidad será baja. Normalmente, existe una correlación negativa entre la volatilidad y los retornos. Ésto se debe a que los precios de los activos descienden de manera más brusca que de lo que aumentan (motivado por el miedo de los inversores). Por este motivo, se utiliza la volatilidad como medida de riesgo, considerando volatilidades altas como un riesgo más elevado de inversión.

Debido a las características de las series de tiempo financieras, la volatilidad no es constante en el tiempo y presenta dependencia de los términos pasados, característica que se conoce como heterocedasticidad condicional. Debido a esto, la metodología Box-Jenkins no se ajusta de manera correcta a la realidad y este trabajo prestará mayor atención a los modelos para series de tiempo con varianza condicional heterocedástica como es el caso del GARCH.

## Capítulo 2

# Conceptos fundamentales

En este capítulo se presentan los conceptos necesarios para tener una idea clara sobre las series de tiempo. Luego, se explican sus limitaciones que impiden aplicar métodos de inferencia sobre ellas y las condiciones que serán asumidas para superarlas. Además, también se define el ruido blanco, un tipo especial de proceso estocástico que será muy útil en el análisis de las series financieras, tanto para crear modelos como para su validación.

### 2.1. Series de tiempo

Para poder definir las series de tiempo con rigor, es necesario presentar el concepto de proceso estocástico y explicar la relación directa que existe entre estos dos términos.

**Definición 2.1.** Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ , donde  $\Omega$  es el espacio muestral,  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $\mathcal{P}$  es una medida o función de probabilidad. Las variables están indexadas por dos conjuntos  $T$  y  $\Omega$ , tomando así el proceso estocástico la siguiente forma:

$$\{X(t, \omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$$

Es claro que un proceso estocástico  $X(t, \omega)$  es una función de dos variables. La primera,  $t \in T$ , se interpreta como el tiempo, mientras que la segunda,  $\omega \in \Omega$ , se corresponde con las distintas realizaciones del proceso. Una realización es una trayectoria del proceso estocástico  $\{X(t, \omega) : t \in T\}$ , es decir, el conjunto de variables  $X(t)$  fijado el  $\omega \in \Omega$ . Para comprender mejor este concepto, se considera que se desea estudiar la variación de la temperatura en una determinada reacción química. Entonces, la variable "temperatura instantánea de la reacción" será un proceso estocástico. Si se realiza el experimento una vez, se obtendrá una colección de valores de la temperatura de la reacción a lo largo del

tiempo, es decir, una realización del proceso estocástico. Cada repetición del experimento en las mismas condiciones se corresponderá con una nueva realización.

Dada la definición de proceso estocástico será más fácil presentar las series de tiempo, pues su relación es muy directa.

**Definición 2.2.** Una serie de tiempo es una secuencia de  $N$  valores,  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ , ordenados cronológicamente y equidistantes en el tiempo.

Las series de tiempo se denotarán como  $\{x_t : t = 1, 2, \dots, N\}$ , donde  $x_t$  es la observación  $t$ -ésima y  $N$  el número total de observaciones. Atendiendo al índice temporal existen dos tipos de series: las discretas y las continuas. El objetivo del trabajo es tratar las series de retornos bursátiles, por lo que se centrará en las series discretas donde las observaciones se toman en conjuntos de tiempo discretos y equidistantes como intervalos (diarios, mensuales, trimestrales...).

Entonces, una serie de tiempo se puede entender como una realización parcial de un proceso estocástico con el parámetro de tiempo discreto. Dicho de otra forma, una serie de tiempo es una muestra de finitos valores, tomados de forma secuencial, de un proceso estocástico para un  $\omega$  determinado, es decir, de una realización. Por lo tanto, la relación entre estos tres conceptos es clara, el proceso estocástico está formado por todos los valores de todas las realizaciones, una realización es cada una de las trayectorias del proceso estocástico y una serie de tiempo es una muestra de finitos valores equidistantes de una única realización.

## 2.2. Propiedades principales

Como se ha visto en la sección anterior, los procesos estocásticos y las series de tiempo están muy relacionados. Sin embargo, no es posible extrapolar directamente la teoría de los procesos estocásticos a las series temporales. Para ver esto, se presentarán las propiedades principales de los procesos estocásticos como la media o la covarianza y se explicará la limitación existente a la hora de calcularlas en una serie de tiempo.

### 2.2.1. Media, covarianzas y correlación

Para un proceso estocástico  $\{X(t, \omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$  se pueden definir las siguientes propiedades:

**Definición 2.3.** La función de medias de un proceso estocástico  $\{X(t, \omega)\}$  se define como:

$$\mu_t = E(X(t, \omega)) \quad \text{para } t \in T \text{ y } \omega \in \Omega$$

Se trata de una función de  $t$  que proporciona el valor esperado del proceso estocástico para cada instante teniendo en cuenta los valores de las distintas realizaciones.

**Definición 2.4.** La función de varianzas de un proceso estocástico  $\{X(t, \omega)\}$  se define como:

$$\sigma_t = \text{Var}(X(t, \omega)) \quad \text{para } t \in T \text{ y } \omega \in \Omega$$

Al igual que la función de medias, se trata de una función de  $t$  que proporciona la variabilidad del proceso estocástico respecto a la media en cada instante teniendo en cuenta los valores de las distintas realizaciones.

**Definición 2.5.** La función de autocovarianzas de un proceso estocástico  $\{X(t, \omega)\}$  se define como:

$$\gamma_{t,s} = \text{Cov}(X(t, \omega), X(s, \omega)) \quad \text{para } t, s \in T \text{ y } \omega \in \Omega$$

**Definición 2.6.** La función de autocorrelación de un proceso estocástico  $\{X(t, \omega)\}$  se define como:

$$\rho_{t,s} = \frac{\gamma_{t,s}}{\sigma_t \sigma_s} \quad \text{para } t \in T \text{ y } \omega \in \Omega$$

A diferencia de las dos primeras funciones, la función de autocovarianza y autocorrelación dependen de dos variables correspondientes con dos instantes. Proporcionan la covarianza y la correlación entre dos instantes del proceso estocástico teniendo en cuenta los valores de las distintas realizaciones.

Los problemas aparecen cuando se quieren calcular estas características en una serie de tiempo. Como se explica en la sección anterior, una serie de tiempo se crea a partir de una única realización del proceso estocástico, teniendo en cada instante un único valor, lo que imposibilita calcular la media o las varianzas en cada instante. Para comprender la situación, ésta sería similar a calcular la media de una variable aleatoria con un único dato muestral. Características como la media o la varianza son necesarias para poder llevar a cabo técnicas de inferencia estadística sobre la serie de tiempo, por lo que se requerirá asumir un conjunto de restricciones e hipótesis que permitan superar este problema.

### 2.2.2. Asunciones en series de tiempo

El objetivo es asumir ciertas condiciones sobre la estructura de la serie para que sea posible realizar las estimaciones necesarias y hacer inferencia sobre ella. De esta forma, si se asume que las características transversales de la serie (media, varianza, etc.) permanecen constantes a lo largo del tiempo sería posible estimarlas. Este concepto se conoce como estacionariedad. A continuación, se definirán dos tipos de estacionariedad diferenciadas según el grado de estrictez de las condiciones asumidas sobre la estructura de la serie.

**Definición 2.7.** Una serie de tiempo  $\{x_t : t = 1, 2, \dots, N\}$  es fuertemente o estrictamente estacionaria si la distribución conjunta de  $\{x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_k}\}$  es igual a la de  $\{x_{t_1-h}, x_{t_2-h}, \dots, x_{t_k-h}\}$ . Esto es,

$$P(x_{t_1} \leq c_1, x_{t_2} \leq c_2, \dots, x_{t_k} \leq c_k) = P(x_{t_1-h} \leq c_1, x_{t_2-h} \leq c_2, \dots, x_{t_k-h} \leq c_k)$$

para cualquier  $k = 0, 1, 2, \dots$ , todo instante  $t_1, t_2, \dots, t_k$ , todo número real  $c_1, c_2, \dots, c_k$  e independientemente del salto temporal  $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Esta característica es demasiado estricta y difícil de verificar, por lo que existen muy pocos ejemplos reales de series de tiempo que la cumplan. Por este motivo es necesario definir otra propiedad menos estricta, denominada estacionariedad débil, que siga permitiendo estimar las características transversales.

**Definición 2.8.** Una serie de tiempo es débilmente estacionaria o estacionaria de segundo orden si:

1. La función media,  $\mu_t$ , es constante y no depende del tiempo. Esto es,  $E(x_t) = \mu \forall t \in T$
2. La función de autocovarianza,  $\gamma_{t,s}$ , depende únicamente de la diferencia temporal  $|t - s|$ . Esto es,  $Cov(x_t, x_{t-k}) = \gamma_k \forall t \in T$  y depende únicamente de  $k$ .

Como la estacionariedad débil requiere regularidad en la función de media y de autocovarianza, estas características, que antes eran imposible calcular, se podrán estimar haciendo el promedio. A partir de ahora, el término estacionariedad se utilizará para referirse a la estacionariedad débil y será la condición estructural de las series que se asumirá a partir de ahora.

### 2.2.3. Función de autocorrelación (ACF)

En esta sección se tratará la función de autocorrelación, que cobrará un valor muy importante a la hora de determinar el orden de ciertos modelos. La ACF ejemplifica la dependencia lineal entre valores de la serie de instantes distintos. Lo primero es considerar una serie estacionaria,  $\{x_t\}$ . Entonces, la correlación de orden  $k$ , denotada por  $\rho_k$ , es el coeficiente de correlación entre  $x_t$  y  $x_{t-k}$  y se define como:

$$\rho_k = \frac{Cov(x_t, x_{t-k})}{\sqrt{Var(x_t)Var(x_{t-k})}} = \frac{Cov(x_t, x_{t-k})}{Var(x_t)} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad (2.1)$$

Por ser la serie estacionaria, se tiene que  $Var(x_t) = Var(x_{t-k})$  y se llega al resultado de que la función de autocorrelación depende únicamente de su orden y no de los valores

de cada instante, siempre y cuando se esté en condiciones de estacionariedad. La función de autocorrelación cumple que  $\rho_0 = 1$  y  $-1 \leq \rho_k \leq 1$ . Además, una serie es incorrelada si verifica que  $\rho_k = 0 \quad \forall k > 0$ . Ahora, si se considera la media muestral de la serie definida como  $\bar{x} = \sum_{t=1}^T x_t/T$ , se llega a la expresión empírica de la función de autocorrelación de orden  $k$ :

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2}$$

La autocorrelación muestral,  $\hat{\rho}_k$ , es una estimación consistente de la teórica,  $\rho_k$ .

Antes de comenzar con los distintos modelos de series de tiempo estacionarias es necesario presentar un tipo especial de proceso estocástico denominado ruido blanco. Se trata del proceso más simple y su importancia no proviene directamente del proceso estocástico que representa, sino de que un gran número de modelos utilizados en el estudio de series de tiempo son construidos a partir de él. En el ruido blanco cobra gran importancia la función de autocorrelación, ya que presenta todos los coeficientes nulos.

**Definición 2.9.** Ruido blanco es un proceso estocástico formado por una secuencia de variables independientes e idénticamente distribuidas con media nula,  $\mu_t = 0$ , y varianza finita,  $\sigma^2$ , que cumple:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

De forma equivalente,

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

Además, se trata de un proceso estrictamente estacionario y, por tanto, débilmente ya que la distribución conjunta de las variables para cualquier salto temporal coinciden. Utilizando la definición de ruido blanco se puede comprobar esta propiedad:

$$\begin{aligned} & Pr(x_{t_1} \leq c_1, x_{t_2} \leq c_2, \dots, x_{t_n} \leq c_n) \\ &= Pr(x_{t_1} \leq c_1)Pr(x_{t_2} \leq c_2) \dots Pr(x_{t_n} \leq c_n) && \text{(por la independencia)} \\ &= Pr(x_{t_1-k} \leq c_1)Pr(x_{t_2-k} \leq c_2) \dots Pr(x_{t_n-k} \leq c_n) && \text{(por ser idénticamente distribuidas)} \\ &= Pr(x_{t_1-k} \leq c_1, x_{t_2-k} \leq c_2, \dots, x_{t_n-k} \leq c_n) && \text{(por la independencia)}. \end{aligned}$$

Para determinar que una serie de tiempo es ruido blanco simplemente hay que estudiar su ACF, ya que todos sus coeficientes deberían ser nulos. Por tanto, es necesario presentar un test de ACF que verifique si los coeficientes de la función de autocorrelación son significativamente distintos de cero. También se puede determinar que una serie es ruido blanco

mediante el estadístico Ljung-Box, cuyo procedimiento se puede encontrar en Tsay (2010, pp.32-33).

### Test de ACF

Para determinar el orden de ciertos modelos o para conocer si una serie es ruido blanco se suele observar si el coeficiente de la función de autocorrelación de un orden en concreto es nulo. Lo más común es utilizar como estimador la autocorrelación muestral y, por simplicidad, considerar la serie sigue una distribución normal y  $\rho_j = 0$  para  $j > k$  para que el estimador sea asintóticamente normal con media cero y varianza  $1/T$ . Para casos más generales se puede consultar Tsay(2010, pp.31-32).

Considerando las hipótesis anteriores, se está en condiciones de aplicar el siguiente test:

$$H_0 : \rho_k = 0$$

$$H_a : \rho_k \neq 0$$

cuyo estadístico de contraste será:

$$T = \frac{\hat{\rho}_k}{\sqrt{1/T}}$$

Por último, cabe destacar que el estimador  $\hat{\rho}_k$  es sesgado con un orden de sesgo de  $1/T$ . Sin embargo, como en este trabajo se aplicará a series de tiempo financieras, el valor de T será alto por lo que su sesgo puede considerarse nulo.

## Capítulo 3

# Modelos para series de tiempo estacionarias

El objetivo de este capítulo es presentar los modelos más importantes para series de tiempo estacionarias. Todos ellos serán modelos homocedásticos, es decir, asumirán que la varianza de los residuos es constante a lo largo del tiempo. Primero se explicarán las series de tiempo lineales, es decir, aquellas en las que cada nuevo valor depende linealmente de los valores pasados. Luego, se estudiarán los modelos ARIMA, también denominados modelos Box-Jenkins en honor a estos dos estadísticos que desarrollaron una metodología innovadora para el análisis de este tipo de series en Box y Jenkins (1970). Las referencias bibliográficas principales para construir este capítulo han sido Tsay(2010), Cryer y Chan (2008) y Shumway y Stoffer (2017).

### 3.1. Series de tiempo lineales

Las series de tiempo lineales se caracterizan por su estructura a la hora de modelarlas, donde cobra una gran importancia el ruido blanco.

**Definición 3.1.** Una serie de tiempo  $\{x_t\}$  se dice lineal si puede ser escrita de la siguiente forma:

$$x_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t-i} \quad (3.1)$$

donde  $\mu$  es la media de  $x_t$ ,  $\psi_i$  son los pesos, asumiendo que  $\psi_0 = 1$ , y  $\{a_i\}$  es una serie de ruido blanco. En las series lineales cada  $a_t$  se puede interpretar como la nueva información aportada a la serie en el instante  $t$ .

La estructura de estas series depende de los pesos  $\psi_i$ . Por tanto, si se trata de una serie estacionaria se deberán imponer ciertas condiciones sobre ellos. A continuación, se presentarán las propiedades principales de las series lineales y, al mismo tiempo, se indicarán las condiciones necesarias para su estacionariedad.

La media de una serie de tiempo lineal se calcula fácilmente de la siguiente forma:

$$E(x_t) = E\left(\mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t-i}\right) = \mu + E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t-i}\right) = \mu$$

Para calcular la varianza se tendrá en cuenta la independencia de las variables del ruido blanco y el valor de su varianza,  $\sigma_a^2$ .

$$\begin{aligned} \text{Var}(x_t) &= \text{Var}\left(\mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t-i}\right) = \text{Var}(\psi_0 a_t) + \text{Var}(\psi_1 a_{t-1}) + \dots = \\ &= \psi_0^2 \text{Var}(a_t) + \psi_1^2 \text{Var}(a_{t-1}) + \dots = \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 \end{aligned}$$

Con esta expresión se determina que la condición que se debe imponer sobre los pesos para que la varianza sea finita y, por tanto, la serie sea estacionaria es  $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$ . Al mismo tiempo esta propiedad se traduce en que a medida que aumenta el índice  $i$ , el efecto de  $a_i$  sobre la serie disminuye. Las expresiones de la covarianza y la correlación de las series de tiempo lineales son:

$$\gamma_l = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+l} \qquad \rho_l = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+l}}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2}, \qquad l \geq 0$$

El procedimiento para calcular ambas expresiones se puede encontrar en Tsay (2010, pp.36-37).

### 3.2. Modelo de medias móviles

El modelo de medias móviles, denominado modelo MA, se trata de un modelo de series de tiempo donde la variable salida depende linealmente de finitos valores de una serie de ruido blanco. En esta sección se definirá el primer modelo Box-Jenkins, presentando sus propiedades más importantes.

**Definición 3.2.** Un modelo de medias móviles de orden  $q$ , MA( $q$ ), se define como:

$$x_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \qquad (3.2)$$

donde  $\mu$  es la media de de la serie y  $\{a_t\} \in iid(0, \sigma_a^2)$  es un proceso de ruido blanco. El término  $a_t$  representa la innovación del instante  $t$ .

El modelo de medias móviles toma la forma de un modelo lineal con finitos pesos no nulos. Su nombre surge de que cada nuevo elemento de la serie se obtiene de aplicar los mismos pesos pero movidos un instante hacia adelante.

La media de un modelo de medias móviles se obtiene calculando directamente la esperanza:

$$E(x_t) = E(\mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}) = \mu$$

De forma análoga se obtiene la varianza del modelo:

$$Var(x_t) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_a^2$$

En cuanto a la covarianza, ésta toma expresiones más complejas que varían según el número de instantes que separan ambos elementos. Las expresiones no tienen relevancia en este trabajo, pero sí es importante conocer cuando se anula la covarianza. Para ello se toma el modelo MA(1) y se calcula la covarianza entre dos elementos separados por un instante:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= Cov(x_t, x_{t-1}) = Cov(\mu + a_t - \theta a_{t-1}, \mu + a_{t-1} - \theta a_{t-2}) \\ &= Cov(-\theta a_{t-1}, a_{t-1}) = -\theta \sigma_a^2 \end{aligned}$$

Ahora, si se calcula la covarianza para dos instantes de separación se tiene:

$$\gamma_2 = Cov(x_t, x_{t-2}) = Cov(\mu + a_t - \theta a_{t-1}, \mu + a_{t-2} - \theta a_{t-3}) = 0$$

Extrapolando este resultado al modelo de medias móviles general de orden  $q$ , se llega al resultado de que la covarianza será nula para elementos espaciados por más de  $q$  instantes, esto es,  $\gamma_k = 0$  para  $k > q$ .

### 3.2.1. Estacionariedad e invertibilidad

#### Estacionariedad

Los modelos de medias móviles se caracterizan por ser siempre estacionarios. Ésto se debe a que son una combinación lineal de ruido blanco, por lo que los dos primeros momentos, la media y la varianza, son invariantes en el tiempo. Observando ambas expresiones, ya calculadas anteriormente, se puede comprobar la no dependencia temporal:

$$E(x_t) = \mu \qquad Var(x_t) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_a^2$$

### Invertibilidad

Un modelo de medias móviles será invertible si se puede representar como un modelo autorregresivo, es decir, si el valor de cada instante se puede representar como combinación lineal de los valores anteriores de la serie. Para comprender la invertibilidad de un modelo de medias móviles se parte de la expresión del MA(1) pero considerando su media nula ( $\mu = 0$ ) y se reescribe de la siguiente manera:  $a_t = x_t + \theta a_{t-1}$ . El siguiente paso será sustituir recursivamente la ecuación anterior para obtener:

$$a_t = x_t + \theta x_{t-1} + \theta^2 x_{t-2} + \dots$$

El término  $a_t$  es la innovación del instante  $t$ , por lo que se observa que las innovaciones dependen linealmente de los valores pasados de la serie. Para que la sustitución anterior se pueda realizar de manera infinita se necesita que  $\theta^i < \infty$  cuando  $i \rightarrow \infty$ . Se llega a la conclusión de que un modelo MA(1) es invertible si  $|\theta| < 1$ .

Para calcular la condición de invertibilidad de un modelo general, MA( $q$ ), se necesita representar su ecuación característica:

$$1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2 - \dots - \theta_q x^q = 0$$

Entonces, la condición de invertibilidad de un modelo de medias móviles general es que las raíces de su ecuación característica sean mayores que 1 en módulo. Este resultado se encuentra en Cryer y Chan (2008, pp.79-80).

### 3.2.2. Orden del modelo

Para determinar el orden de un modelo de medias móviles se analiza su función de autocorrelación. En este capítulo se comentó que en un modelo MA( $q$ ) la covarianza se anula para elementos espaciados por más de  $q$  instantes. Tomando la expresión 2.1 del ACF, se concluye que los coeficientes de órdenes mayores a  $q$  también serán nulos, es decir,  $\rho_k = 0 \forall k > q$ .

Utilizando esto es sencillo determinar el orden de un modelo MA. Lo primero es calcular la función de autocorrelación de la serie de tiempo que se quiere modelar. Así se conocerá el coeficiente de mayor orden significativamente distinto de cero, y ese será el orden de modelo de medias móviles que se utilizará.

Los siguientes pasos como la estimación o la predicción se explicarán en la sección correspondiente al modelo general ARMA( $p, q$ ) para no repetir el mismo procedimiento con cada modelo.

### 3.3. Modelo autorregresivo

Otro de los modelos Box-Jenkins que destaca en el modelaje de la media de las series de tiempo estacionarias es el modelo autorregresivo. A diferencia del anterior, en el modelo autorregresivo el nuevo elemento de la serie depende linealmente de los valores anteriores. En esta sección se proporcionará una definición del modelo junto sus propiedades principales.

**Definición 3.3.** Un modelo autorregresivo de orden  $p$ ,  $AR(p)$ , se define como:

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + a_t \quad (3.3)$$

donde  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  son los pesos y  $\{a_t\}$  un proceso de ruido con varianza  $\sigma_a^2$  que representa las innovaciones de cada instante que no están explicadas por los valores anteriores de la serie.

Como indica el propio nombre, el modelo autorregresivo toma la forma de un modelo de regresión lineal, con  $x_t$  como variable respuesta y los  $p$  instantes anteriores como variables explicativas.

La media se obtiene calculando la esperanza directamente sobre la expresión del modelo:

$$E(x_t) = \phi_0 + \phi_1 E(x_{t-1}) + \phi_2 E(x_{t-2}) + \dots + \phi_p E(x_{t-p}) + E(a_t)$$

Como  $E(a_t) = 0$  y se está bajo condiciones de estacionariedad, se cumple que  $E(x_t) = E(x_{t-i}) = \mu \forall i$ , por lo que:

$$E(x_t)(1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p) = \phi_0 \quad \text{y, finalmente} \quad \mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p} \quad (3.4)$$

Además, el modelo autorregresivo cumple la siguiente propiedad:

$$E(x_t | x_{t-1}, \dots, x_{t-p}) = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p} \quad \text{y} \quad \text{Var}(x_t | x_{t-1}, \dots, x_{t-p}) = \sigma_a^2$$

Esto es, dados los  $p$  valores pasados de la serie, el nuevo valor está centrado alrededor de  $\phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p}$  con una desviación estándar de  $\sigma_a$ .

Por último, la función de autocorrelación de un modelo autorregresivo es una combinación lineal de términos que decaen de manera exponencial y términos de onda sinusoidal amortiguada, lo que provoca que no se anule en un orden finito. Al mismo tiempo, según aumenta el orden, los coeficientes de la ACF disminuyen, lo que se traduce en que los valores más cercanos en el tiempo tendrán mayor influencia sobre el nuevo elemento de la serie. El procedimiento para calcular la ACF de modelos de distintos órdenes se puede consultar en Cryer y Chan (2008, pp.66-67, pp.72-73 y pp.76-77).

### 3.3.1. Estacionariedad e invertibilidad

#### Estacionariedad

No todos los modelos autorregresivos son estacionarios. Para que un modelo AR(p) sea estacionario debe cumplir una cierta condición relativa a su ecuación característica. La ecuación característica de un modelo AR(p) coincide con la ecuación asociada al denominador de la expresión 3.4:

$$1 - \phi_1x - \phi_2x^2 - \dots - \phi_px^p = 0$$

La condición necesaria para la estacionariedad consiste en que las raíces de su ecuación característica sean mayores que 1 en módulo. Éste resultado se puede consultar de forma más extensa en Cryer y Chan (2008, pp.71-72 y p.76).

#### Invertibilidad

Un modelo autorregresivo es invertible si se puede transformar en un modelo de medias móviles. A diferencia del modelo MA, la invertibilidad está asegurada en los modelos de tipo autorregresivo. Para comprobarlo, se parte del modelo AR(1) y se utiliza la igualdad  $\phi_0 = (1 - \phi_1)\mu$ , procedente de la expresión de su media, para obtener una nueva expresión del modelo AR:

$$x_t - \mu = \phi_1(x_{t-1} - \mu) + a_t \quad (3.5)$$

Ahora, haciendo repetidas sustituciones de la expresión anterior se obtiene:

$$x_t - \mu = a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 a_{t-2} + \dots$$

Con lo que quedaría demostrada la invertibilidad del modelo autorregresivo.

### 3.3.2. Orden del modelo

En los modelos autorregresivos, la función de autocorrelación no permite determinar el orden del modelo, ya que ésta nunca se anula. Existen otras técnicas que si permiten realizar este trabajo, como la función de autocorrelación parcial o los criterios de información de Akaike (AIC) o Bayes (BIC). En este apartado se explicará la primera de las técnicas nombradas.

#### Función de autocorrelación parcial (PACF)

La PACF es una herramienta muy utilizada para el cálculo del orden de un modelo autorregresivo. Para presentar la función de autocorrelación parcial se consideran modelos

AR en orden creciente:

$$\begin{aligned}x_t &= \phi_{0,1} + \phi_{1,1}x_{t-1} + a_{t,1} \\x_t &= \phi_{0,2} + \phi_{1,2}x_{t-1} + \phi_{2,2}x_{t-2} + a_{t,2} \\x_t &= \phi_{0,3} + \phi_{1,3}x_{t-1} + \phi_{2,3}x_{t-2} + \phi_{3,3}x_{t-3} + a_{t,3} \\&\vdots\end{aligned}$$

donde  $\phi_{0,j}$  es el término constante del modelo AR(j),  $\phi_{i,j}$  es el coeficiente de  $x_{t-i}$  del modelo de orden j y  $\{a_{t,j}\}$  su error. Estos modelos toman la forma de una regresión lineal múltiple, por lo que sus coeficientes se pueden estimar por mínimos cuadrados. De esta forma, el coeficiente  $\phi_{1,1}$  es el denominado PACF de orden 1, el  $\phi_{2,2}$  será el PACF de orden 2 y así sucesivamente.

Conocer el orden del modelo AR será muy sencillo utilizando la función de autocorrelación parcial, ya que un modelo AR(p) posee el coeficiente de orden p de su PACF no nulo y los de orden mayor serán todos nulos. Por lo tanto, el procedimiento a seguir será calcular la PACF de la serie de tiempo que se quiere modelar y así obtener el mayor orden del coeficiente de la PACF significativamente distinto de cero. Ese orden será el que se utilice para el modelo autorregresivo.

Al igual que en el modelo de medias móviles, la estimación, validación y predicción del modelo se estudiarán para el caso de un modelo ARMA general.

### 3.4. Modelo ARMA

El modelo autorregresivo de medias móviles (ARMA) combina las ideas de los dos modelos anteriores y llega a una expresión compacta, eliminando el problema de algunos modelos MA o AR que poseen un número de parámetros demasiado elevado. Se trata de un modelo muy utilizado a la hora de modelar la media de las series financieras. Además, comprender su funcionamiento es fundamental, ya que el modelo GARCH, el más relevante para el modelaje de la volatilidad, se puede expresar como un ARMA pero utilizando los cuadrados de las innovaciones.

**Definición 3.4.** Un modelo ARMA(p,q) se define como:

$$x_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i} + a_t - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i} \quad (3.6)$$

donde  $\{a_t\}$  es una serie de ruido blanco con varianza  $\sigma_a^2$ .

Este modelo se puede dividir en dos partes distintas, la componente AR formada por los dos primeros sumandos y la componente MA formada por los dos restantes. Es fácil

comprobar que se trata de una combinación de los dos modelos anteriores considerando los dos siguientes casos:

$$\begin{aligned} ARMA(p, 0) &= \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + a_t = AR(p) \\ ARMA(0, q) &= a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} = MA(q) \end{aligned}$$

**Definición 3.5.** Se define el operador de retardo de orden  $k$ , denotado por  $B^k$ , como:

$$B^k x_t = x_{t-k}$$

Ahora, utilizando el operador de retardo se puede expresar el modelo 3.6 de la siguiente forma:

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)x_t = \phi_0 + (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)a_t \quad (3.7)$$

El polinomio  $1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$  es el polinomio AR, mientras que  $1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$  es el polinomio MA del modelo. Una condición necesaria es que ambos polinomios no presenten raíces en común, ya que si esto ocurre podría reducirse el orden del modelo.

Las propiedades principales de un modelo ARMA(p,q) son similares a las de un modelo AR(p), salvo pequeñas modificaciones debidas al impacto de los componentes del MA(q). Un ejemplo de ello es que la media del modelo ARMA(p,q) toma la expresión 3.4, coincidiendo con la media del AR(p).

Cabe destacar el comportamiento de la ACF y la PACF de un modelo ARMA. Ambas funciones presentan una forma muy similar a la función de autocorrelación de un modelo AR, es decir, tanto la ACF como la PACF decrece su valor según se aumenta el orden pero sin llegar en ningún momento a anularse.

### 3.4.1. Estacionariedad e invertibilidad

Para comenzar a estudiar la estacionariedad e invertibilidad de los modelos ARMA se debe partir de la expresión 3.7 de la ecuación característica. De esta manera, para que un proceso ARMA(p,q) sea estacionario se debe cumplir que tanto la componente AR como la MA lo sean. El proceso MA(q) es siempre estacionario, por lo que se necesita la estacionariedad de la componente autorregresiva. Ésta se obtiene si las raíces del polinomio característico AR son mayores que 1 en módulo.

Lo mismo pasa con la invertibilidad del modelo. Para que un modelo ARMA sea invertible, se necesita que tanto la parte MA como la AR lo sean. Como los modelos AR son siempre invertibles, la condición necesaria es que las raíces asociadas a la ecuación característica de la parte MA sean mayores que 1 en módulo.

### 3.4.2. Orden del modelo

En el caso de los modelos ARMA, tanto la ACF como la PACF no aportan información para determinar el orden del modelo, ya que no se anulan para un orden finito. Para llevar a cabo esta labor Tsay y Tiao (1984) desarrolló el método de la función de autocorrelación extendida (EACF). Sin embargo, el método más utilizado consiste en comparar modelos con distintos órdenes mediante el AIC o BIC. De esta forma, se tomará el modelo más sencillo que mejor se ajuste, ya que se penaliza el número de parámetros.

### 3.4.3. Estimación

Una vez ya determinado el orden del modelo ARMA(p,q), se pasa a la estimación de los parámetros. Existen diferentes métodos dependiendo del modelo que se desea estimar.

Por un lado, para estimar un modelo ARMA(p,0) se puede realizar de manera sencilla por mínimos cuadrados. Como en definitiva se trata de un modelo AR(p), los parámetros a estimar son  $\beta = \{\phi_0, \dots, \phi_p, \sigma_a^2\}$ . El modelo presenta la forma de una regresión lineal, por lo que la estimación toma la siguiente forma:

$$\hat{\beta} = \arg \min \sum_{t=1}^N (\hat{a}_t)^2$$

Sin embargo, para modelos ARMA en general la estimación más habitual es mediante el método de máxima verosimilitud. En este caso, los parámetros que se desean estimar son  $\beta = \{\phi_0, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma_a^2\}$  y los estimadores serán los que maximizan la función de verosimilitud, es decir:

$$\hat{\beta} = \arg \max_{\hat{\beta}} L_{x_1, \dots, x_N}(\hat{\beta})$$

donde L es la función de verosimilitud:

$$L_{x_1, \dots, x_N}(\hat{\beta}) = f_{\hat{\beta}}(x_1, \dots, x_N)$$

con  $f_{\hat{\beta}}$  la función de densidad conjunta del modelo ARMA.

Para ver ambos métodos de estimación con todos los cálculos y detalles se puede consultar Shumway y Stoffer (2017, pp.116-119).

### 3.4.4. Validación

Una vez ajustado el modelo se debe validar, es decir, comprobar cuál es su exactitud y si es idóneo para su objetivo. Para llevar a cabo este proceso se utilizarán los residuos (o errores) que se definen como  $\hat{a}_t = x_t - \hat{x}_t$ . Para que el modelo sea válido se necesita que

la serie de residuos sea una serie de ruido blanco y, entonces, debe cumplir las siguientes hipótesis:

$$1. \mu_t = 0 \quad 2. \sigma_t^2 = \sigma_a^2 \quad 3. \gamma_k = \begin{cases} \sigma_a^2 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases} \quad 4. \hat{a}_t \in N(0, \sigma_a^2)$$

Las tres primeras propiedades son imprescindibles para que el modelo sea válido, ya que si éstas no se cumplen, la serie de residuos no sería una serie de ruido blanco. La última hipótesis no es necesaria pero aportará características muy útiles como, por ejemplo, que bajo normalidad la estacionariedad implica estacionariedad fuerte.

### Método gráfico

Como la serie de residuos debe ser una serie de ruido blanco, la gráfica de los residuos debería situarse alrededor del 0 y no presentar ninguna tendencia o variabilidad. Si se aprecia alguna tendencia, el modelo no sería válido. Además, si se representan las gráficas de la ACF de la serie de los residuos, debe observarse que es nula para cualquier orden.

### Contraste Ljung-Box

Otra manera de comprobar el valor de la función de autocorrelación de distintos órdenes es aplicar el contraste Ljung-Box. Para comprobar que los  $m$  primeros coeficientes de autocorrelación son nulos se utiliza el estadístico  $Q(m)$ . Éste sigue una distribución Chi-cuadrado con  $m-g$  grados de libertad (siendo  $g$  el número de parámetros del modelo). Si los residuos presentan autocorrelaciones no nulas, el modelo debe extenderse.

### Contraste de normalidad

Por último, para contrastar la normalidad de la serie de los residuos existen diferentes test. Uno de los más utilizados es el contraste de Shapiro-Wilks desarrollado en Shapiro y Wilk (1965).

#### 3.4.5. Predicción

Una de las principales utilidades de cualquier modelo financiero es la predicción. Como un modelo ARMA es la combinación de un AR y un MA, se estudiará la predicción de estos últimos y, por consiguiente, la del ARMA simplemente será la combinación de ambas.

Se tiene la serie de tiempo  $\{x_t : t = 1, \dots, N\}$ , por lo que el instante  $N$  será el origen de la predicción. Se pretende predecir el valor de  $x_{N+h}$ , denominado predicción a horizonte  $h$

y denotado como  $\hat{x}_{N+h}$ . Además,  $F_h$  denota el conjunto de información disponible en ese instante. Para llevar a cabo la predicción se utiliza la esperanza condicionada al conjunto de información ya que se trata de un estimador que minimiza el error cuadrático medio.

En un modelo AR(p), la predicción a horizonte h será:

$$\hat{x}_{N+h} = E(x_{N+h}|F_h) = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i \hat{x}_{N+h-i}$$

donde  $\hat{x}_k = x_k$  para  $k \leq N$  y el error asociado a la predicción es  $\hat{a}_{N+h} = x_{N+h} - \hat{x}_{N+h}$ .

Una propiedad importante de la predicción de un modelo AR(p) es que  $\hat{x}_{N+h}$  converge a  $E(x_t)$  cuando  $h \rightarrow \infty$ . Ésta es una característica conocida en finanzas como reversión a la media, la cual se traduce en que las rentabilidades se estabilizan en torno a la media a largo plazo.

Por otra banda, la predicción a horizonte h de un modelo MA(q) será:

$$\hat{x}_{N+h} = E(x_{N+h}|F_h) = \mu + \sum_{i=1}^q \theta_i a_{N+h-i}$$

Como únicamente son conocidos los valores  $a_1, \dots, a_N$ , se considerará que  $a_k = 0$  para  $k > N$ . Los errores asociados a la predicción serán, de igual forma,  $\hat{a}_{N+h} = x_{N+h} - \hat{x}_{N+h}$ .

El modelo de medias móviles se trata de un modelo con memoria finita, con lo que las predicciones tienden a la media muy rápido. Para un modelo MA(q) se cumple:

$$\hat{x}_{N+h} = \mu \quad \forall h > q$$

Por lo tanto, la predicción de un modelo ARMA(p,q) es la combinación de los dos anteriores y toma la siguiente forma:

$$\hat{x}_{N+h} = E(X_{N+h}|F_h) = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i \hat{x}_{N+h-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{N+h-i}$$

con  $\hat{x}_k = x_k$  para  $k \leq N$  y  $a_k = 0$  para  $k > N$ .

### 3.5. Modelo ARIMA

Antes de finalizar con la metodología Box-Jenkins, que se aplica a los modelos homoceásticos, es importante presentar el modelo ARIMA. Puede ocurrir que un modelo ARMA no cumpla la condición de estacionariedad debido a que su polinomio AR tenga una raíz unidad. Por este motivo, es útil extender el modelo ARMA hacia el modelo autorregresivo integrado de medias móviles (ARIMA).

**Definición 3.6.** Una serie de tiempo es un proceso ARIMA(p,1,q), si la serie  $\{c_t\}$ , con  $c_t = \Delta x_t = (1 - B)x_t = x_t - x_{t-1}$ , sigue un modelo ARMA(p,q) invertible y estacionario.

La serie  $\{c_t\}$  recibe el nombre de serie diferenciada de primer orden. Los parámetros p y q indican del orden de la componente autorregresiva y de media móvil respectivamente. Además, la componente central hace referencia al orden de integración, ya que existen series de tiempo que presentan más de una raíz unitaria en el polinomio AR.

**Definición 3.7.** Una serie de tiempo es un proceso ARIMA(p,2,q), si la serie  $\{s_t\}$ , con  $s_t = c_t - c_{t-1} = (1 - B)^2 x_t$ , sigue un modelo ARMA(p,q) invertible y estacionario.

En consecuencia, para el modelo general ARIMA(p,d,q) únicamente será necesario calcular la serie diferenciada de orden d. Para tratar este tipo de modelos simplemente se aplica la metodología estudiada para los modelos ARMA sobre la serie diferenciada del orden que corresponda. Es evidente que si el orden de integración es nulo, el modelo ARIMA(p,0,q) coincide con un modelo ARMA(p,q).

El modelo ARIMA cobra gran importancia en finanzas debido a que muchas series de retornos logarítmicos de activos financieros no son estacionarias, pero las series  $c_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$  si lo son. Es decir, muchas series de retornos logarítmicos poseen un raíz unitaria en su polinomio AR y deben ser tratadas como un proceso ARIMA.

### Estacionalidad

Por último, una de las causas más comunes de no estacionariedad en las series de tiempo financieras es la estacionalidad. Ésta consiste en una tendencia que se repite en la serie temporal cada  $l$  observaciones (siendo  $l$  el periodo). Por ejemplo, en una serie de retornos diaria puede existir una estacionalidad semanal ( $l = 7$ ) o una estacionalidad mensual ( $l = 30$ ).

Entonces, cuando se calculan la ACF de una serie de tiempo, si se observan valores altos para órdenes múltiplos de un número entero  $l$ , es posible que la serie presente estacionalidad de periodo  $l$ . Para eliminar esta estacionalidad se lleva a cabo la siguiente diferenciación:

$$\Delta_l x_t = (1 - B^l) x_t = x_t - x_{t-l}$$

Esta serie diferenciada seguiría un modelo ARMA.

En otros casos, la diferenciación estacional se realiza sobre la serie de tiempo diferenciada, dando lugar a lo que se denomina modelos de estacionalidad multiplicativa. Para extender la información sobre estos modelos o estudiar otro tipo de modelos estacionales se puede revisar Tsay (2010, pp.84-89), Shumway y Stoffer (2017, pp.148-154) y Cryer y Chan (2008, pp.230-232).

### 3.6. Aplicación práctica I

Como se había comentado anteriormente, uno de los principales intereses del trabajo es aplicar los contenidos expuestos a lo largo del mismo sobre datos reales del IBEX35. Las series financieras a tratar serán las series de retornos de la empresa Iberdrola S.A. En esta primera parte se aplicará la metodología Box-Jenkins para obtener el modelo de la media que mejor se ajuste.

Iberdrola, S.A es una empresa española, con sede en Bilbao, dedicada a la producción, distribución y comercialización de energía. En la actualidad, se trata de una de las empresas eléctricas líder a nivel global, la segunda en España por producción y en cuanto a capitalización bursátil es la primera en España y cuarta a nivel internacional.

Para realizar el análisis de la serie de los retornos de Iberdrola S.A. se tratarán por separado los datos de dos períodos distintos, diferenciando la etapa anterior y posterior a la llegada del coronavirus a España, con lo que también se podrá analizar el impacto de la pandemia en la empresa. El primer período abarca tres años naturales, desde el 16 de febrero del 2017 hasta el 14 de febrero del 2020, y el segundo período abarca toda la etapa coetánea al coronavirus, desde el 17 de febrero de 2020 hasta el 28 de abril de 2021. Los datos utilizados se corresponden con los valores de cierre de las acciones de Iberdrola S.A. pertenecientes a días hábiles, con lo que se excluyen los fines de semana y festivos, extraídos de Yahoo! Finanzas [6].

En esta parte de la aplicación práctica se buscará la ecuación de la media de la serie de retornos de Iberdrola S.A. en ambos períodos por separado. Se empleará la metodología Box-Jenkins expuesta hasta el momento para, al final del trabajo, completar la modelización de las series buscando el modelo apropiado para la volatilidad.

#### 3.6.1. Período anterior al COVID-19

Se comienza analizando los datos del primer período. El primer paso a la hora de realizar el análisis financiero de los valores bursátiles de Iberdrola S.A. es transformar los valores de cierre en una serie de tiempo. Sin embargo, trabajar con la serie de los valores de cierre es una tarea complicada, por eso se construye la serie de retornos a partir de ella, ya que, como se explica en el Capítulo 1, las series de retornos presentan mejores propiedades a la vez que son más manejables. En la Figura 3.1 están representadas ambas series. A pesar de que se va a trabajar únicamente con la serie de retornos, observando los valores de cierre se puede afirmar que en el último año anterior a la llegada del virus la empresa estaba en crecimiento, lo que se reflejaba en una gran subida del precio de sus acciones.

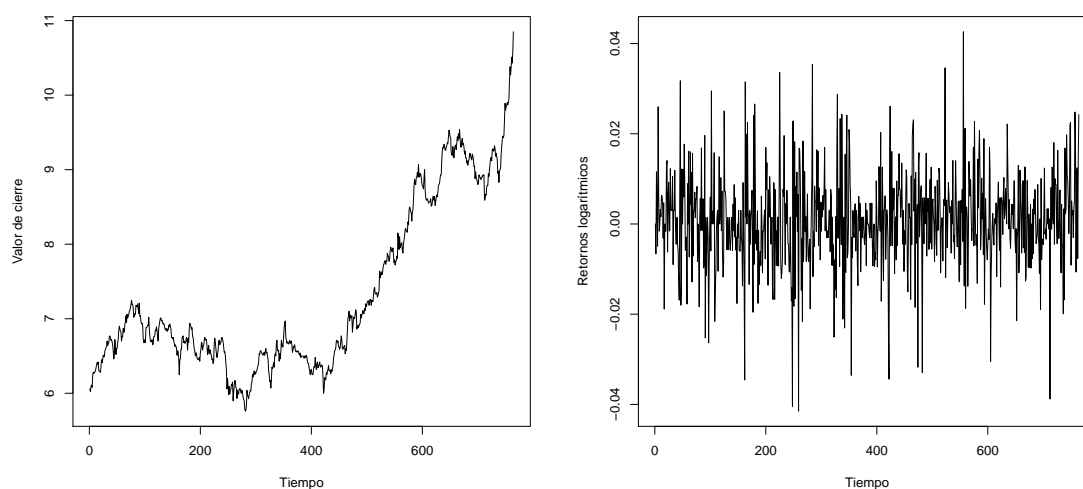


Figura 3.1: Representación de las series financieras de Iberdrola S.A. correspondientes a los 3 años naturales anteriores al COVID-19. En la gráfica de la izquierda se representa la serie de los valores de cierre y en la gráfica de la derecha la serie de los retornos logarítmicos.

Una vez que se tiene la serie de retornos, es necesario comprobar su estacionariedad para conocer si es posible llevar a cabo el análisis. Esto se realiza con la función `adf.test` del paquete `tseries`. La importancia de ser estacionaria ha sido desarrollada en el apartado 2.2.2. de este mismo trabajo.

```
adf.test(retornos.ts)

## Warning in adf.test(retornos.ts): p-value smaller than printed p-value

##
## Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  retornos.ts
## Dickey-Fuller = -9.1421, Lag order = 9, p-value = 0.01
## alternative hypothesis: stationary
```

El test de estacionariedad presenta un p valor inferior a 0,01, por lo que existen evidencias para rechazar la hipótesis nula y, por tanto, considerar estacionaria la serie de retornos.

En este punto, confirmada la estacionariedad, es el momento de buscar el modelo para la media que se ajuste a la serie de retornos. En condiciones ideales, la ecuación de la

media de este tipo de series financieras es un  $ARMA(0,0)$ , ya que el mercado es aleatorio. Sin embargo, en la práctica es posible que presente órdenes autorregresivos o de medias móviles no nulos. Siguiendo la metodología Box-Jenkins, se debe analizar la función de autocorrelación y de autocorrelación parcial para comprobar si existen coeficientes significativos y conocer el orden del modelo ARMA apropiado. Las gráficas de la ACF y PACF generadas con las funciones `acf` y `pacf` del paquete `tseries` son las siguientes:

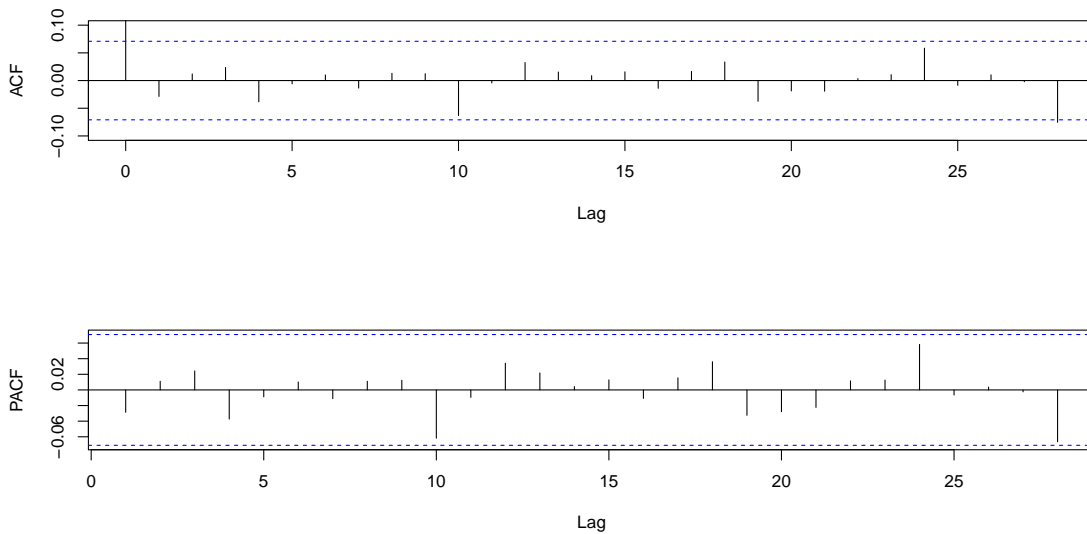


Figura 3.2: La gráfica superior representa la función de autocorrelación muestral de la serie de retornos de Iberdrola S.A. anterior al COVID-19 y la gráfica inferior se corresponde con la función de autocorrelación parcial de la misma serie.

Como se puede ver en la Figura 3.2 tanto la ACF como la PACF no presentan ningún coeficiente significativamente distinto de cero. Esto se traduce en que la serie de retornos no presenta autocorrelación y se trataría de ruido blanco. Para comprobar esta hipótesis se realiza un test Q de Ljung-Box.

```
Box.test(retornos, type = "Ljung-Box", lag = 10, fitdf = 0)

##
## Box-Ljung test
##
## data:  retornos
## X-squared = 5.9234, df = 10, p-value = 0.8217
```

La prueba de Ljung-Box presenta un p valor de 0.8217 con lo que no existen evidencias para rechazar la hipótesis nula y se concluye que las correlaciones de la serie de retornos de Iberdrola S.A. son nulas, tratándose de ruido blanco. En la prueba se tomaron los datos separados por hasta 10 instantes ( $lag = 10$ ) para tener en cuenta los datos de dos semanas completas, pero el resultado sería similar considerando un mayor número de retrocesos.

A la vista de los resultados del análisis de las funciones de autocorrelación, se propone el modelo ARMA(0,0) para la ecuación de la media. Para confirmar si se trata del modelo que mejor se ajusta se aplicará la función `auto.arima` del paquete `forecast`, que devuelve el mejor modelo con un orden máximo de 5 en la parte AR y MA utilizando distintos criterios de información como AIC o BIC.

```
auto.arima(retornos.ts)

## Series: retornos.ts
## ARIMA(0,0,0) with non-zero mean
##
## Coefficients:
##      mean
##      8e-04
## s.e.  4e-04
##
## sigma^2 estimated as 0.0001098:  log likelihood=2399.1
## AIC=-4794.19   AICc=-4794.18   BIC=-4784.92
```

Por tanto, se verifica que la mejor ecuación de la media es el modelo ARMA(0,0), es decir, los datos de distribuyen alrededor de la media, prácticamente nula, en forma de ruido.

### 3.6.2. Período coetáneo al COVID-19

Con los datos posteriores a la llegada del COVID-19 se va a realizar un estudio similar al anterior. De esta forma, se obtendrá el modelo para la ecuación de la media de los nuevos datos y se discutirá si los efectos de la pandemia se reflejan en ellos y de qué manera. Al igual que en el apartado anterior, primeramente se construye la serie de los retornos y se representa junto con la serie de los valores de cierre de las acciones de Iberdrola S.A.

Como cabía esperar, los efectos del coronavirus se muestran de manera más marcada en la serie de los valores de cierre. En la gráfica de la izquierda de la Figura 3.3 se contempla

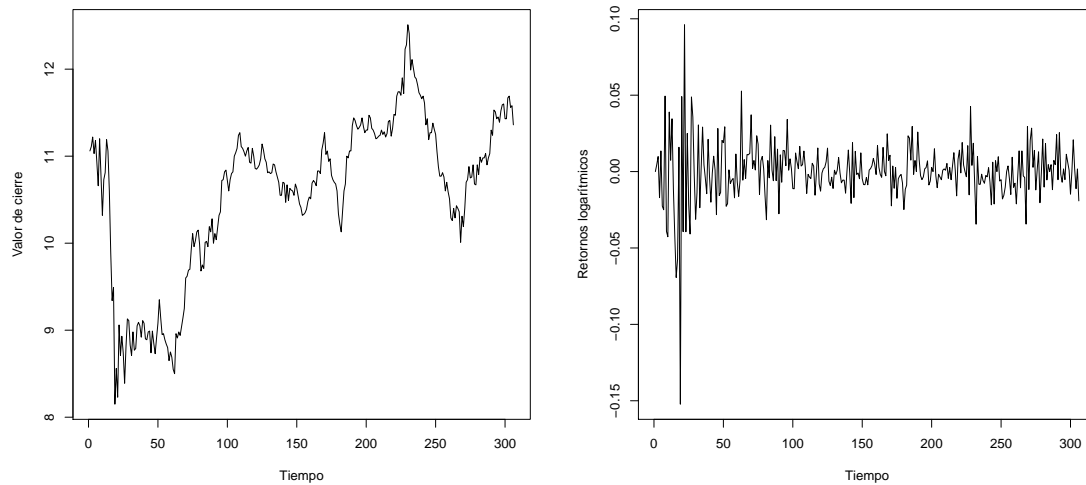


Figura 3.3: Representación de las series financieras de Iberdrola S.A. correspondientes a la etapa desde la llegada del COVID-19 a España. En la gráfica de la izquierda se representa la serie de los valores de cierre y en la gráfica de la derecha la serie de los retornos logarítmicos.

una caída muy pronunciada que coincide con la llegada del virus a España. Luego, se aprecia unas semanas de equilibrio con un valor de las acciones bajo y el precio vuelve a subir de manera más lenta y situándose alrededor del precio anterior al virus. En cuanto a la serie de los retornos, debido a sus propiedades y su construcción, es más difícil apreciar estas variaciones a simple vista, ya que difícilmente su media es distinta de cero. No obstante, la gran caída en los valores bursátiles sí se ve reflejada, con valores de los retornos que oscilan entre 0,1 y  $-0,15$  en esas fechas.

Para determinar el modelo de la media es necesario que la serie de retornos sea estacionaria, por lo que de nuevo se utiliza la función `adf.test` con estos datos.

```
adf.test(retornos.ts)

## Warning in adf.test(retornos.ts): p-value smaller than printed p-value

##
## Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  retornos.ts
## Dickey-Fuller = -6.1595, Lag order = 6, p-value = 0.01
## alternative hypothesis: stationary
```

El resultado es idéntico al obtenido con los datos del período anterior, con lo cual, la conclusión también coincide y se acepta la estacionariedad de la serie de retornos. Asumida esta característica, se tienen las condiciones necesaria para realizar el estudio de la serie. Se comienza analizando las funciones de autocorrelación que, según sus coeficientes no nulos, permiten conjeturar la complejidad del modelo ARMA para la media de la serie de retornos.

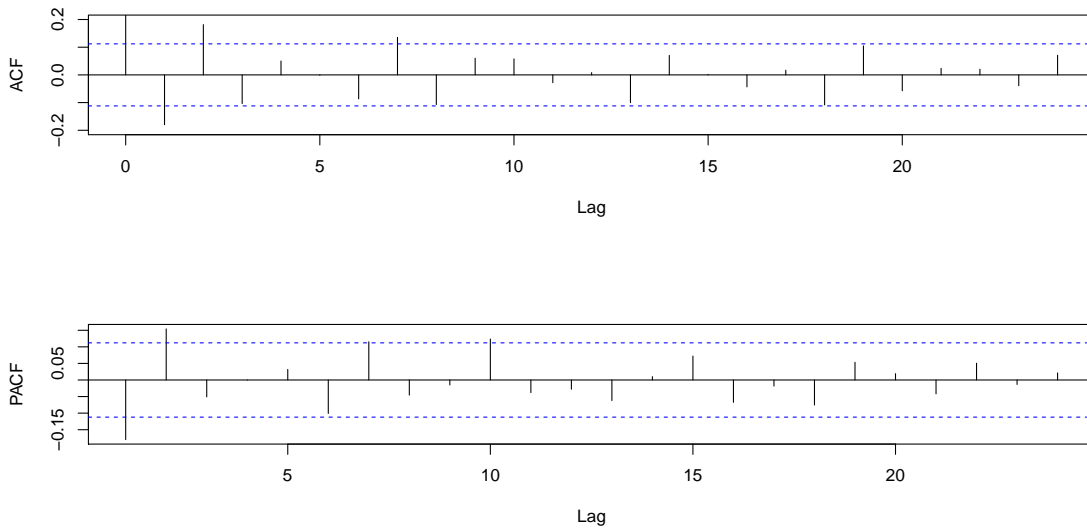


Figura 3.4: La gráfica superior representa la función de autocorrelación muestral de la serie de retornos de Iberdrola S.A. coetánea al COVID-19 y la gráfica inferior se corresponde con la función de autocorrelación parcial de la misma serie.

En este caso, tanto la ACF como la PACF presentan coeficientes significativamente distintos de cero. Esto puede indicar que el modelo Box-Jenkins para la media presente órdenes autorregresivos y de medias móviles no nulos. Observando detenidamente la Figura 3.4 se comprueba que los coeficientes de la ACF descienden más lento que los coeficientes de la PACF. Teniendo esto en cuenta, es probable que la parte AR tenga más peso o incluso que la parte MA sea nula. Para verificar si la serie de retornos presenta autocorrelación se realiza una prueba Q de Ljung-Box.

```
Box.test(retornos, type = "Ljung-Box", lag = 10, fitdf = 0)
##
## Box-Ljung test
```

```
##
## data:  retornos
## X-squared = 38.358, df = 10, p-value = 3.288e-05
```

Dado el p valor del test se concluye que existen evidencias para rechazar la hipótesis nula y se acepta la existencia de autocorrelación, corroborando el razonamiento anterior donde se utilizaban las funciones de autocorrelación.

Para determinar el orden del modelo se utilizará de nuevo la función `auto.arima`.

```
auto.arima(retornos.ts)

## Series: retornos.ts
## ARIMA(3,0,2) with zero mean
##
## Coefficients:
##          ar1      ar2      ar3      ma1      ma2
##      -1.6440  -0.9333  -0.0128  1.5399  0.8917
## s.e.   0.0928   0.1472   0.0686  0.0745  0.0754
##
## sigma^2 estimated as 0.0003434:  log likelihood=788.36
## AIC=-1564.72  AICc=-1564.44  BIC=-1542.38
```

Según esta función el modelo que mejor se ajusta es el ARMA(3,2). En R el modelo ARMA se define con los coeficientes de la parte MA positivos. El coeficiente “ar1” es prácticamente igual con distinto signo que el “ma1” y lo mismo pasa con el “ar2” y “ma2”. Esto podría provocar que los polinomios característicos de ambas partes presenten raíces en común y, como se explicó en el modelo ARMA, el orden del modelo podría reducirse. Además, algunos coeficientes presentan un valor elevado aumentando la inestabilidad del modelo. Los pasos a seguir serán construir el modelo dado por el `auto.arima` con la función `arima` del paquete `forecast` y comprobar mediante la función `coefstest` del paquete `lmtest` si estos coeficientes son significativos o se puede prescindir de alguno.

```
modelo.arma<-arima(retornos.ts, order=c(3,0,2))
coefstest(modelo.arma)[1:5,1:4]

##          Estimate Std. Error  z value    Pr(>|z|)
## ar1 -1.64473097  0.09261650 -17.758509 1.481159e-70
## ar2 -0.93437957  0.14732722  -6.342206 2.264985e-10
```

```
## ar3 -0.01314698 0.06867881 -0.191427 8.481911e-01
## ma1 1.54055889 0.07421869 20.757020 1.059352e-95
## ma2 0.89225405 0.07551501 11.815585 3.242841e-32
```

Justamente los parámetros significativos son los que se comentaron que podrían anularse, mientras que el “ar3” no es significativo y podría eliminarse. Se analizaron más modelos de distintos órdenes pero los parámetros también se anulaban entre sí excepto en el AR-MA(1,0), que es el modelo elegido para la ecuación de la media. A diferencia de la etapa anterior, el modelo para la media presenta parte autorregresiva, con lo que el mercado deja de ser totalmente aleatorio y el nuevo retorno depende del valor del retorno pasado. Esto se puede deber a la incertidumbre de los inversores a causa de la pandemia que provoca que se guíen más por los valores bursátiles pasados. Los parámetros del modelo son los siguientes:

```
modelo.arma<-arima(retornos.ts, order=c(1,0,0))
modelo.arma$coef

##          ar1      intercept
## -1.800089e-01  9.730686e-05

coeftest(modelo.arma)[1:2,1:4]

##          Estimate  Std. Error  z value  Pr(>|z|)
## ar1          -1.800089e-01 0.0562323484 -3.2011619 0.001368746
## intercept    9.730686e-05 0.0009266654  0.1050076 0.916369818
```

Por lo tanto, el modelo para la media de la serie de retornos de Iberdrola S.A. posterior al COVID-19 toma la siguiente forma:

$$x_t = 9,7 \times 10^{-5} - 0,18001x_{t-1} + a_t$$

Con esto se demuestra que este tipo de funciones como auto.arima que se basan únicamente en los criterios de información para elegir el modelo que mejor se ajusta no siempre toman la mejor opción. Existen determinadas circunstancias que no tienen en cuenta y ahí radica la importancia de un estudio más profundo.

Por último, para validar el modelo se le aplica una prueba Q de Ljung-Box a la serie de residuos para determinar que no presenta autocorrelaciones. El p valor obtenido para 15 retrasos es 0.1163, con lo que el modelo AR(1) para la ecuación de la media se puede considerar válido.

## Capítulo 4

# Modelos de heterocedasticidad condicional

Hasta el momento todos los modelos tratados se caracterizaban por ser modelos homocedásticos, es decir, tanto la varianza como la varianza condicional permanecían constantes a lo largo del tiempo. Sin embargo, el objetivo de este trabajo es revisar los métodos más utilizados para el análisis de series de tiempo financieras, que se caracterizan por poseer una varianza condicional con alta heterocedasticidad, reflejada, por ejemplo, en los clústeres de volatilidad de la series de retornos. La metodología Box-Jenkins es útil para modelar la media de las series de retornos, las cuales presentan una escasa o nula deriva temporal, pero a la hora de modelar su varianza condicional se necesitan los modelos de heterocedasticidad condicional para obtener resultados más precisos.

La importancia de modelar la volatilidad radica en que permite mejorar la eficiencia en la estimación de los parámetros, obtener mejores ajustes de la serie y una mayor precisión en el pronóstico de futuros valores, además de que la volatilidad se puede entender como un indicador del riesgo y es útil tenerlo presente a la hora de invertir. El gran problema de la volatilidad reside en que no es observable, lo que provoca una mayor dificultad para evaluar el pronóstico de este tipo de modelos.

En este capítulo se van a estudiar algunos modelos de heterocedasticidad condicional utilizados en econometría para modelar la volatilidad de las series de retornos de valores bursátiles, conocidos también como modelos de volatilidad. Como el objetivo del trabajo es aplicarlos a las series financieras, se presentarán relacionándolos directamente con ellas. Las referencias bibliográficas principales usadas para la redacción de este capítulo han sido Tsay (2010), Cryer y Chan (2008) y Shumway y Stoffer (2017).

### 4.1. Estructura del modelo

Las series de retornos, por norma general, presentan un orden bajo o nula correlación pero sí dependencia. Los modelos de volatilidad tratan de representar esa dependencia a través del modelaje de la varianza condicional. Formalmente, la varianza condicional se define como la medida de la desviación de un valor de la serie con respecto a la esperanza condicionada a los valores conocidos en ese instante. Se considera  $F_{t-1}$  como la información de la serie en el instante  $t-1$ , normalmente dada en forma de funciones lineales de retornos pasados. Tomando la serie de retornos logarítmicos,  $\{r_t\}$ , se define la media y la varianza condicional como:

$$\mu_t = E(r_t|F_{t-1}), \quad \sigma_t^2 = Var(r_t|F_{t-1}) = E[(r_t - \mu_t)^2|F_{t-1}] \quad (4.1)$$

Como la correlación de la serie de retornos es muy débil, la ecuación de  $\mu_t$  debe ser simple. Por este motivo, se asume que la media sigue un modelo estacionario ARMA(p,q):

$$r_t = \mu_t + a_t \quad \mu_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-1} \quad (4.2)$$

donde  $a_t$  es una serie de ruido blanco que reproduce la innovación del retorno en el instante  $t$ . Los órdenes  $p$  y  $q$  varían según la serie de retornos que se modele, por ejemplo, en una serie con valores de retornos diarios el orden de correlación entre ellos será mayor que si los valores son mensuales. Ahora combinando la segunda expresión de 4.1 y la primera de 4.2, se tiene la varianza condicional de una serie de retornos:

$$\sigma_t^2 = Var(r_t|F_{t-1}) = Var(a_t|F_{t-1})$$

Por lo tanto, los modelos de heterocedasticidad condicional que se estudiarán a continuación se centran en el comportamiento de  $\sigma_t^2$ . En los modelos anteriores se consideraba que la varianza condicional de las innovaciones o errores era un término uniforme, propiedad que se conoce como homocedasticidad. Sin embargo, en las series de los retornos, como se comentó anteriormente, lo más habitual es que este término varíe de forma distinta, es decir, son series heterocedásticas. Además, esta variación no solo no es uniforme, sino que depende de los valores anteriores de la serie. Con lo cual, se trata de heterocedasticidad condicional auto-regresiva que recibe el nombre de efecto ARCH (del inglés, *Autoregressive conditional heteroscedasticity*). A pesar de ser modelos de heterocedasticidad condicional, su varianza incondicional se sigue considerando constante, es decir, se trata de modelos estacionarios.

## 4.2. Construcción del modelo

No todas las series de retornos de valores bursátiles presentan las mismas características y, por consiguiente, no todas se modelan de la misma forma. La construcción de un modelo para series financieras consta de los siguientes pasos:

1. Se establece una ecuación para la media, normalmente un modelo ARMA o ARIMA.
2. Con los residuos de la ecuación de la media se realiza un test para comprobar si el efecto ARCH es significativo.
3. Si la respuesta es afirmativa, se construye un modelo de heterocedasticidad condicional que se combinará con el modelo para la media.
4. Se valida el modelo.

### 4.2.1. Test del efecto ARCH

Como se comentó anteriormente, el efecto ARCH hace referencia a la heterocedasticidad condicional auto-regresiva. Para comprobar si una serie de tiempo presenta efecto ARCH significativo se utiliza la serie de los residuos de la ecuación de la media al cuadrado. Sin embargo, en este apartado para facilitar la notación se tomarán  $a_t = r_t - \mu_t$  como los residuos. Existen dos test distintos muy utilizados en la práctica que permiten conocer si la serie de tiempo posee efecto ARCH. El primero consiste en aplicar el estadístico Ljung-Box  $Q(m)$  a la serie  $\{a_t^2\}$ , como se indica en McLeod y Li (1983). El funcionamiento de este test se basa, de forma sencilla, en el siguiente contraste de hipótesis:

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0$$

$$H_1 : \exists \rho_k \neq 0 \text{ para algún } k \in \{1, \dots, m\}$$

donde  $m$  hace referencia al orden de retrasos que se tienen en cuenta en la prueba y  $\rho_i$  es el coeficiente de orden  $i$  de la ACF de  $\{a_t^2\}$ . En esencia, el test del efecto ARCH es una prueba de ruido blanco, pero para la serie de los residuos al cuadrado.

El segundo test recibe el nombre de test de los multiplicadores de Lagrange de Engle (1982). Se utilizan de nuevo los cuadrados de los residuos, pero en este caso, primero se realiza la siguiente regresión lineal:

$$a_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m a_{t-m}^2 + \epsilon_t, \quad \text{para } t = m + 1, \dots, T$$

donde  $\epsilon_t$  es el error. El siguiente paso será realizar el contraste de hipótesis:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$$

$$H_1 : \exists \alpha_k \neq 0 \text{ para algún } k \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Es evidente que se trata de una prueba equivalente al F test, por lo que se utilizará el siguiente estadístico de contraste:

$$F = \frac{(SSR_0 - SSR_1)/m}{SSR_1/(T - 2m - 1)}$$

con  $SSR_0 = \sum_{t=m+1}^T (a_t^2 - \hat{\mu})^2$ , donde  $\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T a_t^2$  es la media muestral de los residuos al cuadrado y  $SSR_1 = \sum_{t=m+1}^T \hat{\epsilon}_t^2$ , donde  $\hat{\epsilon}_t^2$  son los residuos de mínimos cuadrados de la regresión lineal anterior. Este estadístico de distribuye asintóticamente como una distribución Chi-cuadrado con  $m$  grados de libertad.

### 4.3. Modelo ARCH

Una vez verificada la heterocedasticidad condicional auto-regresiva de la serie financiera, el siguiente paso será construir un modelo capaz de representar este comportamiento. En esta sección se estudiará el modelo de heterocedasticidad condicional más básico, conocido como modelo ARCH y propuesto por Engle (1982). Se definirá el modelo para un orden general junto sus propiedades más relevantes y se explicará el procedimiento para determinar el orden apropiado para cada serie.

#### 4.3.1. Modelo ARCH general

El modelo ARCH, como se había comentado, se sustenta en que la serie de retornos (y por consiguiente la serie de residuos) presenta una baja o nula correlación pero sí dependencia. Toma la forma de un modelo de regresión cuyas variables explicativas son los cuadrados de los residuos y la variable respuesta es la volatilidad.

**Definición 4.1.** Un modelo ARCH( $m$ ) se define como:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m a_{t-m}^2 \quad (4.3)$$

donde  $\alpha_0 > 0$  y  $\alpha_i \geq 0$  son parámetros que cumplen determinadas condiciones para asegurar que  $\sigma_t^2$  sea finita. En cuanto a  $\epsilon_t$ , se trata de una secuencia de variables independientes e idénticamente distribuidas con media nula y varianza igual a 1, que suelen seguir una distribución normal.

Interpretando el modelo, se comprueba fácilmente que cuanto mayor sea el orden del modelo, mayor será el número de elementos de la serie  $\{a_t\}$  que intervienen para obtener la volatilidad en cada instante y el nuevo elemento de la serie. Al mismo tiempo, como se utilizan los cuadrados de los residuos, el valor de la volatilidad también será mayor al aumentar el orden. Los  $a_t$  se podían interpretar como las innovaciones, por lo que la

tendencia en estos modelos es que grandes variaciones en los valores bursátiles suelen estar seguidas por variaciones altas. Esta característica es similar a las agrupaciones de volatilidad que se observan en las rentabilidades de los activos.

Para comprender en mayor profundidad el modelo ARCH se estudiarán sus principales características. Por simplicidad se trabajará con el modelo ARCH(1), ya que las propiedades se generalizan para cualquier orden. El modelo de orden 1 toma la siguiente forma:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2$$

Para comenzar, la media de  $a_t$  es cero:

$$E(a_t) = E[E(a_t|F_{t-1})] = E[\sigma_t E(\epsilon_t)] = 0 \quad (4.4)$$

utilizando en el último paso que  $E(\epsilon_t) = 0$ .

Además, la varianza de  $a_t$  toma la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} Var(a_t) &= E(a_t^2) - E(a_t)^2 = E(a_t^2) = E[E(a_t^2|F_{t-1})] = \\ &E(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(a_{t-1}^2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

De esta forma, utilizando la propiedad 4.4 y que la serie  $\{a_t\}$  es estacionaria se tiene que  $Var(a_t) = Var(a_{t-1}) = E(a_{t-1}^2)$ . Por tanto, la expresión 4.5 quedaría como  $Var(a_t) = \alpha_0 + \alpha_1 Var(a_t)$ , y se llega a la expresión final:  $Var(a_t) = \alpha_0 / (1 - \alpha_1)$ . Para que la varianza exista, el parámetro  $\alpha_1$  debe cumplir la condición  $0 \leq \alpha_1 < 1$ .

Si se aumenta el orden del modelo o es necesario estudiar otras propiedades que obligan a calcular momentos de mayor orden, requerirá asumir más condiciones sobre los parámetros.

### Debilidades del modelo

El modelo ARCH también presenta una serie de propiedades negativas que reflejan que el modelo no es perfecto y juegan un papel importante a la hora de decidir qué modelo utilizar.

1. Como se ve en la expresión 4.3, el modelo depende de los cuadrados de los elementos de la serie de residuos o innovaciones de los retornos, por lo que una innovación negativa o positiva presenta el mismo efecto sobre la volatilidad. Sin embargo, en el mundo financiero el precio de los activos varían de diferente forma dependiendo de si estas innovaciones tienen signo positivo o negativo.
2. En este mismo apartado se ha comentado algunas de las condiciones que debe cumplir el parámetro  $\alpha_1$  para el modelo ARCH(1) y si el orden del modelo es mayor, el número

de condiciones también se ve incrementado. Por lo tanto, se trata de un modelo muy restrictivo.

3. A pesar de que el modelo proporciona una manera de describir el comportamiento de la volatilidad según el valor de los retornos pasados, éste no es capaz de deparar el origen de sus variaciones.

### 4.3.2. Orden del modelo

Una vez confirmado que la serie de tiempo presenta heterocedasticidad condicional se pasa a determinar el orden del modelo. Para ello se utiliza la función de autocorrelación parcial (PACF), pero a diferencia de utilizarla con la serie de los retornos como en la metodología Box-Jenkins para determinar el orden de los modelos AR, se aplica sobre la serie de los residuos al cuadrado  $\{a_t^2\}$ . Esto se debe a que  $a_t^2$  se puede considerar como un estimador de  $\sigma_t^2$  y, además  $a_t^2$  depende de los valores pasados de la serie  $\{a_t^2\}$  de manera similar a un modelo AR. Entonces, se utiliza la PACF para conocer cuál es el orden de esa dependencia y así obtener el orden del modelo ARCH. La definición de la función de autocorrelación parcial se puede consultar en la subsección 3.3.2.

En la siguiente sección se generaliza este modelo y se llega al modelo GARCH, por lo que la estimación de los parámetros, la validación del modelo y la predicción se presentarán para éste último.

## 4.4. Modelo GARCH

Como se comentó anteriormente, el modelo GARCH, propuesto por Bollerslev (1986), es el más importante a la hora de modelar las series financieras de retornos. En el modelo ARCH(m) se utilizan los cuadrados de las innovaciones de los m instantes anteriores para calcular la volatilidad del instante t, sin embargo, para una mayor precisión a la hora de predecir la volatilidad se ha generalizado el modelo ARCH añadiendo los cuadrados de las volatilidades anteriores. Este modelo recibe el nombre de modelo GARCH, es decir, modelo ARCH Generalizado.

Al igual que en la sección anterior, se presentará el modelo GARCH(m,s) y se comentarán sus propiedades principales. Para terminar, se revisará la construcción del modelo, su validación y las predicciones.

#### 4.4.1. Modelo GARCH(m,s)

Un modelo GARCH(m,s) posee dos parámetros distintos que determinan el orden del modelo. El primero de ellos se corresponde con el orden relativo a la heterocedasticidad condicional, similar al orden de un modelo ARCH, mientras que el segundo parámetro es característico de los modelo GARCH y hace referencia al número de instantes pasados cuya varianza condicional se incluye en el modelo e influye en la obtención del nuevo término. De ahí que reciban el nombre de parámetro ARCH y GARCH respectivamente.

Este modelo se puede aplicar sobre los retornos logarítmicos directamente o, como en el caso del modelo ARCH, sobre la serie de las innovaciones  $\hat{a}_t = r_t - \hat{r}_t$ . En este trabajo se aplicará sobre la serie de las innovaciones, también denominada serie de residuos, ya que las series financieras suelen presentar media prácticamente nula y ambas formulaciones son similares.

**Definición 4.2.** Un modelo GARCH(m,s) se define como:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (4.6)$$

donde  $\{\epsilon_t\}$  denota una secuencia de variables aleatorias e idénticamente distribuidas con media nula y varianza 1. Como antes, se suele asumir que  $\epsilon_t$  sigue una distribución normal o una t de Student. Dado que este modelo posee más parámetros, también se le añaden más condiciones sobre ellos:  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_j \geq 0$  y  $\sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$ . La última restricción es necesaria para que la varianza de  $a_t$  sea finita, mientras que su varianza condicional  $\sigma_t$ , al ser un modelo de heterocedasticidad condicional, varía a lo largo del tiempo. Según aumenta el orden del modelo también aumenta el número de condiciones impuestas sobre sus parámetros. Además, cabe destacar que si el parámetro GARCH es cero, el modelo se reduciría a un modelo ARCH(m), explicado en la sección anterior.

Para comprender mejor las propiedades del modelo es útil realizar una nueva representación mediante la transformación  $\eta_t = a_t^2 - \sigma_t^2$ . Entonces, haciendo el cambio  $\sigma_{t-i}^2 = a_{t-i}^2 - \eta_{t-i}$  en la expresión 4.6, el modelo GARCH se reescribe como

$$a_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) a_{t-i}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^s \beta_j \eta_{t-j} \quad (4.7)$$

donde, en general,  $\eta_t$  no es una secuencia de variables independientes e idénticamente distribuidas. Así, se puede comprobar que la expresión 4.7 del modelo GARCH es equivalente a un modelo ARMA(máx(m,s),s) aplicado sobre la serie de los cuadrados de los residuos. Partiendo de esta relación con el modelo ARMA, se puede calcular la expresión de la media

de un modelo GARCH utilizando la expresión 3.4 correspondiente a la media de un modelo ARMA. El resultado al que se llega es

$$E(a_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i)}$$

siendo el denominador positivo debido a la condición impuesta  $\sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$  que asegura la estacionariedad del modelo.

Además, por la forma que presenta el modelo se puede comprobar de manera sencilla que grandes valores de las innovaciones o de la volatilidad van seguidos por nuevo valores altos de innovaciones, propiedad que cumplen también los modelos ARCH y es característica de las series financieras.

Por último, cabe destacar que los modelos GARCH presentan las mismas debilidades anteriormente citadas para los ARCH, por lo que se omitirán en este apartado.

#### 4.4.2. Orden del modelo

Determinar el orden de un modelo GARCH es complejo, ya que no existe un mecanismo que proporcione el orden exacto que se adecua más a la serie de tiempo que se desea modelar. Sin embargo, existen una serie de pautas que se suelen seguir a la hora de precisar el orden del modelo.

Primero se analiza la serie de los residuos al cuadrado calculando su función de autocorrelación parcial, siguiendo el mismo procedimiento que para un modelo ARCH. Esto nos dará una idea del orden del efecto ARCH que presenta la muestra.

Luego, se comparan modelos con distintos parámetros mediante criterios de información como AIC o BIC, que ayudarán a elegir un modelo sencillo que se ajuste a los datos. Lo más habitual es que el modelo presente órdenes bajos, siendo el modelo más utilizado el GARCH(1,1) seguido por el GARCH(1,2) y GARCH(2,1).

#### 4.4.3. Estimación

Lo más habitual para llevar a cabo la estimación del modelo es utilizar el método de máxima verosimilitud. Se comienza asumiendo la distribución que sigue  $\{\epsilon_t\}$ , siendo las distribuciones normal y t de Student las más utilizadas. Luego, se calcula la función de verosimilitud condicional, es decir

$$L_{a_{m+1}, \dots, a_{m+N}}(\alpha) = f_{\alpha}(a_{m+1}, \dots, a_{m+N} | \alpha, a_1, \dots, a_m)$$

con  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_s)$  los parámetros del modelo a estimar. Se asumen como conocidos los valores iniciales de  $\{\sigma_t^2\}$  o, si la muestra dada tiene un gran tamaño, se

pueden utilizar los  $a_t^2$  como sus estimadores. Además, los valores posteriores se puede obtener evaluando  $\sigma_t^2$  recursivamente. Por último, los parámetros se obtienen simplemente de maximizar la función de verosimilitud condicional.

#### 4.4.4. Validación

Para validar un modelo GARCH se utilizan los residuos estandarizados, denotados como  $\{\tilde{a}_t\}$ . Éstos se definen como:

$$\tilde{a}_t = \frac{a_t}{\sigma_t}$$

Los residuos estandarizados de un modelo válido son una serie de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, por lo que examinando la serie  $\{\tilde{a}_t\}$  se puede comprobar si el modelo GARCH es válido. El proceso de validación es similar al de un modelo ARMA pero utilizando los residuos estandarizados al cuadrado en lugar de simplemente la serie de residuos. Por tanto, se utiliza el estadístico Q de Ljung-Box para verificar que la serie  $\{\tilde{a}_t^2\}$  no presenta autocorrelaciones. También se pueden representar gráficamente las funciones de autocorrelación y comprobar si los coeficientes son nulos. Si las observaciones no son aleatorias, es decir, si existe autocorrelación en la serie  $\{\tilde{a}_t^2\}$ , las predicciones podrían ser menos precisas y el modelo no sería válido.

#### 4.4.5. Predicción

El modelo GARCH también permite realizar predicciones de futuros valores de la volatilidad. El procedimiento es muy similar al de la predicción de un modelo ARMA, debido a la fuerte relación que existe entre ellos, explicada anteriormente. Por simplicidad se estudiará la predicción para el modelo GARCH(1,1), ya que se puede generalizar de forma directa para cualquier orden.

Tomando  $N$  como punto de origen, la predicción a horizonte 1 se denota como  $\hat{\sigma}_{N+1}^2$  y se define de la siguiente manera:

$$\hat{\sigma}_{N+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_N^2 + \beta_1 \sigma_N^2$$

Si la predicción se realiza a un horizonte mayor que 1, se toma la expresión  $a_t^2 = \sigma_t^2 \epsilon_t^2$  y se sustituye en la ecuación del modelo de volatilidad. En este caso, el modelo GARCH(1,1) toma la siguiente forma:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_t^2 + \alpha_1 \sigma_t^2 (\epsilon_t^2 - 1)$$

Teniendo en cuenta que  $E(\epsilon_t^2 - 1 | F_t) = 0$ , la predicción a horizonte 2 es:

$$\hat{\sigma}_{N+2}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \hat{\sigma}_{N+1}^2$$

Repitiendo el mismo procedimiento repetidas veces, se puede llegar a la expresión general de predicción a horizonte  $k$ :

$$\hat{\sigma}_{N+k}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\hat{\sigma}_{N+k-1}^2 \quad (4.8)$$

Ahora, si se realizan sucesivas sustituciones en la ecuación 4.8 se puede llegar a una expresión de la predicción más sencilla, la cual depende únicamente de los parámetros del modelo y de la predicción de la volatilidad a horizonte 1:

$$\hat{\sigma}_{N+k}^2 = \frac{\alpha_0[1 - (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1}]}{1 - \alpha_1 - \beta_1} + (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1}\hat{\sigma}_{N+1}^2$$

Expresando de esta manera la predicción, se puede comprobar que según se aumenta el horizonte de predicción, la volatilidad se estabiliza:

$$\hat{\sigma}_{N+k}^2 \rightarrow \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \quad \text{con } l \rightarrow \infty$$

Se debe cumplir la condición  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ , ya que la volatilidad debe ser positiva. Por tanto, la volatilidad converge hacia la varianza de  $a_t$ , cuyo procedimiento se puede consultar en Tsay (2010, p.133).

## 4.5. Variantes del modelo GARCH

El modelo ARCH y GARCH presentan una serie de debilidades ya comentadas que pueden provocar un mal funcionamiento del modelo. Por este motivo existen diferentes variantes que permiten un mejor ajuste ante ciertas situaciones. En esta sección se presentará el modelo GARCH exponencial y el modelo GARCH integrado.

### 4.5.1. Modelo EGARCH

Una de las debilidades del modelo GARCH es que actúa de igual manera frente a innovaciones positivas y negativas, lo que puede afectar muy negativamente a la hora de modelar series financieras. Para resolver este problema, Nelson (1991) define el modelo GARCH exponencial (EGARCH), que actúa de forma asimétrica dependiendo del signo de las innovaciones.

El primer paso será presentar las innovaciones ponderadas, que serán las encargadas de proporcionarle al modelo esa asimetría según el signo. Su definición es la siguiente:

$$g(\epsilon_t) = \theta\epsilon_t + \gamma[|\epsilon_t| - E(|\epsilon_t|)]$$

con  $\theta$  y  $\gamma$  constantes reales. Se cumple que la esperanza de  $\epsilon_t$  y  $|\epsilon_t| - E(|\epsilon_t|)$  son nulas, por lo que  $E[g(\epsilon_t)] = 0$ . Para poder observar de forma más sencilla la asimetría de  $g(\epsilon)$  según el signo de las innovaciones se reescribe la ecuación anterior:

$$g(\epsilon_t) = \begin{cases} (\theta + \gamma)\epsilon_t - \gamma E(|\epsilon_t|) & \text{si } \epsilon_t \geq 0 \\ (\theta - \gamma)\epsilon_t - \gamma E(|\epsilon_t|) & \text{si } \epsilon_t < 0 \end{cases}$$

Una vez presentada las innovaciones ponderadas, es hora de definir el modelo EGARCH para un orden general.

**Definición 4.3.** El modelo EGARCH(m,s) se define como:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t \quad \ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \frac{1 + \beta_1 B + \dots + \beta_{s-1} B^{s-1}}{1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_m B^m} g(\epsilon_{t-1}) \quad (4.9)$$

con  $\alpha_0$  una constante que representa la media incondicional de  $\ln(\sigma_t^2)$  y B el operador de retardo actuando sobre  $g(\epsilon_{t-1})$  de forma que  $Bg(\epsilon_t) = g(\epsilon_{t-1})$ . Además, tanto el numerador como el denominador del modelo son dos polinomios sin raíces en común y todas ellas fuera de la circunferencia unidad. El nombre de modelo GARCH exponencial proviene de que para obtener la ecuación de la volatilidad se aplica la función exponencial sobre la ecuación de la derecha de la expresión 4.9.

Sin embargo, en la aplicación práctica se utiliza el software R, el cual emplea una expresión alternativa del modelo EGARCH. A continuación, se incluye esta definición del modelo para evitar confusiones a la hora de aplicarlo más adelante.

**Definición 4.4.** La expresión alternativa del modelo EGARCH(m,s) es:

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^s \alpha_i \frac{|a_{t-i}| + \gamma_i a_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^m \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2) \quad (4.10)$$

El modelo EGARCH además de actuar de manera asimétrica ante innovaciones positivas y negativas, también permite que los parámetros del modelo puedan ser negativos. Esta libertad hace posible que las estimaciones sean más precisas. En Nelson (1991) se pueden encontrar más ventajas respecto al modelo GARCH y sus características desarrolladas.

#### 4.5.2. Modelo GARCH Integrado

Del mismo modo que los modelos ARIMA se construyen cuando el modelo ARMA presenta raíces unitarias, Engle y Bollerslev (1986) consideraron el modelo GARCH integrado (IGARCH) como variante del modelos GARCH cuándo éste contenga una raíz unitaria en el polinomio autorregresivo de la representación 4.7 del modelo GARCH. Esto ocurre cuando se cumple la condición  $\sum_{i=1}^m \alpha_i + \sum_{j=1}^s \beta_j = 1$  en un modelo GARCH(m,s). A continuación, se define el modelo IGARCH(1,1).

**Definición 4.5.** El modelo IGARCH(1,1) se define como:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 + \beta_1) a_{t-1}^2 \quad (4.11)$$

La propiedad más importante de este tipo de modelos es la persistencia en la volatilidad, es decir, el efecto de una variación en la volatilidad persiste a lo largo del tiempo sin terminar de desaparecer nunca. Por este motivo, la predicción de la volatilidad de un IGARCH se trata de una recta con pendiente  $\alpha_0$ , como se indica en Tsay (2010, p.141). Además, en esta misma publicación también se explica que la varianza incondicional no está definida.

## 4.6. Aplicación práctica II

En la primera parte de la aplicación práctica se establecieron los modelos para la media de las series de retornos de Iberdrola S.A. anterior y posterior a la llegada del COVID-19 a España. Ahora, una vez expuestos los modelos de heterocedasticidad condicional, se aplican los nuevos contenidos en ambas series. El propósito es estudiar el comportamiento de la volatilidad en dos etapas muy diferenciadas en el marco económico debido a la crisis generada por la pandemia y contemplar si se aprecia la diferencia. Al analizar las series por separado se podrá comprobar si realmente las consecuencias derivadas del virus afectaron en los valores bursátiles, relacionando la volatilidad con el riesgo de inversión de los activos.

### 4.6.1. Período anterior al COVID-19

Para seguir la misma estructura a lo largo del trabajo se tratará primero la serie de retornos de Iberdrola S.A. anterior al coronavirus. En el apartado 3.6.1 se estableció que el modelo que mejor se ajustaba a la ecuación de la media era un ARMA(0,0). A continuación, se determinará un modelo para la volatilidad utilizando las herramientas del análisis de series de heterocedasticidad condicional estudiadas en este capítulo.

Antes de comenzar directamente con la búsqueda de un modelo, se debe comprobar si la serie de retornos presenta heterocedasticidad condicional auto-regresiva, lo que se conoce como efecto ARCH, para saber si es posible modelarla mediante uno de los modelos estudiados. Para ello se aplican los test del efecto ARCH presentados en el apartado 4.2.1 de este mismo trabajo mediante la función `arch.test` del paquete `aTSA`. Los resultados del test son los siguientes:

##	order	PQ	p.value	LM	p.value
## [1,]	4	11.43931	0.02204611	493.4513	0.000000e+00
## [2,]	8	17.04496	0.02964426	243.0940	0.000000e+00
## [3,]	12	22.42628	0.03301082	147.7525	0.000000e+00
## [4,]	16	22.64220	0.12363918	108.7281	3.330669e-16

La primera columna de los resultados del test especifica el orden de retrasos que se tiene en cuenta en la prueba. Las columnas PQ y LM son el valor del estadístico de los dos tipos distintos de test, la prueba de Ljung-Box y el test de los multiplicadores de Lagrange respectivamente, y a su derecha se encuentra el p-valor de cada uno. Como se observa en la salida del test, con la prueba de los multiplicadores de Lagrange se rechaza la hipótesis nula para cualquier orden y se asumiría la existencia de heterocedasticidad condicional. Con la prueba Q de Ljung-Box la hipótesis nula se rechaza hasta orden 12 con un nivel de significación del 5%. Por tanto se concluye que la serie de retornos presenta heterocedasticidad condicional auto-regresiva.

Además, analizando las funciones de autocorrelación de la serie de los cuadrados de los retornos, representadas en la Figura 4.1, se comprueba que presentan coeficientes significativos, ratificando la existencia de heterocedasticidad condicional.

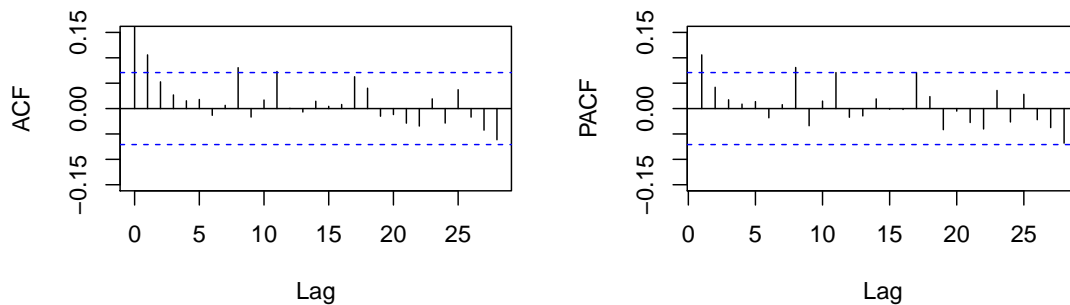


Figura 4.1: Estudio de las funciones de autocorrelación de la serie de los cuadrados de los retornos de Iberdrola S.A. anterior al COVID-19. En la gráfica de la izquierda se representa la ACF muestral y en la gráfica de la derecha la PACF muestral.

Una vez que se ha confirmado la heterocedasticidad condicional autorregresiva de la serie de retornos, se comienza a buscar un modelo para la volatilidad. Para este proceso se utilizó el paquete rugarch del software R. Como las funciones de autocorrelación de la Figura 4.1 no aportan información suficiente para determinar el orden de un modelo

GARCH, se tomará el modelo cuyos coeficientes sean significativos y presente menor AIC. Utilizando este criterio y luego de probar distintos modelos con diferentes órdenes, el modelo GARCH que mejor se ajusta es el GARCH(0,2). En el siguiente cuadro se muestra la construcción del modelo, donde se especifican los órdenes tanto para la ecuación de la media como para la ecuación de la volatilidad, y los parámetros estimados del modelo.

```
prop.modelo = ugarchspec(variance.model = list(model = 'sGARCH',
garchOrder = c(0 , 2)), mean.model = list(armaOrder = c(0 , 0)))

modelo.garch= ugarchfit(spec = prop.modelo , data = retornos.ts,
solver = 'solnp')

modelo.garch@fit$matcoef

##           Estimate   Std. Error   t value   Pr(>|t|)
## mu      7.568152e-04 3.786806e-04   1.9985581 0.04565618
## omega  1.098496e-07 4.204442e-07   0.2612704 0.79388403
## beta1  4.041514e-01 4.518607e-04  894.4158607 0.00000000
## beta2  5.946755e-01 4.680246e-04 1270.6073723 0.00000000
```

Como se puede ver, todos los parámetros son significativos excepto el omega, que se corresponde con el parámetro  $\alpha_0$  de la ecuación 4.6, el cual se puede considerar nulo. Por tanto, el modelo GARCH(0,2) ajustado a la serie de retornos de Iberdrola S.A. de los tres años naturales anteriores al coronavirus es:

$$r_t = 7,6 \times 10^{-4} + a_t \quad \sigma_t^2 = 0,4042\sigma_{t-1}^2 + 0,5947\sigma_{t-2}^2$$

Antes de aceptar el modelo se requiere validarlo. Para ello se toma la serie de residuos y se estandariza, luego se le aplica la prueba Q de Ljung-Box sobre esta serie al cuadrado para comprobar que no presenta correlaciones y que se trata de ruido. El proceso es el siguiente:

```
residuos<- ts(modelo.garch@fit$residuals)
sigma<-ts(sigma(modelo.garch))
residuos.estandarizados<- residuos/sigma
Box.test(residuos.estandarizados^2, type="Ljung-Box", lag=20, fitdf=0)

##
## Box-Ljung test
```

```
##
## data:  residuos.estandarizados^2
## X-squared = 26.22, df = 20, p-value = 0.1587
```

A partir del p-valor de la prueba se podría concluir que la serie de residuos estandarizados al cuadrado es una serie de ruido blanco y el modelo para la volatilidad válido. Aún así y a pesar de que el modelo cumple todas las condiciones teóricas para que sea considerado un modelo válido, la suma de sus parámetros es prácticamente 1 con lo que podría estar en la frontera entre ser o no ser estacionario y, por tanto, podría ser un modelo inestable.

Antes de tratar los datos del segundo período, queda examinar las variantes del modelo GARCH por si alguno de ellos presenta un mejor ajuste para la serie de retornos. Se usa como primera referencia a la hora de comparar los modelos los criterios de información AIC y BIC. De esta manera, el mejor modelo para la volatilidad sería el EGARCH(1,1) cuya construcción y parámetros están representados en el siguiente cuadro.

```
prop.modelo = ugarchspec(variance.model = list(model = 'eGARCH',
garchOrder = c(1 , 1)) , mean.model = list(armaOrder = c(0 , 0)))

modelo.egarch= ugarchfit(spec = prop.modelo, data = retornos.ts,
solver = 'solnp')

modelo.egarch@fit$matcoef

##           Estimate   Std. Error   t value   Pr(>|t|)
## mu          0.0006272986 0.0003712175   1.689841 0.0910583123
## omega      -0.7762140313 0.0281067622  -27.616629 0.0000000000
## alpha1    -0.0713141008 0.0237082757   -3.007983 0.0026298746
## beta1       0.9144086614 0.0030859222  296.316179 0.0000000000
## gamma1     0.1122262960 0.0330116229    3.399599 0.0006748463
```

En este caso, todos los parámetros del modelo son significativos. En cuanto al AIC se pasa de  $-6,2703$  del GARCH(0,2) a  $-6,3008$  del EGARCH(1,1). La mejora del AIC es mínima y no sería un motivo suficiente para elegir el modelo exponencial por encima del GARCH. Sin embargo, se va hacer un análisis más extenso teniendo presente otras características como la estimación de la volatilidad, ya que con la asimetría en las innovaciones es probable que el modelo exponencial realice una mejor estimación y predicción. Como en R el modelo GARCH exponencial se construye mediante la expresión alternativa, el modelo

EGARCH(1,1) ajustado a la serie se define como:

$$r_t = 6,3 \times 10^{-4} + a_t, \quad \ln(\sigma_t^2) = -0,7762 - 0,0713 \frac{|a_{t-1}| + 0,1122a_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + 0,9144 \ln(\sigma_{t-1}^2) \quad (4.12)$$

Para validar el modelo se podría hacer de nuevo con la prueba Q de Ljung-Box, pero para practicar distintos métodos se realizará mediante las funciones de autocorrelación. Se busca comprobar si la serie de los cuadrados de los residuos estandarizados es una serie de ruido y, por tanto, no presentaría correlaciones de ningún orden. Analizando la Figura 4.2 se puede afirmar que el modelo es válido, ya que ningún coeficiente de la función de autocorrelación y de autocorrelación parcial es significativo.

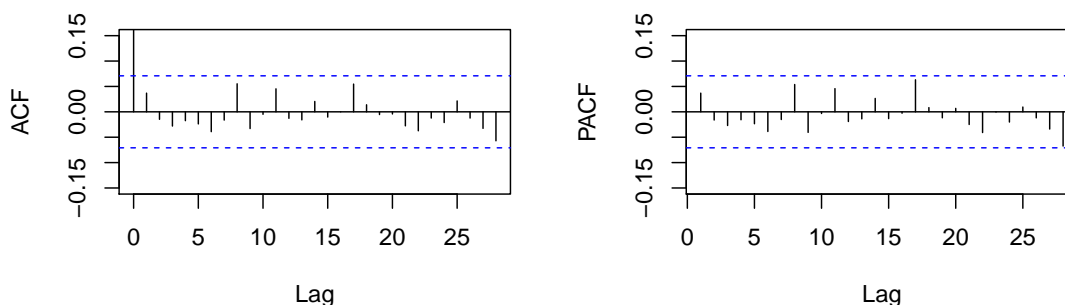


Figura 4.2: Funciones de autocorrelación correspondientes a la serie de los cuadrados de los residuos estandarizados del modelo GARCH(0,2). La función de autocorrelación es la gráfica de la izquierda y la función de autocorrelación parcial es la gráfica de la derecha

En este punto, se tiene dos modelos válidos y con un AIC prácticamente idéntico. Aplicando ambos modelos sobre los datos de la serie de retornos se obtiene la estimación de la volatilidad que realiza cada uno de ellos, representados en la Figura 4.3. En un primer vistazo se puede observar una diferencia abismal entre las dos estimaciones. La de la izquierda, correspondiente al modelo GARCH(0,2), describe a la varianza con una tendencia decreciente y casi lineal. Esto se aleja de lo común en las series financieras de retornos, donde lo más habitual es que la volatilidad fluctúe y existan clusters o agrupamientos. Por otro lado, la estimación del EGARCH(1,1) presenta grandes fluctuaciones con grupos donde la volatilidad es alta y grupos con baja volatilidad, con lo que se asemeja más a lo habitual en estos casos. Comparando ambas estimaciones se confirman las sospechas comentadas anteriormente sobre el modelo GARCH y la mala estimación debe ser provocada porque el modelo se encuentra en el límite entre ser y no ser estacionario, siendo un modelo ines-

table. Entonces, se concluye que el modelo que mejor se ajusta a los retornos de Iberdrola S.A en la etapa anterior al coronavirus es el EGARCH(1,1) definido en la ecuación 4.12. Además, esto pone en evidencia que a pesar de que los parámetros del modelo cumplan las condiciones y los test sobre los residuos lo validen, es de suma importancia realizar un examen más profundo y comprobar cómo realmente se comporta con los datos.

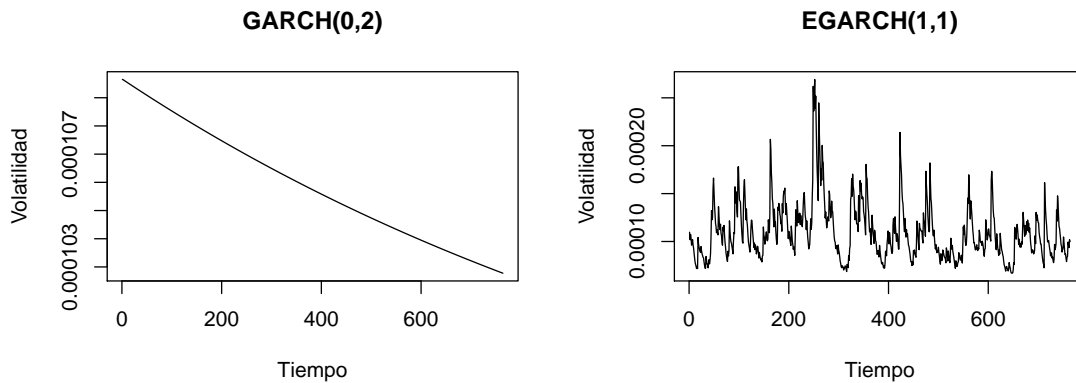


Figura 4.3: Comparación de las estimaciones de la volatilidad realizadas por los modelos GARCH(0,2) y EGARCH(1,1) en los 3 años naturales anteriores al COVID-19. En la izquierda se encuentra la estimación del GARCH(0,2) y en la derecha la estimación del EGARCH(1,1).

#### 4.6.2. Período coetáneo al COVID-19

Para finalizar con la práctica únicamente queda analizar la serie de retornos correspondiente a la etapa coetánea al COVID-19 y comentar sus características teniendo presente los resultados de la etapa anterior. El contexto económico del período de tiempo que abarcan estos datos es muy distinto al anterior. La llegada de la pandemia provocó grandes pérdidas económicas en todas las empresas que se traducen con bajadas bruscas de los valores bursátiles. Estas circunstancias deberían presenciarse no sólo en la serie de los valores de cierre, sino también en la volatilidad de la serie de los retornos.

La estructura del análisis será similar a la sección anterior, por lo que se comenzará de nuevo con el test para comprobar la existencia de heterocedasticidad condicional en la serie de retornos. Como en la primera parte de la práctica se había establecido el modelo AR(1) para la media de la serie, el test del efecto ARCH se realiza sobre la serie de los residuos de este modelo. Los resultados de la prueba Q y del test de los multiplicadores de Lagrange se encuentran en el siguiente cuadro.

##	order	PQ	p.value	LM	p.value
## [1,]	4	86.65963	0	159.85714	0.000000e+00
## [2,]	8	102.91617	0	68.77639	2.609912e-12
## [3,]	12	119.44346	0	37.48318	9.560282e-05
## [4,]	16	120.38134	0	26.03679	3.763777e-02

Según el test de Ljung-Box, el resultado es más concluyente que en la etapa anterior a favor de considerar la existencia de efecto ARCH. Lo mismo se obtiene mediante el test de Engle basado en los multiplicadores de Lagrange. Fijándose únicamente en los p valores de ambos test y comparándolos con los de la anterior etapa da la sensación de que la heterocedasticidad condicional auto-regresiva es más fuerte que en la serie de los retornos de la etapa anterior al COVID-19. Representando las funciones de autocorrelación de la serie de los cuadrados de los retornos se puede comprobar visualmente si realmente el efecto ARCH es mayor.

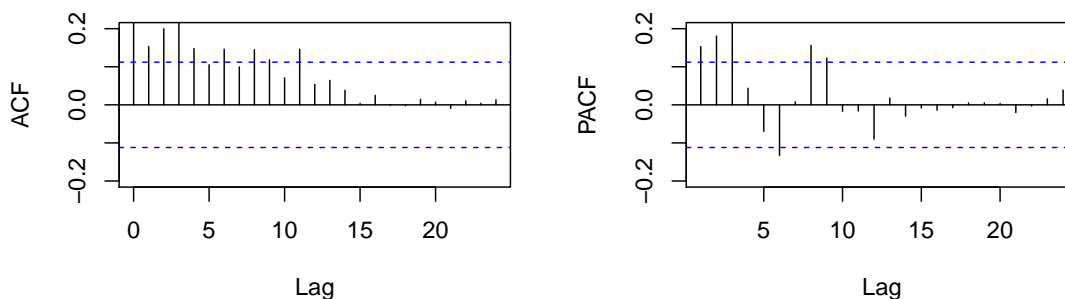


Figura 4.4: Análisis de las funciones de autocorrelación de la serie de los cuadrados de los retornos de Iberdrola S.A. en la etapa del COVID-19. En la gráfica de la izquierda se representa la ACF muestral y en la gráfica de la derecha la PACF muestral.

Efectivamente los coeficientes de correlación y correlación parcial de los cuadrados de los retornos de este período son más significativos que los anteriores. Esto se traduce en que la varianza de cada instante presenta una mayor dependencia respecto a los términos de los instantes anteriores. Puede ser una consecuencia de la pandemia, ya que fruto de la incertidumbre y el miedo de los inversores se crean períodos de grandes fluctuaciones y períodos de calma que se reflejan en la varianza condicional.

Para modelar esta heterocedasticidad condicional auto-regresiva se busca un modelo GARCH que se ajuste a los datos. A la hora de elegir el mejor modelo se vuelven a utilizar

los criterios de información mencionados. Hay que tener en cuenta que en la primera parte de la práctica se tomó como modelo para la media de esta serie de retornos el modelo AR(1). Con esto y luego de construir modelos de distintos órdenes, el modelo óptimo es la combinación AR(1)-GARCH(1,1), siendo el primero de ellos para la media y el segundo para la volatilidad. La construcción del modelo y las estimaciones de sus parámetros se encuentran representadas en la siguiente tabla.

```
prop.modelo = ugarchspec(variance.model = list(model = 'sGARCH',
garchOrder = c(1 , 1)), mean.model = list(armaOrder = c(1 , 0)))

modelo.garch= ugarchfit(spec = prop.modelo , data = retornos.ts,
solver = 'solnp')

modelo.garch@fit$matcoef

##           Estimate   Std. Error   t value   Pr(>|t|)
## mu           6.072182e-04 6.839448e-04  0.8878175 3.746389e-01
## ar1          -9.119139e-02 6.354653e-02 -1.4350333 1.512776e-01
## omega        1.124665e-05 4.281166e-06  2.6270054 8.613996e-03
## alpha1       1.774926e-01 3.005736e-02  5.9051283 3.523725e-09
## beta1        7.882758e-01 3.380168e-02 23.3206080 0.000000e+00
```

Lo más destacado es que el parámetro de la ecuación de la media pasa a ser menos significativo cuando se considera la combinación de los dos modelos. El p valor del parámetro teniendo en cuenta únicamente el modelo de la media era aproximadamente de 0,0014 y al considerar ambos modelos el p valor es 0,1523. Esto puede deberse a que el error estándar del parámetro se calcula de manera global teniendo en cuenta los demás parámetros, y en la combinación de modelos el número de parámetros aumenta, lo que puede repercutir en su nivel de significación. Sin embargo, como en la primera parte de la práctica se analizó de manera individual y se concluyó que sí aportaba información, se seguirá teniendo en cuenta.

Una vez aclarado esto, se realiza la validación del modelo utilizando nuevamente el test Q de Ljung-Box aplicado sobre la serie de residuos estandarizados al cuadrado.

```
Box.test(residuos.estandarizados^2, type="Ljung-Box", lag=10, fitdf=0)

##
## Box-Ljung test
```

```
##  
## data:  residuos.estandarizados^2  
## X-squared = 7.4048, df = 10, p-value = 0.6868
```

El resultado del test es claro, no existen evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula y se acepta que no existen autocorrelaciones. Por tanto, la serie de residuos estandarizados al cuadrado se trataría de ruido y el modelo AR(1)-GARCH(1,1) es válido. Así pues, para comprobar el funcionamiento del modelo se representa en la Figura 4.5 el ajuste de la volatilidad correspondiente a los datos de este período.

Como se puede ver en la gráfica de la volatilidad, la llegada del COVID-19 a España afectó enormemente en la volatilidad de los retornos. En el anterior período, la volatilidad fluctuaba alrededor del 0,0001 llegando a un valor máximo de 0,00027, pero en el inicio de la pandemia alcanza un máximo de 0,00556. Esto es fruto de lo explicado anteriormente, el confinamiento y la parálisis de gran parte de las actividades económicas crea una caída de los valores bursátiles que dan lugar a movimientos de los inversores motivados por el miedo y la incertidumbre provocando grandes fluctuaciones en los retornos. Sin embargo, alrededor del segundo mes, la volatilidad comienza a estabilizarse en torno a valores más cercanos a los del primer período. Se realiza la representación de esta fase más estable en la gráfica inferior de la Figura 4.5 para que la escala de la gráfica se adecue mejor y se pueda ver con más detalle la serie de la volatilidad. En ella se observan los característicos clústeres de volatilidad que identifican a las series financieras. A pesar de que los valores son más cercanos a los de la etapa anterior, su media está próxima al 0,0002, es decir, es prácticamente el doble. Por lo tanto, se puede concluir que los activos financieros de Iberdrola S.A. presentan un riesgo de inversión mayor desde la llegada del COVID-19 a España o, visto de otra manera, los retornos muestran cambios más bruscos en este segundo período.

Para finalizar el trabajo se lleva a cabo una predicción de la serie de retornos de esta última etapa con el modelo AR(1)-GARCH(1,1), por medio de la función `ugarchforecast` del paquete `rugarch`. Para ver de forma más detallada como se comporta la predicción de este modelo se representa en dos gráficas, una correspondiente a la predicción de la media y otra a la predicción de la volatilidad. Dado que el modelo para la media es muy simple, en la gráfica superior de la Figura 4.6 se observa cómo la predicción se estabiliza en la media de la serie de forma muy rápida. Por este motivo los modelos ARMA dedicados a la media de las series de retornos no presentan un gran valor práctico pero sí teórico a la hora de comprender los modelos de la volatilidad. Examinando la gráfica inferior de la Figura

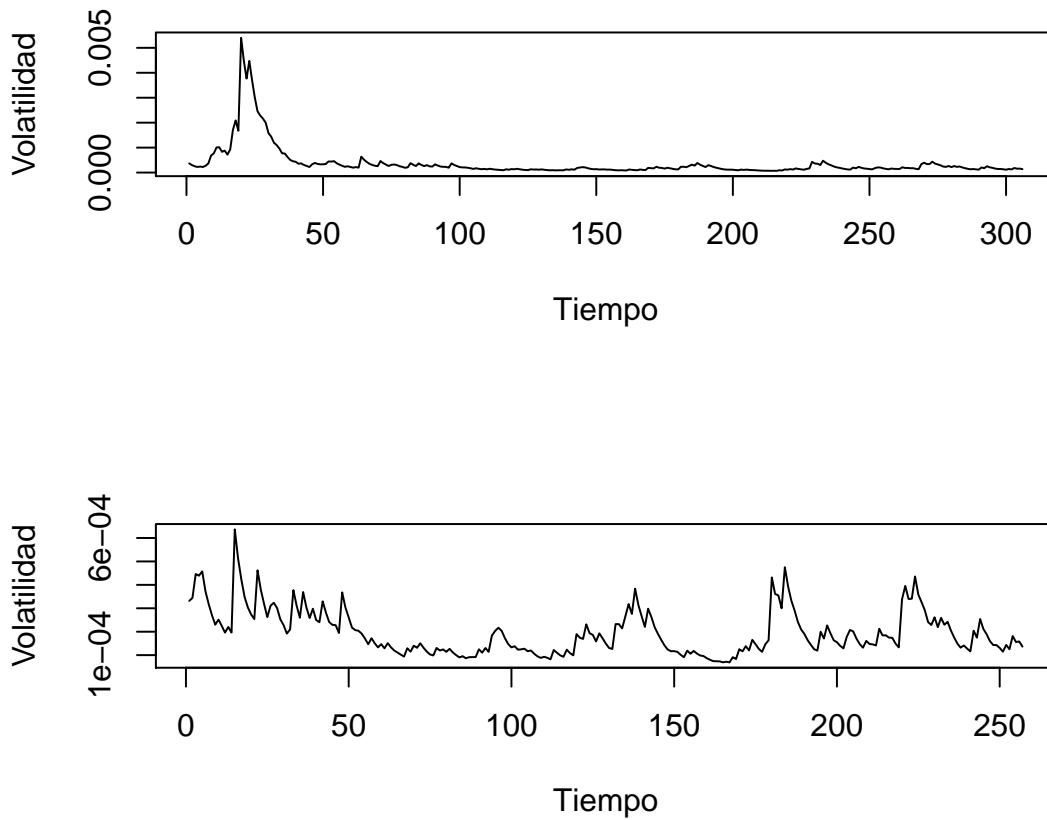


Figura 4.5: Estimación de la volatilidad de la serie de retornos de Iberdrola S.A. en la etapa coetánea al COVID-19 realizada por el modelo combinado AR(1)-GARCH(1,1). En la parte superior se representa la estimación a lo largo de toda la serie, mientras que en la parte inferior está representada la estimación excluidos los 50 primeros datos correspondientes a los dos primeros meses de inestabilidad.

4.6 se comprueba que el resultado es distinto al anterior. La volatilidad crece rápidamente en el primer paso y luego se estabiliza. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurría con la media que se estabilizaba en un valor fijo correspondiente a la media muestral de la serie, la volatilidad sigue creciendo lentamente de forma estable y casi lineal. Por tanto, la predicción que realiza el modelo elegido para estos datos es que la volatilidad será mayor según crezca el horizonte de predicción, es decir, cuanto más se aleje del instante de partida.

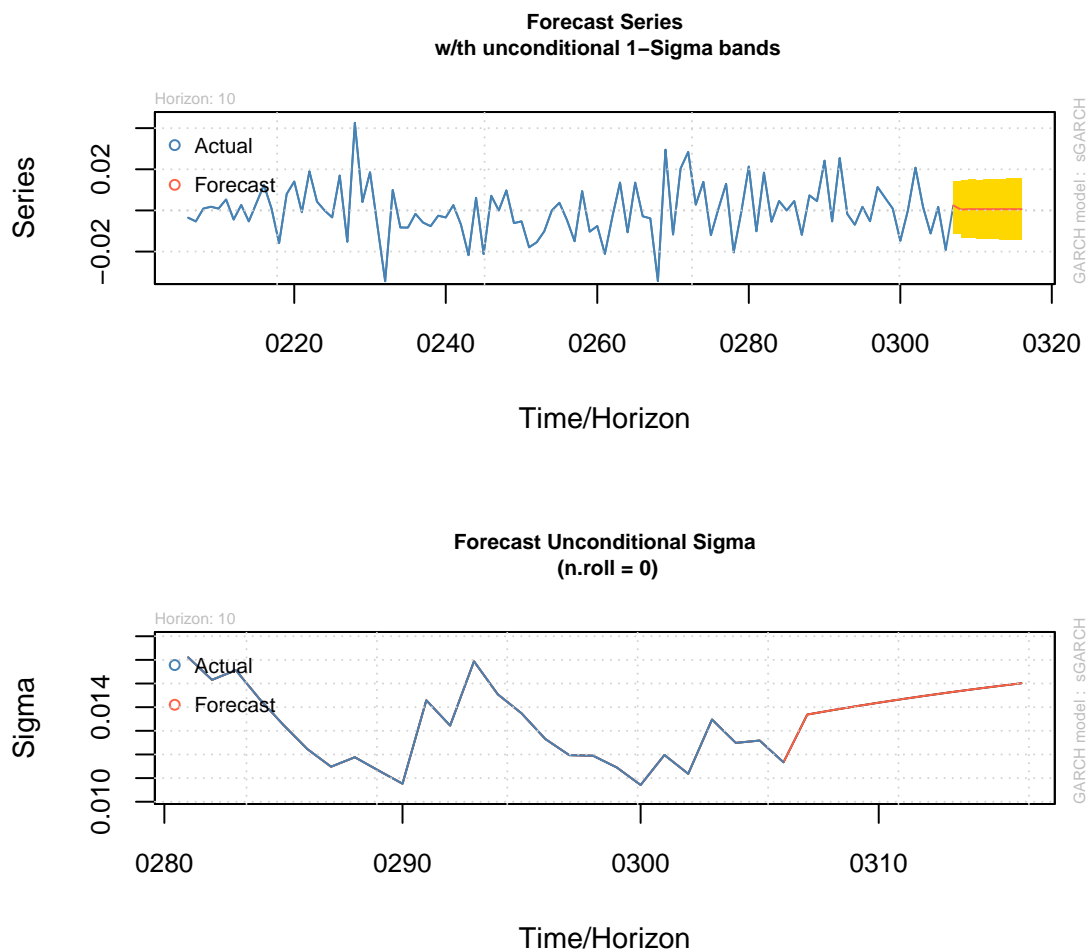


Figura 4.6: Predicción del modelo AR(1)-GARCH(1,1) sobre la serie de retornos de Iberdrola S.A. en la etapa coetánea al COVID-19. La gráfica superior representa la predicción de la media y la gráfica inferior la predicción de la volatilidad

# Bibliografía

- [1] Bollerslev, T., *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, Journal of Econometrics **31** (1986), 307–327.
- [2] Box, G.E.P. and Jenkins, G.M., *Time series analysis, forecasting, and control*, Holden-Day, Oakland, 1970.
- [3] Cryer, J.D. and Chan, K.S., *Time Series Analysis With Applications in R*, 2nd ed., Springer, New York, 2008.
- [4] Engle, R. F., *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflations*, Econometrica **50** (1982), 987–1007.
- [5] Engle, R.F. and Bollerslev, T., *Modelling the Persistence of Conditional Variance*, Econometric Reviews **5** (1986), 1–50.
- [6] NASDAQ. Iberdrola S.A. (IBDSF) [Stock quote]. Extraído de la página web <https://finance.yahoo.com/quote/IBE.MC> el 30 de abril de 2021.
- [7] Nelson, D. B., *Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach*, Econometrica **59** (1991), 347–370.
- [8] Shapiro, S.S. and Wilk, M.B., *An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples)*, Biometrika **52** (1965), 591–611.
- [9] Shumway, R. H. and Stoffer, D. S., *Time Series Analysis and Its Applications*, 4th ed., Springer, New York, 2017.
- [10] Tsay, R.S., *Analysis of financial time series*, 3rd ed., John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, 2010.
- [11] Tsay, R.S. and Tiao, G. C., *Consistent estimates of autoregressive parameters and extended sample autocorrelation function for stationary and nonstationary ARMA models*, Journal of the American Statistical Association **79** (1984), 84–96.