FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Teoría do grao: introdución e aplicacións

Rodríguez García, Alba

Curso 2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Teoría do grao: introdución e aplicacións

Rodríguez García, Alba

Xullo 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: Teoría do grao: introdución e aplicacións
Breve descrición do contido
Son numerosos os problemas da Análise Matemática que se poden reducir ao estudo da existencia de solución dunha ecuación do tipo $f(x) = p$ nun determinado espazo. Neste aspecto, a teoría do grao resulta ser unha ferramenta de gran utilidade. En esencia, o grao asigna a unha determinada función, f, un número enteiro, $\mathrm{d}(f, \cdot, \cdot)$, que dá información acerca do número de ceros que dita aplicación ten. Neste traballo comezaremos desenvolvendo esta teoría en $\mathbb{R}^n$, introducindo o que se coñece como Grao de Brouwer, para pasar posteriormente a espazos máis abstractos de dimensión infinita, chegando finalmente ao Grao de Leray-Schauder.

Índice xeral

Resumo

A teoría do grao é unha ferramenta fundamental nas matemáticas que nos da información acerca do número de solucións que ten unha ecuación. A idea consiste en que o chamado grao topolóxico denota un número que está estreitamente relacionado co número de ceros dunha función.

Este traballo pretende estudar o comportamento e propiedades do grao topolóxico, así como certas aplicacións deste. As propiedades do grao topolóxico permitirannos demostrar o Teorema do punto fixo, que á súa vez será de gran utilidade para resolver certos problemas da Análise Matemática. Comezaremos pola definición de grao para espazos finitos, o chamado grao de Brouwer. Ademais, estudaremos as súas propiedades principais e diversas aplicacións. Posteriormente estenderemos este concepto a espazos de dimensión infinita, o que se denota como grao de Leray- Schauder. Neste caso, as propiedades serán froito dunha adaptación das vistas para o grao de Brouwer pero para dimensión infinita.

Abstract

Degree theory is a fundamental tool in mathematics that gives us information about the number of solutions of an equation. That is, we call topological degree to a number that is closely related to the number of zeros of a function.

The aim of this work is study the behavior and properties of the topological degree, as well as certain applications of it. These properties will allow us to prove the fixed point Theorem, which will be very useful for solving some problems of Mathematical Analysis. We are going to start with the definition of degree for finite spaces, that is called Brouwer's degree. In addition, we are going to study its main properties and various applications. Later we are going to extend this concept to spaces of infinite dimension, which is known as Leray-Schauder's degree. In this case, the properties are going to be the result of an adaptation of the properties of Brouwer's degree to infinite dimension.

Introdución

Existen certos problemas da rama da Análise Matemática que resultan difíciles de resolver coas ferramentas clásicas, como por exemplo o Teorema da bola peluda. O motivo é que son problemas de natureza topolóxica e non analítica.

A teoría do grao xurde para cubrir estas necesidades. Trátase dunha ferramenta de carácter cuantitativo, pois permítenos limitar o número de solucións dunha ecuación da forma $f(x) = b$ mediante un número chamado grao topolóxico, $\mathrm{d}(f, \Omega, b)$, que dependerá da función, f, do conxunto no que está definida a función, Ω, e da imaxe na que se queira estudar o número de solucións, b. En particular, será de gran utilidade traballando con ecuacións diferenciais.

O introdutor do concepto de grao topolóxico foi Luitzen Egbertus Jan Brouwer, entre os anos 1910 e 1912, dando a primeira definición de grao para función continuas en espazos de dimensión finita. Construíuno dende o punto de vista topolóxico, empregando topoloxía alxébrica (este enfoque pódese consultar en [4]). Cabe destacar que houbo antecedentes neste campo como por exemplo Gauss, Liouville, Cauchy, Kronecker, Poincaré, Hadamard,... que traballaron con ideas próximas. Pero a primeira definición oficial de grao foi dada por Brouwer e en consecuencia déuselle o nome de grao de Brouwer.

En 1934 Jean Leray e Juliusz Schauder realizaron a extensión máis importante do grao de Brouwer a espazos de dimensión infinita para certas funcións (perturbacións compactas da identidade) definidas sobre un subconxunto aberto e limitado dun espazo de Banach arbitrario. A idea consistía en aproximar as funcións mediante transformacións de rango finito e así aplicar a teoría do grao de Brouwer para un espazo de Banach de dimensión finita. Cabe destacar que se pode definir o grao para unha clase de funcións máis xerais que as perturbacións compactas da identidade, as chamadas transformacións de Leray-Schauder xeneralizadas. Este último caso, que non se vai estudar neste traballo, pódese consultar en [11].

En 1951, Nagumo presentou un novo enfoque da teoría do grao, definindo o grao topolóxico dende o punto de vista analítico. Este será o enfoque que seguiremos ao longo deste traballo.

Con todo isto, ten sentido preguntarse en que se diferencian os diversos métodos de construción do grao e se logran chegar ao mesmo resultado. A diferenza clara está na base empregada, pois, por exemplo o grao construído por Brouwer parte dos coñecementos topolóxicos e o grao de Nagumo dos analíticos. Agora ben, é lóxico pensar que unha correcta construción do grao debería levar ambos procedementos ao mesmo resultado. Efectivamente, a construción do grao mediante enfoques diferentes sempre nos leva a un resultado equivalente. Isto podémolo garantir grazas a Brouwer, que deu unha caracterización axiomática do grao, de xeito que tan só existe unha aplicación que cumpre todos os axiomas (recollida en [2]). En efecto:

Sexa M un conxunto dado por

$$M = \{(f, \Omega, b) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto e limitado } f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n \text{ continua e } b \notin f(\partial\Omega) \text{ un valor regular}\},$$

entón existe unha única aplicación $\mathrm{d} : M \to \mathbb{Z}$ chamada grao de Brouwer que satisfai as seguintes propiedades:

1. Se $b \in \Omega$ entón $\mathrm{d}(\mathrm{Id}, \Omega, b) = 1$, sendo Id a aplicación identidade.

2. Se Ω_1 e Ω_2 son subconxuntos abertos disxuntos de Ω e $b \notin f\left(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)\right)$ entón
$$\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \mathrm{d}(f, \Omega_1, b) + \mathrm{d}(f, \Omega_2, b).$$

3. Se $\mathrm{H} : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ é continua e $b \notin \mathrm{H}(\partial\Omega, t)$ para todo $t \in [0,1]$ entón $\mathrm{d}(\mathrm{H}(\cdot, t), \Omega, b)$ é independente de t.

4. Se $\mathrm{d}(f, \Omega, b) \neq 0$ entón existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = b$.

5. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$ entón
$$\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \mathrm{d}(g, \Omega, b).$$

6. Se $\Omega_1 \subset \Omega$ é un subconxunto aberto e $b \notin f\left(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1\right)$ entón
$$\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \mathrm{d}(f, \Omega_1, b).$$

7. Se $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é unha aplicación lineal con $\det(A) \neq 0$ e $b \in \Omega$ entón
$$\mathrm{d}(A, \Omega, b) = \operatorname{sign}\left(\det(A)\right).$$

Analicemos brevemente que información podemos extraer de cada propiedade. A propiedade (1) o único que fai é fixar o valor do grao para a función identidade. A propiedade

(2) resulta de utilidade para probar a multiplicidade e localizar as solucións da ecuación $f(x) = b$. A propiedade (3) dinos que se f e g son aplicacións homótopas e ningún cero cruza a fronteira durante a homotopía, é dicir, $\mathrm{H}(x,t) \neq b$ para todo $t \in [0,1]$ e todo $x \in \partial\Omega$, entón tense que $\mathrm{d}(f,\Omega,b) = \mathrm{d}(g,\Omega,b)$. Esta propiedade será clave para demostrar as diferentes aplicacións do grao e empregarémola moitas veces. A propiedade (4) é fundamental pois garantiza a existenza de solución para o sistema de ecuacións $f(x) = b$. A propiedade (5) postula que o grao da función só depende dos seus valores na fronteira. Por outra banda, a propiedade (6) é un caso particulas da (2) garantindo que á hora de calcular o grao podemos prescindir daqueles pechados do dominio que non conteñan ningún cero da función. Nótese que para que se cumprise (4) era necesario que $\mathrm{d}(f,\Omega,b) \neq 0$. Nesta situación a propiedade (7) resulta moi interesante, e aproxímanos ao que será a definición do grao de Brouwer.

Logo, podemos ver que tanto o grao definido de xeito topolóxico por Brouwer como o de Nagumo de forma analítica cumpren todas estas propiedades. É dicir, da igual o procedemento e as ferramentas empregadas pois todos chegan ao mesmo resultado.

Estas propiedades pódense xeneralizar a dimensión infinita usando perturbacións compactas da identidade e así caracterizan o grao de Leray-Schauder. Polo tanto, concluímos que en dimensión infinita tampouco importa o procedemento empregado.

Este traballo está estructurado en dúas partes, o Capítulo 1 dedicado ao grao de Brouwer e o Capítulo 2 no que se estuda o grao de Leray-Schauder.

Na primeira parte do Capítulo 1 o obxetivo é definir o grao de Brouwer. Comezamos dando a definición de grao de Brouwer para funcións de clase 1 e valores regulares (Definición 1.2). Intuitivamente, a interpretación desta definición lévanos a considerar o grao como un "contador" do número de solucións da ecuación $f(x) = b$ que nos dá unha cota inferior das solucións de dita ecuación. Nótese que se o grao vale cero non nos aporta case información, pero cando é distinto de cero resulta de gran interese.

Con todo, esta definición do grao de Brouwer non é a máis desexable, pois hai moitos casos nos que non é aplicable, por exemplo se consideramos valores que non son regulares ou funcións que non son de clase 1. Para isto seguimos dando unha serie de resultados ata que obtemos o seguinte avance: obtemos unha definición de grao para valores non necesariamente regulares e funcións de clase 2 (Definición 1.8). A idea baséase en considerar valores regulares suficientemente próximos dos non regulares de xeito que o grao dun se poida aproximar polo do outro.

Seguindo nese camiño chegamos a unha definición de grao para funcións continuas e puntos críticos (Definición 1.13). A idea para poder substituír funcións de clase 2 por funcións continuas é similar á dos valores regulares. Tratáse de aproximar as funcións continuas por funcións de clase 2 que xa sabemos que cumpren a definición.

Todo este procedemento é o levado a cabo por Nagumo para construír o grao dende o punto de vista analítico.

A continuación, na Sección 1.1 veremos as propiedades do grao de Brouwer, é dicir, probaremos que efectivamente o grao cumpre os axiomas enunciados por Brouwer que caracterizan esta aplicación así como algunha propiedade a maiores que pode resultar de utilidade.

O máis interesante do grao de Brouwer son as súas múltiples aplicacións. Na Sección 1.2 dedicarémonos a ver algunhas delas.

- Comezaremos cunha xeneralización do Teorema de Bolzano (Proposición 1.35) na que o valor do grao nun intervalo só dependerá do signo que teña a función nos seus extremos.

- Probaremos a existencia de solucións de Floquet para ecuacións diferenciais ordinarias (véxase o Teorema 1.42).

- Na Subsección 1.2.3 veremos un resultado moi interesante que mostra que o grao de Brouwer é exactamente o mesmo que o índice complexo.

- Demostraremos o Teorema Fundamental da Álxebra coa axuda do grao de Brouwer (ver Subsección 1.2.4).

- Poderemos comprobar que a demostración do Teorema da bola peluda, axudados polas propiedades do grao de Brouwer, é relativamente sinxela (véxase a demostración da Proposición 1.57).

- A aplicación máis significativa será o Teorema do punto fixo de Brouwer (ver Teorema 1.59). Este resultado será moi útil a súa vez para probar outros resultados como, por exemplo, o Teorema de Perron-Frobenius.

Por outra banda, no Capítulo 2 o obxectivo principal é estender o grao de Brouwer a espazos de dimensión infinita, é dicir, o chamado grao de Leray-Schauder. En particular os espazos que consideraremos serán espazos de Banach. Para conseguir isto non nos valen as aplicacións continuas, polo que nos restrinximos a un grupo máis pequeno, as chamadas perturbacións compactas da identidade. O procedemento para construír o grao agora consistirá en aproximar unha aplicación compacta por unha aplicación de rango finito. Para poder facer isto introducimos un par de resultados chegando á definición de grao de Leray-Schauder (Definición 2.17).

Unha vez logramos adaptar a definición de grao de Brouwer para dimensión infinita, na Sección 2.1 dedicarémonos a demostrar que as propiedades do grao vistas na Sección 1.1 tamén se cumpren para o grao de Leray-Schauder. Isto resultará relativamente sinxelo, pois os procedementos son similares aos do Capítulo 1 pero traballando cun subespazo de dimensión finita dentro dun espazo de Banach.

Por último, na Sección 2.2 introduciremos varias versións do Teorema do punto fixo de Leray-Schauder con pequenas variacións, e veremos que o Teorema do punto fixo de Brouwer en dimensión infinita non é certo. Ademais, estes teoremas teñen diversas aplicacións en espazos de dimensión infinita, por exemplo permiten probar a existencia de solución dun problema de valor inicial de primeira orde (véxase o Teorema 2.51).

Capítulo 1

O grao de Brouwer

Neste capítulo imos introducir o concepto de grao topolóxico en espazos de dimensión finita, é dicir, o chamado grao de Brouwer. En particular, introduciremos o grao topolóxico para funcións definidas en subconxuntos de $\mathbb{R}^n$ que toman valores en $\mathbb{R}^n$. Posteriormente daremos unha serie de resultados e propiedades deste que nos serán de utilidade máis adiante.

Para comezar, introduciremos a notación que empregaremos ao longo do traballo:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conxunto aberto e limitado.
- $\partial\Omega$ a fronteira de Ω.
- $\overline{\Omega}$ a clausura de Ω.
- $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ o espazo de funcións $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase k, tales que todas estas funcións e as súas derivadas ata orde k pódense estender de forma continua a $\overline{\Omega}$.
- $Df(x)$ a matriz xacobiana de f (de dimensión $n \times n$).
- $J_f(x)$ o determinante da matriz xacobiana.
- $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a función identidade en $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathrm{Id}(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- sign a función que denota o signo do elemento ao que acompaña, é dicir,

$$\begin{aligned} \mathrm{sign} : \mathbb{R} &\longrightarrow \{-1, 0, 1\} \\ x &\longmapsto \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

- $(\cdot,\cdot)$ o produto interior usual en $\mathbb{R}^n$, é dicir, dados $a, b \in \mathbb{R}^n$,

$$(a, b) = ((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

- $\|\cdot\|$ a norma euclidiana usual en $\mathbb{R}^n$, é dicir, dado $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$.

- $\|\cdot\|_\infty$ a norma infinito no espazo $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$, é dicir, dada unha función $h \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ defínese

$$\|h\|_\infty = \sup\{\|h(x)\|\,,\, x \in \Omega\}.$$

Definición 1.1. Dados $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $x \in \Omega$, diremos que x é un punto crítico de f se o determinante xacobiano de f en x, $J_f(x)$, vale cero. En caso contrario, diremos que x é un punto regular.

Empregaremos S para denotar o conxunto de puntos críticos de f.

Logo, estamos en condicións de introducir a definición de grao para valores regulares dunha función de clase 1:

Definición 1.2. Sexa $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ unha función de $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ e $b \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$. Definimos o grao de f en Ω con respecto a b como

$$\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(b)} \mathrm{sign}(J_f(x)) & \text{se } f^{-1}(b) \neq \varnothing, \\ 0 & \text{se } f^{-1}(b) = \varnothing. \end{cases}$$

Observación 1.3. Esta forma de construír o grao é correcta pois, como $b \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$, sabemos que $J_f(x)$ está ben definido para $x \in f^{-1}(b)$ e que $J_f(x) \neq 0$. Así, $J_f(x)$ ten un signo positivo ou negativo, e como consecuencia do Teorema da función inversa, f é invertible nunha veciñanza de x. Ademais $f^{-1}(b)$ é finito, posto que, se non o fose, existiría unha sucesión de puntos de Ω, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $f(x_n) = b$. Entón, como $f^{-1}(b) \subset \Omega \subset \overline{\Omega}$ e este último é compacto, existiría unha subsucesión, $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, converxente a un punto $x_0 \in \overline{\Omega}$. Por tanto $f(x_0) = b$ e en consecuencia $x_0 \in f^{-1}(b)$, chegando a unha contradición con que f sexa bixectiva localmente, é dicir, con que sexa invertible. Por tanto, concluímos que $f^{-1}(b)$ é finito e o grao está ben definido.

Ilustremos agora a definición cun exemplo en $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.4. Sexa $f : \Omega \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{sen}(x)$. Entón $J_f(x) = f'(x) = \cos(x)$. Calculemos o valor do grao para dous Ω distintos:

1. $\Omega = [-\frac{\pi}{2}, \pi]$

- Se $b=2$ (punto sen preimaxe asociada):

$$\mathrm{d}(f,\Omega,b)=\mathrm{d}\left(\mathrm{sen}(x),\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right],2\right)=0.$$

- Se $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (punto con dúas preimaxes asociadas):

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(f,\Omega,b)&=\mathrm{d}\left(\mathrm{sen}(x),\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right],\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\mathrm{sign}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)+\mathrm{sign}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\\&=\mathrm{sign}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\mathrm{sign}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=+1-1=0.\end{aligned}$$

- Se $b=-\frac{1}{2}$ (punto cunha soa preimaxe asociada):

$$\mathrm{d}(f,\Omega,b)=\mathrm{d}\left(\mathrm{sen}(x),\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right],-\frac{1}{2}\right)=\mathrm{sign}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\mathrm{sign}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=+1.$$

2. $\Omega=[\frac{\pi}{2},2\pi]$

- Se $b=2$ (punto sen preimaxe asociada):

$$\mathrm{d}(f,\Omega,b)=\mathrm{d}\left(\mathrm{sen}(x),\left[\frac{\pi}{2},2\pi\right],2\right)=0.$$

- Se $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (punto cunha soa preimaxe asociada):

$$\mathrm{d}(f,\Omega,b)=\mathrm{d}\left(\mathrm{sen}(x),\left[\frac{\pi}{2},2\pi\right],\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\mathrm{sign}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\mathrm{sign}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1.$$

- Se $b=-\frac{1}{2}$ (punto con dúas preimaxes asociadas):

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(f,\Omega,b)&=\mathrm{d}\left(\mathrm{sen}(x),\left[\frac{\pi}{2},2\pi\right],-\frac{1}{2}\right)=\mathrm{sign}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)+\mathrm{sign}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)\\&=\mathrm{sign}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\mathrm{sign}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+1=0.\end{aligned}$$

Logo podemos sacar as seguintes conclusións:

1. Se non existe $x\in\Omega$ tal que, $f(x)=b$, é dicir, se a función non ten preimaxe no punto b, entón $\mathrm{d}(f,\Omega,b)=0$.
2. Se $\mathrm{d}(f,\Omega,b)\neq 0$ entón existe $x\in\Omega$ tal que $f(x)=b$.
3. En particular, se temos $\mathrm{d}(f,\Omega,b)=m$ (ou $\mathrm{d}(f,\Omega,b)=-m$) existen polo menos $x_1,\dots,x_m\in\Omega$ tal que $f(x_i)=b$, para $i=1,\dots,m$.

4. O recíproco destas tres afirmacións é falso, pois basta con que nos fixemos no exemplo, nos dous casos nos que o grao vale cero. Isto pasa polo feito de que o signo dos xacobianos é oposto e ao sumalos, anúlanse. É dicir, estamos ante un caso no que o grao vale cero e temos preimaxes.

Á vista destas observacións, podemos considerar o grao como un "contador" de solucións da ecuación $f(x) = b$ que nos dá unha cota inferior para o número de solucións.

Un resultado inmediato a partir da definición de grao é o seguinte:

Proposición 1.5. *Se $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ e $b \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$ cúmprese que*

$$\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \mathrm{d}(f - b, \Omega, 0).$$

O noso obxectivo agora será estender a definición de grao para puntos críticos e funcións continuas, é dicir, buscamos poder eliminar a condición $b \notin f(S)$ e substituír $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ por $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

En primeiro lugar, introduciremos un resultado enfocado a conseguir unha definición do grao válida para puntos críticos. Para iso, primeiro definiremos a distancia dun punto a un conxunto en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.6. Dados $b \in \mathbb{R}^n$ e $A \subset \mathbb{R}^n$, denótase $\rho(b, A)$ á distancia do punto b ao conxunto A dada por $\rho(b, A) = \inf\{\|b - x\|, \, x \in A\}$.

Proposición 1.7. *Sexan $f \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, $b \notin f(\partial\Omega)$ e $\rho_0 = \rho(b, f(\partial\Omega)) > 0$. Dados os valores $b_1, b_2 \in B(b, \rho_0)$ tales que $b_1, b_2 \notin f(S)$, entón*

$$\mathrm{d}(f, \Omega, b_1) = \mathrm{d}(f, \Omega, b_2).$$

Noutras palabras, dous valores regulares suficientemente próximos a b terán o mesmo grao.

Aplicando este resultado podemos definir o grao nun punto crítico como o valor que toma nun punto regular próximo.

Definición 1.8. Dados $f \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ e $b \notin f(\partial\Omega)$, definiremos o grao de f en Ω con respecto a b como

$$\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \mathrm{d}(f, \Omega, b'),$$

sendo $b' \notin f(S)$ tal que $\|b' - b\| < \rho(b, f(\partial\Omega))$.

Enunciaremos a continuación o Teorema de Sard (véxase [13]), o cal nos será de utilidade para ver que a definición previa ten sentido.

Teorema 1.9 (Teorema de Sard). *Dada $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$, $f(S)$ ten medida de Lebesgue 0 en $\mathbb{R}^n$.*

Observación 1.10. Dados $f \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, $b \notin f(\partial\Omega)$ e $\rho_0 = \rho(b, f(\partial\Omega))$, sabemos que existen valores regulares en $B(b, \rho_0)$ grazas ó Teorema de Sard, xa que nos di que os valores singulares de f teñen medida cero. Entón a Definición 1.8 é correcta.

Ata aquí probamos que o grao ten o mesmo valor para valores regulares próximos, o que nos permitiu definir o grao para puntos críticos. Agora faremos algo similar en relación ás funcións para chegar a unha definión de grao para funcións continuas.

Proposición 1.11. *Sexan $f, g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ e $b \notin f(\partial\Omega)$. Entón, existe $\varepsilon = \varepsilon(f, g, \Omega) > 0$ tal que para $0 < |t| < \varepsilon$,*

$$\mathrm{d}(f + tg, \Omega, b) = \mathrm{d}(f, \Omega, b).$$

Demostración. Distinguimos tres casos:

Caso I $b \notin f(\overline{\Omega})$.

Sexa $\tilde{\rho} = \rho(b, f(\overline{\Omega})) > 0$. Entón, tomando $\varepsilon = \frac{\tilde{\rho}}{2\,\|g\|_\infty}$ e $|t| < \varepsilon$, tense que

$$\begin{aligned}\|b - (f + tg)(x)\| = \|b - f(x) - tg(x)\| &\underset{1}{\geq} \|b - f(x)\| - |t|\,\|g(x)\| \\ &\underset{2}{\geq} \tilde{\rho} - |t|\,\|g(x)\| \underset{3}{\geq} \tilde{\rho} - \frac{\tilde{\rho}}{2} = \frac{\tilde{\rho}}{2},\end{aligned}$$

onde nas desigualdades estamos aplicando o seguinte:

1. a desigualdade triangular;
2. a definición de $\tilde{\rho}$;
3. o feito de que $|t| < \varepsilon$ e a definición de $\|g\|_\infty$ (pola que obtemos a desigualdade $\|g(x)\| \leq \|g\|_\infty \,\forall\, x \in \Omega$) e, en consecuencia, $|t|\,\|g(x)\| \leq \frac{\tilde{\rho}}{2}$.

Por último, aplicando a definición de distancia para $\rho(b, (f + tg)(\overline{\Omega}))$ obtemos que

$$\rho\left(b, (f + tg)(\overline{\Omega})\right) \geq \frac{\tilde{\rho}}{2} > 0,$$

é dicir, $b \notin (f + tg)(\overline{\Omega})$ e por tanto concluímos que $\mathrm{d}(f + tg, \Omega, b) = \mathrm{d}(f, \Omega, b)$.

Caso II $b \notin f(S)$.

Sexan $x_1, \dots, x_m \in \Omega$ tales que $f^{-1}(b) = \{x_1, \dots, x_m\}$. Como $b \notin f(S)$ o determinante xacobiano non se anula nos puntos $x_1, \dots, x_m$ (é dicir, $Df(x_i)$ é invertible para os x_i tales que $1 \leq i \leq m$).

Definamos agora

$$h(t,x) = f(x) + tg(x) - b.$$

Esta función cumpre que $h \in \mathcal{C}^2$ nunha veciñanza do punto $(0, x_i)$, $h(0, x_i) = 0$ e ademais $\partial_x h(0, x_i) = Df(x_i) \neq 0$ para $1 \leq i \leq m$. Logo polo Teorema da función implícita existen $(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ e $U_i \subset \mathbb{R}^n$ veciñanzas de 0 en $\mathbb{R}$ e de x_i en Ω, respectivamente, e funcións $\varphi_i : (-\varepsilon_i, \varepsilon_i) \longrightarrow U_i$ tales que $\varphi_i(0) = x_i$, $i = 1, \ldots, m$. En particular podemos tomar as veciñanzas U_i disxuntas dúas a dúas. Ademais, as únicas solucións de $h(t,x) = 0$ son da forma $(t, \varphi_i(t))$ con $i = 1, \ldots, m$. Así, para todo $t \in (-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$,

$$f(\varphi_i(t)) + tg(\varphi_i(t)) = b,$$

e como $f(x_i) = b$ tense que

$$f(\varphi_i(t)) + tg(\varphi_i(t)) = f(x_i).$$

Entón, se tomamos veciñanzas de $t = 0$ suficientemente pequenas, en cada $x_i \in U_i$ teremos que $\operatorname{sign}(J_{f+tg}(x)) = \operatorname{sign}(J_f(x_i))$, e así obteremos o resultado buscado (por definición de grao no caso regular). Logo basta tomar $\varepsilon = \min\limits_{1 \leq i \leq m} \varepsilon_i$.

Caso III $b \in f(S)$.

Sexan $\tilde{\rho} = \rho(b, f(\partial\Omega))$, $b_1 \in B(b, \frac{\tilde{\rho}}{3})$ un valor regular e $\varepsilon_0 > 0$ tal que $0 < |t| < \varepsilon_0$. Entón,

$$\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \mathrm{d}(f, \Omega, b_1) = \mathrm{d}(f + tg, \Omega, b_1),$$

onde a segunda igualdade se obtén do Caso II.

Agora tomamos $\varepsilon < \min\left\{\varepsilon_0, \frac{\tilde{\rho}}{3\|g\|_\infty}\right\}$. Así, $b \notin (f+tg)(\partial\Omega)$ e para $|t| < \varepsilon$, tense que

$$\begin{aligned} \|b - (f+tg)(x)\| &= \|b - f(x) - tg(x)\| \geq \|b - f(x)\| - |t|\,\|g(x)\| \\ &\geq \tilde{\rho} - |t|\,\|g(x)\| \geq \tilde{\rho} - \frac{\tilde{\rho}}{3} = \frac{2\tilde{\rho}}{3} \quad \forall\, x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

e polo tanto $\rho(b, (f+tg)(\partial\Omega)) \geq \frac{2\tilde{\rho}}{3}$. Por conseguinte, se $b_1 \in B(b, \frac{\tilde{\rho}}{3})$ entón

$$\|b - b_1\| < \frac{\tilde{\rho}}{3} < \frac{1}{2}\rho(b, (f+tg)(\partial\Omega)).$$

Logo concluímos que $\mathrm{d}(f + tg, \Omega, b_1) = \mathrm{d}(f + tg, \Omega, b)$ e temos o resultado.

$\square$

Presentaremos agora un resultado no que se proba que dada unha función continua f, o grao é constante no conxunto de funcións de clase 2 suficientemente próximas a f.

Proposición 1.12. *Sexan* $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$*,* $b \notin f(\partial\Omega)$ *e* $\rho_0 = \rho(b, f(\partial\Omega))$*. Dadas as funcións* $g_1, g_2 \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ *tales que* $\|f - g_1\|_\infty < \frac{\rho_0}{2}$ *e* $\|f - g_2\|_\infty < \frac{\rho_0}{2}$ *entón*

$$\mathrm{d}(g_1, \Omega, b) = \mathrm{d}(g_2, \Omega, b).$$

Demostración. Definamos a función $\tilde{g} = g_1 - g_2$ e sexa $0 < t < 1$. Entón

$$\begin{aligned}
\|f(x) - (g_2 + t\tilde{g})(x)\| &= \|f(x) - g_2(x) - t(g_1(x) - g_2(x))\| = \|f(x) - tg_1(x) - (1-t)g_2(x)\| \\
&\underset{*}{=} \|t(f(x) - g_1(x)) + (1-t)(f(x) - g_2(x))\| \\
&\leq t\,\|f(x) - g_1(x)\| + (1-t)\,\|f(x) - g_2(x)\| \\
&< t\,\frac{\rho_0}{2} + (1-t)\frac{\rho_0}{2} < \rho_0, \ \forall x \in \overline{\Omega},
\end{aligned}$$

onde en $*$ utilizamos que $f(x) = (1 + t - t)f(x) = tf(x) + (1-t)f(x)$.

Logo temos que $\|f - (g_2 + t\tilde{g})\|_\infty < \rho_0$, polo que podemos aplicar a Proposición 1.11, pola cal se ten que $\mathrm{d}(g_2, \Omega, b) = \mathrm{d}(g_2 + t\tilde{g}, \Omega, b)$. Así podemos definir a seguinte función $h(t) = \mathrm{d}(g_2 + t\tilde{g}, \Omega, b)$, a cal é localmente constante con respecto a t, e en consecuencia, tamén é continua.

Ademais, como $[0, 1]$ é un intervalo conexo, por ser h continua, $h([0, 1])$ é conexo. Pero o grao só toma valores enteiros, é dicir, $h([0, 1]) \subset \mathbb{Z}$. Por tanto h ten que ser constante no intervalo $[0, 1]$.

En consecuencia, $\mathrm{d}(g_2 + t\tilde{g}, \Omega, b) = \mathrm{d}(g_2, \Omega, b)$ para todo $t \in [0, 1]$. En particular, se $t = 1$, $\mathrm{d}(g_2 + t\tilde{g}, \Omega, b) = \mathrm{d}(g_1, \Omega, b)$ e polo tanto chegamos ao resultado buscado. □

A proposición anterior permite estender a definición de grao a funcións continuas.

Definición 1.13. Sexan $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $b \notin f(\partial\Omega)$ e $\rho_0 = \rho(b, f(\partial\Omega))$. Definimos o grao de f en Ω con respecto a b como

$$\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \mathrm{d}(g, \Omega, b),$$

sendo $g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ tal que $\|f - g\|_\infty < \frac{\rho_0}{2}$.

Observación 1.14. Dados $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $b \notin f(\partial\Omega)$ e $\rho_0 = \rho(b, f(\partial\Omega))$, sempre podemos atopar funcións $g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ tales que $\|g - f\|_\infty < \frac{\rho_0}{2}$ grazas á densidade do espazo das funcións de $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ nas de $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Proposición 1.15. *Se* $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ *e* $b \notin f(\partial\Omega)$ *entón*

$$\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \mathrm{d}(f - b, \Omega, 0).$$

Como vimos ata agora, o grao mantense constante para puntos e funcións próximos, por tanto, podemos definir o grao dunha función continua nun punto crítico tomando unha función máis regular ($\mathcal{C}^2$) e un valor regular o suficientemente próximos. Logo a partir da Proposición 1.5 chegamos ó resultado.

Vexamos unha interpretación xeométrica de todo o visto ata agora.

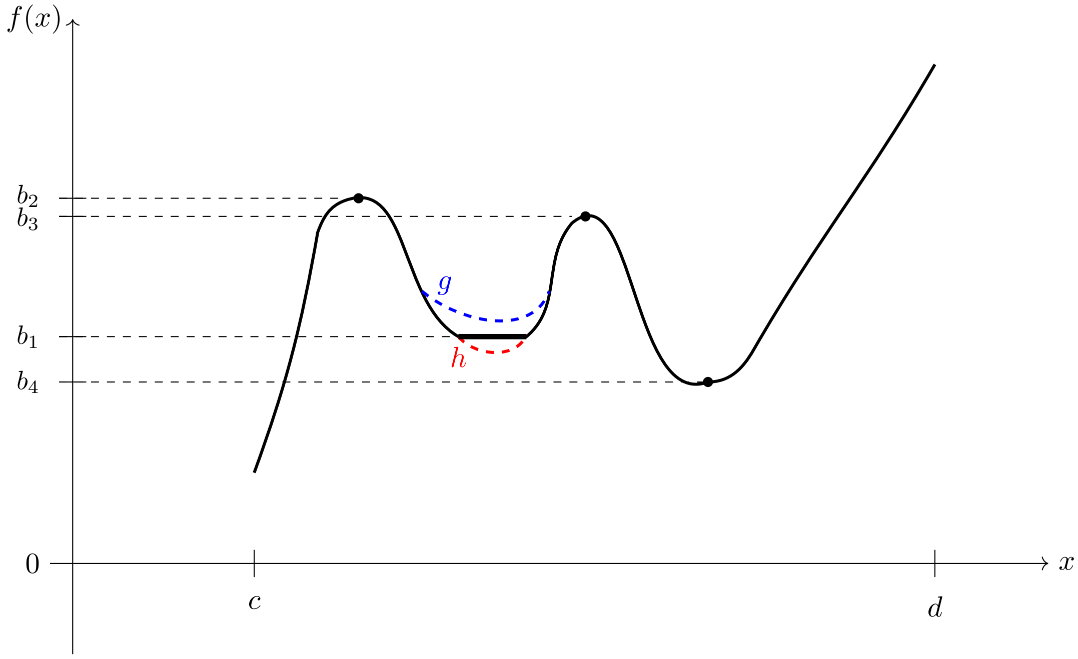

Figura 1.1: Interpretación xeométrica

Consideremos $n = 1$ (é dicir, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$), o intervalo $I = (c, d)$ e f unha función continua tal como mostramos na Figura 1.1 . O grao $\mathrm{d}(f, I, b)$ está definido para todo b menos para os valores correspondentes aos extremos do intervalo, $b = f(c)$ e $b = f(d)$. Os valores críticos de f son b_1, b_2, b_3 e b_4.

Para todos os outros valores de b, $\mathrm{d}(f, I, b)$ pódese calcular de forma sinxela empregando a Definición 1.2. Así, podemos diferenciar tres casos:

1. Se $b \notin [f(c), f(d)]$, entón $\mathrm{d}(f, I, b) = 0$.

2. Se $f(c) < f(d)$ e $b \in (f(c), f(d))$, entón $\mathrm{d}(f, I, b) = +1$.

3. Se $f(c) > f(d)$ e $b \in (f(d), f(c))$, entón $\mathrm{d}(f, I, b) = -1$.

O grao $\mathrm{d}(f, I, b_i)$ para $i = 2, 3$ e 4 calcúlase mediante $\mathrm{d}(f, I, q)$ sendo q un valor regular suficientemente próximo a b_i. Logo $\mathrm{d}(f, I, b_i) = +1, 0$ ou -1 segundo $f(c) < b_i < f(d)$, $b_i \in [f(c), f(d)]$ ou $f(d) < b_i < f(c)$, respectivamente.

Para calcular $\mathrm{d}(f, I, b_1)$ usamos funcións $\mathcal{C}^1$, como g ou h (mostradas en líneas discontinuas azuis e vermellas, respectivamente, na Figura 1.1), para as cales b_1 non é un valor crítico. Logo, como vemos na figura $\mathrm{d}(g, I, b_1) = \mathrm{d}(h, I, b_1) = +1$ e por tanto $\mathrm{d}(f, I, b_1) = 1$. En conclusión, podemos ver que $\mathrm{d}(f, I, b)$ só depende dos valores de f nos extremos do intervalo, $\partial I = \{c, d\}$.

1.1. Propiedades do Grao de Brouwer

A continuación veremos as propiedades que cumpre o grao de Brouwer. Para isto seguiremos a Sección 2.2 de [7] e o Capítulo 2 de [8].

Teorema 1.16 (Continuidade con respecto á función). *Dados $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ e $b \notin f(\partial\Omega)$, existe unha veciñanza, U, de f, tal que para toda $g \in U$,*

$$\mathrm{d}(g, \Omega, b) = \mathrm{d}(f, \Omega, b).$$

Demostración. Sexa $\rho_0 = \rho(b, f(\partial\Omega))$ e tomemos $U = \{g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) / \|f - g\|_\infty < \frac{\rho_0}{4}\}$. Entón, se $g \in U$, tense que

$$\begin{aligned} \|b - g(x)\| &= \|b - f(x) + f(x) - g(x)\| \geq \|b - f(x)\| - \|g(x) - f(x)\| \\ &\geq \rho_0 - \frac{\rho_0}{4} = \frac{3\rho_0}{4}, \quad \forall x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Polo tanto, $\rho(b, g(\partial\Omega)) \geq \frac{3\rho_0}{4}$ e en consecuencia, $b \notin g(\partial\Omega)$ co que temos probado que $\mathrm{d}(g, \Omega, b)$ está ben definido.

Consideremos agora $h \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ tal que $\|f - h\|_\infty < \frac{\rho_0}{8}$. Así

$$\begin{aligned} \|g(x) - h(x)\| &= \|g(x) - f(x) + f(x) - h(x)\| \leq \|g(x) - f(x)\| + \|f(x) - h(x)\| \\ &\leq \frac{\rho_0}{4} + \frac{\rho_0}{8} = \frac{3\rho_0}{8} \leq \frac{1}{2}\rho(b, g(\partial\Omega)), \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

En particular,

$$\|g - h\|_\infty \leq \frac{1}{2}\rho(b, g(\partial\Omega)),$$

e aplicando a Definición 1.13 concluímos que

$$\mathrm{d}(g, \Omega, b) = \mathrm{d}(h, \Omega, b) = \mathrm{d}(f, \Omega, b).$$

□

Teorema 1.17. *O grao é constante con respecto ó punto b en cada compoñente conexa de $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$.*

Demostración. Pola Proposición 1.7, se b e b_1 están suficientemente próximos (é dicir, $\|b - b_1\|$ suficientemente pequeno), entón $\mathrm{d}(f - b, \Omega, 0) = \mathrm{d}(f - b_1, \Omega, 0)$.

Ademais, pola Proposición 1.15, $\mathrm{d}(f-b, \Omega, 0) = \mathrm{d}(f, \Omega, b)$ e $\mathrm{d}(f-b_1, \Omega, 0) = \mathrm{d}(f, \Omega, b_1)$. Por tanto, se b e b_1 están o suficientemente próximos entón $\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \mathrm{d}(f, \Omega, b_1)$, é dicir, o grao é localmente constante con respecto ó punto e, consecuentemente, continuo. Logo, realizando un razoamento análogo ao da demostración da Proposición 1.12 como é continuo e só toma valores enteiros deducimos que o grao é constante en cada compoñente conexa. $\square$

Definición 1.18. Unha homotopía entre dúas funcións continuas, $f, g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, é unha función continua $\mathrm{H} : \overline{\Omega} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\mathrm{H}(x, 0) = f(x)$ e $\mathrm{H}(x, 1) = g(x)$.

Teorema 1.19 (Invariancia baixo homotopía)**.** *Dada* $\mathrm{H} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times [0,1])$ *unha homotopía tal que* $b \notin \mathrm{H}(\partial\Omega \times [0,1])$*, entón* $\mathrm{d}(\mathrm{H}(\cdot, t), \Omega, b)$ *é independente de* t*.*

Demostración. Como consecuencia do Teorema 1.16, $\mathrm{d}(\mathrm{H}(\cdot, t), \Omega, b)$ é localmente constante e, por tanto, continua con respecto á variable t. Logo, realizando un razoamento análogo ao da demostración da Proposición 1.12 como o grao toma unicamente valores enteiros e $[0, 1]$ é conexo, entón o grao é constante nese intervalo e por tanto temos o resultado. $\square$

Teorema 1.20 (Aditividade)**.** *Sexan* Ω_1, Ω_2 *tales que* $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ *e* $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$*,* $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ *e* $b \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2)$*. Entón*

$$\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \mathrm{d}(f, \Omega_1, b) + \mathrm{d}(f, \Omega_2, b).$$

Demostración. Sexan $\rho_0 = \rho(b, f(\partial\Omega))$ e $g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ tal que $\|f - g\|_\infty < \frac{\rho_0}{2}$. Entón pola Definición 1.13 temos que

$$\mathrm{d}(g, \Omega, b) = \mathrm{d}(f, \Omega, b) \text{ e } \mathrm{d}(g, \Omega_i, b) = \mathrm{d}(f, \Omega_i, b) \text{ para } i = 1, 2.$$

Sexa agora $B = B(b, \frac{\rho_0}{2})$ conexa e contida en $\mathbb{R}^n \backslash g(\partial\Omega)$. En particular, B tamén está contida en $\mathbb{R}^n \backslash g(\partial\Omega_i)$ para $i = 1, 2$ e, por tanto, nunha compoñente conexa de cada un destes conxuntos. Polo Teorema de Sard, existe un valor regular, $c \in B$, de g tal que

$$\mathrm{d}(g, \Omega, c) = \mathrm{d}(g, \Omega, b) \quad \text{e} \quad \mathrm{d}(g, \Omega_i, c) = \mathrm{d}(g, \Omega_i, b) \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Como $g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ e c é regular, a partir da definición de grao regular (Definición 1.2) chegamos a que $\mathrm{d}(g, \Omega, c) = \mathrm{d}(g, \Omega_1, c) + \mathrm{d}(g, \Omega_2, c)$ do que se segue o resultado. $\square$

Corolario 1.21. *Sexan* $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$*,* $b \notin f(\partial\Omega)$ *e* Ω *a unión dos conxuntos abertos* Ω_i*, disxuntos dous a dous, para* $i = 1, \dots, n$*. Entón*

$$\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}(f, \Omega_i, b).$$

Proposición 1.22 (Excisión). *Dado $K \subset \overline{\Omega}$ un conxunto pechado e $b \notin f(\partial\Omega) \cup f(K)$ entón*

$$\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \mathrm{d}(f, \Omega \backslash K, b).$$

Demostración. Sexan $g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ tal que $\mathrm{d}(g, \Omega, b) = \mathrm{d}(f, \Omega, b)$ e $b \notin g(K)$. Escollemos un valor regular de g, c, tal que $c \notin g(K)$ e que pertenza á mesma compoñente conexa ca b en $\mathbb{R}^n \backslash g(\partial\Omega)$ e en $\mathbb{R}^n \backslash g(\partial(\Omega \backslash K))$. Entón chegamos a que $\mathrm{d}(g, \Omega, b) = \mathrm{d}(g, \Omega, c)$ e $\mathrm{d}(g, \Omega \backslash K, b) = \mathrm{d}(g, \Omega \backslash K, c)$ respectivamente, e como $c \notin g(K)$ temos o resultado aplicando a definición de grao para o caso regular (Definición 1.2), xa que se cumpre que $\mathrm{sign}(J_{g|_\Omega}(x)) = \mathrm{sign}(J_{g|_{\Omega \backslash K}}(x))$. □

Tamén é interesante ver o comportamento do grao con respecto á aplicación identidade.

Proposición 1.23. *Sexa* $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *a aplicación identidade e* $f = \mathrm{Id}|_\Omega$ *para* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*. Entón para $b \notin \partial\Omega$ tense que*

$$\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & \text{se } b \in \Omega, \\ 0 & \text{se } b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Demostración. Por definición de aplicación identidade tense que $J_{\mathrm{Id}}(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. En particular, $J_f(x) = 1$ para todo $x \in \Omega$ do que se segue o resultado. □

Algunhas das ideas extraídas do Exemplo 1.4 podémolas formalizar agora para funcións continuas e puntos críticos.

Proposición 1.24. *Se $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ e $b \notin f(\overline{\Omega})$ entón* $\mathrm{d}(f, \Omega, b) = 0$*. Equivalentemente, se* $\mathrm{d}(f, \Omega, b) \neq 0$ *entón existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = b$.*

Demostración. Sexan $\rho_0 = \rho(b, f(\overline{\Omega}))$ e $g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ tales que $\|f - g\|_\infty < \frac{\rho_0}{2}$. Entón $b \notin g(\overline{\Omega})$ e como b é un valor regular de g tense que $\mathrm{d}(g, \Omega, b) = 0$ e por tanto $\mathrm{d}(f, \Omega, b) = 0$. □

Corolario 1.25. *Se* $\mathrm{d}(f, \Omega, b) \neq 0$ *entón $f(\Omega)$ é unha veciñanza de b.*

Demostración. Consideremos C_b á compoñente conexa de $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$ contendo a b. Entón como o grao é constante en C_b tense que $\mathrm{d}(f, \Omega, c) \neq 0$ para todo $c \in C_b$, pois $\mathrm{d}(f, \Omega, b) \neq 0$ por hipótese, e pola Proposición 1.24, $C_b \subset f(\Omega)$. Así, como C_b é aberto, concluímos que $f(\Omega)$ é unha veciñanza de b. □

Vexamos agora que o grao é igual para todas as funcións continuas que toman os mesmos valores na fronteira do conxunto no que están definidas.

Proposición 1.26. *Dadas $f, g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tales que $f = g$ en $\partial\Omega$ e $b \notin f(\partial\Omega)$, entón*

$$\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \mathrm{d}(g, \Omega, b).$$

Demostración. Definimos a homotopía $\mathrm{H} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times [0,1])$ como $\mathrm{H}(x,t) = tf(x) + (1-t)g(x)$. Así, $\mathrm{H}(\cdot,1) = f$ e $\mathrm{H}(\cdot,0) = g$. Ademais, como $f = g$ en $\partial\Omega$, tense que $\mathrm{H}(\cdot,t) = f = g$ na fronteira $\partial\Omega \times [0,1]$, e por tanto, $\mathrm{d}(\mathrm{H}(\cdot,t),\Omega,b)$ está definido e é independente de t (como consecuencia do Teorema 1.19). En consecuencia, como $\mathrm{d}(\mathrm{H}(\cdot,0),\Omega,b) = \mathrm{d}(g,\Omega,b)$ e $\mathrm{d}(\mathrm{H}(\cdot,1),\Omega,b) = \mathrm{d}(f,\Omega,b)$ obtemos que $\mathrm{d}(g,\Omega,b) = \mathrm{d}(f,\Omega,b)$. □

A continuación enunciaremos o Teorema de Tietze ([9, Apartado 15.4]), que será de utilidade á hora de demostrar un corolario da Proposición 1.26.

Teorema 1.27 (Teorema de Tietze)**.** *Dado (X,τ) un espazo topolóxico, son equivalentes:*

- *X é un espazo normal.*
- *Dados A pechado en X e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua, existe unha extensión continua de f a todo X, é dicir, existe unha función $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua tal que $F|_A = f$.*

Agora vexamos o corolario, consecuencia directa da anterior proposición:

Corolario 1.28. *Dadas $f,g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, se existe $\mathrm{H} \in \mathcal{C}(\partial\Omega \times [0,1])$ tal que H nunca toma o valor b, $\mathrm{H}(\cdot,0) = f|_{\partial\Omega}$ e $\mathrm{H}(\cdot,1) = g|_{\partial\Omega}$, entón*

$$\mathrm{d}(f,\Omega,b) = \mathrm{d}(g,\Omega,b).$$

Demostración. Aplicando o Teorema de Tietze podemos estender H a $\tilde{\mathrm{H}} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times [0,1])$ e fixamos $\tilde{\mathrm{H}}(\cdot,0) = \tilde{f}$ e $\tilde{\mathrm{H}}(\cdot,1) = \tilde{g}$. Logo, pola propiedade de invariancia homotópica do grao (Teorema 1.19), tense que $\mathrm{d}(\tilde{f},\Omega,b) = \mathrm{d}(\tilde{g},\Omega,b)$. Así, aplicando a Proposición 1.26, como $f = \tilde{f}$ e $g = \tilde{g}$ na fronteira, obtemos o resultado. □

Ata agora falamos do grao definido para un punto b, vexamos como se modifica a definición do grao se en vez de un punto consideramos un conxunto.

Definición 1.29. Sexan $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ e $\Delta \subset \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$ un conxuto conexo. Defínese o grao de f en Δ como

$$\mathrm{d}(f,\Omega,\Delta) = \mathrm{d}(f,\Omega,b),$$

sendo b calquera punto de Δ.

Observación 1.30. A definición anterior ten sentido como consecuencia do Teorema 1.17, o cal asegura que se Δ é conexo, entón $\mathrm{d}(f,\Omega,b)$ é o mesmo para todo $b \in \Delta$.

Esta definición permitiranos ver que o grao se comporta ben con respecto a composición de funcións.

Teorema 1.31 (Multiplicación). *Sexan $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, M un conxunto aberto e limitado contendo a $f(\overline{\Omega})$ e $\Delta = M \backslash f(\partial\Omega)$. Sexan Δ_i as compoñentes conexas de Δ, $i = 1, 2, \ldots$. Se $g \in \mathcal{C}(\overline{M})$ e $b \notin g(f(\partial\Omega)) \cup g(\partial M)$ entón*

$$\mathrm{d}(g \circ f, \Omega, b) = \sum_j \mathrm{d}(g, \Delta_j, b)\, \mathrm{d}(f, \Omega, \Delta_j).$$

Corolario 1.32. *Sexa Ω un subconxunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ e $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ bixectiva. Se $b \in f(\Omega)$, entón $\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \pm 1$.*

Vexamos tamén o comportamento do grao con respecto ó conxunto produto.

Proposición 1.33 (Fórmula produto). *Para $i = 1, 2$, sexa $\varphi_i \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}_i)$, sendo $\Omega_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ un conxunto aberto e limitado. Se $b_i \notin \varphi_i(\partial\Omega_i)$ entón,*

$$\mathrm{d}((\varphi_1, \varphi_2), \Omega_1 \times \Omega_2, (b_1, b_2)) = \mathrm{d}(\varphi_1, \Omega_1, b_1)\, \mathrm{d}(\varphi_2, \Omega_2, b_2).$$

Observación 1.34. Todos os resultados do Capítulo 1 son válidos cando $\mathbb{R}^n$ é substituído por outro espazo normado de dimensión n.

1.2. Aplicacións do Grao de Brouwer

A continuación veremos como se pode relacionar o grao, grazas as súas propiedades, con importantes resultados das matemáticas. Para isto seguiremos o Capítulo 2 de [7], a Sección 3.1 de [8] e as Sección 2.5 e 3.1 de [6].

1.2.1. Teorema de Bolzano

Comezaremos cun resultado que nos permite garantizar a existencia de polo menos un cero dunha función continua nun intervalo pechado.

Proposición 1.35. *Sexa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ unha función continua tal que $f(a)f(b) \neq 0$. Entón*

$$\mathrm{d}(f, (a, b), 0) = \frac{1}{2}[\mathrm{sign}(f(b)) - \mathrm{sign}(f(a))].$$

Demostración. Por ser f continua, sabemos que existe unha función suficientemente próxima $g \in \mathcal{C}^2([a, b])$ con $\mathrm{sign}(g(a)) = \mathrm{sign}(f(a))$ e $\mathrm{sign}(g(b)) = \mathrm{sign}(f(b))$, cumprindo que $\mathrm{d}(g, (a, b), 0) = \mathrm{d}(f, (a, b), 0)$.

Estudaremos entón o que pasa co grao para a función g e despois xeneralizarémolo para f. Podemos diferenciar catro casos.

Caso I $g(a), g(b) > 0$.

Pódense dar tres situacións:

1. Que g non teña ceros en (a, b), é dicir, non existe $x \in g^{-1}(0)$. Neste caso $\mathrm{d}(g,(a,b),0) = 0$. (Véxase a gráfica vermella na Figura 1.2).

2. Que 0 sexa o mínimo de g, é dicir, que exista algún valor $x \in (a, b)$ tal que $g(x) = \mathrm{mín}\{g(y) : y \in (a, b)\} = 0$. Entón $g'(x) = 0$ ou, o que é o mesmo, $J_g(x) = 0$, e x é un punto crítico. Neste caso $\mathrm{d}(g,(a,b),0) = 0$. (Gráfica verde na Figura 1.2).

3. Que g cambie de signo. Como g é continua e $g(a), g(b) > 0$, a función ten que ter un número par de ceros nos que cambie de signo. É dicir, se g ten un cero no cal pasa de ser positiva a negativa, automaticamente ten que ter outro no que pasa de ser negativa a positiva. Polo tanto, o signo do xacobiano compénsase, xa que nos ceros nos que a función pasa de positiva a negativa, a pendente é negativa nese punto e o xacobiano ten signo -1, e nos que pasa de negativa a positiva a pendente é positiva e o xacobiano terá signo $+1$. Logo, tense que $\mathrm{d}(g,(a,b),0) = 0$. (Gráfica azul na Figura 1.2).

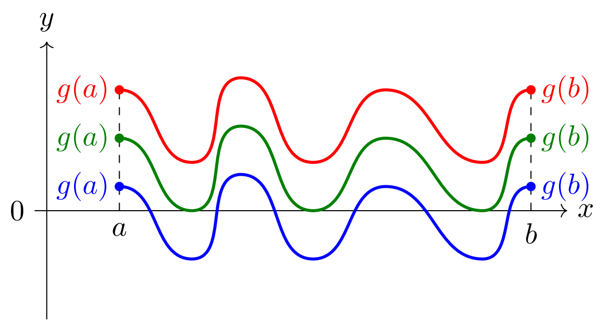

Figura 1.2: Caso I.

Caso II $g(a), g(b) < 0$.

Análogo ao caso I.

Caso III $g(a) > 0, g(b) < 0$.

Como a función cambia de signo e os extremos teñen signos distintos, podemos considerar a función igual que no Caso I pero cun cero máis. Logo por un razoamento similar ao do Caso I, apartado 3, tense que g ten que ter un número par de ceros nos que cambie de signo máis un. Estes cambios de signo equilíbranse todos entre eles menos o último que queda desemparexado. Neste, a función pasa de ser positiva a negativa, por ser $g(b) < 0$. Polo tanto a pendente no punto é negativa, e en consecuencia o signo do xacobiano é -1. Así chegamos a que $\mathrm{d}(g,(a,b),0) = -1$. Esta situación aparece representada na Figura 1.3.

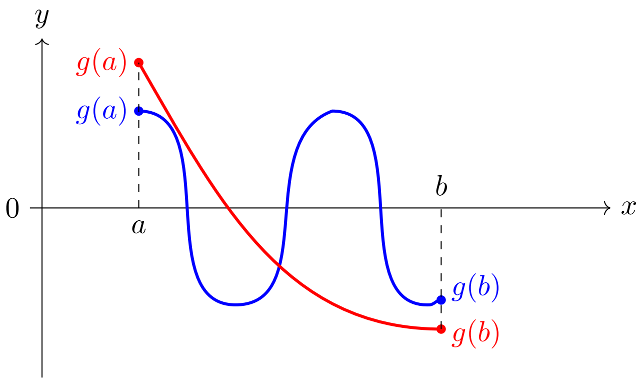

Figura 1.3: Caso III.

Caso IV $g(a) < 0, g(b) > 0$.

Razoamos de xeito análogo ao Caso III, pero neste caso o último cambio de signo da función pasa de negativo a positivo (por ser $g(b) > 0$). Polo tanto a pendente é positiva no punto, obtendo que o signo do xacobiano é $+1$ e en consecuencia $\mathrm{d}(g,(a,b),0) = +1$. Esta situación aparece representada na Figura 1.4.

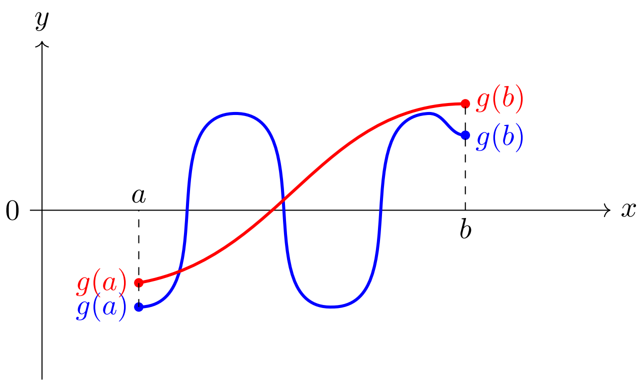

Figura 1.4: Caso IV.

En consecuencia obtemos que

$$\mathrm{d}(g,(a,b),0) = \left\{ \begin{array}{ccc} -1 & \text{se} & g(b) < 0 < g(a), \\ 0 & \text{se} & g(a)g(b) > 0, \\ +1 & \text{se} & g(a) < 0 < g(b). \end{array} \right\} = \mathrm{d}(f,(a,b),0) = \frac{1}{2}[\mathrm{sign}(f(b)) - \mathrm{sign}(f(a))].$$

□

O resultado que acabamos de probar é unha xeneralización do Teorema de Bolzano.

Teorema 1.36 (Teorema de Bolzano). *Sexa f unha función continua nun intervalo pechado $[a,b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$. Entón existe polo menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Como acabamos de ver, a Proposición 1.35 dinos que se $f(a)$ ten un signo distinto de $f(b)$ (con $f(a) \neq 0 \neq f(b)$), entón $\mathrm{d}(f,(a,b),0) = \frac{1}{2}[\mathrm{sign}(f(b)) - \mathrm{sign}(f(a))] = \pm 1$, é dicir, existe polo menos un punto $c \in (a,b)$, tal que $f(c) = 0$, e polo tanto c é un cero da función f. Así chegamos exactamente ó Teorema de Bolzano, que precisamente nos permite limitar un intervalo no que hai polo menos un cero da función f.

1.2.2. Aplicación ás ecuacións diferenciais ordinarias

Agora vexamos unha aplicación do grao de Brouwer ás ecuacións diferenciais ordinarias. En particular, empregaremos a teoría do grao para probar a existencia dunha solución periódica dunha ecuación diferencial. Para isto, introduciremos un par de resultados que precisaremos posteriormente para a demostración.

Proposición 1.37. *Sexan n impar, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conxunto aberto e limitado con $0 \in \Omega$ e $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tales que $0 \notin f(\partial\Omega)$. Entón, existen $y \in \partial\Omega$ e $\lambda \neq 0$ tales que $f(y) = \lambda y$.*

Demostración. Supoñamos, por redución ó absurdo, que $f(y) \neq \lambda y$ para todo $y \in \partial\Omega$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Entón, sexan

$$\mathrm{H}(x,t) := tx + (1-t)f(x),\ x \in \overline{\Omega},\ t \in [0,1],$$

e

$$\tilde{\mathrm{H}}(x,t) := -tx + (1-t)f(x),\ x \in \overline{\Omega},\ t \in [0,1].$$

Vexamos que $0 \notin \mathrm{H}(\partial\Omega,t)$ e $0 \notin \tilde{\mathrm{H}}(\partial\Omega,t)$ para todo $t \in [0,1]$. Supoñamos que existen $y \in \partial\Omega$ e $t \in [0,1]$ tal que $\mathrm{H}(y,t) = ty + (1-t)f(y) = 0$. Así, podemos diferenciar dous casos:

Caso I $t = 1$.

$\mathrm{H}(y,t) = y + (1-1)f(y) = 0$, é dicir, $y = 0$, e como $0 \in \Omega$, sendo Ω un conxunto aberto, chegamos a que non pode ocorrer que $0 \in \partial\Omega$, pois contradí a condición de que Ω sexa aberto. Polo tanto y non pode ser igual a 0.

Caso II $t \neq 1$.

$H(y,t) = ty + (1-t)f(y) = 0$, e despexando $f(y)$, obtemos

$$f(y) = \frac{t}{t-1}y,$$

pero esta fórmula contradí que $f(y) \neq \lambda y$ para todo $y \in \partial\Omega$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Polo tanto tense que $0 \notin H(\partial\Omega, t)$ para todo $t \in [0,1]$. De xeito análogo próbase que $0 \notin \tilde{H}(\partial\Omega, t)$ para todo $t \in [0,1]$.

Ademais, polo teorema de invariancia homotópica (Teorema 1.19), sabemos que os graos $d(H(\cdot,t),\Omega,0)$ e $d(\tilde{H}(\cdot,t),\Omega,0)$ son independentes de t. En particular, cúmprese a igualdade $H(\cdot,0) = f(\cdot) = \tilde{H}(\cdot,0)$ polo que $d(H(\cdot,0),\Omega,0) = d(\tilde{H}(\cdot,0),\Omega,0)$ e, consecuentemente, $d(H(\cdot,t),\Omega,0) = d(\tilde{H}(\cdot,t),\Omega,0)$ para todo $t \in [0,1]$. Non obstante, para $t = 1$ chegamos a unha contradición, pois

$$d(H(x,1),\Omega,0) = d(\mathrm{Id},\Omega,0) = 1$$

non é igual a

$$d(\tilde{H}(x,1),\Omega,0) = d(-\mathrm{Id},\Omega,0) = (-1)^n = -1.$$

Así concluímos que existen $y \in \partial\Omega$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $f(y) = \lambda y$, con $\lambda \neq 0$ (porque $0 \notin f(\partial\Omega)$). □

Agora enunciaremos un teorema con resultados esenciais que empregaremos posteriormente na demostración da existencia de solucións periódicas de ecuacións diferenciais. Nestes resultados, para garantir a unicidade de solución, suporemos que a función é Lipschitziana. Recordemos o que se entende por función Lipschitziana.

Definición 1.38. Dada unha función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dise que é Lipschitziana se cumpre a seguinte condición (condición de Lipschitz):

existe unha constante $k > 0$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\,\|x - y\|\,.$$

En particular unha función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dise localmente Lipschitziana se para todo punto x de $\mathbb{R}^n$ existe un entorno onde f cumpre a condición de Lipschitz.

Teorema 1.39. *Sexan $B(0,r)$ unha bola aberta en $\mathbb{R}^n$ e $f : B(0,r)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ unha función localmente Lipschitziana. Consideremos o problema de valor inicial (PVI)*

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x,t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

onde $t_0 \in \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in B(0, r)$*. Entón existe unha función*

$$\begin{aligned} x : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, t_0, x_0) &\longmapsto x(t, t_0, x_0), \end{aligned}$$

tal que, denotando por $I(t_0, x_0)$ *ó intervalo maximal no que está definida a solución, e considerando* $U := \{(t, t_0, x_0) : (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times B(0, r), t \in I(t_0, x_0)\}$*, cúmprese que:*

1. *Para cada* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times B(0, r)$*,* $x(t, t_0, x_0)$ *é continuamente diferenciable con respecto á variable* t*, e satisfai o (PVI) no intervalo aberto* $I(t_0, x_0)$*.*
2. *Se* y *é unha solución do (PVI) definida en* (α, β)*, entón* $(\alpha, \beta) \subset I(t_0, x_0)$ *e por unicidade* $y(t) = x(t, t_0, x_0)$ *para todo* $t \in (\alpha, \beta)$*.*
3. *Para todo* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times B(0, r)$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que se* $|s_0 - t_0| + |y_0 - x_0| < \delta$ *(é dicir,* (t_0, x_0) *e* (s_0, y_0) *son condicións iniciais próximas), entón* $I(t_0, x_0) \subset I(s_0, y_0)$*.*

O resultado que imos ver proba a existencia dunha solución de Floquet. Vexamos o que entendemos por solución de Floquet.

Definición 1.40. Sexan $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T > 0$ e λ unha constante non nula tales que

$$x'(t) = f(x, t) \quad \text{e} \quad x(t + T) = \lambda x(t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Entón dirase que x é unha solución de Floquet do (PVI)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(x, t), \\ x(t_0) & = & x_0. \end{array} \right.$$

En particular, se $\lambda = 1$, x dirase unha solución periódica de primeiro tipo, e se $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq 0$ dirase que x é unha solución periódica de segundo tipo.

Agora imos probar que se $f(x, \cdot)$ é periódica para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\|x_0\|$ é suficientemente pequeno, existe unha solución de Floquet do problema de valor inicial (PVI)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(x, t), \\ x(0) & = & x_0. \end{array} \right.$$

Para isto consideraremos un tipo de funcións chamadas homoxéneas que definiremos a continuación.

Definición 1.41. Dados unha función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}^n$, diremos que f é homoxénea de grao $z \in \mathbb{N}$ se $f(\alpha x) = \alpha^z f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. En particular, dirase que f é positivamente homoxénea se na definición consideramos $\alpha > 0$.

Teorema 1.42. *Sexa $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ unha función localmente Lipschitziana, con $f(\cdot, t)$ positivamente homoxénea de grao 1 e $f(x, \cdot)$ periódica, de período $T > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Entón, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $0 < \alpha \leq \delta$ existe $y_\alpha \in \overline{B}(0, \alpha)$ de xeito que o (PVI)*

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x,t), \\ x(0) &= y_\alpha, \end{cases}$$

admite unha solución de Floquet. Ademais, se n é impar, entón y_α pode ser tomado en $\partial B(0, \alpha)$.

Demostración. Diferenciaremos dous casos:

Caso 1 n é impar.

Por ser f continua e positivamente homoxénea de grao 1, sabemos que $f(0, t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entón tense que, a función $x(t) \equiv 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, é unha solución do problema

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x,t), \\ x(0) &= 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Logo, polo apartado 2 do Teorema 1.39, sabemos que esta é a única solución de (1.1) e ademais está definida no intervalo maximal $I(0, 0) = \mathbb{R}$.

Denotemos por $x(t, 0, c)$ á solución do problema

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x,t), \\ x(0) &= c. \end{cases} \tag{1.2}$$

Agora, polo Teorema 1.39 apartado 3, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que se $\|c\| \leq \delta$ entón o (PVI) (1.2) admite unha única solución maximal definida nun intervalo que contén ao intervalo maximal de (1.1), e en consecuencia $I(0, c) = \mathbb{R}$.

Tomemos α tal que $0 < \alpha \leq \delta$ e definamos unha función $F : \overline{B}(0, \alpha) \to \mathbb{R}^n$ como $F(c) := x(T, 0, c)$. Recordemos que $x(T, 0, c)$ é a solución maximal de (1.2) avaliada en T. Logo, F está nas condicións do Teorema 1.39, e por tanto, polo apartado 1 deste teorema, sabemos que é continua.

Por outro lado, tense que $F(c) = 0$ se e só se $c = 0$. Vexamos isto:

- Se $c = 0$ entón o problema (1.2) coincide con (1.1). Como a única solución de (1.1) é a función constante igual a 0, entón $x(t, 0, c) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e por tanto $F(c) = x(T, 0, 0) = 0$.

- Se $F(c) = 0$ entón $x(t, 0, c)$ é solución de

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x,t), \\ x(T) &= 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

  Ademais como a función constante igual a 0 tamén é solución de (1.3) tense, por unicidade de solución, que $x(t, 0, c) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En particular, como $x(0, 0, c) = c$, entón $c = 0$.

Consecuentemente, $0 \notin F(\partial B(0, \alpha))$.

Sabemos, pola Proposición 1.37, que existen dous valores $\lambda > 0$ e $c_\alpha \in \partial B(0, \alpha)$ tales que $F(c_\alpha) = \lambda c_\alpha$. Consideremos agora dúas funcións, $\phi(t) := \lambda x(t, 0, c_\alpha)$ e $\psi(t) := x(t + T, 0, c_\alpha)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Vexamos que as dúas cumpren as condicións para ser solución de (1.2) con $c = c_\alpha$:

$$\begin{cases} \phi'(t) &= \lambda x'(t, 0, c_\alpha) = \lambda f(x(t, 0, c_\alpha), t) = f(\lambda x(t, 0, c_\alpha), t) = f(\phi(t), t), \\ \phi(0) &= \lambda x(0, 0, c_\alpha) = \lambda c_\alpha, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \psi'(t) &= x'(t + T, 0, c_\alpha) = f(x(t + T, 0, c_\alpha), t) = f(x(t + T, 0, c_\alpha), t + T) \\ &= f(\psi(t), t + T) = f(\psi(t), t), \\ \psi(0) &= x(T, 0, c_\alpha) = F(c_\alpha) = \lambda c_\alpha. \end{cases}$$

Así, por unicidade de solución de (1.2) concluímos que $\phi(t) = \psi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e en consecuencia, (1.2) admite unha solución de Floquet.

Caso 2 n é par.

Definamos $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ como $g(x, x_{n+1}, t) := (f(x, t), x_{n+1})$.

Como $n + 1$ é impar, existe $(y, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, tal que $\|(y, y_{n+1})\| = \alpha$, para o cal o problema

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x'(t) \\ x'_{n+1}(t) \end{pmatrix} &= g(x, x_{n+1}, t), \\ \begin{pmatrix} x(0) \\ x_{n+1}(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y \\ y_{n+1} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

admite unha solución de Floquet. Isto débese a que se desenvolvemos os dous membros do sistema estamos nas condicións do caso impar, vexámolo:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ x'_{n+1}(t) \end{pmatrix} = g(x, x_{n+1}, t) = \begin{pmatrix} f(x, t) \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

e engadindo as condicións iniciais obtemos o sistema,

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x,t), \\ x'_{n+1}(t) &= x_{n+1}, \\ x(0) &= y, \\ x_{n+1}(0) &= y_{n+1}. \end{cases}$$

que, analogamente ao Caso 1, admite unha solución de Floquet para certo valor inicial y cumprindo $\|y\| \leq \alpha$.

□

Acabamos de probar que todo problema de valor inicial baixo certas condicións admite unha solución de Floquet, e en particular, unha solución periódica.

1.2.3. Relación entre o índice complexo e o grao de Brouwer

Outra aplicación distinta do grao de Brouwer é a relacionada coa variable complexa.

Pódense consultar as definicións que empregaremos en [12]. Denotemos por $\mathbb{C}$ ó plano complexo. Comezaremos vendo a relación que hai entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$. Para isto precisamos definir previamente as funcións holomorfas.

Definición 1.43. Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conxunto aberto e limitado, dise que $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ é unha función holomorfa en Ω se f é derivable en todo punto de Ω.

Sexa $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conxunto aberto e limitado e $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ unha función holomorfa en Ω. Identificaremos $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ usando a correspondencia canónica

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Así, podemos considerar Ω como un conxunto aberto e limitado en $\mathbb{R}^2$ e f como unha aplicación que vai de Ω en $\mathbb{R}^2$ mediante a correspondencia

$$f = u + iv \longleftrightarrow f = (u, v).$$

Probaremos a continuación que o grao topolóxico é o mesmo que o índice complexo. Definamos este segundo concepto.

Definición 1.44. Sexa $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conxunto aberto e limitado e supoñamos que $\partial\Omega$ é unha curva pechada de clase 1. Sexan $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ unha funcion holomorfa e $b \notin f(\partial\Omega)$. Definimos o índice de f en b con respecto a $\partial\Omega$ como

$$\operatorname{Ind}(f, \Omega, b) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z) - b} \mathrm{d}z.$$

Agora introduciremos unha serie de resultados que nos facilitarán ver que o grao e o índice son o mesmo.

Lema 1.45 (Lema de Cauchy). *Sexa Ω un conxunto convexo, $z_0 \in \Omega$ e $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ unha función holomorfa en $\Omega \backslash \{z_0\}$. Entón, existe unha función holomorfa en Ω, F, tal que $F' = f$.*

Lema 1.46. *Sexan f unha función holomorfa en Ω e non constante, $z_0 \in \Omega$ e $w_0 = f(z_0)$. Entón:*

1. *Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que z_0 é un cero de $f - w_0$ de orde m, é dicir, existe unha función holomorfa g con $g(z_0) \neq 0$, tal que $f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z)$.*

2. *Existe unha veciñanza aberta de z_0, V, e unha función holomorfa, φ, tal que se cumpre a igualdade $f(z) = w_0 + (\varphi(z))^m$ e φ é unha bixección de V en $B(0, r)$ para certo $r > 0$.*

Demostración. Supoñamos, sen perda de xeneralidade, que $\Omega = B(z_0, R_1)$ e $f(z)$ vén dada por $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ para todo $z \in B(z_0, R_1)$.

1. Sexa $f(z_0) = w_0$. Como f é non constante, existe un n tal que $a_n \neq 0$. Sexa $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$, $a_m \neq 0$. Podemos escribir f como:

$$f(z) = (z - z_0)^m \left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m+n} (z - z_0)^n \right].$$

   Logo, basta considerar $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m+n} (z - z_0)^n$, e así,

$$f(z) - w_0 = f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m \left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m+n} (z - z_0)^n \right] - 0 = (z - z_0)^m g(z),$$

   sendo g unha función holomorfa en $B(z_0, R_1)$ tal que $g(z_0) \neq 0$.

2. Sexa $0 < R_2 \leq R_1$ tal que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in B(z_0, R_2)$. Entón, $\frac{g'(z)}{g(z)}$ é unha función holomorfa en $B(z_0, R_2)$. Polo Lema de Cauchy (Lema 1.45), existe unha función holomorfa en $B(z_0, R_2)$, h, tal que $h' = \frac{g'}{g}$.

   Se derivamos ge^{-h}:

$$(ge^{-h})' = g'e^{-h} - h'ge^{-h} = ge^{-h} \left(\frac{g'}{g} - h' \right) = 0.$$

Así, por ser $B(z_0, R_2)$ un conxunto conexo, deducimos que existe unha constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $g(z)e^{-h(z)} = c$ para todo $z \in B(z_0, R_2)$. Logo, podemos definir unha función $\varphi(z) := (z - z_0)c^{\frac{1}{m}} e^{\frac{h(z)}{m}}$ holomorfa en $B(z_0, R_2)$ e tal que ao elevala a m nos queda $(\varphi(z))^m := (z - z_0)^m c\, e^{h(z)} = g(z)(z - z_0)^m$ (posto que de $g(z)e^{-h(z)} = c$ dedúcese que $g(z) = ce^{h(z)}$).

Aplicando o apartado 1) temos $f(z) = w_0 + (\varphi(z))^m$ para todo $z \in B(z_0, R_2)$ e $\varphi(z_0) = 0$.

Volvendo a expresión de φ e derivando con respecto a z, obtemos:

$$\varphi'(z) = c^{\frac{1}{m}} e^{\frac{h(z)}{m}} \left(1 + \frac{z - z_0}{m} h'(z)\right),$$

e ademais, $\varphi'(z_0) = c^{\frac{1}{m}} e^{\frac{h(z_0)}{m}} \neq 0$. Estamos entón nas condicións do Teorema da Función Inversa, polo que sabemos que existe un conxunto aberto V contendo a z_0 tal que $\varphi : V \to B(0, r)$ é unha bixección para algún $r > 0$.

□

Vexamos tres resultados moi coñecidos da variable complexa, que precisaremos a posteriori. Comecemos polo Teorema Integral de Cauchy (véxase [3, Teorema 6.6]).

Definición 1.47. Dise que un espazo topolóxico é simplemente conexo se é conexo por camiños e o seu grupo fundamental é o trivial.

Teorema 1.48 (Teorema Integral de Cauchy)**.** *Sexan Ω un subconxunto aberto e simplemente conexo de $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ unha función holomorfa en Ω. Entón, se γ é unha curva pechada de Ω e de $\mathcal{C}^1$ a anacos, tense que*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Introduciremos a Fórmula Integral de Cauchy sen demostración, que pode consultarse en [12, Teorema 10.15].

Teorema 1.49 (Fórmula Integral de Cauchy)**.** *Sexan Ω un subconxunto aberto e conexo de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ unha función holomorfa e $a \in \Omega$ e $r \in \mathbb{R}^+$ tales que o disco de centro a e radio r pechado está contido en Ω. Entón, para todo punto z_0 pertencente ao disco aberto tense que*

$$\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0).$$

onde $D(a, r)$ denota ó disco aberto de centro a e radio r.

A continuación, enunciaremos o Teorema de Cauchy-Riemann (véxase [12, Teorema 11.2]).

Teorema 1.50 (Teorema de Cauchy-Riemann). *Sexan Ω un conxunto aberto, a función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $a + ib$ un punto interior de Ω. Se escribimos*

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x, y), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x, y),$$

entón f é diferenciable como función complexa en $a + ib$ se, e só se, se cumpren as dúas condicións seguintes:

1. *u e v son diferenciables como funcións de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ no punto (a, b);*
2. *$\frac{\partial u}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a, b)$ e $\frac{\partial u}{\partial y}(a, b) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a, b)$ (ecuacións de Cauchy-Riemann).*

Observación 1.51. Polo Teorema de Cauchy-Riemann, tense que

$$J_f = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = |f'|^2 \geq 0 \quad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Estamos en condicións de enunciar o resultado que afirma que o grao é igual ao índice.

Proposición 1.52. *Sexa $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conxunto aberto, limitado e conexo tal que $\partial\Omega$ é unha curva pechada de clase 1. Dados $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ unha función holomorfa e $b \notin f(\partial\Omega)$, entón*

$$\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \operatorname{Ind}(f, \Omega, b).$$

Demostración. Podemos diferenciar dous casos:

Caso 1 f función constante.

Supoñamos que $f(z) = c$ para todo $z \in \Omega$. Temos que $b \in \mathbb{C}\backslash f(\overline{\Omega})$ para todo $b \in \mathbb{C}\backslash f(\partial\Omega)$ e polo tanto $\mathrm{d}(f, \Omega, b) = 0$. Ademais, $\operatorname{Ind}(f, \Omega, b) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{0}{c-b}\mathrm{d}z = 0$. En consecuencia, chegamos a que $\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \operatorname{Ind}(f, \Omega, b)$.

Caso 2 f función non constante en Ω.

Podénse dar dúas situacións:

1. Se $b \notin f(\overline{\Omega})$, entón $\mathrm{d}(f, \Omega, b) = 0$ e $\frac{f'(z)}{f(z)-b}$ é unha función holomorfa en $\overline{\Omega}$. Ademais, por hipótese $\partial\Omega$ é unha curva pechada de clase 1 e por tanto Ω é simplemente conexo. Así, aplicando o Teorema Integral de Cauchy, obtemos que a integral desta función na curva $\partial\Omega$ vale 0: $\int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)-b}\mathrm{d}z = 0$. Chegamos entón ao resultado, $\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \operatorname{Ind}(f, \Omega, b)$.
2. Se $b \in f(\Omega)$, como f non é constante, $f^{-1}(b) = \{z_1, \dots, z_k\}$ é finito (isto pode probarse de xeito análogo á Observación 1.3). Polo Lema 1.46, para cada j con $j = 1, \dots, k$ existen $R_j > 0$ e $\varphi_j : B(z_j, R_j) \to \mathbb{C}$ tales que

- as funcións φ_j son holomorfas en $B(z_j, R_j)$ con $B(z_j, R_j) \subset \Omega$,
- $\varphi_j : B(z_j, R_j) \to \varphi_j(B(z_j, R_j))$ é unha bixección,
- $f(z) - b = (z - z_j)^{m_j} g_j(z)$ para todo $z \in B(z_j, R_j)$,
- $(\varphi_j(z))^{m_j} = (z - z_j)^{m_j} g_j(z)$ para todo $z \in B(z_j, R_j)$,

para certas funcións g_j holomorfas en $B(z_j, R_j)$, onde para cada $j = 1, \dots, k$, m_j representa a multiplicidade da raíz z_j.
Se consideramos $R := \frac{1}{2} \text{mín}\{R_1, \dots, R_k\}$, entón

$$\operatorname{Ind}(f, \Omega, b) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z) - b} \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_j, R)} \frac{f'(z)}{f(z) - b} \mathrm{d}z.$$

Isto débese a que $z_1, \dots, z_k \in \Omega$ e polo tanto calcular a integral na curva $\partial\Omega$ é equivalente á suma das integrais de cada curva $\partial B(z_j, R)$, que contén a cada raíz z_j.
Probemos agora que $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_j, R)} \frac{f'(z)}{f(z)-b} \mathrm{d}z = m_j$. Para isto basta con derivar a expresión que temos de f e substituír na integral. É dicir, derivamos a función $f(z) = b + (z - z_j)^{m_j} g_j(z)$ con respecto a z:

$$f'(z) = (z - z_j)^{m_j - 1} \left[m_j g_j(z) + (z - z_j) g_j'(z) \right],$$

e substituímos,

$$\int_{\partial B(z_j, R)} \frac{f'(z)}{f(z) - b} \mathrm{d}z = \int_{\partial B(z_j, R)} \frac{m_j}{z - z_j} \mathrm{d}z + \int_{\partial B(z_j, R)} \frac{g_j'(z)}{g_j(z)} \mathrm{d}z = 2\pi i m_j.$$

Esta igualdade obtense, por un lado aplicando a Fórmula Integral de Cauchy, que nos permite calcular a primeira integral, obtendo $2\pi i m_j$, xa que neste caso, m_j é unha función constante. Por outro, a segunda integral é igual a 0, por tratarse dunha función holomorfa integrada nunha curva pechada de clase 1, é dicir, en virtude do Teorema Integral de Cauchy, a segunda integral vale cero.
Logo, por definición de índice (Definición 1.44), $\operatorname{Ind}(f, \Omega, b) = \sum_{j=1}^{k} m_j$.

Para obter a igualdade, só nos queda por probar que $\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \sum_{j=1}^{k} m_j$.

Sexa C a compoñente conexa de $\mathbb{C} \setminus f(\partial\Omega)$ contendo a b. C é un conxunto aberto por construción. Ademais, existe $\delta_0 > 0$ tal que $b + \delta \in C$ para todo δ tal que $|\delta| < \delta_0$ e polo Teorema 1.17 tense que

$$\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \mathrm{d}(f, \Omega, b + \delta) \text{ para todo } \delta \text{ tal que } |\delta| < \delta_0.$$

Polo Lema 1.46, sabemos que $f(z) = b + \delta$ é equivalente a $b + (\varphi(z))^{m_j} = b + \delta$ para todo $z \in B(z_j, R)$, ou, o que é o mesmo $(\varphi(z))^{m_j} = |\delta| e^{2\pi i\theta}$ con $e^{2\pi i\theta} = \frac{\delta}{|\delta|}$ e $\theta \in [0, 1)$. Como φ_j son inxectivas en $B(z_j, R)$, a ecuación $(\varphi_j(z))^{m_j} = |\delta| e^{2\pi i\theta}$ ten exactamente m_j solucións distintas en $B(z_j, R)$ para todo $|\delta| < \delta_1$, sendo δ_1 da forma $\delta_0 > \delta_1 > 0$. Denotemos estas solucións por $z_j^1, \dots, z_j^{m_j}$. Derivando f con respecto a unha solución obtemos:

$$f'\left(z_j^l\right) = m_j \left(\varphi_j\left(z_j^l\right)\right)^{m_j - 1} \varphi_j'\left(z_j^l\right) \neq 0.$$

En conclusión, usando a Definición de grao 1.2 e a Observación 1.51, obtemos

$$\mathrm{d}(f, \Omega, b + \delta) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{m_j} \mathrm{sign}(J_f(z_j^l)) = \sum_{j=1}^{k} m_j.$$

Chegamos así ao resultado, $\mathrm{d}(f, \Omega, b) = \mathrm{Ind}(f, \Omega, b)$.

□

1.2.4. Teorema Fundamental da Álxebra

Veremos agora como podemos probar o Teorema Fundamental da Álxebra empregando a teoría do grao.

Proposición 1.53. *Sexa $g(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n$ un polinomio con coeficientes complexos na variable complexa z tal que $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| < 1$. Entón g ten unha raíz no disco unidade $D \subset \mathbb{C}$.*

Demostración. Identificaremos $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ (como vimos despois da Definición 1.43). Comecemos calculando $\mathrm{d}(f, D, 0)$ para $f(z) = z^n$. Como o 0 é unha singularidade de f, sabemos que, sen perda de xeneralidade, podemos considerar un valor regular, suficientemente próximo a 0, β, tal que $\mathrm{d}(f, D, 0) = \mathrm{d}(f, D, \beta)$. Sabemos que f é un polinomio de orde n e $J_f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (consecuencia da Observación 1.51). Aplicando a definición de grao, tense que

$$\mathrm{d}(f, D, 0) = \mathrm{d}(f, D, \beta) = \sum_{z \in f^{-1}(\beta)} \mathrm{sign}(J_f(x, y)) = \sum_{z \in f^{-1}(\beta)} +1 = n,$$

onde a última igualdade se debe a que $f(z) = z^n = \beta$ ten n solucións, as n raíces complexas de β.

Para probar o noso resultado, consideremos a homotopía $\mathrm{H} : \overline{D} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\mathrm{H}(z, t) = z^n + t(a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n)$ de xeito que $\mathrm{H}(z, 0) = z^n$ e $\mathrm{H}(z, 1) = g(z)$.

Así, como por hipótese $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| < 1$, tense que

$$\begin{aligned} \left|a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n\right| &\leq |a_1| \left|z^{n-1}\right| + |a_2| \left|z^{n-2}\right| + \cdots + |a_n| \\ &\leq |a_1| |z|^{n-1} + |a_2| |z|^{n-2} + \cdots + |a_n| \\ &\leq |a_1| |z|^n + |a_2| |z|^n + \cdots + |a_n| |z|^n \\ &= (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|) |z|^n < |z|^n \end{aligned}$$

e polo tanto $0 \notin \mathrm{H}(\partial D \times [0,1])$ xa que

$$\begin{aligned} |\mathrm{H}(z,t)| = \left|z^n + t(a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n)\right| &\geq |z^n| - |t| \left|a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n\right| \\ \geq |z|^n - \left|a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n\right| &> |z|^n - |z|^n = 0 \quad \forall\, z \in \partial D \text{ e } \forall\, t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Logo, estamos en condicións de aplicar a propiedade de invariancia homotópica. Polo Teorema 1.19, tense que $\mathrm{d}(g(z), D, 0) = \mathrm{d}(z^n, D, 0) = n$ e por tanto, $\mathrm{d}(g(z), D, 0) = n$, é dicir, a ecuación $g(z) = 0$ ten solución (ou, o que é o mesmo, $g(z)$ ten unha raíz), polo que temos probado o resultado. □

Probemos entón o Teorema Fundamental da Álxebra.

Teorema 1.54. *Todo polinomio con coeficientes complexos, de grao maior que cero, ten unha raíz complexa.*

Demostración. Sexa $h(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ un polinomio con coeficientes complexos. Queremos ver que o polinomio $h(z)$ ten polo menos unha raíz complexa. Para isto, consideramos o cambio de variable $z = cw$ con $c > 0$ e $w \in \mathbb{C}$, tal que

$$\left|\frac{a_1}{c}\right| + \left|\frac{a_2}{c^2}\right| + \cdots + \left|\frac{a_n}{c^n}\right| < 1.$$

Entón, $h(w) = (cw)^n + a_1(cw)^{n-1} + \cdots + a_n = c^n w^n + (a_1 c^{n-1}) w^{n-1} + \cdots + a_n$.

Por outra parte, definimos o polinomio

$$g(w) = \frac{1}{c^n} h(w) = w^n + \frac{a_1}{c} w^{n-1} + \cdots + \frac{a_n}{c^n}.$$

Por construción sabemos que g está nas condicións da Proposición 1.53 e polo tanto ten polo menos unha raíz complexa. Así, como h non é máis que a función g multiplicada por unha constante, as raíces de g tamén o son de h e obtemos o resultado buscado. □

1.2.5. Teorema da bola peluda

O grao de Brouwer tamén se pode empregar para probar o Teorema da bola peluda. Para isto, definamos primeiro o concepto de campo vectorial, que pode ser consultado en [5, páxina 179 Def. 1].

Definición 1.55. Sexan $S \subset \mathbb{R}^n$ unha superficie e $p \in S$. Denotaremos por $T_p(S)$ ao plano formado polo conxunto de vectores tanxentes a p en S.

Definición 1.56. Sexa Ω un subconxunto aberto de $S \subset \mathbb{R}^n$. Un campo vectorial é unha función $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que a cada punto x de Ω lle asigna un único vector, $\varphi(x) \in T_p(S)$.

Proposición 1.57 (Teorema da bola peluda)**.** *Dado un número n impar, non existen campos vectoriais continuos que non se anulen en $\mathbb{S}^{n-1}$, é dicir, non existe ningunha aplicación continua $\varphi : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(x) \neq 0$ e $(\varphi(x), x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$.*

Demostración. Imos probar o resultado por redución ó absurdo. Supoñamos que existe tal aplicación φ, e sexa $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\|\varphi(x)\|}$. Definamos unha homotopía $\mathrm{H} : \mathbb{S}^{n-1} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ dada por $\mathrm{H}(x,t) = \cos(\pi t)x + \operatorname{sen}(\pi t)\psi(x)$. Entón $\mathrm{H}(x,0) = x$ e $\mathrm{H}(x,1) = -x$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Ademais, $\mathrm{H}(x,t) \in \mathbb{S}^{n-1}$ xa que $\|\mathrm{H}(x,t)\| = 1$. Vexámolo:

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{H}(x,t)\|^2 &= (\mathrm{H}(x,t), \mathrm{H}(x,t)) = (\cos(\pi t)x + \operatorname{sen}(\pi t)\psi(x), \cos(\pi t)x + \operatorname{sen}(\pi t)\psi(x)) \\
&= (\cos(\pi t)x, \cos(\pi t)x) + 2(\cos(\pi t)x, \operatorname{sen}(\pi t)\psi(x)) + (\operatorname{sen}(\pi t)\psi(x), \operatorname{sen}(\pi t)\psi(x)) \\
&= \cos^2(\pi t)\,\|x\|^2 + 2\cos(\pi t)\operatorname{sen}(\pi t)(x, \psi(x)) + \operatorname{sen}^2(\pi t)\,\|\psi(x)\|^2 \\
&= \cos^2(\pi t) + \operatorname{sen}^2(\pi t) = 1,
\end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade obtense como consecuencia de que x e $\psi(x)$ son vectores unitarios, e ademais supuxemos $(x, \varphi(x)) = 0$.

Pola propiedade de invariancia homotópica, tense que para todo $b \notin \mathrm{H}(\partial\mathbb{S}^{n-1} \times [0,1])$ se cumpre que $\mathrm{d}(x, \mathbb{S}^{n-1}, b) = \mathrm{d}(-x, \mathbb{S}^{n-1}, b)$, o cal non é certo, xa que é claro que $\operatorname{sign}(J_x(x)) \neq \operatorname{sign}(J_{-x}(x))$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Así, podemos concluír que non existe esa aplicación, e por tanto temos o resultado buscado. □

Logo podemos afirmar que non existe ningún campo continuo de vectores tanxentes (que sempre sexan distintos de cero) en ningunha esfera da forma $\mathbb{S}^{n-1}$ con n impar. Cabe destacar que existen outras demostracións alternativas deste resultado, como por exemplo a levada a cabo por Milnor (véxase [10]).

1.2.6. Teorema do punto fixo de Brouwer

Agora introduciremos a definición de punto fixo para probar o Teorema do punto fixo de Brouwer.

Definición 1.58. Un punto fixo dunha función é aquel cuxa imaxe é el mesmo. É dicir, x é un punto fixo de f se, e só se, $f(x) = x$.

Chegamos así ao Teorema do punto fixo de Brouwer.

Teorema 1.59 (Teorema do punto fixo de Brouwer). *Sexa Ω un subconxunto aberto de $\mathbb{R}^n$ tal que $\overline{\Omega}$ é homeomorfo á bola unidade pechada de $\mathbb{R}^n$, $\overline{B}$. Se $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ e $f(\overline{\Omega}) \subset \overline{\Omega}$, entón f ten un punto fixo en $\overline{\Omega}$.*

Demostración. Sexan $h : \overline{\Omega} \to \overline{B}$ o homeomorfismo entre $\overline{\Omega}$ e $\overline{B}$ e $\psi = h \circ f \circ h^{-1}$. Observemos que ψ leva $\overline{B}$ en si mesma e é continua. Para probar o teorema só precisamos ver que ψ ten un punto fixo $y \in \overline{B}$, $\psi(y) = y$. Así existiría $x \in \overline{\Omega}$ tal que $y = h(x)$ e $(h \circ f)(x) = h(x)$ e, como h é un homeomorfismo e $f(x) \in \overline{\Omega}$, chegariamos a que $f(x) = x$. É dicir, basta con probar que $\psi(y) = y$ para algún $y \in \partial B$.

Supoñamos entón, por redución ao absurdo, que $\psi(y) \neq y$ para todo $y \in \partial B$ e chegaremos a unha contradición.

Consideremos a homotopía $H : \overline{B} \times [0,1] \to \overline{B}$ dada por $H(y,t) = y - t\psi(y)$. Temos que $t\psi(y) \in B$ para todo $y \in \partial B$ e $t \in [0,1)$, e en consecuencia, $H(t,y) \neq 0$.

Ademais, por hipótese, $0 \notin H(y,1)$ con $y \in \partial B$. Aplicando o Teorema 1.19 de invariancia homotópica tense que $\mathrm{d}(\mathrm{Id} - \psi, B, 0) = \mathrm{d}(\mathrm{Id}, B, 0) = 1$, sendo Id a aplicación identidade. Entón, pola Proposición 1.24 existe $y \in B$ tal que $\psi(y) = y$. Polo tanto chegamos así a que $x = h^{-1}(y)$ é un punto fixo da aplicación f en Ω. $\square$

Corolario 1.60. *Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é un subespazo compacto e convexo e $f : K \longrightarrow K$ é continua, entón f ten un punto fixo.*

Demostración. Por ser K compacto, existe unha bola pechada, $\overline{B}(0,R)$, con $K \subset \overline{B}(0,R)$. Como K é pechado e convexo, consideremos a aplicación proxección, $P_K : \mathbb{R}^n \to K$, de forma que dado $x \in \mathbb{R}^n$, $P_K(x)$ é o único punto tal que

$$|x - P_K(x)| = \min_{y \in K} |x - y| .$$

Definamos así a función $\tilde{f} : \overline{B}(0,R) \to K \subset \overline{B}(0,R)$ dada por $\tilde{f}(x) = f(P_k(x))$. Logo, por construción, $\tilde{f}$ ten un punto fixo. En particular, como a imaxe de $\tilde{f}$ está contida en K, o punto fixo, denotémolo x_0, tamén está en K. Disto séguese que $P_K(x_0) = x_0$, polo que chegamos a que

$$x_0 = f(P_K(x_0)) = f(x_0).$$

$\square$

O Teorema do Punto Fixo de Brouwer, así como o seu corolario, teñen importantes aplicacións.

Podemos demostrar o Teorema de Perron-Frobenius empregando estos resultados.

Teorema 1.61 (Teorema de Perron-Frobenius). *Sexa $A = (a_{ij})$ unha matriz cadrada $n \times n$ tal que $a_{ij} \geq 0$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Entón existe un autovalor $\lambda \geq 0$ cun autovector asociado $x \neq 0$, $x_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Demostración. Definamos

$$K := \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \, x_i \geq 0, i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

un conxunto compacto e convexo en $\mathbb{R}^n$.

Se $Ax = 0$ para algún $x \in K$, entón é suficiente con considerar $\lambda = 0$.

Supoñamos que $Ax \neq 0$ para todo $x \in K$. Dado $x \in K$, como $a_{ij} \geq 0$ e $x_i \geq 0$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, entón, existe un i_0 tal que $(Ax)_{i_0} > 0$. Logo, como $(Ax)_j \geq 0$ para todo j, tense que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (Ax)_j > 0$. Podemos definir así a función continua

$$\begin{aligned} f : K &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)), \end{aligned}$$

con

$$f_i(x) = \frac{(Ax)_i}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (Ax)_j}, \quad \text{para } i \in \{1, \dots, n\},$$

que está ben definida xa que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$ e $f_i(x) \geq 0$ para todo $x \in K$. Por tanto, polo Corolario 1.60 tense que f ten un punto fixo, $x_0 \in K$, tal que $f(x_0) = x_0$. Fixando $\lambda := \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (Ax_0)_j$, chegamos a que, $Ax_0 = \lambda x_0$. $\square$

Capítulo 2

O grao de Leray-Schauder

O noso obxectivo neste capítulo é estender os resultados do Capítulo 1 para espazos de dimensión infinita. Para isto, apoiarémonos no Capítulo 3 de [7] e no Capítulo 4 de [8].

O entorno máis natural que podemos considerar para traballar con espazos de dimensión infinita é un espazo vectorial topolóxico que sexa localmente convexo. Pero, por comodidade, cosideraremos un espazo lineal normado. Isto pódese facer sen perda de xeneralidade, pois os métodos empregados son adaptables para espazos localmente convexos.

Antes de nada precisamos definir o espazo no que imos traballar, chamado espazo de Banach.

Definición 2.1. Un espazo de Banach é un espazo vectorial normado e completo, é dicir, que está definido por unha norma e toda sucesión de Cauchy do espazo é converxente.

Empregaremos notación análoga á do Capítulo 1; en particular Ω denotará un subconxunto aberto e limitado de X con clausura $\overline{\Omega}$ e fronteira $\partial\Omega$ e b un punto de X. Queremos definir un número enteiro $\mathrm{d}(f, \Omega, b)$ para unha clase de funcións adecuadas, $f : \overline{\Omega} \to X$. Calquera definición apropiada de grao debe cumprir:

1. $\mathrm{d}(\mathrm{Id}, \Omega, b) = +1$ para todo $b \in \Omega$.

2. Se $\mathrm{d}(f, \Omega, b) \neq 0$ entón $f(x) = b$ para algún $x \in \Omega$.

3. Se $\mathrm{H}(x, t)$ é unha homotopía con $b \notin \mathrm{H}(\partial\Omega, t)$ para todo $t \in [0, 1]$, entón $\mathrm{d}(\mathrm{H}(\cdot, t), \Omega, b)$ é independente de t.

Nos espazos de dimensión finita, o grao definiuse para a clase das funcións continuas. Pero no caso dos espazos de dimensión infinita teremos certas restricións sobre as funcións. Vexamos un exemplo dado por Leray que dá mostra disto.

Exemplo 2.2. Sexa X un espazo de Banach de funcións continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ coa norma

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|\,.$$

Sexan f_0 a función constante $f_0(x) = \frac{1}{2}$ para todo $x \in [0,1]$, e Ω un conxunto aberto e limitado dado por $\Omega = \{f \in X \,/\, \|f - f_0\|_\infty < \frac{1}{2}\}$. Escollemos unha función $g \in X$ tal que $g(x) \in [0,1]$ para todo $x \in [0,1]$, $g(0) = 0$ e $g(1) = 1$ de xeito que ao definir a aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : \overline{\Omega} &\longrightarrow X \\ f &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

cúmprese que $\Phi(\overline{\Omega}) \subset \overline{\Omega}$.

Consideremos a homotopía

$$\mathrm{H}(f,t) = t\Phi(f) + (1-t)f, \text{ para todo } f \in \overline{\Omega} \text{ e } t \in [0,1].$$

Se $h \in \partial\Omega$, entón $\|f_0 - h\|_\infty = \frac{1}{2}$, con $h(x) \in [0,1]$ para todo $x \in [0,1]$. En particular existe un $x_0 \in [0,1]$ tal que $h(x_0) = 0$ ou $h(x_0) = 1$.

- Se $h(x_0) = 0$ temos que $\mathrm{H}(h(x_0),t) = t\Phi(0) = tg(0) = 0$.
- Se $h(x_0) = 1$ temos que $\mathrm{H}(h(x_0),t) = t\Phi(1) + (1-t) = tg(1) + 1 - t = 1$.

Como supuxemos $h(x) \in [0,1]$ e $g(x) \in [0,1]$ para todo $x \in [0,1]$, por construción de $\Phi(h(x)) = g(h(x))$ tense que $\mathrm{H}(h(x),t) \in [0,1]$ tamén. En consecuencia, se $h(x) \in \partial\Omega$ entón $\mathrm{H}(h(x),t) \in \partial\Omega$ para todo $t \in [0,1]$.

Supoñamos que se dan as tres propiedades que pedimos como desexables para unha definición de grao apropiada. Tomamos un elemento $\gamma \in \Omega$. Como $\mathrm{H}(\partial\Omega,t) \subset \partial\Omega$ para todo $t \in [0,1]$, a condición 3 aplicada sobre a homotopía $\mathrm{H}(\cdot,t)$ implica que

$$\mathrm{d}(\Phi,\Omega,\gamma) = \mathrm{d}(\mathrm{Id},\Omega,\gamma).$$

onde a condición 1 nos di que $\mathrm{d}(\mathrm{Id},\Omega,\gamma) = 1$ e aplicando a condición 2 deducimos que existe unha solución en Ω da ecuación $\Phi(f) = \gamma$ para algún $f \in \Omega$.

Pero esta conclusión non é certa. Vexamos un contraexemplo, definindo as funcións γ e g como segue:

$$\gamma(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x,$$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 1 - x & \text{se} \quad x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right], \\ \frac{5}{3}(x-1) + 1 & \text{se} \quad x \in \left(\frac{5}{8}, 1\right]. \end{cases}$$

Se f é unha solución de $\Phi(f) = \gamma$, entón para $x = 0$ temos que $\gamma(0) = \frac{1}{4}$ e polo tanto $\Phi(f(0)) = g(f(0)) = \frac{1}{4}$, de onde $f(0) = \frac{1}{4}$. Así $g(f(x))$ pode aumentar dende $\frac{1}{4}$ ata $\frac{1}{2}$ antes de comezar a decrecer. Pola contra $\gamma(x)$ aumenta de $\frac{1}{4}$ a $\frac{3}{4}$ sen decrecer en ningún momento. Polo tanto, non podemos atopar unha función f axeitada en Ω. Isto pódese ver claramente na representación das gráficas das funcións γ e g na Figura 2.1.

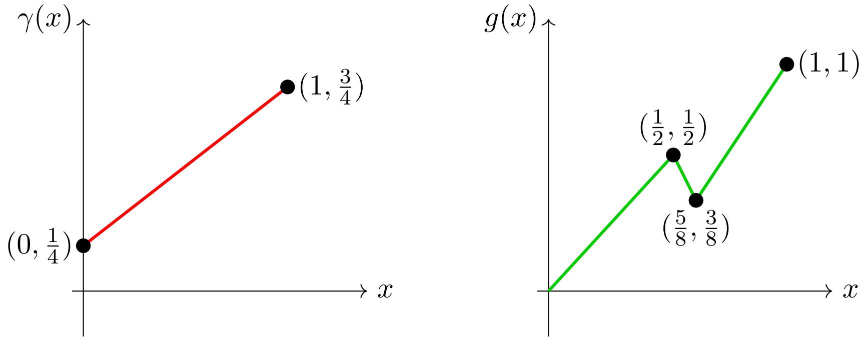

Figura 2.1: Gráficas de γ e g.

Logo, á vista do exemplo, non podemos establecer unha definición de grao correcta para as funcións continuas que van de $\overline{\Omega}$ en X, senón que teremos que restrinxirnos a unha clase particular de funcións de $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ chamadas perturbacións compactas da identidade. Introduciremos previamente un par de conceptos para poder definir estas funcións particulares.

Sexa X un espazo real de Banach, de agora en diante supoñeremos todas as aplicacións continuas, a non ser que se diga o contrario, que levan espazos limitados en espazos limitados, tanto sexan de X en si mesmo como noutro espazo.

Definición 2.3. Dirase que un conxunto é relativamente compacto se a súa clausura é compacta.

Definición 2.4. Sexan X, Y espazos de Banach, Ω un subconxunto aberto de X e unha aplicación $T : \overline{\Omega} \to Y$. Entón dise que T é unha aplicación compacta se é continua e para todo subconxunto limitado de $\overline{\Omega}$, K, $T(K)$ é un subconxunto relativamente compacto de Y.

Definición 2.5. Sexa $T : \overline{\Omega} \to X$ unha aplicación compacta. A aplicación $\varphi = \mathrm{Id} - T$ chamarase unha perturbación compacta da identidade.

Unha perturbación compacta da identidade cumpre certas propiedades interesantes, como son ser pechada e propia. Vexamos a que nos referimos.

Definición 2.6. Unha aplicación dise pechada se leva conxuntos pechados en conxuntos pechados.

Definición 2.7. Unha aplicación dise propia se a súa imaxe inversa leva conxuntos compactos en conxuntos compactos.

Proposición 2.8. *Unha perturbación compacta da identidade en X é pechada e propia.*

Demostración. Sexa $\varphi = \mathrm{Id} - T$ unha perturbación compacta da identidade, onde T é unha aplicación definida de $\overline{\Omega}$ en X.

Probemos que φ é pechada. Dado un subconxunto pechado A de X, temos que ver que $\varphi(A)$ é pechado, é dicir, dada unha sucesión $y_n \in \varphi(A)$, esta sucesión y_n ten que converxer en $\varphi(A)$. Sexa $\varphi(x_n) = y_n$ e $y_n \to y$ en X. Entón por construción, $y_n = x_n - Tx_n$. Como $\{x_n\}$ está limitada, tense que $Tx_n \to z$ e en consecuencia $x_n \to y + z$, onde por ser A pechado sabemos que $y + z \in A$. Disto séguese que $y = \varphi(y + z)$ e por tanto φ é pechada.

Demostremos agora a segunda parte, que φ é propia. Dado un conxunto $A \subset X$ compacto, temos que ver que toda sucesión de $\varphi^{-1}(A)$ admite unha subsucesión converxente. Sexa $\{x_n\} \in \varphi^{-1}(A)$, tal que $\varphi(x_n) = y_n = x_n - Tx_n \in A$. Entón como A é compacto, $y_n \to y \in A$. Ademais, por ser Ω limitado, existe unha subsucesión tal que $Tx_n \to z$. Chegamos así a que $x_n \to y + z$, e por tanto $\varphi^{-1}(A)$ é compacta. □

Antes de continuar precisamos definir o que entenderemos por espazo de dimensión finita e aplicación de rango finito.

Definición 2.9. Sexa X un espazo de Banach e $K \subset X$. Diremos que K é de dimensión finita se está contido nun subespazo lineal de X de dimensión finita.

Observación 2.10. A teoría do Capítulo 1 é aplicable para calquera espazo normado de dimensión finita.

Definición 2.11. Sexan X, Y espazos de Banach e $T : X \to Y$ tal que $T(X)$ está contida nun subespazo de dimensión finita de Y. Esta aplicación denótase aplicación de rango finito.

Observación 2.12. As aplicacións de rango finito son compactas.

Imos xeneralizar a noción de grao de dimensión finita a aplicacións propias en espazos de Banach (dimensión infinita). Faremos isto aproximando, de xeito adecuado, unha aplicación compacta por unha aplicación de rango finito. Para facer isto precisaremos primeiro o seguinte resultado.

Teorema 2.13. *Sexan X, Y dous espazos de Banach, $K \subset X$ un subconxunto limitado e $T : K \to Y$ unha aplicación compacta. Dado $\varepsilon > 0$, existe unha aplicación continua $T_\varepsilon : K \to Y$ de rango finito tal que*

$$\|Tx - T_\varepsilon x\| < \varepsilon \text{ para todo } x \in K.$$

Demostración. Por ser K limitado e T compacta, tense que $\overline{T(K)}$ é un conxunto compacto. Sexa $\varepsilon > 0$, logo, como

$$\overline{T(K)} \subset \bigcup_{p \in \overline{T(K)}} B(p, \varepsilon),$$

por ser compacto, admite un subrecubrimento finito

$$\overline{T(K)} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(p_i, \varepsilon) \text{ para } p_1, \dots, p_n \in \overline{T(K)}.$$

Definimos $m_i(x, \varepsilon) := \text{máx}\{0, \varepsilon - \|Tx - p_i\|\}$ con $x \in K$ de xeito que as $m_i(\cdot, \varepsilon)$ son continuas en K para todo $i = 1, \dots, n$. Para todo $x \in K$ existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $Tx \in B(p_j, \varepsilon)$, é dicir, $\|T(x) - p_j\| < \varepsilon$ e polo tanto $m_j(x, \varepsilon) > 0$. Así podemos construír

$$\theta_i(x, \varepsilon) := \frac{m_i(x, \varepsilon)}{\sum_{j=1}^{n} m_j(x, \varepsilon)} \quad \forall x \in K, \ \forall i = 1, \dots, n.$$

As aplicacións $\theta_i(\cdot, \varepsilon) : K \to \mathbb{R}$ están ben definidas e son continuas para todo $i = 1, \dots, n$. Logo, podemos definir a aplicación

$$T_\varepsilon x = \sum_{j=1}^{n} \theta_j(x, \varepsilon) p_j,$$

e por como definimos as θ_i tense que $\sum_{j=1}^{n} \theta_j(x, \varepsilon) = 1$. En consecuencia,

$$Tx - T_\varepsilon x = \sum_{j=1}^{n} \theta_j(x, \varepsilon) Tx - \sum_{j=1}^{n} \theta_j(x, \varepsilon) p_j = \sum_{j=1}^{n} \theta_j(x, \varepsilon)[Tx - p_j].$$

Por tanto temos o resultado,

$$\|Tx - T_\varepsilon x\| \leq \sum_{j=1}^{n} \theta_j(x, \varepsilon) \, \|Tx - p_j\| \leq \varepsilon.$$

□

Se consideramos un espazo V de dimensión finita, n, podemos identificalo con $\mathbb{R}^n$ se coñecemos unha base de V. De feito, se temos dúas bases de V diferentes, un vector $x \in V$

terá dúas expresións diferentes, $x^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ e $x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$, dependendo da base considerada. Existe unha matriz invertible de cambio de base, M, que nos permite establecer a seguinte relación entre as coordenadas nas diferentes bases, $Mx^{(2)} = x^{(1)}$. Sexa agora Ω un conxunto aberto e limitado en V e $b \in V$. Dada unha aplicación $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, V)$ que podemos identificar con $\varphi_i \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}_i, \mathbb{R}^n)$ para $i = 1$ ou 2, segundo a base de V que consideremos. Establecemos así a seguinte relación entre φ_1 e φ_2,

$$\varphi_2\left(x^{(2)}\right) = M^{-1}\varphi_1\left(x^{(1)}\right) = M^{-1}\varphi_1\left(Mx^{(2)}\right).$$

Ademais, escribiremos b como $b^{(1)}$ ou $b^{(2)}$ dependendo da base de coordenadas escollida.

Isto vainos permitir probar un resultado que nos garantiza que o grao non depende da base escollida.

Lema 2.14. *Sexa V un espazo de dimensión finita, n, e $\Omega \subset V$ un subconxunto aberto e limitado. Dados $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ entón, $\mathrm{d}(\varphi, \Omega, b)$ é independente da base escollida para identificar V con $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Dado V un espazo de dimensión finita e $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, sabemos que existe unha aplicación ψ suficientemente próxima a φ tal que $\psi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ e $\mathrm{d}(\psi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\varphi, \Omega, b)$. Entón, por $\psi_2(x^{(2)}) = M^{-1}\psi_1(Mx^{(2)})$ sabemos que $J_\psi(x)$ é independente da base escollida. Sexa $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Se b é regular, como $J_\psi(x)$ non depende da base, o grao tampouco, é dicir,

$$\mathrm{d}(\psi_1, \Omega_1, b^{(1)}) = \mathrm{d}(\psi_2, \Omega_2, b^{(2)}).$$

Se b non é regular, podemos atopar un valor suficientemente próximo c que sexa regular e tal que $\mathrm{d}(\psi, \Omega, c) = \mathrm{d}(\psi, \Omega, b)$. Polo tanto temos probado o resultado. $\square$

Sexa Ω un conxunto aberto e limitado en $\mathbb{R}^n$ e $m < n$. Sexan $T \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Identificaremos $\mathbb{R}^m$ cun subespazo de $\mathbb{R}^n$ igualando as últimas $n - m$ coordenadas a cero. Así, $b = (b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ e $Tx = (T_1x, \dots, T_mx, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Definición 2.15. Sexa $\Omega \subset X$ un conxunto aberto e limitado nun espazo de Banach X e $T : \overline{\Omega} \to X$ unha aplicación de rango finito. Entón, se $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ onde $\varphi = \mathrm{Id} - T$, definimos

$$\mathrm{d}(\varphi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\varphi|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b),$$

onde $F \subset X$ é un espazo de dimensión finita que contén a $T(\overline{\Omega})$ e a b.

Observación 2.16. Vexamos que a definición está ben construída e é independente do subespazo F escollido.

Sexan $T \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ un valor regular de $\varphi = \mathrm{Id} - T$. Entón, se $x \in \varphi^{-1}(b)$ con $x \in \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ tense que

$$\varphi'(x) = \begin{bmatrix} (\varphi|_{\Omega\cap\mathbb{R}^m})'(x) & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-m} \end{bmatrix}$$

é dicir

$$J_\varphi(x) = J_{\varphi|_{\Omega\cap\mathbb{R}^m}}(x).$$

Chegamos así a que o grao será

$$\mathrm{d}(\varphi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\varphi|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}, \Omega \cap \mathbb{R}^m, b).$$

Esta igualdade séguese cumprindo se consideramos $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ e $b \in \mathbb{R}^m \backslash \varphi(\partial\Omega)$, xa que como estamos a considerar un espazo de dimensión finita, $\mathbb{R}^m$, podemos aplicar os resultados do Capítulo 1. Logo, existe unha función de clase dous e un valor regular suficientemente próximos a φ e a b, respectivamente, tal que o grao é igual, e por tanto estariamos no caso que acabamos de ver.

Agora se F_1 e F_2 son dous subespazos de dimensión finita contendo a $T(\overline{\Omega})$ e a b, entón $F_1 \cap F_2$ ten as mesmas propiedades. Desta consideración séguese que

$$\mathrm{d}(\varphi|_{\overline{\Omega}\cap F_i}, \Omega \cap F_i, b) = \mathrm{d}(\varphi|_{\overline{\Omega}\cap F_1\cap F_2}, \Omega \cap F_1 \cap F_2, b)$$

para $i = 1, 2$. Por tanto o grao non depende do subespazo considerado.

Estamos en condicións de definir o grao de Leray-Schauder.

Definición 2.17. Consideremos Ω un conxunto aberto e limitado nun espazo de Banach X, a perturbación compacta da identidade $\varphi = \mathrm{Id} - T : \overline{\Omega} \to X$ e $\rho_0 = \rho(b, \varphi(\partial\Omega))$. Sexan $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ e $\hat{T} : \overline{\Omega} \to X$ unha aplicación de rango finito tal que

$$\left\| Tx - \hat{T}x \right\| < \frac{\rho_0}{2} \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Definimos o grao de Leray-Schauder de φ en Ω con respecto a b como

$$\mathrm{d}(\varphi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\hat{\varphi}, \Omega, b)$$

onde $\hat{\varphi} = \mathrm{Id} - \hat{T}$.

Observación 2.18. Vexamos agora que esta definición ten sentido. En primeiro lugar, pola Proposición 2.8, $\varphi(\partial\Omega)$ é pechada e como $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, tense que $\rho_0 > 0$. Ademais, existen aplicacións de rango finito, $\hat{T}$, coma a que se emprega na definición, basta tomar

$$\hat{T} = T_{\frac{\rho_0}{2}} \circ T,$$

onde $T_{\frac{\rho_0}{2}}$ é a aplicación descrita no Teorema 2.13 para $\varepsilon = \frac{\rho_0}{2}$. Para esta aplicación $\hat{T}$, tense que,

$$\|\varphi(x) - \hat{\varphi}(x)\| = \left\|\mathrm{Id} - Tx - (\mathrm{Id} - \hat{T}x)\right\| = \left\|\hat{T}x - Tx\right\| < \frac{\rho_0}{2},\ \forall\, x \in \partial\Omega.$$

Polo tanto,

$$\begin{aligned}\|b - \hat{\varphi}(x)\| &= \|b - \varphi(x) + \varphi(x) - \hat{\varphi}(x)\| \geq \|b - \varphi(x)\| - \|\hat{\varphi}(x) - \varphi(x)\| \\ &\geq \rho_0 - \frac{\rho_0}{2} = \frac{\rho_0}{2},\ \forall\, x \in \partial\Omega.\end{aligned}$$

En particular, $\rho(b, \hat{\varphi}(\partial\Omega)) \geq \frac{\rho_0}{2}$, chegando así a que $b \notin \hat{\varphi}(\partial\Omega)$ e o grao $\mathrm{d}(\hat{\varphi}, \Omega, b)$ está ben definido.

Agora temos que probar que esta definición é independente da aplicación $\hat{T}$ escollida. Consideremos dúas aplicacións de rango finito, T_1 e T_2, tales que,

$$\|Tx - T_i x\| < \frac{\rho_0}{2},\ \forall\, x \in \overline{\Omega} \quad \text{e} \quad i = 1, 2.$$

Sexa $\varphi_i = \mathrm{Id} - T_i$ unha perturbación compacta da identidade para $i = 1, 2$. Sexan F_1, F_2 e F subespazos de X de dimensión finita, contendo a $T_i(\overline{\Omega})$ para $i = 1, 2$ e a b, tales que $F_1 + F_2 \subset F$. Entón, pola Definición 2.15, sabemos que tanto para $i = 1$ como para $i = 2$ se dá a seguinte igualdade,

$$\mathrm{d}(\varphi_i, \Omega, b) = \mathrm{d}(\varphi_i|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Definamos agora a homotopía $\mathrm{H}(x, \theta) = \theta\varphi_1(x) + (1 - \theta)\varphi_2(x)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $\theta \in [0, 1]$. Por ser $\|\varphi(x) - \varphi_i(x)\| < \frac{\rho_0}{2}$ para $i = 1, 2$, tense que,

$$\begin{aligned}\|\varphi(x) - \mathrm{H}(x, \theta)\| &= \|\varphi(x) - \theta\varphi(x) + \theta\varphi(x) - [\theta\varphi_1(x) + (1 - \theta)\varphi_2(x)]\| \\ &= \|(1 - \theta)\varphi(x) - (1 - \theta)\varphi_2(x) + \theta\varphi(x) - \theta\varphi_1(x)\| \\ &\leq (1 - \theta)\,\|\varphi(x) - \varphi_2(x)\| + \theta\,\|\varphi(x) - \varphi_1(x)\| \\ &< (1 - \theta)\frac{\rho_0}{2} + \theta\frac{\rho_0}{2} = \frac{\rho_0}{2},\ \forall\, x \in \partial\Omega.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\|b - \mathrm{H}(x, \theta)\| &= \|b - \varphi(x) + \varphi(x) - \mathrm{H}(x, \theta)\| \geq \|b - \varphi(x)\| - \|\mathrm{H}(x, \theta) - \varphi(x)\| \\ &> \rho_0 - \frac{\rho_0}{2} = \frac{\rho_0}{2},\ \forall\, x \in \partial\Omega,\end{aligned}$$

é dicir, $b \notin \mathrm{H}(\partial\Omega, \cdot)$. Así, pola invariancia homotópica do grao de Brouwer (Teorema 1.19) chegamos a que

$$\mathrm{d}(\varphi_1|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b) = \mathrm{d}(\varphi_2|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b),$$

probando que a grao de Leray-Schauder é independente da aplicación $\hat{T}$ escollida.

Logo, acabamos de probar que o Grao de Leray-Schauder está ben definido.

Un resultado que se segue directamente da definición de grao é o seguinte.

Proposición 2.19. *Sexan $\varphi = \mathrm{Id} - T$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Entón,*

$$\mathrm{d}(\varphi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\varphi - b, \Omega, 0).$$

2.1. Propiedades do Grao de Leray-Schauder

A partir dagora denotaremos por $Q(\overline{\Omega}, X)$ o espazo das aplicacións compactas que van de $\overline{\Omega}$ en X, sendo $\Omega \subset X$ un subconxunto aberto e limitado e X un espazo de Banach. Vexamos unha serie de propiedades que caracterizan o grao de Leray-Schauder seguindo a Sección 3.3 de [7]. Estas propiedades tamén se poden atopar na Sección 4.3 de [8] e na Sección 7.2 de [6].

Observación 2.20. Dada unha aplicación $T \in Q(\overline{\Omega}, X)$, consideraremos a norma infinito de T en $Q(\overline{\Omega}, X)$ definida como $\|T\|_\infty = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|Tx\|$.

Agora veremos que o grao é igual para perturbacións compactas da identidade de aplicacións de $Q(\overline{\Omega}, X)$ suficientemente próximas entre si.

Teorema 2.21. *Sexan $T \in Q(\overline{\Omega}, X)$ e $b \notin (\mathrm{Id} - T)(\partial\Omega)$. Existe unha veciñanza de T en $Q(\overline{\Omega}, X)$, U, tal que para todo $S \in U$, tense que $b \notin (\mathrm{Id} - S)(\partial\Omega)$ e*

$$\mathrm{d}(\mathrm{Id} - S, \Omega, b) = \mathrm{d}(\mathrm{Id} - T, \Omega, b).$$

Demostración. Sexa $\rho_0 = \rho(b, (\mathrm{Id} - T)(\partial\Omega)) > 0$. Definimos o conxunto U como

$$U = \left\{ S \in Q(\overline{\Omega}, X) / \, \|S - T\|_\infty < \frac{\rho_0}{2} \right\}.$$

Logo, se $S \in U$, entón

$$\|(\mathrm{Id} - S)x\| = \|\mathrm{Id} - Tx + Tx - Sx\| \geq \|(\mathrm{Id} - T)x\| - \|Sx - Tx\| > \rho_0 - \frac{\rho_0}{2} > 0, \ \forall \, x \in \partial\Omega,$$

é dicir, $b \notin (\mathrm{Id} - S)(\partial\Omega)$. Escollamos agora dúas aplicacións de dimensión finita T_1 e S_1 tales que

$$\|T - T_1\|_\infty < \frac{\rho_0}{4} \text{ e } \|S - S_1\|_\infty < \frac{\rho_0}{4}.$$

Sexa F un subespazo de dimensión finita de X, contendo a $T_1(\overline{\Omega})$, $S_1(\overline{\Omega})$ e b. Entón,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{d}(\mathrm{Id} - T, \Omega, b) = \mathrm{d}((\mathrm{Id} - T_1)|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b), \\ \mathrm{d}(\mathrm{Id} - S, \Omega, b) = \mathrm{d}((\mathrm{Id} - S_1)|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b). \end{array} \right\} \tag{2.1}$$

Consideremos a homotopía,

$$\mathrm{H}(x,\theta)=\theta(\mathrm{Id}-T_1)x+(1-\theta)(\mathrm{Id}-S_1)x,\ \forall\, x\in\Omega\cap F,\ \forall\,\theta\in[0,1].$$

Así, denotando $\Phi=\mathrm{Id}-T$, $\Phi_1=\mathrm{Id}-T_1$, $\Psi=\mathrm{Id}-S$ e $\Psi_1=\mathrm{Id}-S_1$, tense que,

$$\begin{aligned}
&\|\mathrm{H}(x,\theta)-b\|\\
&=\|\theta(\Phi_1)x+(1-\theta)(\Psi_1)x-b\|\\
&=\|\theta(\Phi_1)x+(1-\theta)(\Psi_1)x-b-(1-\theta)(\Phi)x+(1-\theta)(\Phi)x-(1-\theta)(\Psi)x+(1-\theta)(\Psi)x\|\\
&=\|[(\Phi)x-b]+\theta[(\Phi_1)x-(\Phi)x]+(1-\theta)[(\Psi_1)x-(\Psi)x]+(1-\theta)[(\Psi)x-(\Phi)x]\|\\
&\geq\|(\Phi)x-b\|-\theta\,\|(\Phi)x-(\Phi_1)x\|-(1-\theta)\,\|(\Psi)x-(\Psi_1)x\|-(1-\theta)\,\|(\Phi)x-(\Psi)x\|\\
&\geq\rho_0-\theta\,\frac{\rho_0}{4}-(1-\theta)\frac{\rho_0}{4}-(1-\theta)\frac{\rho_0}{2}=\frac{\rho_0}{4}+\theta\,\frac{\rho_0}{2}>\frac{\rho_0}{4}>0,\ \forall\, x\in\partial(\Omega\cap F),\ \forall\,\theta\in(0,1).
\end{aligned}$$

Polo tanto, $b\notin\mathrm{H}(\cdot,\theta)(\partial(\Omega\cap F))$. Entón polo Teorema 1.19 de invariancia homotópica do grao de Brouwer e por (2.1) tense o resultado. □

Teorema 2.22. *O grao é constante nas compoñentes conexas de* $X\backslash(\mathrm{Id}-T)(\partial\Omega)$.

Demostración. En virtude da Proposición 2.19, e polo Teorema 2.21 sabemos que o grao é localmente constante, polo que cun razoamento análogo ao realizado para demostrar a Proposición 1.12, como o grao é continuo e só toma valores enteiros deducimos que é constante en cada compoñente conexa. □

Introduzamos o resultado de invariancia homotópica para homotopías construídas con aplicacións de $Q(\overline{\Omega}\times[0,1],X)$.

Observación 2.23. Nótese que se $t\longmapsto S(\cdot,t)$ é unha aplicación continua que vai de $[0,1]$ en $Q(\overline{\Omega},X)$, entón $S\in Q(\overline{\Omega}\times[0,1],X)$.

Teorema 2.24. *Sexa* $\mathrm{H}\in\mathcal{C}(\overline{\Omega}\times[0,1],X)$*, unha homotopía dada por* $\mathrm{H}(x,t)=x-S(x,t)$*, onde* $S\in Q(\overline{\Omega}\times[0,1],X)$*. Se* $b\notin\mathrm{H}(\partial\Omega\times[0,1])$*, entón* $\mathrm{d}(\mathrm{H}(\cdot,t),\Omega,b)$ *é independente de* t*.*

Demostración. Polo Teorema 2.21 o grao $\mathrm{d}(\mathrm{H}(\cdot,t),\Omega,b)$ é localmente constante e, por tanto, continuo con respecto á variable t. Logo, realizando un razoamento análogo ao da demostración da Proposición 1.12, como o grao toma unicamente valores enteiros e [0,1] é conexo, entón o grao é constante e por tanto temos o resultado. □

O grao de Leray-Schauder tamén cumpre a propiedade de aditividade.

Teorema 2.25. *Sexa* $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$ *con* $\Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing$ *e* $b\notin(\mathrm{Id}-T)(\partial\Omega_i)$ *para* $i=1,2$*. Entón,*

$$\mathrm{d}(\mathrm{Id}-T,\Omega,b)=\mathrm{d}(\mathrm{Id}-T,\Omega_1,b)+\mathrm{d}(\mathrm{Id}-T,\Omega_2,b).$$

Demostración. Basta con aplicar a propiedade de aditividade do grao de Brouwer vista no Teorema 1.20 na definición de grao de Leray-Schauder e obtense o resultado. □

O grao da aplicación identidade nun punto do conxunto vale un, como veremos a continuación.

Proposición 2.26. *Sexa $\Omega \subset X$ un conxunto aberto e limitado. Entón*

$$\mathrm{d}(\mathrm{Id}, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & \text{se } b \in \Omega, \\ 0 & \text{se } b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Demostración. Consideramos $\varphi = \mathrm{Id} - T$ sendo $T = 0$. Nótese que $T(\overline{\Omega}) = 0$ e b están contidos nun espazo de dimensión finita, F. Así, aplicando a Definición 2.15 tense que $\mathrm{d}(\mathrm{Id}, \Omega, b) = \mathrm{d}(\mathrm{Id}, \Omega \cap F, b)$ e por tanto obtense o resultado a partir da Proposición 1.23. □

Proposición 2.27 (Excisión). *Sexan $K \subset \Omega$ cerrado, $\varphi = \mathrm{Id} - T$ unha perturbación compacta da identidade e $b \notin \varphi(K) \cup \varphi(\partial\Omega)$. Entón,*

$$\mathrm{d}(\varphi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\varphi, \Omega \backslash K, b).$$

Demostración. Pola Proposición 2.8 sabemos que $\varphi(K)$ é pechada e polo tanto

$$\rho_1 = \text{mín}\{\rho(b, \varphi(K)), \rho(b, \varphi(\partial\Omega))\} > 0.$$

Consideremos T_1 unha aplicación de rango finito tal que $\|T - T_1\|_\infty < \frac{\rho_1}{2}$. Pola definición do grao de Leray-Schauder (Definición 2.17), tense que

$$\mathrm{d}(\varphi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\psi, \Omega, b),$$

sendo $\psi = \mathrm{Id} - T_1$. Sexa F un subespazo de dimensión finita que contén a $T_1(\overline{\Omega})$ e a b. Entón aplicando a Definición 2.15, como $b \notin \psi(K)$ obtemos,

$$\mathrm{d}(\psi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\psi|_{\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, b) = \mathrm{d}(\psi|_{\overline{\Omega}\cap F}, (\Omega \backslash K) \cap F, b) = \mathrm{d}(\psi, \Omega \backslash K, b) = \mathrm{d}(\varphi, \Omega \backslash K, b).$$

Chegamos así ao resultado. □

Proposición 2.28. *Dadas $S, T \in Q(\overline{\Omega}, X)$ tal que $S = T$ en $\partial\Omega$ e as perturbacións compactas da identidade $\varphi = \mathrm{Id} - T$ e $\psi = \mathrm{Id} - S$. Entón, se $b \notin \varphi(\partial\Omega) = \psi(\partial\Omega)$, tense que*

$$\mathrm{d}(\varphi, \Omega, b) = \mathrm{d}(\psi, \Omega, b).$$

Demostración. Definimos a homotopía $\mathrm{H}(x,t) = t\varphi(x) + (1-t)\psi(x)$ para todo $t \in [0,1]$. Así, $\mathrm{H}(\cdot,1) = \varphi(x)$ e $\mathrm{H}(\cdot,0) = \psi(x)$. Ademais, como $T = S$ en $\partial\Omega$, en particular tamén se dá $\varphi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$. É dicir, $\mathrm{H}(\cdot,t) = \varphi = \psi$ na fronteira $\partial\Omega \times [0,1]$, e polo tanto, $\mathrm{d}(\mathrm{H}(\cdot,t),\Omega,b)$ está definido e polo Teorema 2.24 sabemos que é independente de t. Logo, como $\mathrm{d}(\mathrm{H}(\cdot,0),\Omega,b) = \mathrm{d}(\psi,\Omega,b)$ e $\mathrm{d}(\mathrm{H}(\cdot,1),\Omega,b) = \mathrm{d}(\varphi,\Omega,b)$ obtemos que $\mathrm{d}(\psi,\Omega,b) = \mathrm{d}(\varphi,\Omega,b)$. □

Vexamos que na Definición 2.15 podemos substituír a condición de que o subespazo F sexa de dimensión finita por que sexa pechado.

Proposición 2.29. *Sexa $T \in Q(\overline{\Omega},X)$ tal que, $\varphi = \mathrm{Id} - T$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Entón, dado un subconxunto pechado de X, F, que contén a $T(\overline{\Omega})$ e a b tense que,*

$$\mathrm{d}(\varphi,\Omega,b) = \mathrm{d}(\varphi|_{\overline{\Omega}\cap F},\Omega\cap F,b).$$

2.2. Aplicacións do Grao de Leray-Schauder

2.2.1. Teoremas de punto fixo

De xeito análogo ao Capítulo 1, aplicaremos os resultados vistos ata agora sobre o grao de Leray-Schauder para introducir unha serie de teoremas do punto fixo en espazos de dimensión infinita. Estos teoremas correspóndense en forma ao que en dimensión finita era o Teorema de Brouwer. Para isto seguiremos a Sección 4.4 de [8], a Sección 7.3 de [6] e a Sección 3.4 de [7].

Consideraremos $Q(S,X)$ o espazo das aplicacións compactas que van de S en X, sendo $S \subset X$ un subconxunto pechado e limitado e X un espazo de Banach. Ademais, denotaremos o conxunto interior de S por D. Comezaremos vendo o que se entende por propiedade do punto fixo.

Definición 2.30. Dise que un subconxunto S de X ten a propiedade do punto fixo se todas as funcións continuas que van de S en si mesmo teñen un punto fixo.

Vexamos o primeiro resultado do punto fixo, no que impoñemos moitas restricións que posteriormente iremos suavizando.

Teorema 2.31. *Sexan S un sobconxunto de X, pechado, limitado e convexo con $0 \in D$ e $T \in Q(S,X)$ tal que $T(S) \subset S$. Entón T ten un punto fixo en S.*

Demostración. Como S é convexo e $D \neq \varnothing$, tense que $\overline{D} = S$ e $\partial D = \partial S$.

Consideremos a homotopía,

$$\mathrm{H}(x,t) = x - t\,Tx \quad \forall\, x \in \overline{D},\, t \in [0,1].$$

Se $Tx = x$ para algún $x \in \partial D$ xa temos probado o resultado. Supoñamos entón que $Tx \neq x$ para todo $x \in \partial D$.

Por hipótese $T(S) \subset S$, é dicir, $Tx \in S$ para todo $x \in S$, en particular $Tx \in S$ para todo $x \in \partial S = \partial D$. Logo, tense que para todo $x \in \partial D$, $Tx \in S$ e como S é convexo, $t\,Tx \in D$ para todo $t \in [0,1)$. Disto séguese que $0 \notin \mathrm{H}(\partial D, t)$ para todo $t \in [0,1]$. En caso contrario teriamos que $x - t\,Tx = 0$ para algún $x \in \partial D$, é dicir, $x = t\,Tx$, o cal é imposible xa que, para $t = 1$ chegamos a unha contradición coa suposición de que $Tx \neq x$ para todo $x \in \partial D$. Ademais, no caso $t \in [0,1)$, x pertence á fronteira dun conxunto aberto e $t\,Tx$ ao interior do conxunto polo que non poden ser iguais.

Entón, polo Teorema 2.24 (de invariancia homotópica), tense que

$$\mathrm{d}(\mathrm{Id} - T, D, 0) = \mathrm{d}(\mathrm{Id}, D, 0).$$

Logo, en virtude da Proposición 2.26 sabemos que $\mathrm{d}(\mathrm{Id}, D, 0) = 1$, é dicir, existe polo menos un $x \in D$ tal que $Tx = x$. □

O seguinte resultado é unha forma máis xeral deste teorema, no que se relaxan algunhas das hipóteses. Agora S non necesita ser convexo, a condición de que 0 pertenza ao interior de S será substituída polo requisito de que o interior de S non sexa baleiro, e modifícase a condición sobre a imaxe por T de S.

Teorema 2.32. *Sexa S un subconxunto de X, pechado e limitado con interior non baleiro e $T \in Q(S,X)$. Se existe $w \in D$ tal que para todo $\lambda > 1$ e $x \in \partial D$*

$$Tx - w \neq \lambda(x - w),$$

entón T ten un punto fixo.

Demostración. Consideremos a homotopía

$$\mathrm{H}(x,t) = x - w - t(Tx - w) \quad \forall\, x \in \overline{D},\, t \in [0,1].$$

Razoando coma no Teorema 2.31, se $Tx = x$ para algún $x \in \partial D$ xa temos probado o resultado. Supoñamos que $Tx \neq x$ para todo $x \in \partial D$. En consecuencia, $0 \notin \mathrm{H}(\partial D, t)$ para todo $t \in [0,1]$. En efecto, se existisen $t \in [0,1]$ e $x \in \partial D$ para os cales $0 \in \mathrm{H}(x,t)$, poderiamos diferenciar tres casos:

- Se $t \in (0,1)$, entón $Tx - w = \frac{1}{t}(x - w)$, chegando a unha contradición coa hipótese $Tx - w \neq \lambda(x - w)$ para todo $\lambda > 1$ e $x \in \partial D$.
- Se $t = 0$, entón $x = w$, o cal é imposible por ser $w \in D$ e $x \in \partial D$.
- Se $t = 1$, entón tense unha contradición coa suposición de que T non ten puntos fixos na fronteira de D.

Logo, como $0 \notin \mathrm{H}(\partial D, t)$ para todo $t \in [0,1]$, podemos aplicar o Teorema 2.24, polo cal

$$\mathrm{d}(\mathrm{Id} - T, D, 0) = \mathrm{d}(\mathrm{Id} - w, D, 0).$$

Así, como $w \in D$, tense que $\mathrm{d}(\mathrm{Id} - w, D, 0) = \mathrm{d}(\mathrm{Id}, D, w) = 1$, concluíndo que existe $x \in D$ tal que $Tx = x$. □

Observación 2.33. Nótese que a condición $Tx - w \neq \lambda(x - w)$ se refire aos $x \in \partial D$. Por definición do subconxunto D como o interior de S, é claro que $\partial D \subset \partial S$. Logo, as hipóteses, e en consecuencia, a conclusión, seguen sendo válidos se S é convexo e $T(\partial S) \subset S$.

Nos dous teoremas vistos ata agora unha das hipóteses sobre o conxunto S era que tivese interior non baleiro. Esta restrición pódese quitar empregando a xeneralización do Teorema de Tietze para espazos de dimensión infinita dada por Dugundji. Para comprender o resultado, primeiro vexamos a definición da envoltura convexa dun conxunto.

Definición 2.34. A envoltura convexa dun conxunto S, denotada $\operatorname{co} S$, é a intersección de todos os conxuntos convexos que conteñen a S.

Definición 2.35. A envoltura convexa pechada de S, $\overline{\operatorname{co}} S$, é a intersección de todos os conxuntos convexos pechados que conteñen a S.

Observación 2.36. $\operatorname{co} S$ é o conxunto convexo máis pequeno que contén a S e $\overline{\operatorname{co}} S$ é o conxunto convexo pechado máis pequeno que contén a S. Ademais, $\overline{\operatorname{co}} S = \overline{\operatorname{co} S}$.

Teorema 2.37 (Dugundji)**.** *Sexan S un subespazo pechado dun espazo métrico X e L un espazo lineal normado. Entón, todas as funcións continuas $f : S \to L$ admiten unha extensión continua $F : X \to L$ tal que $F(X) \subset \operatorname{co} f(S)$.*

Estamos en condicións de introducir unha nova versión do teorema do punto fixo, esta vez sen a condición de que o conxunto D sexa non baleiro.

Teorema 2.38. *Sexan S un subconxunto de X, pechado, limitado, non baleiro e convexo e $T : S \to S$ unha aplicación compacta. Entón T ten un punto fixo.*

Demostración. Por ser S limitado, podemos supoñer que existe unha bola, B, de centro 0, que contén a S. Aplicando o Teorema 2.37, existe unha función continua $F : \overline{B} \to S$ que é a extensión doutra función $F|_S = \mathrm{Id} : S \to S$ tal que $F(\overline{B}) \subset \operatorname{co} S$.

Así, podemos definir unha aplicación $\hat{T} : \overline{B} \to S$ dada por $\hat{T} = T \circ F$ que é compacta (por selo T) e tal que $\hat{T}(\overline{B}) \subset \overline{B}$. Logo, $\hat{T}$ e $\overline{B}$ están baixo as hipóteses do Teorema 2.31 e polo tanto, existe $x \in \overline{B}$ tal que $\hat{T}x = x$. Pero como $\hat{T}(\overline{B}) \subset S$, concluímos que $x \in S$ e $Tx = x$. □

Corolario 2.39. *Sexan S un subconxunto de X, pechado, limitado, non baleiro e convexo e S_1 un subconxunto limitado de X. Sexa $h : S \to S_1$ un homeomorfismo. Se $T : S_1 \to S_1$ é compacta, entón T ten un punto fixo en S_1.*

Demostración. Consideremos a aplicación $\psi : S \to S$ definida por $\psi = h^{-1} \circ T \circ h$, que é compacta, por selo T. Así, en virtude do Teorema 2.38, sabemos que existe $x \in S$ tal que $\psi(x) = x$. é dicir, $h^{-1} \circ T \circ h(x) = x$, ou equivalentemente, $T \circ h(x) = h(x)$. Polo tanto, chegamos a que existe $y \in S_1$ tal que $y = h(x)$ é un punto fixo de T. □

Corolario 2.40 (Teorema do punto fixo de Schauder)**.** *Sexa S un subconxunto de X, compacto e convexo entón ten a propiedade do punto fixo.*

Demostración. Sexa $T : S \to S$ unha aplicación continua, entón como S é compacto, tamén é compacta. Así, polo Teorema 2.38, obtemos que T ten un punto fixo en S. □

Observación 2.41. En contraste co Corolario 2.40, Dugundji probou que a bola unitaria dun espazo normado X ten a propiedade do punto fixo se e só se X é de dimensión finita. Polo tanto o Teorema de Brouwer é falso para espazos de dimensión infinita, xa que a bola unitaria dun espazo normado X de dimensión infinita non é compacta.

Vexamos outro resultado máis do punto fixo relacionado cos vistos ata agora. Para isto precisamos un lema que enunciamos a continuación.

Lema 2.42. *Se S é un subconxunto de X compacto, entón $\overline{\operatorname{co}} S$ tamén é compacto.*

Estamos en condicións de presentar o seguinte teorema do punto fixo, neste caso, prescindindo da condición de que o subconxunto S estea limitado.

Teorema 2.43. *Sexan S un subespazo de X, pechado e convexo e T unha aplicación continua que vai de S nun subconxunto compacto de S. Entón T ten un punto fixo.*

Demostración. Existe un conxunto compacto A tal que $T(S) \subset A \subset S$. Denotemos por A_0 ao subconxunto $\overline{\operatorname{co}} A$, que polo Lema 2.42, é compacto. Ademais, como $A_0 \subset S$, $T(A_0) \subset A_0$. Entón A_0 é un subconxunto compacto e convexo de X e aplicando o Corolario 2.40 tense o resultado. □

Antes de introducir o último resultado de punto fixo probaremos un teorema, do cal, o Teorema de Schaefer do punto fixo se segue como corolario. Pero primeiro temos que definir o concepto de homotopía de transformacións compactas.

Definición 2.44. Sexan $\Omega \subset X$ un conxunto aberto e limitado, M un subconxunto de X e $\mathrm{H} : \overline{\Omega} \times [0,1] \to X$. Diremos que H é unha homotopía de transformacións compactas en M se,

1. $\mathrm{H}(\cdot, t) \in Q(M, X)$ para todo $t \in [0,1]$.

2. Para todo $\varepsilon > 0$ e todo subconxunto limitado L de M, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\mathrm{H}(x,t) - \mathrm{H}(x,s)\| < \varepsilon \quad \forall\, x \in L,\ |t-s| < \delta.$$

Teorema 2.45. *Supoñamos que X é un espazo normado. Sexa S un subconxunto de X, limitado, pechado e convexo, contendo ó 0 no seu interior. Sexa $H : S \times [0,1] \to X$ unha homotopía de transformacións compactas tal que $\mathrm{H}(\partial S, 0) \subset S$ e $\mathrm{H}(x,t) \neq x$ para todo $x \in \partial S$ e $t \in [0,1)$. Entón $T = \mathrm{H}(\cdot, 1)$ ten un punto fixo en S.*

Demostración. Por ser S convexo e $D \neq \varnothing$, tense que $\overline{D} = S$ e $\partial D = \partial S$.

Consideremos a homotopía

$$\mathrm{H}(x,t) = x - \mathrm{H}(x,t) \quad \forall\, x \in \overline{D},\ t \in [0,1].$$

Como por hipótese $\mathrm{H}(x,t) \neq x$ para todo $x \in \partial S$ e $t \in [0,1)$, sabemos que $0 \notin \mathrm{H}(\partial D, t)$ para todo $t \in [0,1)$. Ademais, ou existe un punto fixo de T en ∂D para $t = 1$ ou $0 \notin \mathrm{H}(\partial D, t)$ para todo $t \in [0,1]$. No primeiro caso temos o resultado que buscabamos e acabouse a demostración; polo tanto supoñamos que estamos no segundo caso. Así, polo Teorema de invariancia homotópica (Teorema 2.24),

$$\mathrm{d}(\mathrm{H}(\cdot,1), D, 0) = \mathrm{d}(\mathrm{H}(\cdot,0), D, 0).$$

Para calcular $\mathrm{d}(\mathrm{H}(\cdot,0), D, 0)$, construímos a homotopía,

$$\hat{\mathrm{H}}(x,\tau) = x - \tau\, \mathrm{H}(x,0) \quad \forall\, x \in \overline{D},\ \tau \in [0,1].$$

Por hipótese temos que $\mathrm{H}(\partial S, 0) \subset S$ e $\mathrm{H}(x,0) \neq x$ para todo $x \in \partial S$. Como S é convexo, razoando coma na demostración do Teorema 2.31, obtense que $0 \notin \hat{\mathrm{H}}(\partial D, \tau)$ para ningún $\tau \in [0,1]$. Aplicando de novo o Teorema 2.24,

$$\mathrm{d}(\hat{\mathrm{H}}(\cdot,0), D, 0) = \mathrm{d}(\hat{\mathrm{H}}(\cdot,1), D, 0).$$

Agora ben, por construción, $\mathrm{d}(\hat{\mathrm{H}}(\cdot,1), D, 0) = \mathrm{d}(\mathrm{H}(\cdot,0), D, 0)$. Ademais como $0 \in D$ tense que $\mathrm{d}(\hat{\mathrm{H}}(\cdot,0), D, 0) = 1$. Así, chegamos a que $\mathrm{d}(\mathrm{H}(\cdot,1), D, 0) = 1$, e por tanto existe $x \in D$ tal que $Tx = x$. □

Corolario 2.46 (Teorema do punto fixo de Schaefer). *Sexa $T : X \to X$ unha aplicación compacta e supoñamos que o conxunto*

$$S = \{u \,/ u = \lambda T u \text{ para algún} \, \lambda \in [0, 1)\}$$

está limitado. Entón T ten un punto fixo.

Demostración. Como S é limitado, existe unha bola B de centro 0 tal que $S \subset B$. Definamos unha homotopía $\mathrm{H} : \overline{B} \times [0, 1] \to X$ dada por

$$\mathrm{H}(x, t) = t\,Tx \quad \forall\, x \in \overline{B},\; t \in [0, 1].$$

H é unha homotopía de transformacións compactas, $\mathrm{H}(\partial B, 0) = 0 \subset B$ e como $S \subset B$,

$$\mathrm{H}(x, t) \neq x \quad \forall\, x \in \partial B,\; t \in [0, 1).$$

Así, estamos nas hipóteses do Teorema 2.45, concluíndo que $\mathrm{H}(\cdot, 1) = T$ ten un punto fixo. $\square$

2.2.2. Aplicación ás ecuacións diferenciais ordinarias

Vexamos unha aplicación do teorema do punto fixo en espazos de dimensión infinita. Para isto seguiremos a Sección 7.4 de [6].

Neste apartado a e c serán dous números reais, $a < c$, e consideremos o conxunto

$$\mathcal{C}\left([a, c], \mathbb{R}\right) = \{x : [a, c] \to \mathbb{R} \,/ x \text{ é continua}\}$$

dotado da norma $\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x(t)| : t \in [a, c]\}$. Tense que $\left(\mathcal{C}\left([a, c], \mathbb{R}\right), \|\cdot\|_\infty\right)$ é un espazo de Banach.

Consideraremos unha función continua

$$g : [a, c] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

e dado $k > 0$, definimos

$$b := a + \text{mín}\left\{c - a, \frac{k}{M}\right\},$$

onde $M := \text{máx}\{|g(s, u)| : s \in [a, c], |u| \leq k\}$.

Presentaremos agora un par de definicións e un teorema, que se poden consultar en [1] e que nos servirán de axuda para probar que unha aplicación é relativamente compacta.

Definición 2.47. Unha colección F de funcións continuas definidas nun conxunto X dise uniformemente limitada se existe un valor M tal que $|\varphi(x)| \leq M$, para toda función $\varphi \in F$ e todo $x \in X$.

Definición 2.48. Unha colección F de funcións definidas nun conxunto X dise equicontinua se para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (que só depende de ε) tal que se $x_1, x_2 \in X$ e $|x_1 - x_2| \leq \delta$ entón necesariamente $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$ para toda $\varphi \in F$.

Teorema 2.49 (Teorema de Ascoli-Arzelà)**.** *Unha familia $F \subset \mathcal{C}([a,c],\mathbb{R})$ é relativamente compacta se e só se F é uniformemente limitada e equicontinua.*

Lema 2.50. *Sexa $D = B(0,k)$ a bola aberta de centro 0 e radio k en $\mathcal{C}([a,c],\mathbb{R})$ e a aplicación $T : \overline{D} \to \mathcal{C}([a,c],\mathbb{R})$ definida por*

$$Tx(t) := \int_a^t g(s,x(s))\mathrm{d}s, \ \forall\, t \in [a,b].$$

Entón T é unha aplicación compacta.

Demostración. Para probar que T é compacta, por definición temos que ver que é unha aplicación continua e que $T(\overline{D})$ é relativamente compacto.

Primeiro probaremos que T é continua.

Sexa $\varepsilon > 0$. Como $g|_{[a,b]\times[-k,k]}$ é uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que para todo u e v que cumpran $|u - v| < \delta$ tense que

$$|g(s,u) - g(s,v)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall\, s \in [a,b].$$

Se supoñemos $\|x - y\|_\infty < \delta$, entón

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &= \left| \int_a^t [g(s,x(s)) - g(s,y(s))]\mathrm{d}s \right| \leq \int_a^t |g(s,x(s)) - g(s,y(s))|\,\mathrm{d}s \\ &\leq \int_a^t \frac{\varepsilon}{b-a}\mathrm{d}s \leq \varepsilon \quad \forall\, t \in [a,b]. \end{aligned}$$

En consecuencia, se $\|x - y\|_\infty < \delta$ entón $\|Tx - Ty\|_\infty < \varepsilon$ e, polo tanto, T é continua.

Probemos que $T(\overline{D})$ é relativamente compacto. Como

$$|Tx(t)| = \left| \int_a^t g(s,x(s))\mathrm{d}s \right| \leq \int_a^t |g(s,x(s))|\,\mathrm{d}s \leq \int_a^t M\mathrm{d}s \leq (b-a)M \quad \forall x \in \overline{D},\, t \in [a,b],$$

é obvio que $T(\overline{D}) \subset \overline{B}(0,(b-a)M)$. Ademais, se $x \in \overline{D}$ e $t_1, t_2 \in [a,b]$ entón,

$$\begin{aligned} |Tx(t_1) - Tx(t_2)| &= \left| \int_a^{t_1} g(s,x(s)) - \int_a^{t_2} g(s,x(s))\mathrm{d}s \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} g(s,x(s))\mathrm{d}s \right| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} |g(s,x(s))|\,\mathrm{d}s \leq \int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}s \leq M\,|t_1 - t_2|\,. \end{aligned}$$

Polo tanto, $T(\overline{D})$ é equicontinua, pois basta escoller $t_1, t_2 \in [a,b]$ tales que $|t_1 - t_2| < \delta$ cumprindo a definición. Isto, xunto co feito de que $T(\overline{D})$ está uniformemente limitada permítenos aplicar o Teorema de Ascoli-Arzelà, chegando a que $T(\overline{D})$ é relativamente compacto.

Así, concluímos que T é compacta. $\square$

Estamos en condicións de probar un resultado que garante a existencia dunha solución para un problema de valor inicial de primeira orde.

Teorema 2.51. *A ecuación diferencial ordinaria de primeira orde*

$$\begin{cases} x'(t) &= g(t,x), \quad a < t < b, \\ x(a) &= 0, \end{cases}$$

admite unha solución $x \in \mathcal{C}^1([a,b])$.

Demostración. Consideremos $D = B(0,k)$ en $\mathcal{C}([a,c],\mathbb{R})$ e T definida como no Lema 2.50,

$$\begin{aligned} T : \overline{D} &\longrightarrow \mathcal{C}([a,c],\mathbb{R}) \\ x &\longmapsto \int_a^t g(s,x(s))\mathrm{d}s \end{aligned}$$

para todo $t \in [a,b]$. Sexa $x \in \overline{D} = \overline{B(0,k)}$, tense que

$$|T(x)(t)| = \left| \int_a^t g(s,x(s))\mathrm{d}s \right| \le (b-a)M \le \frac{k}{M}M \quad \forall\, t \in [a,b],$$

e así $T(\overline{D}) \subset \overline{D}$. Como polo Lema 2.50 sabemos que T é unha aplicación compacta, podemos aplicar o Teorema 2.38 (do punto fixo), polo que existe $x \in \overline{D}$ tal que $Tx = x$, é dicir,

$$x(t) = \int_a^t g(s,x(s))\mathrm{d}s \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Como g é unha aplicación continua en $[a,b]$, $x(t) = \int_a^t g(s,x(s))\mathrm{d}s \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Chegamos así a que $x(t)$ é solución do problema:

$$\begin{cases} x'(t) &= g\left(t,x(t)\right), \quad a \le t \le b, \\ x(a) &= 0. \end{cases}$$

$\square$

Observación 2.52. Se supoñemos só que $g : [a,c] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continua, en xeral, a solución desta EDO non é única.

Bibliografía

[1] Bartle, R. G., *On compactness in functional analysis*, American Mathematica Society, 79, 1955.

[2] Cid, J. A., *Grado topológico y ecuaciones diferenciales*, Universidade de Vigo, 2010.

[3] Conway, J. B., *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, Second Edition, 1978.

[4] Cronin, J., *Fixed Point and Topological degree in Nonlinear Analysis*, Mathematical Surveys 11, American Mathematical Society, 1964.

[5] Do Carmo, M. P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.

[6] Fonseca I., Gangbo W., *Degree Theory in Analysis and Applications*, Clarendon Press, 1995.

[7] Kesavan, S., *Nonlinear functional analysis: a first course*, Springer, 2004.

[8] Lloyd, N. G., *Degree Theory*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 1978.

[9] Masa, X. M., *Topoloxía Xeral*, Manuais Universitarios 1, USC, 1999.

[10] Milnor, J., *Proofs of the "Hairy ball theorem" and the Brouwer fixed point theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 85, No. 7, 1978, 521–524.

[11] Rothe, E. H., *Introduction to Various Aspects of Degree theory in Banach Spaces*, Mathematical Surveys 23, American Mathematical Society, 1984.

[12] Rudin, W., *Real and complex analysis*, McGraw-Hill International Editions, Third Edition, 1987.

[13] Sard, A., *The measure of the critical values of differentiable maps*, Bulletin of the American Mathematical Society 48, 1942.