



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Clasificación das superficies compactas por cirurxía

Daniel Expósito Patiño

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Clasificación das superficies compactas por cirurxía

Daniel Expósito Patiño

Xullo 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía
Título: Clasificación das superficies compactas por cirurxía
Director/a: Fernando Alcalde Cuesta
Breve descripción do contido
O obxectivo do traballo é unha demostración de E.C. Zeeman do teorema de Radó de clasificación das superficies compactas mediante cirurxía. O traballo inclúe unha demostración de A. Weil da triangulación das superficies diferenciables de clase C^1
Recomendacións
Outras observacións

Índice xeral

RESUMO	vii
INTRODUCCIÓN	x
1. Espazos de identificación	1
1.1. Pegado de espazos	2
1.2. Accións de grupos topolóxicos	5
2. Triangulacións	9
2.1. Construcción cono	12
2.2. Subdivisión baricéntrica	12
2.3. Triangulación das superficies diferenciables de clase C^∞	15
2.3.1. Preliminares	15
2.3.2. Construcción dun bó atlas	17
2.3.3. Nervio dun recubrimento e proxección	18
2.3.4. Triangulación	19
3. Superficies	21
3.1. Superficies combinatorias	23
3.2. Veciñanzas tubulares	25
3.3. Característica de Euler-Poincaré	26
3.4. Cirurxía	30
3.5. O teorema de clasificación	33
APÉNDICES	34
A. Exemplo motivador	35
BIBLIOGRAFÍA	39

Resumo

Comezamos o traballo cun capítulo introductorio no que presentamos nocións básicas de espazos de identificación e pegados de espazos, así como unha visión elemental sobre accións de grupos. Engadimos a definición de superficie pechada e describimos dous métodos para construír as da lista para irnos familiarizando con elas. Ambas perspectivas conducen a diferentes probas do teorema de clasificación, a clásica de Radó e a baseada no teorema de uniformación de Riemann-Poincaré. A nosa perspectiva é outra, aínda que combina ideas presentes nos traballos de Poincaré e Radó.

No segundo capítulo desenvolveremos os conceptos de símplice e complexo simplicial, para poder descompoñer os espazos en pezas sinxelas coas que poderemos traballar, é dicir, triangulalo. Definimos isomorfismo de complexos, a construción cono e maila subdivisión baricéntrica, que será de vital importancia no último capítulo. Ademáis, probamos que as superficies C^∞ diferenciables (basta C^1 en realidade) son *triangulables* seguindo unha idea de André Weil: atopamos un recubrimento da superficie con boas propiedades, definimos o nervio deste recubrimento e unha proxección na superficie valéndonos dunha métrica de Riemann e dividimos os polígonos xeodésicos en triángulos.

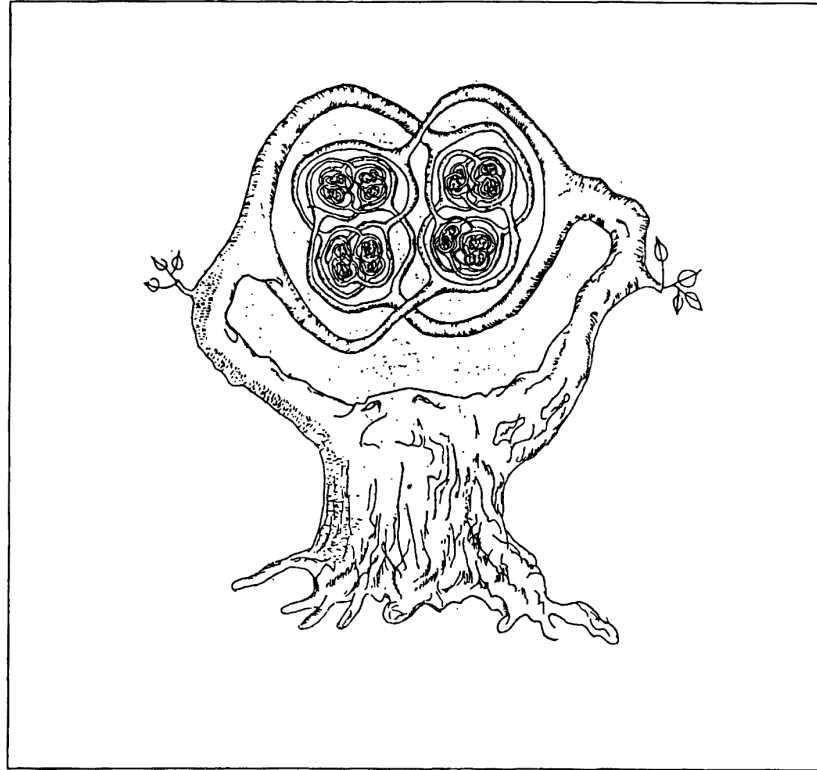
No terceiro capítulo estamos en condicións de abordar finalmente a proba do teorema de clasificación dada por Christopher Zeeman. Describimos o pegado de asas e bandas de Möbius para fixar as superficies modelo da nosa lista e, traballando sobre a súas triangulacións, concretamos a idea de engrosar un sub-complejo e definimos a característica de Euler-Poincaré $\chi(S)$. Chegamos entón á idea clave, o *proceso de cirurxía*, que xunto con $\chi(S)$ permítenos transformar calquera superficie nunha esfera combinatoria nun número finito de pasos. Dende alí revertermos a modificación pegando asas ou bandas para recuperar unha superficie estándar, probando desta forma o teorema de clasificación.

Abstract

We begin with an introductory chapter where we present basic notions on identification spaces and how to attach spaces, as well as an elementary vision on group actions. We include the definition of closed surfaces plus we describe two ways in which we could craft them, helping us familiarize with the model surfaces of the classification theorem. Those perspectives lead to different proofs such as the classic one from Radó or the one based on Riemann-Poincaré uniformization theorem.

In the second chapter we develop the concept of simplex and simplicial complex; in order to break spaces down into simple pieces with which we can work, that is, to triangulate them. We define what means for two complexes to be isomorphic, the cone construction and the barycentric subdivision, which will be of vital importance on our last chapter. In addition, we prove that C^∞ -differentiable surfaces (actually we only need C^1) are *triangulable* following an idea by André Weil: first we find an atlas with good properties, we define the nerve of the atlas and a projection onto the surface making use of geodesics and lastly we chop geodesic polygons into triangles.

On the third chapter we are finally able to tackle Zeeman's proof of the classification theorem. We describe glueing handles and Möbius strips, allowing us to determine the standard surfaces of our list and, working with triangulations, we specify the idea of thickening subcomplexes and we define the Euler-Poincaré characteristic $\chi(S)$. We arrive at the key idea, *surgery*, which altogether with Euler-Poincaré characteristic allow us to transform any surface into a combinatorial sphere on a finite number of steps. We then invert the modification glueing handles or Möbius strips, recovering a standard surface and thus proving the classification theorem.



A esfera de Alexander como Yggdrasil [Ro]

Introducción

O obxectivo último deste traballo é probar o *teorema de clasificación das superficies pechadas*. As demostracións habituais comprenden un paso topolóxico, case sempre evitado, no que se mostra que calquera superficie pechada pode ser triangulada e un paso combinatorio, que se centra en ver que cada superficie combinatoria pode ser transformada noutra estándar, á que é homeomorfa, nun número finito de pasos. Intentos de proba rexistran tan cedo coma o de Möbius en 1870, onde se restrinxiu a superficies orientables diferenciablemente mergulladas no espazo euclidiano tridimensional, e non concluíron ata que T. Radó demostrou exitosamente o paso de *triangulación* en 1925 en [R].

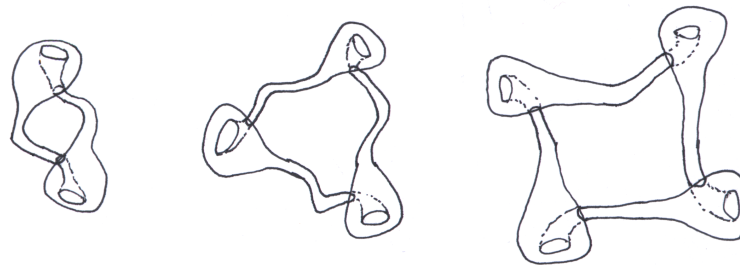
Actualmente existen variedade de probas con diferentes aproximacións. No capítulo 1 lembramos a definición dos modelos planos, usados na proba clásica, que pode verse con máis ou menos detalle en [M] e [CrV]. Tamén recordamos que as superficies pechadas poden obterse como cocientes da esfera S^2 , do plano euclidiano \mathbb{R}^2 ou do plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , que enlaza cun resultado xeométrico máis profundo. O teorema de uniformización de Riemann afirma que calquera superficie xeométrica simplemente conexas é conformemente equivalente á esfera de Riemann, ó plano complexo ou ó disco unidade. A versión de Poincaré establece que calquera superficie xeométrica pechada é equivalente a unha superficie con curvatura de Gauss constante, obtida ó cocientar cada un modelos xeométricos por un grupo discreto de isometrías.

O noso ángulo de ataque ten dúas vantaxes: primeiro resulta máis intuitivo que as tediosas consideracións sobre os modelos planos, nas que a visualización do proceso é habitualmente ignorada e en segundo lugar pode servir de introducción ó uso de técnicas de cirurxía en dimensión maior que dous. A idea de Zeeman sobre o *proceso de cirurxía* pon en primeiro plano os lazos non homótopos a cero ou *esenciais*, resaltando a información clave que fai a unha superficie diferente de outra (dentro do caso orientable/non orientable), e trazando a relación cos grupos fundamentais ou de homoloxía que estos xeneran.

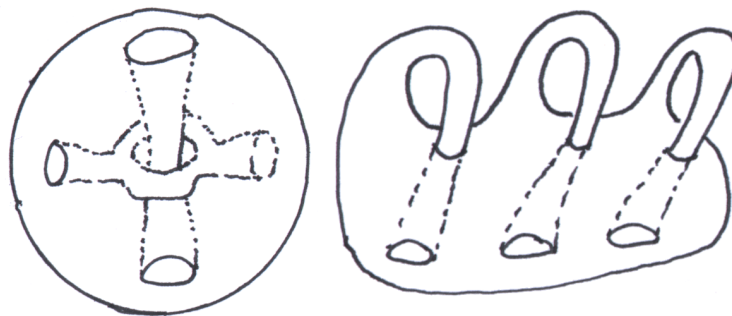
No noso caso escollemos atopar as asas engrosando curvas que as abracen, pero poderíamos facelo considerando simplemente pares de curvas esenciais simples con intersección alxebraica 1. Igual que a figura oito que obtemos como retracto por deformación dun toro furado, isto daría unha correspondencia plena e permitiríanos introducir o xénero dunha superficie de xeito sinxelo.

Por outra parte, baseándonos en [ALM], presentamos un método alternativo para probar que as superficies pechadas C^1 -diferenciáveis son triangulables, a partir dunha idea de A. Weil. Consta de tres pasos: atopar un atlas con boas propiedades, o máis coidadoso e que nos asegura propiedades desexables no seguinte paso; construír un complexo simplicial, chamado *nervio do atlas*, e proxectalo axeitadamente sobre a superficie para obter unha partición en polígonos, ideas elegantes e de gran beleza xeométrica; e por último construír unha triangulación mediante unha subdivisión axeitada en triángulos.

A modo de exemplo motivador, e para espertar a curiosidade lectora, presentamos as seguintes superficies de colleita propia formadas ‘pegando’ entre si botellas de Klein. Permitennos poñer a proba o noso método e, ademáis, mostran a súa fortaleza á hora de atacar superficies calquera que non nos sexan familiares.



Resolverémolo rapidamente unha vez teñamos formulado o noso método, no apéndice. Trataremos tamén as seguintes superficies, que presentamos aquí para non roubar ó lector da oportunidade de chegar á solución independentemente.



Capítulo 1

Espazos de identificación

Veremos rapidamente os conceptos que nos permitirán despois traballar con superficies

Definición 1.1. Dado un espazo topolóxico (X, \mathcal{T}) e unha relación de equivalencia \mathcal{R} sobre X chámase *espazo de identificación* ó conxunto cociente $Y = X/\mathcal{R}$ dotado da topoloxía de identificación.

Para determinar a *topoloxía de identificación* en Y consideramos a aplicación $\pi : X \rightarrow Y$ que leva os puntos de X na súa clase correspondente. Diremos que un conxunto $U \subset Y$ é aberto se $\pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Trátase da topoloxía máis grande $\mathcal{T}(\pi)$ para a cal π é continua.

Definición 1.2. Unha aplicación $\pi : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ dise *identificación* se cumpre:

1. π é continua
2. π é sobrexectiva
3. $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(\pi)$, é dicir, $U \in \mathcal{T}' \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}$

A topoloxía cociente dun espazo cociente é precisamente a topoloxía final que fai continua a proxección canónica, que polo tanto é unha identificación.

Teorema 1.3. Dada $f : X \rightarrow Y$ unha identificación e $g : Y \rightarrow Z$ tense: g é continua $\Leftrightarrow g \circ f : X \rightarrow Z$ é continua.

Demostración. Dado $U \in Z$ aberto, son equivalentes:
 g continua $\Leftrightarrow g^{-1}(U)$ é aberto $\Leftrightarrow f^{-1}(g^{-1}(U))$ é aberto $\Leftrightarrow g \circ f$ é continua. \square

Teorema 1.4. Se $f : X \rightarrow Y$ é continua, sobrexectiva e aberta (pechada), entón f é unha identificación.

Demostración. Sexa $V \subset Y$ tal que $f^{-1}(V)$ é aberto. Como f é sobrexectiva, $f(f^{-1}(V)) = V$ é aberto por ser f aberta (para f pechada razonamos co complementario). Temos entón a topoloxía final que fai a f continua. \square

Corolario 1.5. *Dada $f : X \rightarrow Y$ sobrexectiva e continua, se X é compacto e Y é Hausdorff, entón f é identificación.*

Demostración. Dado un pechado $F \subset X$ compacto, temos que, por ser f continua, $f(F)$ compacto, que por seren Y Hausdorff implica $f(F)$ pechado. Temos entón que f é pechada e usando (1,4) obtemos o resultado. \square

Teorema 1.6. *Se $f : X \rightarrow Y$ é identificación, entón:*

$$\begin{aligned} X \text{ conexo} &\Rightarrow Y \text{ conexo} \\ X \text{ compacto} &\Rightarrow Y \text{ compacto} \\ X \text{ conexo por camiños} &\Rightarrow Y \text{ conexo por camiños} \end{aligned}$$

Demostración. Por ser π sobre e continua xa que é identificación. \square

1.1. Pegado de espazos

Vexamos agora un modo de pegar dous espazos por medio dunha función continua: dados dous espazos X e Y , un subespazo $A \subset X$ e unha aplicación continua $f : A \rightarrow Y$, consideramos o espazo $X \cup_f Y$ obtido partindo da unión disxunta de X e Y e identificando os puntos $a \in A$ coas súas imaxes $f(a) \in Y$. Usarémolo tanto para construír as superficies estándar para o teorema de clasificación como para definir a suma conexas de dúas superficies.

Chamemos $q : X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$ á aplicación cociente e $Z = X \cup_f Y$. Ademais, denotemos ás inclusións dos espazos orixinais na unión disxunta como $i : X \rightarrow X \sqcup Y$ e $j : Y \rightarrow X \sqcup Y$ e os seus pasos ó cociente como $\bar{i} : X \rightarrow Z$ e $\bar{j} : Y \rightarrow Z$, que son continuas. O seguinte diagrama mostra como se relacionan:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{i} & X \sqcup Y & \xrightarrow{j} & Y \\ & \searrow \bar{i} & \downarrow q & \swarrow \bar{j} & \\ & & Z & & \end{array} \tag{1.1}$$

Propiedades 1.7. Temos que se cumpren:

- (1) A aplicación $\bar{j} : Y \rightarrow Z$ é un mergullo de Y en Z .
- (2) A restricción $\bar{i}|_A : X \rightarrow Z$ coincide coa aplicación $\bar{j} \circ f : A \rightarrow Z$.
- (3) A restricción $\bar{i}|_{X-A} : X - A \rightarrow Z - Y$ é un homeomorfismo.

Demostración. (1) A aplicación $\bar{j} = q \circ j$ é inxectiva por ser trivial a relación de equivalencia inducida sobre Y . Ademais, é unha identificación de Y sobre $q(Y)$ xa que para calquer pechado $F \subset Y$ temos que $q^{-1}(\bar{j}(F)) = F \cup f^{-1}(F)$ é un pechado saturado de $X \sqcup Y$. Desta forma $\bar{j} : Y \rightarrow q(Y)$ é un homeomorfismo e $\bar{j} : Y \rightarrow Z$ un mergullo.

(2) Para calquer $x \in A$, pola conmutatividade do diagrama (1.1), verifícase $\bar{i}(x) = q(f(x)) = \bar{j}(f(x))$.

(3) A restricción de $\bar{i} = q \circ i$ a $X - A$ é inxectiva, tamén aquí a relación de equivalencia inducida é trivial. Pero dado que $X - A$ é un aberto saturado de $X \sqcup Y$, tamén é unha identificación sobre $q(X - A) = Z - Y$, como restricción dunha identificación. Temos así que é un homeomorfismo. \square

Definición 1.8. Unha *superficie pechada* é un espazo compacto e Hausdorff no que cada punto ten un entorno homeomorfo ó espazo euclidiano de dimensión 2. Consideraremos, a non ser que se especifique o contrario, superficies conexas.

Serán estes obxectos os que clasificaremos, deixando aparte consideracións sobre superficies con bordo (e cantas compoñentes conexas ten ese bordo) e casos onde a superficie non estea acotada.

Definición 1.9. Dise que unha superficie é *non orientable* se contén un subespazo homeomorfo a unha banda de Möbius, e *orientable* noutro caso.

Definición 1.10. Chámase *suma conexa* de dúas superficies pechadas S_1 e S_2 ó resultado de sacarlle o interior dun disco a cada unha delas e pegalas pola fronteira dos discos. Denótase $S_1 \# S_2$.

Superficies obtidas por adxunción de celas

Definición 1.11. Se $X = \mathbb{D}^n$ e $A = \mathbb{S}^{n-1}$, dise que $Z = \mathbb{D}^n \cup_f Y$ é o espazo obtido *por pegado ou adxunción dunha n-cela a Y*.

Usando esta construción obtemos as superficies da seguinte maneira: A esfera \mathbb{S}^2 é homeomorfa á adxunción $Z = \mathbb{D}^2 \cup_f Y$ dunha 2-cela a $Y = \{y\}$ mediante a aplicación constante $f : \partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1 \rightarrow Y$. Pechamos o disco nunha esfera beliscando todos os puntos da súa fronteira nun. Podemos pensalo asemade coma o caso extremo de pegar dous discos pola súa fronteira.

A *superficie pechada orientable de xénero $g \geq 1$* , $\Sigma_g = \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$, que máis adiante conceptualizaremos como unha esfera con g asas é homeomorfa ó pegado dunha 2-cela á $\bigvee_{i=1}^{2g} \mathbb{S}^1 \times \{i\}$, a unión de $2g$ circunferencias por un punto (figura 1.1).

A *superficie pechada non orientable de xénero $g \geq 1$* , $\Sigma_g = \mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2$, que máis adiante conceptualizaremos como unha esfera con g bandas de Möbius é homeomorfa ó pegado dunha 2-cela á $\bigvee_{i=1}^g \mathbb{S}^1 \times \{i\}$, a unión de g circunferencias por un punto (figura 1.2).

Esta forma de pensar as superficies levaríanos á proba clásica do teorema de clasificación de Radó, usando esquemas planos.

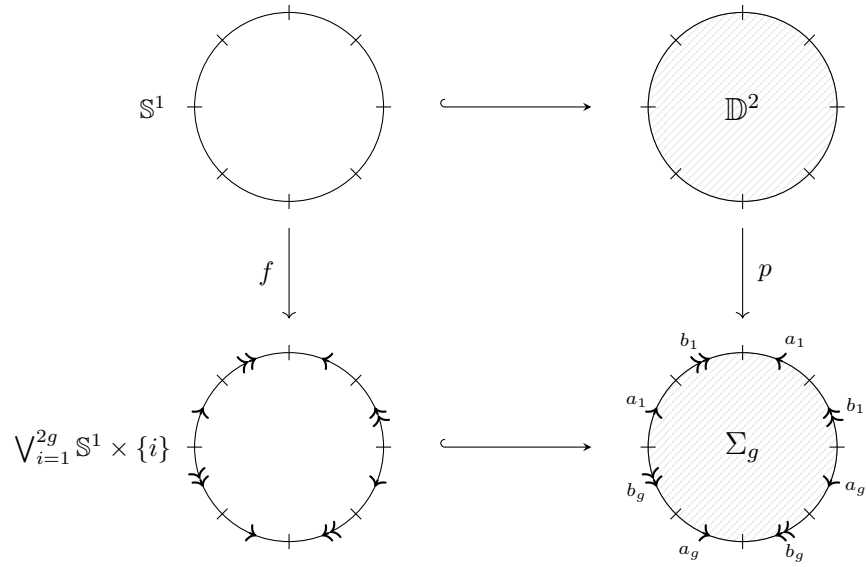


Figura 1.1: Superficie orientable Σ_g .

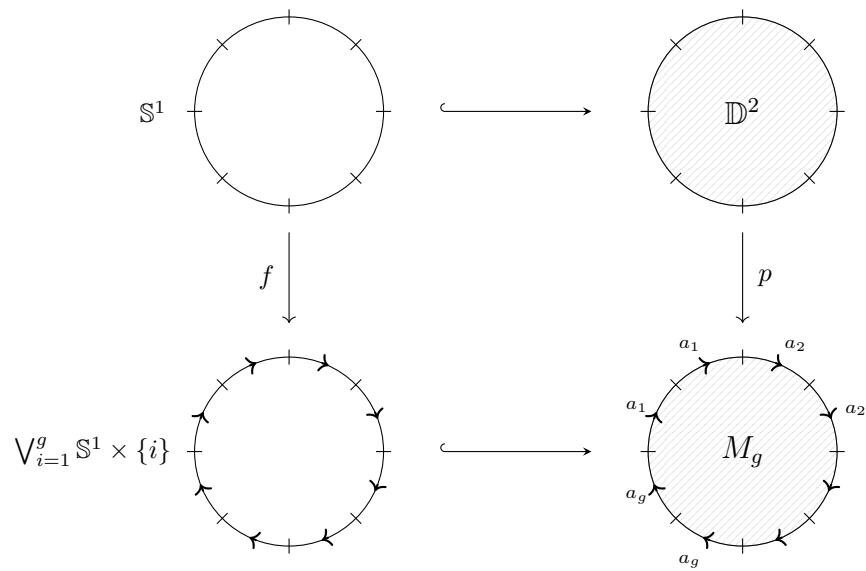


Figura 1.2: Superficie non orientable M_g .

1.2. Acci3ns de grupos topol3xicos

Introducimos agora o concepto de grupo topol3xico con miras a construír as superficies como espazos de 3rbitas.

Definici3n 1.12. Un *grupo topol3xico* é un espazo topol3xico con estrutura de grupo de modo que a multiplicaci3n e a inversi3n

$$\begin{aligned} m : G \times G &\longrightarrow G & i : G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto gh & g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

son continuas cando $G \times G$ ten a topoloxía produto. Un grupo topol3xico é Hausdorff se, e só se, $\{1\}$ é pechado.

Definici3n 1.13. Sexa G un grupo topol3xico e X un espazo topol3xico. Unha aplicaci3n

$$\begin{aligned} \varphi : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g.x \end{aligned}$$

é unha *acci3n* se cumpre:

- a) $1.x = x \quad \forall x \in X$
- b) $g.(h.x) = (gh).x \quad \forall h, g \in G, \forall x \in X$
- c) φ é continua coa topoloxía produto en $X \times G$

e escribimos $G \curvearrowright X$ (G actúa sobre X pola esquerda)

Fixando $g \in G$, por ser φ continua, a aplicaci3n

$$\begin{aligned} L_g : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto g.x \end{aligned}$$

é un homeomorfismo pois $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$. Debido a isto dise que G actúa como un grupo de homeomorfismos.

Definici3n 1.14. Chámasele *3rbita* dun elemento $x \in X$ ó conxunto

$$G.x = \{g.x \in X \mid g \in G\}.$$

É sinxelo comprobar que $x \sim_G y \Leftrightarrow y = g.x$ para algún $g \in G \Leftrightarrow G.x = G.y$ é unha relaci3n de equivalencia.

Definici3n 1.15. Dado X un espazo topol3xico e G un grupo topol3xico ó espazo cociente $X/G = X / \sim_G$ chámasele espazo de 3rbitas.

Proposici3n 1.16. Se $X \curvearrowright G$, cúmplase que $\pi : X \longrightarrow X/G$ é unha identificaci3n aberta

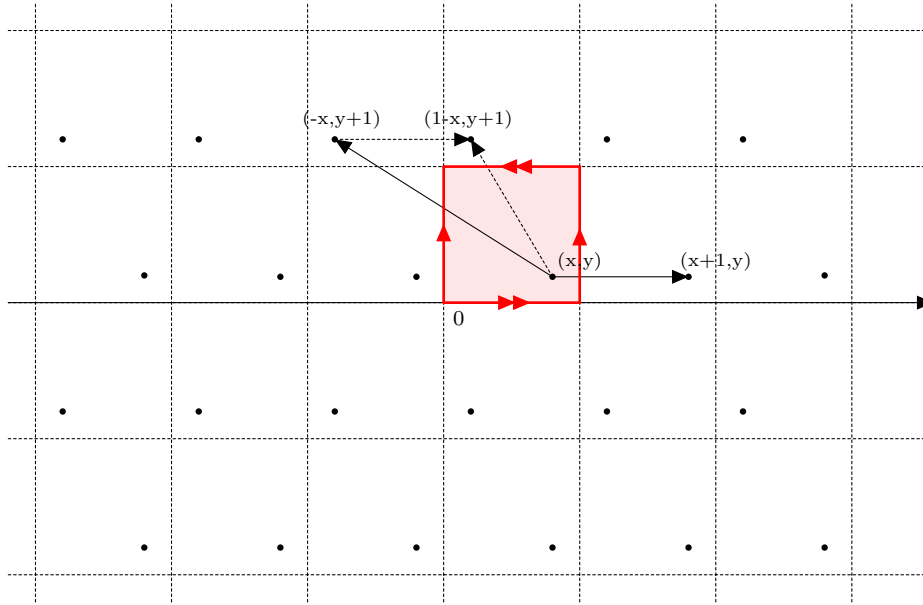


Figura 1.3: A botella de Klein como espacio de órbitas de \mathbb{R}^2 .

Demostración. Se temos $U \subset X$ un aberto cúmplese:

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{x \in U} G.x = \bigcup_{g \in G} L_g(U)$$

que é aberto por ser unión numerable de abertos, xa que U é aberto e L_g é un homeomorfismo para cada $g \in G$. \square

Superficies como espazos de órbitas A partir da esfera obtemos o espazo proectivo $\mathbb{R}P^2$ facendo actuar o grupo de isometrías xerado pola aplicación antipodal $f(x) = -x$, con $x \in \mathbb{S}^2$. Dado que $f \circ f = id$, o grupo é isomorfo a \mathbb{Z}_2 .

A partir do plano \mathbb{R}^2 obtemos o toro \mathbb{T}^2 , facendo actuar o grupo de isometrías xerado por $f(x, y) = (x + 1, y)$ e $g(x, y) = (x, y + 1)$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. O cadrado de lado 1 tesela o plano e o espazo de órbitas é o toro, posto que obtemos un cadrado cos lados paralelos identificados co mesmo sentido.

Sen embargo, se facemos actuar sobre o plano \mathbb{R}^2 o subgrupo de isometrías xerado por $f(x, y) = (x + 1, y)$ e $g(x, y) = (-x, y + 1)$ temos a botella de Klein, M_2 . Neste caso, como pode verse na figura 1.3, os lados paralelos do cadrado están identificados conservando a orientación nun dos pares e invirtíndoa no outro.

As superficies orientables de xénero ≥ 2 e as non orientables de xénero ≥ 3 , requiren máis coidado. O plano hiperbólico, que é $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$

coa métrica

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y},$$

pódese teselar con polígonos de seis ou máis lados. Así, facendo actuar un grupo de transformacións que leven os lados dos polígonos noutros seguindo un esquema adecuado, obtemos as superficies desexadas. Os grupos en cuestión chámanse *grupos Fuchsianos* e pódese atopar unha descripción detallada do proceso en [K]. Na figura 1.4 vemos un exemplo con \mathbb{H}^2 na súa forma equivalente de disco de Poincaré.

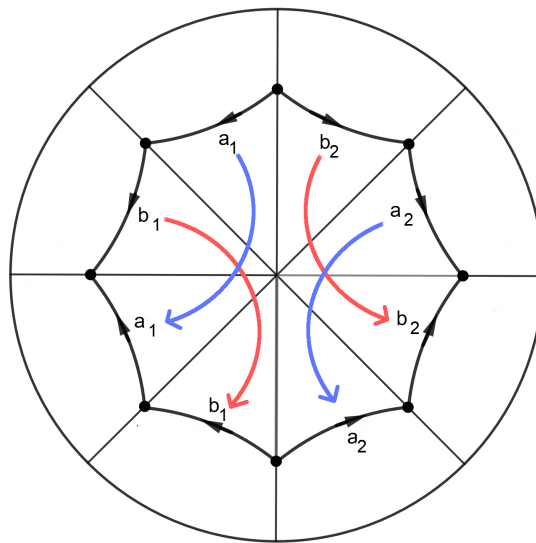


Figura 1.4: O dobre toro, Σ_2 , como cociente de \mathbb{H} polo grupo xerado polas aplicacións f_1 e f_2 (en azul); e g_1 e g_2 (en vermello) [C].

Este plantexamento leva a outra proba do teorema de clasificación, que se vale de conceptos de análise complexo como o teorema de uniformización de Riemann-Poincaré, que di que toda superficie pechada pode obterse como cociente da esfera S^2 , do plano \mathbb{R}^2 ou do plano hiperbólico \mathbb{H}^2 .

Nós pretendemos desenvolver nos seguintes capítulos unha terceira proba que centra a interpretación xeométrica, o papel dos lazos esenciais e mostra un procedemento que pode xeneralizarse a maior dimensión para distinguir variedades.

Capítulo 2

Triangulacións

A demostración do Teorema de Clasificación das superficies e mesmo o cálculo dos seus invariantes alxébricos, sexa o grupo fundamental ou os grupos de homoloxía, requiren que descompoñamos os espazos en pezas sinxelas chamadas *símplices*, que encaixan adecuadamente, para podelos abordar. Os espazos nos que podemos facelo son os chamados *espazos triangulables*, que comprenden as superficies.

Comecemos construíndo os símplices:

Definición 2.1. Sexa $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ un conxunto de puntos de \mathbb{R}^m . Dise que os puntos $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ son *xeometricamente independentes* se os vectores $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ son linealmente independentes.

Definición 2.2. Chámase *plano afín* xerado por $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ ó conxunto de puntos

$$v = v_0 + \sum_{i=1}^n t_i(v_i - v_0) = \sum_{i=0}^n t_i(v_i - v_0)$$

onde $t_0 = 1 - \sum_{i=1}^n t_i$, ou de xeito equivalente $\sum_{i=0}^n t_i = 1$.

Definición 2.3. Chámase *n-símplice* xerado polos puntos xeometricamente independentes $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ ó conxunto $\sigma = \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$ formado polos puntos

$$v = \sum_{i=0}^n t_i v_i$$

onde $\sum_{i=0}^n t_i = 1$ e $0 \leq t_i \leq 1$, para $i = 0, 1, \dots, n$. Dise que (t_0, t_1, \dots, t_n) son as *coordenadas baricéntricas* de σ .

Os puntos $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ chámanse *vértices* e σ correspóndese coa envoltura convexa dos seus vértices.

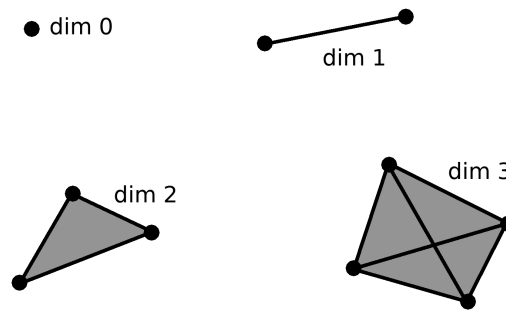


Figura 2.1: Símplices de dimensión 0 a 3.

Definición 2.4. Dado un símplex σ , chámase *cara* de σ a calquera subsímplex τ xerado por un subconxunto dos vértices de σ e escribimos $\tau < \sigma$.

Concretemos agora a noción de que os símplexes encaixen adecuadamente.

Definición 2.5. Unha colección finita de símplexes K nalgún espazo euclidiano de dimensión finita chámase *complexo simplicial* se todas as caras dun símplex da colección están na colección e se a intersección de dous símplexes é sempre unha cara común ou vacía.

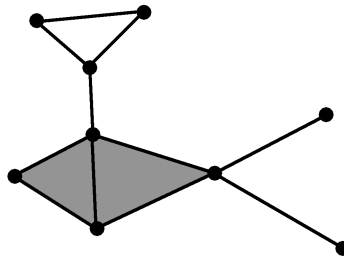


Figura 2.2: Un exemplo de complexo simplicial.

Díse que L é un *subcomplexo* de K se é unha subcolección dos símplexes de K que a súa vez é un complexo simplicial.

A unión dos símplexes dun complexo simplicial é un subconxunto dun certo espazo euclidiano e como tal podemos dotalo da topoloxía de subespazo inducida. Este espazo topolóxico chámase *poliedro* e escríbese $|K|$.

Definición 2.6. Unha *triangulación* dun espazo topolóxico X consiste nun complexo simplicial K e un homeomorfismo $h : |K| \rightarrow X$. Polo tanto un espazo X é *triangulable* se admite unha triangulación.

A triangulación dun espazo non é única, temos liberdade á hora de elixir o complexo simplicial e o homeomorfismo. A parte importante é a súa existencia, que nos permitirá probar resultados ou facer determinados cálculos.

Definición 2.7. Dous complexos K e L , non necesariamente mergullados no mesmo espazo euclidiano, dinse *isomorfos* se existe unha aplicación bixectiva ϕ do conxunto de vértices de K ós de L tal que cada subconxunto $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ é o conxunto de vértices dun símlice en K se e só se $\{\phi(v_0), \phi(v_1), \dots, \phi(v_n)\}$ é o conxunto de vértices dun símlice en L .

Entón dous complexos isomorfos terán o mesmo número de símlices de cada dimensión e exhibirán o mesmo patrón de interseccións entre eles. Independentemente do espazo no que estean mergullados, esta correspondencia na súa estrutura resulta en *poliedros homeomorfos*.

Chámase *interior* dun símlice ós puntos que teñen todas as súas coordenadas baricéntricas positivas. Esta noción coincide co interior no caso en que o símlice ten a mesma dimensión que o espazo euclidiano no que se atopa e difire noutro caso.

Proposición 2.8. *Dado K un complexo simplicial, verifícase:*

- a) $|K|$ é pechado e acotado no espazo euclidiano e en consecuencia $|K|$ é un espazo compacto.
- b) Cada punto de $|K|$ pertence ó interior de exactamente un símlice de K .
- c) Se collemos os símlices de K por separado e dotamos á súa unión da topoloxía feble, obtemos $|K|$.
- d) Se $|K|$ é conexo, entón é conexo por camiños.

Demostración. Dado que K é finito e cada símlice é pechado e acotado, temos (a).

Para demostrar (b) consideramos un punto no interior de dous símlices. Temos entón que se cortan e por ser un complexo deben facelo nunha cara común, pero a única cara que ten puntos do interior é o propio símlice. Daquela os dous símlices son iguais.

Para probar (c), dado que os símlices son pechados no espazo euclidiano, tamén o son en $|K|$. Entón dado un conxunto C en $|K|$, se $C \cap \sigma$ é pechado para un símlice σ , tamén o é en $|K|$. Desta maneira, a unión finita $C = \bigcup \{C \cap \sigma \mid \sigma \in K\}$ é pechada en $|K|$. Temos entón a topoloxía feble, un subconxunto de $|K|$ é pechado se e só se interseca a cada símlice nun pechado relativo. Trátase por definición dun caso particular de topoloxía de identificación.

Por último, para demostrar (d), vexamos que $|K|$ é localmente conexo por camiños. Dado un punto $x \in |K|$, denotamos por L ó subcomplexo de K consistente nos símlices de K que non conteñen a x . Como $|L|$ é pechado, a distancia ϵ de x a $|L|$ verifica que $\epsilon > 0$. Sexa ϵ a distancia de x a $|L|$. Para $\delta < \epsilon$, o conxunto $B(x, \delta) \cap |K|$ é conexo por camiños, xa que calquer punto pode unirse con x mediante unha recta contida nalgún dos símlices. Así, se $|K|$ é conexo temos o resultado. \square

2.1. Construcción cono

Consideramos o espazo euclidiano \mathbb{R}^n de dimensión n como o subespazo con última coordenada igual a cero do espazo euclidiano \mathbb{R}^{n+1} de dimensión $n + 1$. Dado un complexo K en \mathbb{R}^n , para construír o complexo CK en \mathbb{R}^{n+1} , chamado *cono de K* , procedemos da seguinte maneira: se v_0, v_1, \dots, v_k son os vértices dun k -símplice τ en $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $v = (0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, entón v_0, v_1, \dots, v_k, v son xeometricamente independentes e determinan un $(k + 1)$ -símplice chamado *unión* de τ a v . O cono CK comprende os símplices de K , as unións desos símplices a v e o apex v pensado como 0-símplice. É sinxelo comprobar que os seus símplices encaixan adecuadamente e polo tanto é un complexo.

Observación 2.9. Na construción do cono eliximos $v = (0, 0, \dots, 1)$ como apex, pero calquera outro de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n$ valería e resultan en complexos isomorfos coa aplicación que deixa fixos os vértices orixinais e leva v no novo vértice elixido.

Observación 2.10. A construción cono que definimos en complexos coincide coa definida para calquera espazo topolóxico X :

$$CX = \frac{X \times [0, 1]}{X \times \{1\}}$$

no sentido de que $|CK| \cong C|K|$.

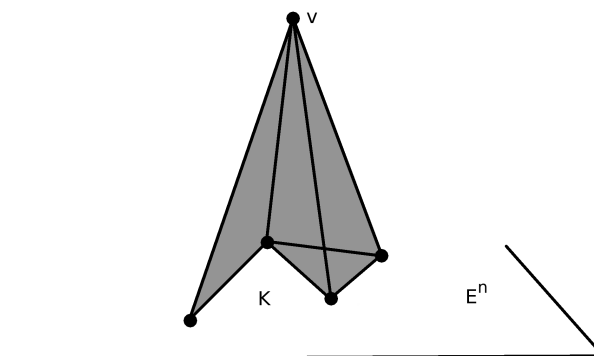


Figura 2.3: Cono dun complexo K .

2.2. Subdivisión baricéntrica

Buscamos producir un novo complexo K^1 a partir dun complexo K de forma que teña o mesmo poliedro que K pero os seus símplices teñan menor diámetro.

Definición 2.11. Dado un k -símplice $\sigma = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$, chámase *baricentro* ó punto

$$b(\sigma) = \frac{1}{k+1}(v_0 + v_1 + \dots + v_k),$$

é dicir, ó punto con coordenadas baricéntricas $(\frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+1})$.

Para construír o complexo simplicial K^1 procedemos da seguinte maneira: engadimos os baricentros de todos os símplices de K como novos vértices de K^1 . Como un 0-símplice é o seu propio baricentro, os vértices de K están contidos no conxunto de vértices de K^1 . Logo, procedendo por recurrencia, dividimos os símplices de K como conos con apex o seu baricentro. Así, verifícase que un conxunto de baricentros $b(\sigma_0), b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_k)$ procedente dos símplices $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k$ son os vértices dun K -símplice de K^1 se e só se

$$\sigma_{\varepsilon(0)} < \sigma_{\varepsilon(1)} < \dots < \sigma_{\varepsilon(k)}$$

onde ε é unha permutación dos índices.

Os símplices de K^1 están definidos correctamente, xa que se

$$\sigma_{\varepsilon(0)} < \sigma_{\varepsilon(1)} < \dots < \sigma_{\varepsilon(k)},$$

entón para cada i o baricentro $b(\sigma_i)$ non pertence ó plano afín xerado por $b(\sigma_{\varepsilon(0)}), b(\sigma_{\varepsilon(1)}), \dots, b(\sigma_{\varepsilon(i-1)})$ e polo tanto $b(\sigma_{\varepsilon(0)}), b(\sigma_{\varepsilon(1)}), \dots, b(\sigma_{\varepsilon(k)})$ son xeometricamente independentes. Ademais, verifícase que cada cara dun símplice de K^1 está no complexo trivialmente.

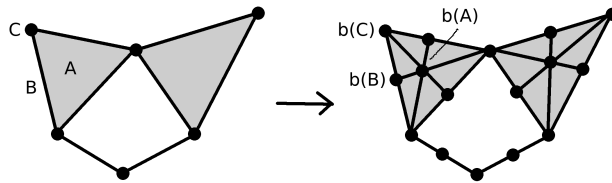


Figura 2.4: Subdivisión baricéntrica dun complexo.

Definición 2.12. A *dimension* dun complexo simplicial é o máximo das dimensións dos seus símplices e a súa *mallá* $\mu(K)$ é o máximo dos diámetros dos seus símplices, sendo o diámetro dun símplice a máxima distancia entre dous puntos contidos nel.

Lema 2.13. *Todo simplex de K^1 está contido nun de K .*

Demostración. Por definición, un símplice de K^1 está xerado polos baricentros

$$b(\sigma_0), b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_k)$$

se símplices $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k$ que verifican $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k$. Desta maneira todos os vértices están en σ_k e polo tanto o símplice está contido tamén nel. \square

Proposición 2.14. K^1 é un complexo simplicial e verifica $|K^1| = |K|$.

Demostración. Seguindo a idea de M.A. Armstrong en [Arm], probarémolas á vez, mediante inducción no número de símplies.

Para o caso no que K teña un só símplete, a dimensión é 0 e a subdivisión baricéntrica non modifica o vértice, que encaixa trivialmente nos restantes símplies e o poliedro non varía.

Supoñamos que a hipótese é certa para todos os complexos con menos de m símplies e consideramos K con exactamente m símplies. Tomemos un símplete η de K de dimensión máxima, igual a n . Chamemos L ó complexo obtido eliminando η con $m - 1$ símplies e poliedro homeomorfo ó poliedro que resulta de eliminar o interior de η en $|K|$. Pola hipótese de inducción L^1 é un complexo no que as caras encaixan adecuadamente e $|L^1| = |L|$.

Un símplete σ de K^1 que non estea en L^1 está determinado polos baricentros

$$b(\eta_0), b(\eta_1), \dots, b(\eta_{k-1}), b(\eta)$$

dunha sucesión de caras

$$\eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_{k-1} < \eta.$$

Os vértices $b(\eta_0), b(\eta_1), \dots, b(\eta_{k-1})$ determinan unha cara σ' de σ que pertence a L^1 .

Dado calquera outro símplete τ de K^1 nas mesmas condicións, definimos unha cara τ' de τ da mesma maneira. Pola hipótese de inducción, se σ' e τ' se intersecan, fanno nunha cara común. Así, os vértices de $\sigma' \cap \tau'$ xunto con $b(\eta)$ determinan unha cara común que é exactamente $\sigma \cap \tau$. De non intersecárense σ' e τ' , cumpriárase $\sigma \cap \tau = b(\eta)$.

Para comprobar $|K^1| = |K|$, polo lema anterior sabemos que $|K^1| \subseteq |K|$; vexamos a outra inclusión. Dado $x \in |K|$, sexa σ o único símplete de K que o contén no seu interior. Se $x = b(\sigma)$, entón $x \in |K^1|$. Noutro caso, unimos $b(\sigma)$ con x mediante unha recta, que prolongamos ata que atope a unha cara de σ nun punto que denotaremos y . Cúmplese que $y \in |L^1| = |L|$ polo que y está no interior dun único τ de L^1 . O(s) vértice(s) de τ xunto con $b(\sigma)$ determinan un símplete de K^1 que contén a x . Polo tanto $x \in |K^1|$ e verifícase a igualdade. \square

Proposición 2.15. Sexa n a dimensión do complexo K , temos que

$$\mu(K^1) \leq \frac{n}{n+1} \mu(K).$$

Demostración. Notemos que o diámetro dun símplete é a lonxitude da súa arista máis longa. Se σ é unha arista de K^1 xerada polos vértices $b(\sigma_1)$ e $b(\sigma_2)$ tal que $\sigma_1 < \sigma_2$, temos que $\sigma \subset \sigma_2$. Se k é a dimensión de σ_2 , verifícase

$$\text{lonxitude } \sigma \leq \frac{k}{k+1} (\text{diámetro } \sigma_2) \leq \frac{n}{n+1} (\text{diámetro } \sigma_2) \leq \frac{n}{n+1} \mu(K)$$

e polo tanto $\mu(K^1) \leq \frac{n}{n+1} \mu(K)$. \square

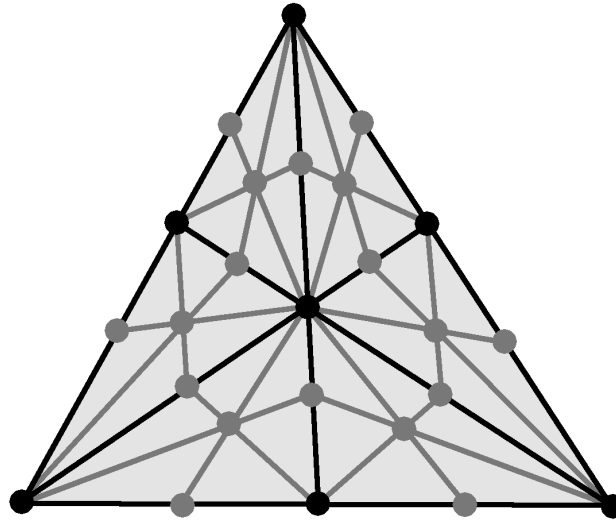


Figura 2.5: Segunda subdivisión baricéntrica dun triángulo.

Definición 2.16. Definimos a m -ésima subdivisión baricéntrica K^m de K de forma inductiva como $K^m = (K^{m-1})^1$. Usando o lema anterior, sabemos que este método permitenos facer o diámetro dos símlices de K^m tan pequeno como sexa necesario. Véxase a figura 2.5.

2.3. Triangulación das superficies diferenciables de clase C^∞

Para probar que as superficies de clase C^∞ son triangulables seguiremos unha idea de A. Weil [W], empregada en [ALM] e [L], que se divide en tres pasos.

2.3.1. Preliminares

Comecemos recordando algunhas definicións de xeometría Riemanniana que usaremos para a construción:

Definición 2.17. Dada unha superficie diferenciable S , chamamos *métrica de Riemann* g sobre M a un campo de produtos interiores

$$g_x : T_x S \times T_x S \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \in S$$

tal que dados dous campos de vectores diferenciables $X, Y : S \longrightarrow TS$, a aplicación

$$\begin{aligned} g(X, Y) : S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g_x(X(x), Y(x)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

é diferenciable. O par (S, g) denomínase *superficie xeométrica*.

Dada unha superficie xeométrica (S, g) , podemos considerala un espazo métrico coa distancia definida por

$$d(x, y) = \inf\{l(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \longrightarrow M \text{ curva diferenciable, } \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}$$

para cada $x, y \in S$ onde $l(\gamma)$ é a lonxitude da curva γ vén dada por

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt.$$

Definición 2.18. Unha curva que une dous puntos con lonxitude mínima chámase *xeodésica*.

O teorema de Hopf-Rinow afirma que as seguintes condicións son equivalentes:

1. (S, g) é *xeodesicamente completo*, é dicir, todas as xeodésicas poden prolongarse indefinidamente,
2. (S, g) é un espazo métrico completo,
3. (S, g) é un *espazo de Heine-Borel*, é dicir, os subconxuntos pechados e limitados son compactos.

Ademáis, calquera destas condicións implica que dous puntos de S están sempre unidos por unha xeodésica.

Dado un punto p dunha superficie xeométrica S e un vector diferente de cero $c \in T_p S$, existe unha única xeodésica parametrizada $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow S$, con $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Escribimos $\gamma = \gamma(t, v)$ para indicar a dependencia no vector v .

Lema 2.19. [Ca, lema 1, §4-6] *Se a xeodésica $\gamma(t, v)$ está definida para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, entón a xeodésica $\gamma(t, \lambda v)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, está definida para $t \in (-\epsilon/\lambda, \epsilon/\lambda)$ e $\gamma(t, \lambda v) = \gamma(\lambda t, v)$.*

Usaremos este feito para definir a *aplicación exponencial* $exp_p(v) : T_p S \longrightarrow S$. En efecto, se $0 \neq v \in T_p S$ e a xeodésica $\gamma(|v|, v/|v|) = \gamma(1, v)$ está definida, entón

$$exp_p(v) = \gamma(1, v) \quad \text{e} \quad exp_p(0) = p.$$

Proposición 2.20. [Ca, proposición 2, §4-6] *A aplicación exponencial $exp_p(v) : T_p S \longrightarrow S$ é un difeomorfismo dunha veciñanza B da orixe $0 \in T_p S$ na súa imaxe.*

Definición 2.21. Chámase *radio de inxectividade no punto x* á cantidade

$$inx(x) = \sup\{\epsilon > 0 \mid exp_x : B_{T_x S}(0, \epsilon) \longrightarrow B_S(x, \epsilon) \text{ é un difeomorfismo}\}.$$

Sempre é positivo e pode chegar a tomar o valor $+\infty$. O radio de inxectividade dunha superficie xeométrica $inx(S)$ é o ínfimo dos radios de inxectividade en cada punto.

Por outra parte, sabemos que as bolas suficientemente pequenas en S serán *xeodesicamente convexas*. Isto significa que dous puntos da bola poden unirse por unha xeodésica que minimiza a distancia contida na bola -chámase segmento xeodésico e é único.

Definición 2.22. Definimos o *radio de convexidade en x* como

$$\text{conv}(x) = \sup\{\epsilon > 0 \mid B_S(x, \epsilon) \text{ é xeodesicamente convexa}\}.$$

O radio de convexidade dunha variedade $\text{conv}(S)$ será o infimo dos radios de convexidade en cada punto.

Teorema 2.23. *Se S é compacta, entón $\text{inx}(S)$ e $\text{conv}(S)$ son positivos.*

Trátase do [B, Theorem 24 & Proposition 95], que se basea nas desigualdades:

$$\begin{aligned} \text{inx}(S) &\geq \min\left\{\frac{\pi}{\sqrt{K}}, \frac{1}{2}(\text{lonxitude do lazo xeodésico máis curto})\right\}, \\ \text{conv}(S) &\geq \min\left\{\frac{\pi}{2\sqrt{K}}, \frac{1}{2}\text{inx}(N)\right\}, \end{aligned}$$

onde K é unha cota superior da curvatura seccional da superficie xeométrica S . Se $K \leq 0$ o primeiro término non se considera e dáse a igualdade co outro término.

2.3.2. Construcción dun bó atlas

Teorema 2.24. *Dada unha superficie xeométrica compacta S , existe un atlas finito $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ tal que U_i é xeodesicamente convexo e \bar{U}_i é compacto. De feito, a unión $\text{estr}(x, \mathcal{U})$ dos elementos de \mathcal{U} que conteñen a x é xeodesicamente convexo.*

Demostración. Fixamos $0 < \epsilon < \text{conv}(S)$. Dado un punto $x \in S$, eliximos $W_x = B(x, \epsilon)$ e definimos $\varphi_x : W_x \rightarrow \mathbb{R}^2$ como a inversa local da exponencial. Temos así un atlas $\mathcal{W} = \{(W_x, \varphi_x)\}$ no que os abertos son xeodésicamente convexas.

Agora ben, como S é un espazo métrico e polo tanto paracompacto, temos un resultado que nos asegura que existe un refinamento \mathcal{V} de \mathcal{W} tal que $\text{estr}(x, \mathcal{V}) \subset W \in \mathcal{W}$ para cada punto $x \in S$.

Como S é compacto, podemos considerar δ o número de Lebesgue de \mathcal{V} . Para cada $x \in S$, escollemos $W \in \mathcal{W}$ tal que $x \in W$ sendo $\varphi : W \rightarrow \varphi(W) \subset \mathbb{R}^2$ a carta correspondente. Podemos elixir un entorno $A \subset \mathbb{R}^2$ de $\varphi(x)$ de maneira que teñamos a carta $\varphi_x : U_x \subset W \rightarrow A$ onde $U_x = \varphi^{-1}(A)$ sexa xeodésicamente convexo e o seu diámetro menor que δ . De esta maneira, para cada U_x existe un $V_x \in \mathcal{V}$ tal que $U_x \subset V_x$. Facendo A aínda máis pequeno podemos supoñer (por compacidade local) que $U_x \subset \bar{U}_x \subset V_x$ sendo \bar{U}_x compacto. Usando compacidade de S escollemos un subatlas finito $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ de $\{(U_x, \varphi_x)\}$ e obtemos o resultado, pois cumpre as tres propiedades desexadas.

Se no primeiro paso escollemos $0 < \epsilon < \frac{1}{8} \text{conv}(S)$ obtemos un atlas coas mesmas propiedades onde ademáis $\text{estr}(x, \mathcal{U})$ está contido nun aberto xeodesicamente convexo. \square

Observación 2.25. Poderíamos rebaixar a diferenciabilidade da hipótese inicial, xa que unha variedade diferenciable de clase C^1 admite unha estrutura C^∞ -diferenciable que é C^1 -equivalente á estrutura inicial. A proba deste resultado pode verse en [H, Teorem 2.9]. Como consecuencia, calquera variedade compacta de clase C^1 –e en particular calquera superficie compacta de clase C^1 – admite unha métrica Riemanniana completa g que satisface o teorema de existencia e unicidade de xeodésicas, co que poderíamos repetir este paso.

2.3.3. Nervio dun recubrimento e proxección

Partindo do atlas con boas propiedades construído no paso anterior, obteremos un complexo simplicial $\mathcal{N}(\mathcal{U})$, chamado *nervio do recubrimento*, que contén a información combinatoria de \mathcal{U} .

Definición 2.26. Supoñendo que $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_N\}$, dados $i_0 < i_1 < \dots < i_k$, diremos que o k -símplice abstracto $\langle i_0, i_1, \dots, i_k \rangle$ pertence ó nervio se

$$\langle i_0, i_1, \dots, i_k \rangle \in \mathcal{N}(\mathcal{U}) \Leftrightarrow \bigcap_{j=0}^k U_{i_j} \neq \emptyset.$$

Debido a esta propiedade, as caras dun símplice de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ sempre pertencen ó nervio e o complexo simplicial está ben definido.

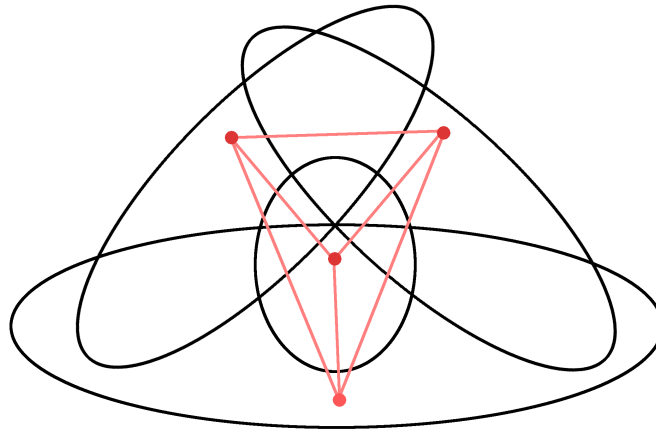


Figura 2.6: Exemplo dun nervio dados os abertos do recubrimento.

Buscamos definir unha proxección $\pi : \mathcal{N}(\mathcal{U}) \rightarrow S$ e farémolo valéndonos das xeodésicas que nos garantiza a terceira propiedade do atlas. Se c_i é o centro da bola $U_i \in \mathcal{U}$, fixamos $\pi(\langle i \rangle) = c_i$.

Agora, para cada 1-símplice $\langle i, j \rangle$ sabemos que existe unha única xeodésica que une $\pi(\langle i \rangle) = c_i$ e $\pi(\langle j \rangle) = c_j$, xa que están a unha distancia menor que $\text{conv}(S)/4$. Usaremos unha parametrización $\sigma_{i,j} : [0, 1] \rightarrow S$ da xeodésica proporcional á lonxitude de arco e definimos $\pi(t) = \sigma_{i,j}(t)$ para punto $x \in \langle i, j \rangle$ de coordenadas baricéntricas $(1-t, t)$.

Inductivamente, supoñamos definida a proxección para os $(n-1)$ -símplices e definámola en dimensión n . Para cada punto $x \in \langle i_0, i_1, \dots, i_n \rangle$ con coordenadas baricéntricas (t_0, t_1, \dots, t_n) que non pertenza a unha cara do símplice –onde xa estaría definida a proxección– hai unha única recta que une $i_0 = (1, 0, \dots, 0)$ con x . Esta recta cortará á cara $\langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle$ en

$$y = (0, t_1/(1-t_0), t_2/(1-t_0), \dots, t_n/(1-t_0)).$$

Como o punto $\pi(y)$ pertence á estrela $\text{estr}(\pi(i_0), \mathcal{U})$ existe unha única xeodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ que une $\gamma(0) = \pi(i_0)$ e $\gamma(1) = \pi(y)$ e definimos $\pi(x) = \gamma(1-t_0)$. Recorremos a xeodésica según $1-t_0$ xa que, en coordenadas baricéntricas, canto maior sexa t_0 máis cerca está o punto de i_0 máis a xeodésica comeza na imaxe de i_0 .

Así definida π é unha aplicación continua e sobrexectiva. Ademais, elixindo con coidado os centros, a aplicación π é inxectiva cando nos restrinximos a cada símplice.

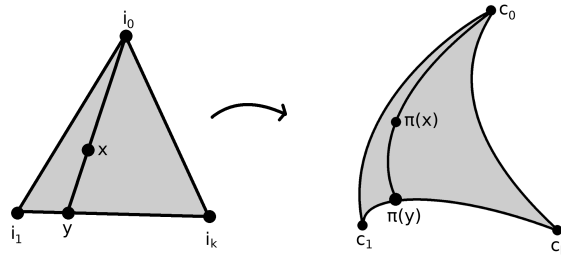


Figura 2.7: Construción da proxección no interior dun n -símplice.

2.3.4. Triangulación

A proxección dos k -símplices determina unha familia de 2-símplices xeodésicos que recubre S , pero non necesariamente encaixan adecuadamente, pois poden cortarse en conxuntos diferentes a caras (véxase Figura 2.8). Engadimos vértices en todos os puntos nos que dous 1-símplices se corten. Temos entón a superficie teselada con polígonos xeodésicos ben encaixados. Para ter unicamente triángulos, engadimos o centro de masas de cada polígono e unímolo por medio de xeodésicas con cada un dos vértices.

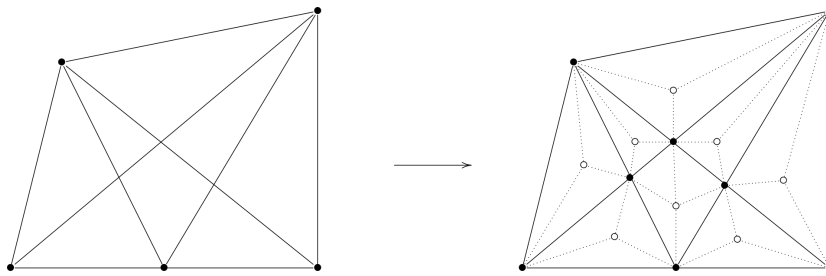


Figura 2.8: Obtemos triángulos a partir dos polígonos xeodésicos [ALM].

Deste xeito temos un complexo simplicial K de dimensión 2, onde cada 2-símplice está contido na proxección dalgún k -símplice de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ e o mergullo na superficie está inducido pola restricción da proxección π . Daquela as aplicacións locais péganse nun homeomorfismo de $|K|$ en S que define a triangulación.

Observación 2.27. O teorema de triangulación das superficies topolóxicas compactas é un resultado clásico demostrado por T. Radó en 1925 usando o teorema de separación de Jordan-Schönflies. Hai varias demostracións curtas do teorema de Radó que usan este mesmo ingrediente: a variante de C. O. Christenson y W. L. Voxman [CrV] mediante discos con buratos, válida no caso non compacto, ou a proba curta de P. H. Doyle e D. A. Moran en [DM]. Os discos con buratos xogan o mesmo papel que os polígonos da nosa proba.

Capítulo 3

Superficies

O propósito deste capítulo é probar o Teorema de Clasificación das superficies pechadas, seguindo unha idea de Zeeman [Z] detallada no libro *Basic Topology* de M. A. Armstrong [Arm]. Un método clásico de demostración do teorema de clasificación das superficies compactas consiste na redución a un modelo plano tal e como se describe en [M] ou [CrV]. (Por oposición ao método de Zeeman, máis curto e menos delicado)

Para poder formular o teorema, precisamos ver antes que significa *pegar asas* e *pegar bandas de Möbius*.

Pegado de asas. Dados dous discos disxuntos D_1 e D_2 nunha superficie S sempre podemos atopar un terceiro disco que conteña ós dous anteriores. Por exemplo conectando os dous discos por un arco na superficie e engrosando o resultado do modo que veremos na seguinte sección. Deste xeito, reducimos o pegado de asas a unha superficie ó caso dun disco.

Para pegar un asa a un disco D usamos a construción $X \cup_f Y$ da sección 1.1 considerando o cilindro $X = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, o bordo $A = \mathbb{S}^1 \times \{0, 1\}$, o pantalón $Y = D \setminus (\overset{\circ}{D}_1 \cup \overset{\circ}{D}_2)$ e un homeomorfismo $f : \mathbb{S}^1 \times \{0, 1\} \rightarrow \partial D_1 \cup \partial D_2$. Agora ben, dependendo de se f respecta ou non as orientacións das fronteiras dos discos, podemos pegar o cilindro de formas distintas que dan como resultado espazos non homeomorfos.

Dada unha orientación no cilindro e as orientacións inducidas nas circunferencias dos bordos (unha resulta oposta á outra), consideramos *pegar un asa a un disco* cando f mantén ambas orientacións (ou invirte ambas) e *pegar un asa ó revés a un disco* cando f mantén a orientación dunha e invirte a outra. Os resultados destas operacións son homeomorfos a un *toro furado* ($\mathbb{T}^2 \setminus \overset{\circ}{D}$) e unha *botella de Klein furada* ($\mathbb{K}^2 \setminus \overset{\circ}{D}$), respectivamente (véxase Figura 3.1 e 3.2).

Observación 3.1. Nunha superficie non orientable as dúas formas de pegar son homeomorfas, xa que o son no caso dunha banda de Möbius (véxase Figura 3.3). En xeral, nunha superficie non orientable podemos unir a banda de Möbius que

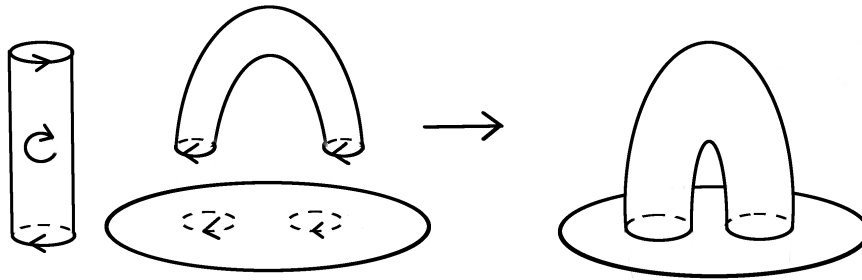


Figura 3.1: Pegado dunha asa respectando as orientacións

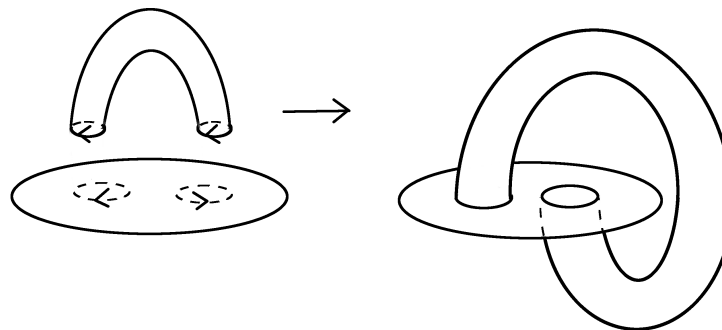
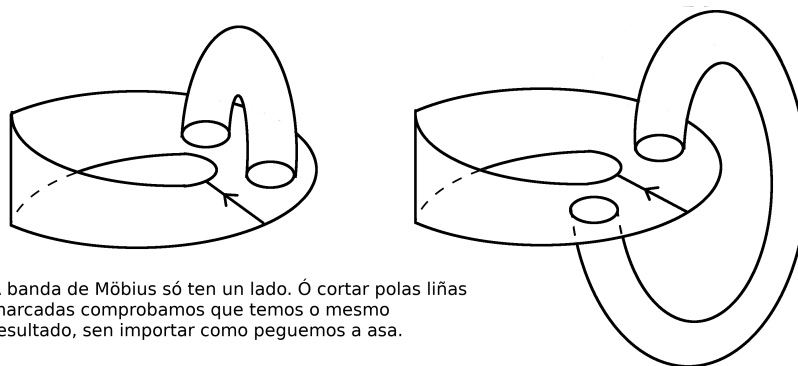


Figura 3.2: Pegado dunha asa respectando as orientacións

contén co disco onde pegamos usando un arco engrosado. Unha banda de Möbius que conecta cun disco a través dunha banda é homeomorfa a unha banda de Möbius e reducimos o caso xeral ó caso da banda de Möbius.



A banda de Möbius só ten un lado. Ó cortar polas liñas marcadas comprobamos que temos o mesmo resultado, sen importar como peguemos a asa.

Figura 3.3: Pegados de asas nunha banda de Möbius

Pegado de bandas de Möbius. Pegar unha banda de Möbius é considerablemente máis sinxelo: basta sacarlle un disco aberto á superficie e pegar a banda ó longo do seu bordo, que se recordamos é unha soa circunferencia.

Estamos agora en condicións de enunciar o Teorema de Clasificación, e dedicaremos o resto do capítulo en desenvolver ferramentas que nos permitan probalo.

Teorema 3.2 (de clasificación). *Toda superficie pechada compacta é homeomorfa a un único elemento da lista:*

- a esfera S^2 ,
- unha esfera con n asas pegadas, que denotaremos por $H(n)$,
- unha esfera con q bandas de Möbius pegadas, que denotaremos por $M(q)$.

Resulta sinxelo ver que $H(1)$ é homeomorfo a un toro e $H(n)$ á superficie orientable de xénero n . No caso non orientable, xa que un plano proxectivo sen un disco é homeomorfo a unha banda de Möbius (véxase Figura 3.4), $M(1)$ é homeomorfo ó plano proxectivo.



Figura 3.4: O plano proxectivo é $M(1)$

Asemade, $M(2) \cong \mathbb{K}^2$ (botella de Klein). A esfera sen dous discos disxuntos á que lle pegamos as bandas é homeomorfa a un cilindro. Pegando dúas bandas de Möbius pola circunferencia do bordo obtemos unha botella de Klein. En efecto, sabemos que a botella de Klein é homeomorfa ao pegado de dúas bandas de Möbius polo seu bordo (véxase a figura 3.5). Como consecuencia da observación anterior, un disco cunha asa pegada ó revés é homeomorfo a unha *botella de Klein furada* $\mathbb{K}^2 \setminus \mathring{D}$. Tendo en conta ademais que podemos darlle a volta ás asas, como na Figura 3.3, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.3. *Se $q > 0$, pegarlle k asas a $M(q)$ resulta homeomorfo a $M(q+2k)$.*

3.1. Superficies combinatorias

Nas próximas seccións definiremos as ferramentas que nos permitirán abordar o problema de clasificación como o *engrose de subcomplexos*, a *característica de Euler* e o *proceso de cirurxía*.

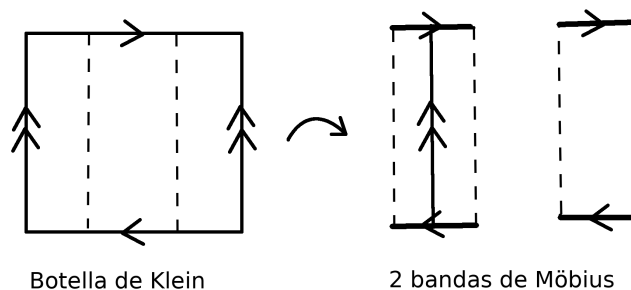


Figura 3.5: Dúas bandas na botella de Klein

Definición 3.4. Chámase *superficie combinatoria* a un complexo simplicial que cumpre:

1. ten dimension 2,
2. podemos unir calquera dous vértices cun camiño de aristas (é conexo),
3. cada unha das súas aristas pertence a exactamente dous triángulos,
4. cada vértice pertence a polo menos tres triángulos, que constitúen un cono con apex o vértice e base unha curva poligonal simple e pechada.

Como vimos na sección 2.3, baixo a hipótese adicional de diferenciabilidade de clase C^1 , toda superficie compacta admite unha triangulación. Calquera triangulación dunha superficie pechada cumpre as propiedades (1) - (4). A partir deste punto traballaremos entón con superficies combinatorias.

Vexamos agora outra forma de definir superficie orientable e como orientar unha superficie combinatoria.

Definición 3.5. Dise que unha superficie combinatoria é *orientable* se é posible orientala, e *non orientable* noutro caso.

Para orientar unha superficie combinatoria comezamos orientando un triángulo. Unha orientación nun triángulo é unha tripla ordeada dos seus vértices. Dous triplas determinan a mesma orientación se unha é unha permutación par da outra: (v_1, v_2, v_3) e (v_3, v_1, v_2) ou (v_2, v_1, v_3) e (v_1, v_3, v_2) .

Definición 3.6. Dise que as orientacións de dous triángulos que comparten unha arista son *compatibles* se recorren a arista en sentido contrario (véxase Figura 3.6)

Orientar unha superficie combinatoria consiste en orientar todos os seus triángulos de forma compatible. Esta perspectiva da orientabilidade coincide coa definición anterior xa que a banda de Möbius non se pode orientar de forma compatible, pois é xusto no pegado dos extremos cun medio xiro onde falla.

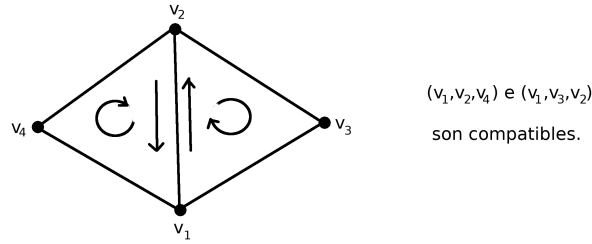


Figura 3.6: Orientacións compatibles de dous triángulos.

Deste xeito, nunha superficie combinatoria que non se poda orientar poderemos atopar unha cadea de triángulos tal que cada un comparte unha cara co seguinte e as súas orientacións son compatibles en todos os pasos menos en un. Desda cadea obtemos a banda de Möbius da definición.

3.2. Veciñanzas tubulares

Nesta sección trataremos a idea de *engrose de subcomplexos* e en concreto de curvas poligonales simples pechadas, que é básico para definir con rigor o *proceso de cirurxía*.

Definición 3.7. Sexa K unha superficie combinatoria e L un subcomplejo 1-dimensional de K . *Engrosar* L consiste en subdividir baricentricamente K dúas veces e formar un novo subcomplejo cos triángulos da segunda subdivisión K^2 que cortan a L e todas as súas caras. Consideramos entón o poliedro obtido a partir deste subcomplejo e obtemos así unha veciñanza $N(L)$ de $|L|$ en $|K|$ co mesmo tipo de homotopía de $|L|$. Diremos que $N(L)$ é unha *veciñanza tubular* de L .

Definición 3.8. Dada unha superficie combinatoria K e un vértice $v \in K$. A *estrela pechada* de v en K é a unión dos símlices de K que teñen a v como vértice e denotamos como $\overline{\text{estr}}(v, K)$. A *estrela aberta* de v en K defínese análogamente cos interiores dos símlices e denótase por $\text{estr}(v, K)$.

Proposición 3.9. *O resultado de engrosar unha árbore é homeomorfo a un disco.*

Demostración. Por indución no número de vértices. Se unha árbore T ten un só vértice v , o seu engrose será un disco $\overline{\text{estr}}(v, K^2) \cong D$ pola propiedade (4) da definición 3.4. Supoñemos que se cumpre para $n - 1$ vértices, e consideramos unha árbore T con n vértices. Atopamos un vértice terminal v en T , que eliminamos xunto coa única arista e que o contén, obtendo unha árbore T_1 de $n - 1$ vértices. Engrosalo resulta nun disco D por hipótese. Agora só resta engadir $B = \text{estr}(b(e), K^2)$ e $A = \text{estr}(v, K^2)$ onde $b(e)$ é o vértice central da arista e e que

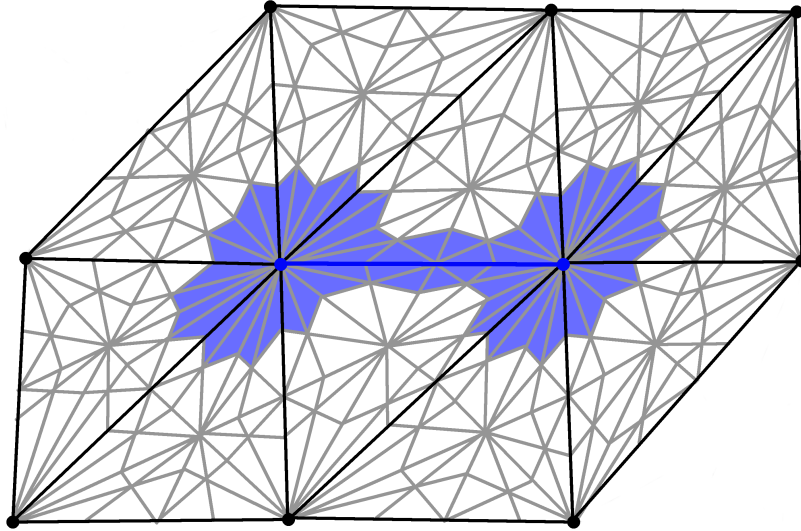


Figura 3.7: Exemplo: engrose dun 1-símplice.

aparece na primeira división baricéntrica. Como D e B son discos que intersecan nun arco na súa fronteira, a súa unión é un disco. O mesmo é certo de $D \cup B$ e A co que obtemos que $D \cup B \cup A$, o engrose de T , é un disco. Véxase a figura 3.8. \square

Proposición 3.10. *Engrosar unha curva poligonal pechada e simple resulta ou ben nun cilindro ou ben nunha banda de Möbius.*

Demostración. Eliminando unha arista e da curva obtemos unha árbore na superficie combinatoria, que ó engrosala resultará nun disco. Para completar o engrose da curva precisamos engadirlle o disco $D = \overline{\text{estr}}(b(e), K^2)$, sendo $b(e)$ o vértice central de e procedente da primeira subdivisión baricéntrica, que interseca ó disco procedente da árbore en dous arcos poligonales disxuntos. Pegamos un dos lados primeiro obtendo un disco e só resta identificar os outros dous arcos, cousa que se pode facer de dous maneiras; se se mantén a orientación dos triángulos compatible dá un cilindro e se non a respeta dá unha banda de Möbius, pois os dous arcos que identificamos están separados na fronteira do disco e resulta homeomorfo a un cadrado con lados paralelos identificados. \square

3.3. Característica de Euler-Poincaré

Definición 3.11. Sexa L un complexo simplicial de dimensión n e α_i o número de i -símplices de L . Definimos a súa *característica de Euler-Poincaré* como

$$\chi(L) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i.$$

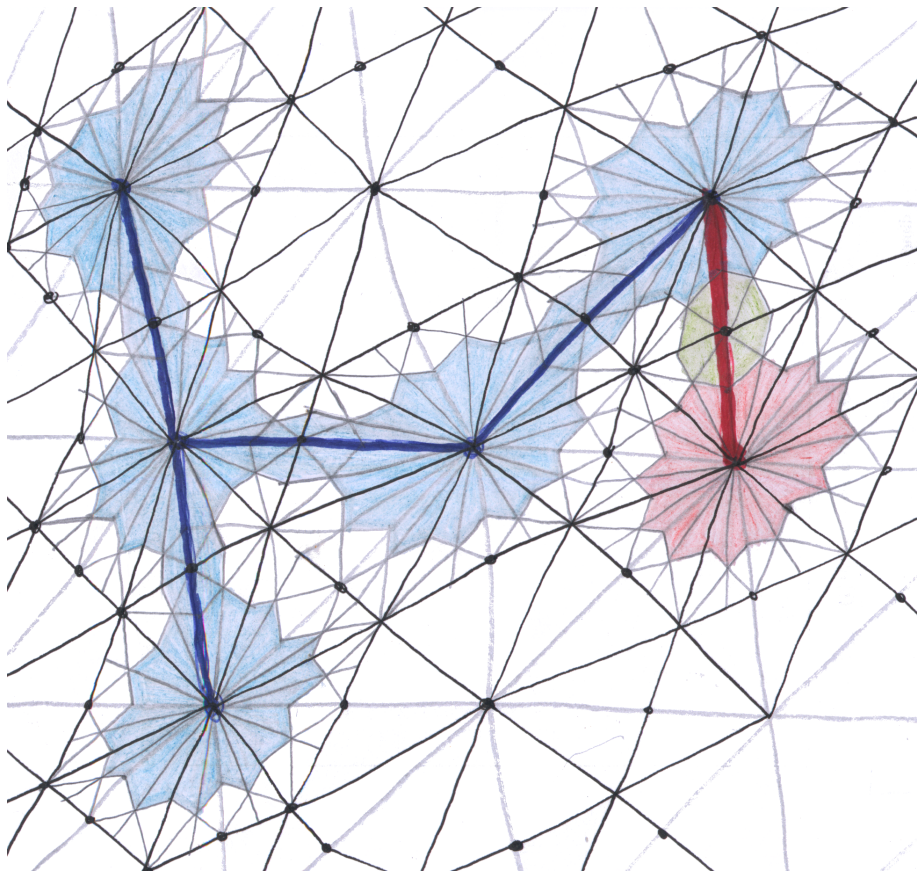


Figura 3.8: En vermello, A; en verde, B e en azul, D.

Se L é unha superficie combinatoria, entón

$$\chi(L) = V - A + C,$$

onde V é o número de vértices, A o número de aristas e C o número de caras. A característica de Euler dun grafo sería $V - A$.

Proposición 3.12. *Dado un grafo Γ , temos que $\chi(\Gamma) \leq 1$, dándose a igualdade se e só se Γ é unha árbore.*

Demostración. Para ver que a característica de Euler dunha árbore é 1 usaremos un argumento de indución no número de aristas. Se Γ ten un só vértice, cúmplese que $\chi(\Gamma) = 1$. Supoñemos o resultado certo para unha árbore de $n - 1$ aristas. Dada unha árbore de n aristas, podemos atopar un nodo terminal (se non puidesemos habería un ciclo e non sería árbore). Retirando ese vértice e arista

incidente, obtemos unha árbore de $n - 1$ aristas que ten característica de Euler 1. Como esta non cambia ó retirar unha aresta e un vértice obtemos o resultado.

No caso xeral basta notar que se G non é unha árbore, podemos atopar un ciclo. Se quitamos unha arista que desfaga o ciclo e chamamos G_1 o grafo resultante, entón $\chi(G_1) = \chi(G) + 1$. Se G_1 non é unha árbore podemos repetir o proceso ata que o grafo resultante G_n o sexa tras un número finito de pasos, cumprindo

$$1 = \chi(G_n) = \chi(G) + n \Rightarrow \chi(G) = 1 - n < 1.$$

□

Definición 3.13. Dada unha superficie combinatoria K , chámase *grafo dual* ó grafo que ten como vértices os baricentros dos triángulos de K e unha aresta unindo os baricentros dos triángulos que teñan unha cara común.

Se T é unha árbore maximal en K (que contén todos os vértices), chámase *grafo dual Γ de T* ó subgrafo do grafo dual de K obtido ó eliminar as arestas cada vez que as caras comúns dos triángulos pertencen a T .

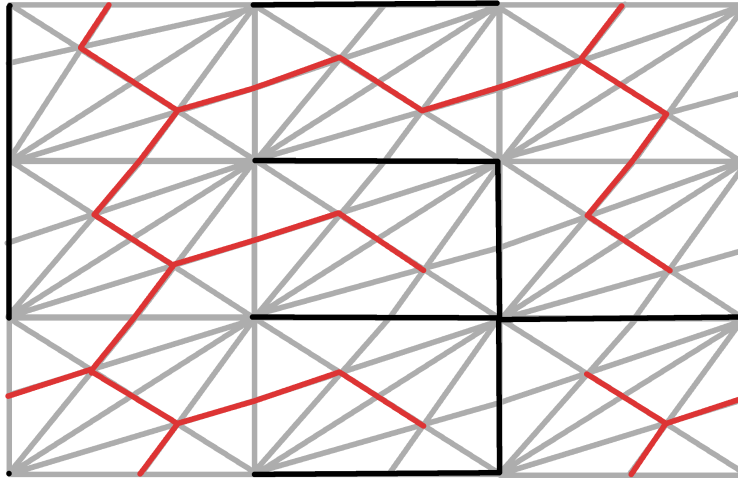


Figura 3.9: No toro, en negro a árbore e en vermello o seu grafo dual.

Para demostrar a seguinte proposición imos considerar as veciñanzas tubulares $N(T)$ e $N(\Gamma)$ de T e K obtidas a partir da segunda subdivisión baricéntrica K^2 .

Proposición 3.14. *Se K é unha superficie combinatoria e T é unha árbore maximal en K , entón o grafo dual Γ de T é conexo.*

Demostración. Por construción, as veciñanzas $N(T)$ e $N(\Gamma)$ verifican:

1. $|K| = N(T) \cup N(\Gamma)$, onde $N(T)$ é un disco pola proposición 3.9.
2. $N(T) \cap N(\Gamma)$ é a fronteira do disco $N(T)$, homeomorfa a \mathbb{S}^1 .
3. Γ é conexo se e só se $N(\Gamma)$ é conexo.
 - (\Rightarrow) Dados dous puntos $x, y \in N(T)$, podemos unilos a vértices $u, v \in \Gamma$ mediante segmentos. Se Γ é conexo, existe un camiño de arestas que que une u con v .
 - (\Leftarrow) Dados dous vértices u, v de Γ , existe un camiño que une u e v en $N(\Gamma)$. Este camiño pasa por un número finito de triángulos consecutivos que cortan a Γ , o que proporciona unha familia de arestas consecutivas que unen u con v .

Para demostrar a proposición basta comprobar que $N(\Gamma)$ é conexo: dados dous puntos $x, y \in N(\Gamma)$, os triángulos que os conteñen cortan ó bordo de $N(\Gamma)$ en polo menos dous puntos p, q . Pero ditos puntos están conectados por un camiño no bordo de $N(T)$, xa que este é homeomorfo a \mathbb{S}^1 . Logo compoñendo este camiño cos segmentos que unen x con p e q con y obtemos un camiño en $N(\Gamma)$ que une x e y . \square

Proposición 3.15. *Se K é unha superficie combinatoria, entón $\chi(K) \leq 2$.*

Demostración. Escollemos unha árbore maximal T en K e o seu dual Γ . Como todos os vértices de K están en T , o grafo Γ ten unha arista por cada arista de K que non está en T e un vértice por cada triángulo de K . Polo tanto $\chi(K) \leq 2$, pois $\chi(K) = \chi(T) + \chi(\Gamma)$ e pola proposición 3.12, $\chi(T) = 1$ e $\chi(\Gamma) \leq 1$. \square

Teorema 3.16. *Para calquera superficie combinatoria son equivalentes:*

- a) *calquera curva poligonal pechada e simple (formada por aristas de K^1), separa $|K|$,*
- b) $\chi(K) = 2$,
- c) $|K|$ *é homeomorfo á esfera.*

Demostración. (a) \Rightarrow (b) Supoñamos que se cumpre (a). Sexa T unha árbore maximal e Γ o seu grafo dual. Entón Γ é tamén unha árbore e daquela

$$\chi(K) = \chi(T) + \chi(\Gamma) = 2.$$

En efecto, se Γ non fose unha árbore, contería un ciclo que separaría $|K|$ por hipótese. Pero entón T non sería unha árbore pois habería dous vértices que non se poderían conectar sen cortar a Γ .

(b) \Rightarrow (c) Se $\chi(K) = 2$, entón $\chi(\Gamma) = 1$ e polo tanto Γ é unha árbore. Pola proposición 3.15, o poliedro $|K| = N(T) \cup N(\Gamma)$ é o pegado de dous discos pola súa fronteira común, é dicir, $|K| \cong \mathbb{S}^2$.

(c) \Rightarrow (a) Esta implicación é parte do teorema de Jordan-Schönflies, no sentido de que unha curva pechada e simple na esfera sepáraa en dúas compoñentes conexas (e cada unha delas é homeomorfa a un disco aberto). \square

Lema 3.17. *Sexan K e L dous complexos simpliciais cuxa intersección é un subcomplexo común, entón*

$$\chi(K \cup L) = \chi(K) + \chi(L) - \chi(K \cap L).$$

Demostración. A aportación de $K \cap L$ cóntase tanto en K coma en L con que restamos $\chi(K \cap L)$ unha vez para compensalo. A igualdade é clara xa que os dous complexos enchen a unión. \square

Lema 3.18. *A subdivisión baricéntrica non modifica a característica de Euler dunha superficie combinatoria.*

Demostración. Coa subdivisión baricéntrica, un triángulo pasa de ter 3 vértices, 3 arestas e 1 cara a 7 vértices, 9 aristas e 3 caras ($3 - 3 + 1 = 7 - 9 + 3 = 1$) e un 1-símplice pasa de ter 2 vértices e 1 aresta a 3 vértices e 2 arestas ($2 - 1 = 3 - 2 = 1$). Os 0-símplices non cambian. Usando o lema anterior de forma recorrente obtemos que a característica de Euler da unión de triángulos é a mesma que a da unión dos triángulos subdivididos. Como a superficie combinatoria é unión de todos os seus triángulos obtemos o resultado. \square

3.4. Cirurxía

Nesta sección presentamos unha forma de modificar as superficies combinatorias, chamada *cirurxía*, que aumenta a súa característica de Euler e que nos permitirá atopar a superficie estándar do Teorema de Clasificación dunha superficie dada, servíndonos do proceso inverso de pegar asas ou bandas de Möbius na superficie operada.

A cirurxía faise da seguinte forma: dada unha superficie S consideramos unha triangulación $h : |K| \rightarrow S$ de S . Na superficie combinatoria K consideramos unha curva poligonal simple e pechada L que sexa un subcomplexo de K e non separe $|K|$. Se non existe tal curva a superficie en cuestión é unha esfera polo último teorema da sección anterior. Noutro caso, engrosar a curva resultará nun subcomplexo N tal que $|N|$ é homeomorfo a un cilindro ou a unha banda de Möbius.

Quedámonos pois co espazo $|M|$ complementario a $|N|$, isto é, todos os símlices de K^2 que non tocan a L . O espazo $|M|$ é homeomorfo á superficie sen o interior dun cilindro ou dunha banda. Distinguimos casos: se $|N|$ é un cilindro, $|M|$ ten como fronteira dúas circunferencias disxuntas trianguladas cos subcomplexos L_1 e L_2 . Neste caso consideramos a superficie combinatoria operada

$$K_* = M \cup CL_1 \cup CL_2$$

onde os dous conos CL_1 e CL_2 poden separarse en lados distintos de $\mathbb{R}^{n+1} - \mathbb{R}^n$, é dicir, escollemos os apexes de modo que os conos non se toquen. No caso no que $|N|$ é unha banda de Möbius $|M|$ ten unha única circunferencia como

frontera, que triangulamos co subcomplexo L_1 . Consideramos entón a superficie combinatoria

$$K_* = M \cup CL_1$$

Dise que K_* obtívose facendo *cirurxía ó longo de L* nos dous casos.



Figura 3.10: Cirurxía ó longo da curva marcada, que ó engorsala resulta nun cilindro.

Precisaremos o seguinte lema para comprobar como afecta a cirurxía á característica de Euler:

Lema 3.19. $\chi(N) = 0$.

Demostración. Procedemos como na proposición 3.9: eliminamos unha arista e de L e obtemos unha árbore que ó engorsala resulta nun disco con característica de Euler igual a 1. Falta agora engadir a estrela $\overline{\text{estr}}(b(e), K^2) \cong D$ do vértice central $b(e)$ da arista e . O disco D interseca á árbore engrosada en dous arcos poligonales disxuntos, en concreto, en 6 vértices e 4 aristas. Usando o lema 3.17 da sección anterior obtemos $\chi(N) = 1 + 1 - (6 - 4) = 0$. \square

Teorema 3.20. $\chi(K_*) > \chi(K)$.

Demostración. Se o engrose de L é un cilindro, temos que:

$$\chi(K_*) = \chi(M) + \chi(CL_1) + \chi(CL_2) - \chi(L_1) - \chi(L_2) = \chi(M) + 2.$$

pois $\chi(CL_1) = \chi(CL_2) = 1$ e $\chi(L_1) = \chi(L_2) = 0$. Se é unha banda de Möbius, temos que:

$$\chi(K_*) = \chi(M) + \chi(CL_1) - \chi(L_1) = \chi(M) + 1.$$

Agora ben, usando que a subdivisión baricéntrica non cambia a característica de Euler e o lema anterior, deducimos que:

$$\chi(K) = \chi(K^2) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(M \cap N) = \chi(M)$$

pois $\chi(M \cap N) = 0$ segundo a observación anterior, co que o resultado queda probado. \square

Deste feito dedúcese o seguinte teorema:

Teorema 3.21. *Dada unha superficie combinatoria calquera, podemos aplicarlle un número finito de cirurxías para convertila noutra con característica de Euler 2.*

Observamos que polo teorema 3.16, se $\chi(K) < 2$, sempre podemos atopar unha curva que non separa e facer a cirurxía ó longo dela.

A partir desa esfera obtemos algunha das superficies estándar do teorema de clasificación pegando asas ou bandas de Möbius nas fronteiras dos discos que foron quedando marcados na superficie despois de cada cirurxía.

Non obstante, podería ocorrer que algunha das curvas esenciais cortase a outra das curvas esenciais nunha asa que debería ser eliminada. Bastaría con que ningunha das curvas elixidas para facer a cirurxía corte ós discos doutras cirurxías. O seguinte lema mostra como evitar este fenómeno diminuíndo cada disco:

Lema 3.22. *Dada unha superficie combinatoria K e D un disco que é sub-complexo dela. Existe un homeomorfismo $h : |K| \rightarrow |K|$ que satisfai $h(D) = \overline{\text{estr}(\hat{A}, K^2)}$ onde A é un triángulo de D e que é a identidade nos símplexes de K que non tocan a D .*

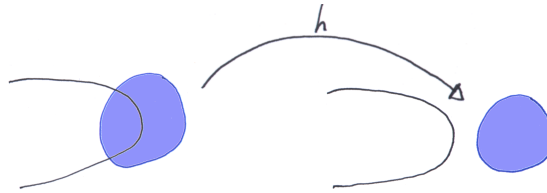


Figura 3.11: Lema 3.22 ilustrado

Desta maneira poderíamos elixir unha colección ordeada de curva na superficie que non a separan –e que polo tanto son lazos esenciais– esixindo que unha non corte á veciñanza das anteriores e facer a cirurxía nun só paso. Na figura 3.12 mostramos dificultades que surxirían se esta condición non se cumprise ó elixir as curvas e como podemos usar o lema para solucionalo.

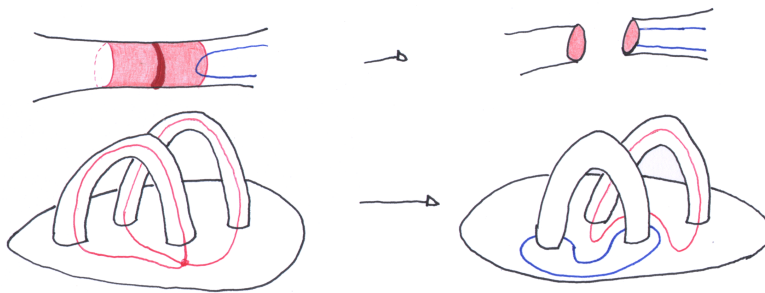


Figura 3.12: Curvas incompatibles e proceso para separar unha curva da veciñanza doutra anterior, usando o lema e considerando o disco no que pegamos a asa.

Temos polo tanto o seguinte teorema que proba a parte constructiva do teorema de clasificación:

Teorema 3.23. *Calquera superficie pechada é homeomorfa a unha das superficies modelo $H(g)$ ou $M(g)$.*

Engadimos agora un exemplo do proceso de cirurxía e pegado de asas para obter a superficie da lista correspondente.

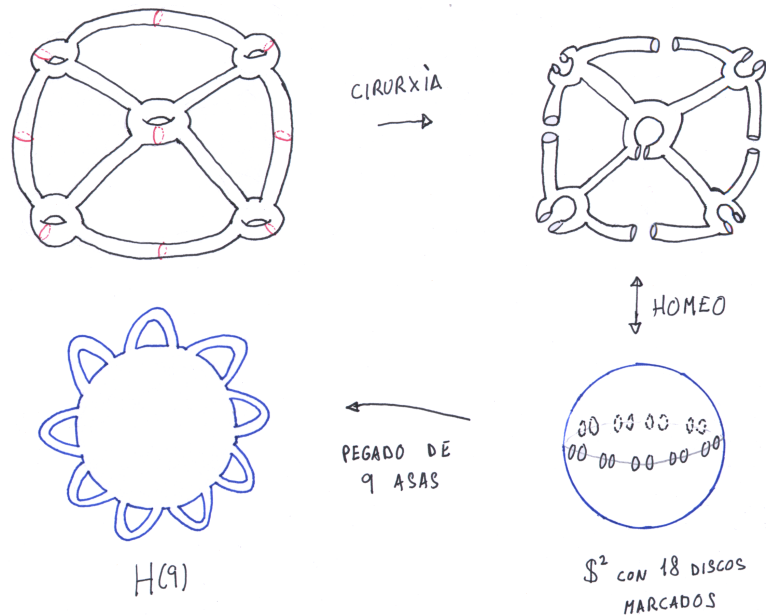


Figura 3.13: Exemplo do proceso completo de cirurxía.

3.5. O teorema de clasificación

Nesta sección comprobaremos finalmente que:

1. a operación de pegar asas ou bandas de Möbius a unha esfera está ben definida, obtemos sempre o mesmo resultado se pegamos o mesmo número destes elementos,
2. as superficies da lista do teorema de clasificación non son homeomorfas entre sí.

Na primeira cuestión unha posible complicación serían os corpos con asas nas que estas se enredan entre sí. Agora ben, o resultado anterior permítenos facer cirurxía lonxe das outras asas de xeito que os enlaces entre asas desaparecen no proceso de cirurxía e polo tanto a superficie é homeomorfa a unha esfera con asas estándar $H(g)$. Véxase un exemplo disto na figura 3.14.

Como pode verse en [Arm], a cirurxía permite obter os modelos planos das superficies pechadas descritos na sección 1.1, permitindo o cálculo dos grupos

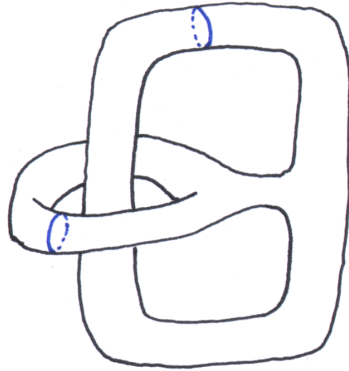


Figura 3.14: Exemplo de superficie con asas enredadas, homeomorfa a $H(2)$.

fundamentais das superficies $H(g)$ e $M(g)$ mediante o teorema de Seifert-Van Kampen.

Sen embargo, a segunda cuestión pode solventarse usando orientabilidade para distinguir as superficies orientables das non orientables e o xénero para clasificar superficies en cada unha das categorías.

Usando técnicas homolóxicas ou triangulando directamente as superficies $H(g)$ ou $M(g)$, pode comprobarse que a característica de Euler-Poincaré

$$\chi(H(g)) = 2 - 2g$$

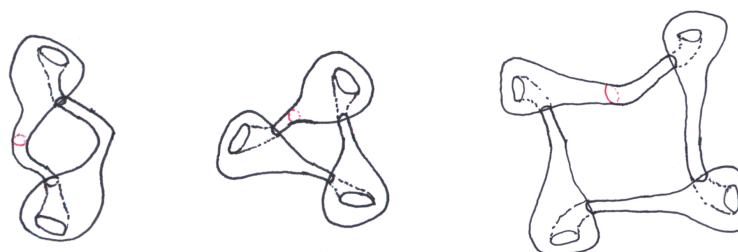
$$\chi(M(g)) = 2 - 2g$$

de modo que o xénero basta para distinguir as superficies modelo. Queda así probado o teorema de clasificación.

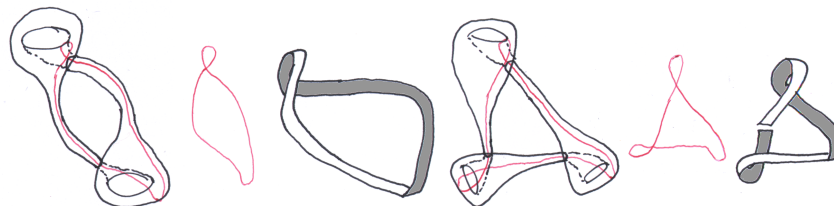
Apéndice A

Exemplo motivador

Volvemos ao exemplo das superficies formadas pegando botellas de Klein entre sí, formando un ciclo. Eleximos as seguintes curvas para facer a cirurxía, e comprobamos que, unha vez operada, calquera outra curva simple pechada que elixamos separa a superficie. Xa temos unha esfera.



Visualmente, podemos convencernos de que a veciñanza tubular de cada unha das curvas elixidas é un cilindro. Pero podería pasar que estivesemos ante unha asa pegada ó revés, equivalente a pegar unha botella de Klein furada. Comprobamos entón a orientabilidade para saber se debemos pegar unha asa ou dúas bandas de Möbius.



Atopamos desta maneira unha banda de Möbius na superficie formada con tres botellas de Klein. Un argumento máis sinxelo sería o seguinte: escollemos unha das botellas da superficie e pintamos a cara interior de negro e a exterior

de branco. Cada vez que pasamos á seguinte botella invírtese o color. No caso das tres botellas cando chegamos á terceira cambiou a cor dúas veces e está en branco, pero ten que cambiar unha vez máis, e a primeira botella era branca por fóra tamén. Isto significa que a superficie unicamente ten unha cara e exterior e interior son o mesmo: é non orientable.

Este argumento xeneralízase e obtemos que calquera superficie formada analogamente cun número par de botellas é orientable e homeomorfa a $H(1)$ e no caso dun número impar é non orientable e homeomorfa a $M(2)$. Este feito está relacionado con que as únicas fibracións da circunferencia S^1 con fibra S^1 son o toro T^2 e a botella de Klein K^2 .

En efecto, se collemos a curva sobre a que fixemos a cirurxía, homeomorfa a S^1 , eliximos un punto dela e arrastramos a curva recorrendo toda a superficie ata volver á posición inicial, podemos visualizar a fibra do punto como a curva que traza o punto ó longo do movemento. No caso de dúas, tres e catro botellas de Klein pegadas obtemos:

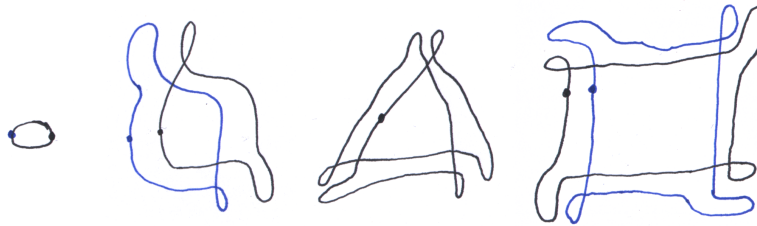
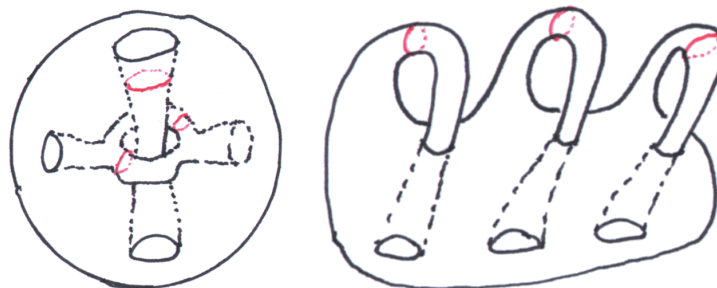


Figura A.1: Fibras de dous puntos opostos na circunferencia para cada unha das superficies anteriores, no caso non orientable coinciden.

Se levantamos a curva do plano do papel para evitar autointerseccións é claro ver que son homeomorfas á circunferencia.

Máis exemplos Recuperamos as superficies presentadas na introducción. Eleximos as seguintes curvas para operar:



Entón, dado que a primeira superficie é orientable e a segunda non orientable

(por suposto, pois non é máis que $\mathbb{K}^2 \# \mathbb{K}^2 \# \mathbb{K}^2$) obtemos que son homeomorfas a $H(3)$ e $M(6)$.

Bibliografía

- [ALM] F. Alcalde Cuesta, M. Macho Stadler, Á. Lozano Rojo, Transversely Cantor laminations as inverse limits. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **139** (2011), 2615-2630.
- [Arm] M.A. Armstrong, *Basic Topology*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [B] M. Berger, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [C] Á. Carballido Costas, Acciones propiamente discontinuas de grupos discretos. Trabajo Fin de Grado USC, 2018.
- [Ca] Manfredo P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised and Updated Second Edition*, Dover Publications, 2016.
- [CrV] C.O. Christenson, W. L. Voxman, *Aspects of topology*. Pure and Applied Mathematics, 39, Marcel Dekker, New York, 1977.
- [DM] P.H. Doyle, D. A. Moran, A short proof that compact 2-manifolds can be triangulated. *Inventiones Mathematicae*, **5** (1968), 160–162.
- [H] M.W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer New York, 2012.
- [K] Svetlana Katok, *Fuchsian Groups*, University of Chicago Press, 1992.
- [L] Álvaro Lozano Rojo, *Dinámica transversa de laminaciones definidas por grafos repetitivos*, Ph.D. Thesis, Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibersitatea, 2008.
- [M] W. S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*. Springer, New York, 1967.
- [R] T. Radó, Über den Begriff der Riemannschen Fläche, *Acta. Litt. Sci. Szeged*, **2**, (1925), 101-121.
- [Ro] D. Rolfsen, *Knots and Links*. AMS Chelsea Publishing Series, Providence, 2003.

- [W] André Weil, Sur les théorèmes de de Rham, *Commentarii mathematici Helvetici*, **26**, (1952), 119-145.
- [Z] E.C. Zeeman, *An Introduction to Topology: The Classification Theorem for Surfaces*, Mathematics Institute, University of Warwick, 1966.