



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Curvas críticas para funcionales geométricos

Marta Ortiz Álvarez

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Curvas críticas para funcionales geométricos

Marta Ortiz Álvarez

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Geometría e Topoloxía
Título: Curvas críticas para funcionales geométricos
Breve descripción do contido
En este traballo se abordará el estudio de curvas tanto planas como en el espacio Euclídeo que sean críticas para ciertos funcionales geométricos. Se analizarán las ecuaciones de Euler-Lagrange para el funcional longitud, el funcional curvatura total y la norma L^2 de la curvatura, lo que permite identificar, entre otras, a las curvas elásticas.
Recomendacións
Outras observacións

Índice xeral

Resumen	VII
Introdución	IX
1. Curvas en el espacio	1
1.1. Preliminares: Derivadas covariantes	1
1.2. Curvas parametrizadas	2
1.3. Movimientos rigidos	4
1.4. Curvatura y torsión	5
1.5. Teorema Fundamental de curvas planas	9
1.6. Teorema Fundamental de curvas en \mathbb{R}^3	13
2. Variaciones de curvas	19
2.1. Funcional Longitud	25
2.2. Curvas planas cerradas y convexas	27
3. Funcionales definidos por la curvatura de una curva	33
3.1. Primera variación del funcional $\mathfrak{F}_{\mathcal{P}}$	34
3.2. Condiciones de frontera	36
3.2.1. Curvas críticas para el funcional determinado por $\mathcal{P}(\kappa) = \kappa^2$	38
3.2.2. Curvas críticas para el funcional determinado por $\mathcal{P}(\kappa) = \kappa$	41
Bibliografía	43

Resumen

El Teorema Fundamental de la Teoría de Curvas es uno de los resultados más importantes de dicha teoría y establece que toda curva está completamente determinada por su curvatura y su torsión. El objetivo de este trabajo es obtener las ecuaciones correspondientes a las curvas críticas para ciertos funcionales y así llegar a una serie de condiciones que relacionen estos invariantes geométricos.

Se estudiará el funcional longitud, cuyas curvas críticas se corresponden con las rectas en el espacio. Además, se trabajará con los funcionales determinados por la curvatura total y la norma L^2 de la curvatura, para los cuales se obtienen caracterizaciones en términos de la curvatura y torsión, obteniéndose las curvas elásticas como un caso particular.

Abstract

The Fundamental Theorem of the Theory of curves, which is central in understading the local geometry of plane and space curves, shows that every curve is completely determined by its curvature and its torsion. The aim of this work is to obtain the equations (in terms of torsion and curvature) corresponding to the critical curves for certain geometric functionals defined in terms of the curvature.

The length functional, whose critical curves are straight lines in the Euclidean space, is studied as a first step towards the understanding of more involved functionals. Special attention is paid to functionals given by the total curvature and the norm L^2 of the curvature, for which the corresponding critical curve equations are obtained in terms of curvature and torsion. Elastic curves are a particular example of critical curves.

Introducción

Una parte esencial de toda teoría matemática es el estudio de invariantes, los cuales permiten la comparación de objetos e indican su pertenencia, o no, a una misma familia. En la teoría de curvas, el nivel de equivalencia que ofrecen estos invariantes está determinado por las isometrías del espacio ambiente, pues dos curvas son congruentes si se diferencian en un movimiento rígido. La longitud de una curva es un invariante por movimientos rígidos, tanto en el plano como en el espacio. La curvatura es también un invariante de una curva en el espacio, mientras que la torsión lo será si el movimiento rígido conserva la orientación, al igual que pasa con la curvatura de curvas planas. Considerando el comportamiento global de dichos invariantes, un problema natural es la búsqueda de curvas óptimas para los correspondientes funcionales.

Para afrontar el problema anterior, se hace uso de variaciones $\Gamma(\omega, t)$ de una curva $\gamma(t)$ y así poder estudiar el comportamiento del funcional en cuestión sobre las curvas longitudinales de la variación. Esto da lugar a una función real de variable real que tendrá un punto crítico. La anulación de su derivada en dicho punto crítico nos proporciona las ecuaciones necesarias para determinar las curvas óptimas. Es importante señalar que, generalmente, el problema no se plantea para variaciones libres, sino que estas están fijadas por unas condiciones de frontera dadas.

El funcional longitud, restringido a las curvas longitudinales de una variación $\Gamma : (\omega, t) \in (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \mapsto \Gamma(\omega, t) \in \mathbb{R}^3$ se define a partir de la función $\mathcal{L} : \omega \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \mathcal{L}(\Gamma_\omega) = L(\Gamma(\omega, \cdot)|_{[a, b]}) \in \mathbb{R}$. Si una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tiene menor longitud que cualquier otra curva que una los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$, considerando variaciones con condiciones de frontera $\Gamma(\omega, a) = \gamma(a)$ y $\Gamma(\omega, b) = \gamma(b)$, se tiene que la función \mathcal{L} posee un mínimo en $\omega = 0$ y por tanto $\frac{d}{d\omega}\mathcal{L}|_{\omega=0} = 0$ para cualquier variación Γ en las condiciones de frontera anteriores. Así el problema consistirá en determinar la expresión de la primera variación y sus consecuencias geométricas.

El principal objetivo de esta memoria es estudiar las expresiones correspondientes a las primeras variaciones de tres funcionales geométricos: el funcional longitud $\mathcal{L}(\gamma) = \int_\gamma 1$, el funcional curvatura total $\mathcal{P}(\gamma) = \int_\gamma \kappa$ y el funcional dado por la norma L^2 de la curvatura

$\mathcal{P}(\gamma) = \int_{\gamma} \kappa^2$. Para ello, será necesario desarrollar los objetos y resultados básicos de la teoría de variaciones e interpretar geoméricamente las ecuaciones resultantes.

Más concretamente, en el Capítulo 1 se introducen los conceptos básicos necesarios para el desarrollo del trabajo: movimientos rígidos, curvatura y torsión. Se estudian las ecuaciones de Frenet-Serret, que establecen las relaciones por las que se rige la variación de la referencia móvil $\{T(t), N(t), B(t)\}$, y los teoremas fundamentales tanto de la teoría de curvas planas como de curvas en el espacio, el cual permite garantizar la existencia y unicidad de curvas a partir de las funciones curvatura y torsión prefijadas.

En el Capítulo 2 se introduce la teoría de variaciones de curvas y con ello la correspondencia entre variaciones y campos de vectores a lo largo de una curva, un aspecto esencial a la hora de trabajar con las primeras variaciones. Asimismo, a fin de simplificar los cálculos posteriores, se construyen ciertos campos de vectores a lo largo de la variación y en la Proposición 2.5, siguiendo el trabajo de Langer y Singer [4], se establecen las relaciones necesarias entre ellos. Con ello, se estudia el funcional longitud a modo de ejemplo ilustrativo para mostrar que la curva de menor longitud que conecta dos puntos en el espacio es el segmento de recta determinado por ellos. Si restringimos el funcional longitud a familias especiales de curvas, nos encontramos con un problema de extremos condicionados. En el caso de trabajar con curvas convexas y cerradas del plano aparecen relaciones entre ciertos invariantes geométricos, como en el problema isoparamétrico, el cual muestra en el Teorema 2.9 que la circunferencia es la curva plana cerrada y convexa de menor longitud que encierra un área dada.

El Capítulo 3 se dedica a obtener la expresión de la primera variación para una familia de funcionales definidos por la curvatura, entre los que se estudian la curvatura total y la norma L^2 de la curvatura como casos más simples. Sometemos la expresión de la primera variación obtenida a unas condiciones de frontera prefijadas y mostramos que dichas ecuaciones se expresan en términos de la curvatura y torsión de la curva original.

Las curvas elásticas planas aparecen como curvas críticas para el funcional de la norma L^2 de la curvatura y viene caracterizadas por una EDO en función de su curvatura κ , o equivalentemente de su ángulo de rotación θ como $\theta'''(s) = -\frac{1}{2}\theta'(s)^3$. A partir de dicha ecuación se puede obtener la parametrización de las curvas elásticas.

Las curvas críticas para el funcional curvatura escalar total, bajo las condiciones de frontera prefijadas, son todas las curvas planas, lo que se corresponde con el hecho de que el índice total de rotación de una curva cerrada simple es constante ± 1 .

Capítulo 1

Curvas en el espacio

1.1. Preliminares: Derivadas covariantes

Trabajamos en \mathbb{R}^n con coordenadas cartesianas (x^1, \dots, x^n) asociadas a la base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, que es ortonormal para el producto escalar usual de \mathbb{R}^n .

Definición 1.1. Un campo de vectores en \mathbb{R}^n es una aplicación

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^n &\rightarrow T_p\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n \\ p &\rightarrow X_p = X(p). \end{aligned}$$

El conjunto de los campos de vectores en \mathbb{R}^n se denota como $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

Definición 1.2. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Llamamos derivada covariante en \mathbb{R}^n a la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} D : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \\ (X, Y) &\rightarrow D_X Y := (X(Y^1), \dots, X(Y^n)), \end{aligned}$$

que verifica:

- Linealidad: $D_X(\lambda Y + \mu Z) = \lambda D_X Y + \mu D_X Z$.
- Regla de Leibnitz: $D_X(fY) = X(f)Y + fD_X Y$, $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$.
- Tensorialidad: $D_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 D_{X_1} Y + f_2 D_{X_2} Y$, con $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$ y $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

Pensando \mathbb{R}^n como variedad diferenciable y (U, φ) una carta de \mathbb{R}^n con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, de manera que $\{\partial x^1, \dots, \partial x^n\}$ es la base de campos de vectores inducida. Escribimos X e Y en coordenadas:

$$X = X^i \partial_{X^i}, \quad Y = Y^j \partial_{X^j},$$

y entonces la expresión en coordenadas de $D_X Y$ es como sigue:

$$D_X Y = \left\{ X^i \frac{\partial}{\partial x^i} (Y^k) \right\} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Proposición 1.3. *La derivada covariante en \mathbb{R}^n cumple las siguientes propiedades:*

1. *Es simétrica, es decir,*

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

para cualesquiera campos de vectores en \mathbb{R}^n , siendo $[X, Y]$ el campo de vectores dado por $[X, Y](f) = XY(f) - YX(f)$.

2. *Es adaptada al producto escalar, es decir,*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle$$

para cualesquiera campos de vectores $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

1.2. Curvas parametrizadas

Una *curva diferenciable parametrizada* es una aplicación diferenciable $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, siendo $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ funciones diferenciables. Se dice que dicha curva es *regular* si $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. En consecuencia, podemos construir el espacio vectorial tangente a la curva en cada punto $\gamma(t)$ como el espacio generado por $\{\gamma'(t)\}$.

La variable t hace referencia al *parámetro* de la curva, el cual define la manera en que se recorre. La modificación del recorrido se llama *cambio de parametrización*, que es un difeomorfismo $g : J \rightarrow I$, donde J es un intervalo abierto de \mathbb{R} . Así, la curva $\beta = \gamma \circ g$ se llama *reparametrización* de γ .

Definición 1.4. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable parametrizada, se dice que está *parametrizada por la longitud de arco* si $\|\gamma'(s)\| = 1$ para todo $s \in I$. Llamaremos a s *parámetro de longitud de arco*.

Notación 1.5. Denotaremos la derivada en función del parámetro, de manera que

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt} \gamma(t) \quad \text{y} \quad \dot{\gamma}(s) = \frac{d}{ds} \gamma(s).$$

Definición 1.6. Definimos la *velocidad* de γ como $V(t) = \gamma'(t)$. Así, el *vector tangente unitario* a la curva se define como sigue:

$$T(t) := \frac{1}{\|V(t)\|} V(t) \equiv v(t)V(t).$$

Nótese que, si la curva está parametrizada por arco, $T(s) = V(s)$. Veamos la derivada:

$$\nabla_T T = v(t) \nabla_{V(t)} T = v(t) V(t) (v(t)) V(t) + v(t)^2 \nabla_{V(t)} V(t).$$

Analizamos las derivadas por separado:

$$\begin{aligned} V(t)(v(t)) &= \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{\|V(t)\|}, \\ \nabla_{V(t)} V(t) &= \nabla_{V(t)} \frac{d}{dt} x^k(t) \partial_k = V \left(\frac{d}{dt} x^k(t) \right) \partial_k + \frac{d}{dt} x^k(t) \nabla_{V(t)} \partial_k \\ &= V \left(\frac{d}{dt} x^k(t) \right) \partial_k = \frac{d^2}{dt^2} x^k(t) \partial_k. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= v(t) \frac{d}{dt} \frac{1}{\|V(t)\|} V(t) + v(t)^2 \frac{d^2}{dt^2} \gamma(t) \\ &= -\frac{1}{\|V(t)\|^4} \left\langle \frac{d}{dt} V(t), V(t) \right\rangle V(t) + \frac{1}{\|V(t)\|^2} \gamma''(t) \\ &= -\frac{1}{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle^2} \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle \gamma'(t) + \frac{1}{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} \gamma''(t) \\ &= \frac{1}{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} \gamma''(t). \end{aligned}$$

Por lo que $\nabla_T T = \ddot{\gamma}(s)$ y, en consecuencia, $\|\nabla_T T\| = \|\ddot{\gamma}(s)\|$.

Definición 1.7. Sea $\nabla_T T \neq 0$, se llama *vector normal unitario* a

$$N(t) := \frac{\nabla_T T}{\|\nabla_T T\|}.$$

Definición 1.8. Dados $\{T(t), N(t)\}$ relativos a γ , se define *vector binormal* como

$$B(t) := T(t) \wedge N(t),$$

donde " \wedge " denota el producto vectorial de \mathbb{R}^3 .

Observación 1.9. Basándonos en que los tres vectores definidos anteriormente son unitarios, derivamos su norma y obtenemos expresiones que nos serán de utilidad más adelante. Esto es, como $\langle T, T \rangle = 1$, entonces se tiene que $\langle \nabla_T T, T \rangle = 0$. Así mismo, para el vector normal unitario y para el vector binormal, se tiene respectivamente que $\langle \nabla_T N, N \rangle = 0$ y $\langle \nabla_T B, B \rangle = 0$.

Realizamos el mismo procedimiento teniendo en cuenta que dichos tres vectores son ortogonales entre ellos. En efecto, como $\langle T, N \rangle = 0$, entonces $\langle \nabla_T T, N \rangle = -\langle T, \nabla_T N \rangle$. Análogamente, se tiene que $\langle \nabla_T T, B \rangle = -\langle T, \nabla_T B \rangle$ y $\langle \nabla_T B, N \rangle = -\langle B, \nabla_T N \rangle$.

1.3. Movimientos rígidos

Definición 1.10. Una aplicación $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que conserva las distancias, es decir, si $d(F(x), F(y)) = d(x, y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^3$, se llamará *movimiento rígido*.

Las traslaciones y transformaciones ortogonales son ejemplos básicos de movimientos rígidos. Las traslaciones son aquellas aplicaciones que, fijado un vector $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$, están definidas por $H_{\vec{b}} : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto H_{\vec{b}}(\vec{x}) = x + \vec{b}$. Las transformaciones ortogonales son las aplicaciones $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que se corresponden con las isometrías lineales y que transforman vectores ortogonales en vectores ortogonales mediante el producto escalar, es decir, $\langle G(\vec{x}), G(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$. Además todo movimiento rígido es composición de dichas transformaciones.

Teorema 1.11. Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un movimiento rígido. Entonces existe una transformación ortogonal $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y una traslación $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tales que $F = H \circ G$.

Demostración. Sea un movimiento rígido $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definimos el vector $\vec{b} := F(\vec{0})$ y consideramos

$$G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} \mapsto G(\vec{x}) = F(\vec{x}) - \vec{b}.$$

Por definición se tiene:

$$F(\vec{x}) = G(\vec{x}) + \vec{b} = (H_{\vec{b}} \circ G)(\vec{x})$$

y entonces $F = H_{\vec{b}} \circ G$.

Veamos que G así definida es una transformación ortogonal. Nótese que $G(\vec{0}) = F(\vec{0}) - \vec{b} = F(\vec{0}) - F(\vec{0}) = \vec{0}$.

(i) Conserva las distancias (equivalentemente son movimientos rígidos). En efecto,

$$\begin{aligned} d(G(x), G(y)) &= d(F(x) - F(0), F(y) - F(0)) \\ &= \|F(x) - F(0) - (F(y) - F(0))\| \\ &= \|F(x) - F(y)\| = d(F(x), F(y)) = d(x, y) \end{aligned}$$

(ii) Conserva la norma. Esto es, como las transformaciones ortogonales son movimientos rígidos

$$\begin{aligned} \|G(x)\| &= \|G(x) - 0\| = \|G(x) - G(0)\| = d(G(x), G(0)) \\ &= d(x, 0) = \|x - 0\| = \|x\| \end{aligned}$$

(iii) Conserva el producto escalar. Así, dado que $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \{ \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2 \}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \langle G(x), G(y) \rangle &= \frac{1}{2} \{ \|G(x)\|^2 + \|G(y)\|^2 - \|G(x) - G(y)\|^2 \} \\ &\stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{2} \{ \|x\|^2 + \|y\|^2 - d(G(x), G(y))^2 \} \\ &\stackrel{(i)}{=} \frac{1}{2} \{ \|x\|^2 + \|y\|^2 - d(x, y)^2 \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2 \} = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

(iv) Es lineal. Así pues, sea $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ la base canónica de \mathbb{R}^n tal que $x = x^i e_i$, tomamos $\{G(\vec{e}_1), \dots, G(\vec{e}_n)\}$ y veamos que es una base ortonormal de \mathbb{R}^n .

$$\langle G(\vec{e}_i), G(\vec{e}_j) \rangle \stackrel{(iii)}{=} \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij},$$

lo que implica que son ortonormales. Ahora, si $\sum \lambda^i G(\vec{e}_i) = 0$, se tiene:

$$0 = \langle \sum \lambda^i G(\vec{e}_i), G(\vec{e}_j) \rangle = \sum \lambda^i \langle G(\vec{e}_i), G(\vec{e}_j) \rangle = \lambda^j,$$

para todo j , y por lo tanto es base.

Veamos finalmente que es lineal:

$$\begin{aligned} G(ax + by) &= G(ax^i \vec{e}_i + by^i \vec{e}_i) = G((ax^i + by^i) \vec{e}_i) \\ &= (ax^i + by^i) G(\vec{e}_i) = ax^i G(\vec{e}_i) + by^i G(\vec{e}_i) \\ &= aG(x^i \vec{e}_i) + bG(y^i \vec{e}_i) = aG(x) + bG(y) \end{aligned}$$

Con esto, G es un endomorfismo de \mathbb{R}^n que conserva el producto escalar, es decir, una transformación ortogonal, y esto completa la demostración. \square

1.4. Curvatura y torsión

Una vez introducidos los movimientos rígidos en \mathbb{R}^3 , diremos que dos curvas $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ definidas en un mismo intervalo $I \in \mathbb{R}$ son *congruentes* si difieren en un movimiento rígido F de \mathbb{R}^3 , esto es, $\beta(t) = (F \circ \alpha)(t)$.

Es inmediato que la propiedad ser congruente determina una relación de equivalencia en el conjunto de todas las curvas definidas en un mismo intervalo. Así pues un primer paso de cara a una caracterización de las distintas clases de congruencia de curvas es

la introducción de invariantes de las mismas. La curvatura y la torsión (salvo el signo) proporcionan un sistema total de invariantes.

Introducimos entonces los conceptos de curvatura y torsión para una curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por arco.

Definición 1.12. Se define la *curvatura* de $\gamma(s)$ como la función $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\kappa(s) := \|\nabla_T T\| = \langle \nabla_T T, \nabla_T T \rangle^{1/2}.$$

Equivalentemente $\kappa(s) = \langle \nabla_T T, N \rangle$. En caso de que γ no esté parametrizada por arco, la expresión de la curvatura viene dada por

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

Para comprobarlo, consideramos $\beta(s) = (\gamma \circ h)(s)$ la reparametrización por la longitud de arco, de manera que $\kappa_\gamma(t) = \kappa_\beta(g(t))$; siendo $g = h^{-1}$. Aplicando la regla de la cadena obtenemos las siguientes derivadas:

$$\beta'(s) = \gamma'(h(s))h'(s),$$

$$\beta''(s) = \gamma''(h(s))h'(s)^2 + h''(s)\gamma'(h(s)),$$

$$\beta'''(s) = \gamma'''(h(s))h'(s)^3 + 3h'(s)h''(s)\gamma''(h(s)) + h'''(s)\gamma'(h(s)).$$

Sustituimos entonces en la definición y se obtiene el resultado:

$$\begin{aligned} \kappa_\beta(s) &= \|\nabla_T T\| = \|\beta'(s)\| = \|\beta'(s) \wedge \beta''(s)\| \\ &= \|\gamma'(h(s))h'(s) \wedge [\gamma''(h(s))h'(s)^2 + h''(s)\gamma'(h(s))]\| \\ &= h'(s)^3 \|\gamma'(h(s)) \wedge \gamma''(h(s))\| = \frac{\|\gamma'(h(s)) \wedge \gamma''(h(s))\|}{\|\gamma'(h(s))\|^3}. \end{aligned}$$

Definición 1.13. Llamamos *torsión* de $\gamma(s)$ a la aplicación $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tau(s) := -\langle \nabla_T N, B \rangle.$$

En caso de que γ no esté parametrizada por arco, la expresión de la torsión viene dada por

$$\tau(t) = -\frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}.$$

Para comprobarlo, empleamos nuevamente la reparametrización de γ , de manera que $\tau_\gamma(t) = \tau_\beta(g(t))$, y la definición:

$$\begin{aligned}
\tau_\beta(s) &= -\langle \nabla_T N, B \rangle = -\langle \nabla_T \left(\frac{\beta''(s)}{\|\beta''(s)\|} \right), T(s) \wedge N(s) \rangle \\
&= -\det \left(\frac{\beta'''(s)\|\beta''(s)\| + (\|\beta''(s)\|)' \beta''(s)}{\|\beta''(s)\|^2}, \beta'(s), \frac{\beta''(s)}{\|\beta''(s)\|} \right) \\
&= -\frac{1}{\|\beta''(s)\|^3} \det(\beta'''(s)\|\beta''(s)\|, \beta'(s), \beta''(s)) \\
&= -\frac{1}{\|\beta''(s)\|^2} \det(\beta'''(s), \beta'(s), \beta''(s)) \\
&= -\frac{1}{\|\beta''(s)\|^2} \det(\beta'(s), \beta''(s), \beta'''(s)).
\end{aligned}$$

Ahora sustituimos las expresiones de sus tres primeras derivadas y, teniendo en cuenta que $h'(s) = \frac{1}{\|\gamma'(s)\|}$ (que se obtiene derivando $(h \circ g) = t$), se tiene finalmente el resultado:

$$\begin{aligned}
\tau_\beta(s) &= -\frac{\det(\beta'(s), \beta''(s), \beta'''(s))}{\|\beta''(s)\|^2} = -\frac{\langle \beta'(s) \wedge \beta''(s), \beta'''(s) \rangle}{\|\beta''(s)\|^2} \\
&= -\frac{h'(s)^3 \langle \gamma'(h(s)) \wedge \gamma''(h(s)), h'(s)^3 \gamma'''(h(s)) \rangle}{\|h'(s)^3 [\gamma'(h(s)) \wedge \gamma''(h(s))]\|^2} \\
&= -\frac{\langle \gamma'(h(s)) \wedge \gamma''(h(s)), \gamma'''(h(s)) \rangle}{\|\gamma'(h(s)) \wedge \gamma''(h(s))\|^2} \\
&= -\frac{\det(\gamma'(h(s)), \gamma''(h(s)), \gamma'''(h(s)))}{\|\gamma'(h(s)) \wedge \gamma''(h(s))\|^2}.
\end{aligned}$$

Lema 1.14. Sean $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ dos curvas congruentes, entonces $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(s)$ y $\tau_\beta(s) = \pm \tau_\alpha(s)$.

Demostración. Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un movimiento rígido de forma que $\beta = F \circ \alpha$. Como ya hemos visto en el Teorema 1.11, podemos definir F como composición de una transformación ortogonal y una traslación, esto es, $F = H_{\vec{b}} \circ G$. Empleando la regla de la cadena sobre la diferencial, se obtiene que $dF_p = G$ en cada punto $p \in \mathbb{R}^3$, y por tanto

$$\begin{aligned}
\beta'(s) &= \frac{d}{ds}(F \circ \alpha)(s) = dF_{\alpha(s)}(\alpha'(s)) = (G \circ \alpha')(s), \\
\beta''(s) &= \frac{d}{ds}(G \circ \alpha')(s) = dG_{\alpha'(s)}(\alpha''(s)) = (G \circ \alpha'')(s).
\end{aligned}$$

Por la primera ecuación y teniendo en cuenta que G es una transformación ortogonal, se tiene que, si $\alpha(s)$ está parametrizada por arco, entonces $\beta(s) = (F \circ \alpha)(s)$ también está

parametrizada por arco. Por la segunda ecuación se obtiene que dos curvas congruentes tienen la misma curvatura. En efecto,

$$\kappa_\beta(s) = \|\beta''(s)\| = \|G(\alpha''(s))\| = \|\alpha''(s)\| = \kappa_\alpha(s).$$

Veamos ahora que las torsiones son iguales salvo el signo. Nótese:

$$\begin{aligned} G(T_\alpha(s)) &= G(\alpha'(s)) = \beta'(s) = T_\beta(s), \\ G(N_\alpha(s)) &= G\left(\frac{\alpha''(s)}{\kappa_\alpha(s)}\right) = \frac{G(\alpha''(s))}{\kappa_\alpha(s)} = \frac{\beta''(s)}{\kappa_\beta(s)} = N_\beta(s). \end{aligned}$$

Como G es una transformación ortogonal que conserva el producto escalar, llevará bases ortonormales a bases ortonormales; por lo tanto, $\{G(T_\alpha(s)), G(N_\alpha(s)), G(B_\alpha(s))\} = \{T_\beta(s), N_\beta(s), G(B_\alpha(s))\}$ es también una base ortonormal. Luego, $G(B_\alpha(s)) = \pm B_\beta(s) = (\det G)B_\beta(s)$. Teniendo en cuenta esto,

$$\begin{aligned} \tau_\beta(s) &= \langle \nabla_T B_\beta(s), N_\beta(s) \rangle = \langle \pm G(\nabla_T B_\alpha(s)), N_\beta(s) \rangle = \pm \langle G(\tau_\alpha(s)N_\alpha(s)), N_\beta(s) \rangle \\ &= \pm \tau_\alpha(s) \langle N_\beta(s), N_\beta(s) \rangle = \pm \tau_\alpha(s). \end{aligned}$$

de donde se sigue que dos curvas congruentes tienen la misma torsión salvo el signo. \square

Teorema 1.15. (Ecuaciones de Frenet-Serret)

Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, una curva con curvatura no nula, $\kappa(t) \neq 0$. Entonces:

$$\begin{cases} \nabla_T T(t) &= & \kappa(t)N(t) \\ \nabla_T N(t) &= & -\kappa(t)T(t) & - \tau(t)B(t) \\ \nabla_T B(t) &= & \tau(t)N(t) \end{cases}$$

Demostración. Por la definición de normal unitario, se tiene $\nabla_T T = \kappa(t)N$.

Definimos $\mathfrak{B} = \{T, N, B\}$ y escribimos la derivada del vector normal respecto a dicha base:

$$\begin{aligned} \nabla_T N &= \langle \nabla_T N, T \rangle T + \langle \nabla_T N, N \rangle N + \langle \nabla_T N, B \rangle B \\ &= -\langle \nabla_T T, N \rangle T + \langle \nabla_T N, B \rangle B = -\kappa(t)T - \tau(t)B \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \nabla_T B &= \langle \nabla_T B, T \rangle T + \langle \nabla_T B, N \rangle N + \langle \nabla_T B, B \rangle B \\ &= \langle \nabla_T B, N \rangle N = \tau N \end{aligned}$$

\square

A lo largo de los puntos de la curva $\gamma(t)$, los vectores $\{T(t), N(t), B(t)\}$ constituyen una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , lo que se denomina una referencia móvil. El sentido fundamental de las fórmulas de Frenet-Serret es el caracterizar un movimiento giratorio de dicho triedro a lo largo de la curva γ . Dado que cada uno de los vectores $T(t)$, $N(t)$ y $B(t)$ vienen determinados por sus tres componentes en la base canónica de \mathbb{R}^3 , podemos interpretar las ecuaciones de Frenet-Serret como un total de 9 ecuaciones que rigen la variación de la referencia móvil. Una observación básica para abordar el Teorema Fundamental de Curvas en el espacio es que dichas ecuaciones constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de primer orden en las coordenadas de los vectores $T(t)$, $N(t)$ y $B(t)$.

1.5. Teorema Fundamental de curvas planas

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular parametrizada por arco. Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^2 , podemos escribir el tangente unitario de α como sigue:

$$\alpha'(s) = \cos \theta(s) \vec{e}_1 + \sin \theta(s) \vec{e}_2 = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)).$$

Proposición 1.16. *Sea $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular parametrizada por arco y $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^2 . Dado $s_0 \in [0, l]$, existe una función diferenciable $\theta(s)$, de forma que para todo $s \in [0, l]$, $\alpha'(s) = \cos \theta(s) \vec{e}_1 + \sin \theta(s) \vec{e}_2$.*

Demostración. Consideramos $\alpha(s)$ una curva regular parametrizada por arco y definimos su tangente unitario $T(s) = \alpha'(s) = \lambda(s) \vec{e}_1 + \mu(s) \vec{e}_2$, donde $\lambda, \mu \in C^\infty([0, l])$ y verificando $\lambda(s)^2 + \mu(s)^2 = 1$, para todo $s \in [0, l]$.

Fijamos $s_0 \in [0, l]$ y entonces denotamos por θ_0 el ángulo formado por \vec{e}_1 y $T(s_0)$, el cual satisface que $\lambda(s_0) = \cos \theta_0$ y $\mu(s_0) = \sin \theta_0$. Definimos entonces

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_{s_0}^s (\lambda \mu' - \mu \lambda')(u) du,$$

y veamos que es diferenciable. Directamente se tiene que $\theta(s_0) = \theta_0$. Veamos ahora que $\lambda(s) = \cos \theta(s)$ y $\mu(s) = \sin \theta(s)$. Sea

$$\begin{aligned} f(s) &:= (\lambda(s) - \cos \theta(s))^2 + (\mu(s) - \sin \theta(s))^2 \\ &= 2 - 2(\lambda(s) \cos \theta(s) + \mu(s) \sin \theta(s)) =: 2 - 2g(s), \end{aligned}$$

se tiene que $f(s_0) = 0$ y que su derivada es nula. En efecto,

$$\begin{aligned}
g'(s) &= \lambda'(s) \cos \theta(s) - \lambda(s) \theta'(s) \operatorname{sen} \theta(s) + \mu'(s) \operatorname{sen} \theta(s) + \mu(s) \theta'(s) \cos \theta(s) \\
&= \cos \theta(s) [\lambda'(s) + \mu(s) (\lambda \mu' - \mu \lambda') (s)] + \operatorname{sen} \theta(s) [\mu'(s) + \lambda(s) (\lambda \mu' - \mu \lambda') (s)] \\
&= \cos \theta(s) (\lambda' + \lambda \mu \mu' - \mu^2 \lambda') (s) + \operatorname{sen} \theta(s) (\mu' - \lambda^2 \mu' + \mu \lambda \lambda') (s) \\
&= \cos \theta(s) (\lambda' - \lambda^2 \lambda' - \mu^2 \lambda') (s) + \operatorname{sen} \theta(s) (\mu' - \lambda^2 \mu' - \mu^2 \mu') (s) \\
&= \cos \theta(s) (\lambda' - \lambda') (s) + \operatorname{sen} \theta(s) (\mu' - \mu') (s) = 0.
\end{aligned}$$

Luego $f'(s) = 0$ y $f(s_0) = 0$, lo que implica que f es constantemente nula, con lo que se concluye la demostración. \square

Con este resultado, tiene sentido definir la segunda derivada de la curva, esto es, $\alpha''(s) = (-\theta'(s) \operatorname{sen} \theta(s), \theta'(s) \cos \theta(s))$, donde la función $\theta(s)$ recibe el nombre de *rotación de tangentes*.

Denotemos con $J = R_{\frac{\pi}{2}}$ la transformación ortogonal del plano dada por la rotación positiva de ángulo $\frac{\pi}{2}$.

Definición 1.17. Se llama *curvatura* de una curva plana regular a la función $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\kappa_\alpha(s) := \langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle.$$

Utilizando la función rotación de tangentes se obtiene:

$$\begin{aligned}
\kappa_\alpha(s) &= \langle (-\theta'(s) \operatorname{sen} \theta(s), \theta'(s) \cos \theta(s)), (-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta) \rangle \\
&= \theta' \operatorname{sen}^2 \theta + \theta' \cos^2 \theta = \theta'(s),
\end{aligned}$$

lo que muestra que la curvatura de una curva plana mide la variación del ángulo de rotación de tangentes.

Es importante observar que la curvatura de una curva plana toma valores tanto positivos como negativos, mientras que en el caso de curvas en el espacio, la curvatura es siempre no negativa. El signo de κ nos indica el sentido de giro, de manera que caracteriza la curva salvo movimientos rígidos. De hecho, su comportamiento es el equivalente al de la torsión de curvas en el espacio, pues dos curvas planas congruentes tienen la misma curvatura, salvo el signo.

Lema 1.18. Si α y β son curvas planas congruentes, entonces $\kappa_\alpha(s) = \pm \kappa_\beta(s)$.

Demostración. Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un movimiento rígido de forma que $\beta = F \circ \alpha$. Empleando la regla de la cadena sobre la diferencial, se obtiene que

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= \frac{d}{ds}(F \circ \alpha)(s) = \pm(F \circ \alpha')(s), \\ \beta''(s) &= \frac{d}{ds}(F \circ \alpha')(s) = \pm(F \circ \alpha'')(s),\end{aligned}$$

dependiendo de la orientación del giro. Así, si $\alpha(s)$ está parametrizada por arco, entonces $\beta(s) = (F \circ \alpha)(s)$ también lo estará. Calculamos finalmente la curvatura:

$$\begin{aligned}\kappa_\beta(s) &= \langle \beta''(s), J(\beta'(s)) \rangle = \langle \pm F(\alpha''(s)), J(\pm F(\alpha'(s))) \rangle \\ &= \pm \langle F(\alpha''(s)), F(J(\alpha'(s))) \rangle = \pm \langle \alpha''(s), J(\alpha'(s)) \rangle = \pm \kappa_\alpha,\end{aligned}$$

con lo que se termina la demostración. \square

En caso de que las curvas fueran congruentes por un movimiento rígido directo, es decir, un giro de ángulo positivo, se tendría que las curvaturas serían exactamente iguales, esto es, no variarían en función del signo.

El siguiente resultado, que constituye el Teorema Fundamental de Curvas Planas, establece que la curvatura constituye un sistema total de invariantes.

Teorema 1.19. (Fundamental de Curvas Planas) *Sea $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces, existe una curva plana regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por arco tal que $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$, para todo $s \in I$.*

Además, si $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular parametrizada por arco con curvatura $\kappa_\beta(s) = \kappa(s)$ para todo $s \in I$, entonces existe un movimiento rígido directo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\beta = F \circ \alpha$.

Demostración. El resultado establece tanto la existencia como la unicidad de curvas planas correspondientes a una curvatura dada. Comenzaremos por demostrar la existencia, que se obtiene de forma constructiva.

Sea $\theta(s)$ una primitiva de $\kappa(s)$, de manera que, para un $s_0 \in I$ fijo, definimos

$$\theta(s) := \int_{s_0}^s \kappa(r) dr$$

y construimos la curva $\alpha(s)$ como

$$\alpha(s) := \left(\int_{s_0}^s \cos \theta(r) dr, \int_{s_0}^s \operatorname{sen} \theta(r) dr \right).$$

La curva así definida es diferenciable por serlo $\kappa(s)$ y por tanto $\theta(s)$; así que su vector tangente será $\alpha'(s) = (\cos \theta(s), \operatorname{sen} \theta(s))$, que es unitario. Además,

$$\kappa_\alpha(s) = \langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle = \theta'(s) \operatorname{sen}^2 \theta(s) + \theta'(s) \cos^2 \theta(s) = \theta'(s) = \kappa(s),$$

lo que prueba que la curvatura de $\alpha(s)$ se corresponde con la función prefijada $\kappa(s)$.

Comprobemos ahora la unicidad. Sean $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dos curvas tales que $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s) = \kappa_\beta(s)$. Sea $s_0 \in I$ fijo, consideramos $T_\alpha(s_0)$ y $T_\beta(s_0)$ como vectores tangentes unitarios en dicho punto. Entonces existe una única rotación $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que suponemos de ángulo positivo, de forma que $G(T_\alpha(s_0)) = T_\beta(s_0)$. Dado que G es una transformación ortogonal con determinante positivo, se tiene que $G(N_\alpha(s_0)) = N_\beta(s_0)$.

Definimos el vector $\vec{b} := \beta(s_0) - G(\alpha(s_0))$ y construimos un movimiento rígido de \mathbb{R}^2 como $F(x) := H_{\vec{b}} \circ G$. Sea entonces $\gamma = F \circ \alpha$, se tiene:

$$\gamma(s_0) = F(\alpha(s_0)) = G(\alpha(s_0)) + \vec{b} = \beta(s_0),$$

$$T_\gamma(s_0) = \gamma'(s_0) = (F \circ \alpha)'(s_0) = (G \circ \alpha')(s_0) = G(T_\alpha(s_0)) = T_\beta(s_0),$$

$$\begin{aligned} \kappa_\gamma &= \langle \gamma''(s), J\gamma'(s) \rangle = \langle G(\alpha''(s)), JG(\alpha'(s)) \rangle = \langle G(\alpha''(s)), G(J\alpha'(s)) \rangle \\ &= \langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle = \kappa_\alpha(s), \end{aligned}$$

al conmutar las rotaciones G y $J = R_{\frac{\pi}{2}}$ y teniendo en cuenta que las transformaciones ortogonales conservan el producto escalar. Para comprobar finalmente que la curva γ coincide con la curva inicial β , veremos que la función definida por $f(s) := \frac{1}{2}\|T_\beta(s) - T_\gamma(s)\|^2$, con $f(s_0) = 0$, es constantemente nula y por tanto sus vectores tangentes unitarios serán iguales. Para ello, veamos, utilizando la relación de los campos tangente y normal unitarios a las curvas y dado que $J^2 = -\text{Id}$, que la derivada de dicha función es cero. En efecto,

$$\begin{aligned} f'(s) &= \langle \nabla_T T_\beta(s) - \nabla_T T_\gamma(s), T_\beta(s) - T_\gamma(s) \rangle \\ &= \langle \kappa_\beta(s)N_\beta(s) - \kappa_\gamma(s)N_\gamma(s), T_\beta(s) - T_\gamma(s) \rangle \\ &= -\kappa(s) (\langle N_\beta(s), T_\gamma(s) \rangle + \langle N_\gamma(s), T_\beta(s) \rangle) \\ &= -\kappa(s) (\langle JT_\beta(s), T_\gamma(s) \rangle + \langle N_\gamma(s), T_\beta(s) \rangle) \\ &= -\kappa(s) (-\langle T_\beta(s), JT_\gamma(s) \rangle + \langle N_\gamma(s), T_\beta(s) \rangle) \\ &= -\kappa(s) (-\langle T_\beta(s), N_\gamma(s) \rangle + \langle N_\gamma(s), T_\beta(s) \rangle) = 0. \end{aligned}$$

Luego, $f(s) = 0$ y por tanto $T_\beta(s) = T_\gamma(s)$, es decir, $(\beta - \gamma)'(s) = 0$. Nuevamente, $\beta - \gamma$ es constante y, como $(\beta - \gamma)(s_0) = 0$, se tiene que $\beta(s) = \gamma(s)$ para todo valor de $s \in I$. \square

1.6. Teorema Fundamental de curvas en \mathbb{R}^3

Físicamente, podemos pensar que una curva en el espacio se obtiene a partir de una línea recta que "se dobla" (curvatura) y "se retuerce" (torsión). Efectivamente, las curvas en el espacio están completamente determinadas por su curvatura y torsión. A diferencia del caso de curvas planas, la existencia de curvas con curvatura y torsión prefijadas no se obtiene mediante por un proceso constructivo como en el Teorema 1.19, sino a partir de la existencia de solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo.

Teorema 1.20. (Fundamental de Curvas en el Espacio) Sean $\kappa, \tau : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables, $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$. Entonces existe una curva regular parametrizada por arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, cuya curvatura $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$ y cuya torsión $\tau_\alpha(s) = \tau(s)$, para todo $s \in I$.

Además, si $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es otra curva regular parametrizada por arco tal que $\kappa_\beta(s) = \kappa(s)$ y $\tau_\beta(s) = \tau(s)$, para cualquier $s \in I$, entonces existe un movimiento rígido directo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F = H_{\vec{v}} \circ G$, tal que $\beta = F \circ \alpha$.

Demostración. Como en el caso del Teorema 1.19, mostraremos la existencia en primer lugar. Denotamos con

$$\begin{aligned} T(s) &= (T_1(s), T_2(s), T_3(s)), \\ N(s) &= (N_1(s), N_2(s), N_3(s)), \\ B(s) &= (B_1(s), B_2(s), B_3(s)), \end{aligned}$$

las componentes en \mathbb{R}^3 de los campos de vectores tangente, normal y binormal definidos en el intervalo $I \in \mathbb{R}$. Fijamos $s_0 \in I$ y una base ortonormal $\{T^0, N^0, B^0\}$ positivamente orientada en \mathbb{R}^3 (esto es, $T^0 \wedge N^0 = B^0$) de la forma

$$T^0 = (T_1^0, T_2^0, T_3^0), \quad N^0 = (N_1^0, N_2^0, N_3^0), \quad B^0 = (B_1^0, B_2^0, B_3^0).$$

Por el Teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales [9], existe una única aplicación lineal $f : I \rightarrow \mathbb{R}^9$,

$$f(s) = (T_1(s), T_2(s), T_3(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s), B_1(s), B_2(s), B_3(s)),$$

verificando las ecuaciones de Frenet-Serret en el Teorema 1.15. Esto es, dicha aplicación es solución del problema de Cauchy determinado por el sistema de EDOs

$$\begin{cases} T'_\ell(s) = & \kappa(s)N_\ell(s), \\ N'_\ell(s) = & -\kappa(s)T_\ell(s) & +\tau(s)B_\ell(s), \\ B'_\ell(s) = & -\tau(s)N_\ell(s), \end{cases} \quad \ell = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

con condiciones iniciales $f(s_0) = (T^0, N^0, B^0)$. Por la linealidad del sistema podemos asumir que la solución $f(s)$ está definida en todo el dominio $I \subset \mathbb{R}$.

Tenemos que ver entonces que $\{T(s), N(s), B(s)\}$ es una base ortonormal \mathbb{R}^3 para todo $s \in I$. En efecto, considerando los productos escalares de los campos de vectores determinados por las soluciones, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\langle T(s), N(s) \rangle &= \kappa(s)\langle N(s), N(s) \rangle - \kappa(s)\langle T(s), T(s) \rangle + \tau(s)\langle T(s), B(s) \rangle, \\ \frac{d}{ds}\langle T(s), B(s) \rangle &= \kappa(s)\langle N(s), B(s) \rangle - \tau(s)\langle T(s), N(s) \rangle, \\ \frac{d}{ds}\langle N(s), B(s) \rangle &= -\kappa(s)\langle T(s), B(s) \rangle + \tau(s)\langle B(s), B(s) \rangle - \tau(s)\langle N(s), N(s) \rangle, \\ \frac{d}{ds}\langle T(s), T(s) \rangle &= 2\kappa(s)\langle T(s), N(s) \rangle, \\ \frac{d}{ds}\langle N(s), N(s) \rangle &= -2\kappa(s)\langle T(s), N(s) \rangle + 2\tau(s)\langle N(s), B(s) \rangle, \\ \frac{d}{ds}\langle B(s), B(s) \rangle &= -2\tau(s)\langle N(s), B(s) \rangle,\end{aligned}$$

lo que determina un sistema de ecuaciones lineal homogéneo de primer orden donde las funciones incógnita son ahora los productos escalares de los vectores $T(s)$, $N(s)$, y $B(s)$. Es fácil ver que

$$\begin{cases} \langle T(s), N(s) \rangle = 0, & \langle T(s), B(s) \rangle = 0, & \langle N(s), B(s) \rangle = 0, \\ \langle T(s), T(s) \rangle = 1, & \langle N(s), N(s) \rangle = 1, & \langle B(s), B(s) \rangle = 1 \end{cases}$$

es solución del sistema previo con condiciones iniciales dadas por el vector $(0, 0, 0, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^6$ en el punto $s_0 \in I$. Nuevamente, por unicidad de solución, dichas constantes constituyen la única solución correspondiente a las condiciones iniciales determinadas por $\{T^0, N^0, B^0\}$, con lo que se concluye que la solución $\{T(s), N(s), B(s)\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 para todo $s \in I$.

Así, es posible definir la curva buscada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ como sigue:

$$\alpha(s) := \int T(s)ds = \left(\int T_1(s)ds, \int T_2(s)ds, \int T_3(s)ds \right),$$

considerando las componentes del campo de vectores $T : s \in I \subset \mathbb{R} \mapsto T(s) \in \mathbb{R}^3$ determinado por la primera componente de la solución $\{T(s), N(s), B(s)\}$ de la Ecuación (1.1). Con esto, se tiene que $\alpha'(s) = T(s)$ lo que implica que la curva $\alpha(s)$ está parametrizada por el parámetro longitud de arco. Además, al ser $\{T(s), N(s), B(s)\}$ solución de (1.1), se

tiene que $\alpha''(s) = \kappa(s)N(s)$ y por tanto la función $\kappa(s)$ es la curvatura de la curva $\alpha(s)$ en cada punto $s \in I$, esto es, $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$. Utilizando de nuevo la Ecuación (1.1) se tiene

$$\alpha'''(s) = \kappa'(s)N(s) - \kappa^2(s)T(s) + \kappa(s)\tau(s)B(s).$$

Teniendo en cuenta la expresión de la torsión de una curva, obtenemos que la función $\tau(s)$ es precisamente la torsión de la curva $\alpha(s)$, esto es,

$$\begin{aligned} \tau_\alpha(s) &= -\frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\|\alpha''(s)\|^2} \\ &= -\frac{\langle \alpha'(s) \wedge \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle}{\kappa(s)^2} \\ &= -\frac{\langle T(s) \wedge \kappa(s)N(s), \kappa'(s)N(s) - \kappa(s)^2T + \kappa(s)\tau(s)B(s) \rangle}{\kappa(s)^2} \\ &= \tau(s)\langle T(s) \wedge N(s), B(s) \rangle = \tau(s). \end{aligned}$$

Y por lo tanto $\alpha(s)$ es finalmente la curva buscada por ser una curva con curvatura y torsión correspondientes a las funciones prefijadas $\kappa(s) > 0$ y $\tau(s)$.

Veamos ahora si se cumple la unicidad, para lo que procederemos de modo análogo al caso de curvas planas. Supongamos que existen $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ curvas tales que

$$\kappa_\alpha(s) = \kappa_\beta(s) = \kappa(s), \quad y \quad \tau_\alpha(s) = \tau_\beta(s) = \tau(s).$$

Fijado $s_0 \in I$ y considerando las referencias de Frenet-Serret de ambas curvas en dicho punto, existe una única transformación ortogonal positiva $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$G(T_\alpha(s_0)) = T_\beta(s_0), \quad G(N_\alpha(s_0)) = N_\beta(s_0), \quad G(B_\alpha(s_0)) = B_\beta(s_0).$$

Definimos el vector $\vec{b} := \beta(s_0) - G(\alpha(s_0)) \in \mathbb{R}^3$ y construimos un movimiento rígido $F := H_{\vec{b}} \circ G$. Considerando ahora la curva $\gamma(s) = (F \circ \alpha)(s)$, tenemos que ver que $\gamma(s) = \beta(s)$. En efecto, sus triedros coinciden en el punto inicial s_0 :

$$\begin{aligned} T_\gamma(s_0) &= \gamma'(s_0) = G(\alpha'(s_0)) = G(T_\alpha(s_0)) = T_\beta(s_0) \\ N_\gamma(s_0) &= \frac{\gamma''(s_0)}{\kappa_\gamma(s_0)} = \frac{G(\alpha''(s_0))}{\kappa_\alpha(s_0)} = G\left(\frac{\alpha''(s_0)}{\kappa_\alpha(s_0)}\right) = G(N_\alpha(s_0)) = N_\beta(s_0) \\ B_\gamma(s_0) &= T_\gamma(s_0) \wedge N_\gamma(s_0) = T_\beta(s_0) \wedge N_\beta(s_0) = B_\beta(s_0). \end{aligned}$$

Además, por ser α y γ curvas congruentes por un movimiento rígido positivo, se tiene que la curvatura y torsión de γ y β son iguales para todo $s \in I$:

$$\begin{aligned}\kappa_\gamma(s) &= \kappa_\alpha(s) = \kappa(s) = \kappa_\beta, \\ \tau_\gamma(s) &= \tau_\alpha(s) = \tau(s) = \tau_\beta(s).\end{aligned}$$

Para probar que los triedros de Frenet-Serret de $\gamma(s)$ y $\beta(s)$ son iguales en todo punto, consideramos la función

$$f(s) := \frac{1}{2} (\|T_\beta(s) - T_\gamma(s)\|^2 + \|N_\beta(s) - N_\gamma(s)\|^2 + \|B_\beta(s) - B_\gamma(s)\|^2),$$

que verifica $f(s_0) = 0$. Calculando su derivada, se tiene

$$\begin{aligned}f'(s) &= \langle T'_\beta(s) - T'_\gamma(s), T_\beta(s) - T_\gamma(s) \rangle + \langle N'_\beta(s) - N'_\gamma(s), N_\beta(s) - N_\gamma(s) \rangle \\ &\quad + \langle B'_\beta(s) - B'_\gamma(s), B_\beta(s) - B_\gamma(s) \rangle \\ &= \langle \kappa(s)N_\beta(s) - \kappa(s)N_\gamma(s), T_\beta(s) - T_\gamma(s) \rangle \\ &\quad + \langle -\kappa(s)T_\beta(s) + \tau(s)B_\beta(s) + \kappa(s)T_\gamma(s) - \tau(s)B_\gamma(s), N_\beta(s) - N_\gamma(s) \rangle \\ &\quad + \langle -\tau(s)N_\beta(s) + \tau(s)N_\gamma(s), B_\beta(s) - B_\gamma(s) \rangle = 0.\end{aligned}$$

Luego, la función $f(s)$ es constantemente nula y por tanto los triedros de Frenet-Serret de ambas curvas coinciden. En particular $T_\beta(s) = T_\gamma(s)$, por lo que $(\beta - \gamma)'(s) = 0$ y entonces $\beta - \gamma$ es constante. Nuevamente, como $(\beta - \gamma)(s_0) = 0$, se tiene que las curvas $\beta(s) = \gamma(s)$ para todo $s \in I$. \square

Una aplicación inmediata del Teorema 1.20 muestra que es posible caracterizar familias de curvas a partir de su curvatura y torsión. Por ejemplo:

- La circunferencia de radio R es la única curva (salvo congruencia) con torsión $\tau(s) = 0$ y curvatura constante $\kappa = \frac{1}{R} > 0$.
- Las hélices circulares rectas $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ son las únicas curvas (salvo congruencia) con curvatura y torsión constantes

$$\kappa(t) = \frac{|a|}{a^2 + b^2} \quad \text{y} \quad \tau(t) = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

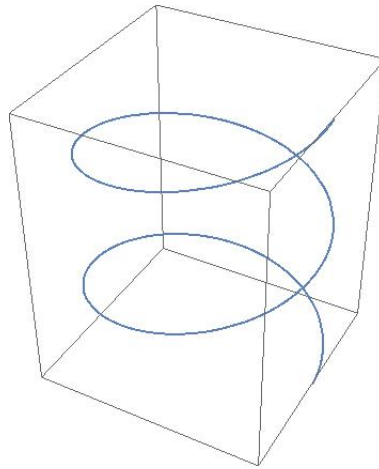


Figura 1.1: Hélice circular

- Una curva es plana si y solo si su torsión es nula.

Capítulo 2

Variaciones de curvas

El objetivo de este capítulo es introducir la noción de variación de una curva y obtener las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange. Para ello y, aunque ya se ha utilizado implícitamente en el capítulo anterior, comenzamos recordando el concepto de campo de vectores a lo largo de una curva.

Dada una curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, un *campo de vectores a lo largo de γ* es una aplicación diferenciable $X : t \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow X(t) \in \mathbb{R}^3$, donde entendemos el vector $X(t)$ como vector tangente a \mathbb{R}^3 en el punto $\gamma(t)$. El ejemplo básico de la definición anterior es el campo velocidad de una curva $\dot{\gamma} : t \in I \mapsto \dot{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^3$. Es importante señalar que $\dot{\gamma}$ no es necesariamente la restricción a la curva de un campo de vectores en \mathbb{R}^3 , pues la curva puede presentar autointersecciones.

Definición 2.1. Dada una curva $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, una *variación* de γ es una aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} \Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\omega, t) &\rightarrow \Gamma(\omega, t) \end{aligned}$$

verificando $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$.

Toda variación tiene dos tipos de curvas asociadas que se corresponden con

- Para cada $\omega_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, la curva $t \rightarrow \Gamma_{\omega_0}(t) = \Gamma(\omega_0, t)$ se llama *curva longitudinal*.
- Para cada $t_0 \in [a, b]$, la curva $\omega \rightarrow \Gamma_{t_0}(\omega) = \Gamma(\omega, t_0)$ se llama *curva transversal*.

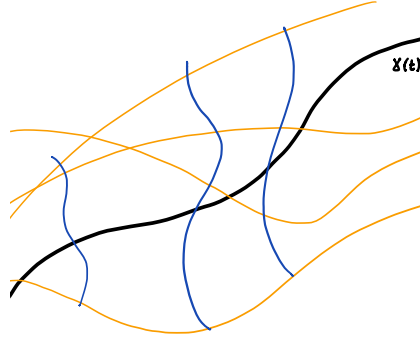


Figura 2.1: Curvas longitudinales (amarillo) y curvas transversales (azul) asociadas a $\gamma(t)$.

Dado que una variación es esencialmente una "curva de curvas", generalizamos el concepto de campo de vectores a lo largo de una curva para formalizar las velocidades de las curvas transversales y longitudinales.

Definición 2.2. Se define *campo de vectores a lo largo de una variación* como la aplicación

$$X : (\omega, t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \mapsto X(\omega, t) \in \mathbb{R}^3.$$

Llamaremos entonces *campo de vectores longitudinal* a la velocidad de las curvas longitudinales $V(\omega, t) = \frac{d}{dt}\Gamma_\omega(t) = \frac{\partial}{\partial t}\Gamma$. Análogamente, llamaremos *campo de vectores transversal* a la velocidad de las curvas transversales $W(\omega, t) = \frac{d}{d\omega}\Gamma_t(\omega) = \frac{\partial}{\partial \omega}\Gamma$.

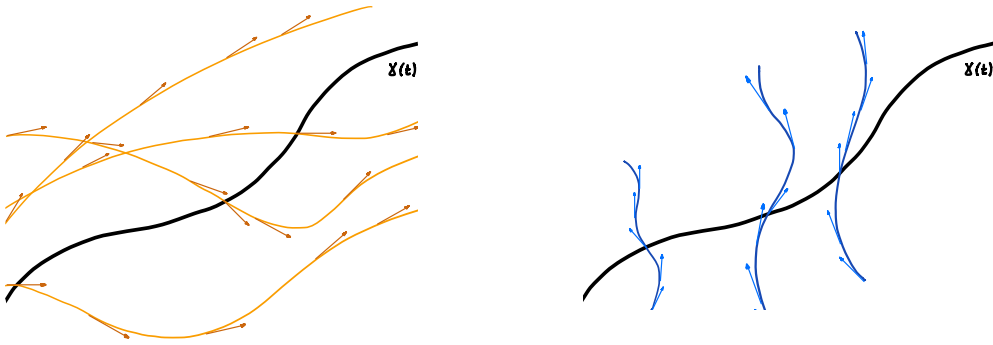


Figura 2.2: Campos de vectores longitudinal y transversal.

Si normalizamos el campo de vectores longitudinal, obtenemos la definición de *campo de vectores tangente de una variación*. Esto es,

$$T(\omega, t) = \frac{1}{\|V(\omega, t)\|} V(\omega, t) = \frac{1}{v(\omega, t)} V(\omega, t),$$

siendo $v(\omega, t) = \langle V(\omega, t), V(\omega, t) \rangle^{1/2}$.

Definición 2.3. Sea una variación $\Gamma(\omega, t)$ de una curva γ , se dice *variación propia* si todas las curvas longitudinales empiezan y terminan en el mismo punto, esto es, $\Gamma_\omega(a) = \gamma(a)$ y $\Gamma_\omega(b) = \gamma(b)$ para todo $\omega \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Llamamos *campo de la variación* al campo de vectores a lo largo de γ dado por $S(t) = W(0, t)$. Así pues, si la variación es propia, entonces el campo de vectores de la variación S se anula en los extremos del intervalo dominio de γ , es decir, $S(a) = S(b) = 0$.

Toda variación de una curva $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ da lugar a un campo de vectores S a lo largo de γ . El recíproco es cierto, en el sentido de que todo campo de vectores a lo largo de γ es el campo de una variación Γ y, además, el campo se anula en los extremos del dominio si, y solo si, es el campo de una variación propia. Es importante señalar, sin embargo, que la correspondencia anterior no es biyectiva.

Lema 2.4. Sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva en el espacio y $X : t \in [a, b] \subset \mathbb{R} \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^3$ un campo de vectores a lo largo de γ . Entonces existe una variación $\Gamma(\omega, t)$ de γ cuyo campo de la variación $S(t) = X(t)$. Además la variación es propia si y solo si $X(a) = X(b) = 0$.

Demostración. En cada punto de la curva $\gamma(t)$ consideramos la recta en \mathbb{R}^3 que pasa por $\gamma(t)$ con velocidad el campo de vectores $X(t)$. Con esto, podemos construir una superficie reglada parametrizada como sigue:

$$\Gamma : (\omega, t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \mapsto \Gamma(\omega, t) = \gamma(t) + \omega X(t),$$

que es diferenciable y verifica claramente que $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$, por lo que Γ determina una variación de γ . Además, las curvas transversales vienen determinadas por (para cada valor fijo de $t \in [a, b]$)

$$\omega \mapsto \Gamma_t(\omega) = \gamma(t) + \omega X(t)$$

por lo que el campo transversal de la variación está dado por $W(\omega, t) = \frac{d}{d\omega} \Gamma_t(\omega) = X(t)$. Por tanto, el campo de la variación $S(t) = W(\omega, t) = X(t)$ y la variación es propia si, y solo si, $X(a) = X(b) = 0$. \square

Es importante señalar que, como en el caso del campo velocidad de una curva $\dot{\gamma}$, la variación construida en la demostración anterior puede tener autointersecciones para valores de ε grandes. Sin embargo, la compacidad del dominio de la curva garantiza la existencia de variaciones donde las curvas transversales no se intersequen (lo que es un caso especial de la existencia de entornos tubulares) [3].

Nuestro objetivo será estudiar ciertos funcionales sobre curvas, esto es aplicaciones de la forma

$$\mathfrak{F} : \gamma \mapsto \mathfrak{F}(\gamma) \in \mathbb{R}$$

como pueden ser el funcional longitud, $\mathfrak{F}(\gamma) = \int_{\gamma} 1 = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$, el funcional curvatura escalar total, $\mathfrak{F}(\gamma) = \int_{\gamma} \kappa_{\gamma} = \int_a^b \kappa_{\gamma}(t) \|\gamma'(t)\| dt$, o el funcional determinado por la norma L^2 de la curvatura de la curva, $\mathfrak{F}(\gamma) = \int_{\gamma} \kappa_{\gamma}^2 = \int_a^b \kappa_{\gamma}(t)^2 \|\gamma'(t)\| dt$. En cada uno de los casos se estudiará el comportamiento de una curva dada con respecto a las curvas longitudinales de cualquier variación $\Gamma(\omega, t)$ con la intención de localizar las curvas donde el funcional sea mínimo, o al menos la función

$$\omega \in (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{F}(\Gamma_{\omega}) \in \mathbb{R}$$

presente un punto crítico, esto es, $\frac{d}{dt}|_{\omega=0} \mathfrak{F}(\Gamma_{\omega}) = 0$. A fin de poder determinar la primera variación del funcional \mathfrak{F} , utilizaremos una serie de relaciones entre los distintos campos de vectores asociados a la variación $\Gamma(\omega, t)$, que se resumen en el siguiente resultado probado por Langer y Singer en [4].

Proposición 2.5. [4] *Sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable y $\Gamma(\omega, t) : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una variación de γ . Entonces se tiene*

1. $[V, W] = 0$.
2. $\partial_{\omega} v(\omega, t) = v \langle \nabla W, T \rangle = \langle V, V \rangle^{1/2} \langle \nabla_T W, T \rangle$.
3. $[W, T] = -\langle \nabla_T W, T \rangle T = gT$.
4. $[[W, T], T] = -T(g)T$.
5. $\frac{\partial}{\partial \omega} \kappa(\omega, t)^2 = 2 \langle \nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T \rangle + 4g\kappa^2$.
6. $\frac{\partial}{\partial \omega} \kappa(\omega, t) = \langle \nabla_T \nabla_T W, N \rangle + 2\kappa g$.

Demostración. Trabajaremos en \mathbb{R}^3 con coordenadas cartesianas.

1. Veamos que $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V = 0$.

Sea $\Gamma(\omega, t) = (x(\omega, t), y(\omega, t), z(\omega, t))$ una variación de la curva γ en coordenadas cartesianas, de manera que, en base a la definición, los campos de vectores longitudinal y transversal asociados serán de la forma:

$$V(\omega, t) = \partial_t x^k(\omega, t) \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \text{y} \quad W = (\omega, t) = \partial_{\omega} x^k(\omega, t) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Derivamos entonces dichos campos:

$$\begin{aligned}
\nabla_V W &= \nabla_V \left(\partial_\omega x^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \nabla_V \left(\partial_\omega x^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k} + \partial_\omega x^k \nabla_V \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= \partial_t \partial_\omega x^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \partial_\omega x^k \nabla_{\partial_t x^k} \frac{\partial}{\partial x^k} = \partial_t \partial_\omega x^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \partial_\omega x^k \partial_t x^k \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= \partial_t \partial_\omega x^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \\
\nabla_W V &= \nabla_W \left(\partial_t x^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \nabla_W \left(\partial_t x^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k} + \partial_t x^k \nabla_W \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= \partial_\omega \partial_t x^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \partial_t x^k \nabla_{\partial_\omega x^k} \frac{\partial}{\partial x^k} = \partial_\omega \partial_t x^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \partial_t x^k \partial_\omega x^k \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= \partial_\omega \partial_t x^k \frac{\partial}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

Y obtenemos el resultado empleando el Lema de Schwarz y que la derivada covariante ∇ es simétrica:

$$\begin{aligned}
[V, W] &= \nabla_V W - \nabla_W V = \left\{ \partial_t \partial_\omega x^k \right\} \frac{\partial}{\partial x^k} - \left\{ \partial_\omega \partial_t x^k \right\} \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= \left\{ \partial_t \partial_\omega x^k - \partial_\omega \partial_t x^k \right\} \frac{\partial}{\partial x^k} = \left\{ \partial_t \partial_\omega x^k - \partial_t \partial_\omega x^k \right\} \frac{\partial}{\partial x^k} = 0.
\end{aligned}$$

2. Veamos que $\partial_\omega v(\omega, t) = v \langle \nabla W, T \rangle$.

$$\begin{aligned}
\partial_\omega v &= \partial_\omega \langle V, V \rangle^{1/2} = \frac{2 \langle \partial_\omega \partial_t \Gamma, \partial_t \Gamma \rangle}{2 \langle \partial_t \Gamma, \partial_t \Gamma \rangle^{1/2}} = \frac{\langle \partial_\omega \partial_t \Gamma, \partial_t \Gamma \rangle}{\langle V, V \rangle^{1/2}} = \frac{\langle \nabla_V W, V \rangle}{\langle V, V \rangle^{1/2}} \\
&= \frac{\nabla_{vT} W, vT}{\langle VT, vT \rangle^{1/2}} = \frac{v^2 \langle \nabla_T W, T \rangle}{\sqrt{v^2} \langle T, T \rangle^{1/2}} = v \langle \nabla_T W, T \rangle.
\end{aligned}$$

3. Veamos que $[W, T] = gT$, siendo $g := -\langle \nabla_T W, T \rangle$.

$$\begin{aligned}
[W, T] &= \left[W, \frac{1}{v} V \right] = W \left(\frac{1}{v} \right) V - \frac{1}{v} V(W) \\
&= W \left(\frac{1}{v} \right) V + \frac{1}{v} W(V) - \frac{1}{v} V(W) \\
&= W \left(\frac{1}{v} \right) V + \frac{1}{v} [W, V] \stackrel{(1)}{=} W \left(\frac{1}{v} \right) V \\
&= -\frac{1}{v^2} W(v) V = -\frac{1}{v} W(v) T.
\end{aligned}$$

Desarrollamos la primera parte de este último término:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v}W(v) &= \frac{1}{\langle V, V \rangle^{1/2}}W\left(\langle V, V \rangle^{1/2}\right) = \frac{1}{\langle V, V \rangle^{1/2}}\frac{2\langle \nabla_W V, V \rangle}{2\langle V, V \rangle^{1/2}} \\ &= \frac{\langle \nabla_V W, V \rangle}{\langle V, V \rangle} = \frac{\nabla_{vT}W, vT}{\langle VT, vT \rangle} = \frac{v^2\langle \nabla_T W, T \rangle}{v^2\langle T, T \rangle} = \langle \nabla_T W, T \rangle. \end{aligned}$$

Entonces,

$$[W, T] = -\frac{1}{v}W(v)T = -\langle \nabla_T W, T \rangle T = gT.$$

4. Por el apartado anterior y dado que $[T, T] = 0$, obtenemos el resultado:

$$[[W, T], T] = [gT, T] = g[T, T] - T(g)T = -T(g)T.$$

5. Previo a la demostración, se define tensor de curvatura como

$$\mathfrak{R}(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z.$$

En \mathbb{R}^n , el tensor de curvatura se anula $\mathfrak{R}(X, Y)Z = 0$, por lo que en este caso:

$$\begin{aligned} \nabla_W \nabla_T T &= \nabla_T \nabla_W T + \nabla_{[W, T]}T = \nabla_T \nabla_W T + \nabla_{gT}T \\ &= \nabla_T \nabla_W T + g\nabla_T T. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta esto y que $\nabla_W T - \nabla_T W = [W, T] = gT$ (*), derivamos la función curvatura y sustituimos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} \kappa^2 &= \frac{\partial}{\partial \omega} \langle \nabla_T T, \nabla_T T \rangle = \nabla_W \langle \nabla_T, \nabla_T \rangle = 2\langle \nabla_W \nabla_T T, \nabla_T T \rangle \\ &= 2\langle \nabla_T \nabla_W T, \nabla_T T \rangle + 2g\langle \nabla_T T, \nabla_T T \rangle \\ &\stackrel{(*)}{=} 2\langle \nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T \rangle + 2\langle \nabla_T gT, \nabla_T T \rangle + 2g\langle \nabla_T T, \nabla_T T \rangle \\ &= 2\langle \nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T \rangle + 2T(g)\langle T, \nabla_T T \rangle + 2g\langle \nabla_T T, \nabla_T T \rangle \\ &\quad + 2g\langle \nabla_T T, \nabla_T T \rangle \\ &= 2\langle \nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T \rangle + 4g\kappa^2. \end{aligned}$$

6. Veamos ahora, empleando el punto anterior, que $\frac{\partial}{\partial \omega} \kappa(\omega, t) = \langle \nabla_T \nabla_T W, N \rangle + 2g\kappa$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} \kappa &= \frac{\partial}{\partial \omega} \langle \nabla_T T, \nabla_T T \rangle^{1/2} = \frac{\nabla_W \langle \nabla_T T, \nabla_T T \rangle}{2\langle \nabla_T T, \nabla_T T \rangle^{1/2}} = \frac{\partial \omega \kappa^2}{2\kappa} \\ &= \frac{2\langle \nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T \rangle + 4g\kappa^2}{2\kappa} = \frac{1}{\kappa} \langle \nabla_T \nabla_T W, \nabla_T T \rangle + 2g\kappa \\ &= \langle \nabla_T \nabla_T W, \frac{1}{\kappa} \nabla_T T \rangle + 2g\kappa = \langle \nabla_T \nabla_T W, N \rangle + 2g\kappa. \end{aligned}$$

□

2.1. Funcional Longitud

Sean $p, q \in \mathbb{R}^n$, definimos $\Omega_{p,q} = \{\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \gamma(a) = p, \gamma(b) = q, \dot{\gamma}(t) \neq 0\}$ como el conjunto de curvas (no rectas) regulares con punto inicial p y punto final q .

Definición 2.6. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva, se define la *longitud* de γ como

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Con el objetivo de encontrar las curvas regulares de menor longitud que unen los puntos p y q , tomamos una curva $\gamma \in \Omega_{p,q}$ y construimos una variación

$$\begin{aligned} \Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\omega, t) &\longmapsto \Gamma(\omega, t) \end{aligned}$$

de forma que $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$ y $\Gamma(\omega, a) = p$, $\Gamma(\omega, b) = q$. Ahora bien, para encontrar dichas curvas, compararemos la longitud de γ con la de las curvas longitudinales de la variación, $\Gamma_\omega : t \in [a, b] \mapsto \Gamma_\omega(t) = \Gamma(\omega, t)$, por lo que consideramos la función real de variable real:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : (-\varepsilon, \varepsilon) \in \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \mathcal{L}(\Gamma_\omega) = \int_a^b \|\partial_t \Gamma(\omega, t)\| dt. \end{aligned}$$

Para calcular la primera variación del funcional, utilizando los resultados de derivación bajo el signo integral [8], se tiene

$$\frac{d}{d\omega}|_{\omega=0} \mathcal{L}(\Gamma_\omega) = \frac{d}{d\omega}|_{\omega=0} \int_a^b \|\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\omega, t)\| dt = \int_a^b \frac{d}{d\omega}|_{\omega=0} \|\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\omega, t)\| dt. \quad (2.1)$$

Desarrollamos la derivada

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} \langle \partial_t \Gamma(\omega, t), \partial_t \Gamma(\omega, t) \rangle^{1/2} &= \frac{\langle \partial_\omega \partial_t \Gamma(\omega, t), \partial_t \Gamma(\omega, t) \rangle}{\langle \partial_t \Gamma(\omega, t), \partial_t \Gamma(\omega, t) \rangle^{1/2}} \\ &= \frac{\partial_t \langle \partial_\omega \Gamma(\omega, t), \partial_t \Gamma(\omega, t) \rangle - \langle \partial_\omega \Gamma(\omega, t), \partial_{tt} \Gamma(\omega, t) \rangle}{\langle \partial_t \Gamma(\omega, t), \partial_t \Gamma(\omega, t) \rangle^{1/2}} \\ &= \frac{\partial_t \langle \partial_\omega \Gamma(\omega, t), \partial_t \Gamma(\omega, t) \rangle - \langle \partial_\omega \Gamma(\omega, t), \partial_{tt} \Gamma(\omega, t) \rangle}{\langle \partial_t \Gamma(\omega, t), \partial_t \Gamma(\omega, t) \rangle^{1/2}} \\ &= \frac{\frac{d}{dt} \langle \partial_\omega \Gamma(\omega, t), \partial_t \Gamma(\omega, t) \rangle - \langle \partial_\omega \Gamma(\omega, t), \partial_{tt} \Gamma(\omega, t) \rangle}{\langle \partial_t \Gamma(\omega, t), \partial_t \Gamma(\omega, t) \rangle^{1/2}}. \end{aligned}$$

Como la longitud de una curva es independiente de la parametrización de la misma, suponemos que la curva γ está parametrizada por arco y, evaluando en $\omega = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0} \langle \partial_t \Gamma(\omega, t), \partial_t \Gamma(\omega, t) \rangle^{1/2} &= \frac{\frac{d}{dt} \langle \partial_\omega \Gamma(\omega, t), \partial_t \Gamma(\omega, t) \rangle - \langle \partial_\omega \Gamma(\omega, t), \partial_{tt} \Gamma(\omega, t) \rangle}{\langle \partial_t \Gamma(\omega, t), \partial_t \Gamma(\omega, t) \rangle^{1/2}}(0, t) \\ &= \frac{d}{dt} \langle \partial_\omega \Gamma(0, t), \gamma'(t) \rangle - \langle \partial_\omega \Gamma(0, t), \gamma''(t) \rangle. \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo en (2.1) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \Big|_{\omega=0} \mathcal{L}(\Gamma_\omega) &= \int_a^b \frac{d}{dt} \langle \partial_\omega \Gamma(0, t), \gamma'(t) \rangle dt - \int_a^b \langle \partial_\omega \Gamma(0, t), \gamma''(t) \rangle dt \\ &= \langle \partial_\omega \Gamma(0, b), \gamma'(b) \rangle - \langle \partial_\omega \Gamma(0, a), \gamma'(a) \rangle - \int_a^b \langle \partial_\omega \Gamma(0, t), \gamma''(t) \rangle dt \\ &= - \int_a^b \langle \partial_\omega \Gamma(0, t), \gamma''(t) \rangle dt \\ &= - \int_a^b \langle S(t), \gamma''(t) \rangle dt, \end{aligned}$$

por ser Γ una variación propia, donde $S(t)$ es el campo de dicha variación.

Así tenemos la siguiente conclusión.

Teorema 2.7. *La curva de menor longitud que conecta los puntos $p, q \in \mathbb{R}^3$ es el segmento de recta que los une.*

Demostración. Sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva uniendo $p = \gamma(a)$ y $q = \gamma(b)$. Si γ es la curva de menor longitud para todas las que unen p y q , entonces para cualquier variación propia $\Gamma(\omega, t)$ de γ se tiene que la función

$$\omega \in (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \mapsto \mathcal{L}(\Gamma_\omega) \in \mathbb{R}$$

tiene un punto crítico en $\omega = 0$ (ya que $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$). Por tanto $\frac{d}{d\omega} \Big|_{\omega=0} \mathcal{L}(\Gamma_\omega) = 0$ para cualquier variación propia de γ . Por el Lema 2.4 se tiene entonces que

$$\int_a^b \langle X(t), \gamma''(t) \rangle dt = 0$$

para todo campo de vectores $X(t)$ a lo largo de γ con $X(a) = X(b) = 0$.

Considerando ahora la función $\phi(t) = -(t-a)(t-b)$, se tiene que $\phi(t) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$ y se anula en los extremos $\phi(a) = \phi(b) = 0$, por lo que $X(t) := \phi(t)\gamma''(t)$ define un campo de vectores a lo largo de γ tal que $X(a) = X(b) = 0$. Considerando una variación $\Gamma(\omega, t)$ como en el Lema 2.4 se tiene que

$$0 = \int_a^b \langle X(t), \gamma''(t) \rangle dt = \int_a^b \langle \phi(t)\gamma''(t), \gamma''(t) \rangle dt = \int_a^b \phi(t) \|\gamma''(t)\|^2 dt.$$

Como el integrando $\phi(t)\|\gamma''(t)\|^2 \geq 0$, se tiene que $\phi(t)\|\gamma''(t)\|^2 = 0$ y, por ser la función $\phi(t) \neq 0$ en el intervalo abierto (a, b) , necesariamente $\gamma''(t) = 0$. En consecuencia la curva $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ verifica $x_k''(t) = 0$ para $k = 1, 2, 3$ y por tanto $x_k(t) = a_k + tv_k$, lo que muestra que $\gamma(t) = (a_1, a_2, a_3) + t(v_1, v_2, v_3)$ es el segmento de recta que une los puntos p y q . \square

2.2. Curvas planas cerradas y convexas

Hemos visto que los puntos críticos del funcional longitud se corresponden con segmentos de recta cuando se plantea el problema libre, esto es, sin restricciones o condicionantes en la familia de curvas con la que trabajamos. Sin embargo, cuando el funcional longitud se estudia sobre ciertos subconjuntos de $\Omega_{p,q}$, nos encontramos ante un problema de extremos condicionados que da lugar a curvas con comportamientos especiales. Este es el caso de las curvas convexas y cerradas en el plano, donde la longitud se relaciona con el problema isoparamétrico para el que los mínimos vienen dados por circunferencias. Antes de abordar el problema, introduciremos los conceptos y la notación necesarios.

Una curva parametrizada $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es *cerrada* si es periódica, es decir, si existe una constante real positiva λ tal que $\gamma(t + \lambda) = \gamma(t)$ para todo $t \in I$. Diremos que la curva es *simple* si no tiene puntos de autointersección, es decir, si $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ para cualesquiera $t_1, t_2 \in I$ (salvo el caso en que $t_1 = a$ y $t_2 = b$ y la curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es cerrada). Dicho de otra forma, γ es *simple* si admite una parametrización inyectiva. Finalmente se dice que una curva es *convexa* si la recta tangente en cada punto deja a la curva completamente a uno de los lados que determina dicha recta.

Toda curva cerrada y convexa tiene asociada una *anchura* en cierta dirección \vec{u} , definida por la distancia entre dos rectas paralelas tangentes a la curva y ortogonales a \vec{u} . Así mismo, tiene asociado un *diámetro*, que será la mayor de todas las anchuras.

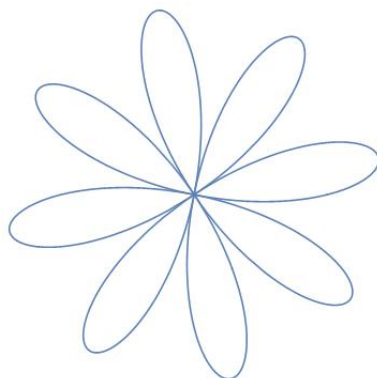


Figura 2.3: La rosa polar es una curva cerrada periódica de período $\frac{\pi}{2}$.

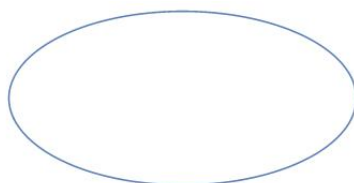


Figura 2.4: La elipse es una curva convexa.



Figura 2.5: Dos ejemplos de curvas no convexas.

Estudiaremos ahora qué ocurre con la longitud en curvas convexas y cerradas. Para ello, demostraremos dos teoremas que comparan la longitud con otras medidas geométricas como son la anchura y el área.

Teorema 2.8. (de Rosenthal y Szasz). *Toda curva parametrizada diferenciable, convexa y cerrada, de longitud L y diámetro D , verifica que*

$$L \leq \pi D$$

La igualdad se tiene si, y solo si, la curva tiene anchura constante D .

Demostración. Consideramos una curva parametrizada diferenciable, convexa y cerrada $\gamma : I \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ y supongamos que el origen de coordenadas es un punto interior de γ . Calcularemos su longitud.

Tomamos un punto $(x_1, x_2) \in \gamma(I)$ y trazamos la recta tangente a γ por ese punto. Construimos una perpendicular a dicha recta pasando por el origen y que forma un ángulo φ con el eje x . Nótese que la distancia determinada por esta última recta es una función periódica con periodo 2π . La denotaremos por $d(\varphi)$. Así, se tiene:

$$\begin{cases} d(\varphi) &= x_1 \cos \varphi + x_2 \operatorname{sen} \varphi \\ d'(\varphi) &= -x_1 \operatorname{sen} \varphi + x_2 \cos \varphi \end{cases}$$

Con la solución de este sistema obtenemos las coordenadas x_1 y x_2 y por tanto podemos parametrizar la curva como sigue:

$$\gamma(\varphi) = (x_1(\varphi), x_2(\varphi)), \quad \text{con} \quad \begin{cases} x_1(\varphi) = d(\varphi) \cos \varphi - d'(\varphi) \operatorname{sen} \varphi \\ x_2(\varphi) = d'(\varphi) \cos \varphi + d(\varphi) \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$

Calculamos entonces la derivada de γ y su norma:

$$\begin{aligned} \gamma'(\varphi) &= (d(\varphi) \operatorname{sen} \varphi - d''(\varphi) \operatorname{sen} \varphi, d''(\varphi) \cos \varphi + d(\varphi) \cos \varphi) \\ \|\gamma'(\varphi)\|^2 &= d(\varphi)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + d''(\varphi)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + 2d(\varphi)d''(\varphi) \operatorname{sen}^2 \varphi \\ &\quad + d''(\varphi)^2 \cos^2 \varphi + d(\varphi)^2 \cos^2 \varphi + 2d''(\varphi)d(\varphi) \cos^2 \varphi \\ &= (d(\varphi)^2 + d''(\varphi)^2 + 2d(\varphi)d''(\varphi)) (\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \\ &= (d(\varphi) + d''(\varphi))^2. \end{aligned}$$

Calculamos finalmente la longitud:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(\varphi)\| d\varphi = \int_0^{2\pi} (d(\varphi) + d''(\varphi)) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d(\varphi) d\varphi + \int_0^{2\pi} d''(\varphi) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d(\varphi) d\varphi + d'(\varphi) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} d(\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Nótese que $d'(2\pi) - d'(0) = 0$ por ser $d'(\varphi)$ una función periódica de periodo 2π .

Ahora bien, la anchura de la curva en la dirección determinada por φ viene dada por $d(\varphi) + d(\varphi + \pi)$. Teniendo en cuenta que el diámetro es la mayor de todas las anchuras, obtenemos el resultado:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} d(\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi} d(\varphi) d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} d(\varphi) d\varphi \\ &= \int_0^{\pi} [d(\varphi) + d(\varphi + \pi)] d\varphi \leq \int_0^{\pi} D d\varphi = \pi D. \end{aligned}$$

Es obvio que la igualdad se alcanza si la anchura es constantemente D . □

Teorema 2.9. (Desigualdad isoperimétrica). *Sea A el área de la región acotada por una curva γ , entonces*

$$L^2 \geq 4\pi A$$

alcanzándose la igualdad si, y solo si, γ es una circunferencia.

Demostración. Sea γ una curva $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ diferenciable, cerrada, simple y positivamente orientada; siendo s el parámetro de longitud de arco.

Tomamos dos rectas paralelas, R_1 y R_2 , y tangentes a γ en los puntos p_0 y p . Consideramos también α una circunferencia que no corta a γ y que es tangente a R_1 y R_2 en \bar{p}_0 y \bar{p} respectivamente. Denotamos por r el radio de dicha circunferencia y consideramos, sin pérdida de generalidad, su centro como el origen de coordenadas y el eje x ortogonal a las rectas.

Como la curva es cerrada, $\gamma(0) = \gamma(L) = p$. Definimos $\gamma(s_0) = p_0$ para un cierto $s_0 \in (0, L)$ y parametrizamos la circunferencia como sigue:

$$\alpha(s) = (z(s), w(s)),$$

donde $z(s) = x(s)$ y $w(s)$ viene dada por:

$$w(s) = \begin{cases} -\sqrt{r^2 - x(s)^2} & \text{si } 0 \leq s \leq s_0 \\ \sqrt{r^2 - x(s)^2} & \text{si } s_0 \leq s \leq L \end{cases}$$

En términos generales, el área de una región R acotada por una curva \mathcal{C} cerrada, simple y regular a trozos viene dada, en base al Teorema de Green, por la siguiente expresión:

$$A(R) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} x dy - y dx = - \int_{\mathcal{C}} y dx = \int_{\mathcal{C}} x dy$$

Por lo que el área de γ y α será como sigue:

$$\begin{aligned} A_{\gamma} &= \int_0^L x(s)y'(s) ds, \\ A_{\alpha} &= - \int_0^L w(s)z'(s) ds = - \int_0^L w(s)x'(s) ds. \end{aligned}$$

Dado que el área de una circunferencia es πr^2 , sumamos las expresiones:

$$\begin{aligned}
A_\gamma + \pi r^2 &= A_\gamma + A_\alpha = \int_0^L (x(s)y'(s) - w(s)z'(s)) \, ds \\
&\stackrel{(1)}{\leq} \int_0^L |x(s)y'(s) - w(s)z'(s)| \, ds \\
&= \int_0^L | \langle (x'(s), y'(s)), (-w(s), x(s)) \rangle | \, ds \\
&\stackrel{(2)}{\leq} \int_0^L \| (x'(s), y'(s)) \| \cdot \| (-w(s), x(s)) \| \, ds \\
&= \int_0^L \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} \sqrt{x(s)^2 + w(s)^2} \, ds \\
&= \int_0^L \|\gamma'(s)\| \cdot \sqrt{x(s)^2 + w(s)^2} \, ds \\
&= \int_0^L \sqrt{x(s)^2 + w(s)^2} \, ds = \int_0^L \sqrt{x(s)^2 + (\pm\sqrt{r^2 - x(s)^2})^2} \, ds \\
&= \int_0^L r \, ds = rL,
\end{aligned}$$

con lo que obtenemos que $A_\gamma + \pi r^2 \leq rL$. Utilizando la desigualdad entre las medias geométrica y aritmética de dos números positivos cualesquiera, tenemos que:

$$\sqrt{A\pi r^2} \stackrel{(3)}{\leq} \frac{A + \pi r^2}{2} \leq \frac{rL}{2},$$

y por tanto, elevando al cuadrado, conseguimos el resultado:

$$4A\pi \leq L^2.$$

Ahora veamos que la igualdad se alcanza si, y solo si, γ es una circunferencia. Para ello, supongamos que $L^2 = 4\pi A$ y veamos que se verifica la igualdad en (1), (2) y (3):

(3) Si $\sqrt{A\pi r^2} = \frac{A + \pi r^2}{2}$, entonces $A = \pi r^2$ y por tanto $L^2 = 4\pi^2 r^2$, es decir, $L = 2\pi r$.

Entonces r es constante independientemente de las rectas tomadas.

(2) La desigualdad de Cauchy-Schwarz es una igualdad si los vectores son proporcionales. Entonces existe c una constante real tal que $(-w(s), x(s)) = c(x'(s), y'(s))$. Tomando módulos se obtiene:

$$|c| = \sqrt{w(s)^2 + x(s)^2} = r.$$

Además,

$$\begin{aligned} x(s)y'(s) - w(s)x'(s) &= \langle (-w(s), x(s)), (x'(s), y'(s)) \rangle \\ &= c \cdot \|(x'(s), y'(s))\|^2 = c \cdot \|\gamma'\|^2 = c = \pm r. \end{aligned}$$

- (1) Si $x(s)y'(s) - w(s)x'(s) = |x(s)y'(s) - w(s)x'(s)|$, entonces $x(s)y'(s) - w(s)x'(s) > 0$ y por tanto $c = r$.

En particular, se tiene que $x(s) = ry'(s)$. Ahora bien, como r es constante e independiente de las rectas R_1 y R_2 , podemos intercambiar los ejes coordenados y así obtener $y(s) = rx'(s)$. Con esto,

$$x(s)^2 + y(s)^2 = r^2 (x'(s)^2 + y'(s)^2) = r^2.$$

Así, concluimos que $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ es una circunferencia.

□

Capítulo 3

Funcionales definidos por la curvatura de una curva

Sea \mathcal{P} una función sobre \mathbb{R} , considerando la acción de dicha aplicación sobre la curvatura de una curva, da lugar al funcional en el espacio $\Omega_{p,q}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{\mathcal{P}} : \Omega_{p,q} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\mapsto \mathfrak{F}_{\mathcal{P}}(\gamma) := \int_{\gamma} \mathcal{P}(\kappa)\end{aligned}$$

Ejemplo 3.1. A continuación señalamos dos casos especiales del funcional anterior, que han sido objeto de estudio durante los últimos siglos.

(i) Si $\mathcal{P}(\kappa) = \kappa$, obtendríamos:

$$\mathfrak{F}_{\kappa} : \gamma \in \Omega_{p,q} \mapsto \mathfrak{F}_{\kappa}(\gamma) = \int_{\gamma} \kappa = \int_a^b \kappa(s) ds,$$

que se corresponde con la *curvatura total* de la curva. En este capítulo obtenemos como caso particular las ecuaciones que determinan los puntos críticos de este funcional. En la sección 3.2.2 mostramos que toda curva cerrada simple es crítica, como consecuencia de que el valor de su índice de rotación es entero.

(ii) Si $\mathcal{P}(\kappa) = \kappa^2$, obtendríamos:

$$\mathfrak{F}_{\kappa^2} : \gamma \in \Omega_{p,q} \mapsto \mathfrak{F}_{\kappa^2}(\gamma) = \int_{\gamma} \kappa^2 = \int_a^b \kappa^2(s) ds,$$

que se corresponde con la norma L^2 de la curvatura. Las curvas críticas de dicho funcional, denominadas *curvas elásticas*, están caracterizadas por una EDO en función de su curvatura o, equivalentemente, de su ángulo de rotación. Como ya hemos visto, según el Teorema Fundamental de Curvas Planas, dichas curvas están determinadas a partir de este de forma única.

3.1. Primera variación del funcional $\mathfrak{F}_{\mathcal{P}}$

Es importante señalar en primer lugar que el funcional $\mathfrak{F}_{\mathcal{P}}$ está definido mediante una integral de curva. Recordemos que si f es una función definida a lo largo de una curva parametrizada arbitraria $\alpha : t \in [a, b] \subset \mathbb{R} \mapsto \alpha(t) \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\int_{\alpha} f = \int_a^b (f \circ \alpha)(t) \|\alpha'(t)\| dt,$$

o equivalentemente

$$\int_{\alpha} f = \int_0^{L(\alpha)} f(\alpha(s)) ds,$$

siendo $L(\alpha)$ la longitud de la curva α y “ s ” el parámetro longitud de arco. Desarrollamos entonces el funcional por la definición de integral de una función sobre una curva y derivaremos respecto a ω :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{\mathcal{P}}(\omega) &= \int_{\Gamma_{\omega}} \mathcal{P}(\kappa_{\omega}) = \int_0^{L(\Gamma_{\omega})} \mathcal{P}(\kappa_{\omega}(s)) ds = \int_0^1 \mathcal{P}(\kappa_{\omega}(t)) v(\omega, t) dt, \\ \frac{d}{d\omega} \mathfrak{F}_{\mathcal{P}}(\omega) \Big|_{\omega=0} &= \frac{d}{d\omega} \Big|_{\omega=0} \int_0^{L(\Gamma_{\omega})} \mathcal{P}(\kappa_{\omega}(s)) ds = \frac{d}{d\omega} \Big|_{\omega=0} \int_0^1 \mathcal{P}(\kappa_{\omega}(t)) v(\omega, t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{d\omega} \Big|_{\omega=0} (\mathcal{P}(\kappa_{\omega}(t)) v(\omega, t)) dt. \end{aligned}$$

Desarrollamos el último integrando y más tarde lo evaluamos en $\omega = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} [\mathcal{P}(\kappa_{\omega}(t)) v(\omega, t)] &= \mathcal{P}'(\kappa_{\omega}(t)) \partial_{\omega} \kappa v + \mathcal{P}(\kappa_{\omega}(t)) \partial_{\omega} v \\ &= \mathcal{P}'(\langle \nabla_T \nabla_T W, N \rangle + 2\kappa g) v - \mathcal{P} g v \\ &= (\mathcal{P}' \langle \nabla_T \nabla_T W, N \rangle + g(2\kappa \mathcal{P}' - \mathcal{P})) v. \end{aligned}$$

Así, invirtiendo los pasos, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \mathfrak{F}_{\mathcal{P}}(\omega) &= \int_0^1 \{ \mathcal{P}' \langle \nabla_T \nabla_T W, N \rangle + g(2\kappa \mathcal{P}' - \mathcal{P}) \} v dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{d}{d\omega} \mathcal{P}(\kappa_{\omega}) v \right) dt = \frac{d}{d\omega} \int_0^1 \mathcal{P}(\kappa_{\omega}) v dt \\ &= \frac{d}{d\omega} \int_0^{L(\Gamma_{\omega})} \mathcal{P}(\kappa) ds. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \mathfrak{F}_{\mathcal{P}}(\omega) |_{\omega=0} &= \int_0^{L(\Gamma_\omega)} \{ \mathcal{P}'(\kappa) \langle \nabla_T \nabla_T W, N \rangle + (\mathcal{P} - 2\kappa \mathcal{P}') \langle \nabla_T W, T \rangle \} ds \\ &= \int_0^{L(\Gamma_\omega)} \underbrace{\langle \nabla_T \nabla_T W, \mathcal{P}'(\kappa) N \rangle}_{(1)} ds + \int_0^{L(\Gamma_\omega)} \underbrace{(\mathcal{P} - 2\kappa \mathcal{P}') \langle \nabla_T W, T \rangle}_{(2)} ds. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Previo al desarrollo de ambos integrandos, se introducen los siguientes conceptos de notación:

Notación 3.2. A fin de simplificar las expresiones siguientes, introducimos la siguiente notación utilizada previamente en [4]

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \mathcal{P}' N, \\ \mathcal{J} &= \nabla_T \kappa + (2\kappa \mathcal{P}' - \mathcal{P}) T, \\ \mathcal{E} &= \nabla_T \mathcal{J} = \nabla_T \nabla_T \kappa + \nabla_T (2\kappa \mathcal{P}' - \mathcal{P}) T. \end{aligned}$$

(1) Derivando, obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_T \nabla_T W, \mathcal{P}'(\kappa) N \rangle &= \langle \nabla_T \nabla_T W, \mathcal{K} \rangle = T \langle \nabla_T W, \mathcal{K} \rangle - \langle \nabla_T W, \nabla_T \mathcal{K} \rangle \\ &= \frac{d}{ds} \langle \nabla_T W, \mathcal{K} \rangle - \langle \nabla_T W, \nabla_T \mathcal{K} \rangle \\ &= \frac{d}{ds} \langle \nabla_T W, \mathcal{K} \rangle - (T \langle W, \nabla_T \mathcal{K} \rangle - \langle W, \nabla_T \nabla_T \mathcal{K} \rangle). \end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_0^{L(\Gamma_\omega)} \langle \nabla_T \nabla_T W, \mathcal{P}'(\kappa) N \rangle ds &= \int_0^{L(\Gamma_\omega)} \frac{d}{ds} \langle \nabla_T W, \mathcal{K} \rangle ds \\ &\quad - \int_0^{L(\Gamma_\omega)} \frac{d}{ds} \langle W, \nabla_T \mathcal{K} \rangle ds + \int_0^{L(\Gamma_\omega)} \langle W, \nabla_T \nabla_T \mathcal{K} \rangle ds \\ &= (\langle \nabla_T W, \mathcal{K} \rangle - \langle W, \nabla_T \mathcal{K} \rangle) |_0^{L(\Gamma_\omega)} + \int_0^{L(\Gamma_\omega)} \langle W, \nabla_T \nabla_T \mathcal{K} \rangle ds. \end{aligned}$$

(2) Dado que $T \langle W, T \rangle = \langle \nabla_T W, T \rangle + \langle W, \nabla_T T \rangle$, se tiene

$$\langle \nabla_T W, T \rangle = T \langle W, T \rangle - \langle W, \nabla_T T \rangle = \frac{d}{ds} \langle W, T \rangle - \langle W, \nabla_T T \rangle.$$

Ahora bien, sabiendo que $(\mathcal{P} - 2\kappa \mathcal{P}') \langle \nabla_T W, T \rangle = \langle \nabla_T W, (\mathcal{P} - 2\kappa \mathcal{P}') T \rangle$, derivamos:

$$T \langle W, (\mathcal{P} - 2\kappa \mathcal{P}') T \rangle = \langle \nabla_T W, (\mathcal{P} - 2\kappa \mathcal{P}') T \rangle + \langle W, \nabla_T (\mathcal{P} - 2\kappa \mathcal{P}') T \rangle,$$

$$\langle \nabla_T W, (\mathcal{P} - 2\kappa\mathcal{P}')T \rangle = \frac{d}{ds} \langle W, (\mathcal{P} - 2\kappa\mathcal{P}')T \rangle - \langle W, \nabla_T(\mathcal{P} - 2\kappa\mathcal{P}')T \rangle.$$

Y por tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{L(\Gamma_\omega)} (\mathcal{P} - 2\kappa\mathcal{P}') \langle \nabla_T W, T \rangle ds &= \int_0^{L(\Gamma_\omega)} \frac{d}{ds} \langle W, (\mathcal{P} - 2\kappa\mathcal{P}')T \rangle ds \\ &\quad - \int_0^{L(\Gamma_\omega)} \langle W, \nabla_T(\mathcal{P} - 2\kappa\mathcal{P}')T \rangle ds \\ &= \langle W, (\mathcal{P} - 2\kappa\mathcal{P}')T \rangle \Big|_0^{L(\Gamma_\omega)} \\ &\quad - \int_0^{L(\Gamma_\omega)} \langle W, \nabla_T(\mathcal{P} - 2\kappa\mathcal{P}')T \rangle ds. \end{aligned}$$

Sustituimos finalmente los términos en la ecuación 3.1 y obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \mathfrak{F}_{\mathcal{P}}(\omega) &= (\langle \nabla_T W, \mathcal{K} \rangle - \langle W, \nabla_T \mathcal{K} \rangle - \langle W, (2\kappa\mathcal{P}' - \mathcal{P})T \rangle) \Big|_0^{L(\Gamma_\omega)} \\ &\quad + \int_0^{L(\Gamma_\omega)} \langle W, \nabla_T \nabla_T \mathcal{K} + \nabla_T(2\kappa\mathcal{P}' - \mathcal{P})T \rangle ds \\ &= (\langle \nabla_T W, \mathcal{K} \rangle - \langle W, \nabla_T \mathcal{K} + (2\kappa\mathcal{P}' - \mathcal{P})T \rangle) \Big|_0^{L(\Gamma_\omega)} \\ &\quad + \int_0^{L(\Gamma_\omega)} \langle W, \nabla_T \nabla_T \mathcal{K} + \nabla_T(2\kappa\mathcal{P}' - \mathcal{P})T \rangle ds \\ &= (\langle \nabla_T W, \mathcal{K} \rangle - \langle W, \mathcal{J} \rangle) \Big|_0^{L(\Gamma_\omega)} + \int_0^{L(\Gamma_\omega)} \langle W, \mathcal{E} \rangle ds. \end{aligned}$$

Ahora bien, evaluando en $\omega = 0$, se tiene $L(\Gamma_\omega) = L(\gamma) =: L$, y por lo tanto:

$$\mathfrak{F}'_{\mathcal{P}}(0) = (\langle \nabla_T W, \mathcal{K} \rangle - \langle W, \mathcal{J} \rangle) \Big|_0^L + \int_0^L \langle W, \mathcal{E} \rangle ds. \quad (3.2)$$

La expresión anterior proporciona la primera variación del funcional, por lo que los puntos críticos de dicho funcional en la situación libre se obtienen a partir de la ecuación $\mathfrak{F}'_{\mathcal{P}}(0) = 0$. A continuación consideraremos la ecuación de curvas críticas sujetas a la condición de frontera habitualmente considerada en la bibliografía.

3.2. Condiciones de frontera

Definición 3.3. Sea $\gamma \in \mathcal{D} \subset \Omega_{p,q}$ una curvar regular definida sobre un abierto \mathcal{D} , se definen las *condiciones de frontera admisibles* como

$$\mathcal{B}(\omega, \gamma) \Big|_0^L = 0,$$

siendo $\mathcal{B}(\omega, \gamma) = \langle \nabla_T W, \mathcal{K} \rangle - \langle W, \mathcal{J} \rangle$.

Procediendo como habíamos hecho anteriormente para el funcional longitud y en base a la ecuación (3.2), se tiene que γ es $\mathfrak{F}_{\mathcal{P}}$ -crítica si $\int_0^L \langle W, \mathcal{E} \rangle ds = 0$ para cualquier variación de γ , o equivalentemente, para cualquier campo de vectores X a lo largo de γ . Así, la anulación de la integral, es decir, la condición de ser curva crítica, se obtiene si $\mathcal{E} = 0$.

Desarrollamos entonces $\mathcal{E}(\gamma)$ para así llegar a las condiciones

$$\mathcal{E}(\gamma) = \nabla_T \nabla_T \mathcal{P}' N + \nabla_T (2\kappa \mathcal{P}' - \mathcal{P}) T.$$

Notación 3.4. Se denota $\frac{d}{ds} \kappa$ como κ_s , y en consecuencia $\frac{d^2}{ds^2} \kappa$ como κ_{ss} . Análogamente, $\frac{d}{ds} \tau = \tau_s$.

$$\begin{aligned} \nabla_T \nabla_T \mathcal{P}' N &= \nabla_T (\mathcal{P}''(\kappa) \kappa_s N - \mathcal{P}'(\kappa) \kappa T + \mathcal{P}''(\kappa) \tau B) \\ &= \mathcal{P}'''(\kappa) \kappa_s^2 N + \mathcal{P}''(\kappa) \kappa_{ss} N - \mathcal{P}''(\kappa) \kappa_s \kappa T + \mathcal{P}''(\kappa) \kappa_s \tau B \\ &\quad - \mathcal{P}''(\kappa) \kappa_s \kappa T - \mathcal{P}'(\kappa) \kappa_s T - \mathcal{P}'(\kappa) \kappa^2 N \\ &\quad + \mathcal{P}''(\kappa) \kappa_s \tau B + \mathcal{P}'(\kappa) \tau_s B - \mathcal{P}'(\kappa) \tau^2 N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_T (2\kappa \mathcal{P}' - \mathcal{P}) T &= 2\kappa_s \mathcal{P}'(\kappa) T + 2\kappa \mathcal{P}''(\kappa) \kappa_s T - \mathcal{P}'(\kappa) \kappa_s T \\ &\quad + (2\kappa \mathcal{P}' - \mathcal{P}) \kappa N. \end{aligned}$$

Agrupamos los términos de ambos sumandos en función de la base ortonormal $\{T, N, B\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\gamma) &= T \{ -\mathcal{P}''(\kappa) \kappa_s \kappa - \mathcal{P}''(\kappa) \kappa_s \kappa - \mathcal{P}'(\kappa) \kappa_s + 2\kappa_s \mathcal{P}'(\kappa) + 2\kappa \mathcal{P}''(\kappa) \kappa_s - \mathcal{P}'(\kappa) \kappa_s \} \\ &= N \{ \mathcal{P}'''(\kappa) \kappa_s^2 + \mathcal{P}''(\kappa) \kappa_{ss} - \mathcal{P}'(\kappa) \kappa^2 - \mathcal{P}'(\kappa) \tau^2 + (2\kappa \mathcal{P}' - \mathcal{P}) \kappa \} \\ &= B \{ \mathcal{P}''(\kappa) \kappa_s \tau + \mathcal{P}''(\kappa) \kappa_s \tau + \mathcal{P}'(\kappa) \tau_s \}. \end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene que $\mathcal{E}(\gamma) = 0$ si y solo si:

$$\begin{cases} 2 \frac{d}{ds} \mathcal{P}'(\kappa) \tau + \mathcal{P}'(\kappa) \tau_s = 0 \\ \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{P}'(\kappa) + \mathcal{P}'(\kappa) (\kappa^2 - \tau^2) - \kappa \mathcal{P}(\kappa) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Teorema 3.5. *Una curva γ es crítica para un funcional $\mathfrak{F}_{\mathcal{P}}$ restringido a variaciones verificando las condiciones de frontera dadas por $\mathcal{B} = 0$ si y solo si se cumple (3.3).*

3.2.1. Curvas críticas para el funcional determinado por $\mathcal{P}(\kappa) = \kappa^2$

Las curvas clásicas conocidas como *elásticas* son las soluciones de un problema variacional propuesto por Bernoulli a Euler en 1744, que consistía en minimizar la energía de flexión de una curva inextensible. Matemáticamente las soluciones a dicho problema se corresponden con los puntos críticos del funcional determinado por la norma L^2 de la curvatura escalar de la curva, esto es, $\mathcal{P}(\kappa) = \kappa^2$ [7].

Supongamos entonces $\mathcal{P}(\kappa) = \kappa^2$, por lo que $\mathcal{P}'(\kappa) = 2\kappa$. Sustituyendo en (3.3), se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2\kappa_s\tau + \kappa\tau_s = 0 \\ 2\kappa_{ss} + \kappa(\kappa^2 - 2\tau^2) = 0 \end{cases}$$

Curvas planas

Sabemos que una curva es plana si, y solo si, la torsión $\tau = 0$, por lo que a partir del sistema anterior obtenemos que

$$2\kappa_{ss} + \kappa^3 = 0.$$

Equivalentemente, escribiendo la expresión anterior en términos del ángulo de rotación

$$2\theta'''(s) + \theta'(s)^3 = 0.$$

Luego, por el Teorema 3.5, la curva γ es crítica para \mathfrak{F}_{κ^2} si y solo si se verifica la condición previa. La ecuación anterior determina el ángulo de rotación (o equivalentemente la curvatura) a partir de la cual se puede obtener la curva elástica por un proceso de integración.

Definición 3.6. Una curva regular parametrizada por arco se dice que es una *curva elástica con tensión* σ si verifica la ecuación diferencial

$$2\kappa''(s) + \kappa(s)^3 - \sigma\kappa(s) = 0 \tag{3.4}$$

para algún valor $\sigma \in \mathbb{R}$. Para el caso $\sigma = 0$, la curva se denomina *curva elástica libre*.

La *energía* de una curva elástica se obtiene multiplicando en (3.4) por 2κ e integrando. Esto es,

$$E := \kappa^2 + \frac{1}{4}\kappa^4 - \frac{\sigma}{2}\kappa^2.$$

Sea $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ una curva regular parametrizada por arco, sabemos que podemos escribir su tangente unitario de la forma

$$\gamma'(s) = \cos(\theta(s))\vec{e}_1 + \sin(\theta(s))\vec{e}_2 = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))).$$

Si reparametrizamos la curva $\gamma(s)$ de forma que el parámetro defina la distancia signada al eje OX, se tiene

$$\gamma(y) = (f(y), y),$$

y por tanto podemos escribir $\kappa = \kappa(y)$ como su curvatura. Veamos a partir del siguiente lema que podemos encontrar curvas cuya curvatura es $\kappa = \kappa(y)$.

Lema 3.7. *Sea $\gamma = (x, y)$ una curva plana cuyo vector normal es N . Si $\kappa = \kappa(y)$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\langle N, \vec{e}_2 \rangle + F(y) + c = 0,$$

donde $\frac{dF}{dy} = \kappa(y)$.

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que γ está parametrizada por arco. En base a las ecuaciones de Frenet-Serret para curvas planas, se tiene:

$$\frac{d}{ds} \langle N, \vec{e}_2 \rangle = \left\langle \frac{d}{ds} N, \vec{e}_2 \right\rangle = -\kappa \langle T, \vec{e}_2 \rangle = -\kappa(y) \dot{y}.$$

Integrando se tiene el resultado, pues $\langle N, \vec{e}_2 \rangle + F(y)$ es constante. \square

Consideramos en coordenadas cartesianas los vectores tangente $T(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$ y normal $N(s) = (-\dot{y}(s), \dot{x}(s))$, y entonces, empleando el resultado previo $\dot{x}(s) = \langle N, \vec{e}_2 \rangle = -F(y) - c$. Integrando respecto a y , se obtiene la primera componente de la curva:

$$x(s) = - \left(cs + \int F(y(s)) ds \right).$$

Para obtener la segunda componente será necesario el siguiente resultado.

Proposición 3.8. *Sea γ una curva plana cuya curvatura satisface la condición $\kappa(y) = 2\lambda y$, $\lambda > 0$. Entonces γ es una curva elástica con tensión $\sigma = -4\lambda c$ y energía $E = 4\lambda^2 (1 - c^2)$.*

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad que la curva γ está parametrizada por arco. Así, $\|\gamma'(s)\|^2 = \dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2 = 1$, por lo que despejando nos queda:

$$\dot{y}^2 = 1 - \dot{x}^2 = 1 - (F(y) + c)^2.$$

Consideramos $F(y) = \lambda y^2 + c$ y sustituyendo se tiene

$$\begin{aligned} \dot{y}^2 &= 1 - (\lambda y^2 + c)^2 = (1 + c + \lambda y^2)(1 - c - \lambda y^2), \\ \dot{y} &= \sqrt{(1 + c + \lambda y^2)(1 - c - \lambda y^2)}, \\ \ddot{y} &= \frac{2\lambda y \dot{y}(1 - c - \lambda y^2) - 2\lambda y \dot{y}(1 + c + \lambda y^2)}{2\dot{y}} = -2\lambda c y - 2\lambda^2 y^3. \end{aligned}$$

Veamos que γ cumple la definición de curva elástica, esto es, que su función curvatura verifica la ecuación (3.4). Obtenemos primero los términos necesarios:

$$\begin{aligned}\kappa &= 2\lambda s, \text{ con } \lambda > 0, \\ \kappa^3 &= 8\lambda^3 s^3, \\ \dot{\kappa} &= 2\lambda \dot{s}, \\ \ddot{\kappa} &= 2\lambda \ddot{s}\end{aligned}$$

y sustituimos:

$$\begin{aligned}4\lambda \ddot{y} + 8\lambda^3 y^3 - 2\sigma \lambda y &= 0, \\ 4\lambda(-2\lambda c y - 2\lambda^2 y^3) + 8\lambda^3 y^3 - 2\sigma \lambda y &= 0, \\ 2(-2\lambda c y) - \sigma y &= 0.\end{aligned}$$

Así, despejando, obtenemos que el valor de la tensión es $\sigma = -4\lambda c$. Obtenemos ahora la energía sustituyendo en la definición:

$$\begin{aligned}E &= \dot{\kappa}^2 + \frac{1}{4}\kappa^4 - \frac{\sigma}{2}\kappa^2 \\ &= (2\lambda \dot{s})^2 + 4\lambda^4 + 8c\lambda^3 y^2 \\ &= 4\lambda^2(1 + c + \lambda y^2)(1 - c - \lambda y^2) + 4\lambda^4 + 8c\lambda^3 y^2 \\ &= 4\lambda^2(1 - c^2).\end{aligned}$$

Con lo que finalmente se concluye la demostración. \square

El hecho de que $\dot{y}^2 = (1 + c + \lambda y^2)(1 - c - \lambda y^2) > 0$ implica que $-1 \leq \lambda y^2 + c \leq 1$, y como $\lambda y^2 \geq 0$, nos queda que

$$c \leq 1 - \lambda y^2 \leq 1.$$

Si $c = 1$, entonces necesariamente $y = 0$ y la curva elástica será

$$\gamma(s) = (-s, 0).$$

Sin embargo, si $c < 1$, la curva elástica será de la forma:

$$\gamma(s) = \left(- \left(cs + \lambda \int y(s)^2 ds \right), y(s) \right).$$

En este caso, como estamos ante una curva elástica libre, para que σ sea cero, necesariamente $c = 0$, y por tanto nos encontramos en la segunda posibilidad.



Figura 3.1: Curva elástica libre tomando $y(s) = \cos(s)$.

Curvas en el espacio

En caso de que γ tome valores en \mathbb{R}^3 , se tiene que tanto la curvatura como la torsión son distintas de cero. Resolvemos entonces el sistema

$$\begin{cases} 2\kappa_s\tau + \kappa\tau_s = 0, \\ 2\kappa_{ss} + \kappa(\kappa^2 - 2\tau^2) = 0. \end{cases}$$

A partir de la primera ecuación, mediante un proceso de integración para la resolución de ecuaciones de primer orden, obtenemos que

$$\tau\kappa^2 = 1,$$

o bien,

$$\tau = \frac{1}{\kappa^2}.$$

Sustituimos dicho valor de τ en la segunda ecuación y despejando se tiene

$$\kappa_{ss} = \frac{1}{\kappa^3} - \frac{1}{2}\kappa.$$

Luego, por el Teorema 3.5, la curva γ es crítica para \mathfrak{F}_{κ^2} si y solo si se verifican las dos condiciones

$$\tau\kappa^2 = 1, \quad \kappa_{ss} = \frac{1}{\kappa^3} - \frac{1}{2}\kappa.$$

3.2.2. Curvas críticas para el funcional determinado por $\mathcal{P}(\kappa) = \kappa$

Supongamos ahora $\mathcal{P}(\kappa) = \kappa$, y entonces $\mathcal{P}'(\kappa) = 1$. Nuevamente, sustituyendo en (3.3), se obtiene:

$$\begin{cases} \tau_s = 0, \\ \kappa^2 - \tau^2 - \kappa^2 = 0, \end{cases}$$

de donde deducimos que $\tau = 0$.

Curvas planas

Dado que la condición para que γ sea crítica para \mathfrak{F}_{κ} es que $\tau = 0$, todas las curvas planas son críticas.

En particular, veamos la razón por la cual las curvas simples y cerradas son críticas.

Definición 3.9. Sea $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular parametrizada por arco y cerrada. Se define el *índice de rotación* como

$$n = \frac{\theta(L) - \theta(0)}{2\pi} = \frac{\theta(L)}{2\pi}.$$

Teorema 3.10. *El índice de rotación de una curva simple cerrada es ± 1 .*

Demostración. Sea $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva simple y cerrada. Definimos $R(s_1, s_2)$ como el vector que une $\gamma(s_1)$ y $\gamma(s_2)$, para todo $s_1, s_2 \in [0, L]$. Nótese que $R(s_1, s_1) = T(s_1)$ y $R(0, L) = -T(0) = -T(L)$.

Construimos una región Δ limitada por $A = (0, 0)$, $B = (0, L)$ y $C = (L, L)$, donde la función R es continua. Construimos también una función continua $\Theta(s_1, s_2)$ que determina el ángulo entre $R(s_1, s_2)$ y el eje OX , de manera que $\Theta(s_1, s_1) = \theta(s_1)$.

Por la definición de índice de rotación,

$$2\pi n = \theta(L) - \theta(0) = \int_0^L \theta'(s) ds = \int_{\gamma} d\theta.$$

Como $\Theta(s_1, s_1) = \theta(s_1)$,

$$\int_{\gamma} d\theta = \int_{AC} d\Theta.$$

Además, sabemos que:

$$d\Theta = \frac{d\Theta}{ds_1} ds_1 + \frac{d\Theta}{ds_2} ds_2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial s_2 \partial s_1} = 0.$$

Así, por el Teorema de Green, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BA}} d\Theta &= \iint \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial s_2 \partial s_1} \right) ds_1 ds_2 = 0, \\ \int_{\overline{AC}} d\Theta &= \int_{\overline{AB}} d\Theta + \int_{\overline{BC}} d\Theta = \pm\pi \pm \pi = \pm 2\pi. \end{aligned}$$

Con lo que, finalmente, $n = \pm 1$. □

Corolario 3.11. *La curvatura total $\int_C \kappa$ es constante sobre todas las curvas cerradas simples.*

Con esto, se tiene que $\mathfrak{F}_{\kappa}(\gamma)$ es, por definición, constante. Entonces,

$$\frac{d\mathfrak{F}}{d\omega} \Big|_{\omega=0} = 0$$

y por lo tanto todas las curvas planas, cerradas y simples son críticas para \mathfrak{F}_{κ} .

Bibliografía

- [1] J. Arroyo, *Presión Calibrada Total: Estudio Variacional y Aplicaciones al Problema de Willmore-Chen*, Tesis Doctoral, Departamento de Matemáticas, Universidad del País Vasco (U.P.V.-E.H.U.), 2001.
- [2] M. A. Hernández-Cifre, J. A. Pastor, *Un curso de Geometría Diferencial*, Textos Universitarios **47**, CSIC, Madrid, 2010.
- [3] S. Montiel, A. Ros, *Curves and surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, **69**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [4] J. Langer, D. A. Singer, The total squared curvature of closed curves, *J. Diff. Geometry* **20** (1984), 1–22.
- [5] R. Levien, The elastica: a mathematical history, Technical Report No. UCB/EECS-2008-103, Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California at Berkeley
<http://www.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/2008/EECS-2008-103.html>
- [6] D. D. Rocher, Variational methods on elastic curves, Electronic Theses and Dissertations **46**, Georgia Southern University, 2013
<https://digitalcommons.georgiasouthern.edu/etd/46>
- [7] D. A. Singer, Lectures on Elastic Curves and Rods, Curvature and variational modeling in physics and biophysics, 3–32, AIP Conf. Proc., **1002**, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 2008.
- [8] T. M. Apostol, *Ánalysis Matemático*, Segunda edición, Editorial Reverté S. A., Barcelona, 2006.
- [9] S. Novo, R. Obaya, J. Rojo, *Ecuaciones y sistemas diferenciales*, McGraw-Hill Interamericana de España S.L., 1995.